Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de Maestría en Ciencias Matemáticas

ESPACIOS SIMÉTRICOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
Esteban Librado Hernández Escamilla

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Gregor Weingart
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
UNIDAD CUERNAVACA

Ciudad de México, Noviembre 2019

Universidad Nacional Autónoma de México

Instituto de Matemáticas
Posgrado en Ciencias Matemáticas

Espacios Simétricos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Esteban Librado Hernández Escamilla

director de tesis:

Dr. Gregor Weingart
Unidad Cuernavaca del
Instituto de Matemáticas

Ciudad de México

8 de noviembre de 2019

Espacios Simétricos

Esteban Librado Hernández Escamilla

8 de noviembre de 2019

Geometría

Eres el origen del Universo,
eres la primera sensación humana,
eres la primera imagen humana,
eres la primera idea humana,
eres el primer concepto humano,
eres la creación en sí y el humano lo ignora.
Abarcas todo a los sentidos: a nuestros sentidos,
y los hombres en nuestra inmensa ignorancia no lo sabemos.
Cuando niños jugamos libres, sueltos, alegres: somos iguales
y de adultos te burlas de nosotros; te vuelves inaccesible
a nuestro intelecto y sentir: toda una mujer madura.
Torturas a los hombres cuando intentamos describirte
en unas cuantas líneas o símbolos o pinceladas
o partituras o golpes de martillo.
Para el ciego brillas al tacto,
para el que ve eres majestuosamente incomprensible,
para el sordo retumbas vibrante,
para el que oye eres silencio agobiante;
pocos hombres te pueden tener, disfrutar de tus placeres
y seguir tus huellas borrosas y caprichosas a plena luz.
Qué nos espera a los que estamos en obscuridad?
Hay hombres que te prefieren elegantemente vestida para presumirte,
con vestidos que delineen bien tu figura: midiéndote palmo a palmo;
otros te prefieren en tu forma natural y celestial: desnuda;
sin forma alguna y engañosa, sin medidas perfectas: sólo tú,
coqueta y altiva en tu forma...... de ser.
Que extraña coincidencia, el número de letras que forman tu nombre
es el tiempo que le toma al humano nacer dentro de ti: a lo divino;
quien puede adivinar que más nos une......
Cuando muera quizá nos encontremos en extrañas dimensiones
o algo parecido: será nuestro secreto; si es que no cohabitamos ya
en dimensiones inconcebibles que ni los mismos dioses
pudieron imaginar: eres superior, sublime.

ELHE

Índice general

Agradecimientos

Entre más avanza uno en la vida, más larga se hace la lista (si somos honestos con nosotros mismos) de las personas a las que uno de una u otra forma les debe de agradecer por algo que hicieron en nuestro beneficio, con o sin saberlo nosotros y por lo tanto mientras se llega nuestro momento de morir simplemente hay que agradecer a ese alguien y a la vida...así sea.

Aquí agradezco a mi esposa Ana su paciencia, su apoyo, su compromiso en la realización de este trabajo; pues al realizarlo le quité muchas horas vida de convivencia, de atención a su persona, a nuestro hogar y a muchas otras actividades que realizamos en conjunto y por lo cual se le cargó el trabajo y la responsabilidad en estos años. Ana, el universo te debe y te deberá mucho por el simple hecho de estar y vivir entre nosotros. Como es muy difícil en unas líneas agradecerle espero me alcance mi vida para hacerlo día a día y deseo que ella sea feliz. Gracias Ana por todo y quiero hacer esto extensivo en toda su plenitud a mi madre Eleazar: extraordinario pilar que me sigue sosteniendo.

Agradezco a toda mi familia y a todos mis amigos, estén donde estén por todo lo vivido y aprehendido....

Agradezco al Lic. José David Pérez Castillo, al Lic. Juan Rojas Pérez, a David Gonzales y su familia por enseñarme y ayudarme en mi esfuerzo de que este país se convierta en una tierra de oportunidades y en un estado de derecho; en el cual sus habitantes y ciudadanos trabajen y tengan una mejor calidad de vida, y les reconozco su enorme trabajo que hacen día a día para que ello así sea.

Deseo agradecer también a todos y cada uno de mis profesores por transmitirme sus conocimientos matemáticos a través de una excelente vocación que tienen por la docencia: Dr. Felíx Recillas, Dr. Santiago López de Medrano, Dr. José Ríos, Dr. Mario Eudave, Dr. Carlos Prieto, Dr. Max Neumann, Dra. Laura Ortíz, Dr. Octavio Mendoza, Dr. Alejandro Garciadiego, Dr. Ernesto Rosales, Dr. Hugo Arizmendi, Dr. Juan Morales, Dr. Oscar Palmas, Dr. Emilio Lluis Puebla, M. en C. Mary Glazman, Dr. Emilio Lluis Riera, Dr. Alberto Barajas, Dr. José Seade. Dr. Carlos Signoret, Dr. Rafael Villaroel, Dr. Guadalupe Reyes, Dr. Carlos Hernández, Dr. Micho Durdevich. De igual manera agradezco a mis compañeros de clase; ahora colegas de profesión por la sana y agradable convivencia.

Mi sincero agradecimiento al Dr. Oscar Palmas, Dr. Pierre Bayard, Dr. Ángel Cano, Dr. Francisco Torres por aceptar ser mis sinodales para esta tesis, pues al hacerlo se vierón en la necesidad de hacer un espacio y un tiempo extra dentro de su apretada agenda de trabajo docente y de investigación para dedicarselo a un servidor. De igual manera agradezco todas sus observaciones y sugerencias que me hicierón para que este trabajo saliera sin ningún error de sintaxis y bien pulido en su contenido.

Agradezco a CONACYT por la beca economica que me otorgo durante mis estudios de maestría y gracias a la cual pude sobrevivir y dar algo de comer a mi familia. Espero se aumente el número de estas becas en un futuro cercano, pues hacen mucha falta a los estudiantes en su desarrollo prefesional y personal.

Agradezco especial y sinceramente al Dr. Gregor Weingart por su infinita paciencia y confianza como investigador serio que es, como profesional y como persona a la hora de elaborar esta tesis, pues estoy bien consciente de las presiones que se ejercen sobre los investigadores porque sus tesistas no acaben en tiempo y forma; pero quiero decirle que sus penurias no fueron, ni son y ni serán en vano ya que cada error que me corrigió y me sigue corrigiendo, cada nuevo conocimiento adquirido bajo su tutela, cada detalle que uno debe apreciar a la hora de hacer matemáticas lo transmito y lo comparto con mis alumnos y colegas, y ésta es una más de las formas que él con su trabajo, esmero y dedicación contribuye al desarrollo de la Matemática en México y de nuestra nación; al formar con la mejor calidad y excelencia (a través de sus tesistas, de cursos, conferencias y seminarios que imparte) a la élite científica e intelectual de éste nuestro México que se encuentra en constante progreso y le hacen muchísima falta profesionistas de esta envergadura en todas las áreas del conocimiento, y personas con esta extraordinaria calidad humana; con las cuales uno tiene la confianza de poder decir “esto o aquello no lo sé”. Por tanto, es extremadamente difícil en unas cuantas líneas poder agradecer a personas de esta índole, genio y talento; por ello me disculpo y le digo simplemente que estoy en deuda con él, con nuestra Universidad y el Instituto de Matemáticas por poner a nuestro alcance este ejemplo a seguir de investigador y ser humano. Gracias, muchas gracias Dr. Gregor Weingart.

Introducción

En este trabajo se trata el concepto de espacio simétrico desde el punto de vista axiomático hecho por Ottmar Loos en 1969 para variedades diferenciables, generalizando así el trabajo que Élie Cartan hizo en 1894 en su tesis doctoral para variedades riemannianas. Esta generalización tiene sus orígenes en la idea de Élie Cartan de clasificar todas las variedades riemannianas localmente simétricas, es decir, variedades riemannianas cuyo tensor de curvatura R es paralelo $\nabla R = 0$ con respecto a la conexión ∇ que existe en toda variedad riemanniana, la conexión de Levi–Civita.

El presente trabajo se divide en varios capítulos con sus respectivas secciones; a continuación esbozamos el contenido que los distintos capítulos tratan. En el Capítulo 1 se introduce la noción de conexión afín y la relación que existe entre conexiones afines libres de torsión y operadores Hessianos definidos sobre el anillo de funciones de la variedad. En particular se estudia el concepto de mapeo afín entre variedades afines, esto es, aquellos mapeos que mandan geodésicas en geodésicas. Se pueden consultar estos conceptos con más detalle en la bibliografía [B], [Wa], [D] y [KN] anexada aquí.

En el Capítulo 2 se da la definición axiomática de un espacio simétrico introducida por Ottmar Loos y vemos la construcción de la conexión de Loos asociada a un espacio simétrico dado. Estudiamos algunas de las propiedades de los espacios simétricos que se siguen directamente de esta axiomatización, en particular caracterizamos las geodésicas en un espacio simétrico como un homomorfismo entre espacios simétricos y concluimos que todo homomorfismo entre espacios simétricos es una aplicación afín con respecto a la conexión de Loos.

En el Capítulo 3 estudiamos tensores algebraicos de curvatura y precisamos el concepto de espacio simétrico marcado $(\mathbb{M}, p, F)$ para establecer una biyección entre el conjunto de clases de isomorfía de espacios simétricos marcados simplemente conexos y tensores algebraicos de curvatura R, que satisfacen una ecuación cuadrática $\Phi(R) = 0$. Así, producimos un esquema para obtener una clasificación de los espacios simétricos simplemente conexos:

$$\mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V) \xleftarrow{\text{isomorfismo}} \{ (\mathbb{M}, p, F) \}/\cong \xrightarrow{\text{epimorfismo}} \{ \mathbb{M} \}/\cong .$$

La parte más interesante en esta clasificación es la demostración de que la aplicación

$$\{ (\mathbb{M}, p, F) \}/\cong \longrightarrow \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V)$$

es sobreyectiva. Para demostrar eso se construye un álgebra de Lie $\mathbb{Z}_2$–graduada con un automorfismo involutivo, esta álgebra está asociada con los tensores algebraicos de curvatura que satisfacen una cierta ecuación cuadrática $\Phi(R) = 0$; entonces usamos el Teorema de Lie que nos garantiza que esta álgebra tiene asociado un grupo de Lie simplemente conexo y definimos el espacio simétrico $\mathbb{M}$ como el cociente de este grupo de Lie con un subgrupo propio. Con esto se obtiene una biyección entre el conjunto de órbitas bajo la acción de $\mathrm{GL}(V)$ sobre $\mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V)$ y $\{\mathbb{M}\}/\cong$.

Con la ayuda del tensor algebraico de curvatura se ve que a todo espacio simétrico se le puede asociar su espacio simétrico dual. Para variedades riemannnianas se tiene que el espacio simétrico dual tiene curvatura opuesta al espacio simétrico dado, en particular el espacio simétrico dual no es compacto, si el espacio simétrico lo es, y viceversa.

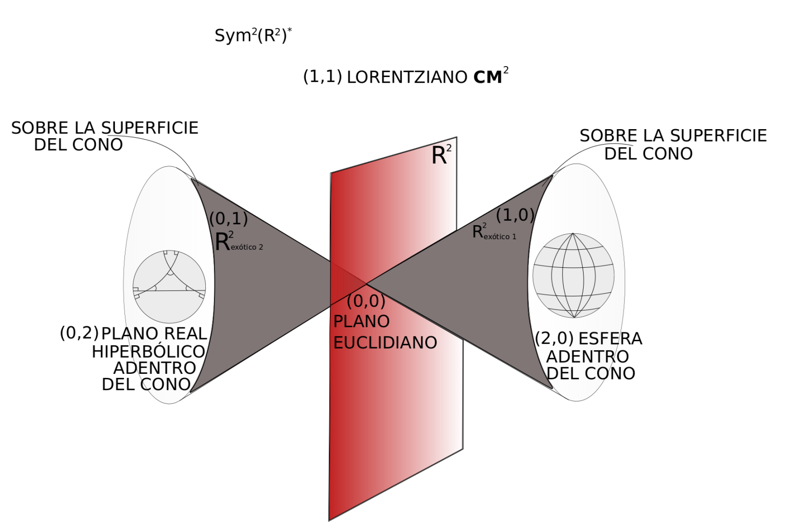
En la última parte del Capítulo 3 damos la clasificación completa de espacios simétricos simplemente conexos en dimensión 2 por medio de su tensor algebraico de curvatura. En esta dimensión un tensor algebraico de curvatura está completamente determinado por su tensor de Ricci asociado, el cual resulta ser una forma bilineal simétrica:

$$\mathrm{Ric} \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{R}^{2*} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,\, b,\, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

El grupo general lineal $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ de matrices invertibles de 2×2 actúa en $\mathrm{Sym}^2\mathbb{R}^{2*}$, con lo cual se obtienen 6 órbitas separadas por el cono de formas bilineales simétricas degeneradas:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,\, b,\, d \in \mathbb{R} \text{ tales que } ad - b^2 = 0 \right\} \subset \mathrm{Sym}^2\mathbb{R}^{2*}.$$

Tres órbitas de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ en $\mathrm{Sym}^2\mathbb{R}^{2*}$ corresponden a los tres espacios simétricos riemannianos simplemente conexos: el plano $\mathbb{R}^2$, el plano real hiperbólico $\mathbb{R}H^2$ y la esfera redonda S^2. Una órbita no degenerada corresponde a un espacio simétrico Lorentziano $\mathbf{CM}^2$ que es difeomorfo al hiperboloide de un manto y dos órbitas en el cono de espacios simétricos, corresponden a los dos planos exóticos $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot}\,1}$ y $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot}\,2}$ que ni siquiera son seudo–Riemannianos:



Se tiene que el cociente del espacio simétrico $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot}\,1}$ por el grupo $\mathbb{Z}$ es el cilindro y este cociente tiene estructura de espacio simétrico cuyo cubriente es el mismo $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot}\,1}$.

También presentamos los espacios simétricos complejos simplemente conexos en dimensión compleja uno, es decir, en dimensión real dos. Resulta que hay exactamente tres de estos espacios simétricos salvo isomorfismos, los cuales se pueden distinguir usando el tensor de Ricci, que sólo puede tener rango 0, 1 o 2 sobre los números complejos $\mathbb{C}$.

Notaciones y Convenios

$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{N}_0$ es el conjunto de los números naturales y cero $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{M}$ es una variedad suave.

$C^\infty(\mathbb{M})$ es el conjunto de todas las aplicaciones diferenciables reales de $\mathbb{M}$ a $\mathbb{R}$, el cual es un anillo conmutativo unitario sobre $\mathbb{R}$, y también es un álgebra sobre $\mathbb{R}$.

X es un campo vectorial que actúa como una derivación sobre el álgebra de las funciones diferenciables $C^\infty(\mathbb{M})$.

$\mathfrak{X}(\mathbb{M})$ es el conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre la variedad $\mathbb{M}$. Es un conjunto de derivaciones del álgebra $C^\infty(\mathbb{M})$, así, es un módulo sobre $C^\infty(\mathbb{M})$ y un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R} \subset C^\infty(\mathbb{M})$ bajo el corchete de Lie $[\,,\,]$.

$\mathfrak{X}(\gamma)$ es el conjunto de todos los campos vectoriales a lo largo de una curva γ. Es un módulo sobre $C^\infty(\mathbb{R})$ que lleva una conexión inducida $\frac{\nabla}{dt}$ por una conexión ∇ libre de torsión.

$T\mathbb{M}$ es el haz tangente de la variedad suave $\mathbb{M}$.

$T^*\mathbb{M}$ es el haz cotangente de la variedad suave $\mathbb{M}$.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ son los campos de los números reales y complejos respectivamente.

$\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$ son m–ádas con entradas en los reales y en los complejos respectivamente.

V^*, $\mathbb{M}^*$ son el espacio vectorial dual y el espacio simétrico dual respectivamente.

∇ es una conexión en el haz tangente de una variedad.

Hess es un operador diferencial de tipo Hessiano como se indica en la Definición 1.27.

δ denota la delta de Kronecker: Para una proposición Ξ el valor de δ_Ξ o es 1, o es 0.

Ansatz es una solución estimada a una (o varias) ecuación(es) inicial(es).

Capítulo 1

Geometría Diferencial Afín

1.1. Conexiones y Variedades Afines

En este capítulo veremos que existe una biyección entre las conexiones libres de torsión y Hessianos definidos sobre una variedad diferenciable $\mathbb{M}$.

Definición 1.1.
Sea $\mathbb{M}$ una variedad diferenciable. Una conexión afín o conexión lineal en el haz tangente $T\mathbb{M}$ de $\mathbb{M}$ es una aplicación $\mathbb{R}$–bilineal en sus dos argumentos

$$\nabla : \quad \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \qquad\qquad (X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

que satisface lo siguiente

Con1) Es $C^\infty(\mathbb{M})$–lineal en el primer argumento:

$$\nabla_{fX} Y \; = \; f \nabla_X Y \; .$$

Con2) Satisface la Regla de Leibniz en el segundo argumento:

$$\nabla_X(fY) \; = \; (Xf)Y \; + \; f\nabla_X Y \; .$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ y para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$. Si la conexión además satisface

$$\nabla_X Y \; - \; \nabla_Y X \; = \; [X, Y]$$

para todo X, Y, entonces se llama una conexión simétrica o una conexión libre de torsión.

Definición 1.2 (Torsión de una Conexión)**.**
Sea ∇ una conexión afín en una variedad diferenciable $\mathbb{M}$. Se define la torsión

$$T : \; \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \qquad\qquad (X, Y) \longmapsto T(X, Y)$$

para cada dos argumentos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ por:

$$T(X, Y) \; = \; \nabla_X Y \; - \; \nabla_Y X \; - \; [X, Y] \; .$$

Se puede demostrar que $T(X, Y)$ es un tensor de tipo $(1,2)$ llamado tensor torsión de la conexión ∇. La expresión local de una conexión ∇ en términos de un sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_m)$ definido en un abierto $U \subset \mathbb{M}$, es dada por:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \in C^\infty(U).$$

Dos campos vectoriales suaves X, Y definidos sobre U se expresan localmente como:

$$X = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \qquad Y = \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Entonces sobre U se tiene que

$$\nabla_X Y = \nabla_X \Big(\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Big) = \sum_{\lambda=1}^{m} \Big(X(b_\lambda) + \sum_{\mu,\nu=1}^{m} a_\mu b_\nu \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Big) \frac{\partial}{\partial x_\lambda}$$

en otras palabras, ∇ restringida a U esta determinada por las m^3 funciones diferenciables $\{ \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \}$ llamadas los símbolos de Christoffel de segunda especie para la conexión ∇.

Proposición 1.3.
Una conexión afín ∇ sobre una variedad diferenciable $\mathbb{M}$ es libre de torsión, si y sólo si en cualquier sistema de coordenadas $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, en otras palabras:

$$T(X,Y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \qquad \textit{para todos } \mu,\, \nu,\, \lambda\ .$$

De esto una conexión afín ∇ es simétrica, si y sólo si $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$. El siguiente teorema fundamental asegura la existencia de conexiones libres de torsión, la demostración esencialmente se reduce a pegar conexiones libres de torsión locales con una partición de la unidad:

Teorema 1.4 (Existencia de Conexiones)**.**
En toda variedad diferenciable $\mathbb{M}$ existe por lo menos una conexión ∇ libre de torsión.

En consecuencia tenemos que de una variedad diferenciable obtenemos una variedad afín:

Definición 1.5 (Variedades Afines)**.**
Sea $\mathbb{M}$ una variedad diferenciable, sea ∇ una conexión afín sobre $\mathbb{M}$, a la pareja $(\mathbb{M}, \nabla)$ se le llama variedad diferenciable afín o simplemente una variedad afín.

Definición 1.6 (Tensor de Curvatura)**.**
Sea $\mathbb{M}$ una variedad afín, se define el tensor R de tipo $(1,3)$ llamado tensor de curvatura de tres variables de ∇ sobre $\mathbb{M}$ por la aplicación

$$R: \quad \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \qquad (X, Y, Z) \longmapsto R_{X,Y}Z$$

dada por la asignación:

$$R_{X,Y}Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Proposición 1.7 (Propiedades de la Curvatura)**.**
El tensor de curvatura en tres variables satisface

i) $R_{X,Y}Z$ *es* $C^\infty(\mathbb{M})$*–lineal en las tres variables.*

ii) $R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z$ *anti–simétrico en* X, Y.

iii) Satisface la primera identidad de Bianchi:

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0 .$$

Definición 1.8 (Campos Vectoriales a lo largo de Curvas)**.**
Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ una curva diferenciable en una variedad diferenciable $\mathbb{M}$. Un campo vectorial X a lo largo de γ es una aplicación suave

$$X : \quad \mathbb{R} \longrightarrow T\mathbb{M} \qquad\qquad t \longmapsto X(t)$$

tal que $X_t \in T_{\gamma(t)}\mathbb{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ o equivalentemente que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} & T\mathbb{M} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{M} \end{tikzcd}$$

Los campos vectoriales a lo largo de γ forman un módulo $\mathfrak{X}(\gamma) := \Gamma(\gamma^* T\mathbb{M})$ sobre $C^\infty(\mathbb{R})$. Una conexión para campos vectoriales a lo largo de γ es una aplicación $\mathbb{R}$–lineal

$$\frac{\nabla}{dt} : \ \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma) \qquad\qquad X \longmapsto \frac{\nabla}{dt}X$$

que satisface para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, la siguiente versión de la Regla de Leibniz:

$$\frac{\nabla}{dt}(f X) = \frac{df}{dt}X + f\frac{\nabla}{dt}X .$$

Un ejemplo básico para elucidar el concepto de los campos vectoriales a lo largo de una curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ es el campo de velocidades $\dot\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$ definido por:

$$\dot\gamma(t) := \gamma_{*,t}\left(\frac{d}{dt}\right) = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_0 \gamma(\tau + t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{M}. \tag{1.1}$$

Proposición 1.9 (Conexión Inducida)**.**
Sea $\mathbb{M}$ *una variedad afín con su conexión* ∇*. Para cada curva* $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ *existe una única conexión para campos vectoriales a lo largo de* γ

$$\frac{\nabla}{dt} : \quad \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma) \qquad \textit{tal que} \qquad \left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t X = \nabla_{\dot\gamma(t)}X \qquad X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}).$$

Así la elección de una conexión afín nos da una buena definición de la derivada de campos de vectores a lo largo de curvas. Además nos proporciona una manera de derivar vectores a lo largo de curvas, lo cual nos permite hablar de la aceleración de una curva.

Definición 1.10 (Campos Vectoriales Paralelos).
Sea $\mathbb{M}$ una variedad afín, un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$ sobre $\mathbb{M}$ se dice constante o paralelo, si:

$$\nabla_Y X \;=\; 0 \qquad\qquad \forall\, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}) \;.$$

En general no existen tales campos de vectores, ni siquiera sobre pequeños subconjuntos de $\mathbb{M}$. Sin embargo, dada una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ siempre existen campos de vectores paralelos a lo largo de γ. En otras palabras, tenemos la siguiente:

Definición 1.11 (Campos Parelelos a lo largo de Curvas).
Sea $\mathbb{M}$ una variedad afín con su conexión ∇. Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ a lo largo de una curva diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ en $\mathbb{M}$ se dice que es paralelo o constante, cuando:

$$\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t X \;=\; \nabla_{\dot\gamma(t)} X \;=\; 0 \qquad \forall\; t \in \mathbb{R} \;.$$

Proposición 1.12 (Soluciones Fundamentales).
Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ una curva diferenciable en una variedad afín $\mathbb{M}$ y sea X^{init} un vector tangente a $\mathbb{M}$ en el punto $\gamma(t_0) \in \mathbb{M}$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces existe un único campo vectorial paralelo $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ a lo largo de γ tal que su valor en t_0 coincide con X^{init}:

$$X_{t_0} \;=\; X^{\text{init}} \;\in\; T_{\gamma(t_0)}\mathbb{M} \;.$$

Este campo vectorial paralelo es llamado el transporte paralelo de X^{init} a lo largo de γ.

La existencia y unicidad de campos vectoriales paralelos, nos permite construir el transporte paralelo, es decir:

Definición 1.13 (Transporte Paralelo).
Sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ una curva diferenciable en una variedad afín $\mathbb{M}$. Para cada dos tiempos $t_0,\, t_1 \in \mathbb{R}$ se construye el transporte paralelo a lo largo de γ desde $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t_1)$ por la regla

$$P \;=\; P_{t_0}^{t_1}(\gamma) : \;\; T_{\gamma(t_0)}\mathbb{M} \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}\mathbb{M} \qquad\qquad X_{t_0} \longmapsto X_{t_1}$$

para cada campo vectorial paralelo $X : \mathbb{R} \longrightarrow T\mathbb{M}$ a lo largo de γ.

Proposición 1.14 (Transporte Paralelo como Aplicación Lineal).
La aplicación transporte paralelo a lo largo de γ es un isomorfismo lineal.

Definición 1.15 (Geodésicas en Variedades Afines).
Una curva diferenciable $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{M}$ en una variedad afín $\mathbb{M}$ se llama una geodésica, si el campo vectorial $\dot\gamma$ es paralelo a lo largo de γ para toda $t \in I$, esto es, si para todo $t \in I$ es verdad que:

$$\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t \frac{d\gamma}{dt} \;=\; \left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t \dot\gamma \;=\; \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma \;=\; 0 \;.$$

Como la velocidad de una geodésica es siempre constante en norma, esto nos dice que ser geodésica dependerá de la parametrización de la curva. Sea ahora $(x_1, \ldots, x_m)$ un sistema de coordenadas definidas en un abierto $U \subset \mathbb{M}$ y sea $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{M}$ una curva diferenciable en $\mathbb{M}$ tal que $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$. Entonces, la expresión de γ en estas coordenadas locales es

$$\gamma(t) \;=\; (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)) \qquad\qquad t \in \gamma^{-1}(U) \subset I.$$

Una tal curva γ con componentes $(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))$ es una geodésica, si y sólo si

$$0 \;=\; \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \;=\; \sum_{\lambda=1}^{m}\Big(\frac{d^2\gamma_\lambda}{dt^2}(t) + \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))\,\frac{d\gamma_\mu}{dt}(t)\,\frac{d\gamma_\nu}{dt}(t)\Big)\,\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\bigg|_{\gamma(t)}$$

como $\{\frac{\partial}{\partial x_\lambda}|_{\gamma(t)}\}$ es una base local de $T_{\gamma(t)}\mathbb{M}$, entonces γ es una geodésica, si y sólo si:

$$\frac{d^2\gamma_\lambda}{dt^2}(t) + \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))\,\frac{d\gamma_\mu}{dt}(t)\,\frac{d\gamma_\nu}{dt}(t) \;=\; 0\,. \tag{1.2}$$

Así en una carta local una geodésica satisface este sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias regulares de segundo orden.

1.2. Aplicaciones del Lema de Hadamard

El Lema de Hadamard nos permitirá ver que existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\mathrm{Sym}^k\, T_p^*\mathbb{M}$ e I_p^k/I_p^{k+1}.

Definición 1.16 (Ideal Maximal Asociado a un Punto)**.**
Sea $\mathbb{M}$ una variedad suave y sea $p \in \mathbb{M}$. El ideal maximal del anillo $C^\infty(\mathbb{M})$ asociado al punto p es el conjunto de funciones diferenciables f sobre $\mathbb{M}$ que se anulan en p, es decir:

$$I_p \;:=\; \{\; f \in C^\infty(\mathbb{M}) \;|\; f(p) = 0 \;\} \;\subset\; C^\infty(\mathbb{M}).$$

Definición 1.17 (Potencias del Ideal Maximal)**.**
El ideal maximal $I_p \subset C^\infty(\mathbb{M})$ asociado a un punto p de una variedad suave $\mathbb{M}$ es el núcleo de la evaluación $\mathrm{ev}_p : C^\infty(\mathbb{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(p)$, en p. Este ideal genera una sucesión descendente de ideales en el álgebra $C^\infty(\mathbb{M})$

$$C^\infty(\mathbb{M}) \;\supsetneq\; I_p \;\supsetneq\; I_p^2 \;\supsetneq\; I_p^3 \;\supsetneq\; I_p^4 \;\supsetneq\; \cdots$$

donde la k–ésima potencia I_p^k del ideal maximal $I_p \subset C^\infty(\mathbb{M})$ es el ideal generado por todos los productos $h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_k$ de k funciones $h_1, \ldots, h_k \in I_p$, que se anulan en p, es decir:

$$I_p^k \;:=\; \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Big\{\; h_1 \cdot \ldots \cdot h_k \;\Big|\; h_1, \ldots, h_k \in I_p \;\Big\}.$$

Lema 1.18 (Fórmula de Taylor).
Para cada función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ *y cada punto* $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ *es verdad que:*

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_m) \;&=\; \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_r = 1}^{m} x_{\mu_1} \ldots x_{\mu_r} \frac{\partial^r f}{\partial x_{\mu_1} \ldots \partial x_{\mu_r}}(0, \ldots, 0) \\ &\quad + \sum_{\mu_0, \ldots, \mu_r = 1}^{m} x_{\mu_0} \ldots x_{\mu_r} \int_0^1 \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_{\mu_0} \ldots \partial x_{\mu_r}}(tx_1, \ldots, tx_m) \frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)!}\, dt. \end{aligned}$$

Teorema 1.19 (Lema de Hadamard).
Sea $\mathbb{M}$ *una variedad suave y sea* I_p *el ideal maximal en el anillo* $C^\infty(\mathbb{M})$ *asociado a un punto* $p \in \mathbb{M}$. *Una función* $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ *pertenece a la* $(k+1)$*–ésima potencia* $I_p^{k+1} \subset C^\infty(\mathbb{M})$ *del ideal* I_p, *si y sólo si todas sus derivadas parciales hasta orden* k *con respecto a algunas coordenadas locales* $(x_1, \ldots, x_m)$ *alrededor de* p *se anulan en* p, *es decir*

$$f \;\in\; I_p^{k+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial^{|A|}(f \circ x^{-1})}{\partial x_A}(x_1(p), \ldots, x_m(p)) \;=\; 0$$

para todo multi–índice $A = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}_0^m$ *de orden* $|A| := a_1 + \ldots + a_m \leq k$.

Demostración. En efecto la ida de la demostración se considera la dirección fácil. Sea $(x_1, \ldots, x_m)$ un sistema de coordenadas locales en una vecindad abierta $U \subset \mathbb{M}$ del punto $p \in \mathbb{M}$ y sea $f \in I_p^{k+1}$, lo cual implica por hipótesis que f es una suma finita de la forma

$$f \;=\; \sum_{\text{finita}} h_0 \cdot h_1 \cdot \ldots \cdot h_k$$

con $h_0, h_1, \ldots, h_k \in I_p$. En particular $\frac{\partial^{|A|}}{\partial x_A}$ conmuta con sumas finitas, es decir:

$$\frac{\partial^{|A|}(f \circ x^{-1})}{\partial x_A}(x_1(p), \ldots, x_m(p)) \;=\; \sum_{\text{finita}} \left.\frac{\partial^{|A|}}{\partial x_A}\right|_{x(p)} (h_0 \circ x^{-1}) \cdot \ldots \cdot (h_k \circ x^{-1}) \,. \tag{1.3}$$

Hay que demostrar que la suma (1.3) se anula bajo la asunción $|A| \leq k$, para ello es suficiente demostrar usando la regla de Leibniz que toda esta parte se anula por si misma:

$$\left.\frac{\partial^{|A|}}{\partial x_A}\right|_{x(p)} (h_0 \circ x^{-1}) \cdot \ldots \cdot (h_k \circ x^{-1}) \;\stackrel{?}{=}\; 0 \,. \tag{1.4}$$

En general la regla de Leibniz nos dice que las derivadas parciales de un producto es una suma sobre productos particulares de las derivadas parciales de los factores. Más preciso se demuestra por una inducción directa basada en la regla de Leibniz estándar que:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Big((h_0 \circ x^{-1}) \cdot \ldots \cdot (h_k \circ x^{-1}) \Big) \;=\; \sum_{a=0}^{k} (h_0 \circ x^{-1}) \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu}(h_a \circ x^{-1}) \cdot \ldots \cdot (h_k \circ x^{-1})$$

la regla general de Leibniz para derivadas parciales iteradas es:

$$\frac{\partial^{|A|}}{\partial x_A}\Big(\,(h_0 \circ x^{-1})\cdot \ldots \cdot (h_k \circ x^{-1})\,\Big) \;=\; \sum_{\substack{A_0,\,\ldots,\,A_k \,\in\, \mathbb{N}_0^n \\ A_0+\cdots+A_k \,=\, A}} C^A_{A_0,\,\ldots,\,A_k}\; \frac{\partial^{|A_0|}(h_0 \circ x^{-1})}{\partial x_{A_0}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial^{|A_k|}(h_k \circ x^{-1})}{\partial x_{A_k}}$$

con coeficientes combinatoriales $C^A_{A_0,\,A_1,\,\ldots,\,A_k} \in \mathbb{N}$; los cuales sólo son productos de coeficientes multinomiales. Fijándose sólo en una parte de esta suma que corresponda a multi–índices $A_0,\,\ldots,\,A_k \in \mathbb{N}_0^m$, se nota que la igualdad $A = A_0 + \cdots + A_k$ en $\mathbb{N}_0^m$ implica la desigualdad

$$|\,A_0\,| \;+\; |\,A_1\,| \;+\; \ldots \;+\; |\,A_k\,| \;\;=\;\; |\,A\,| \;\;\leq\;\; k$$

lo cual implica que por lo menos uno de los números $|\,A_0\,|,\,\ldots,\,|\,A_k\,| \in \mathbb{N}_0$ digamos $|\,A_a\,| = 0$ es igual a cero. Esto es, que $h_a \circ x^{-1}$ no tiene derivadas parciales en la parte considerada de la suma y al evaluar en $x(p)$ este factor resulta en cero gracias a la asunción $h_a \in I_p$. Lo mismo es verdad para todo otro sumando de la suma de la regla de Leibniz general, verificando así la ecuación (1.4). Es decir, que las derivadas parciales hasta orden k de una función $f \in I_p^{k+1}$ con respecto a un sistema de coordenadas locales arbitrario se anulan en p.

La idea principal en el regreso de la demostración es bastante técnica y se reduce a demostrar que para cualquier sistema de coordenadas locales $(\,x_1, \ldots, x_m\,)$ definido en una vecindad abierta $U \subset \mathbb{M}$ del punto $p \in \mathbb{M}$ se tiene que existe un isomorfismo de álgebras

$$C^\infty_{x(U)}(\,\mathbb{R}^m\,) \;\stackrel{\cong}{\longrightarrow}\; C^\infty_U(\,\mathbb{M}\,) \qquad\qquad h \;\longmapsto\; (\,h \,\circ\, x|_U\,)^{\mathrm{ext}}$$

entre el álgebra de funciones suaves en $\mathbb{R}^m$ con soporte compacto en $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ y el álgebra de funciones suaves en $\mathbb{M}$ con soporte compacto en U; ext denota la extensión por 0 afuera de U. En efecto, este isomorfismo de álgebras reduce la demostración del regreso a la fórmula de Taylor del Lema 1.18, que es el caso particular del punto $p = (0, \ldots, 0)$ en $\mathbb{M} = \mathbb{R}^m$. ■

Definición 1.20 (Espacio Cotangente)**.**
El espacio cotangente de una variedad suave $\mathbb{M}$ en un punto $p \in \mathbb{M}$ se define como:

$$T_p^*\mathbb{M} \;\;:=\;\; I_p\big/_{I_p^2}\;.$$

En particular la diferencial de una función $f \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ en el punto p está dada por

$$d_pf \;\;:=\;\; f \;-\; f(p)\,\mathbf{1} \;+\; I_p^2 \;\;\in\;\; T_p^*\mathbb{M} \;\;=\;\; I_p\big/_{I_p^2}$$

en donde $\mathbf{1} \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ denota la función constante igual a $\mathbf{1}(p) := 1$ para todo $p = \mathbb{M}$.

En la definición anterior se tiene que d_pf es simplemente otra notación para la clase en $T_p^*\mathbb{M} = I_p/I_p^2$ representada por $f - f(p)\,\mathbf{1} \in I_p$. Para probar el siguiente corolario usaremos la propiedad universal de la potencia simétrica, la cual se puede consultar en [G]:

Teorema 1.21 (Propiedad Universal de la Potencia Simétrica).
Sea $k \in \mathbb{N}_0$ y sea Ψ^{mult} una aplicación simétrica y k–multilineal entre espacios vectoriales:

$$\Psi^{\mathrm{mult}} : \underbrace{T_p^*\mathbb{M} \times \cdots \times T_p^*\mathbb{M}}_{k\text{–veces}} \longrightarrow W \qquad (\, d_pf_1, \ldots, d_pf_k \,) \longmapsto \Psi^{\mathrm{mult}}(\, d_pf_1, \ldots, d_pf_k \,)\ .$$

Entonces existe una única aplicación lineal $\Psi : \mathrm{Sym}^k T_p^*\mathbb{M} \longrightarrow W$, tal que

$$\Psi(\, d_pf_1 \cdot \ldots \cdot d_pf_k \,) \;=\; \Psi^{\mathrm{mult}}(\, d_pf_1,\, \ldots,\, d_pf_k \,)$$

para todas las funciones $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
T_p^*\mathbb{M} \times \cdots \times T_p^*\mathbb{M} \arrow[r, "m_{\mathrm{Sym}}"] \arrow[dr, "\Psi^{\mathrm{mult}}"'] & \mathrm{Sym}^k T_p^*\mathbb{M} \arrow[d, dotted, "\Psi"] \\
 & W
\end{tikzcd}$$

Aquí $m_{\mathrm{Sym}} : T_p^*\mathbb{M}\times\ldots\times T_p^*\mathbb{M} \longrightarrow \mathrm{Sym}^k T_p^*\mathbb{M}$ denota la multiplicación en el álgebra $\mathrm{Sym}\, T_p^*\mathbb{M}$.

Corolario 1.22 (Potencias Simétricas del Espacio Cotangente).
Sea $\mathbb{M}$ una variedad diferenciable. Para todo punto $p \in \mathbb{M}$, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y para todas las funciones $f_1, \ldots, f_k \in I_p$ la regla dada por

$$\Psi_p^k : \quad \mathrm{Sym}^k\, T_p^*\mathbb{M} \stackrel{\cong}{\longrightarrow} I_p^k / I_p^{k+1} \qquad\qquad d_pf_1 \cdot \ldots \cdot d_pf_k \longmapsto f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \,+\, I_p^{k+1}$$

define un isomorfismo natural de espacios vectoriales, que no depende de la elección de un sistema de coordenadas locales, entre la k–ésima potencia simétrica $\mathrm{Sym}^k T_p^*\mathbb{M}$ del espacio cotangente $T_p^*\mathbb{M} := I_p / I_p^2$ y el cociente I_p^k / I_p^{k+1}.

Demostración. Recordamos que $d_pf \;=\; f + I_p^2 \,\in\, I_p/I_p^2$ es simplemente otra notación para la clase representada por $f \in I_p$ en el espacio cotangente $T_p^*\mathbb{M} := I_p/I_p^2$, así la regla que define a Ψ_p^k se puede escribir para todas las funciones $f_1, \ldots, f_k \in I_p$ que se anulan en p:

$$(\, f_1 \,+\, I_p^2 \,) \cdot \ldots \cdot (\, f_k \,+\, I_p^2 \,) \longmapsto f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \,+\, I_p^{k+1}.$$

Para establecer la existencia de Ψ_p^k queremos usar la propiedad universal de la k–ésima potencia simétrica $\mathrm{Sym}^k T_p^*\mathbb{M}$, por esta razón tenemos que considerar primero la aplicación

$$\Psi_p^{\mathrm{mult}} : \; T_p^*\mathbb{M} \times \ldots \times T_p^*\mathbb{M} \longrightarrow I_p^k / I_p^{k+1} \qquad (\, f_1 + I_p^2, \ldots, f_k + I_p^2 \,) \longmapsto f_1 \cdot \ldots \cdot f_k + I_p^{k+1}$$

para $f_1, \ldots, f_k \in I_p$. Se nota que esta aplicación está bien definida. En efecto, sea

$$h \;=\; \sum_{\text{finita}} h_0 \cdot h_1 \;\in\; I_p^2 \qquad\qquad \text{con } h_0,\, h_1 \;\in\; I_p$$

entonces f_1 y $f_1 + h$ representan la misma clase $f_1 + I_p^2 \;=\; f_1 + h + I_p^2$ en $T_p^*\mathbb{M}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\Psi_p^{\mathrm{mult}}(\, f_1 + h + I_p^2, \ldots, f_k + I_p^2\,) \;&=\; (\, f_1 + h\,)\cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \;+\; I_p^{k+1} \\ &=\; f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \;+\; \sum_{\text{finita}} h_0 \cdot h_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \;+\; I_p^{k+1} \\ &=\; \Psi_p^{\mathrm{mult}}(\, f_1 + I_p^2, \ldots, f_k + I_p^2\,)\end{aligned}$$

porque $h_0 \cdot h_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \in I_p^{k+1}$. El razonamiento para los otros argumentos es similar, por ende no lo vamos a repetir. Para simplificar el argumento de que Ψ_p^{mult} es multilineal observamos que por cierto Ψ_p^{mult} es simétrica. Al fin de cuentas $C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ es un álgebra conmutativa, así

$$\begin{aligned}\Psi_p^{\mathrm{mult}}(\, f_{\sigma(1)} + I_p^2, \ldots, f_{\sigma(k)} + I_p^2\,) \;&=\; f_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot f_{\sigma(k)} \;+\; I_p^{k+1} \\ &=\; f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \;+\; I_p^{k+1} \;=\; \Psi_p^{\mathrm{mult}}(\, f_1 + I_p^2, \ldots, f_k + I_p^2\,)\end{aligned}$$

para toda permutación $\sigma \in S_k$ y todas las funciones $f_1, \ldots, f_k \in I_p$. Finalmente demostramos que Ψ^{mult} es lineal en su primer argumento, por simetría también lo es entonces en sus otros argumentos. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todas las funciones $h, \tilde{h} \in I_p$ verificamos la igualdad

$$\begin{aligned}&\Psi_p^{\mathrm{mult}}(\,\lambda\,(\,h + I_p^2\,) + (\,\tilde{h} + I_p^2),\, f_2 + I_p^2,\, \ldots,\, f_k + I_p^2\,) \\ &\quad=\; \Psi_p^{\mathrm{mult}}(\,(\,\lambda\, h + \tilde{h}\,) + I_p^2,\, f_2 + I_p^2,\, \ldots,\, f_k + I_p^2\,) \\ &\quad=\; (\,\lambda\, h + \tilde{h}\,) \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k \;+\; I_p^{k+1} \\ &\quad=\; \lambda\, \Psi_p^{\mathrm{mult}}(\,h + I_p^2,\, f_2 + I_p^2,\, \ldots,\, f_k + I_p^2\,) \;+\; \Psi_p^{\mathrm{mult}}(\,\tilde{h} + I_p^2,\, f_2 + I_p^2,\, \ldots,\, f_k + I_p^2\,)\end{aligned}$$

para $f_2, \ldots, f_k \in I_p$ cualesquiera, la tercera igualdad se vale porque la multiplicación en un álgebra como $C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ es bilineal por definición. Así por la propiedad universal de la potencia simétrica $\mathrm{Sym}^k T_p^*\mathbb{M}$ formulada en Teorema 1.21 existe una única aplicación lineal

$$\Psi_p^k : \quad \mathrm{Sym}^k T_p^*\mathbb{M} \;\longrightarrow\; I_p^k \big/ I_p^{k+1} \qquad\qquad d_p f_1 \cdot \ldots \cdot d_p f_k \;\longmapsto\; f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \;+\; I_p^{k+1}$$

que extiende la aplicación simétrica y k–multilineal Ψ^{mult}.

En la segunda parte de la demostración tenemos que verificar que Ψ_p^k es un isomorfismo de espacios vectoriales. Para empezar elegimos un sistema $(\,x_1, \ldots, x_m\,)$ de coordenadas locales de una vecindad $U \subset \mathbb{M}$ del punto $p \in \mathbb{M}$ que satisface las propiedades adicionales:

$$x_1(\,p\,) \;=\; \cdots \;=\; x_m(\,p\,) \;=\; 0 \qquad\qquad x_1, \ldots, x_m \;\in\; C^\infty(\,\mathbb{M}\,)\,.$$

Estas propiedades aseguran que las diferenciales de las coordenadas $x_1, \ldots, x_m \in I_p$ forman una base $d_p x_1, \ldots, d_p x_m$ del espacio vectorial $T_p^*\mathbb{M}$, así obtenemos un isomorfismo

$$\mathbb{R}[\,d_p x_1, \ldots, d_p x_m\,] \;\xrightarrow{\;\cong\;}\; \mathrm{Sym}\, T_p^*\mathbb{M}$$

de álgebras que identifica las incógnitas del álgebra $\mathbb{R}[\,d_px_1,\ldots,d_px_m\,]$ de polinomios con las diferenciales de las coordenadas $x_1,\,\ldots,\,x_m\,\in\,I_p$. En particular la k–ésima potencia simétrica $\mathrm{Sym}^kT_p^*\mathbb{M}$ del espacio cotangente está en biyección con el subespacio de polinomios

$$\Big\{\;\eta\,\in\,\mathbb{R}[\,d_px_1,\,\ldots,\,d_px_m\,]\;\Big|\;\eta\;\text{ homogéneo de grado }\;k\;\Big\}\;\stackrel{\cong}{\longrightarrow}\;\mathrm{Sym}^k\,T_p^*\mathbb{M} \tag{1.5}$$

homogéneos de grado $k\,\in\,\mathbb{N}_0$. Este isomorfismo nos permite calcular la dimensión de la k–ésima potencia simétrica usando la biyección entre los monomios homogéneos de grado k en las incógnitas $d_px_1,\,\ldots,\,d_px_m$ y multi–índices $A\,\in\,\mathbb{N}_0^m$ de orden $|\,A\,|\,=\,k$ dada por:

$$A\;=\;(\,a_1,\,\ldots,\,a_m\,)\;\in\;\mathbb{N}_0^m\qquad\stackrel{1:1}{\longleftrightarrow}\qquad d_px_1^{a_1}\cdot d_px_2^{a_2}\cdot\,\ldots\,\cdot d_px_m^{a_m}\;.$$

Un argumento de combinatoria contando multi–índices de orden k resulta en que:

$$\dim\,\mathrm{Sym}^kT_p^*\mathbb{M}\;=\;\sharp\Big\{\;A\,\in\,\mathbb{N}_0^m\;\Big|\;|\,A\,|\,=\,k\;\Big\}\;=\;\binom{k+m-1}{m-1}\;.$$

Según el Lema de Hadamard 1.19 una función $f\,\in\,I_p^k$ está en la potencia I_p^k del ideal maximal I_p, si y solamente si todas sus derivadas parciales de orden menor que k se anulan

$$\frac{\partial^{|\,A\,|}(\,f\circ x^{-1}\,)}{\partial x_A}(\,0,\,\ldots,\,0\,)\;=\;0\qquad\qquad(\,0,\,\ldots,\,0\,)\;\stackrel{!}{=}\;(\,x_1(p),\,\ldots,\,x_m(p)\,)$$

en $(\,0,\,\ldots,\,0\,)$ para todo multi–índice $A\,\in\,\mathbb{N}_0^m$ de orden $|\,A\,|\,<\,k$. En consecuencia la fórmula de Taylor 1.18 implica que cada función $f\,\in\,I_p^k$ representa una clase en I_p^k/I_p^{k+1}

$$\begin{aligned}f\;+\;I_p^{k+1}\;&=\;\frac{1}{k!}\sum_{\mu_1,\,\ldots,\,\mu_k\,=\,1}^{m}\frac{\partial^k(\,f\circ x^{-1}\,)}{\partial x_{\mu_1}\cdots\partial x_{\mu_k}}(\,0,\,\ldots,\,0\,)\,x_{\mu_1}\cdot\,\ldots\,\cdot x_{\mu_k}\;+\;I_p^{k+1}\\&\stackrel{!}{=}\;\Psi_p^k\left(\frac{1}{k!}\sum_{\mu_1,\,\ldots,\,\mu_k\,=\,1}^{m}\frac{\partial^k(\,f\circ x^{-1}\,)}{\partial x_{\mu_1}\cdots\partial x_{\mu_k}}(\,0,\,\ldots,\,0\,)\,d_px_{\mu_1}\cdot\,\ldots\,\cdot d_px_{\mu_k}\right)\end{aligned}$$

que está en la imagen de la aplicación lineal Ψ_p^k, esto es, que Ψ_p^k es sobreyectiva. Para demostrar que Ψ_p^k es un isomorfismo de espacios vectoriales es entonces suficiente verificar que es inyectiva, o bien es suficiente demostrar la veracidad de la siguiente desigualdad

$$\dim\,\mathrm{Sym}^kT_p^*\mathbb{M}\;=\;\sharp\Big\{\;A\,\in\,\mathbb{N}_0^m\;\Big|\;|\,A\,|\,=\,k\;\Big\}\;\leq\;\dim\,I_p^k/_{I_p^{k+1}} \tag{1.6}$$

porque así la relación bien conocida entre el rango y la dimensión del núcleo de Ψ_p^k implica

$$\dim\,\ker\,\Psi_p^k\;=\;\dim\,\mathrm{Sym}^kT_p^*\mathbb{M}\;-\;\dim\,\mathrm{im}\,\Psi_p^k\;\leq\;0\;.$$

ya que Ψ_p^k es sobreyectiva. Para establecer la desigualdad (1.6) consideramos las aplicaciones

$$\left.\frac{\partial^{|A|}}{\partial x_A}\right|_p:\;I_p^k/_{I_p^{k+1}}\;\longrightarrow\;\mathbb{R}\qquad\qquad f\;+\;I_p^{k+1}\;\longmapsto\;\frac{\partial^{|A|}(f\circ x^{-1})}{\partial x_A}(\,0,\ldots,0\,)$$

parametrizadas por multi–índices $A \in \mathbb{N}_0^m$ del orden $|A| = k$ que son funcionales lineales bien definidas gracias al Lema de Hadamard 1.19 para el espacio vectorial I_p^k / I_p^{k+1}. La independencia lineal de estos funcionales lineales se demostrará por interpolación, véase observación A.11. Para cumplir con este propósito consideramos las funciones suaves en $\mathbb{M}$:

$$f_B \;:=\; \frac{1}{b_1!}\, x_1^{b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b_m!}\, x_m^{b_m} \;\in\; C^\infty(\mathbb{M})$$

parametrizadas por multi–índices $B \in \mathbb{N}_0^m$ de orden $|B| = k$ y calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{|A|}}{\partial x_A}\bigg|_p (f_B + I_p^{k+1}) &= \frac{\partial^{|A|}(f_B \circ x^{-1})}{\partial x_A}(0, \ldots, 0) \\ &= \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}}\bigg|_{x_1 = 0} \frac{1}{b_1!} x_1^{b_1} \;\ldots\; \frac{\partial^{a_m}}{\partial x_m^{a_m}}\bigg|_{x_m = 0} \frac{1}{b_m!} x_m^{b_m} \;=\; \delta_{A = B} \end{aligned}$$

porque el producto que resulta después de tomar todas las derivadas parciales tiene un factor igual a cero, salvo si $a_1 \geq b_1$, $a_2 \geq b_2, \ldots, a_m \geq b_m$ que junto con nuestra asunción $|A| = k = |B|$ implica $A = B$. Entonces, para cualquier elección de las constantes $\{\lambda_B\}$

$$\sum_{\substack{B \in \mathbb{N}_0^m \\ |B| = k}} \lambda_B f_B + I_p^{k+1} \;\in\; I_p^k \big/ I_p^{k+1}$$

es una solución del problema de interpolación

$$\frac{\partial^{|A|}}{\partial x_A}\bigg|_p \Big(\sum_{\substack{B \in \mathbb{N}_0^m \\ |B| = k}} \lambda_B f_B + I_p^{k+1} \Big) \;=\; \sum_{\substack{B \in \mathbb{N}_0^m \\ |B| = k}} \delta_{A = B}\, \lambda_B \;=\; \lambda_A$$

para todo $A \in \mathbb{N}_0^m$ de orden $|A| = k$. Según la observación A.11 los funcionales lineales

$$\frac{\partial^{|A|}}{\partial x_A}\bigg|_p \;\in\; \Big(I_p^k \big/ I_p^{k+1} \Big)^*$$

son linealmente independientes, lo cual establece la deseada desigualdad (1.6) en la forma:

$$\dim \operatorname{Sym}^k T_p^* \mathbb{M} \;=\; \sharp \Big\{ A \in \mathbb{N}_0^m \;\Big|\; |A| = k \Big\} \;\leq\; \dim \Big(I_p^k \big/ I_p^{k+1} \Big)^* \;=\; \dim I_p^k \big/ I_p^{k+1}.$$

Es decir, que Ψ_p^k es inyectiva y por ende un isomorfismo de espacios vectoriales. ∎

Otra manera de interpretar la naturaleza de los isomorfismos Ψ_p^k es formulada en el lema:

Lema 1.23 (Naturalidad de los Isomorfismos Ψ_p^k).
Para cualquier aplicación suave entre variedades $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Sym}^k T_{\varphi(p)}^* \mathbb{L} \arrow[r, "\operatorname{Sym}^k \varphi_p^*"] \arrow[d, "\Psi_{\varphi(p)}^k"', "\cong"] & \operatorname{Sym}^k T_p^* \mathbb{M} \arrow[d, "\Psi_p^k"', "\cong"] \\ I_{\varphi(p)}^k \big/ I_{\varphi(p)}^{k+1} \arrow[r, "\varphi_p^*"] & I_p^k \big/ I_p^{k+1} \end{tikzcd}$$

donde φ_p^* en la última línea es definida por la regla $f + I_{\varphi(p)}^{k+1} \longmapsto (f \circ \varphi) + I_p^{k+1}$.

Demostración. En efecto observemos que es suficiente hacerlo para los monomios en $\mathrm{Sym}^k T_{\varphi(p)}\mathbb{L}$, ya que las aplicaciones que intervienen en el diagrama están bien definidas y son lineales. Lo cual implica que, no importa como se escriba un elemento general del dominio $\mathrm{Sym}^k T^*_{\varphi(p)}\mathbb{L}$ como suma de monomios, el resultado siempre va a ser la suma de las imágenes de dichos monomios. Consideramos entonces el monomio

$$d_{\varphi(p)} f_1 \cdot \ldots \cdot d_{\varphi(p)} f_k \ \in \ \mathrm{Sym}^k T^*_{\varphi(p)}\mathbb{L}$$

asociado a $f_1, f_2, \ldots, f_k \in I_{\varphi(p)} \subset C^\infty(\mathbb{L})$. Bajo $\Psi^k_p \circ \mathrm{Sym}^k \varphi^*_p$ este monomio va a

$$\begin{aligned} d_{\varphi(p)} f_1 \cdot \ldots \cdot d_{\varphi(p)} f_k \ &\longmapsto \ d_p(f_1 \circ \varphi) \cdot \ldots \cdot d_p(f_k \circ \varphi) \\ &\longmapsto \ (f_1 \circ \varphi) \cdot \ldots \cdot (f_k \circ \varphi) \ + \ I_p^{k+1} \end{aligned}$$

mientras que bajo la aplicación $\varphi^*_p \circ \Psi^k_{\varphi(p)}$ su imagen es:

$$\begin{aligned} d_{\varphi(p)} f_1 \cdot \ldots \cdot d_{\varphi(p)} f_k \ &\longmapsto \ f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \ + \ I_{\varphi(p)}^{k+1} \\ &\longmapsto \ (f_1 \cdot \ldots \cdot f_k) \circ \varphi \ + \ I_p^{k+1} \end{aligned}$$

al jalar las funciones lo cual es por definición un homomorfismo de álgebras

$$(f_1 \circ \varphi) \cdot \ldots \cdot (f_k \circ \varphi) \ = \ (f_1 \cdot \ldots \cdot f_k) \circ \varphi \, .$$

así las dos aplicaciones $\varphi^*_p \circ \Psi^k_{\varphi(p)}$ y $\Psi^k_p \circ \mathrm{Sym}^k \varphi^*_p$ tienen las mismas imágenes para cualquier monomio y por ende para un elemento general de $\mathrm{Sym}^k T^*_{\varphi(p)}\mathbb{L}$. ■

1.3. Hessianos y Aplicaciones Afines

Se verá que existe una biyección entre conexiones libres de torsión y operadores Hessianos sobre una variedad afín, lo cual nos permitirá adecuar la Definición 1.32 de una aplicación afín $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ entre variedades afines por el Corolario 1.35 en términos del Hessiano:

$$\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}(f \circ \varphi) \ = \ (\mathrm{Sym}^2 \varphi^*)(\mathrm{Hess}^{\mathbb{L}} f) \, .$$

Definición 1.24 (La Matriz Hessiana de una Función)**.**
En el cálculo vectorial se define la matriz Hessiana de una función suave $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ en un punto $(x_1, \ldots, x_m)$ como la matriz simétrica $m \times m$ formada por todas las segundas derivadas parciales de f y se denotará por Hess f:

$$(\mathrm{Hess}\ f)(x_1, \ldots, x_m) \ := \ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_1, \ldots, x_m) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x_1, \ldots, x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x_1, \ldots, x_m) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(x_1, \ldots, x_m) \end{pmatrix} .$$

Ahora asociamos a la matriz Hessiana simétrica de la Definición 1.24 un polinomio cuadrático dado por:

Definición 1.25 (Polinomio Hessiano)**.**
Sea $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suave y sea Hess f su matriz Hessiana. Se define el polinomio Hessiano de f en un punto $(\, x_1, \, \ldots, \, x_m \,) \in \mathbb{R}^m$ como el polinomio cuadrático en m incógnitas $dx_1, \, \ldots, \, dx_m$ dado por:

$$(\,\text{Hess}\, f\,)(\, x_1, \, x_2, \, \ldots, \, x_m \,) \quad := \quad \frac{1}{2} \sum_{\mu, \, \nu \, = \, 1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu}(\, x_1, \, x_2, \, \ldots, \, x_m \,) \, dx_\mu \, \cdot \, dx_\nu .$$

Observaciones:

1. Por la fórmula de Taylor 1.18 para una función suave $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ tenemos en un punto crítico $(\, x_1, \, \ldots, \, x_m \,) \in \mathbb{R}^m$ de f el siguiente desarrollo de Taylor:

   $$\begin{aligned} & f(\, x_1 \, + \, dx_1, \, \ldots, \, x_m \, + \, dx_m \,) \\ & \qquad = \quad f(\, x_1, \, \ldots, \, x_m \,) \; + \; (\,\text{Hess}\, f\,)(\, x_1, \, \ldots, \, x_m \,) \; + \; O\Big(\, (\, dx_1, \, \ldots, \, dx_m \,)^3 \, \Big). \end{aligned}$$

   Debido a la unicidad de este desarrollo el Hessiano de una función suave $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ en un punto crítico $(\, x_1, \, \ldots, \, x_m \,)$ queda totalmente determinado.

2. En un punto $(\, x_1, \, \ldots, \, x_m \,) \in \mathbb{R}^m$, que no es crítico para la función $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, el Hessiano de dicha función no esta determinado totalmente por el desarrollo de Taylor como ocurre cuando el punto es crítico, debido a que el concepto de una función lineal depende fuertemente del tipo de coordenadas elegidas, véase el Ejemplo 1.26 abajo.

3. Para identificar las incógnitas $dx_1, \, \ldots, \, dx_m$ que aparecen en la Definición 1.25 del polinomio Hessiano con algo más tangible, necesitamos recordar la Definición 1.20 del espacio cotangente en términos de los ideales I_p^k. Las incógnitas $dx_1, \, \ldots, \, dx_m$ que aparecen en la Definición 1.25 del polinomio Hessiano de una función se interpretan como las diferenciales de las funciones coordenadas $x_1, \, \ldots, \, x_m$, en otras palabras, se tiene que:

   $$\text{Hess}_p \, f \quad \in \quad \text{Sym}^2 T_p^* \mathbb{M} \; .$$

   Esto es, se puede interpretar el Hessiano como un polinomio cuadrático en $T_p\mathbb{M}$.

Ejemplo 1.26 (Coordenadas Polares)**.**
Tomando coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$ se tiene que las funciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en coordenadas cartesianas $(\, x, \, y \,)$ al pasarlas a coordenadas polares $(\, r, \, \theta \,)$ con el cambio de coordenadas $x \, = \, r \, \cos\theta$, $y \, = \, r \, \text{sen}\,\theta$ toman la forma

$$f(\, r, \, \theta \,) \quad = \quad a\, x \; + \; b\, y \quad = \quad a\, r \, \cos\theta \; + \; b\, r \, \text{sen}\,\theta$$

con parámetros $a, \, b \in \mathbb{R}$, las cuales a simple vista no tienen la apariencia de ser lineales. De hecho se sabe que en coordenadas polares $(\, r, \, \theta \,)$ el polinomio Hessiano se calcula así:

$$\begin{aligned} (\,\text{Hess}\, f\,)(\, r, \, \theta \,) \quad = \quad & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\, r, \, \theta \,) \, dr \, \cdot \, dr \; + \; \frac{\partial^2 f}{\partial r \, \partial \theta}(\, r, \, \theta \,) \, dr \, \cdot \, d\theta \; + \; \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\, r, \, \theta \,) \, d\theta \, \cdot \, d\theta \\ & - \, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}(\, r, \, \theta \,) \, dr \, \cdot \, d\theta \; + \; \frac{r}{2} \frac{\partial f}{\partial r}(\, r, \, \theta \,) \, d\theta \, \cdot \, d\theta \end{aligned}$$

Definición 1.27 (Operadores Hessianos)**.**
Un operador Hessiano o un Hessiano en una variedad suave $\mathbb{M}$ es una aplicación $\mathbb{R}$–lineal

$$\mathrm{Hess}: \quad C^\infty(\mathbb{M}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}) \qquad\qquad f \longmapsto \Big(\mathrm{Hess}\, f: \ \ p \longmapsto \mathrm{Hess}_p f\Big)$$

que satisface los siguientes axiomas:

Hes1) Es un operador diferencial de segundo orden: Si $f \in I_p^3$ se anula en un punto $p \in \mathbb{M}$ hasta orden dos en el sentido del Lema de Hadamard 1.19, entonces:

$$\mathrm{Hess}_p f \;=\; 0$$

Hes2) Anula constantes: El Hessiano de la función $\mathbf{1} \in C^\infty(\mathbb{M})$ constante igual a 1 es:

$$\mathrm{Hess}\,\mathbf{1} \;=\; 0$$

Hes3) Para todo punto $p \in \mathbb{M}$ y toda función $f \in I_p^2$ tenemos:

$$\mathrm{Hess}_p f \;=\; (\Psi_p^2)^{-1}(f + I_p^3)$$

Se nota que el primer axioma de un operador Hessiano es redundante, porque es un caso particular del tercer axioma: Una función $f \in I_p^3$ que se anula en un punto $p \in \mathbb{M}$ hasta orden 2 representa la clase $0 = f + I_p^3$ en el cociente I_p^2/I_p^3 y entonces tiene Hessiano:

$$\mathrm{Hess}_p f \;=\; (\Psi_p^2)^{-1}(f + I_p^3) \;=\; (\Psi_p^2)^{-1}(0) \;=\; 0\,.$$

En general un Hessiano asocia a toda función suave $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ y a todo punto p de $\mathbb{M}$ un polinomio cuadrático en $T_p\mathbb{M}$, a saber el polinomio $\mathrm{Hess}_p f \in \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M}$. En ocasiones se usa la notación $\nabla^2 f$ para el Hessiano, nosotros usaremos $\mathrm{Hess}\, f$.

Ejemplo 1.28 (Hessiano de una Variedad Afín)**.**
Sea $(\mathbb{M}, \nabla)$ una variedad afín con una conexión ∇ libre de torsión. El Hessiano $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$ asociado a la conexión ∇ es el operador diferencial de segundo orden

$$\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}: \ C^\infty(\mathbb{M}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}) \qquad\qquad f \longmapsto \mathrm{Hess}^{\mathbb{M}} f$$

definido por:

$$(\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}} f)(X, Y) \;:=\; X(Y f) - (\nabla_X Y) f.$$

Aunque no es complicado verificar los axiomas de operadores Hessianos para el operador $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$ usando argumentos abstractos, nos conviene hacerlo en coordenadas locales para tener una referencia (1.7) para la forma que toma un operador Hessiano en coordenadas locales. Elegimos entonces un sistema $(x_1, \ldots, x_m)$ de coordenadas locales y definimos los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ de la conexión ∇ como les hemos definido antes, por la igualdad:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \;=:\; \sum_{\lambda=1}^{m} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x_1, \ldots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_\lambda}.$$

En estas coordenadas locales el operador Hessiano $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$ tiene una expansión de la forma

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}} f &= \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m} (\,\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}} f\,)\Big(\,\frac{\partial}{\partial x_\mu},\,\frac{\partial}{\partial x_\nu}\,\Big)\, dx_\mu \cdot dx_\nu \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m} \left(\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial}{\partial x_\nu} f \;-\; \Big(\,\sum_{\lambda=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\,\Big)\, f\,\right) dx_\mu \cdot dx_\nu\end{aligned}$$

donde la primera igualdad es la expansión general de formas bilineales simétricas y la segunda refleja la Definición 1.28 de $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$. La acción $\frac{\partial}{\partial x_\mu} f := \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x_\mu}$ de los campos vectoriales base como derivaciones locales de $C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ convierte esta fórmula en la fórmula local deseada

$$\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}} f \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m} \left(\,\frac{\partial^2(\,f\circ x^{-1}\,)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} \;-\; \sum_{\lambda=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\,\frac{\partial(\,f\circ x^{-1}\,)}{\partial x_\lambda}\,\right) dx_\mu \cdot dx_\nu \tag{1.7}$$

para cualquier $f \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$. Evaluando esta expresión en un punto $p \in \mathbb{M}$ obtenemos $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_p f = 0$ para cualquier función $f \in I^3_p$ gracias al Lema de Hadamard 1.19, además es claro, que $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}\,\mathbf{1} = 0$ para la función $\mathbf{1}$ constante igual a 1. Finalmente $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_p f$ es igual al término cuadrático de la serie de Taylor en p para todo $f \in I^2_p$, por esta razón $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$ también satisface el tercer axioma de operadores Hessianos.

Observación 1.29 (Hessianos y Conexiones con Torsión)**.**
De la misma manera se puede también definir el Hessiano de una variedad afín con una conexión con torsión. Sin embargo este Hessiano asocia una sección de $T^*\mathbb{M} \otimes T^*\mathbb{M}$ *a toda función, no una sección de* $\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}$*, por ende no discutiremos esta generalización.*

Para generalizar el concepto de campos vectoriales a lo largo de curvas de la Definición 1.8 consideramos ahora una aplicación suave $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ entre variedades diferenciables. Un campo vectorial a lo largo de φ es una aplicación suave $X : \mathbb{M} \longrightarrow T\mathbb{L}$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & T\mathbb{L} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{M} \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{L} \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, tal que $X_p \in T_{\varphi(p)}\mathbb{L}$ para todo $p \in \mathbb{M}$. Todo campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\,\mathbb{L}\,)$ claramente induce un campo vectorial $X \circ \varphi$ a lo largo de φ, pero no todo campo vectorial a lo largo de φ es de esta forma. Un punto mucho más importante es, que el conjunto $\mathfrak{X}(\,\varphi\,)$ de todos los campos vectoriales a lo largo de φ es el $C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$–módulo de secciones de un haz vectorial sobre $\mathbb{M}$, el llamado haz tangente jalado $\varphi^*T\mathbb{L}$:

Definición 1.30 (Haz Tangente Jalado)**.**
Sea $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ una aplicación suave entre variedades diferenciables. Esta aplicación nos permite jalar el haz tangente $T\mathbb{L}$ de $\mathbb{L}$ a un haz vectorial $\varphi^*T\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{M}$ definido como:

$$\varphi^*T\mathbb{L} \;:=\; \{\;(\,p,\,X\,)\;|\;p \in \mathbb{M} \text{ y } X \in T_{\varphi(p)}\mathbb{L}\;\} \;\subset\; \mathbb{M} \times T\mathbb{L}.$$

Una sección de $\varphi^*T\mathbb{L}$ es esencialmente lo mismo que un campo vectorial a lo largo de φ:

$$\mathfrak{X}(\,\varphi\,) \xrightarrow{\ \cong\ } \Gamma(\,\varphi^*T\mathbb{L}\,) \qquad\qquad X \longmapsto \Big(\,\mathbb{M} \longrightarrow \varphi^*T\mathbb{L},\ \ p \longmapsto (\,p,\,X_p\,)\,\Big).$$

Cada conexión afín $\nabla^{\mathbb{L}}$ en la variedad $\mathbb{L}$ induce una conexión $\varphi^*T\mathbb{L}$ en el haz tangente jalado.

Definición 1.31 (Diferencial de una Aplicación)**.**
La diferencial de una aplicación suave $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ siempre se puede interpretar como un homomorfismo de haces vectoriales, ambos sobre $\mathbb{M}$, definido en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T\mathbb{M} \arrow[rr, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \varphi^*T\mathbb{L} \arrow[r] \arrow[dl, "\tilde{\pi}"] & T\mathbb{L} \arrow[d, "\hat{\pi}"] \\
& \mathbb{M} \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathbb{L}
\end{tikzcd} .$$

Así mismo la diferencial de φ es una sección suave del haz $\mathrm{Hom}(\,T\mathbb{M},\,\varphi^*T\mathbb{L}\,) \cong T^*\mathbb{M}\otimes\varphi^*T\mathbb{L}$:

$$\varphi_* \ \in\ \Gamma(\,T^*\mathbb{M} \otimes \varphi^*T\mathbb{L}\,)\ .$$

Definición 1.32 (Aplicaciones Afines)**.**
Una aplicación suave $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ entre variedades afines $(\,\mathbb{M},\,\nabla^{\mathbb{M}}\,)$ y $(\,\mathbb{L},\,\nabla^{\mathbb{L}}\,)$ se llama una aplicación afín, si y solamente si su diferencial φ_* es una sección paralela de $T^*\mathbb{M} \otimes \varphi^*T\mathbb{L}$

$$(\,\nabla^{\mathbb{M}*} \otimes \varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}\,)\,\varphi_* \ =\ 0$$

con respecto a la conexión inducida por las conexiones $\nabla^{\mathbb{M}*}$ en $T^*\mathbb{M}$ y $\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}$ en $\varphi^*T\mathbb{L}$.

En otras palabras: la condición de que φ_* sea paralela quiere decir que φ_* es un homomorfismo paralelo entre los dos haces vectoriales $T\mathbb{M}$ y $\varphi^*T\mathbb{L}$, sobre la variedad $\mathbb{M}$ en el sentido

$$\begin{tikzcd}
T\mathbb{M} \arrow[rr, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\pi"] & & \varphi^*T\mathbb{L} \arrow[dl, "\pi"'] \\
& \mathbb{M} \arrow[ul, dotted, bend left, "Y"] \arrow[ur, dotted, bend right, "\varphi_*\circ Y"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad \varphi_* \circ (\,\nabla^{\mathbb{M}}_X Y\,) \ =\ (\,\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}\,)_X(\,\varphi_* \circ Y\,) \tag{1.8}$$

para todos los campos vectoriales $X,\,Y \in \mathfrak{X}(\,\mathbb{M}\,)$. Esta interpretación del concepto de una aplicación afín es particularmente útil para demostrar, que la composición de dos aplicaciones afines cualesquiera es automáticamente una aplicación afín también. Para el caso en que $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ sea un difeomorfismo afín global la ecuación (1.8) toma la forma

$$\varphi_*\,(\,\nabla^{\mathbb{M}}_X Y\,) \ =\ \nabla^{\mathbb{L}}_{\varphi_* X}\varphi_*\,Y \tag{1.9}$$

en donde φ_* es el isomorfismo de álgebras de Lie inducido por el difeomorfismo global φ:

$$\varphi_* :\ \Gamma(\,T\mathbb{M}\,) \xrightarrow{\ \cong\ } \Gamma(\,T\mathbb{L}\,), \qquad X \longmapsto \Big(\,\varphi_*X :\ \mathbb{L} \longrightarrow T\mathbb{L},\ \ \varphi(p) \longmapsto \varphi_{*,p}X_p\,\Big).$$

La ecuación (1.9) y sus adaptaciones serán muy útiles para demostrar el Lema 3.22, también nos permitirán demostrar el Teorema 3.27 y el Lema 3.28.

Definición 1.33 (Grupo de Difeomorfismos Afines)**.**
Sea $\mathbb{M}$ una variedad afín con su conexión afín ∇ en el haz tangente. El grupo de automorfismos afines de $(\mathbb{M}, \nabla)$ es el grupo formado por todos los difeomorfismos afines de $\mathbb{M}$, es decir:

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{M}, \nabla) := \{ \varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \mid \varphi \text{ es un difeomorfismo y una aplicación afín } \}.$$

Ejemplo 1.34 (Grupo Afín de $\mathbb{R}^m$)**.**
El grupo afín de la variedad diferenciable $\mathbb{R}^m$ con la conexión trivial

$$\nabla^{\mathrm{trivial}}_X\Big(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + y_m \frac{\partial}{\partial x_m} \Big) := (X y_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (X y_m) \frac{\partial}{\partial x_m}$$

es exactamente el grupo afín clásico de la geometría euclidiana:

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^m, \nabla^{\mathrm{trivial}}) \cong \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m) \ltimes \mathbb{R}^m .$$

Este ejemplo dio el nombre a los conceptos de variedades y aplicaciones afines.

En este trabajo ya hemos visto ejemplos importantes de aplicaciones afines: Cada geodésica $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{L}$ en una variedad afín $\mathbb{L}$ es una aplicación afín con respecto a la conexión trivial $\nabla^{\mathrm{trivial}}$ en $\mathbb{M} := \mathbb{R}$ caracterizada por la propiedad, de que el campo vectorial estándar $\frac{d}{dt}$

$$\nabla^{\mathrm{trivial}}_X \tfrac{d}{dt} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla^{\mathrm{trivial}*}_X dt = 0 \tag{1.10}$$

es paralelo en el sentido de la Definición 1.10 para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. De hecho la diferencial $\gamma_* \in \Gamma(\mathrm{Hom}(T\mathbb{R}, \gamma^* T\mathbb{L}))$ de una curva γ en un punto $t \in \mathbb{R}$ se puede escribir en la forma

$$(\gamma_*)_t = d_t t \otimes \gamma_{*,t}\Big(\tfrac{d}{dt}\Big|_t \Big) = d_t t \otimes \dot{\gamma}(t)$$

así es verdad que $\gamma_* = dt \otimes \dot{\gamma}$. Entonces la diferencial γ_* de γ es paralela, si y sólo si

$$(\nabla^{\mathrm{trivial}*} \otimes \gamma^* \nabla^{\mathbb{L}})_{\frac{d}{dt}} \gamma_* = \Big(\nabla^{\mathrm{trivial}*}_{\frac{d}{dt}} dt \Big) \otimes \dot{\gamma} + dt \otimes \Big(\gamma^* \nabla^{\mathbb{L}}_{\frac{d}{dt}} \dot{\gamma} \Big) = dt \otimes \frac{\nabla^{\mathbb{L}}}{dt} \dot{\gamma} = 0$$

debido a la ecuación (1.10), es decir, si y sólo si γ es una geodésica; nótese que $dt \neq 0$ es una forma de volumen de $\mathbb{R}$ y no se anula.

Para estudiar el concepto de aplicaciones afines y otros ejemplos no tan triviales como el de las geodésicas queremos desarrollar en coordenadas locales la forma precisa de la ecuación diferencial parcial que satisface cada aplicación afín $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$. Elegimos entonces coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_m)$ para un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{M}$ y similarmente coordenadas locales $(y_1, \ldots, y_l)$ para un subconjunto abierto $V \subset \mathbb{L}$. En la intersección abierta $U \cap \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{M}$ de los abiertos U y $\varphi^{-1}(V)$ la aplicación $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ se escribe

$$(y \circ \varphi \circ x^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_m))$$

con l funciones componentes $\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_l$ definidas en $x(\,U\,\cap\,\varphi^{-1}(V)\,)\,\subset\,\mathbb{R}^m$. Recordamos primero que en coordenadas locales cualquier campo vectorial $X\,\in\,\mathfrak{X}(\,\mathbb{L}\,)$ sobre $\mathbb{L}$ se escribe

$$\sum_{\beta=1}^{l}\xi_\beta(\,y_1,\,\ldots,\,y_l\,)\,\frac{\partial}{\partial y_\beta} \tag{1.11}$$

con l funciones $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_l$ como coeficientes, definidas en el abierto $y(\,V\,)\,\subset\,\mathbb{R}^l$. Al contrario cada campo vectorial $X\,\in\,\mathfrak{X}(\,\varphi\,)$ a lo largo de φ tiene una expansión local de la forma

$$\sum_{\beta=1}^{l}\xi_\beta(\,x_1,\,\ldots,\,x_m\,)\,\frac{\partial}{\partial y_\beta} \tag{1.12}$$

cuyo coeficientes son las l funciones $\xi_1,\,\ldots,\,\xi_l$ definidas en $x(\,U\,\cap\,\varphi^{-1}(V)\,)\,\subset\,\mathbb{R}^m$. Comparando las expansiones (1.11) y (1.12) observamos, que no tiene sentido aplicar la conexión $\nabla^{\mathbb{L}}$ a un campo vectorial a lo largo de φ, porque la regla de Leibniz resulta en una expresión absurda

$$\nabla^{\mathbb{L}}_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}}\left(\sum_{\beta=1}^{l}\xi_\beta\,\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)\;=\;\sum_{\beta=1}^{l}\left(\frac{\partial\xi_\beta}{\partial y_\alpha}(\,x_1,\,\ldots,\,x_m\,)\,\frac{\partial}{\partial y_\beta}\;+\;\xi_\beta(\,x_1,\,\ldots,\,x_m\,)\,\nabla^{\mathbb{L}}_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)$$

en la cual no hay manera lógicamente consistente de definir la derivada parcial $\frac{\partial\xi_\beta}{\partial y_\alpha}$: éste problema insuperable da origen al concepto de la conexión jalada $\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}$. Para describir esta conexión en coordenadas locales simplificamos primero la notación, abreviamos los argumentos en que se evalúan casi todas las funciones en las cuentas que siguen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}\;&:=\;(\,x_1,\,\ldots,\,x_m\,)\\ \mathcal{Y}\;&:=\;(\,\varphi_1(x_1,\ldots,x_m),\,\ldots,\,\varphi_l(x_1,\ldots,x_m)\,)\;.\end{aligned}$$

Además necesitamos los símbolos de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ y $\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ de ambas conexiones $\nabla^{\mathbb{M}}$ y $\nabla^{\mathbb{L}}$:

$$\nabla^{\mathbb{M}}_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\;=:\;\sum_{\lambda=1}^{m}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\qquad\qquad \nabla^{\mathbb{L}}_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\;=:\;\sum_{\alpha=1}^{l}\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(\,y_1,\ldots,y_l\,)\,\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\;.$$

Las derivadas parciales de las l funciones componentes $\varphi_1,\,\ldots,\,\varphi_l$ de la aplicación φ con respecto a las variables $x_1,\,\ldots,\,x_m$ son los coeficientes de la matriz Jacobiana de φ, entonces no es difícil convencerse de que la diferencial φ_* de la aplicación φ se escribe

$$\varphi_*\;=\;\sum_{\mu=1}^{m}dx_\mu\,\otimes\,\varphi_*\Big(\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\,\Big)\;=\;\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{l}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\,\mathcal{X}\,)\,dx_\mu\,\otimes\,\frac{\partial}{\partial y_\beta}$$

en las coordenadas locales elegidas. Así el empuje $X\,\longmapsto\,\varphi_*\circ X$ de campos vectoriales en $\mathbb{M}$ a campos vectoriales a lo largo de φ definido en el diagrama (1.8) es dado por la regla:

$$\varphi_*\,\circ\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\;=\;\sum_{\beta=1}^{l}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial}{\partial y_\beta}. \tag{1.13}$$

Finalmente podemos definir la conexión jalada $\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}$ en coordenadas locales explícitamente. El problema de la expresión absurda en nuestro nuevo enfoque se resuelve por el hecho de que la conexión jalada $\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}$ para campos vectoriales a lo largo de φ es una conexión sobre el dominio $\mathbb{M}$ y no sobre el codominio $\mathbb{L}$ de la aplicación φ. Tomando eso en cuenta obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}})_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}}\left(\sum_{\alpha=1}^{l}\xi_\alpha(\mathcal{X})\,\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) &:= \sum_{\alpha=1}^{l}\left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\mu}(\mathcal{X})\,\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \;+\; \xi_\alpha(\mathcal{X})\,\nabla^{\mathbb{L}}_{(\varphi_*\,\circ\,\frac{\partial}{\partial x_\mu})}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}\left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_\mu}(\mathcal{X}) \;+\; \sum_{\beta,\gamma=1}^{l}\xi_\gamma(\mathcal{X})\,\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\mathcal{X})\,\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(\mathcal{Y})\right)\frac{\partial}{\partial y_\alpha}
\end{aligned}
$$

es decir, que los símbolos de Christoffel de la conexión $\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}$ sobre $\mathbb{M}$ son dados por:

$$
\widehat{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\gamma}(\,\mathcal{X}\,) \;:=\; \sum_{\beta=1}^{l}\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(\,\mathcal{Y}\,)\,\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\,\mathcal{X}\,). \tag{1.14}
$$

Usando las ecuaciones (1.13) y (1.14) podemos calcular las dos expresiones que intervienen en la definición de $(\nabla^{\mathbb{M}*}\otimes\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}})\,\varphi_*$ obteniéndose:

$$
\begin{aligned}
(\,\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}\,)_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}}\Big(\,\varphi_*\,\frac{\partial}{\partial x_\nu}\,\Big) &= (\,\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}\,)_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}}\left(\,\sum_{\alpha=1}^{l}\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\nu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\,\right)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial}{\partial y_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^{l}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\nu}(\,\mathcal{X}\,)\,\big(\,\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}\,\big)_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}\left(\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\mathcal{X}) + \sum_{\beta,\gamma=1}^{l}\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(\mathcal{Y})\,\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\mathcal{X})\,\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\nu}(\mathcal{X})\right)\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\\
\varphi_*\,\Big(\,\nabla^{\mathbb{M}}_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\,\Big) &= \varphi_*\,\left(\,\sum_{\lambda=1}^{m}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\,\right)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{l}\left(\sum_{\lambda=1}^{m}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\lambda}(\,\mathcal{X}\,)\right)\frac{\partial}{\partial y_\alpha}.
\end{aligned}
$$

Tomando su diferencia obtenemos finalmente:

$$
\begin{aligned}
&\Big[\,(\,\nabla^{\mathbb{M}*}\otimes\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}\,)\,\varphi_*\,\Big]_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\\
&\quad= (\,\varphi^*\nabla^{\mathbb{L}}\,)_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}}\Big(\,\varphi_*\,\frac{\partial}{\partial x_\nu}\,\Big) - \varphi_*\,\Big(\,\nabla^{\mathbb{M}}_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\,\Big)\\
&\quad= \sum_{\alpha=1}^{l}\left(\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\mathcal{X}) + \sum_{\beta,\gamma=1}^{l}\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(\,\mathcal{Y}\,)\,\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\mathcal{X})\,\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\nu}(\mathcal{X}) - \sum_{\lambda=1}^{m}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathcal{X})\,\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\lambda}(\mathcal{X})\right)\frac{\partial}{\partial y_\alpha}.
\end{aligned}
$$

Entonces, una aplicación $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ entre variedades afines es una aplicación afín, si y sólo si con respecto a un sistemas de coordenadas cualesquiera $(x_1, \ldots, x_m)$ y $(y_1, \ldots, y_l)$ se satisface la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial \varphi_\alpha^2}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu}(\mathcal{X}) + \sum_{\beta,\gamma=1}^{l} \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(\mathcal{Y}) \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\mathcal{X}) \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\nu}(\mathcal{X}) - \sum_{\lambda=1}^{m} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\mathcal{X}) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\lambda}(\mathcal{X}) = 0 \quad (1.15)$$

para todo $\alpha = 1, \ldots, l$ y todos $\mu, \nu = 1, \ldots, m$. Este sistema de ecuaciones diferenciales parciales es una generalización directa de la ecuación para una geodésica (1.2): el único símbolo de Christoffel de la conexión trivial ∇^{trivial} en $\mathbb{R}$ se anula $\Gamma^1_{11}(t) = 0$ a causa de la ecuación (1.10), en consecuencia el sistema (1.15) caracterizando aplicaciones afines se convierte en:

$$\frac{d^2\gamma_\alpha}{dt^2}(t) + \sum_{\beta,\gamma=1}^{l} \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_l(t)) \frac{d\gamma_\beta}{dt}(t) \frac{d\gamma_\gamma}{dt}(t) - \sum_{\lambda=1}^{1} \underbrace{\Gamma^1_{11}(t)}_{=0} \frac{d\gamma_\alpha}{dt}(t) = 0 .$$

Una propiedad bien interesante del sistema (1.15) de ecuaciones diferenciales parciales no lineales merece mención: se puede resolver algebraicamente para todas las derivadas parciales de segundo orden de las l funciones componentes $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ de una solución $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$. Así toda aplicación afín $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ de una variedad afín conexa $\mathbb{M}$ queda determinada por su valor $\varphi(p) \in \mathbb{L}$ y su diferencial $\varphi_{*,p} : T_p\mathbb{M} \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{L}$ en un punto arbitrario $p \in \mathbb{M}$. En particular $\mathrm{Aff}(\mathbb{M}, \nabla)$ es un grupo de Lie de dimensión a lo más $m^2 + m$ para cualquier variedad afín $\mathbb{M}$ de dimensión m. Según el Ejemplo 1.34 esta cota superior es realizada para $\mathbb{R}^m$.

Lema 1.35 (Aplicaciones Afines y Hessianos)**.**
Una aplicación suave $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ entre dos variedades afines es una aplicación afín en el sentido de la Definición 1.32, si y sólo si para toda función $f \in C^\infty(\mathbb{L})$ es verdad que:

$$\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}(f \circ \varphi) = (\mathrm{Sym}^2\varphi^*)(\mathrm{Hess}^{\mathbb{L}} f) .$$

Demostración. La idea simple de la demostración es verificar la identidad más precisa

$$\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}(f \circ \varphi) - (\mathrm{Sym}^2\varphi^*)(\mathrm{Hess}^{\mathbb{L}} f) = \langle df \circ \varphi, (\nabla^{\mathbb{M}*} \otimes \varphi^*\nabla^{\mathbb{L}})\varphi_* \rangle \qquad (1.16)$$

para toda aplicación $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ y toda función $f \in C^\infty(\mathbb{L})$ en coordenadas locales. La expresión a la derecha de la ecuación (1.16) denota una sección del haz $\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}$, cuya definición explícita se deduce directamente de las siguientes cuentas: el valor de esta sección en un punto $p \in \mathbb{M}$ depende bilinealmente de $[(\nabla^{\mathbb{M}*} \otimes \nabla^{\mathbb{L}})\varphi_*]_p$ y $d_{\varphi(p)}f$, por ende el lado derecho de la ecuación (1.16) se anula para toda función en $\mathbb{L}$, es decir, para todo $d_{\varphi(p)}f \in T^*_{\varphi(p)}\mathbb{L}$, si y solamente si la diferencial φ_* de la aplicación φ es paralela:

$$(\nabla^{\mathbb{M}*} \otimes \nabla^{\mathbb{L}})\varphi_* = 0.$$

Para el cálculo en coordenadas locales seguimos usando la notación fijada para las cuentas anteriores. Sea $(x_1, \ldots, x_m)$ un sistema local de coordenadas para un subconjunto abierto

$U \subset \mathbb{M}$ y $(y_1, \ldots, y_l)$ un sistema de coordenadas locales para $\mathbb{L}$ definido en un subconjunto abierto $V \subset \mathbb{L}$. En la intersección $U \cap \varphi^{-1}(V)$ la aplicación $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ se escribe como un l–áda $(\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ de funciones de $x_1, \ldots, x_m$ caracterizadas por:

$$(y \circ \varphi \circ x^{-1})(x_1, \ldots, x_m) = (\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_m))$$

aquí los argumentos más comunes de las funciones en nuestros cálculos los denotaremos por:

$$\mathcal{X} := (x_1, \ldots, x_m) \qquad \mathcal{Y} := (\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_l(x_1, \ldots, x_m))$$

además usaremos respectivamente la siguiente notación para los símbolos de Christoffel de las conexiones $\nabla^{\mathbb{M}}$ y $\nabla^{\mathbb{L}}$

$$\nabla^{\mathbb{M}}_{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} =: \sum_{\lambda=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathcal{X}) \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \qquad \nabla^{\mathbb{L}}_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} =: \sum_{\alpha=1}^{l} \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(y_1, \ldots, y_l) \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\ .$$

Sea $f \in C^\infty(\mathbb{L})$, aplicando la regla de la cadena a la composición

$$(f \circ \varphi \circ x^{-1})(\mathcal{X}) = ((f \circ y^{-1}) \circ (y \circ \varphi \circ x^{-1}))(\mathcal{X}) = (f \circ y^{-1})(\mathcal{Y})$$

obtenemos las derivadas parciales de $f \circ \varphi \in C^\infty(\mathbb{M})$ de orden uno y dos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial((f \circ \varphi) \circ x^{-1})}{\partial x_\lambda}(\mathcal{X}) &= \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{\partial(f \circ y^{-1})}{\partial y_\alpha}(\mathcal{Y}) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\lambda}(\mathcal{X}) \\
\frac{\partial^2((f \circ \varphi) \circ x^{-1})}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu}(\mathcal{X}) &= \sum_{\beta,\gamma=1}^{l} \frac{\partial^2(f \circ y^{-1})}{\partial y_\beta \, \partial y_\gamma}(\mathcal{Y}) \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\mathcal{X}) \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\nu}(\mathcal{X}) \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{\partial(f \circ y^{-1})}{\partial y_\alpha}(\mathcal{Y}) \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu}(\mathcal{X}).
\end{aligned}$$

Con esto la fórmula (1.7) para el operador Hessiano $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$ en coordenadas locales nos dice:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}(f \circ \varphi) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \left(\frac{\partial^2((f \circ \varphi) \circ x^{-1})}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu}(\mathcal{X}) - \sum_{\lambda=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathcal{X}) \frac{\partial((f \circ \varphi) \circ x^{-1})}{\partial x_\lambda}(\mathcal{X}) \right) dx_\mu \cdot dx_\nu \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \left(\sum_{\beta,\gamma=1}^{l} \frac{\partial^2(f \circ y^{-1})}{\partial y_\beta \, \partial y_\gamma}(\mathcal{Y}) \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\mathcal{X}) \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\nu}(\mathcal{X}) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{\partial(f \circ y^{-1})}{\partial y_\alpha}(\mathcal{Y}) \left[\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu}(\mathcal{X}) - \sum_{\lambda=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\mathcal{X}) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\lambda}(\mathcal{X}) \right] \right) dx_\mu \cdot dx_.
\end{aligned}$$

Por otro lado la fórmula (1.7) para el operador Hessiano $\mathrm{Hess}^{\mathbb{L}}$ da el resultado:

$$\mathrm{Hess}^{\mathbb{L}} f = \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma=1}^{l} \left(\frac{\partial^2(f \circ y^{-1})}{\partial y_\beta \, \partial y_\gamma} - \sum_{\alpha=1}^{l} \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{\partial(f \circ y^{-1})}{\partial y_\alpha} \right) dy_\beta \cdot dy_\gamma.$$

Para jalar $\mathrm{Hess}^{\mathbb{L}} f \in \Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{L})$ sobre la aplicación $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ a una sección de $\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}$ tenemos que evaluar esta expresión en $\mathcal{Y}$ y remplazar las diferenciales dy_α con

$$\varphi^* dy_\alpha \;=\; d(\, y_\alpha \circ \varphi \,) \;=\; d(\, \varphi_\alpha \circ x \,) \;=\; \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\lambda}(\, \mathcal{X} \,)\, dx_\lambda$$

para obtener finalmente:

$$\begin{aligned}
&(\,\mathrm{Sym}^2\varphi^*\,)(\,\mathrm{Hess}^{\mathbb{L}} f\,) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m}\Bigg(\sum_{\beta,\,\gamma=1}^{l} \frac{\partial^2 (f\circ y^{-1})}{\partial y_\beta\,\partial y_\gamma}(\,\mathcal{Y}\,)\,\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\nu}(\,\mathcal{X}\,) \\
&\qquad - \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{\partial (f\circ y^{-1})}{\partial y_\alpha}(\,\mathcal{Y}\,)\Big[\, + \sum_{\beta,\,\gamma=1}^{l} \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(\,\mathcal{Y}\,)\,\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\nu}(\,\mathcal{X}\,)\,\Big]\Bigg)\, dx_\mu \cdot dx_\nu .
\end{aligned}$$

Así podemos verificar la identidad (1.16) central en la demostración del Lema 1.35:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}(\, f \circ \varphi \,) \;-\; (\,\mathrm{Sym}^2\varphi^*\,)(\,\mathrm{Hess}^{\mathbb{L}} f\,) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m} \frac{\partial (f\circ y^{-1})}{\partial y_\alpha}(\,\mathcal{Y}\,)\Bigg(\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\,\mathcal{X}\,) \;-\; \sum_{\lambda=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\lambda}(\,\mathcal{X}\,) \\
&\qquad + \sum_{\beta,\,\gamma=1}^{l} \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(\,\mathcal{Y}\,)\,\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\mu}(\,\mathcal{X}\,)\,\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_\nu}(\,\mathcal{X}\,)\Bigg)\, dx_\mu \cdot dx_\nu .
\end{aligned}$$

■

Corolario 1.36 (Geodésicas)**.**
Una curva suave $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ es una curva recta o una geodésica en una variedad afín $\mathbb{M}$ con conexión libre de torsión ∇, si y sólo si para toda función $f \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ es verdad que:

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_t (\, f \circ \gamma \,) \;=\; (\,\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_{\gamma(t)} f\,)(\,\dot\gamma(\,t\,),\; \dot\gamma(\,t\,)\,)\;.$$

Demostración. Según el Lema 1.35 una curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ es una aplicación afín con respecto a la conexión $\nabla^{\mathrm{trivial}}$ para $\mathbb{R}$ y entonces es una geodésica, si y sólo si

$$\mathrm{Hess}^{\mathbb{R}}(\, f \circ \gamma \,) \;=\; (\,\mathrm{Sym}^2\gamma^*\,)(\,\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}} f\,) \tag{1.17}$$

para toda función $f \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$. En esta identidad ambos lados son secciones de $\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{R}$, que es un haz lineal sobre $\mathbb{R}$, por eso la evaluación en el campo vectorial estándar $\frac{d}{dt}$ de $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{R} \;\xrightarrow{\;\cong\;}\; \mathbb{R}\times\mathbb{R} \qquad\qquad h_t \;\longmapsto\; \Big(\, t,\; h\Big(\frac{d}{dt},\, \frac{d}{dt}\Big)\,\Big)$$

es un isomorfismo de haces lineales reales. Entonces, la igualdad en la ecuación (1.17) equivale a la siguiente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}^{\mathbb{R}}_t(\, f \circ \gamma\,)\Big(\, \frac{d}{dt},\, \frac{d}{dt}\,\Big) \;&=\; \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_t (\, f \circ \gamma\,)\\ &\overset{?}{=}\; (\,\mathrm{Sym}^2\gamma^*\,)(\,\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}} f\,)_t\Big(\, \frac{d}{dt},\, \frac{d}{dt}\,\Big)\\ &=\; (\,\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_{\gamma(t)} f\,)\Big(\,\gamma_{*,t}\,\frac{d}{dt},\;\gamma_{*,t}\,\frac{d}{dt}\,\Big) \;=\; (\,\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_{\gamma(t)} f\,)(\,\dot\gamma(\,t\,),\,\dot\gamma(\,t\,)\,)\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En la primera línea de este cálculo hemos usado la Definición 1.28 de $\mathrm{Hess}^{\mathbb{R}}$ directamente junto con $\nabla^{\mathrm{trivial}}_X \frac{d}{dt} = 0$, y en la última línea usamos la ecuación (1.1). ■

Recordamos que la composición de aplicaciones afines es afín también, entonces cada aplicación afín $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ entre variedades afines $\mathbb{M}$ y $\mathbb{L}$ manda las geodésicas de $\mathbb{M}$ a geodésicas de $\mathbb{L}$. El siguiente lema asegura que el recíproco también es verdad: si una aplicación suave manda geodésicas a geodésicas, entonces es una aplicación afín. Citamos este lema sin demostración, porque su demostración es muy similar a la demostración del Lema 1.35:

Lema 1.37 (Aplicaciones Afines y Geodésicas)**.**
Una aplicación suave $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ entre variedades afines $\mathbb{M}$ y $\mathbb{L}$ es una aplicación afín, si y sólo si la curva $\varphi \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{L}$ es una geodésica para cualquier geodésica $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$.

Observación 1.38 (Variedades Afines con Torsión)**.**
En este trabajo consideramos únicamente conexiones sin torsión, aunque muchos resultados como la Definición 1.28 o el Lema 1.35 se extienden al caso general. Una de las excepciones es el Lema 1.37, que en su formulación actual no es válido para conexiones con torsión.

Teorema 1.39 (Clasificación de Hessianos Generales)**.**
En toda variedad diferenciable $\mathbb{M}$ existe una biyección canónica

$$\{\,\nabla\;|\;\textit{conexión libre de torsión}\,\}\;\xrightarrow{\;\cong\;}\;\{\,\mathrm{Hess}\;|\;\textit{operador Hessiano}\,\}\qquad\qquad \nabla \longmapsto \mathrm{Hess}^{\nabla}$$

entre el conjunto de todas las conexiones libres de torsión ∇ en el haz tangente y el conjunto de todos los operadores Hessianos.

Demostración. La idea central de la demostración es que la aplicación $\nabla \longmapsto \mathrm{Hess}^{\nabla}$ es una aplicación afín lineal entre espacios afines en el sentido de la Definición A.9 y que su diferencial es invertible. Así el Lema básico A.10 de aplicaciones afines lineales implica que $\nabla \longmapsto \mathrm{Hess}^{\nabla}$ es una biyección, eso es lo que queremos demostrar.

Para empezar es bien conocido, véase por ejemplo [KN], que el conjunto de todas las conexiones libres de torsión en el haz tangente de una variedad $\mathbb{M}$ es un espacio afín, pues es un conjunto no vacío con dos operaciones, que satisfacen los axiomas de la Definición A.8. El conjunto de todas las conexiones libres de torsión no es vacío por el Teorema 1.4, entonces nos enfocamos en la operación $-$, la otra operación $+$ es esencialmente el inverso de $-$ y se define siguiendo los mismos argumentos. Dos conexiones ∇ y $\widetilde{\nabla}$ son aplicaciones $\mathbb{R}$–bilineales, por ende su diferencia está bien definida como una aplicación $\mathbb{R}$–bilineal:

$$A: \ \Gamma(T\mathbb{M}) \times \Gamma(T\mathbb{M}) \longrightarrow \Gamma(T\mathbb{M}) \qquad (X, Y) \longmapsto \widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \ .$$

La diferencia definida así es de hecho $C^\infty(\mathbb{M})$–bilineal debido a los axiomas de conexiones: esta conclusión es clara para el primer argumento $X \in \Gamma(T\mathbb{M})$, para el segundo argumento $Y \in \Gamma(T\mathbb{M})$ usamos la regla de Leibniz de las conexiones ∇ y $\widetilde{\nabla}$ para obtener:

$$A_X(fY) = \widetilde{\nabla}_X(fY) - \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\,\widetilde{\nabla}_X Y - (Xf)Y - \nabla_X Y = f\,A_X Y \ .$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{M})$. Además la diferencia $A = \widetilde{\nabla} - \nabla$ es simétrica en los dos argumentos X, Y. En efecto, calculamos

$$\begin{aligned} A_X Y - A_Y X &= (\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y) - (\widetilde{\nabla}_Y X - \nabla_Y X) \\ &= \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X - [X, Y] - \nabla_X Y + \nabla_Y X + [X, Y] = 0. \end{aligned}$$

Ambas conexiones ∇ y $\widetilde{\nabla}$ son conexiones libres de torsión $T^{\widetilde{\nabla}} = 0 = T^{\nabla}$. En consecuencia al ser $C^\infty(\mathbb{M})$–bilineal y simétrica la diferencia de las conexiones ∇ y $\widetilde{\nabla}$ es una sección:

$$A := \widetilde{\nabla} - \nabla \in \Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M} \otimes T\mathbb{M}) \ .$$

Es decir, que el conjunto de todas las conexiones sin torsión es un espacio afín modelado por:

$$\Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M} \otimes T\mathbb{M}) \ . \tag{1.18}$$

Repetimos ahora este ejercicio para el conjunto de operadores Hessianos en la variedad $\mathbb{M}$, que tampoco es un conjunto vacío gracias al Teorema 1.4 junto con el Ejemplo 1.28. Recordamos primero que un operador diferencial de orden dos es una aplicación $\mathbb{R}$–lineal

$$D: \quad C^\infty(\mathbb{M}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}) \qquad f \longmapsto Df$$

con la propiedad $(Df)_p = 0 \in \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M}$ para toda función argumento $f \in I_p^3$. Entonces,

$$(\sigma_D^{\mathrm{total}})_p: \quad C^\infty(\mathbb{M})/_{I_p^3} \longrightarrow \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M} \qquad f + I_p^3 \longmapsto (Df)_p$$

es una aplicación $\mathbb{R}$–lineal bien definida en todo punto $p \in \mathbb{M}$, que se llama el símbolo total del operador diferencial D en p. El símbolo principal de D en $p \in \mathbb{M}$ es la composición

$$(\sigma_D)_p: \quad \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M} \xrightarrow{\Psi_p^2} I_p^2/_{I_p^3} \xrightarrow{\subset} C^\infty(\mathbb{M})/_{I_p^3} \xrightarrow{(\sigma_D^{\mathrm{total}})_p} \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M}$$

en donde Ψ_p^2 es el isomorfismo del Lema 1.22. El tercer axioma para Hessianos dice que:

$$(\mathrm{Hess}_p f) = (\Psi_p^2)^{-1}(f + I_p^3)$$

para toda función $f \in I_p^2$; esto es equivalente al axioma, de que el símbolo principal de un operador Hessiano en cada punto $p \in \mathbb{M}$ es la identidad $\sigma_{\mathrm{Hess}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}}$. Entonces dos operadores Hessianos en la variedad $\mathbb{M}$ tienen el mismo símbolo principal, por eso su diferencia

$$D : \quad C^\infty(\mathbb{M}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}) \qquad\qquad f \longmapsto \widetilde{\mathrm{Hess}}\, f - \mathrm{Hess}\, f$$

es un operador diferencial de orden uno en el sentido $(Df)_p = 0 \in \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M}$ para toda función argumento $f \in I_p^2$. Además anula las funciones constantes, por eso su símbolo total

$$(\sigma_D^{\mathrm{total}})_p : \quad \mathbb{R} \oplus T_p^*\mathbb{M} \xrightarrow{\cong} C^\infty(\mathbb{M})/_{I_p^2} \longrightarrow \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M} \qquad\qquad f(p) \oplus d_p f \longmapsto (Df)_p$$

en un punto $p \in \mathbb{M}$ se reduce a una aplicación $\mathbb{R}$–lineal $T_p^*\mathbb{M} \longrightarrow \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M}$. Con lo cual concluimos que la diferencia entre dos operadores Hessianos es una sección del haz vectorial

$$\widetilde{\mathrm{Hess}} - \mathrm{Hess} \in \Gamma(\mathrm{Hom}(T^*\mathbb{M}, \mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}))$$

es decir, que el conjunto de todos los Hessianos en $\mathbb{M}$ es un espacio afín modelado por:

$$\Gamma(\mathrm{Hom}(T^*\mathbb{M}, \mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M})) . \tag{1.19}$$

Para demostrar que $\nabla \longmapsto \mathrm{Hess}^\nabla$ es biyectiva nos falta verificar que es afín lineal en el sentido de la Definición A.9 y que su diferencial es invertible. Observamos para este propósito

$$\begin{aligned} (\mathrm{Hess}^{\nabla + A} f)(X, Y) &= X(Yf) - (\nabla_X Y + A_X Y) f \\ &= (\mathrm{Hess}^\nabla f)(X, Y) - \langle df, A_X Y \rangle \end{aligned}$$

en donde $\langle\, , \rangle$ denota el emparejamiento canónico entre $T^*\mathbb{M}$ y $T\mathbb{M}$. Entonces la aplicación $\nabla \longmapsto \mathrm{Hess}^\nabla$ sí es afín lineal con diferencial $C^\infty(\mathbb{M})$–lineal e invertible, por lo cual tenemos la aplicación

$$\Gamma(\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M} \otimes T\mathbb{M}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Hom}(T^*\mathbb{M}, \mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}))$$

inducida por el siguiente isomorfismo de haces vectoriales, compare con la proposición A.12:

$$\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M} \otimes T\mathbb{M} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(T^*\mathbb{M}, \mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}) \qquad\qquad A \longmapsto \Big(\alpha \longmapsto -\alpha(A\, .\, \cdot) \Big).$$

■

Ejemplo 1.40 (Matriz Hessiana)**.**
La conexión libre de torsión en el haz tangente de $\mathbb{R}^m$, que corresponde a la matriz Hessiana del cálculo vectorial, es exactamente la conexión trivial $\nabla^{\mathrm{trivial}}$ en el haz tangente de $\mathbb{R}^m$ mencionada en el Ejemplo 1.34 del grupo afín de $\mathbb{R}^m$.

Capítulo 2

Espacios Simétricos

2.1. Axiomas de un Espacio Simétrico

Aquí damos la definición de espacio simétrico hecha por Ottmar Loos y construimos la conexión de Loos para un espacio simétrico.

Definición 2.1 (Espacio Simétrico)**.**
Un *espacio simétrico* es una variedad diferenciable $\mathbb{M}$, con una operación binaria diferenciable

$$* : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \qquad\qquad (p, q) \longmapsto p * q$$

que satisface los siguientes axiomas:

S1) Bajo la reflexión centrada en cualquier punto $p \in \mathbb{M}$

$$S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \qquad\qquad x \longmapsto p * x$$

el punto p es un punto fijo, es decir, $S_p(p) = p * p = p$.

S2) La reflexión centrada en p es una involución $S_p^2 = S_p \circ S_p = \mathrm{id}_{\mathbb{M}}$ de la variedad $\mathbb{M}$, equivalentemente tenemos para todo par de puntos $p, x \in \mathbb{M}$:

$$p * (p * x) = x .$$

S3) La diferencial de la reflexión centrada en cada punto $p \in \mathbb{M}$ en el punto fijo p es igual a menos la identidad del espacio tangente $T_p\mathbb{M}$:

$$(S_p)_{*,p} : T_p\mathbb{M} \longrightarrow T_{p*p}\mathbb{M} = T_p\mathbb{M} \qquad\qquad X \longmapsto -X .$$

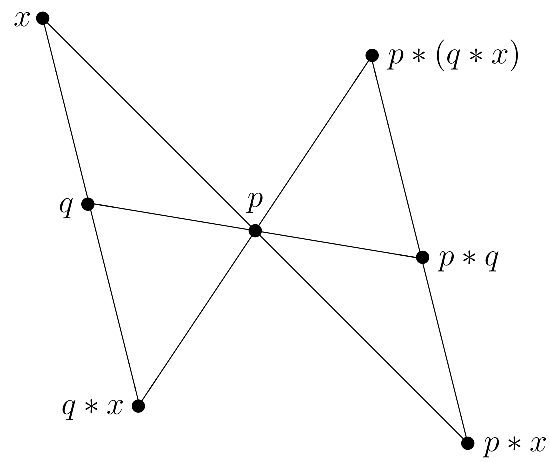
S4) Las reflexiones S_p y S_q centradas en dos puntos cualesquiera p y q de $\mathbb{M}$ cumplen

$$S_p \circ S_q = S_{S_p(q)} \circ S_p$$

es decir, sea cual sea $x \in \mathbb{M}$ se tiene:

$$p * (q * x) = (p * q) * (p * x) .$$

Una interpretación geométrica del cuarto axioma es dada en el diagrama:



Lema 2.2 (Producto Cartesiano de Espacios Simétricos)**.**
Sean $\mathbb{M}$ y $\mathbb{L}$ dos espacios simétricos con operaciones binarias $*_{\mathbb{M}}$ y $*_{\mathbb{L}}$, entonces su producto cartesiano $\mathbb{M} \times \mathbb{L}$ también es un espacio simétrico bajo la operación binaria:

$$(p,\, q)\ *_{\mathbb{M}\times\mathbb{L}}\ (x,\, y)\ \ :=\ \ (\, p *_{\mathbb{M}} x,\ q *_{\mathbb{L}} y\,)\ .$$

2.2. Ejemplos de Espacios Simétricos

1) [Espacios Vectoriales]
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita. Entonces V es una variedad diferenciable y la operación binaria diferenciable

$$*: \quad V \times V \longrightarrow V \qquad\qquad (p,\, x) \longmapsto p * x \ := \ 2\,p - x$$

convierte a V en un espacio simétrico. En efecto:

i) $p * p = 2p - p = p$ para todo $p \in V$.

ii) Calculemos lo siguiente para todo $p,\, x \in V$:

$$p * (\, p * x\,) \ = \ 2p - (\,2p - x\,) \ = \ x\ .$$

Entonces la reflexión $S_p : V \longrightarrow V$, $x \longmapsto p * x$, es involutiva $S_p^2 = \mathrm{id}_V$.

iii) Para verificar la diferencial de $S_p : V \longrightarrow V$, $x \longmapsto p * x$, calculemos para $p,\, x \in V$:

$$(\,S_p\,)_{*,p}\Big(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 p + tx \Big) \ = \ \left.\frac{d}{dt}\right|_0 p * (\,p + tx\,) \ = \ \left.\frac{d}{dt}\right|_0 2p - (\,p + tx\,) \ = \ \left.\frac{d}{dt}\right|_0 p - tx\,.$$

iv) Para todo $p,\, q,\, x \in V$ es verdad que:

$$p * (\,q * x\,) \ = \ 2p - (\,2q - x\,) \ = \ 2(\,2p - q) - (\,2p - x\,) \ = \ (\,p * q\,) * (\,p * x\,)\,.$$

En esta construcción se ha usado solamente la estructura de grupo abeliano de V. Entonces la misma construcción funciona para otros grupos abelianos por ejemplo funciona para todos los toros. Pero de hecho también funciona para grupos no abelianos.

2) [Grupos de Lie]
Los grupos de Lie son espacios simétricos. Recordemos que un grupo de Lie G es una variedad diferenciable con la estructura algebraica adicional de grupo tal que la multiplicación en G y el mapeo inverso son aplicaciones diferenciables:

$$\begin{array}{rcccccc} \cdot : & G \times G & \longrightarrow & G & (g, x) & \longmapsto & g\,x \\ \iota : & G & \longrightarrow & G & g & \longmapsto & g^{-1}\,. \end{array}$$

Para un grupo de Lie G definimos la operación binaria diferenciable

$$* : \quad G \times G \longrightarrow G \qquad\qquad (g, x) \longmapsto g * x \;:=\; g\,x^{-1}\,g$$

que lo convierte en un espacio simétrico. Para verificar los axiomas calculemos:

$$\begin{array}{rlcll}
\text{i)} & g * g & = & g\,g^{-1}\,g & = \; g \\
\text{ii)} & g * (g * x) & = & g\,(g\,x^{-1}\,g)^{-1}\,g & \\
& & = & g\,g^{-1}\,x\,g^{-1}\,g & = \; x \\
\text{iii)} & (S_g)_{*,g}\big(\frac{d}{dt}\big|_0\, g\,e^{tX}\big) & = & \frac{d}{dt}\big|_0\, g * (g\,e^{tX}) & \\
& & = & \frac{d}{dt}\big|_0\, g\,(g\,e^{tX})^{-1}\,g & \\
& & = & \frac{d}{dt}\big|_0\, g\,e^{-tX}\,g^{-1}\,g & = \; \frac{d}{dt}\big|_0\, g\,e^{-tX} \\
\text{iv)} & g * (h * x) & = & g\,(h\,x^{-1}\,h)^{-1}\,g & \\
& & = & (g\,h^{-1}\,g)\,(g^{-1}\,x\,g^{-1})\,(g\,h^{-1}\,g) & \\
& & = & (g * h)\,(g\,x^{-1}\,g)^{-1}\,(g * h) & = \; (g * h) * (g * x)
\end{array}$$

Para el tercer axioma hemos usado la identificación izquierda del espacio tangente T_gG de un grupo de Lie G en un punto $g \in G$ con el álgebra de Lie $\mathfrak{g} := T_eG$ de G:

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} T_gG \qquad\qquad X \longmapsto \frac{d}{dt}\bigg|_0 g\,e^{tX}\,.$$

De igual manera se podría usar la identificación derecha para verificar el tercer axioma.

3) [Matrices Definidas Positivas]
Sea $\mathbb{P}_n \subset \mathrm{Mat}^{\mathrm{sim}}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices definidas positivas en el espacio vectorial de matrices reales simétricas de $n \times n$, es decir:

$$\mathbb{P}_n \;:=\; \{\; P \in \mathrm{Mat}^{\mathrm{sim}}_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\mid\; P^t = P \text{ y definida positiva } x^tPx > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \;\}.$$

Entonces $\mathbb{P}_n$ es un espacio simétrico bajo la operación binaria diferenciable:

$$* : \quad \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n \qquad\qquad (P, X) \longmapsto P * X = P X^{-1} P .$$

Para $\mathbb{P}_n$ la demostración de los axiomas que debe satisfacer un espacio para ser simétrico es muy similar a la que se hizo para un grupo de Lie. Sin embargo $\mathbb{P}_n$ no es un grupo de Lie, aunque sea una subvariedad de las matrices (ver apéndice A.24). Además el subconjunto $\mathbb{P}_n^\circ \subset \mathbb{P}_n$ de las matrices con determinante igual a 1 es un subespacio simétrico, es decir $P * X \in \mathbb{P}_n^\circ$ para dos puntos cualesquiera $P, X \in \mathbb{P}_n^\circ$, porque $\det(PX^{-1}P) = (\det P)^2 (\det X)^{-1}$.

4) [Esferas]
La esfera de vectores con norma $r > 0$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir,

$$\mathbb{S}_r^n := \{ \, p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g(p, p) := p_0^2 + p_1^2 + \cdots + p_n^2 = r^2 \, \}$$

es un espacio simétrico bajo la siguiente operación binaria diferenciable

$$* : \quad \mathbb{S}_r^n \times \mathbb{S}_r^n \longrightarrow \mathbb{S}_r^n \qquad\qquad (p, x) \longmapsto p * x := 2\,\frac{g(p, x)}{r^2}\, p - x.$$

Observemos que el mapeo $S_p : \mathbb{S}_r^n \longrightarrow \mathbb{S}_r^n$ es la restricción a $\mathbb{S}_r^n$ de la aplicación lineal

$$S_p : \quad \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \qquad\qquad x \longmapsto S_p(x) := -\Big(x - 2\,\frac{g(p, x)}{g(p, p)}\, p \Big).$$

Esta aplicación lineal tiene como valores propios a $+1$ sobre la recta $\mathbb{R}p$ generada por p y a -1 sobre su complemento ortogonal $\{p\}^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$, lo cual implica que:

i) Cada punto $p \in \mathbb{S}_r^n$ es un punto fijo $S_p(p) = p * p = p$ bajo la aplicación S_p.
ii) La aplicación lineal S_p es involutiva $S_p^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ y así $p * (p * x) = x$.
iii) Bajo la identificación $T_p\mathbb{S}_r^n = \{p\}^\perp$ tenemos:

$$(S_p)_{*,p} : \quad \{p\}^\perp \longrightarrow \{p\}^\perp \qquad\qquad X \longmapsto -X .$$

iv) La composición de las reflexiones S_p y S_q en dos puntos $p, q \in \mathbb{S}_r^n$ satisface:

$$S_p \circ S_q = S_{S_p(q)} \circ S_p .$$

5) [Espacios Hiperbólicos]
La misma construcción funciona para el producto estándar en $\mathbb{R}^{n+1}$ con signatura de Lorentz $(n, 1)$. Aquí definimos $g : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(v, w) := -v_0 w_0 + v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

y con esto definimos el espacio hiperbólico real de "radio" $r > 0$ por:

$$\mathbb{R}H_r^n := \{ \, p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g(p, p) = -r^2 \text{ y } p_0 > 0 \, \}.$$

El espacio hiperbólico real es un espacio simétrico bajo la operación binaria:

$$* : \quad \mathbb{R}H_r^n \times \mathbb{R}H_r^n \longrightarrow \mathbb{R}H_r^n \qquad\qquad (p, x) \longmapsto p * x := 2\,\frac{g(p, x)}{-r^2}\, p - x .$$

6) [Espacios De Sitter y Anti–De Sitter]
Se tiene que la misma construcción funciona para cualquier producto escalar no degenerado en $\mathbb{R}^{n+1}$. Sea $g : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ un producto escalar no degenerado de signatura (p, m). La concha de masa $r^2 \neq 0$

$$\mathbf{CM}^n_r \ := \ \{ \ p \in \mathbb{R}^{n+1} \ | \ g(p, p) = r^2 \ \}$$

es un espacio simétrico bajo la operación binaria diferenciable:

$$*: \quad \mathbf{CM}^n_r \times \mathbf{CM}^n_r \longrightarrow \mathbf{CM}^n_r \qquad\qquad (p, x) \longmapsto p * x \ := \ 2\,\frac{g(p, x)}{g(p, p)}\, p - x \, .$$

En particular los espacios llamados De Sitter y Anti–De Sitter, dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{dS}^n_r &= \{ \ p \in \mathbb{R}^{1,n} \ | \ g(p, p) = -1 \ \} \\ \mathbf{AdS}^n_r &= \{ \ p \in \mathbb{R}^{2,n-1} \ | \ g(p, p) = +1 \ \} \end{aligned}$$

son espacios simétricos “Lorentzianos” de gran interés en varias teorías de gravitación, en cosmología y física teórica en general.

7) [Espacio Twistorial]
El espacio twistorial de la esfera $\mathbb{S}^{2n-2}$ se define por:

$$\mathfrak{T}(\mathbb{R}^{2n}) \ := \ \{ \ I \in \operatorname{End}\mathbb{R}^{2n} \ | \ I \text{ ortogonal e } I^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n}} \ \} \, .$$

Es un espacio simétrico con operación binaria diferenciable definida por:

$$*: \quad \mathfrak{T}(\mathbb{R}^{2n}) \times \mathfrak{T}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathbb{R}^{2n}) \qquad\qquad (I, J) \longmapsto I * J \ = \ -I\,J\,I \, .$$

El espacio tangente a $\mathfrak{T}(\mathbb{R}^{2n})$ en un punto $I \in \mathbb{R}^{2n}$ se puede identificar con el siguiente espacio vectorial:

$$T_I\mathfrak{T}(\mathbb{R}^{2n}) \ = \ \{ \ A \in \mathrm{Mat}_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \ | \ A^t = -A \text{ y } IA = -AI \ \} \, .$$

8) [Graßmannianas]
Sea $\mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n$ el conjunto de todos los subespacios de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k \in \{0, \ldots, n\}$. Para cada $U \in \mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n$ consideramos la decomposición ortogonal de $\mathbb{R}^n$ en el subespacio $U \subset \mathbb{R}^n$ y su complemento ortogonal $U^\perp \subset \mathbb{R}^n$, es decir:

$$\mathbb{R}^n \ = \ U \oplus U^\perp \, .$$

Sea $\mathrm{pr}^\perp_U : \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ la proyección ortogonal a U con núcleo $U^\perp$, entonces $2\mathrm{pr}^\perp_U - \mathrm{id}$ es un endomorfismo simétrico de $\mathbb{R}^n$ con los dos valores propios $+1$ y -1 cuyos subespacios propios son U y $U^\perp$. Esta construcción pone la Graßmanniana $\mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n$ en biyección

$$\mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n \xrightarrow{\ \cong\ } \mathrm{G}^n_k \qquad\qquad U \longmapsto \widehat{U} \ := \ 2\,\mathrm{pr}^\perp_U - \mathrm{id}$$

con el conjunto de todas las matrices simétricas involutivas con traza $2k-n$:

$$\mathrm{G}_k^n \;:=\; \{\; \widehat{U} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}\mathbb{R} \;\mid\; \widehat{U}^t = \widehat{U} \text{ y } \widehat{U}^2 = \mathrm{id} \text{ con traza } \mathrm{tr}\,(\,\widehat{U}\,) = 2k-n \;\} \;.$$

Para hacer $\mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n$ un espacio simétrico consideramos la operación binaria suave

$$* \;:\; \mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n \qquad\qquad (\,U,\,V\,) \longmapsto U * V$$

caracterizada por $\widehat{U * V} := \widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U}$. De hecho el resultado $\widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U}$ es otra vez un elemento de G_k^n, porque se tiene para todo $\widehat{U},\,\widehat{V} \in \mathrm{G}_k^n$ las identidades

$$(\,\widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U}\,)^t = \widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U} \qquad\qquad (\,\widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U}\,)^2 = \widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U}^2\,\widehat{V}\,\widehat{U} = \widehat{U}\,\widehat{V}^2\,\widehat{U} = \mathrm{id}$$

y además $\mathrm{tr}\,(\,\widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U}\,) = \mathrm{tr}\,(\,\widehat{U}^2\,\widehat{V}\,) = \mathrm{tr}\,(\,\widehat{V}\,) = 2k-n$ por la invarianza cíclica de la traza. Por tal motivo la operación binaria $* : \mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n \times \mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n$ está bien definida y además satisface los tres axiomas algebraicos de un espacio simétrico:

$$\begin{array}{rlcll}
\text{i)} & U * U & \widehat{=} & \widehat{U}\,\widehat{U}\,\widehat{U} & \widehat{=}\;\; U \\[1ex]
\text{ii)} & U * (\,U * V\,) & \widehat{=} & \widehat{U}\,(\,\widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U}\,)\,\widehat{U} & \\
 & & = & \widehat{U}^2\,\widehat{V}\,\widehat{U}^2 & \widehat{=}\;\; V \\[1ex]
\text{iv)} & U * (\,V * W\,) & \widehat{=} & \widehat{U}\,(\,\widehat{V}\,\widehat{W}\,\widehat{V}\,)\,\widehat{U} & \\
 & & = & (\,\widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U}\,)(\,\widehat{U}\,\widehat{W}\,\widehat{U}\,)(\,\widehat{U}\,\widehat{V}\,\widehat{U}\,) & \\
 & & = & (\,\widehat{U * V}\,)(\,\widehat{U * W}\,)(\,\widehat{U * V}\,) & \widehat{=}\;\; (\,U * V\,) * (\,U * W\,) \;.
\end{array}$$

Por otro lado, la biyección $\mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathrm{G}_k^n$ es de hecho un encaje de la Graßmanniana en el espacio vectorial $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\,\mathbb{R}\,)$ de matrices de n por n. Así induce un isomorfismo de espacios vectoriales entre el espacio tangente de $\mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n$ en un punto $U \in \mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n$ y

$$T_U\mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n \;\cong\; \{\; \widehat{X} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\,\mathbb{R}\,) \;\mid\; \widehat{X}^t = \widehat{X} \text{ y } \widehat{X}\,\widehat{U} + \widehat{U}\,\widehat{X} = 0 \;\}$$

con lo cual podremos establecer el tercer axioma de un espacio simétrico también:

$$(\,S_U\,)_{*,U}X \;=\; \frac{d}{dt}\bigg|_0 \widehat{U}\,(\,\widehat{U} + t\,\widehat{X}\,)\,\widehat{U} \;=\; \widehat{U}\,\widehat{X}\,\widehat{U} \;=\; -\,\widehat{U}^2\,\widehat{X} \;=\; -\,\widehat{X} \;.$$

Por lo tanto se tiene que la Grassmanniana es un espacio simétrico. Finalmente el producto escalar $\mathrm{g}(\widehat{X},\widehat{Y}) := \mathrm{tr}\,(\,\widehat{X}\,\widehat{Y}\,)$ definido en el espacio vectorial $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\,\mathbb{R}\,)$ induce una métrica riemanniana g_{FS} en la Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k\mathbb{R}^n$ llamada la *métrica de Fubini–Study*. Tenemos que todas las reflexiones S_U son isometrías, ya que:

$$\mathrm{g}(\,\widehat{U}\,\widehat{X}\,\widehat{U},\,\widehat{U}\,\widehat{Y}\,\widehat{U}\,) \;=\; \mathrm{tr}\,(\,\widehat{U}\,\widehat{X}\,\widehat{U}^2\,\widehat{Y}\,\widehat{U}\,) \;=\; \mathrm{g}(\,\widehat{X},\,\widehat{Y}\,) \;.$$

Definición 2.3 (Homomorfismo entre Espacios Simétricos).
Sean $\mathbb{M}$ y $\mathbb{L}$ dos espacios simétricos cuyas operaciones binarias diferenciables están dadas por $*_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}\times\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ y $*_{\mathbb{L}} : \mathbb{L}\times\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L}$ respectivamente. Una aplicación suave $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ se llama un homomorfismo de espacios simétricos, si y sólo si para todo $p,\, q \in \mathbb{M}$:

$$\varphi(\, p *_{\mathbb{M}} q\,) \;=\; \varphi(\,p\,) *_{\mathbb{L}} \varphi(\,q\,)\;.$$

Definición 2.4 (Subespacio Simétrico).
Sean $\mathbb{M}$ un espacio simétrico con operación binaria diferenciable dada por $* : \mathbb{M}\times\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$. Entonces una subvariedad $\mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ se llama un subespacio simétrico, si y solamente si

$$p * q \;\in\; \mathbb{L} \qquad\qquad \text{para todo } p,\, q \;\in\; \mathbb{L}$$

es decir, si $\mathbb{L}$ es un espacio simétrico bajo la operación binaria de $\mathbb{M}$ restringida a $\mathbb{L}$. En este caso la inclusión $\iota : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{M}$, $p \longmapsto p$, es un homomorfismo de espacios simétricos.

Lema 2.5 (Composición de Homomorfismos).
Sean $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ y $\psi : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{O}$ dos homomorfismos de espacios simétricos, entonces su composición es un homomorfismo de espacios simétricos también:

$$\mathbb{M} \xrightarrow{\;\varphi\;} \mathbb{L} \xrightarrow{\;\psi\;} \mathbb{O}\;.$$

Demostración. Por definición de homomorfismo de espacios simétricos se tiene que:

$$\psi(\,\varphi(\,p *_{\mathbb{M}} q\,)\,) \;=\; \psi(\,\varphi(\,p\,) *_{\mathbb{L}} \varphi(\,q\,)\,) \;=\; \psi(\,\varphi(\,p\,)\,) *_{\mathbb{O}} \psi(\,\varphi(\,q\,)\,)\;.$$

∎

Lema 2.6 (Interpretación del Axioma Cuatro de Espacios Simétricos).
Sean $\mathbb{M}$ un espacio simétrico con operación binaria diferenciable $* : \mathbb{M}\times\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$. Entonces el axioma cuatro de espacios simétricos

$$p * (\,q * x\,) \;=\; (\,p * q\,) * (\,p * x\,)$$

para cualesquiera puntos $p,\, q,\, x \in \mathbb{M}$ es equivalente a que la reflexión

$$S_p : \;\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \qquad\qquad x \longmapsto p * x$$

centrada en $p \in \mathbb{M}$ sea un automorfismo (involutivo) del espacio simétrico $\mathbb{M}$.

Definición 2.7 (Geodésicas en Espacios Simétricos).
Sea $\mathbb{M}$ un espacio simétrico con operación binaria $* : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$. Una geodésica en $\mathbb{M}$ es un homomorfismo $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ de espacios simétricos, esto es, para todo $\tau,\, t \in \mathbb{R}$:

$$\gamma(\,\tau *_{\mathbb{R}} t\,) \;=\; \gamma(\,2\tau - t\,) \;\stackrel{!}{=}\; \gamma(\,\tau\,) *_{\mathbb{M}} \gamma(\,t\,).$$

Ejemplo 2.8 (Geodésicas en Espacios Vectoriales).
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, las rectas en V definidas por

$$\gamma : \ \mathbb{R} \longrightarrow V \qquad\qquad t \longmapsto \gamma(t) = p + t\,x$$

con p, $x \in V$ son geodésicas, pues calculando tenemos que

$$\begin{aligned}\gamma(\tau) *_V \gamma(t) &= 2\,\gamma(\tau) - \gamma(t) \\ &= 2\,(p + \tau\,x) - (p + t\,x) = p + (2\tau - t)\,x \\ &= \gamma(2\tau - t) = \gamma(\tau *_{\mathbb{R}} t).\end{aligned}$$

Corolario 2.9 (Invarianza de las Geodésicas).
Sea $\mathbb{M}$ *un espacio simétrico y sea* $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ *una geodésica en* $\mathbb{M}$*. Entonces, la imagen de* γ *bajo la reflexión* $S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ *centrada en* $p \in \mathbb{M}$ *es una geodésica en* $\mathbb{M}$*, a saber es la geodésica:*

$$S_p \circ \gamma : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M} \qquad\qquad t \longmapsto p * \gamma(t).$$

Demostración. Según el Lema 2.6 la reflexión $S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$, $x \longmapsto p * x$, centrada en cualquier punto $p \in \mathbb{M}$ es un homomorfismo de espacios simétricos. Entonces la composición $S_p \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ de dos homomorfismos de espacios simétricos es una geodésica. ■

Corolario 2.10 (Los Subespacios Simétricos son Totalmente Geodésicos).
Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ *un subespacio simétrico del espacio simétrico* $\mathbb{M}$*. Entonces* $\mathbb{L}$ *es totalmente geodésico en* $\mathbb{M}$*: si cada geodésica* $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{L}$ *en el subespacio simétrico* $\mathbb{L}$ *es una geodésica* $\iota \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ *en el espacio simétrico* $\mathbb{M}$ *también.*

Demostración. Por definición la inclusión $\iota : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{M}$, $p \longmapsto p$, de un subespacio simétrico $\mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ es un homomorfismo de espacios simétricos. ■

Lema 2.11 (Ecuación Geodésica en un Espacio Simétrico).
Toda geodésica $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ *en un espacio simétrico* $\mathbb{M}$ *satisface un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias regulares de segundo orden y toda solución local de este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociada al espacio simétrico* $\mathbb{M}$ *se extiende a un homomorfismo* $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ *de espacios simétricos.*

Demostración. Para obtener un sistema de coordenadas locales del producto cartesiano $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ copiamos un sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_m)$ de $\mathbb{M}$, las copias del segundo factor las renombramos por $(y_1, \ldots, y_m)$. En particular la diagonal $\mathbb{M} \subset \mathbb{M} \times \mathbb{M}$ es igual en las coordenadas locales que elegimos para el conjunto de puntos:

$$(x_1, \ldots, x_m; x_1, \ldots, x_m) .$$

La operación binaria diferenciable $* : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ corresponde en estas coordenadas locales para $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ a m funciones diferenciables $S_1, \ldots, S_m$ de $2m$ variables, es decir:

$$\begin{aligned}&x^{-1}(x_1, \ldots, x_m) * x^{-1}(y_1, \ldots, y_m) \\ &\qquad = x^{-1}(S_1(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m), \ldots, S_m(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m)) .\end{aligned}$$

En coordenadas locales una curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ se escribe $t \longmapsto \gamma(t) = (\,\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t)\,)$ y tal curva es un homomorfismo de espacios simétricos, si y solamente si

$$\gamma_\lambda(\,2\,\tau\,-\,t\,) \;=\; S_\lambda(\,\gamma_1(\tau),\,\ldots,\,\gamma_m(\tau);\,\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t)\,)$$

para todo $\lambda\,=\,1,\,\ldots,\,m$ y todo $\tau,\,t\,\in\,\mathbb{R}$. Tomando la segunda derivada con respecto a t por medio de la regla de la cadena en estas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\gamma_\lambda}{dt^2}(\,2\,\tau\,-\,t\,) \;&=\; \sum_{\mu,\,\nu\,=\,1}^{m}\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu}(\,\gamma_1(\tau),\ldots,\gamma_m(\tau);\,\gamma_1(t),\ldots,\gamma_m(t)\,)\,\frac{d\gamma_\mu}{dt}(t)\,\frac{d\gamma_\nu}{dt}(t)\\ &\quad+\;\sum_{\mu\,=\,1}^{m}\frac{\partial S_\lambda}{\partial y_\mu}(\,\gamma_1(\tau),\ldots,\gamma_m(\tau),\,\gamma_1(t),\ldots,\gamma_m(t)\,)\frac{d^2\gamma_\mu}{dt^2}(t)\;.\end{aligned}$$

Evaluamos las ecuaciones obtenidas en $\tau\,=\,t$ y llegamos a:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\gamma_\lambda}{dt}(t) \;&=\; \sum_{\mu,\,\nu\,=\,1}^{m}\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu}(\,\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t);\,\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t)\,)\,\frac{d\gamma_\mu}{dt}(t)\,\frac{d\gamma_\nu}{dt}(t)\\ &\quad+\;\sum_{\mu\,=\,1}^{m}\frac{\partial S_\lambda}{\partial y_\mu}(\,\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t);\,\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t)\,)\,\frac{d^2\gamma_\mu}{dt^2}(t)\;.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Ahora para todo punto $p\,\in\,\mathbb{M}$ del espacio simétrico $\mathbb{M}$ el tercer axioma

$$(\,S_p\,)_{*,\,p}:\quad T_p\mathbb{M}\;\longrightarrow\;T_p\mathbb{M}\qquad\qquad X\;\longmapsto\;-\,X$$

visto en las coordenadas locales que elegimos se lee como sigue

$$\frac{\partial S_\lambda}{\partial y_\mu}(\,x_1,\,\ldots,\,x_m,\,x_1,\,\ldots,\,x_m\,) \;=\; -\,\delta_{\lambda\,=\,\mu}\tag{2.2}$$

para todo $(x_1,\ldots,x_m)$. Con estos valores el segundo sumando en la ecuación (2.1) se reduce a la siguiente igualdad:

$$\sum_{\mu\,=\,1}^{m}\frac{\partial S_\lambda}{\partial y_\mu}(\,\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t);\;\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t)\,)\,\frac{d^2\gamma_\mu}{dt^2}(\,t\,) \;=\; -\,\frac{d^2\gamma_\lambda}{dt^2}(\,t\,)$$

y sustituyendo ésta en las ecuaciones (2.1) se obtiene que:

$$\frac{d^2\gamma_\lambda}{dt^2}(\,t\,) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,\nu\,=\,1}^{m}\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu}(\,\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t);\,\gamma_1(t),\,\ldots,\,\gamma_m(t)\,)\,\frac{d\gamma_\mu}{dt}(\,t\,)\,\frac{d\gamma_\nu}{dt}(\,t\,)\;.\tag{2.3}$$

Así hemos obtenido finalmente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, que caracteriza a las geodésicas en $\mathbb{M}$. Para demostrar el inverso de que toda solución de este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es una geodésica en $\mathbb{M}$ se usa la unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales prescritos. ∎

Definición 2.12 (Símbolos de Christoffel)**.**
Para un espacio simétrico $\mathbb{M}$ se definen los símbolos de Christoffel con respecto a las coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_m)$ por:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x_1, \ldots, x_m) \;:=\; -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial y_\mu \, \partial y_\nu}(x_1, \ldots, x_m; x_1, \ldots, x_m) \,.$$

Así usando esta definición la ecuación de las geodésicas (2.3) asociada a un espacio simétrico $\mathbb{M}$ se escribe como

$$\frac{d^2\gamma_\lambda}{dt^2}(t) \;+\; \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t))\,\frac{d\gamma_\mu}{dt}(t)\,\frac{d\gamma_\nu}{dt}(t) \;=\; 0 \qquad \forall\, \lambda \;=\; 1, \ldots, m.$$

Esta reformulación tiene exactamente la misma forma que la ecuación (1.2) de las geodésicas asociada a una conexión ∇ libre de torsión en el haz tangente de $\mathbb{M}$ pues $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, porque al tratar con funciones suaves tenemos:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x_1, \ldots, x_m) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial y_\mu \, \partial y_\nu}(x_1, \ldots, x_m; x_1, \ldots, x_m) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial y_\nu \, \partial y_\mu}(x_1, \ldots, x_m; x_1, \ldots, x_m) \;=\; \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}(x^1, \ldots, x_m).
\end{aligned}$$

2.3. Construcción de la Conexión de Loos

Definición 2.13 (Conexión de Loos)**.**
Todo espacio simétrico $\mathbb{M}$ tiene asociada una conexión canónica libre de torsión en su haz tangente, la cual se llama la conexión de Loos y se denota por ∇^{Loos}. En términos del Hessiano asociado la conexión de Loos de $\mathbb{M}$ queda definida por

$$\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_p f \;:=\; (\Psi^2_p)^{-1}(\, f^{\mathrm{mod}}_p \;+\; I^3_p \,)$$

donde $f^{\mathrm{mod}}_p \in I^2_p$ es la modificación de $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ en el punto $p \in \mathbb{M}$ definida por:

$$f^{\mathrm{mod}}_p \;:=\; \frac{1}{2}\,(\, f \;+\; f \circ S_p \,) \;-\; f(p)\,\mathbf{1} \,.$$

La virtud de definir la modificación f^{mod}_p de una función arbitraria $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ de esta manera es que $p \in \mathbb{M}$ es automáticamente un punto crítico de su modificación $f^{\mathrm{mod}}_p \in I^2_p$. Esto es, el concepto de modificación provee a un espacio simétrico $\mathbb{M}$ de un operador Hessiano, que corresponde mediante el Teorema 1.39 a una conexión canónica libre de torsión en el haz tangente de $\mathbb{M}$ llamada conexión de Loos ∇^{Loos}. Verificamos primero que la modificación f^{mod}_p de cualquier función $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ en un punto $p \in \mathbb{M}$ siempre se anula en p:

$$f^{\mathrm{mod}}_p(p) \;=\; \frac{1}{2}\,(\, f(p) \;+\; f(p * p)\,) \;-\; f(p) \;=\; 0 \,.$$

Entonces, podemos establecer la condición de que $f_p^{\mathrm{mod}} \in I_p^2$, para la construcción de la conexión de Loos calculamos la clase $d_p(\, f_p^{\mathrm{mod}}\,) = f_p^{\mathrm{mod}} + I_p^2$ representada por f_p^{mod}

$$\begin{aligned} d_p(\, f_p^{\mathrm{mod}}\,) &= \frac{1}{2}(\, d_p f \;+\; d_p(\, f \,\circ\, S_p\,)\,) \;-\; f(p)\, d_p\mathbf{1} \\ &= \frac{1}{2}\, d_p f \;+\; \frac{1}{2}\,(\, S_p\,)_p^*\, d_p f \;=\; 0 \end{aligned}$$

en el cociente I_p/I_p^2. En este cálculo hemos usado $d_p\mathbf{1} = 0$ y el hecho que la diferencial

$$(\, S_p\,)_p^* : \quad T_p^*\mathbb{M} \longrightarrow T_p^*\mathbb{M} \qquad\qquad d_p h \longmapsto d_p(\, h \circ S_p\,) \overset{!}{=} -\, d_p h \tag{2.4}$$

es la aplicación lineal adjunta a $(\, S_p\,)_{*,\,p} : T_p\mathbb{M} \longrightarrow T_p\mathbb{M}$, y así es igual a menos la identidad debido al tercer axioma de espacios simétricos. En conclusión $f_p^{\mathrm{mod}} \in I_p$ representa la clase $0 \in I_p/I_p^2$ y por ende satisface $f_p^{\mathrm{mod}} \in I_p^2$ como lo queríamos. En particular el Hessiano

$$\mathrm{Hess}_p^{\mathbb{M}} f \;=\; (\, \Psi_p^2\,)^{-1}(\, f_p^{\mathrm{mod}} \;+\; I_p^3\,)$$

está bien definido para toda $f \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ y todo punto $p \in \mathbb{M}$. Por el momento no verificamos que el mapeo $p \longmapsto \mathrm{Hess}_p^{\mathbb{M}} f$ es una sección suave del haz vectorial $\mathrm{Sym}^2 T^*\mathbb{M}$ sobre $\mathbb{M}$, esta cuenta explícita en coordenadas locales la daremos más tarde.

En seguida verificaremos los axiomas de un operador Hessiano para $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$. Observamos primero que la modificación de la función constante $\mathbf{1} \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ es igual a la función cero

$$\mathbf{1}_p^{\mathrm{mod}} \;=\; \frac{1}{2}(\, \mathbf{1} \;+\; \mathbf{1} \circ S_p\,) \;-\; \mathbf{1} \;=\; 0$$

porque $\mathbf{1} \circ S_p = \mathbf{1}$ trivialmente, es decir $\mathrm{Hess}_p^{\mathbb{M}}\mathbf{1} = 0$ para todo punto $p \in \mathbb{M}$. Aplicando el Lema 1.23 a la aplicación suave $S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M} \arrow[r, "\mathrm{Sym}^2(S_p)_p^*"] \arrow[d, "\Psi_p^2"', "\cong"] & \mathrm{Sym}^2 T_p^*\mathbb{M} \arrow[d, "\Psi_p^2"', "\cong"] \\ I_p^2/I_p^3 \arrow[r, "(S_p)_p^*"] & I_p^2/I_p^3 \end{tikzcd}$$

con el isomorfismo Ψ_p^2 en las columnas. En este diagrama la aplicación $\mathrm{Sym}^2(\, S_p\,)_p^*$ es la identidad, porque la ecuación (2.4) asegura que $(\, S_p\,)_p^* = -\mathrm{id}_{T_p^*\mathbb{M}}$, es decir:

$$(\, S_p\,)_p^* : \quad I_p^2/I_p^3 \longrightarrow I_p^2/I_p^3, \qquad\qquad f \;+\; I_p^3 \longmapsto f \,\circ\, S_p \;+\; I_p^3 \overset{!}{=} f \;+\; I_p^3\,.$$

Así obtenemos para cualquier función $f \in I_p^2$ que se anula en $p \in \mathbb{M}$ hasta orden 1 que:

$$f_p^{\mathrm{mod}} \;+\; I_p^3 \;=\; \Big(\, \frac{1}{2}(\, f \;+\; f \,\circ\, S_p\,) \;-\; f(p)\,\mathbf{1} \Big) \;+\; I_p^3 \;=\; f \;+\; I_p^3$$

porque $f(p) = 0$. Es decir, que $f \equiv f_p^{\mathrm{mod}}$ módulo el ideal I_p^3 y en consecuencia directa:

$$\mathrm{Hess}_p^{\mathbb{M}} f \;=\; (\Psi_p^2)^{-1}(\, f_p^{\mathrm{mod}} + I_p^3\,) \;=\; (\Psi_p^2)^{-1}(\, f + I_p^3\,)\;.$$

Así $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$ satisface el segundo y el tercer axioma para un operador Hessiano formulado en la Definición 1.27, en particular es un operador diferencial de orden dos y entonces también satisface el primer axioma. Usando la clasificación de los operadores Hessianos en el Teorema 1.39 concluimos que cada espacio simétrico $\mathbb{M}$ lleva una conexión canónica ∇^{Loos} libre de torsión en su haz tangente, la conexión de Loos caracterizada por la identidad

$$(\,\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}} f\,)(\,X,\,Y\,) \;=\; X\,(\,Y\,f\,) \;-\; (\,\nabla_X^{\mathrm{Loos}} Y\,)\,f \tag{2.5}$$

para cualquier función $f \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ y todo par de campos vectoriales $X,\,Y \in \Gamma(\,T\mathbb{M}\,)$.

La construcción de la conexión ∇^{Loos} de Loos a través del operador Hessiano asociado es bastante técnica y abstracta, entonces usaremos otra versión para esta construcción utilizando coordenadas locales. Sea $(\,x_1,\,\ldots,\,x_m\,)$ un sistema de coordenadas locales para un abierto $U \subset \mathbb{M}$ en un espacio simétrico $\mathbb{M}$ con operación binaria $*\,:\,\mathbb{M}\times\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$, y sea $(\,x_1,\,\ldots,\,x_m;\,y_1,\,\ldots,\,y_m\,)$ el sistema de coordenadas locales copiado para el abierto $U \times U \subset \mathbb{M}\times\mathbb{M}$ como en nuestros cálculos anteriores de las geodésicas en $\mathbb{M}$. Gracias al primer axioma de espacios simétricos la intersección $U \times U \cap *^{-1}(\,U\,) \subset \mathbb{M}\times\mathbb{M}$ contiene por lo menos una vecindad de la diagonal de U, en esta intersección la operación binaria se puede escribir como una m–áda $S_1,\,\ldots,\,S_m$ de funciones componentes:

$$\begin{aligned} &x^{-1}(\,x_1,\,\ldots,\,x_m\,) * x^{-1}(\,y_1,\,\ldots,\,y_m\,)\\ &\qquad = \; x^{-1}(\,S_1(\,x_1,\ldots,x_m;\,y_1,\ldots,y_m\,),\,\ldots,\,S_m(\,x_1,\ldots,x_m;\,y_1,\ldots,y_m\,)\,)\;. \end{aligned}$$

Fijamos un punto $p \in \mathbb{M}$ y fijamos la notación

$$\mathcal{X} \;:=\; (\,x_1,\,\ldots,\,x_m\,) \qquad\qquad \mathcal{P} \;:=\; (\,x_1(p),\,\ldots,\,x_m(p)\,)$$

para los argumentos comunes y así reducir el tamaño de las fórmulas. Para calcular $\mathrm{Hess}_p^{\mathbb{M}} f$ para una función dada $f \in C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ en el punto $p \in \mathbb{M}$ contemplamos la identidad

$$(\,x \circ S_p \circ x^{-1}\,)(\,\mathcal{X}\,) \;=\; (\,S_1(\,\mathcal{P},\,\mathcal{X}\,),\,\ldots,\,S_m(\,\mathcal{P},\,\mathcal{X}\,)\,)\;.$$

que refleja la definición de las funciones componentes $S_1,\,\ldots,\,S_m$ de $*$ y podemos concluir:

$$(\,f \circ S_p \circ x^{-1}\,)(\,\mathcal{X}\,) \;=\; (\,f \circ x^{-1}\,)(\,S_1(\,\mathcal{P},\,\mathcal{X}\,),\,\ldots,\,S_m(\,\mathcal{P},\,\mathcal{X}\,)\,)\;.$$

Según la regla de la cadena las segundas derivadas parciales de la composición $f \circ S_p \circ x^{-1}$ son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(f\circ S_p\circ x^{-1})}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\mathcal{X}) \;=\; &\sum_{\alpha,\,\beta\,=\,1}^m \frac{\partial^2(f\circ x^{-1})}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}(S_1(\mathcal{P},\mathcal{X}),\ldots,S_m(\mathcal{P},\mathcal{X}))\,\frac{\partial S_\alpha}{\partial y_\mu}(\mathcal{P},\mathcal{X})\,\frac{\partial S_\beta}{\partial y_\nu}(\mathcal{P},\mathcal{X})\\ &+\sum_{\lambda\,=\,1}^m \frac{\partial(f\circ x^{-1})}{\partial x_\lambda}(S_1(\mathcal{P},\mathcal{X}),\ldots,S_m(\mathcal{P},\mathcal{X}))\,\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu}(\mathcal{P},\mathcal{X}) \end{aligned}$$

Ahora evaluamos esta expresión en $\mathcal{X} := \mathcal{P}$ tomando en cuenta el primer y el tercer axioma de espacios simétricos respectivamente en la forma $\mathcal{P} = (\, S_1(\mathcal{P},\mathcal{P}),\,\ldots,\, S_m(\mathcal{P},\mathcal{P})\,)$ y

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial y_\mu}(\,\mathcal{P},\;\mathcal{P}\,) \;=\; -\,\delta_{\alpha=\mu}$$

que hemos usado antes en la ecuación (2.2). De esta manera obtenemos el resultado final:

$$\frac{\partial^2(\,f\circ S_p\circ x^{-1}\,)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\,\mathcal{P}\,) \;=\; \frac{\partial^2(\,f\circ x^{-1}\,)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\,\mathcal{P}\,) \;+\; \sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial(\,f\circ x^{-1}\,)}{\partial x_\lambda}(\,\mathcal{P}\,)\,\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu}(\,\mathcal{P},\,\mathcal{P}\,). \tag{2.6}$$

Un punto interesante en esta fórmula es que los coeficientes de la suma, salvo un factor escalar -2, son exactamente los símbolos de Christoffel de la Definición 2.12, que obtuvimos estudiando la ecuación diferencial ordinaria satisfecha por las geodésicas en $\mathbb{M}$:

$$\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu}(\,\mathcal{P},\;\mathcal{P}\,) \;=:\; -\,2\,\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\,\mathcal{P}\,).$$

Usaremos la ecuación (2.6) para calcular el valor del Hessiano: $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_p f \;\in\; \mathrm{Sym}^2 T^*_p\mathbb{M}$ de la función $f \;\in\; C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ en el punto $p \;\in\; \mathbb{M}$. Para eso usamos un truco: justificado por la identidad $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_p f \;=\; (\,\Psi^2_p\,)^{-1}(\,f^{\mathrm{mod}}_p \;+\; I^3_p\,) \;=\; \mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_p f^{\mathrm{mod}}_p$ remplazamos $f \;\in\; C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$ en la fórmula 1.7 en coordenadas locales por su modificación $f^{\mathrm{mod}}_p \;\in\; I^2_p$ en $p \;\in\; \mathbb{M}$ para obtener

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_p f \;&=\; \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m}\frac{\partial^2(\,f^{\mathrm{mod}}_p\;\circ\;x^{-1}\,)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\,\mathcal{P}\,)\,d_px_\mu\;\cdot\;d_px_\nu \\
&=\; \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2(\,f\;\circ\;x^{-1}\,)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\,\mathcal{P}\,) \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2(\,f\;\circ\;S_p\;\circ\;x^{-1}\,)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\,\mathcal{P}\,)\right)d_px_\mu\;\cdot\;d_px_\nu \\
&=\; \frac{1}{2}\sum_{\mu,\,\nu=1}^{m}\left(\frac{\partial^2(\,f\;\circ\;x^{-1}\,)}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}(\,\mathcal{P}\,) \;-\; \sum_{\lambda=1}^{m}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\,\mathcal{P}\,)\,\frac{\partial(\,f\circ x^{-1}\,)}{\partial x_\lambda}(\,\mathcal{P}\,)\right)d_px_\mu\;\cdot\;d_px_\nu
\end{aligned}$$

para cualquier función $f \;\in\; C^\infty(\,\mathbb{M}\,)$, en donde hemos usado la ecuación (2.6) en la tercera línea. Comparando esta fórmula explícita del operador $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$ asociado a un espacio simétrico $\mathbb{M}$ con la fórmula (1.7) para Hess^∇ y una conexión ∇ libre de torsión concluimos que los símbolos de Christoffel de la Definición 2.12 son de hecho los símbolos de Christoffel de la conexión ∇^{Loos} de Loos. En particular las geodésicas de la Definición 2.7 coinciden con las soluciones de la ecuación geodésica (1.2) asociada a la conexión de Loos. El siguiente lema es una generalización directa y profunda de esta conclusión:

Lema 2.14 (Los Homomorfismos son Aplicaciones Afines)**.**
Sea $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ un homomorfismo de espacios simétricos, es decir que tenemos

$$\varphi(\,p\;*_{\mathbb{M}}\;x\,) \;=\; \varphi(\,p\,)\;*_{\mathbb{L}}\;\varphi(\,x\,)$$

para todos $p,\,x \;\in\; \mathbb{M}$, entonces φ es una aplicación afín en el sentido de la Definición 1.32.

Demostración. Observamos primero que un homomorfismo $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ entre espacios simétricos entrelaza las reflexiones $S_p^{\mathbb{M}}$ y $S_{\varphi(p)}^{\mathbb{L}}$ centradas en $p \in \mathbb{M}$ y $\varphi(p) \in \mathbb{L}$ en el sentido

$$\Big(\varphi \circ S_p^{\mathbb{M}}\Big)(\,x\,) \;=\; \varphi(\,p *_{\mathbb{M}} x\,) \;=\; \varphi(\,p\,) *_{\mathbb{L}} \varphi(\,x\,) \;=\; \Big(S_{\varphi(p)}^{\mathbb{L}} \circ \varphi\Big)(\,x\,)$$

para cualquier $x \in \mathbb{M}$. Entonces la modificación $f_{\varphi(p)}^{\mathrm{mod}}$ de una función $f \in C^\infty(\,\mathbb{L}\,)$ en el punto imagen $\varphi(p) \in \mathbb{L}$ de un punto $p \in \mathbb{M}$ se jala bajo φ a la modificación de $f \circ \varphi$ en p:

$$\begin{aligned} f_{\varphi(p)}^{\mathrm{mod}} \circ \varphi \;&=\; \tfrac{1}{2}\Big(\,f \;+\; f \,\circ\, S_{\varphi(p)}^{\mathbb{L}}\,\Big) \circ \varphi \;-\; f(\,\varphi(p)\,)\,(\,\mathbf{1} \circ \varphi\,) \\ &=\; \tfrac{1}{2}\Big(\,f \circ \varphi \;+\; f \,\circ\, S_{\varphi(p)}^{\mathbb{L}} \circ \varphi\,\Big) \;-\; f(\,\varphi(p)\,)\,\mathbf{1} \\ &=\; \tfrac{1}{2}\Big(\,(\,f \circ \varphi\,) + (\,f \circ \varphi\,) \circ S_p^{\mathbb{M}}\,\Big) \;-\; (\,f \circ \varphi\,)(\,p\,)\,\mathbf{1} \;=\; (\,f \circ \varphi\,)_p^{\mathrm{mod}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

La naturaleza de los isomorfismos Ψ_p^2 del Lema 1.23 nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sym}^2 T^*_{\varphi(p)}\mathbb{L} \arrow[r, "\mathrm{Sym}^2\varphi_p^*"] \arrow[d, "\Psi^2_{\varphi(p)}"', "\cong"] & \mathrm{Sym}^k T^*_p\mathbb{M} \arrow[d, "\Psi^2_p"', "\cong"] \\ I^2_{\varphi(p)}/I^3_{\varphi(p)} \arrow[r, "\varphi_p^*"] & I^2_p/I^3_p \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

que nos permite concluir para toda función $f \in C^\infty(\,\mathbb{L}\,)$ y todo punto $p \in \mathbb{M}$ que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_p^{\mathbb{M}}(\,f \circ \varphi\,) \;&=\; (\,\Psi_p^2\,)^{-1}(\,(\,f \circ \varphi\,)_p^{\mathrm{mod}} \;+\; I_p^3\,) \\ &=\; (\,\Psi_p^2\,)^{-1}(\,f_{\varphi(p)}^{\mathrm{mod}} \circ \varphi \;+\; I_p^3\,) \\ &=\; \Big(\,(\,\Psi_p^2\,)^{-1} \circ \varphi_p^*\,\Big)(\,f_{\varphi(p)}^{\mathrm{mod}} \;+\; I_{\varphi(p)}^3\,) \\ &=\; \Big(\,\mathrm{Sym}^2\varphi_p^* \circ (\,\Psi_{\varphi(p)}^2\,)^{-1}\,\Big)(\,f_{\varphi(p)}^{\mathrm{mod}} \;+\; I_{\varphi(p)}^3\,) \;=\; (\,\mathrm{Sym}^2\varphi_p^*\,)\Big(\,\mathrm{Hess}_{\varphi(p)}^{\mathbb{L}} f\,\Big). \end{aligned}$$

La segunda igualdad en este cálculo refleja la ecuación (2.7) y la cuarta la conmutatividad del diagrama (2.8). En conclusión obtenemos para todo homomorfismo $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ de espacios simétricos la siguiente identidad para cada función $f \in C^\infty(\,\mathbb{L}\,)$ y todo $p \in \mathbb{M}$

$$\mathrm{Hess}_p^{\mathbb{M}}(\,f \circ \varphi\,) \;=\; (\,\mathrm{Sym}^2\varphi_p^*\,)\Big(\,\mathrm{Hess}_{\varphi(p)}^{\mathbb{L}} f\,\Big)$$

lo cual implica por el Lema 1.35 que φ es una aplicación afín. ■

Lema 2.15 (Grupo Afín de un Espacio Simétrico)**.**
Las reflexiones $S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$, $x \longmapsto p * x$, *centradas en los puntos* $p \in \mathbb{M}$ *de un espacio simétrico* $\mathbb{M}$ *son difeomorfismos afines, esto es,* $S_p \in \mathrm{Aff}(\,\mathbb{M},\, \nabla^{\mathrm{Loos}}\,)$.

Demostración. Aquí aplicamos el Lema 2.14 al caso particular de las reflexiones de un espacio simétrico $\mathbb{M}$. El cuarto axioma de los espacios simétricos es equivalente al hecho de que la reflexión $S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$, $x \longmapsto p * x$, centrada en $p \in \mathbb{M}$ es un homomorfismo de espacios simétricos, pues para todo $q, x \in \mathbb{M}$ tenemos que:

$$S_p(q * x) \;=\; p * (q * x) \;=\; (p * q) * (p * x) \;=\; S_p(q) * S_p(x).$$

Por lo tanto las reflexiones S_p centradas en los puntos $p \in \mathbb{M}$ son difeomorfismos afines. ■

Lema 2.16 (Caracterización de la Conexión de Loos)**.**
Sea ∇ una conexión libre de torsión en el haz tangente $T\mathbb{M}$ de un espacio simétrico $\mathbb{M}$, tal que todas las reflexiones $S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ centradas en puntos arbitrarios $p \in \mathbb{M}$ son difeomorfismos afines con respecto a ∇, entonces ∇ coincide con la conexión de Loos:

$$\nabla \;=\; \nabla^{\mathrm{Loos}} .$$

Demostración. Esencialmente tenemos que demostrar que el Hessiano Hess^∇ asociado a la conexión ∇ libre de torsión en el haz tangente de $\mathbb{M}$ es igual al Hessiano $\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$ asociado a la conexión de Loos ∇^{Loos} y eventualmente a la estructura de espacio simétrico en $\mathbb{M}$, porque la clasificación de operadores Hessianos del Teorema 1.39 nos permite argumentar que:

$$\mathrm{Hess}^\nabla \;=\; \mathrm{Hess}^{\mathbb{M}} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \nabla \;=\; \nabla^{\mathrm{Loos}}.$$

Según la hipótesis la reflexión $S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ centrada en un punto fijo $p \in \mathbb{M}$ es una aplicación afín con respecto a la conexión ∇, por lo cual el Lema 1.35 asegura que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}^\nabla_p(f \circ S_p) \;&=\; \mathrm{Sym}^2(S_p)^*_p \Big(\mathrm{Hess}^\nabla_p f\Big) \\ &=\; \mathrm{Sym}^2(-\mathrm{id}_{T^*_p\mathbb{M}}) \Big(\mathrm{Hess}^\nabla_p f\Big) \;=\; \mathrm{Hess}^\nabla_p f \end{aligned} \tag{2.9}$$

para toda función $f \in C^\infty(\mathbb{M})$; recordamos que el tercer axioma de espacios simétricos equivale a $(S_p)^*_p = -\mathrm{id}_{T^*_p\mathbb{M}}$ como por ejemplo en la ecuación (2.4). Sabemos que la modificación de una función $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ en el punto $p \in \mathbb{M}$ se anula en p hasta orden 1 en el sentido $f^{\mathrm{mod}}_p \in I^2_p$, entonces el tercer axioma de operadores Hessiano para Hess^∇ asegura:

$$\mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_p f \;=\; (\Psi^2_p)^{-1}(f^{\mathrm{mod}}_p + I^3_p) \;\stackrel{!}{=}\; \mathrm{Hess}^\nabla_p f^{\mathrm{mod}}_p.$$

Por otro lado Hess^∇ es $\mathbb{R}$–lineal y anula a todas las funciones constantes, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}_p f \;=\; \mathrm{Hess}^\nabla_p f^{\mathrm{mod}}_p \;&=\; \mathrm{Hess}^\nabla_p \Big(\frac{1}{2}(f + f \circ S_p) - f(p)\,\mathbf{1}\Big) \\ &=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{Hess}^\nabla_p f + \frac{1}{2}\,\mathrm{Hess}^\nabla_p(f \circ S_p) \;=\; \mathrm{Hess}^\nabla_p f \end{aligned}$$

para cualquier función $f \in C^\infty(\mathbb{M})$, donde hemos usado la ecuación (2.9) en la última línea. En este argumento el punto $p \in \mathbb{M}$ es fijo, pero arbitrario, entonces concluimos $\mathrm{Hess}^\nabla = \mathrm{Hess}^{\mathbb{M}}$ y así necesariamente $\nabla = \nabla^{\mathrm{Loos}}$ debido al Teorema 1.39. ■

Definición 2.17.
Un espacio simétrico $\mathbb{M}$ se llama un espacio simétrico riemanniano o seudo–riemanniano, si y sólo si existe una métrica riemanniana o seudo–riemanniana g, tal que las reflexiones

$$S_p : \ \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \qquad\qquad x \longmapsto p * x$$

centradas en cualquier punto $p \in \mathbb{M}$ son isometrías con respecto a la métrica g.

Corolario 2.18 (Espacio Simétrico Seudo–Riemanniano)**.**
En todo espacio simétrico seudo–riemanniano $\mathbb{M}$ la conexión de Loos coincide con la conexión de Levi–Civita:

$$\nabla^{\text{Loos}} \ = \ \nabla^{\text{LC}}.$$

Demostración. En efecto: la unicidad de la conexión ∇^{LC} de Levi–Civita implica que toda isometría $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ de un espacio simétrico seudo–riemanniano $\mathbb{M}$ es una aplicación afín, porque $\varphi^*\nabla^{\text{LC}}$ es una conexión métrica libre de torsión y así igual a ∇^{LC}. Por definición todas las reflexiones $S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$, $x \longmapsto p * x$, de un espacio simétrico seudo–riemanniano $\mathbb{M}$ son isometrías, entonces ∇^{LC} satisface las condiciones del Lema 2.16 y así:

$$\nabla^{\text{LC}} \ = \ \nabla^{\text{Loos}} \, .$$

■

Definición 2.19 (Variedades Afines Completas)**.**
Una variedad afín $(\,\mathbb{M},\, \nabla\,)$ es completa, si y sólo si la aplicación exponencial $\exp_p^{\mathbb{M}}$ en cada punto $p \in \mathbb{M}$ está definida en todo el espacio tangente $T_p\mathbb{M}$

$$\exp_p^{\mathbb{M}} : \ T_p\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \qquad\qquad X \longmapsto \gamma_X(\,1\,) \ =: \ \exp_p^{\mathbb{M}}(X)$$

donde $\gamma_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}$ es la única geodésica con valores iniciales $\gamma_X(\,0\,) \,=\, p$ y $\dot{\gamma}_X(\,0\,) \,=\, X$.

Utilizaremos el siguiente lema en las demostraciones del Corolario 2.21 y del Lema 2.22:

Lema 2.20 (Geodésica con Respecto a la Conexión de Loos)**.**
Sea $\mathbb{M}$ un espacio simétrico, sea γ una geodésica para la conexión ∇^{Loos}, entonces:

$$(\,S_{\gamma(\,t_0\,)} \circ \gamma\,)(\,t\,) \ = \ \gamma(\,2\,t_0 \,-\, t\,)\ .$$

Demostración. Calculando tenemos

$$(\,S_{\gamma(\,t_0\,)} \circ \gamma\,)(\,t\,) \ = \ \gamma(\,t_0\,) * \gamma(\,t\,) \ = \ \gamma(\,2\,t_0 \,-\, t\,)$$

donde la segunda igualdad se vale, porque γ es una geodésica en $\mathbb{M}$. ■

Corolario 2.21 (Los Espacios Simétricos son Completos)**.**
Sea $\mathbb{M}$ un espacio simétrico, entonces la variedad afín $(\,\mathbb{M},\, \nabla^{\text{Loos}}\,)$ es completa.

Lema 2.22 (Los Espacios Simétricos Conexos son Homogéneos).
El grupo afín $\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\,\nabla^{\mathrm{Loos}})$ *de un espacio simétrico conexo* $\mathbb{M}$ *actúa transitivamente en* $\mathbb{M}$, *es decir,* $\mathbb{M}$ *es un espacio afín homogéneo con respecto a la conexión de Loos:*

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\,\nabla^{\mathrm{Loos}})/_{\textit{estabilizador de un punto base } p} \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \mathbb{M} \qquad [\varphi] \longmapsto \varphi(p)\ .$$

Demostración. El grupo afín $\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\,\nabla^{\mathrm{Loos}})$ de cualquier variedad afín es un grupo de Lie: es una subvariedad del haz de marcos y de aquí obtiene su estructura diferencial. Para demostrar que $\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\,\nabla^{\mathrm{Loos}})$ actúa transitivamente en el espacio simétrico conexo $\mathbb{M}$ es suficiente demostrar que toda órbita del subgrupo de $\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\,\nabla^{\mathrm{Loos}})$

$$\mathcal{S}(\mathbb{M}) \ :=\ \langle\, S_p \mid\ p\in\mathbb{M}\,\rangle \ \subset\ \mathrm{Aff}(\mathbb{M},\,\nabla^{\mathrm{Loos}})$$

generado por las reflexiones S_p, $p\in\mathbb{M}$ es abierta en la topología de la variedad $\mathbb{M}$. Para ello consideramos la aplicación exponencial para la conexión de Loos

$$\exp_p^{\mathbb{M}}:\ T_p\mathbb{M}\longrightarrow\mathbb{M} \qquad X\longmapsto\gamma_X(1)$$

donde $\gamma_X:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{M}$, $t\longmapsto\gamma_X(t)$, es la única geodésica tal que $\gamma_X(0)=p$ y $\dot\gamma_X(0)=X$. Se nota que para todo $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\exp_p^{\mathbb{M}}(\lambda X) \ =\ \gamma_{\lambda X}(1)\ =\ \gamma_X(\lambda)$$

porque la dilatación $t\longmapsto\gamma_X(\lambda t)$ de una geodésica es una geodésica, más preciso la geodésica $\gamma_{\lambda X}$. En consecuencia la diferencial de la aplicación exponencial sobre $0\in T_p\mathbb{M}$

$$(\exp_p^{\mathbb{M}})_{*,0}:\ T_0(T_p\mathbb{M})\longmapsto T_{\exp_p^{\mathbb{M}}(0)}\mathbb{M} \qquad \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_0\lambda X\longmapsto\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_0\gamma_X(\lambda)\ =\ X$$

es la identidad salvo la identificación canónica $T_0(T_p\mathbb{M})=T_p\mathbb{M}$. Así el teorema de la función implícita asegura que $\exp_p^{\mathbb{M}}:T_p\mathbb{M}\longrightarrow\mathbb{M}$ manda una vecindad abierta estrellada U de $0\in T_p\mathbb{M}$ difeomórficamente a una vecindad abierta V de p. Por el Lema 2.20 se tiene que

$$S_{\exp_p^{\mathbb{M}}(\frac{1}{2}X)}(\exp_p^{\mathbb{M}}(X))\ =\ \gamma_X(\tfrac{1}{2})*\gamma_X(1)\ =\ \gamma_X(0)\ =\ p$$

para todo $X\in U$ o equivalentemente para todo $\exp_p^{\mathbb{M}}(X)\in V$, es decir, que el subgrupo $\mathcal{S}(\mathbb{M})$ de difeomorfismos afines actúa transitiva en V. Finalmente el estabilizador

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\nabla^{\mathrm{Loos}})}(p)\ :=\ \{\ \varphi\in\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\,\nabla^{\mathrm{Loos}})\mid\varphi(p)=p\ \}$$

de un punto base $p\in\mathbb{M}$ es por definición un subgrupo cerrado y por ende un subgrupo de Lie del grupo afín $\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\,\nabla^{\mathrm{Loos}})$. Lo cual implica que la variedad $\mathbb{M}$ es un espacio homogéneo, más preciso tenemos un difeomorfismo de órbitas de la forma:

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\,\nabla^{\mathrm{Loos}})/_{\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}(\mathbb{M},\nabla^{\mathrm{Loos}})}(p)} \stackrel{\cong}{\longrightarrow}\mathbb{M} \qquad [\varphi]\longmapsto\varphi(p)\ .$$

■

Capítulo 3

Clasificación de Espacios Simétricos

3.1. Tensores Algebraicos de Curvatura

Aquí fijamos un espacio vectorial modelo V sobre el campo $\mathbb{R}$, tal que $\dim V = m$ y observamos que la elección de un marco $F : V \xrightarrow{\cong} T_p\mathbb{M}$ es esencialmente lo mismo que elegir una base ordenada de $T_p\mathbb{M}$. Además veremos que cada solución R a la ecuación cuadrática

$$R_{X,\,Y}\ R_{A,\,B}C \;-\; R_{A,\,B}\ R_{X,\,Y}C \;\;=\;\; R_{R_{X,\,Y}A,\,B}C \;+\; R_{A,\,R_{X,\,Y}B}C \tag{3.1}$$

nos da un espacio simétrico único salvo cubrientes, porque existe una biyección entre las clases de isomorfía de espacios simétricos simplemente conexos y el conjunto de órbitas de la acción de $\mathrm{GL}(V)$ en el subconjunto de $\mathrm{Curv}(V)$ de soluciones de la ecuación (3.1).

Definición 3.1 (Tensor Algebraico de Curvatura)**.**
Un tensor algebraico de curvatura R en un espacio vectorial V es una aplicación trilineal

$$R : \quad V \times V \times V \longrightarrow V \qquad\qquad (X, Y, Z) \longmapsto R_{X,Y}Z$$

tal que:

i) Es alternante en los dos primeros argumentos $R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z$ para todos X, Y, Z.

ii) Satisface la primera identidad de Bianchi igualmente en los argumentos X, Y, Z:

$$R_{X,Y}Z \;+\; R_{Y,Z}X \;+\; R_{Z,X}Y \;\;=\;\; 0.$$

El conjunto de todos los tensores algebraicos de curvatura es un espacio vectorial con la suma y la multiplicación escalar estándar de aplicaciones multilineales, el cual será denotado por:

$$\mathrm{Curv}(V) \;:=\; \{\; R : V \times V \times V \longrightarrow V \mid R \text{ es tensor algebraico de curvatura } \}\ .$$

De vez en cuando es preferible interpretar un tensor algebraico de curvatura como

$$R : \; V \times V \longrightarrow \mathrm{End}\, V \qquad\qquad (X, Y) \longmapsto R_{X,Y}$$

es decir, como una aplicación bilineal que satisface los dos axiomas. En el caso de que en el espacio vectorial modelo V sobre $\mathbb{R}$ esté definida una forma simétrica bilineal $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, que es no degenerada en el sentido del Corolario A.20, podemos considerar tensores algebraicos de curvatura $R : V \times V \times V \longrightarrow V$, que satisfacen para todo $X, Y, A, B \in V$:

$$(R_{X,Y} \star g)(A,\ B) \ := \ - g(R_{X,Y}A,\ B) \ - \ g(A,\ R_{X,Y}B) \ \stackrel{!}{=} \ 0 \ . \tag{3.2}$$

Esta condición adicional está implícita en el concepto de tensores algebraicos de curvatura en la literatura, por ejemplo en [KN]. Nosotros llamaremos a estos tensores más especiales: tensores algebraicos de curvatura riemannianos y denotaremos el subespacio de ellos por:

$$\mathrm{Curv}_{\mathrm{Riem}}(V, g) \ := \ \{ \ R \in \mathrm{Curv}(V) \ | \ R_{X,Y} \star g \ = \ 0 \text{ para todos } X, Y \in V \ \} \ .$$

Observación 3.2 (Tensores Algebraicos de Curvatura Riemannianos)**.**
De la gran variedad de curiosidades que existen en las diversas ramas del universo matemático he aquí una más: se sabe que en geometría riemanniana se cumple una igualdad muy parecida, aunque no igual a la que vamos a demostrar; la cual dice que la dimensión del espacio vectorial de tensores algebraicos de curvatura riemannianos [KN] es:

$$\dim \ \mathrm{Curv}_{\mathrm{Riem}}(V, g) \ = \ \frac{m^2 \, (m^2 \ - \ 1)}{12}.$$

En otras palabras tenemos que la dimensión del espacio vectorial de los tensores algebraicos de curvatura $\mathrm{Curv}(V)$ *es exactamente cuatro veces la dimensión de* $\mathrm{Curv}_{\mathrm{Riem}}(V, g)$ *pues:*

Proposición 3.3 (Espacio Vectorial de Tensores Algebraicos de Curvatura)**.**
La dimensión del espacio vectorial $\mathrm{Curv}(V)$ *de tensores algebraicos de curvatura en un espacio vectorial modelo* V *sobre* $\mathbb{R}$ *de dimensión* $m \, = \, \dim V$ *es igual a:*

$$\dim \ \mathrm{Curv}(\ V \ ) \ = \ \frac{m^2 \, (m^2 \ - \ 1)}{3}.$$

Demostración. Para un espacio vectorial V de dimensión $\dim V \ = \ m$ definimos el siguiente espacio vectorial, del cual queremos calcular su dimensión:

$$A \ := \ \Lambda^2 V^* \otimes \mathrm{End}\, V \ = \ \{ \ f : V \times V \longrightarrow \mathrm{End}\, V \ | \ f \text{ es bilineal y alternante } \}.$$

Como $\mathrm{End}\, V$ es esencialmente el álgebra de matrices $m \times m$ sabemos que $\dim \mathrm{End}\, V \ = \ m^2$. Para comprender mejor qué está pasando consideramos el ejemplo $V \ = \ \mathbb{R}^3$; para su base estándar e_1, e_2, e_3 obtenemos $f(e_1, e_1) \ = \ f(e_2, e_2) \ = \ f(e_3, e_3) \ = \ 0$ y

$$f(e_1, e_2) \ = \ - f(e_2, e_1) \qquad f(e_2, e_3) \ = \ - f(e_3, e_2) \qquad f(e_3, e_1) \ = \ - f(e_1, e_3)$$

lo cual implica que la siguiente aplicación es un isomorfismo de espacios vectoriales

$$A \xrightarrow{\cong} \mathrm{End}\, V \oplus \mathrm{End}\, V \oplus \mathrm{End}\, V \qquad\qquad f \longmapsto f(e_1, e_2) \oplus f(e_2, e_3) \oplus f(e_3, e_1) \ .$$

es decir, $\dim(A) = 3 \cdot 9 = 27$. Continuando este proceso se tiene que para una base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de un espacio vectorial arbitrario V de dimensión m y para toda $f \in A$:

$$f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = \ldots = f(e_m, e_m) = 0.$$

Además encontramos las identidades

$$\begin{array}{llll} f(e_1,e_2) = -f(e_2,e_1) & & & \\ f(e_1,e_3) = -f(e_3,e_1) & f(e_2,e_3) = -f(e_3,e_2) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ f(e_1,e_m) = -f(e_m,e_1) & f(e_2,e_m) = -f(e_m,e_2) & \cdots & f(e_{m-1},e_m) = -f(e_m,e_{m-1}) \end{array}$$

con lo cual obtenemos usando la serie geométrica $(m-1) + \cdots + 1 = \frac{m}{2}(m-1)$ que:

$$\dim\ A = \frac{m}{2}(m-1) \cdot \dim\ \mathrm{End}\, V = \binom{m}{2} m^2.$$

Ahora recordamos la Definición 3.3 del espacio de tensores algebraicos de curvatura

$$\mathrm{Curv}(V) := \{\ R : V \times V \longrightarrow \mathrm{End}\, V \mid R \text{ es un tensor algebraico de curvatura } \}$$

que es un subespacio de $A = \Lambda^2 V^* \otimes \mathrm{End}\, V$, porque todo tensor algebraico de curvatura R es alternante $R_{X,Y} = -R_{Y,X}$, en sus primeros dos argumentos. En efecto, definimos en A el siguiente endomorfismo $\Theta : A \longrightarrow A$, $f \longmapsto \Theta f$, por:

$$(\Theta f)_{X,Y} Z := f_{Y,Z} X - f_{X,Z} Y .$$

Calculando tenemos para todo $f \in A$

$$\begin{aligned} (\Theta^2 f)_{X,Y} Z &= (\Theta f)_{Y,Z} X - (\Theta f)_{X,Z} Y \\ &= f_{Z,X} Y - f_{Y,X} Z - f_{Z,Y} X + f_{X,Y} Z \\ &= 2 f_{X,Y} Z - f_{X,Z} Y + f_{Y,Z} X \\ &= 2 f_{X,Y} Z + (\Theta f)_{X,Y} Z \end{aligned}$$

esto es, $\Theta^2 - \Theta - 2\,\mathrm{id}_A = (\Theta - 2\,\mathrm{id}_A)(\Theta + \mathrm{id}_A) = 0$. Esta identidad implica que Θ es diagonalizable con valores propios a lo más 2 y -1, lo cual quiere decir que A se descompone en la suma directa de los dos subespacios propios:

$$A = A_{-1} \oplus A_2. \tag{3.3}$$

Aquí observemos que $f \in A$ satisface la primera identidad de Bianchi, si y sólo si

$$(\Theta f + f)_{X,Y} Z = f_{X,Y} Z + f_{Y,Z} X + f_{Z,X} Y \stackrel{?}{=} 0$$

para todos los X, Y, $Z \in V$. Es decir, que el espacio propio $A_{-1} = \mathrm{Curv}(V)$ de Θ para el valor propio -1 coincide con el espacio de tensores de curvatura. Para identificar el espacio propio complementario $A_2 \subset A$ observamos que para toda $f \in A_2$ tenemos $\Theta f = 2f$ y así:

$$(\Theta f)_{X,Y} Z = 2 f_{X,Y} Z = f_{Y,Z} X - f_{X,Z} Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_{Y,Z} X = 2 f_{X,Y} Z + f_{X,Z} Y .$$

Intercambiamos Y y Z en la segunda identidad y sumamos para obtener la identidad

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} f_{Y,Z}X + f_{Z,Y}X \\ &= 2 f_{X,Y}Z + f_{X,Z}Y + 2 f_{X,Z}Y + f_{X,Y}Z = 3(f_{X,Y}Z + f_{X,Z}Y) \end{aligned} \tag{3.4}$$

válida para toda $f \in A_2$ y todos los $X, Y, Z \in V$. Esto es, que la aplicación trilineal asociada

$$f: V \times V \times V \longrightarrow V, \qquad (X, Y, Z) \longmapsto f_{X,Y}Z$$

con $f \in A_2$ es completamente alternante en sus tres argumentos, porque es alternante en X, Y pues $f \in A$ y alternante en Y, Z por la identidad (3.4). Por ende A_2 es isomorfo a

$$\Lambda^3 V^* \otimes V := \{ f: V \times V \times V \longrightarrow V \mid f \text{ trilineal y alternante } \}.$$

Lo anterior implica que la descomposición (3.3) se puede escribir como

$$A = \operatorname{Curv}(V) \oplus \Lambda^3 V^* \otimes V$$

lo cual nos permite finalmente calcular la dimensión de $\operatorname{Curv}(V)$:

$$\dim \operatorname{Curv}(V) = \binom{m}{2} m^2 - \binom{m}{3} m = \frac{m^2(m^2 - 1)}{3}.$$

■

Definición 3.4 (Jalando Tensores Algebraicos de Curvatura)**.**
Cada isomorfismo $F: V \longrightarrow W$ de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ induce un isomorfismo

$$F^*: \operatorname{Curv}(W) \longrightarrow \operatorname{Curv}(V) \qquad R \longmapsto \Big(F^*R: (X, Y, Z) \longmapsto F^{-1} R_{FX, FY} FZ \Big)$$

que depende contravariantemente de F en el sentido $(F \circ H)^* = H^* \circ F^*$. En consecuencia el grupo general lineal $\operatorname{GL}(V)$ del espacio vectorial V actúa linealmente en $\operatorname{Curv}(V)$

$$\star: \operatorname{GL}(V) \times \operatorname{Curv}(V) \longrightarrow \operatorname{Curv}(V) \qquad (\mathbb{F}, R) \longmapsto \mathbb{F} \star R$$

por la regla $\mathbb{F} \star R := (\mathbb{F}^{-1})^* R$ o más explícito por $(\mathbb{F} \star R)_{X,Y}Z = \mathbb{F} R_{\mathbb{F}^{-1}X, \mathbb{F}^{-1}Y} \mathbb{F}^{-1} Z$. La representación infinitesimal del álgebra de Lie $\operatorname{End} V$ asociada a esta representación

$$\star: \operatorname{End} V \times \operatorname{Curv}(V) \longrightarrow \operatorname{Curv}(V), \qquad (\mathfrak{F}, R) \longmapsto \mathfrak{F} \star R$$

está definida por:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F} \star R)_{X,Y} Z &:= \mathfrak{F} R_{X,Y}Z - R_{\mathfrak{F}X,Y}Z - R_{X,\mathfrak{F}Y}Z - R_{X,Y}\mathfrak{F}Z \\ &= \Big([\mathfrak{F}, R_{X,Y}] - R_{\mathfrak{F}X,Y} - R_{X,\mathfrak{F}Y} \Big) Z. \end{aligned}$$

Aquí hay que tener cierto cuidado con la representación $\star$, pues se ha puesto el mismo símbolo independientemente si está actuando $\mathrm{GL}(V)$ o $\mathrm{End}\, V$ sobre $\mathrm{Curv}(V)$, así hay que deducir del contexto a cuál representación se refiere la notación $\star$. Como los tensores algebraicos de curvatura son aplicaciones trilineales $R : V \times V \times V \longrightarrow V$, es bastante difícil tratarles desde este punto de vista directamente. Para simplificar cálculos con los tensores algebraicos de curvatura se puede usar la contracción de Ricci, que reduce la complejidad de un tensor algebraico de curvatura a una forma bilineal $\mathrm{Ric} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$:

Definición 3.5 (Contracción de Ricci).
Para cada espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ consideramos el espacio vectorial $V^* \otimes V^*$ de todas las aplicaciones bilineales, pero no necesariamente simétricas o alternantes $\rho : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$. La contracción de Ricci es la aplicación lineal y $\mathrm{GL}(V)$–equivariante

$$\mathrm{ric} : \quad \mathrm{Curv}(V) \longrightarrow V^* \otimes V^* \qquad\qquad R \longmapsto \mathrm{Ric}^R$$

definida por la regla:

$$\mathrm{Ric}^R(X, Y) \;:=\; \mathrm{tr}_V\Big(Z \longmapsto R_{Z,X}Y \Big) \;\in\; \mathbb{R}.$$

Para simplificar nuestra notación y para quedarse en el marco de la notación en la literatura escribimos simplemente Ric en vez de Ric^R, si consideramos solamente un tensor de curvatura R. La equivarianza de la contracción de Ricci bajo la representación de $\mathrm{GL}(V)$ en ambos espacios vectoriales $\mathrm{Curv}(V)$ y $V^* \otimes V^*$ se verifica por cálculo directo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{F\star R}(X, Y) &= \mathrm{tr}_V\Big(Z \longmapsto F\, R_{F^{-1}Z,\, F^{-1}X} F^{-1}Y \Big) \\
&= \mathrm{tr}_V\Big(F \circ (W \longmapsto R_{W,\, F^{-1}X} F^{-1}Y) \circ F^{-1} \Big) \;=\; \mathrm{Ric}^R(F^{-1}X,\, F^{-1}Y)
\end{aligned}$$

con $W := F^{-1}Z$ usando la invarianza cíclica de la traza formulada en el Lema A.17.

Lema 3.6 (Inversa Parcial Aproximada para la Contracción de Ricci).
Para todo espacio vectorial V de dimensión $m := \dim V \geq 2$ la aplicación lineal

$$\mathrm{ric}^* : \quad V^* \otimes V^* \longrightarrow \mathrm{Curv}(V) \qquad\qquad \rho \longmapsto R^\rho$$

definida por la regla

$$R^\rho_{X,Y}Z \;:=\; \rho(X, Z)\, Y \,-\, \rho(Y, Z)\, X \,+\, \rho(X, Y)\, Z \,-\, \rho(Y, X)\, Z$$

es $\mathrm{GL}(V)$*–equivariante y una inversa parcial aproximada para* ric *en el sentido de que* $\mathrm{ric} \circ \mathrm{ric}^*$ *es invertible. En particular la contracción de Ricci* ric *es sobreyectiva y* ric^* *es inyectiva.*

Demostración. La fórmula que define la aplicación ric^* asegura que R^ρ es alternante en los dos primeros argumentos, es decir, $R^\rho_{X,Y}Z = -R^\rho_{Y,X}Z$ para todo $X, Y, Z \in V$. Además R^ρ satisface la primera identidad de Bianchi, porque la suma de las tres copias

$$\begin{aligned}
R^\rho_{X,Y}Z &= \rho(X, Z)\, Y - \rho(Y, Z)\, X + \rho(X, Y)\, Z - \rho(Y, X)\, Z \\
R^\rho_{Y,Z}X &= \rho(Y, X)\, Z - \rho(Z, X)\, Y + \rho(Y, Z)\, X - \rho(Z, Y)\, X \\
R^\rho_{Z,X}Y &= \rho(Z, Y)\, X - \rho(X, Y)\, Z + \rho(Z, X)\, Y - \rho(X, Z)\, Y
\end{aligned}$$

de la definición de R^ρ es igual a $R^\rho_{X,Y}Z + R^\rho_{Y,Z}X + R^\rho_{Z,X}Y = 0$ para todo $X, Y, Z \in V$, entonces $R^\rho \in \mathrm{Curv}(V)$ para toda forma bilineal $\rho \in V^* \otimes V^*$ como lo deseábamos. La equivarianza de la aplicación ric^* bajo la representación de $\mathrm{GL}(V)$ se demuestra así:

$$\begin{aligned} & R^{\mathbb{F}\star\rho}_{X,Y}Z \\ &\quad= (\mathbb{F}\star\rho)(X, Z)Y - (\mathbb{F}\star\rho)(Y, Z)X + (\mathbb{F}\star\rho)(X, Y)Z - (\mathbb{F}\star\rho)(Y, X) \\ &\quad= \rho(\mathbb{F}^{-1}X, \mathbb{F}^{-1}Z)Y - \rho(\mathbb{F}^{-1}Y, \mathbb{F}^{-1}Z)X + \rho(\mathbb{F}^{-1}X, \mathbb{F}^{-1}Y)Z - \rho(\mathbb{F}^{-1}Y, \mathbb{F}^{-1}X)Z \\ &\quad= \mathbb{F}\Big(R^\rho_{\mathbb{F}^{-1}X, \mathbb{F}^{-1}Y}\mathbb{F}^{-1}Z \Big) \\ &\quad= (\mathbb{F}\star R^\rho)_{X,Y}Z \end{aligned}$$

para cualquier $\mathbb{F} \in \mathrm{GL}(V)$ y todo $X, Y, Z \in V$. Finalmente queremos calcular la composición $\mathrm{ric} \circ \mathrm{ric}^*$ para demostrar que es invertible. Las trazas en la contracción ric de Ricci se evalúan usando un truco basado en la Observación A.18. Un ejemplo para ilustrar la aplicación de este truco es el siguiente:

$$\mathrm{tr}_V\Big(F : V \longrightarrow V, \quad Z \longmapsto \rho(X, Z)Y \Big) = \rho(X, Y)$$

para todo $X, Y \in V$, donde la imagen $\mathrm{im}\, F = \mathbb{R}Y$ del endomorfismo F es generada por el vector Y con imagen $FY = \rho(X, Y)Y$. Usando este truco y la linealidad de tr obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathrm{ric}\, R^\rho)(X, Y) &= \mathrm{tr}_V\Big(Z \longmapsto \rho(Z,Y)X - \rho(X,Y)Z + \rho(Z,X)Y - \rho(X, Z)Y \Big) \\ &= \rho(X, Y) - m\,\rho(X, Y) + \rho(Y, X) - \rho(X, Y) \\ &= -\Big(m\,\rho - \rho^{\mathrm{flip}} \Big)(X, Y) \end{aligned}$$

en donde $\rho^{\mathrm{flip}}(X,Y) := \rho(Y,X)$. Evidentemente la aplicación flip es diagonalizable con valores propios $+1$ y -1 en los subespacios propios Sym^2V^* y Λ^2V^*, entonces la composición $\mathrm{ric} \circ \mathrm{ric}^*$ es diagonalizable también con valores propios $+1-m$ y $-1-m$, ambos diferentes a cero bajo la hipótesis $m \geq 2$. En consecuencia la aplicación $\mathrm{ric} \circ \mathrm{ric}^*$ es invertible:

$$\mathrm{ric} \circ \mathrm{ric}^* : \; V^* \otimes V^* \longrightarrow V^* \otimes V^* \qquad\qquad \rho \longmapsto \mathrm{ric}(R^\rho)\,.$$

■

Corolario 3.7 (Tensores Algebraicos de Curvatura en Dimensión 2)**.**
En dimensión $m = \dim V = 2$ *la contracción de Ricci* ric *es un isomorfismo*

$$\mathrm{ric} : \; \mathrm{Curv}(V) \xrightarrow{\cong} V^* \otimes V^* \qquad\qquad R \longmapsto \mathrm{Ric}$$

de espacios vectoriales de dimensión 4. *Dado que* ric^* *es un isomorfismo en la dirección opuesta, todo tensor algebraico de curvatura es de la forma* $R = R^\rho$ *para algún* $\rho \in V^* \otimes V^*$.

Demostración. Según la Proposición 3.3 el espacio vectorial $\mathrm{Curv}(V)$ de todos los tensores algebraicos de curvatura en un espacio vectorial V de dimensión $m = \dim V = 2$ al igual que el espacio vectorial $V^* \otimes V^*$ de todas las formas bilineales en V tiene dimensión:

$$\dim \mathrm{Curv}(V) \;=\; \frac{4 \cdot 3}{3} \;\overset{!}{=}\; \dim V^* \otimes V^*.$$

Además la aplicación ric es sobreyectiva, mientras la aplicación ric^* es inyectiva debido al Lema 3.6, entonces ambos son isomorfismos de espacios vectoriales de dimensión 4. ■

Definición 3.8 (Ecuación Cuadrática)**.**
Para un espacio modelo V sea $\Lambda^2 V^* \otimes \mathrm{Curv}(V)$ el espacio vectorial de aplicaciones 5–lineales

$$\mathcal{R} : \; V \times V \times V \times V \times V \longrightarrow V \qquad\qquad (X, Y, A, B, C) \longmapsto \mathcal{R}_{X,Y;A,B}C$$

que son alternantes en los 2 primeros y un tensor de curvatura en los últimos 3 argumentos

$$\mathcal{R}_{X,Y;A,B}C \;=\; -\mathcal{R}_{Y,X;A,B}C \qquad\qquad \Big((A, B, C) \longmapsto \mathcal{R}_{X,Y;A,B}C \Big) \;\in\; \mathrm{Curv}(V)$$

para todo $X, Y \in V$ y todo $A, B, C \in V$. Definimos la aplicación cuadrática

$$\Phi : \; \mathrm{Curv}(V) \longrightarrow \Lambda^2 V^* \otimes \mathrm{Curv}(V) \qquad\qquad R \longmapsto \Phi(R)$$

por la fórmula:

$$\begin{aligned}\Phi(R)_{X,Y;A,B}C \;&:=\; (R_{X,Y} \star R)_{A,B}C \\ &=\; R_{X,Y}\, R_{A,B}C \;-\; R_{R_{X,Y}A,B}C \;-\; R_{A,R_{X,Y}B}C \;-\; R_{A,B}\, R_{X,Y}C.\end{aligned}$$

Como dijimos Φ es una aplicación cuadrática y en particular no lineal, entonces no tiene mucho sentido hablar de su núcleo o de su imagen, ¡no son subespacios de $\mathrm{Curv}(V)$ y $\Lambda^2 V^* \otimes \mathrm{Curv}(V)$! Sin embargo nos interesará la preimagen de 0 bajo Φ, es decir, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones cuadráticas homogéneas de suma importancia:

$$\mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V) \;:=\; \{\; R \in \mathrm{Curv}(V) \;|\; R \text{ satisface la ecuación } \Phi(R) = 0 \;\}. \tag{3.5}$$

Ejemplo 3.9 (Algebras de Lie)**.**
Consideremos un álgebra de Lie de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$. El corchete $[\,\cdot,\cdot\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ nos permite definir un tensor algebraico de curvatura $R \in \mathrm{Curv}(\mathfrak{g})$ por la regla:

$$R^{\mathfrak{g}} : \; \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad\qquad (X, Y, Z) \longmapsto -\frac{1}{4}\,[[X, Y], Z].$$

Para toda álgebra de Lie $R^{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Curv}(\mathfrak{g})$ que satisface la ecuación cuadrática $\Phi(R^{\mathfrak{g}}) = 0$.

La primera identidad de Bianchi para R es literalmente la identidad de Jacobi para $\mathfrak{g}$:

$$R^{\mathfrak{g}}_{X,Y}Z + R^{\mathfrak{g}}_{Y,Z}X + R^{\mathfrak{g}}_{Z,X}Y \;=\; -\frac{1}{4}\Big([[X,Y], Z] + [[Y,Z], X] + [[Z,X], Y] \Big) \;=\; 0$$

entonces $R^{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Curv}(\mathfrak{g})$ es un tensor algebraico de curvatura. Para demostrar que $R^{\mathfrak{g}}$ satisface la ecuación cuadrática $\Phi(R^{\mathfrak{g}}) = 0$ consideramos los endomorfismos

$$\mathrm{ad}_Z : \ \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad\qquad X \longmapsto \mathrm{ad}_Z X \ := \ [Z, X]$$

que son derivaciones del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en el sentido de la Definición A.7, por que obedecen

$$\mathrm{ad}_Z[X, Y] \ = \ [\mathrm{ad}_Z X, Y] + [X, \mathrm{ad}_Z Y] \tag{3.6}$$

la regla de Leibniz gracias a la identidad de Jacobi. En esta notación $\mathrm{Ric}^{\mathfrak{g}}$ es igual a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}^{\mathfrak{g}}(X, Y) \ &:= \ \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\Big(Z \longmapsto -\frac{1}{4}[[Z, X], Y]\Big) \\ &= \ \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\Big(Z \longmapsto -\frac{1}{4}\mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X Z)\Big) \ = \ -\frac{1}{4}\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}\Big(\mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X\Big) \end{aligned} \tag{3.7}$$

llamada forma de Killing $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ salvo un factor irrelevante $-\frac{1}{4}$, en particular $\mathrm{Ric}^{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}^*$ es simétrico por las propiedades de la traza discutidas en el Lema A.17. Usando la regla de Leibniz y la definición de la representación infinitesimal $\star$ obtenemos

$$\begin{aligned} (\mathrm{ad}_Z \star R^{\mathfrak{g}})_{A,B}C \ &= \ -\frac{1}{4}\Big(+ [\mathrm{ad}_Z[A, B], C] + [[A, B], \mathrm{ad}_Z C] \\ &\qquad - [[\mathrm{ad}_Z A, B], C] - [[A, \mathrm{ad}_Z B], C] - [[A, B], \mathrm{ad}_Z C]\Big) \ = \ 0 \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$ y $A, B, C \in \mathfrak{g}$, por ende concluimos para todo $X, Y, A, B, C \in \mathfrak{g}$ que:

$$\Phi(R^{\mathfrak{g}})_{X,Y;A,B}C \ = \ (R^{\mathfrak{g}}_{X,Y} \star R^{\mathfrak{g}})_{A,B}C \ = \ -\frac{1}{4}(\mathrm{ad}_{[X,Y]} \star R^{\mathfrak{g}})_{A,B}C \ = \ 0.$$

Ejemplo 3.10 (Espacios Simétricos Conformalmente Planos)**.**
El tensor algebraico de curvatura $R^\rho := \mathrm{ric}^*(\rho)$ definido en el lema 3.6 por la regla

$$R^\rho_{X,Y}Z \ := \ \rho(X, Z)Y - \rho(Y, Z)X + \rho(X, Y)Z - \rho(Y, X)Z$$

para todo $X, Y, Z \in V$ y toda forma bilineal $\rho \in V^* \otimes V^*$ satisface la ecuación cuadrática $\Phi(R^\rho) = 0$, si y sólo si $\rho \in \mathrm{Sym}^2 V^*$ es simétrica. En este caso Ric^ρ también es simétrico:

$$\mathrm{Ric}^\rho \ = \ -(m - 1)\rho.$$

Por definición $R^\rho = \mathrm{ric}^*(\rho)$ es la imagen de ρ bajo la inversa parcial aproximada ric^* de la contracción de Ricci, que es $\mathrm{GL}(V)$–equivariante e inyectiva para $m \geq 2$. Así

$$R^\rho_{X,Y} \star R^\rho \ = \ R^\rho_{X,Y} \star \mathrm{ric}^*(\rho) \ = \ \mathrm{ric}^*(R^\rho_{X,Y} \star \rho) \ = \ 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad R^\rho_{X,Y} \star \rho \ = \ 0$$

para todo $X, Y \in V$. A su vez la condición $R^\rho_{X,Y} \star \rho = 0$ para todo $X, Y \in V$ requiere que

$$\begin{aligned} (R^\rho_{X,Y} \star \rho)(A, B) \ &= \ -\rho(X, A)\rho(Y, B) + \rho(Y, A)\rho(X, B) \\ &\qquad - \rho(X, B)\rho(A, Y) + \rho(Y, B)\rho(A, X) - 4\rho_{\mathrm{alt}}(X, Y)\rho(A, B) \\ &= \ -2\rho\Big(\rho_{\mathrm{alt}}(X, A)Y - \rho_{\mathrm{alt}}(Y, A)X + 2\rho_{\mathrm{alt}}(X, Y)A, B\Big) \ \stackrel{?}{=} \ 0 \end{aligned}$$

para todo $X, Y, A, B \in V$, en donde $\rho_{\text{alt}} \in \Lambda^2 V^*$ es la parte alternante de $\rho = \rho_{\text{sim}} + \rho_{\text{alt}}$:

$$\rho_{\text{alt}}(X, Y) \;:=\; \frac{1}{2}\Big(\rho(X, Y) - \rho(Y, X)\Big).$$

La simetría de ρ equivale a $\rho_{\text{alt}} = 0$ y bajo esta asunción $R^\rho_{X,Y} \star \rho = 0$ claramente se anula. En otras palabras: la asunción $\rho \in \text{Sym}^2 V^*$ es suficiente para concluir que R^ρ satisface la ecuación cuadrática $\Phi(R^\rho) = 0$. La necesidad de la simetría de ρ bajo la asunción $\Phi(R^\rho)$ no la necesitamos, entonces hacemos omisión de este argumento técnico.

Dado que la contracción de Ricci $\text{ric} : \text{Curv}(V) \longrightarrow V^* \otimes V^*$ es sobreyectiva en dimensiones mayores que uno el tensor $\text{Ric} \in V^* \otimes V^*$ asociado a un tensor algebraico de curvatura $R \in \text{Curv}(V)$ no es una forma bilineal simétrica en general. Una parte importante de la discusión que sigue se enfoca en la pregunta, ¿ $\text{Ric} \in V^* \otimes V^*$ es simétrico o no para cualquier solución $R \in \text{Curv}_{\Phi=0}(V)$ de la ecuación cuadrática $\Phi(R) = 0$? Para dar una respuesta parcial a esta pregunta decomponemos a $\text{Ric} = \text{Ric}_{\text{sim}} + \text{Ric}_{\text{alt}}$

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\text{sim}}(X, Y) \;&:=\; \frac{1}{2}\Big(\text{Ric}(X, Y) + \text{Ric}(Y, X)\Big) \\ \text{Ric}_{\text{alt}}(X, Y) \;&:=\; \frac{1}{2}\Big(\text{Ric}(X, Y) - \text{Ric}(Y, X)\Big) \end{aligned}$$

en sus partes simétrica y alternante. La primera identidad de Bianchi de la Definición 3.1 nos dice que para cualquier tensor algebraico de curvatura $R \in \text{Curv}(V)$ se satisface que

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\text{alt}}(X, Y) \;&=\; \frac{1}{2}\,\text{tr}_V\Big(Z \longmapsto R_{Z,X}Y - R_{Z,Y}X\Big) \\ &=\; \frac{1}{2}\,\text{tr}_V\Big(Z \longmapsto -R_{X,Y}Z\Big) \;=\; -\frac{1}{2}\,\text{tr}_V\Big(R_{X,Y}\Big) \end{aligned}$$

este argumento implica directamente el siguiente criterio para la simetría de Ric:

Teorema 3.11 (Criterio para la Simetría)**.**
El tensor $\text{Ric} \in V^* \otimes V^*$ *asociado a un tensor algebraico de curvatura* $R \in \text{Curv}(V)$ *es una forma bilineal simétrica, si y sólo si* $R_{X,Y} \in \text{End}\,V$ *tiene traza cero para todo* $X, Y \in V$. *En particular* $\text{Ric} \in \text{Sym}^2 V^*$ *es simétrico para cualquier* $R \in \text{Curv}_{\text{Riem}}(V, g)$.

Según el Corolario A.20 la identidad (3.2) caracteriza a $R \in \text{Curv}_{\text{Riem}}(V, g)$, es decir,

$$g(R_{X,Y}A, B) + g(A, R_{X,Y}B) \;=\; 0$$

para todo $X, Y, A, B \in V$, lo que implica que $\text{tr}_V(R_{X,Y}) = 0$ para todo $X, Y \in V$ bajo la asunción de que g es no degenerada, lo cual es suficiente para concluir que Ric es una forma simétrica.

Observación 3.12.
Como $\mathrm{Curv}_{\mathrm{Riem}}(V,\, g) \subset \mathrm{Curv}(V)$ *tenemos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Curv}_{\mathrm{Riem}}(V,\, g) \arrow[r, "\mathrm{Ric}"] \arrow[d, "\cap"'] & \mathrm{Sym}^2 V^* \arrow[d, "\cap"] \\ \mathrm{Curv}(V) \arrow[r, "\mathrm{Ric}"] & V^* \otimes V^* \,. \end{tikzcd}$$

En términos de una base ortogonal $\{e_1,\, \ldots,\, e_m\}$ *de* V *con respecto a* g *es verdad que:*

$$g(e_\mu,\, e_\nu) \;=\; \varepsilon_\mu\, \delta_{\mu=\nu} \qquad\Longrightarrow\qquad \mathrm{Ric}(X,\, Y) \;=\; \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{\varepsilon_\mu}\, g(R_{X,\,e_\mu} e_\mu,\, Y).$$

Corolario 3.13 (Simetría del Tensor de Ricci)**.**
Sea $R \in \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V)$ *un tensor algebraico de curvatura, que satisface la ecuación cuadrática* $\Phi(R) = 0$. *Si el tensor de Ricci asociado* Ric *o su parte simétrica* $\mathrm{Ric}_{\mathrm{sim}}$ *es no degenerada en el sentido del Corolario A.20, entonces* $\mathrm{Ric} \in \mathrm{Sym}^2 V^*$ *es una forma bilineal simétrica. En particular* $\mathrm{Ric}_{\mathrm{alt}} \in \Lambda^2 V^*$ *no puede ser una forma alternante no degenerada.*

Demostración. La propiedad más importante de la contracción de Ricci ric es su equivarianza bajo la representación del grupo general lineal $\mathrm{GL}(V)$ y por ende bajo la representación infinitesimal del álgebra de Lie $\mathrm{End}\, V$ asociada. Por un lado $R \in \mathrm{Curv}(V)$ satisface la ecuación cuadrática $\Phi(R) = 0$, si y solamente si para todo $X,\, Y \in V$ se satisface que:

$$R_{X,Y} \star R \;=\; 0 \qquad\Longrightarrow\qquad \mathrm{ric}(R_{X,Y} \star R) \;=\; R_{X,Y} \star \mathrm{Ric} \;=\; 0\,.$$

Entonces $\Phi(R) = 0$ implica para todo $X,\, Y,\, A,\, B \in V$ que:

$$\mathrm{Ric}(R_{X,Y}A,\, B) \;+\; \mathrm{Ric}(A,\, R_{X,Y}B) \;=\; 0$$

lo cual implica que $\mathrm{tr}_V R_{X,Y} = 0$ y entonces $\mathrm{Ric}_{\mathrm{alt}} = 0$ bajo la hipótesis de que Ric es no degenerado gracias al Corolario A.20. Por otro lado la descomposición del tensor de Ricci en sus partes simétricas y alternantes $\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}_{\mathrm{sim}} + \mathrm{Ric}_{\mathrm{alt}}$ es $\mathrm{GL}(V)$–invariante, entonces

$$R_{X,Y} \star \mathrm{Ric} \;=\; 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad R_{X,Y} \star \mathrm{Ric}_{\mathrm{sim}} \;=\; 0 \;=\; R_{X,Y} \star \mathrm{Ric}_{\mathrm{alt}}$$

para todos los $X,\, Y \in V$. Así podemos repetir el argumento presentado para Ric y para sus partes $\mathrm{Ric}_{\mathrm{sim}}$ y $\mathrm{Ric}_{\mathrm{alt}}$, resultando claramente en una contradicción en el último caso. ■

Corolario 3.14 (Existencia de Métricas Invariantes)**.**
Consideramos una solución $R \in \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V)$ *de la ecuación cuadrática* $\Phi(R) = 0$. *Si la parte simétrica* $\mathrm{Ric}_{\mathrm{sim}}$ *del tensor de Ricci asociado a* R *es no degenerada, entonces:*

$$R \;\in\; \mathrm{Curv}_{\mathrm{Riem}}(V,\, \mathrm{Ric}_{\mathrm{sim}}).$$

Observación 3.15 (Ric Anti–Simétrico).
*Uno se puede preguntar:¿*Ric *siempre es simétrico para un espacio simétrico? El caso riemanniano pudiera sugerir que sí, pero no es así. Existe un ejemplo en dimensión tres el cual no tiene* Ric *simétrico:*

Un espacio simétrico con curvatura de Ricci no simétrica en dimensión tres es el cociente del grupo afín orientado de $\mathbb{R}^3$ *por la componente conexa a la identidad del subgrupo fijo bajo el automorfismo interno dado por la reflexión en una recta, cuya operación binaria de multiplicación se puede escribir en la forma:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2a-x-abx}{1+ab-2bx} & \frac{2b-y-aby}{1+ab-2ay} & \frac{2c-z+abz-2acy}{1+ab-2ay} \end{pmatrix}$$

cuyo tensor de Ric *no simétrico es:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto se puede ver que la teoría para espacios simétricos riemannianos es diferente de la teoría aplicada a espacios simétricos no riemannianos usando la definición de Loos.

3.2. Clases de Isomorfía de Espacios Simétricos

Lema 3.16 (Cubriente Universal).
Recordamos que toda variedad conexa $\mathbb{M}$ *es conexa por caminos. Por ende tiene un cubriente universal bien definido, que es una variedad conexa y simplemente conexa* $\widetilde{\mathbb{M}}$ *con una aplicación sobreyectiva* $\pi : \widetilde{\mathbb{M}} \longrightarrow \mathbb{M}$*, que es un difeomorfismo local en todo punto* $\widetilde{p} \in \widetilde{\mathbb{M}}$*:*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\,\mathbb{M},\, p\,) \arrow[r, dotted] & \widetilde{\mathbb{M}} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{M} \end{tikzcd}$$

El cubriente universal $\widetilde{\mathbb{M}}$ *de un espacio simétrico* $\mathbb{M}$ *también es un espacio simétrico.*

Este lema nos permite reducir la complejidad del problema de clasificar todos los espacios simétricos al problema de clasificar solamente los espacios simétricos $\mathbb{M}$ (conexos y) simplemente conexos. Todos los otros espacios simétricos son uniones disjuntas de cocientes de tales espacios simétricos por subgrupos discretos del grupo afín $\mathrm{Aff}(\,\mathbb{M},\, \nabla^{\mathrm{Loos}}\,)$.

Definición 3.17 (Espacios Simétricos Marcados).
Un espacio simétrico marcado de dimensión $m = \dim V$ es una terna $(\,\mathbb{M},\, p,\, F\,)$, en donde $\mathbb{M}$ es un espacio simétrico de dimensión m y F es un marco en el punto $p \in \mathbb{M}$, es decir, un isomorfismo $F : V \longrightarrow T_p\mathbb{M}$ del espacio modelo V al espacio tangente en p.

La elección de un marco $(\, p,\ F\,)$ para un espacio simétrico $\mathbb{M}$ de dimensión m es esencialmente lo mismo que elegir un punto base $p \in \mathbb{M}$ y una base ordenada del espacio tangente en p. En el caso $V = \mathbb{R}^m$ por ejemplo la base ordenada asociada a un isomorfismo $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_p\mathbb{M}$ es la imagen $\{\, Fe_1,\ \ldots,\ Fe_m\,\}$ de la base ordenada estándar $\{\, e_1,\ \ldots,\ e_m\,\}$.

Definición 3.18 (Isomorfismos entre Espacios Simétricos Marcados)**.**
Un isomorfismo entre dos espacios simétricos marcados $(\,\mathbb{M},\ p,\ F\,)$ y $(\,\mathbb{L},\ q,\ E\,)$ es un difeomorfismo afín $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ con respecto a las conexiones de Loos de $\mathbb{M}$ y $\mathbb{L}$ tal que:

$$\varphi(\,p\,) \;=\; q \qquad\qquad \varphi_{*,\,p} \circ F \;=\; E\ .$$

Definición 3.19 (Clases de Isomorfismos de Espacios Simétricos)**.**
Sea V un espacio vectorial modelo de dimensión $m := \dim V$ sobre $\mathbb{R}$. El conjunto de clases de isomorfía de espacios simétricos $(\,\mathbb{M},\ p,\ F\,)$ marcados y simplemente conexos bajo isomorfismos marcados en el sentido de la Definición 3.18 se denotará por:

$$\mathfrak{S}_m^{\text{marcado}}(\,V\,) \;:=\; \Big\{\ [\,(\,\mathbb{M},\ p,\ F\,)\,]\ \Big|\ (\,\mathbb{M},\ p,\ F\,) \text{ marcado y simplemente conexo }\Big\}.$$

De la misma manera consideramos el conjunto

$$\mathfrak{S}_m(\,V\,) \;:=\; \Big\{\ [\,\mathbb{M}\,]\ \Big|\ \mathbb{M} \text{ espacio simétrico simplemente conexo de dimensión } m\ \Big\}$$

de clases de isomorfía de espacios simétricos simplemente conexos de dimensión m, en el que se ha olvidado el punto p y el marco F.

Lema 3.20 (Construcción de Espacios Simétricos)**.**
Sea G un grupo de Lie y sea $\theta : G \longrightarrow G,\ g \longmapsto \theta(\,g\,)$, un automorfismo involutivo suave del grupo G en el sentido $\theta(\,\gamma g\,) = \theta(\,\gamma\,)\,\theta(\,g\,)$ y $\theta^2 = \mathrm{id}_G$. Además sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado en la topología de G y $H \subset G^\theta$ contenido en el subgrupo cerrado de puntos fijos

$$G^\theta \;:=\; \{\ g \in G\ \mid\ \theta(\,g\,) = g\ \}$$

de G bajo θ, tal que H y G^θ determinan la misma subálgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\theta \subset \mathfrak{g}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G. Entonces el conjunto de clases laterales izquierdas $\mathbb{M} := G/H$ de H en G es un espacio simétrico bajo la operación binaria:

$$* :\ \mathbb{M} \times \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \qquad\qquad (\,\gamma H,\ gH\,) \longmapsto \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,g\,)\,H\ .$$

Demostración. Es bien conocido que un subgrupo cerrado $H \subset G$ en la topología de un grupo de Lie G es automáticamente una subvariedad y entonces un grupo de Lie también, en particular podemos hablar de la subálgebra de Lie asociada al subgrupo H

$$\mathfrak{h} \;:=\; T_eH \;\subset\; T_eG \;=:\; \mathfrak{g}$$

en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada al grupo G. El mismo argumento que asegura que H es una subvariedad también implica que el conjunto $\mathbb{M} := G/H$ de clases laterales izquierdas es una variedad suave, en la cual el grupo G actúa suave y transitivamente a la izquierda:

$$\star :\ G \times \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \qquad\qquad (\,\gamma,\ gH\,) \longmapsto \gamma gH\ . \tag{3.8}$$

Finalmente este argumento implica que la proyección canónica $\pi : G \longrightarrow \mathbb{M}$, $g \longmapsto gH$, es la proyección de un haz fibrado suave sobre $\mathbb{M}$ con espacio total G y fibra modelo H:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\subset"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{M}\,. \end{tikzcd}$$

Una consecuencia de ser la proyección en un haz fibrado es que la diferencial de π en el elemento neutro $e \in G$ es una aplicación lineal y sobreyectiva con núcleo $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$:

$$\pi_{*,e} : \ \mathfrak{g} \xrightarrow{=} T_eG \longrightarrow T_{eH}\mathbb{M}, \qquad X \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_0 e^{tX} \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_0 e^{tX} H. \tag{3.9}$$

Consideramos ahora la diferencial del automorfismo involutivo $\theta \in \operatorname{Aut} G$ en $e \in G$

$$\theta_{*,e} : \ \mathfrak{g} \xrightarrow{=} T_eG \longrightarrow T_eG \qquad X \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_0 e^{tX} \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \theta(\, e^{tX}\,)$$

Dado que θ es un automorfismo del grupo G la curva $\mathbb{R} \longrightarrow G$, $t \longmapsto \theta(e^{tX})$, es un homomorfismo de grupos para todo $X \in \mathfrak{g}$. Es decir, que es un subgrupo a un parámetro necesariamente generado por el vector tangente $\theta_{*,e}(\,X\,)$, así concluimos

$$\theta(\, e^{t\,X}\,) \;=\; e^{t\,\theta_{*,e}(\,X\,)} \tag{3.10}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Porque la diferencial de una composición es la composición de las diferenciales, la involutividad $\theta \circ \theta = \mathrm{id}_G$ de θ implica $\theta_{*,e} \circ \theta_{*,e} = (\,\mathrm{id}_G\,)_{*,e} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, es decir, que $\theta_{*,e} \in \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ es un isomorfismo involutivo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Según el Lema A.16 cada automorfismo involutivo de un álgebra induce una $\mathbb{Z}_2$–graduación, en nuestro caso obtenemos

$$\mathfrak{g} \;=\; \{\; X \;|\; \theta_{*,e}(\,X\,) = +X \;\} \oplus \{\; X \;|\; \theta_{*,e}(\,X\,) = -X \;\} \;=:\; \mathfrak{g}^\theta \oplus \mathfrak{m} \tag{3.11}$$

en donde $\mathfrak{g}^\theta = \mathfrak{h}$ es la subálgebra de Lie asociada al subgrupo G^θ de puntos fijos bajo θ, que es por hipótesis la misma que la subálgebra asociada a H.

Después de discutir las características básicas de la estructura diferenciable de la variedad $\mathbb{M} = G/H$, podemos verificar que $\mathbb{M}$ es un espacio simétrico. Observamos primero que la operación binaria $*$ en $\mathbb{M}$ está bien definida sobre las clases laterales izquierdas: diferentes elecciones $\gamma, \widetilde{\gamma} \in G$ y $g, \widetilde{g} \in G$ para los representantes de las dos clases laterales izquierdas

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} \gamma H &=& \widetilde{\gamma} H &\iff& \alpha &:=& \gamma^{-1}\widetilde{\gamma} \in H \subset G^\theta &\Longrightarrow& \alpha &=& \theta(\,\alpha\,) \\ gH &=& \widetilde{g} H &\iff& h &:=& g^{-1}\widetilde{g} \in H \subset G^\theta &\Longrightarrow& h &=& \theta(\,h\,) \end{array}$$

no afectan al punto en $\mathbb{M}$, que es la imagen de gH bajo la reflexión centrada en γH:

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma} H * \widetilde{g} H &= \widetilde{\gamma}\,\theta(\,\widetilde{\gamma}^{-1}\,\widetilde{g}\,)\,H \\ &= \gamma\,\alpha\,\theta(\,\alpha^{-1}\,\gamma^{-1}\,g\,h\,)\,H \\ &= \gamma\,\theta(\,\alpha\,\alpha^{-1}\,\gamma^{-1}\,g\,)\,h\,H \;=\; \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,g\,)\,H \;\stackrel{!}{=}\; \gamma H * gH\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la operación binaria está bien definida en el conjunto $\mathbb{M}$ de clases laterales. Verificamos los cuatro axiomas de un espacio simétrico como sigue:

S1) Todo $\gamma H \in \mathbb{M}$ es un punto fijo bajo la reflexión $S_{\gamma H} : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$, $gH \longmapsto \gamma H * gH$:

$$\gamma H * \gamma H \;=\; \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\gamma)\,H \;=\; \gamma\,\theta(\,e\,)\,H \;=\; \gamma H\;.$$

S2) La reflexión $S_{\gamma H} : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$, $gH \longmapsto \gamma H * gH$, es un difeomorfismo involutivo de $\mathbb{M}$:

$$\begin{aligned}\gamma H * (\,\gamma H * gH\,) &= \gamma H * \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,g\,)\,H \\ &= \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,\gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,g\,)\,)\,H \\ &= \gamma\,\theta^2(\,\gamma^{-1}\,g\,)\,H \;=\; \gamma\,\gamma^{-1}\,gH \;=\; gH.\end{aligned}$$

S3) Recordamos que la acción (3.8) es una acción suave, por ende la traslación a la izquierda $L_\gamma : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$, $gH \longmapsto \gamma gH$, es un difeomorfismo. Si restringimos la aplicación sobreyectiva (3.9) al complemento lineal $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ de su núcleo $\mathfrak{h} = \ker \pi_{*,\,e}$ y la componemos con la diferencial del difeomorfismo L_γ en $e \in G$, obtenemos el isomorfismo

$$\mathfrak{m} \stackrel{\pi_{*,\,e}}{\longrightarrow} T_{eH}\mathbb{M} \stackrel{(\,L_\gamma\,)_{*,\,e}}{\longrightarrow} T_{\gamma H}\mathbb{M} \qquad\qquad X \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_0 e^{tX}\,H \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma\,e^{tX}\,H$$

de espacios vectoriales. Usando este isomorfismo lineal, la ecuación (3.10) y la propiedad característica $\theta_{*,\,e}(\,X\,) = -X$ de los vectores $X \in \mathfrak{m}$ verificamos fácilmente que:

$$\begin{aligned}(\,S_{\gamma H}\,)_{*,\,\gamma H}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma\,e^{tX}H\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma H * \gamma\,e^{tX}H \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,\gamma\,e^{tX}\,)\,H \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma\,e^{t\,\theta_{*,\,e}X}\,H \;=\; \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \gamma\,e^{-tX}\,H\;.\end{aligned}$$

S4) Para tres clases laterales γH, gH, $xH \in \mathbb{M}$ cualesquiera es verdad que:

$$\begin{aligned}(\,\gamma H * gH\,) * (\,\gamma H * xH\,) &= \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,g\,)\,H * \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,x\,)\,H \\ &= \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,g\,)\,\theta\Big(\,\theta(\,\gamma^{-1}\,g\,)^{-1}\,\gamma^{-1}\,\gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,x\,)\Big)\,H \\ &= \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,g\,)\,\theta^2(\,g^{-1}\,\gamma\,\gamma^{-1}\,x\,)\,H \\ &= \gamma\,\theta(\,\gamma^{-1}\,g\,\theta(\,g^{-1}x\,)\,)\,H \;=\; \gamma H * (\,gH * xH\,).\end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.21 (Construcción para Grupos de Lie)**.**
Sabemos desde nuestra discusión de ejemplos explícitos de espacios simétricos en la Sección 2.2 que todo grupo de Lie G es un espacio simétrico bajo la operación binaria:

$$*_G \;:\; G \times G \longrightarrow G \qquad\qquad (\,g,\,x\,) \longmapsto g\,x^{-1}\,g\;.$$

El producto cartesiano $G \times G$ de G consigo mismo es un grupo de Lie de manera natural dotado con el automorfismo involutivo suave $\theta : G \times G \longrightarrow G \times G$, $(\gamma, g) \longmapsto (g, \gamma)$. El subgrupo de puntos fijos de $G \times G$ bajo el automorfismo θ es el subgrupo diagonal:

$$(G \times G)^\theta \;:=\; \{ \; (\gamma, g) \mid (\gamma, g) = \theta(\gamma, g) = (g, \gamma) \; \} \;\stackrel{!}{=}\; \Delta G \;\cong\; G \, .$$

En este ejemplo el conjunto $\mathbb{M} = (G \times G)/\Delta G$ de clases laterales izquierdas está en biyección

$$\Psi : \;\; \mathbb{M} \stackrel{\cong}{\longrightarrow} G \qquad\qquad (\gamma, g)\,\Delta G \;\longmapsto\; \gamma\, g^{-1}$$

con G y en consecuencia Ψ es un isomorfismo de espacios simétricos, porque:

$$\begin{aligned} \Psi\Big((\gamma, g)\,\Delta G \;*_{\mathbb{M}}\; (\widetilde{\gamma}, \widetilde{g})\,\Delta G \Big) \;&=\; \Psi\Big((\gamma, g)\,\theta\,\big[\,(\gamma, g)^{-1}\,(\widetilde{\gamma}, \widetilde{g})\,\big]\;\Delta G \Big) \\ &=\; \Psi\Big((\gamma\, g^{-1}\,\widetilde{g},\; g\,\gamma^{-1}\,\widetilde{\gamma})\,\Delta G \Big) \\ &=\; (\gamma\, g^{-1})\,(\widetilde{\gamma}\,\widetilde{g}^{-1})^{-1}\,(\gamma\, g^{-1}) \\ &=\; \Psi\Big((\gamma, g)\,\Delta G \Big) \;*_G\; \Psi\Big((\widetilde{\gamma}, \widetilde{g})\,\Delta G \Big) \, . \end{aligned}$$

Continuando con la clasificación recordamos que la derivada covariante del tensor R de curvatura de la conexión $\nabla = \nabla^{\mathbb{M}}$ una variedad afín $\mathbb{M}$ es la aplicación $C^\infty(\mathbb{M})$–multilineal

$$\nabla R : \;\; \Gamma(T\mathbb{M}) \,\times\, \Gamma(T\mathbb{M}) \,\times\, \Gamma(T\mathbb{M}) \,\times\, \Gamma(T\mathbb{M}) \;\longrightarrow\; \Gamma(T\mathbb{M})$$

definida para todos los argumentos $X, A, B, C \in \Gamma(T\mathbb{M})$ por la regla:

$$(\nabla_X R)_{A,\,B} C \;:=\; \nabla_X(R_{A,\,B} C) \;-\; R_{\nabla_X A,\,B} C \;-\; R_{A,\,\nabla_X B} C \;-\; R_{A,\,B}(\nabla_X C) \tag{3.12}$$

Inductivamente se puede definir la segunda derivada covariante de R por la regla análoga

$$\begin{aligned} (\nabla_X \nabla R)_{Y;\,A,\,B} C \;:=\;& \nabla_X((\nabla_Y R)_{A,\,B} C) \\ & - (\nabla_{\nabla_X Y} R)_{A,\,B} C \;-\; (\nabla_Y R)_{\nabla_X A,\,B} C \\ & - (\nabla_Y R)_{A,\,\nabla_X B} C \;-\; (\nabla_Y R)_{A,\,B}(\nabla_X C) \end{aligned} \tag{3.13}$$

que depende $C^\infty(\mathbb{M})$–multilinealmente de sus argumentos $X, Y, A, B, C \in \Gamma(T\mathbb{M})$. La naturaleza inductiva de esta definición de la segunda derivada covariante de R claramente implica $\nabla^2 R = 0$, si el tensor R de curvatura de $\mathbb{M}$ es paralelo en el sentido $\nabla R = 0$ en toda la variedad $\mathbb{M}$. Este argumento nos servirá en la demostración del siguiente lema:

Lema 3.22 (Interpretación de la Ecuación Cuadrática)**.**
El tensor de curvatura $R \in \Gamma(\mathrm{Curv}(T\mathbb{M}))$ de la conexión de Loos ∇^{Loos} es paralelo

$$\nabla^{\mathrm{Loos}} R \;=\; 0$$

para cualquier espacio simétrico $\mathbb{M}$. En particular su valor $R = R_p \in \mathrm{Curv}_{\Phi = 0}(T_p\mathbb{M})$ en cada punto $p \in \mathbb{M}$ satisface la ecuación cuadrática $\Phi(R) = 0$ de la Definición 3.8. En otras palabras, para todos los vectores tangentes $X, Y, A, B, C \in T_p\mathbb{M}$ en p es verdad que:

$$(R_{X,\,Y} \star R)_{A,\,B} C \;:=\; [\, R_{X,\,Y},\; R_{A,\,B}\,]\, C \;-\; R_{R_{X,\,Y} A,\,B} C \;-\; R_{A,\,R_{X,\,Y} B} C \;\stackrel{!}{=}\; 0 \, .$$

Demostración. Seguimos el argumento original de Élie Cartan para establecer la primera afirmación $\nabla^{\mathrm{Loos}} R = 0$ del lema. Para ello consideramos un automorfismo afín $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ de una variedad afín $\mathbb{M}$ con conexión ∇ y su tensor de curvatura R. El automorfismo

$$\varphi_* : \ \Gamma(T\mathbb{M}) \xrightarrow{\cong} \Gamma(T\mathbb{M}) \qquad\qquad X \longmapsto \Big(\varphi(p) \longmapsto \varphi_{*,p} X_p \Big) \tag{3.14}$$

de su álgebra de Lie de campos vectoriales es paralelo $\varphi_*(\nabla_X Y) = \nabla_{\varphi_* X} \varphi_* Y$ con respecto a la conexión ∇ según la ecuación (1.9). En consecuencia es verdad también que

$$\begin{aligned} \varphi_* \Big(R_{A,B} C \Big) &= \varphi_* \Big(\nabla_A \nabla_B C - \nabla_B \nabla_A C - \nabla_{[A,B]} C \Big) \\ &= \nabla_{\varphi_* A} \varphi_* \Big(\nabla_B C \Big) - \nabla_{\varphi_* B} \varphi_* \Big(\nabla_A C \Big) - \nabla_{\varphi_* [A,B]} \varphi_* C \\ &= \nabla_{\varphi_* A} \nabla_{\varphi_* B} \varphi_* C - \nabla_{\varphi_* B} \nabla_{\varphi_* A} \varphi_* C - \nabla_{[\varphi_* A, \varphi_* B]} \varphi_* C \end{aligned}$$

para todos los campos vectoriales $A, B, C \in \Gamma(T\mathbb{M})$, es decir, que:

$$\varphi_* \Big(R_{A,B} C \Big) = R_{\varphi_* A, \varphi_* B} \varphi_* C. \tag{3.15}$$

Siguiendo de cerca esta argumentación modelo se establece también la identidad:

$$\varphi_* \Big((\nabla_X R)_{A,B} C \Big) = (\nabla_{\varphi_* X} R)_{\varphi_* A, \varphi_* B} \varphi_* C. \tag{3.16}$$

Según el Lema 2.6 la reflexión $S_p : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$, $x \longmapsto p * x$, centrada en un punto dado $p \in \mathbb{M}$ es un automorfismo del espacio simétrico $\mathbb{M}$, y el Lema 2.14 afirma que es afín con respecto a la conexión de Loos ∇^{Loos}. Por este difeomorfismo afín la ecuación (3.16) se convierte en

$$(S_p)_* \Big((\nabla^{\mathrm{Loos}}_X R)_{A,B} C \Big) = (\nabla^{\mathrm{Loos}}_{(S_p)_* X} R)_{(S_p)_* A, (S_p)_* B} (S_p)_* C \tag{3.17}$$

válida para todo $X, A, B, C \in \Gamma(T\mathbb{M})$. Para evaluar ambos lados de esta identidad en p recordamos que el tercer axioma de espacios simétricos dice $(S_p)_{*,p} = -\mathrm{id}_{T_p\mathbb{M}}$, por lo cual la definición (3.14) del automorfismo del álgebra de Lie $\Gamma(T\mathbb{M})$ inducido por S_p resulta en

$$\Big((S_p)_* A \Big)_p = \Big((S_p)_* A \Big)_{S_p p} = (S_p)_{*,p} A_p = -A_p$$

para todo $A \in \Gamma(T\mathbb{M})$. Así la identidad (3.17) evaluada en el punto $p \in \mathbb{M}$ se reduce a

$$\begin{aligned} -\Big((\nabla^{\mathrm{Loos}} R)_p \Big)_{X_p;\, A_p,\, B_p} C_p &= \Big((\nabla^{\mathrm{Loos}} R)_p \Big)_{-X_p;\, -A_p,\, -B_p} (-C_p) \\ &= +\Big((\nabla^{\mathrm{Loos}} R)_p \Big)_{X_p;\, A_p,\, B_p} C_p = 0 \end{aligned}$$

para todo $X_p, A_p, B_p, C_p \in T_p\mathbb{M}$, es decir, que la derivada covariante del tensor de curvatura R de la conexión de Loos se anula $(\nabla^{\mathrm{Loos}} R)_p = 0$ en el punto $p \in \mathbb{M}$. En este argumento $p \in \mathbb{M}$ es un punto arbitrario del espacio simétrico $\mathbb{M}$ por lo cual concluimos $\nabla^{\mathrm{Loos}} R = 0$.

La segunda afirmación del lema se puede demostrar fácilmente para una variedad afín arbitraria $\mathbb{M}$ dotada con una conexión ∇ libre de torsión. Para simplificar nuestras cuentas fijamos la siguiente notación para tres campos vectoriales $X, Y, A \in \Gamma(T\mathbb{M})$ cualesquiera:

$$\nabla^2_{X,Y}A \;:=\; \nabla_X\nabla_Y A - \nabla_{\nabla_X Y}A.$$

Como ∇ es una conexión libre de torsión tenemos que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ y entonces

$$\begin{aligned} \nabla^2_{X,Y}A - \nabla^2_{Y,X}A &= \nabla_X\nabla_Y A - \nabla_{\nabla_X Y}A - \nabla_Y\nabla_X A + \nabla_{\nabla_Y X}A \\ &= \nabla_X\nabla_Y A - \nabla_Y\nabla_X A - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X}A \qquad \stackrel{!}{=} R_{X,Y}A \end{aligned}$$

para todo $X, Y, A \in \Gamma(T\mathbb{M})$ utilizando la Definición 1.6 de la curvatura. Observamos que la definición inductiva de la segunda derivada covariante del tensor de curvatura R de la variedad afín $\mathbb{M}$ en la ecuación (3.13) está basada en la definición (3.12) de la derivada covariante ∇R. Si expandimos todas las subexpresiones ∇R en la ecuación (3.13) obtenemos la expansión completa y bastante complicada de la segunda derivada covariante de R:

$$\begin{aligned} &(\nabla_X\nabla R)_{Y;A,B}C \\ &\quad= +\nabla_X((\nabla_Y R)_{A,B}C) \\ &\qquad -(\nabla_{\nabla_X Y}R)_{A,B}C - (\nabla_Y R)_{\nabla_X A,B}C - (\nabla_Y R)_{A,\nabla_X B}C - (\nabla_Y R)_{A,B}\nabla_X C \\ &\quad= +\nabla_X\nabla_Y(R_{A,B}C) - \nabla_X(R_{\nabla_Y A,B}C) - \nabla_X(R_{A,\nabla_Y B}C) - \nabla_X(R_{A,B}\nabla_Y C) \\ &\qquad -\nabla_{\nabla_X Y}(R_{A,B}C) + R_{\nabla_{\nabla_X Y}A,B}C + R_{A,\nabla_{\nabla_X Y}B}C + R_{A,B}(\nabla_{\nabla_X Y}C) \\ &\qquad -\nabla_Y(R_{\nabla_X A,B}C) + R_{\nabla_Y\nabla_X A,B}C + R_{\nabla_X A,\nabla_Y B}C + R_{\nabla_X A,B}(\nabla_Y C) \\ &\qquad -\nabla_Y(R_{A,\nabla_X B}C) + R_{\nabla_Y A,\nabla_X B}C + R_{A,\nabla_Y\nabla_X B}C + R_{A,\nabla_X B}(\nabla_Y C) \\ &\qquad -\nabla_Y(R_{A,B}\nabla_X C) + R_{\nabla_Y A,B}\nabla_X C + R_{A,\nabla_Y B}\nabla_X C + R_{A,B}(\nabla_Y\nabla_X C) \\ &\quad= +\nabla^2_{X,Y}(R_{A,B}C) - R_{(-\nabla_Y\nabla_X - \nabla_{\nabla_X Y})A,B}C \\ &\qquad -R_{A,(-\nabla_Y\nabla_X - \nabla_{\nabla_X Y})B}C - R_{A,B}((-\nabla_Y\nabla_X - \nabla_{\nabla_X Y})C) \\ &\qquad +6 \text{ parejas de términos simétricos bajo el intercambio } X \leftrightarrow Y. \end{aligned}$$

Para eliminar las 6 parejas de términos simétricos bajo $X \leftrightarrow Y$ calculamos la resta

$$(\nabla_X\nabla R)_{Y;A,B}C \;-\; (\nabla_Y\nabla R)_{X;A,B}C$$

usando la identidad auxiliar análoga a $\nabla^2_{X,Y}A - \nabla^2_{Y,X}A = R_{X,Y}A$:

$$(-\nabla_Y\nabla_X - \nabla_{\nabla_X Y})A - (-\nabla_X\nabla_Y - \nabla_{\nabla_Y X})A \;=\; \nabla^2_{X,Y}A - \nabla^2_{Y,X}A \;=\; R_{X,Y}A.$$

Entonces el resultado final de calcular la resta es:

$$\begin{aligned} &(\nabla_X\nabla R)_{Y;A,B}C - (\nabla_Y\nabla R)_{X;A,B}C \\ &\quad= R_{X,Y}(R_{A,B}C) - R_{R_{X,Y}A,B}C - R_{A,R_{X,Y}B}C - R_{A,B}(R_{X,Y}C) \\ &\quad\stackrel{!}{=} (R_{X,Y} \star R)_{A,B}C \;=:\; \Phi(R)_{X,Y;A,B}C. \end{aligned}$$

Por lo cual podemos concluir: Si tenemos una variedad afín $\mathbb{M}$ con una conexión ∇ libre de torsión tal que $\nabla R = 0$ idénticamente en toda la variedad, entonces el valor del tensor de curvatura $R_p \in \mathrm{Curv}(T_p\mathbb{M})$ en cada punto $p \in \mathbb{M}$ satisface la ecuación cuadrática $\Phi(R_p) = 0$. En particular esto vale para un espacio simétrico $\mathbb{M}$ con su conexión ∇^{Loos}. ■

El tercer Teorema de Lie se obtiene a partir del siguiente teorema, el cual también será adaptado al lenguaje de espacios simétricos. Esta adaptación será bastante útil para la clasificación de espacios simétricos marcados:

Teorema 3.23 (Existencia de Homomorfismos en Grupos de Lie)**.**
Sean G y H dos grupos de Lie tal que G es simplemente conexo y sea $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo entre sus álgebras de Lie $\mathfrak{g} := T_eG$ y $\mathfrak{h} := T_eH$. Entonces existe un homomorfismo único de grupos de Lie $\Psi : G \longrightarrow H$ tal que su diferencial en $e \in G$ es igual a ψ:

$$\Psi_{*,e} : \; T_eG \longrightarrow T_eH \qquad\qquad X \longmapsto \Psi_{*,e}(X) \stackrel{!}{=} \psi(X).$$

Teorema 3.24 (Tercer Teorema de Lie)**.**
Dada un álgebra de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ existe un grupo de Lie G simplemente conexo con un álgebra de Lie $\mathfrak{g} := T_eG$ isomorfo a $\widetilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}$.

Para la demostración referimos al lector al libro [Wa], página 94. Se nota que el grupo G en el tercer Teorema de Lie está determinado únicamente por el álgebra $\mathfrak{g}$ salvo isomorfismos de grupos de Lie: Si G y $\hat{G}$ son dos grupos de Lie simplemente conexos con álgebras de Lie ambas isomorfas a $\widetilde{\mathfrak{g}}$, entonces existe un isomorfismo $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}}$ que es la diferencial de un homomorfismo $\Psi : G \longrightarrow \hat{G}$ de grupos de Lie en $e \in G$ gracias al Teorema 3.23. Por la misma razón ψ^{-1} es la diferencial de un homomorfismo $\Psi^{-1} : \hat{G} \longrightarrow G$ de tal manera que $\psi^{-1} \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ es la diferencial en $e \in G$ de ambos endomorfismos $\Psi^{-1} \circ \Psi$ y id_G del grupo de Lie G. Así la unicidad del homomorfismo dada su diferencial en el Teorema 3.23 nos dice $\Psi^{-1} \circ \Psi = \mathrm{id}_G$, un argumento análogo asegura que $\Psi \circ \Psi^{-1} = \mathrm{id}_{\hat{G}}$ también.

Las demostraciones del Teorema 3.23 y del Teorema 3.24 hacen uso extenso de la llamada Fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff para grupos de Lie. Para adaptar la demostración del Teorema 3.23 al caso más general de espacios simétricos necesitamos el análogo de esta fórmula, la Fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff para espacios simétricos:

Lema 3.25 (Fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff para Espacios Simétricos)**.**
Sea $R := R_p^{\mathrm{Loos}} \in \mathrm{Curv}(T_p\mathbb{M})$ el tensor de curvatura de la conexión de Loos ∇^{Loos} de un espacio simétrico $\mathbb{M}$ en un punto base $p \in \mathbb{M}$. La fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff para grupos de Lie [H] tiene una versión para espacios simétricos de la forma

$$\exp_p^{\mathrm{Loos}} X \, * \, \exp_p^{\mathrm{Loos}} Y \;=\; \exp_p^{\mathrm{Loos}} \Big(2\,X \,-\, Y \,+\, \frac{2}{3} R_{X,Y}X \,+\, \frac{2}{3} R_{Y,X}Y \,+\, \dots \Big)$$

en donde $\exp_p^{\mathrm{Loos}} : T_p\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ es la aplicación exponencial para la conexión de Loos.

Corolario 3.26 (Existencia de Homomorfismos entre Espacios Simétricos).
Sean $\mathbb{M}$ y $\mathbb{L}$ dos espacios simétricos con $\mathbb{M}$ simplemente conexo y sea $\psi : T_p\mathbb{M} \longrightarrow T_q\mathbb{L}$ una aplicación lineal entre sus espacios tangentes en los puntos $p \in \mathbb{M}$ y $q \in \mathbb{L}$ tal que

$$\psi(\,(R_p^{\mathbb{M}})_{X,Y}Z\,) \;=\; (\,R_q^{\mathbb{L}}\,)_{\psi(\,X\,),\,\psi(\,Y\,)}\psi(\,Z\,)$$

para todo X, Y, $Z \in T_p\mathbb{M}$. Entonces existe un homomorfismo único $\Psi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ tal que:

$$\Psi(\,p\,) \;=\; q \qquad\qquad \Psi_{*,\,p} \;=\; \psi\;.$$

Teorema 3.27 (Clasificación de Espacios Simétricos Marcados).
Existe una biyección Θ entre el conjunto $\mathfrak{S}_m^{\text{marcado}}(\,V\,)$ de clases de isomorfía de espacios simétricos marcados simplemente conexos y el conjunto $\text{Curv}_{\Phi\,=\,0}(\,V\,)$ de tensores algebraicos de curvatura R que satisfacen la ecuación cuadrática $\Phi(\,R\,) = 0$, es decir, que satisfacen

$$R_{X,\,Y}\,R_{A,\,B}C \;-\; R_{A,\,B}\,R_{X,\,Y}C \;\;=\;\; R_{R_{X,\,Y}A,\,B}C \;+\; R_{A,\,R_{X,\,Y}B}C$$

para todo X, Y y A, B, $C \in V$. Esta biyección es dada por jalar el tensor de curvatura R de la conexión ∇^{Loos} en el punto base p sobre el marco F a un elemento de $\text{Curv}(\,V\,)$:

$$\Theta :\;\; \mathfrak{S}_m^{\text{marcado}}(\,V\,) \;\xrightarrow{\;\cong\;}\; \text{Curv}_{\Phi\,=\,0}(\,V\,), \qquad\qquad [\,(\,\mathbb{M},\,p,\,F\,)\,] \;\longmapsto\; F^*R_p\;.$$

Demostración. Para empezar tenemos que verificar que Θ está bien definida. Sea entonces $(\,\mathbb{M},\,p,\,F\,)$ un espacio simétrico marcado, el valor $R_p \in \text{Curv}(\,T_p\mathbb{M}\,)$ de su tensor de curvatura R en el punto base $p \in \mathbb{M}$ satisface la ecuación cuadrática $\Phi(\,R_p\,) = 0$ debido al Lema 3.22, por lo cual concluimos que $F^*R_p \in \text{Curv}_{\Phi\,=\,0}(\,V\,)$ por medio del argumento:

$$\Phi(\,F^*R_p\,) \;=\; F^*\Phi(\,R_p\,) \;=\; 0.$$

Según la Definición 3.18 existe un difeomorfismo afín $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ para cualquier pareja de espacios simétricos marcados isomorfos $(\,\mathbb{M},\,p,\,F\,) \cong (\mathbb{L},\,q,\,E\,)$ tal que $\varphi(p) = q$ y además $\varphi_{*,\,p} \circ F = E$. Adaptando la ecuación (3.15) de un automorfismo al caso de un difeomorfismo afín obtenemos la siguiente identidad para campos vectoriales A, B, $C \in \Gamma(\,T\mathbb{M}\,)$

$$\varphi_*\Big(\,R^{\mathbb{M}}_{A,\,B}C\,\Big) \;=\; R^{\mathbb{L}}_{\varphi_*A,\,\varphi_*B}\varphi_*C$$

que evaluada en el punto base $p \in \mathbb{M}$ y gracias a $(\varphi_*A)_q = \varphi_{*,p}A_p$ nos da la identidad

$$(\,\varphi_{*,\,p}\,)^*R_q^{\mathbb{L}} \;=\; R_p^{\mathbb{M}} \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi_{*,\,p}\Big(\,(\,R_p^{\mathbb{M}}\,)_{A_p,\,B_p}C_p\,\Big) \;=\; (\,R_q^{\mathbb{L}}\,)_{\varphi_{*,\,p}A_p,\,\varphi_{*,\,p}B_p}\varphi_{*,p}C_p \tag{3.18}$$

en el sentido de la Definición 3.4. Entonces la factorización $E = \varphi_{*,\,p} \circ F$ asegura que:

$$E^*R_q^{\mathbb{L}} \;=\; (\,\varphi_{*,\,p}\,\circ\,F\,)^*\,\mathbb{R}_q^{\mathbb{L}} \;=\; F^*(\,\varphi_{*,\,p}\,)^*R_q^{\mathbb{L}} \;=\; F^*R_p^{\mathbb{M}}.$$

Es decir, que la aplicación Θ esta bien definida: Dos espacios simétricos marcados isomorfos $(\,\mathbb{M},\,p,\,F\,)$ y $(\,\mathbb{L},\,q,\,E\,)$ tienen siempre la misma imagen bajo Θ.

Para demostrar que Θ es inyectiva consideramos dos clases de isomorfía de espacios simétricos marcados $[\,(\,\mathbb{M},\,p,\,F\,)\,]$ y $[\,(\,\mathbb{L},\,q,\,E\,)\,]$ que tienen la misma imagen bajo Θ:

$$F^*R^{\mathbb{M}}_p \;=\; \Theta(\,[\,(\,\mathbb{M},\,p,\,F\,)\,]\,) \;=\; \Theta(\,[\,(\,\mathbb{L},\,q,\,E\,)\,]\,) \;=\; E^*R^{\mathbb{L}}_q.$$

Entonces el isomorfismo lineal $\psi = E \circ F^{-1}$ entre sus espacios tangentes $\psi : T_p\mathbb{M} \longrightarrow T_q\mathbb{L}$ sí satisface la condición algebraica esencial del Corolario 3.26

$$(\,E \circ F^{-1}\,)^*R^{\mathbb{L}}_q \;=\; (\,F^{-1}\,)^*E^*R^{\mathbb{L}}_q \;=\; R^{\mathbb{M}}_p$$

que asegura que existe un homomorfismo de espacios simétricos $\Psi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ con $\Psi(p) = q$ y diferencial $\Psi_{*,\,p} = \psi$, se recuerda que ambos espacios simétricos $\mathbb{M}$ y $\mathbb{L}$ son simplemente conexos por asunción. Por la misma razón existe un homomorfismo de espacios simétricos $\Psi^{-1} : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{M}$ con $\Psi^{-1}(q) = p$ y diferencial $\Psi^{-1}_{*,\,q} = \psi^{-1}$ en el punto $q \in \mathbb{L}$. Argumentando como en el caso de grupos de Lie concluimos que $\Psi^{-1} \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathbb{M}}$ debido a la unicidad del homomorfismo en el Corolario 3.26 con diferencial $\psi^{-1} \circ \psi = \mathrm{id}_{T_p\mathbb{M}}$, de la misma manera concluimos $\Psi \circ \Psi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{L}}$. Así los espacios simétricos marcados $(\,\mathbb{M},\,p,\,F\,) \cong (\,\mathbb{L},\,q,\,E\,)$ son isomorfos bajo Ψ según la Definición 3.18, porque $\Psi(p) = q$ y $\Psi_{*,\,p} \circ F = \psi \circ F = E$. Entonces $[\,(\,\mathbb{M},\,p,\,F\,)\,] = [\,(\,\mathbb{L},\,q,\,E\,)\,]$ y la aplicación Θ es inyectiva.

Por supuesto la afirmación más interesante del teorema es la sobreyectividad de la aplicación Θ, es decir, que existe un espacio simétrico $\mathbb{M}$ para cualquier tensor algebraico de curvatura R que satisface la ecuación cuadrática $\Phi(\,R\,) = 0$. Para un tensor algebraico de curvatura arbitrario $R \in \mathrm{Curv}_{\Phi\,=\,0}(\,V\,)$ que satisface $\Phi(\,R\,) = 0$ consideramos su estabilizador

$$\mathrm{Stab}\,R \;:=\; \{\;\mathbb{F} \in \mathrm{GL}(\,V\,)\;|\;\mathbb{F} \star R = R\;\} \;\subseteq\; \mathrm{GL}(\,V\,)$$

bajo la representación $\star$ de $\mathrm{GL}(\,V\,)$ en $\mathrm{Curv}(\,V\,)$. Como estabilizador de un vector en una representación $\mathrm{Stab}\,R \subset \mathrm{GL}(\,V\,)$ es un subgrupo cerrado según el Lema A.2 y por lo tanto es un grupo de Lie. Su álgebra de Lie coincide con el estabilizador infinitesimal de R:

$$\mathfrak{stab}\,R \;:=\; \{\;\mathfrak{F} \in \mathrm{GL}(\,V\,)\;|\;\mathfrak{F} \star R = 0\;\} \;\subseteq\; \mathrm{End}\,V.$$

La ambigüedad en la notación $\star$ para la representación y la representación infinitesimal tiene como consecuencia la aparente contradicción $\mathrm{id} \in \mathrm{Stab}\,R$, pero $\mathrm{id} \notin \mathfrak{stab}\,R$ salvo si $R = 0$, porque las expansiones de las dos definiciones para $\star$ en Definición 3.4 resultan en:

$$(\,\mathrm{id} \star R\,)_{A,\,B}C \;=\; R_{A,\,B}C \qquad\qquad (\,\mathrm{id} \star R\,)_{A,\,B}C \;=\; -\,2\,R_{A,\,B}C\;.$$

Ahora recordamos que la ecuación cuadrática $\Phi(\,R\,) = 0$ se puede interpretar como

$$\Phi(\,R\,)_{X,\,Y;\,A,\,B}C \;=\; (\,R_{X,\,Y} \star R\,)_{A,\,B}C \;=\; 0$$

para todo $X,\,Y,\,A,\,B,\,C \in V$, es decir, que:

$$\Phi(\,R\,) \;=\; 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad R_{X,\,Y} \;\in\; \mathfrak{stab}\,R \quad \text{para todo } X,\,Y \in V. \tag{3.19}$$

Recordamos también que el estabilizador infinitesimal es una subálgebra $\mathfrak{stab}\, R \subseteq \operatorname{End} V$ y así es cerrado bajo el conmutador, pues es el álgebra de Lie del estabilizador, el subgrupo de Lie $\operatorname{Stab} R \subseteq \operatorname{GL}(V)$. Entonces la suma directa de V con el estabilizador infinitesimal

$$\mathfrak{g} \;:=\; \mathfrak{stab}\, R \oplus V \;\subseteq\; \operatorname{End} V \oplus V$$

es un álgebra bajo el corchete $[\,\cdot,\,\cdot\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ definido por la regla

$$[\,\mathfrak{X} \oplus X,\, \mathfrak{Y} \oplus Y\,] \;:=\; \Big(\,[\,\mathfrak{X},\, \mathfrak{Y}\,] \,-\, R_{X,Y}\Big) \oplus \Big(\,\mathfrak{X}Y \,-\, \mathfrak{Y}X\Big) \tag{3.20}$$

porque $R_{X,Y} \in \mathfrak{stab}\, R$ para cualquier $X, Y \in V$ por el argumento (3.19). ¡Sólo por este argumento necesitamos la condición que R satisfaga la ecuación cuadrática $\Phi(R) = 0$!

Para continuar con la construcción de un espacio simétrico a partir del tensor algebraico de curvatura $R \in \operatorname{Curv}_{\Phi=0}(V)$ tenemos que verificar que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie. Para este propósito expandimos la definición (3.20) del corchete en el cálculo:

$$\begin{aligned}
[\,\mathfrak{X} \oplus X,\, [\,\mathfrak{Y} \oplus Y,\, \mathfrak{Z} \oplus Z\,]\,] \;&=\; [\,\mathfrak{X} \oplus X,\, (\,[\mathfrak{Y},\, \mathfrak{Z}\,] \,-\, R_{Y,Z}\,) \oplus (\,\mathfrak{Y}Z \,-\, \mathfrak{Z}Y\,)\,]\\
&=\; \Big(\,[\mathfrak{X},\, [\mathfrak{Y},\, \mathfrak{Z}\,]] \,-\, [\mathfrak{X},\, R_{Y,Z}\,] \,+\, R_{\mathfrak{Y}Z,X} \,+\, R_{X,\mathfrak{Z}Y}\Big)\\
&\qquad \oplus \Big(\,\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Z \,-\, \mathfrak{X}\mathfrak{Z}Y \,-\, [\mathfrak{Y},\, \mathfrak{Z}\,]X \,+\, R_{Y,Z}X\Big)\\
[\,\mathfrak{Y} \oplus Y,\, [\,\mathfrak{Z} \oplus Z,\, \mathfrak{X} \oplus X\,]\,] \;&=\; \Big(\,[\mathfrak{Y},\, [\mathfrak{Z},\, \mathfrak{X}\,]] \,-\, [\mathfrak{Y},\, R_{Z,X}\,] \,+\, R_{\mathfrak{Z}X,Y} \,+\, R_{Y,\mathfrak{X}Z}\Big)\\
&\qquad \oplus \Big(\,\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}X \,-\, \mathfrak{Y}\mathfrak{X}Z \,-\, [\mathfrak{Z},\, \mathfrak{X}\,]Y \,+\, R_{Z,X}Y\Big)\\
[\,\mathfrak{Z} \oplus Z,\, [\,\mathfrak{X} \oplus X,\, \mathfrak{Y} \oplus Y\,]\,] \;&=\; \Big(\,[\mathfrak{Z},\, [\mathfrak{X},\, \mathfrak{Y}\,]] \,-\, [\mathfrak{Z},\, R_{X,Y}\,] \,+\, R_{\mathfrak{X}Y,Z} \,+\, R_{Z,\mathfrak{Y}X}\Big)\\
&\qquad \oplus \Big(\,\mathfrak{Z}\mathfrak{X}Y \,-\, \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}X \,-\, [\mathfrak{X},\, \mathfrak{Y}\,]Z \,+\, R_{X,Y}Z\Big).
\end{aligned}$$

Utilizamos la identidad de Jacobi para el conmutador $[\,\mathfrak{X},\, \mathfrak{Y}\,] := \mathfrak{X}\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}\mathfrak{X}$ en $\operatorname{End} V$ y la primera identidad de Bianchi para el tensor algebraico de curvatura $R \in \operatorname{Curv}(V)$

$$[\mathfrak{X},\, [\mathfrak{Y},\, \mathfrak{Z}\,]] + [\mathfrak{Y},\, [\mathfrak{Z},\, \mathfrak{X}\,]] + [\mathfrak{Z},\, [\mathfrak{X},\, \mathfrak{Y}\,]] \;=\; 0 \qquad R_{X,Y}Z \,+\, R_{Y,Z}X \,+\, R_{Z,X}Y \;=\; 0$$

para sumar las últimas tres ecuaciones con el resultado

$$\begin{aligned}
&[\,\mathfrak{X} \oplus X,\, [\,\mathfrak{Y} \oplus Y,\, \mathfrak{Z} \oplus Z\,]\,] \,+\, [\,\mathfrak{Y} \oplus Y,\, [\,\mathfrak{Z} \oplus Z,\, \mathfrak{X} \oplus X\,]\,] \,+\, [\,\mathfrak{Z} \oplus Z,\, [\,\mathfrak{X} \oplus X,\, \mathfrak{Y} \oplus Y\,]\,]\\
&\qquad =\; \Big(\,-\,(\,\mathfrak{X} \star R\,)_{Y,Z} \,-\, (\,\mathfrak{Y} \star R\,)_{Z,X} \,-\, (\,\mathfrak{Z} \star R\,)_{X,Y}\Big) \oplus 0
\end{aligned}$$

en donde $\star$ denota la representación infinitesimal de la Definición 3.4. Así la identidad de Jacobi se cumple para el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, porque $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \mathfrak{stab}\, R$ y entonces $\mathfrak{X} \star R = 0$ debido a la construcción de $\mathfrak{g}$.

Acabamos de asociar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ a la solución $R \in \operatorname{Curv}_{\Phi=0}(V)$ de la ecuación cuadrática $\Phi(R) = 0$, ahora aplicamos el tercer Teorema de Lie 3.24: Existe un grupo de Lie

G simplemente conexo que tiene como álgebra de Lie a $\mathfrak{g}$. El grupo G tiene un automorfismo involutivo $\theta : G \longrightarrow G$ caracterizado mediante el Teorema 3.23 por su diferencial en el elemento neutro $e \in G$, que es el automorfismo involutivo

$$\theta_{*,e} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad\qquad \mathfrak{X} \oplus X \longmapsto \mathfrak{X} \oplus (-X) .$$

del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Verificamos fácilmente que $\theta_{*,e}$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$, es decir, que

$$\begin{aligned} \theta_{*,e}\Big([\, \mathfrak{X} \oplus X,\, \mathfrak{Y} \oplus Y \,] \Big) &= \Big([\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] - R_{X,Y} \Big) \oplus \Big(-\, \mathfrak{X}Y + \mathfrak{Y}X \Big) \\ &= \Big([\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] - R_{-X,-Y} \Big) \oplus \Big(+\, \mathfrak{X}(-Y) - \mathfrak{Y}(-X) \Big) \\ &= \Big[\theta_{*,e}(\, \mathfrak{X} \oplus X \,),\, \theta_{*,e}(\, \mathfrak{Y} \oplus Y \,) \Big] \end{aligned}$$

para todo $\mathfrak{X} \oplus X, \mathfrak{Y} \oplus Y \in \mathfrak{g}$. La involutividad $\theta^2 = \mathrm{id}_G$ del automorfismo $\theta : G \longrightarrow G$ es garantizada como antes por la identidad evidente $\theta^2_{*,e} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ de su diferencial y la unicidad del homomorfismo Ψ en el Teorema 3.23. Definimos el subgrupo $H \subset G$ como la componente conexa del elemento neutro del subgrupo cerrado de elementos de G fijos bajo θ:

$$G^\theta := \{\ g \in G \mid \theta(g) = g\ \} \supseteq H .$$

Es decir, que $H \subseteq G^\theta$ es el subgrupo normal de elementos h de G^θ que se puede conectar al elemento neutro con un camino continuo $\gamma : [0, 1] \longrightarrow G^\theta$ en el subgrupo G^θ tal que $\gamma(0) = e$ y $\gamma(1) = h$. Entonces la construcción de espacios simétricos a partir de grupos de Lie con un automorfismo involutivo detallada en el Lema 3.20 dota al espacio homogéneo

$$\mathbb{M} := G/_{H}$$

con una estructura de espacio simétrico bajo la operación binaria:

$$* : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} \qquad\qquad (\, \gamma H,\, gH \,) \longmapsto \gamma\,\theta(\, \gamma^{-1} g \,)\, H .$$

De pasada mencionamos que $\mathbb{M}$ es simplemente conexo gracias a la sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow \pi_1(G, e) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{M}, eH) \xrightarrow{\delta} \pi_0(H, e) \longrightarrow \pi_0(G, e) \twoheadrightarrow \pi_0(\mathbb{M}, eH)$$

en homotopía con $\pi_1(G, e) = \{1\} = \pi_0(H, e)$, que es asociada al haz fibrado:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\subset"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{M} \end{tikzcd} .$$

Finalmente consideramos la composición de isomorfismos

$$F : V \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}/_{\mathfrak{stab}\, R} \xrightarrow{\cong} T_{eH}\mathbb{M} \qquad\qquad X \longmapsto \frac{d}{dt}\Big|_0 e^{t\,(0 \oplus X)}\, H$$

en donde el segundo isomorfismo es el isomorfismo (3.9) construido en la demostración del Lema 3.20, para obtener un espacio simétrico marcado y simplemente conexo:

$$(\ \mathbb{M},\ eH,\ F\ ).$$

Los métodos avanzados en la investigación de espacios homogéneos [H], página 215; nos permiten calcular el tensor de curvatura de espacios homogéneos, en el caso de espacios simétricos obtenemos:

$$(\ F^* R_{eH}\ )_{A,\,B} C \;=\; -[\ [\ 0 \oplus A,\ 0 \oplus B\ ],\ 0 \oplus C\ ] \;=\; [\ R_{A,\,B} \oplus 0,\ 0 \oplus C\ ] \;=\; 0 \oplus R_{A,\,B}.$$

Esta fórmula da origen al concepto de los sistemas triples de Lie **STL**. Para nosotros lo importante es que la clase de isomorfía $[\,(\,\mathbb{M},\ eH,\ F\,)\,]$ del espacio simétrico marcado $\mathbb{M}$ es una preimagen $\Theta(\,[\,(\,\mathbb{M},\ eH,\ F\,)\,]\,) = F^* R_{eH} = R$ de R bajo Θ, por ende Θ es sobreyectiva y en consecuencia una biyección. ∎

Corolario 3.28 (Clasificación de Espacios Simétricos)**.**
La biyección Θ entre el conjunto $\mathfrak{S}_m^{\mathrm{marcado}}(\,V\,)$ de clases de isomorfía de espacios simétricos simplemente conexos y marcados por un espacio vectorial modelo V de dimensión $m \in \mathbb{N}_0$ sobre los reales $\mathbb{R}$ y el conjunto $\mathrm{Curv}_{\Phi=0}(\,V\,)$ de tensores algebraicos R de curvatura que satisfacen la ecuación cuadrática $\Phi(\,R\,) = 0$ desciende a una biyección

$$\overline{\Theta}:\ \ \mathfrak{S}_m(\,V\,) \ \xrightarrow{\ \cong\ }\ \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(\,V\,)/_{\mathrm{GL}(\,V\,)}, \qquad [\,\mathbb{M}\,] \longmapsto [\,F^* R_p\,]$$

entre el conjunto de clases de isomorfía de espacios simétricos simplemente conexos de dimensión m y el conjunto de órbitas de la acción del grupo $\mathrm{GL}(\,V\,)$ en $\mathrm{Curv}_{\Phi=0}(\,V\,)$, en donde $F : V \longrightarrow T_p\mathbb{M}$ denota un marco arbitrario en un punto arbitrario $p \in \mathbb{M}$.

Demostración. Primero hay que ver que $\overline{\Theta}$ está bien definida: Sea $F : V \longrightarrow T_p\mathbb{M}$ un marco arbitrario en un punto $p \in \mathbb{M}$ y sea $E : V \longrightarrow T_q\mathbb{M}$ otro marco en otro punto $q \in \mathbb{M}$. Sabemos por el Lema 2.22 que el grupo de automorfismos afines del espacio simétrico $\mathbb{M}$ actúa transitivamente, entonces existe un difeomorfismo afín $\varphi \in \mathrm{Aff}(\,\mathbb{M},\ \nabla^{\mathrm{Loos}}\,)$ que manda p a $q = \varphi(p)$. Como φ es un difeomorfismo su diferencial en el punto p es un isomorfismo de espacios vectoriales $\varphi_{*,\,p} : T_p\mathbb{M} \longrightarrow T_q\mathbb{M}$, lo cual nos permite escribir el marco alternativo $\varphi_{*,\,p} \circ F : V \longrightarrow T_q\mathbb{M}$ en el punto q como el producto de E con un $\mathbb{F} \in \mathrm{GL}(\,V\,)$:

$$\varphi_{*,\,p} \circ F \;=\; E \circ \Big(\ E^{-1} \circ \varphi_{*,\,p} \circ F\ \Big) \;=:\; E \circ \mathbb{F}.$$

Jalando el valor R_q del tensor de curvatura R de $\mathbb{M}$ a un tensor algebraico de curvatura en $\mathrm{Curv}(\,V\,)$ y usando la Definición 3.4 a ambos lados obtenemos eventualmente la identidad

$$\mathbb{F}^{-1} \star (\,E^* R_q\,) \;=\; \mathbb{F}^*\,(\,E^* R_q\,) \;=\; (\,E \circ \mathbb{F}\,)^* R_q \;=\; F^*\,(\,\varphi_{*,\,p}\,)^* R_q \;=\; F^* R_p$$

porque $\mathbb{F}\star := (\,\mathbb{F}^{-1}\,)^*$ es la definición de la representación $\star$ de $\mathrm{GL}(\,V\,)$. Además φ es un difeomorfismo global afín, con lo cual la ecuación (3.18) asegura igualdad:

$$(\,\varphi_{*,\,p}\,)^* R_q \;=\; R_p\ .$$

La sobreyectividad de $\overline{\Theta}$ es una consecuencia directa de su construcción como un cociente bien definido de la aplicación sobreyectiva Θ; esencialmente equivale a la construcción de un espacio simétrico $\mathbb{M}$ simplemente conexo a partir de una solución $R \in \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V)$ de la ecuación cuadrática $\Phi(R) = 0$ detallada en la demostración del Teorema 3.27.

Para verificar finalmente que $\overline{\Theta}$ es inyectiva tomamos dos clases de isomorfía $[\mathbb{M}]$ y $[\mathbb{L}]$ de espacios simétricos simplemente conexos tales que $\overline{\Theta}([\mathbb{M}]) = \overline{\Theta}([\mathbb{L}])$ en el conjunto $\mathrm{Curv}(V)/\mathrm{GL}(V)$ de órbitas del grupo $\mathrm{GL}(V)$ en $\mathrm{Curv}(V)$, es decir, tales que

$$F^* R_p^{\mathbb{M}} \;=\; \mathbb{F}^{-1} \star (E^* R_q^{\mathbb{L}}) \;=\; \mathbb{F}^* (E^* R_q^{\mathbb{L}}) \;=\; (E \circ \mathbb{F})^* R_q^{\mathbb{L}}$$

para algún $\mathbb{F} \in \mathrm{GL}(V)$ y para algunos marcos $F : V \longrightarrow T_p\mathbb{M}$ y $E : V \longrightarrow T_q\mathbb{L}$ de los espacios simétricos en los puntos $p \in \mathbb{M}$ y $q \in \mathbb{L}$. Gracias a esta identidad tenemos que:

$$\Theta\Big(\,[\,(\mathbb{M}, p, F)\,]\,\Big) \;=\; \Theta\Big(\,[\,(\mathbb{L}, q, E \circ \mathbb{F})\,]\,\Big)$$

Así la inyectividad de Θ implica que $(\mathbb{M}, p, F)$ y $(\mathbb{L}, q, E \circ \mathbb{F})$ son isomorfos como espacios simétricos marcados, eligiendo cualquier isomorfismo marcado $\varphi : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{L}$ entre ellos concluimos que $\mathbb{M} \cong \mathbb{L}$. Resumiendo todo este argumento observamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}_m^{\mathrm{marcado}}(V) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] & \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathfrak{S}_m(V) \arrow[r, "\overline{\Theta}"] & \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V)/_{\mathrm{GL}(V)}
\end{tikzcd}\;.$$

conmuta, en donde π es la proyección canónica y $\hat{\pi}$ es la aplicación $[\,(\mathbb{M}, p, F)\,] \longmapsto [\mathbb{M}]$ que olvida la información sobre el marco $F : V \longrightarrow T_p\mathbb{M}$ y el punto base $p \in \mathbb{M}$. ■

Conjetura 3.29 (Existencia de Familias de Espacios Simétricos).
Sabiendo que a partir de cierta dimensión aparecen familias continuas de grupos de Lie a un parámetro no isomorfos y dado que un espacio simétrico es más débil que un grupo de Lie, se esperaría que en la clasificación de espacios simétricos para dimensiones mayores a dos se obtengan familias continuas de espacios simétricos a un parámetro no isomorfos. Eso en contraste a la clasificación discreta de Cartan de espacios simétricos Riemannianos.

3.3. Espacios Simétricos en Dimensión Dos

Detallamos en esta sección la clasificación de los planos simétricos simplemente conexos, es decir, de los espacios simétricos de dimensión $m = 2$, en un estudio de la estructura del conjunto $\mathfrak{S}_2(V)$. Fijamos para este propósito un espacio vectorial modelo V de dimensión 2 sobre los reales $\mathbb{R}$, su grupo de automorfismos $\mathrm{GL}(V)$ actúa en el espacio vectorial $\mathrm{Curv}(V)$ de tensores algebraicos de curvatura sobre V jalando tensores de curvatura como en la Definición 3.4. El Teorema 3.27 asegura que $\mathfrak{S}_2(V)$ está en biyección con el conjunto de órbitas de $\mathrm{GL}(V)$ en el subconjunto $\mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V)$ de soluciones $R \in \mathrm{Curv}(V)$ a la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned} \Phi(R)_{X,Y;A,B}C &= (R_{X,Y} \star R)_{A,B}C \\ &:= R_{X,Y}\,R_{A,B}C - R_{R_{X,Y}A,B}C - R_{A,R_{X,Y}B}C - R_{A,B}\,R_{X,Y}C = 0 \end{aligned}$$

para todo $X, Y, A, B, C \in V$. Queremos simplificar esta descripción del conjunto $\mathfrak{S}_2(V)$ de clases de isomorfía de planos simétricos simplemente conexos usando la contracción de Ricci, que es un isomorfismo $\mathrm{GL}(V)$–equivariante en dimensión $m = 2$ según el Corolario 3.7:

$$\mathrm{ric}: \ \mathrm{Curv}(V) \xrightarrow{\cong} V^* \otimes V^* \qquad\qquad R \longmapsto \mathrm{Ric}\,. \tag{3.21}$$

En dimensión 2 toda solución $R \in \mathrm{Curv}(V)$ a la ecuación cuadrática $\Phi(R) = 0$ satisface $\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}_{\mathrm{sim}}$ simétrico: según el Teorema A.21 cualquier forma alternante diferente a cero es no degenerada en esta dimensión y así $\mathrm{Ric}_{\mathrm{alt}} = 0$ debido al Corolario 3.13. Inversamente, nuestros cálculos en el Ejemplo 3.10 aseguran que la única preimagen $-R^\rho = -\mathrm{ric}^*\rho$ de una forma bilineal simétrica $\rho \in \mathrm{Sym}^2V^*$ en dimensión 2 bajo ric satisface la ecuación cuadrática $\Phi(-R^\rho) = 0$. Entonces la contracción de Ricci se restringe a la siguiente biyección:

$$\mathrm{ric}: \ \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}^2V^* \qquad\qquad R \longmapsto \mathrm{Ric}$$

la cual induce por su equivarianza bajo el grupo $\mathrm{GL}(V)$ una biyección entre los siguientes conjuntos de órbitas:

$$\mathfrak{S}_2(V) \ \cong \ \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V)/_{\mathrm{GL}(V)} \xrightarrow{\mathrm{ric}} \mathrm{Sym}^2V^*/_{\mathrm{GL}(V)}. \tag{3.22}$$

El Teorema de inercia de Sylvester A.22 es esencialmente una descripción del conjunto de órbitas del grupo $\mathrm{GL}(V)$ en el espacio vectorial Sym^2V^* de formas bilineales simétricas:

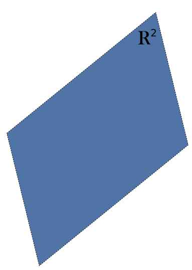
Teorema 3.30 (Teorema de Inercia de Sylvester).
Sea V un espacio vectorial de dimensión $m \in \mathbb{N}_0$ sobre los reales $\mathbb{R}$. Las órbitas de la acción de $\mathrm{GL}(V)$ en el espacio vectorial Sym^2V^* son clasificadas por la signatura, una pareja $(p, n) \in \mathbb{N}_0^2$ tal que $p + n \leq m$: Dos formas bilineales simétricas están en la misma órbita bajo $\mathrm{GL}(V)$, si y sólo si tienen la misma signatura. El número de signaturas posibles es:

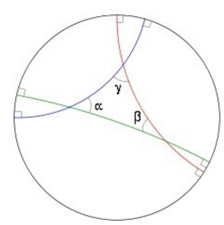
$$\sharp\left\{ \ (p, n) \in \mathbb{N}_0^2 \ \middle| \ p + n \leq m \ \right\} \ = \ \binom{m+2}{2}$$

Así el Teorema de inercia de Sylvester junto con la biyección (3.22) inducida por la contracción de Ricci resulta en la siguiente descripción del conjunto $\mathfrak{S}_2(V)$ de las clases de isomorfía de espacios simétricos simplemente conexos en dimensión 2:

Espacio simétrico	Símbolo	Signatura	Ric $=$ Ric$_{\text{sim}}$	¿Grupo?
Plano real euclidiano	$\mathbb{R}^2$	(0,0)	Igual a cero	Sí
Primer plano real exótico	$\mathbb{R}^2_{\text{exot1}}$	(1,0)	Semidefinido positivo	No
Segundo plano real exótico	$\mathbb{R}^2_{\text{exot2}}$	(0,1)	Semidefinido negativo	Sí
Esfera redonda	S^2	(2,0)	Definido positivo	No
Plano Lorentziano	$\widetilde{\mathbf{CM}}^2$	(1,1)	Indefinido	No
Plano real hiperbólico	$\mathbb{R}H^2$	(0,2)	Definido negativo	No

Por lo tanto hay exactamente seis clases de isomorfía de espacios simétricos simplemente conexos en dimensión dos, las cuales son distinguidas por la signatura de la aplicación Ric. Ya hemos visto el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, que es el dominio lógico de la geometría euclidiana, la esfera redonda S^2 asociada a la geometría elíptica, el plano real hiperbólico $\mathbb{R}H^2$ de la geometría hiperbólica y el plano simétrico Lorentziano $\mathbf{CM}^2$:





Por lo tanto sólo nos falta ver que las dos operaciones binarias exóticas sobre $\mathbb{R}^2$ definidas por:

$$*_1 : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} 2\,a \;-\; x \\ 2\,\cos(\,a \,-\, x\,)\,b \;-\; y \end{pmatrix}$$

$$*_2 : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} 2\,a \;-\; x \\ 2\,\cosh(\,a \,-\, x\,)\,b \;-\; y \end{pmatrix}$$

dotan a $\mathbb{R}^2$ con dos estructuras $\mathbb{R}^2_{\text{exot1}}$ y $\mathbb{R}^2_{\text{exot2}}$ que lo convierten en un espacio simétrico de dimensión 2. Lo haremos sólo para $\mathbb{R}^2_{\text{exot1}}$, es decir, para la primera de las dos operaciones binarias, ya que las consideraciones para $\mathbb{R}^2_{\text{exot2}}$ son completamente análogas. Logramos la demostración de los cuatro axiomas de espacios simétricos para $* := *_1$ con el siguiente cálculo:

$$
\begin{aligned}
&\text{i)}\quad (a,\,b) * (a,\,b) &&= (2\,a - a,\, 2\cos(a-a)\,b - b)\\
& &&= (a,\,b).\\
&\text{ii)}\quad (a,\,b) * ((a,\,b) * (x,\,y)) &&= (a,\,b) * (2\,a - x,\, 2\cos(a-x)\,b - y)\\
& &&= (x,\, 2\cos(a-2a+x)\,b - 2\cos(a-x)\,b + y)\\
& &&= (x,\, 2\cos(-a+x)\,b - 2\cos(a-x)\,b + y)\\
& &&= (x,\,y).\\
&\text{iii)}\quad \Big(S_{(a,b)}\Big)_{*,\,(a,b)}(+\dot a,\,+\dot b) &&= \tfrac{d}{dt}\Big|_0 (a,\,b) * (a + t\,\dot a,\, b + t\,\dot b)\\
& &&= \tfrac{d}{dt}\Big|_0 (2\,a - a - t\,\dot a,\, 2\cos(a-a-t\dot a)\,b - b - t\,\dot b)\\
& &&= (-\dot a,\,-\dot b).\\
&\text{iv)}\quad (a,\,b) * ((u,\,v) * (x,\,y)) &&= (a,\,b) * (2\,u - x,\, 2\cos(u-x)\,v - y)\\
& &&= (2\,a - 2\,u + x,\\
& &&\qquad +2\cos(a-2u+x)\,b\\
& &&\qquad -2\cos(u-x)\,v + y)\\
& &&= (4\,a - 2\,u - 2\,a + x,\\
& &&\qquad +2\,(2\cos(a-u)\cos(x-u) - \cos(a-x))\,b\\
& &&\qquad -2\cos(x-u)\,v + y)\\
& &&= (2\,(2\,a - u) - (2\,a - x),\\
& &&\qquad +2\cos(x-u)\,(2\cos(a-u)\,b - v)\\
& &&\qquad -2\cos(a-x)\,b + y)\\
& &&= ((a,\,b) * (u,\,v)) * ((a,\,b) * (x,\,y))\,.
\end{aligned}
$$

Hemos usado la identidad trigonométrica $\cos(\alpha+\xi) + \cos(\alpha-\xi) = 2\,(\cos\alpha)\,(\cos\xi)$ en el punto iv) para $\alpha = a-u$, $\xi = x-u$, obscureciendo así el origen simple de la identidad:

$$\cos(a - 2\,u + x) = 2\cos(a - u)\cos(x - u) - \cos(a - x).$$

Se nota que esta identidad es verdad también para el coseno hiperbólico cosh en vez de cos.

Ahora veamos cuáles de estos espacios simétricos provienen de un grupo de Lie. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre los reales $\mathbb{R}$ con $\dim\mathfrak{g} = 2$. Su corchete induce una aplicación lineal

$$[\,\cdot,\,\cdot\,]:\quad \Lambda^2\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad\qquad A\wedge B \longmapsto [\,A,\,B\,]\,.$$

con dominio un espacio vectorial de dimensión $\dim\Lambda^2\mathfrak{g} = 1$. Así la aplicación o es cero en el sentido $[\,A,\,B\,] = 0$ para todos $A,\,B\in\mathfrak{g}$ o tiene rango 1.

En el primer caso $[\,A,\,B\,] = 0$ para todos los $A,\,B \in \mathfrak{g}$ la Fórmula de Baker–Campbell–Hausdorff [FH] implica que el grupo de Lie asociado es conmutativo. Además es simplemente conexo y entonces isomorfo a $\mathbb{R}^2$ bajo la adición, que induce la operación binaria estándar

$$\star : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (\,(\,a,\,b\,),\,(\,x,\,y\,)\,) \longmapsto (\,2\,a - x,\,2\,b - y\,)\;.$$

en el espacio simétrico $\mathbb{R}^2$. La conexión de Loos $\nabla^{\mathrm{Loos}} = \nabla^{\mathrm{trivial}}$ es la conexión trivial, porque todas las segundas derivadas parciales de las funciones componentes de la operación binaria

$$S_1(\,a,\,b;\,x,\,y\,) \;:=\; 2\,a - x \qquad\qquad S_2(\,a,\,b;\,x,\,y\,) \;=\; 2\,b - y$$

junto con todos los símbolos de Christoffel según la Definición 2.12 se anulan. En consecuencia, la curvatura de la conexión de Loos $R = R^{\mathrm{trivial}} = 0$ es idénticamente cero, como lo es la curvatura de Ricci asociada. En particular $\mathrm{Ric} = 0$ tiene signatura $(\,0,\,0\,)$.

El otro caso es mucho más interesante. Dado que el corchete tiene rango 1 considerado como una aplicación lineal $\Lambda^2\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ existen $A,\,B \in \mathfrak{g}$, tal que $[\,A,\,B\,] = \alpha\,B$ es un múltiplo de B con $\alpha \neq 0$. Remplazando A por $\alpha^{-1}\,A$, si es necesario, podemos asumir sin pérdida de generalidad que el álgebra de Lie g está determinada por la regla:

$$\mathfrak{g} \;=\; \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\,A,\,B\,\} \qquad\qquad [\,A,\,B\,] \;=\; B.$$

Conocemos un grupo de Lie simplemente conexo con esta álgebra de Lie, a saber el grupo de aplicaciones afines lineales invertibles de $\mathbb{R}$ en sí que preservan la orientación:

$$\mathrm{Aff}^+(\,\mathbb{R},\,\nabla^{\mathrm{trivial}}\,) \;:=\; \left\{\; \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^+,\; b \in \mathbb{R} \;\right\} \;\cong\; \mathbb{R}^+ \ltimes \mathbb{R}.$$

Su álgebra de Lie $\mathfrak{aff}(\,\mathbb{R},\,\nabla^{\mathrm{trivial}}\,)$ es de hecho generada por las dos matrices:

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad [\,A,\,B\,] \;=\; B\;. \tag{3.23}$$

Consideramos la parametrización del grupo de Lie $\mathrm{Aff}^+(\,\mathbb{R},\,\nabla^{\mathrm{trivial}}\,)$ definida por la regla:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\;\cong\;} \mathrm{Aff}^+(\,\mathbb{R},\,\nabla^{\mathrm{trivial}}\,), \qquad (\,a,\,b\,) \longmapsto \begin{pmatrix} e^{2\,a} & e^a\,b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El cálculo directo

$$\begin{pmatrix} e^{2a} & e^a\,b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & e^x\,y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} e^{2a\,+\,2x} & e^{a\,+\,x}(\,e^a\,y + e^{-x}\,b\,) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

implica que esta parametrización de $\mathrm{Aff}^+(\,\mathbb{R},\,\nabla^{\mathrm{trivial}}\,)$ induce la multiplicación equivalente

$$\cdot : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad\qquad (\,(\,a,\,b\,),\,(\,x,\,y\,)\,) \longmapsto (\,a + x,\,e^a\,y + e^{-x}\,b\,)$$

en la variedad suave $\mathbb{R}^2$. Una ventaja de la parametrización elegida es que el inverso es particularmente simple, a saber $(x, y)^{-1} = (-x, -y)$, entonces $\mathbb{R}^2$ tiene la estructura de un espacio simétrico bajo la operación binaria estándar para grupos de Lie

$$\begin{aligned} S(\,a,\,b;\,x,\,y\,) \;:=\; (\,a,\,b\,) * (\,x,\,y\,) \;&:=\; (\,a,\,b\,)(\,-x,\,-y\,)(\,a,\,b\,) \\ &=\; (\,a - x,\,-e^{a}\,y + e^{x}\,b\,)(\,a,\,b\,) \\ &=\; (\,2a - x,\,e^{a-x}\,b + e^{-a}(\,-e^{a}\,y + e^{x}\,b\,)\,) \\ &\overset{!}{=}\; (\,2a - x,\,2\,\cosh(a-x)\,b - y\,) \end{aligned}$$

debido a que $2\cosh z = e^{z} + e^{-z}$, eso es, que el plano exótico $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot2}}$ es un espacio simétrico, que viene de un grupo de Lie. Usamos esta oportunidad para calcular la curvatura de Ricci del plano exótico $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot2}}$. Aplicando la Definición 2.12 obtenemos en un primer paso:

$$\begin{array}{lclcl} \dfrac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial x}(\,a,\,b;\,x,\,y\,) &=& (\,0,\,2\,\cosh(a-x)\,b\,) & \Longrightarrow & \nabla^{\mathrm{Loos}}_{\frac{\partial}{\partial a}}\frac{\partial}{\partial a} \;=\; -\,b\,\frac{\partial}{\partial b} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}(\,a,\,b;\,x,\,y\,) &=& (\,0,\,0\,) & \Longrightarrow & \nabla^{\mathrm{Loos}}_{\frac{\partial}{\partial a}}\frac{\partial}{\partial b} \;=\; 0 \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial x}(\,a,\,b;\,x,\,y\,) &=& (\,0,\,0\,) & \Longrightarrow & \nabla^{\mathrm{Loos}}_{\frac{\partial}{\partial b}}\frac{\partial}{\partial a} \;=\; 0 \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial y\,\partial y}(\,a,\,b;\,x,\,y\,) &=& (\,0,\,0\,) & \Longrightarrow & \nabla^{\mathrm{Loos}}_{\frac{\partial}{\partial b}}\frac{\partial}{\partial b} \;=\; 0 \end{array}$$

y de aquí concluimos que el campo vectorial $\frac{\partial}{\partial b}$ es paralelo con respecto a la conexión de Loos. La única componente no cero del tensor de curvatura de la Definición 1.6 es entonces

$$R_{\frac{\partial}{\partial a},\frac{\partial}{\partial b}}\frac{\partial}{\partial a} \;=\; \nabla^{\mathrm{Loos}}_{\frac{\partial}{\partial a}}\Big(\nabla^{\mathrm{Loos}}_{\frac{\partial}{\partial b}}\frac{\partial}{\partial a}\Big) - \nabla^{\mathrm{Loos}}_{\frac{\partial}{\partial b}}\Big(\nabla^{\mathrm{Loos}}_{\frac{\partial}{\partial a}}\frac{\partial}{\partial a}\Big) \;=\; -\,\nabla^{\mathrm{Loos}}_{\frac{\partial}{\partial b}}\Big(-\,b\,\frac{\partial}{\partial b}\Big) \;=\; \frac{\partial}{\partial b}$$

porque $[\,\frac{\partial}{\partial a},\,\frac{\partial}{\partial b}\,] = 0$. De este resultado se obtiene fácilmente que la signatura del tensor de curvatura de Ricci tiene signatura $(\,0,\,1\,)$, más preciso obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(\,\tfrac{\partial}{\partial a},\,\tfrac{\partial}{\partial a}\,) \;&=\; \mathrm{tr}\Big(\,Z \longmapsto R_{Z,\frac{\partial}{\partial a}}\frac{\partial}{\partial a}\Big) \;=\; \mathrm{tr}\Big(\,\tfrac{\partial}{\partial a} \longmapsto 0,\;\tfrac{\partial}{\partial b} \longmapsto -\tfrac{\partial}{\partial b}\Big) \;=\; -\,1 \\ \mathrm{Ric}(\,\tfrac{\partial}{\partial b},\,\tfrac{\partial}{\partial a}\,) \;&=\; \mathrm{tr}\Big(\,Z \longmapsto R_{Z,\frac{\partial}{\partial b}}\frac{\partial}{\partial a}\Big) \;=\; \mathrm{tr}\Big(\,\tfrac{\partial}{\partial a} \longmapsto \tfrac{\partial}{\partial b},\;\tfrac{\partial}{\partial b} \longmapsto 0\Big) \;=\; 0 \end{aligned}$$

mientras que $\mathrm{Ric}(\,\frac{\partial}{\partial a},\,\frac{\partial}{\partial b}\,) = 0 = \mathrm{Ric}(\,\frac{\partial}{\partial b},\,\frac{\partial}{\partial b}\,)$, porque verificamos antes que el campo vectorial $\frac{\partial}{\partial b}$ es paralelo. Las cuentas del tensor de curvatura de Ricci para el otro plano simétrico exótico $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot1}}$ son casi idénticas, la diferencia en sólo un signo viene del signo adicional en la identidad $\cos'' z = -\cos z$ que reemplaza la identidad $\cosh'' z = +\cosh z$. Entonces, el resultado es que Ric tiene signatura $(\,1,\,0\,)$ para el plano simétrico exótico $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot1}}$.

Para ilustrar el cálculo del tensor de curvatura de Ricci queremos comparar el resultado con la forma de Killing del grupo de Lie $\mathbb{R}^2 \cong \mathrm{Aff}^{+}(\mathbb{R},\,\nabla^{\mathrm{trivial}})$. Un pequeño problema es que los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial a}$ y $\frac{\partial}{\partial b}$ no son invariantes a la izquierda, sin embargo sus valores en el elemento neutro $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ corresponden esencialmente a los vectores de la base ordenada A, B del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que definimos en la ecuación (3.23):

$$\frac{\partial}{\partial a}\bigg|_{(0,0)} \ \widehat{=}\ \frac{d}{dt}\bigg|_0 \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ 2\,A \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial b}\bigg|_{(0,0)} \ \widehat{=}\ \frac{d}{dt}\bigg|_0 \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ B\,. \tag{3.24}$$

El corchete $[A, B] = B$ implica que las aplicaciones $\mathrm{ad}_{2A} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $X \longmapsto 2[A, X]$, y $\mathrm{ad}_B : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $X \longmapsto [B, X]$, corresponden en la base ordenada A, B a las matrices:

$$\mathrm{ad}_{2A} \ \widehat{=}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathrm{ad}_B \ \widehat{=}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces la forma de Killing $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(X, Y) \longmapsto \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y)$, tiene los valores:

$$K(2A, 2A) \ = \ 4 \qquad\qquad K(2A, B) \ = \ K(B, 2A) \ = \ K(B, B) \ = \ 0.$$

Entonces hemos verificado, por lo menos en este ejemplo, que el tensor de curvatura de Ricci de la conexión ∇^{Loos} para un grupo de Lie G y la forma de Killing K de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ están relacionados por la siguiente identidad, que se parece a la ecuación (3.7):

$$\mathrm{Ric} \ = \ -\frac{1}{4}\,K\,.$$

Por lo tanto se ha demostrado que los únicos espacios simétricos en dimensión dos son las variedades que se mencionaron al inicio de esta sección, de los cuales dos son grupos de Lie y los otros cuatro no.

3.4. Espacios Simétricos Duales y Complejificados

Observación 3.31 (Espacio Simétrico Dual)**.**
Si R es el tensor algebraico de curvatura asociado a un espacio simétrico $\mathbb{M}$, entonces $-R$ también es un tensor algebraico de curvatura, que satisface también la ecuación cuadrática:

$$R_{X,Y}\, R_{A,B}C \ - \ R_{A,B}\, R_{X,Y}C \ = \ R_{R_{X,Y}A,B}C \ + \ R_{A,R_{X,Y}B}C\ .$$

Debido a esto existe un espacio simétrico con $-R$ como su tensor algebraico de curvatura asociado. Tal espacio simétrico se llama el *espacio simétrico dual* para $\mathbb{M}$ y se denota por $\mathbb{M}^*$. Se observa que $\mathbb{M}^*$ está bien definido salvo cubrientes. Según la clasificación de los espacios simétricos de dimensión 2 las parejas de espacios simétricos duales en esta dimensión son

$$\circlearrowleft \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{R}H^2 \longleftrightarrow S^2 \qquad \circlearrowleft \mathbf{CM}^2 \qquad \mathbb{R}^2_{\mathrm{exot1}} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2_{\mathrm{exot2}} \tag{3.25}$$

en donde $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{CM}^2$ son espacios simétricos autoduales. Que el espacio simétrico $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot2}}$ venga de un grupo de Lie no implica que su dual $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot1}}$ también venga de un grupo de Lie.

Definición 3.32 (Variedad Compleja)**.**
Sea $\mathbb{M}$ un espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad y es Hausdorff. Sea $\mathcal{A} = \{ (z_\alpha, U_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ un atlas maximal holomorfo de dimensión $m = 2n$ para $\mathbb{M}$, donde las cartas z_α son homeomorfismos entre abiertos $U_\alpha \subset \mathbb{M}$ y abiertos $z_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$

$$z_\alpha : \quad U_\alpha \xrightarrow{\cong} z_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n$$

y los cambios de cartas son aplicaciones holomorfas para todo $\alpha, \beta \in A$. Entonces a la pareja

$$(\mathbb{M}, \mathcal{A})$$

se le llama una variedad compleja de dimensión n y la denotaremos por $\mathbb{M}_\mathbb{C}$.

Definición 3.33 (Espacio Simétrico Complejo)**.**
Un *espacio simétrico complejo* es una variedad compleja $\mathbb{M}_\mathbb{C}$ con una operación binaria holomorfa

$$* \ : \ \mathbb{M}_\mathbb{C} \times \mathbb{M}_\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{M}_\mathbb{C} \qquad\qquad (p, q) \longmapsto p * q$$

que satisface los axiomas de un espacio simétrico en el sentido de la Definición 2.1.

Recordamos que una aplicación conjugada lineal entre espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ es una aplicación $\varphi : W \longrightarrow Z$ que es aditiva y conmuta con la multiplicación escalar salvo conjugación, es decir, que satisface para todo $w, w_1, w_2 \in W$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\varphi(w_1 + w_2) = \varphi(w_1) + \varphi(w_2) \qquad\qquad \varphi(\lambda w) = \overline{\lambda}\, \varphi(w) \, .$$

Definición 3.34 (Aplicaciones Antiholomorfas)**.**
Una aplicación suave $\varphi : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ se llama antiholomorfa, si y sólo si su diferencial en cualquier punto $z \in \mathbb{C}^m$ es una aplicación conjugada lineal:

$$\varphi_{*,\, z} : \ \mathbb{C}^m \cong T_z\mathbb{C}^m \longrightarrow T_{\varphi(z)}\mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^m \qquad\qquad w \longmapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \varphi(z + tw).$$

Definición 3.35 (Estructuras Reales)**.**
Una estructura real en el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^m$ es una aplicación conjugada lineal $\varphi : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ que es una involución $\varphi^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^m}$. El conjunto de vectores reales

$$(\mathbb{C}^m)_\mathbb{R} := \{ \ w \in \mathbb{C}^m \ \mid \ \varphi(w) = w \ \}$$

bajo una estructura real φ dada es un subespacio real de dimensión m tal que:

$$\mathbb{C}^m = (\mathbb{C}^m)_\mathbb{R} \oplus i(\mathbb{C}^m)_\mathbb{R} \cong (\mathbb{C}^m)_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}.$$

Teorema 3.36 (Espacio Simétrico Complejificado)**.**
Todo espacio simétrico $\mathbb{M}$ *se puede complejificar a un espacio simétrico complejo* $\mathbb{M}_\mathbb{C}$*.*

Demostración. Haremos la demostración exclusivamente para los seis espacios simétricos reales que hemos obtenido en dimensión 2 y usaremos el siguiente hecho: Si $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}$ es un espacio simétrico complejo y $\varphi : \mathbb{M}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{C}}$ es una aplicación antiholomorfa e involutiva, entonces el conjunto

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{C}})^{\varphi} \;=\; \{\; p \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}} \;|\; \varphi(p) = p \;\} \;\subset\; \mathbb{M}_{\mathbb{C}}$$

de puntos fijos bajo φ o es vacío o es una subvariedad real tal que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{C}})^{\varphi}$. Si φ es además un homomorfismo de espacios simétricos en el sentido de la Definición 2.3, entonces $(\mathbb{M}_{\mathbb{C}})^{\varphi}$ es un subespacio simétrico real cuya complejificación es $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}$.

Para empezar consideramos la esfera compleja $S^2_{\mathbb{C}}$ en dimensión 2

$$S^2_{\mathbb{C}} \;:=\; \{\; z \in \mathbb{C}^3 \;|\; g(z, z) = 1 \;\} \;\subset\; \mathbb{C}^3$$

en donde g denota la forma simétrica $\mathbb{C}$–bilineal sin conjugar, definida por:

$$g : \quad \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad\qquad (z, w) \longmapsto z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3.$$

Definimos la parte real y imaginario de $z \in \mathbb{C}^3$ en componentes:

$$z \;=\; \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Re} z \;:=\; \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \\ \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Re} z_3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} z \;=\; \begin{pmatrix} \operatorname{Im} z_1 \\ \operatorname{Im} z_2 \\ \operatorname{Im} z_3 \end{pmatrix}.$$

Usando esta notación podemos separar la condición $g(z, z) = 1$ impuesta en los puntos $z \in S^2_{\mathbb{C}}$ de la esfera compleja en su parte real e imaginaria

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g(z, z) &\stackrel{!}{=} 1 = \operatorname{Re}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) = \|\operatorname{Re} z\|^2 - \|\operatorname{Im} z\|^2 \\ \operatorname{Im} g(z, z) &\stackrel{!}{=} 0 = \operatorname{Im}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) = 2\, g(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos un difeomorfismo de variedades diferenciables

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, equal] \arrow[d, hook, "\subset"] & S^2 \arrow[d, hook, "\subset"] \\ S^2_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\Psi"] & TS^2 \end{tikzcd} \qquad\qquad z \stackrel{\Psi}{\longmapsto} \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left(\frac{\operatorname{Re} z}{\|\operatorname{Re} z\|} + t \operatorname{Im} z \right)$$

entre la esfera compleja $S^2_{\mathbb{C}}$ y el espacio total TS^2 del haz tangente de la esfera $S^2 = S^2_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^3$. Se nota que TS^2 es un espacio simétrico, esto es, el haz tangente de cada espacio simétrico $\mathbb{M}$ es naturalmente un espacio simétrico $T\mathbb{M}$. Sin embargo el difeomorfismo Ψ entre $S^2_{\mathbb{C}}$ y TS^2 no es un homomorfismo de espacios simétricos para la operación binaria holomorfa

$$* : \quad S^2_{\mathbb{C}} \times S^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2_{\mathbb{C}} \qquad\qquad (z, w) \longmapsto 2\, g(z, w)\, z - w \tag{3.26}$$

que dota a $S^2_{\mathbb{C}}$ con una estructura de espacio simétrico. La verificación de los cuatro axiomas de un espacio simétrico según la Definición 2.1 es literalmente la misma que la verificación de los axiomas para S^2 en la Sección 2.2; la única diferencia es que los vectores son ahora elementos de $\mathbb{C}^3$ en vez de $\mathbb{R}^3$. Para construir una involución antiholomorfa de la esfera compleja $S^2_{\mathbb{C}}$ en sí misma que sea un homomorfismo de espacios simétricos hacemos un ansatz

$$\varphi_A : \quad S^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2_{\mathbb{C}} \qquad\qquad z \longmapsto A\,\overline{z}$$

con una matriz real ortogonal $A \in \mathbf{O}(\mathbb{R}^3)$. Así $\overline{A} = A$ y el hecho que A es ortogonal implica

$$g(A\overline{z}, A\overline{z}) = g(\overline{Az}, \overline{Az}) = \overline{g(Az, Az)} = \overline{g(z, z)}$$

para todo $z \in \mathbb{C}^3$, es decir, $\varphi_A(z) \in S^2_{\mathbb{C}}$ para todo $z \in S^2_{\mathbb{C}}$. Debido a la conjugación la definición de la aplicación φ_A es claramente la restricción a $S^2_{\mathbb{C}}$ de una aplicación conjugada lineal de $\mathbb{C}^3$ en sí misma y por ende antiholomorfa. Además φ_A es involutiva, si y solamente si su parámetro A satisface $A^2 = \mathrm{id}_{3\times 3}$, de hecho obtenemos en este caso que:

$$\varphi_A^2(z) = A\,\overline{A\,\overline{z}} = A\,\overline{A}\,\overline{\overline{z}} = A^2 z = z\,.$$

Verificamos que φ_A es un automorfismo para la operación binaria (3.26) que hace de la esfera compleja $S^2_{\mathbb{C}}$ un espacio simétrico. Usando $g(\overline{z}, \overline{w}) = \overline{g(z, w)}$ para $z,\, w \in \mathbb{C}^3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \varphi_A(z * w) &= 2\,g(\overline{z}, \overline{w})\,A\,\overline{z} - A\,\overline{w} \\ &= 2\,g(A\overline{z}, A\overline{w})\,A\,\overline{z} - A\,\overline{w} = \varphi_A(z) * \varphi_A(w) \end{aligned}$$

ya que $A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, $z \longmapsto Az$, es $\mathbb{C}$–lineal y preserva la forma bilineal g. En resumen $\varphi_A : S^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2_{\mathbb{C}}$ es un automorfismo involutivo y antiholomorfo de la esfera compleja $S^2_{\mathbb{C}}$ para cada matriz real ortogonal $A \in \mathbf{O}(\mathbb{R}^3)$ que satisface $A^2 = \mathrm{id}_{3\times 3}$, y el conjunto

$$(S^2_{\mathbb{C}})^{\varphi_A} = \{\, z \in S^2_{\mathbb{C}} \mid \varphi_A(z) = z \,\} \subset S^2_{\mathbb{C}}$$

de puntos fijos bajo φ_A o es vacío o es un subespacio simétrico real de dimensión dos cuya complejificación es $S^2_{\mathbb{C}}$. En seguida tratamos los siguientes cuatro candidatos para A:

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para cada uno de estos candidatos el automorfismo involutivo antiholomorfo φ_A de $S^2_{\mathbb{C}}$ es la restricción a $S^2_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^3$ de una estructura real $\varphi_A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, $z \longmapsto A\overline{z}$, entonces el subespacio simétrico de puntos fijos es igual a la intersección de $S^2_{\mathbb{C}}$ con los vectores reales:

$$(S^2_{\mathbb{C}})^{\varphi_A} = S^2_{\mathbb{C}} \cap (\mathbb{C}^3)_{\mathbb{R}}.$$

La estructura real para el primer candidato es la estructura real estándar de $\mathbb{C}^3$

$$A_0 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \varphi_0 : \quad \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} +\overline{z}_1 \\ +\overline{z}_2 \\ +\overline{z}_3 \end{pmatrix}$$

con subespacio real $(\mathbb{C}^3)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, entonces la esfera compleja $S^2_{\mathbb{C}}$ es la complejificación

$$(S^2_{\mathbb{C}})^{\varphi_0} := \{ z \in S^2_{\mathbb{C}} \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R} \} = S^2 .$$

de la esfera S^2. El segundo candidato corresponde a la siguiente estructura real de $\mathbb{C}^3$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_1 : \quad \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\overline{z}_1 \\ +\overline{z}_2 \\ +\overline{z}_3 \end{pmatrix}$$

con subespacio real $(\mathbb{C}^3)_{\mathbb{R}} = i\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir,

$$\begin{aligned} (S^2_{\mathbb{C}})^{\varphi_1} &:= \{ z \in S^2_{\mathbb{C}} \mid z_1 \in i\mathbb{R},\ z_2, z_3 \in \mathbb{R} \} \\ &\cong \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid -v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \} \cong \mathbf{CM}^2 \end{aligned}$$

que $S^2_{\mathbb{C}}$ es también la complejificación $S^2_{\mathbb{C}} = \mathbf{CM}^2_{\mathbb{C}}$ del plano simétrico Lorentziano $\mathbf{CM}^2$. El subespacio real con respecto a la estructura real inducida por el tercer candidato

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_2 : \quad \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\overline{z}_1 \\ -\overline{z}_2 \\ +\overline{z}_3 \end{pmatrix}$$

es igual a $(\mathbb{C}^3)_{\mathbb{R}} = i\mathbb{R} \times i\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, así obtenemos:

$$\begin{aligned} (S^2_{\mathbb{C}})^{\varphi_2} &:= \{ z \in S^2_{\mathbb{C}} \mid z_1, z_2 \in i\mathbb{R},\ z_3 \in \mathbb{R} \} \\ &\cong \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid -v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 = 1 \} \cong \mathbb{R}H^2 \cup -\mathbb{R}H^2. \end{aligned}$$

La observación más interesante en este momento es que la esfera compleja $S^2_{\mathbb{C}}$ es la complejificación de tres espacios simétricos seudo–riemannianos S^2, $\mathbf{CM}^2$ y $\mathbb{R}H^2$, en particular es la complejificación de S^2 y de su dual $(S^2)^* = \mathbb{R}H^2$. En general un espacio simétrico $\mathbb{M}$ y su dual $\mathbb{M}^*$ tienen la misma complejificación $\mathbb{M}_{\mathbb{C}} = \mathbb{M}^*_{\mathbb{C}}$. La estructura real para el candidato

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_3 : \quad \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\overline{z}_1 \\ -\overline{z}_2 \\ -\overline{z}_3 \end{pmatrix}$$

tiene subespacio real $(\mathbb{C}^3)_{\mathbb{R}} = i\mathbb{R} \times i\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$, el cual no se interseca con la esfera compleja, es decir, $(S^2_{\mathbb{C}})^{\varphi_3} = \emptyset$.

Consideramos ahora la variedad compleja $\mathbb{C}^2$ bajo la operación binaria holomorfa

$$*_{\mathrm{exot}} : \quad \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \qquad \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} 2\,z_1 - w_1 \\ 2\cos(z_1 - w_1)\,z_2 - w_2 \end{pmatrix}.$$

La verificación de los axiomas de un espacio simétrico según la Definición 2.1 es literalmente la misma que se hizo para el plano simétrico exótico $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot1}}$, por eso no vamos a repetir este argumento. Similar al caso de la esfera compleja $S^2_{\mathbb{C}}$ pasaremos por una lista de estructuras reales de $\mathbb{C}^2$ para ver, de qué espacios simétricos reales de dimensión dos $\mathbb{C}^2$ es la complejificación. Para empezar la estructura real estándar

$$\varphi_0 : \quad \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \qquad\qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} +\,\overline{z}_1 \\ +\,\overline{z}_2 \end{pmatrix}$$

tiene subespacio real $(\,\mathbb{C}^2\,)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el subespacio simétrico correspondiente

$$(\,\mathbb{C}^2\,)^{\varphi_0} \;:=\; \{\; z \in \mathbb{C}^2 \;|\; z_1,\, z_2 \in \mathbb{R} \;\} \;=\; \mathbb{R}^2_{\mathrm{exot1}}\;.$$

es nada más que el plano simétrico $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot1}}$, es decir, $(\,\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot1}}\,)_{\mathbb{C}} = (\,\mathbb{C}^2,\, *_{\mathrm{exot}}\,)$. La estructura real

$$\varphi_1 : \quad \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \qquad\qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\,\overline{z}_1 \\ +\,\overline{z}_2 \end{pmatrix}$$

con subespacio real $(\,\mathbb{C}^2\,)_{\mathbb{R}} = i\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es algo más interesante, porque

$$(\,\mathbb{C}^2\,)^{\varphi_1} \;:=\; \{\; z \in \mathbb{C}^2 \;|\; z_1 \in i\mathbb{R},\, z_2 \in \mathbb{R} \;\} \;\cong\; \mathbb{R}^2_{\mathrm{exot2}}$$

bajo el difeomorfismo $\mathbb{R}^2 \longrightarrow (\,\mathbb{C}^2\,)^{\varphi_1}$, $(v_1, v_2) \longmapsto (iv_1, v_2)$, debido a que $\cos(iv) = \cosh(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}$. Entonces $(\,\mathbb{C}^2,\, *_{\mathrm{exot}}\,)$ es igual a la complejificación de ambos planos simétricos exóticos $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot1}}$ y $\mathbb{R}^2_{\mathrm{exot2}}$. Finalmente la complejificación del plano afín $\mathbb{R}^2$ considerado como espacio simétrico es claramente el plano afín complejo $\mathbb{C}^2$ con la operación binaria holomorfa

$$*_{\mathrm{plano}} : \quad \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \qquad\qquad (\,z,\, w\,) \longmapsto 2\,z - w$$

debido a que los planos afines en general tienen curvatura $R = 0$. ■

Por otro lado el Teorema de Sylvester para una matriz simétrica $H \in \mathrm{Mat}^{\mathrm{sim}}_{m\times m}(\,\mathbb{C}\,)$ nos dice que:

$$\mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^{m\,*}/\mathrm{GL}\,(\,\mathbb{C}^m\,) \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \{\,0,\; 1,\; 2,\; \ldots,\; m\,\} \qquad\qquad [\,H\,] \longmapsto \text{rango } H.$$

Con esto tenemos la clasificación de los espacios simétricos complejos simplemente conexos de dimensión dos, los cuales son tres, a saber:

Espacio simétrico complejo	Símbolo	Rango Ric
Plano complejo afín	$(\,\mathbb{C}^2,\, *_{\mathrm{plano}}\,)$	0
Grupo de Lie soluble	$(\,\mathbb{C}^2,\, *_{\mathrm{exot}}\,)$	1
Esfera compleja	$(\,S^2_{\mathbb{C}},\, *\,)$	2

Se puede demostrar que la complejificación de S^m es en general la cuádrica en $\mathbb{C}^{m+1}$:

$$S^m_{\mathbb{C}} \;:=\; \{\; z \in \mathbb{C}^{m+1} \;|\; g(\,z,\, z\,) := z_0^2 + \ldots + z_m^2 = 1 \;\}$$

considerada como un espacio simétrico complejo bajo la operación binaria holomorfa:

$$* : \quad S^m_{\mathbb{C}} \times S^m_{\mathbb{C}} \longrightarrow S^m_{\mathbb{C}} \qquad\qquad (z,\, w) \longmapsto 2\, g(z,\, w)\, z - w.$$

En particular la esfera compleja $S^m_{\mathbb{C}}$ es difeomorfa, pero no isomorfa como espacio simétrico, al espacio total TS^m del haz tangente de la esfera real S^m.

Con más herramienta y técnicas del análisis complejo se ve que como en el caso de los espacios simétricos reales donde se tiene que $V = \mathbb{R}^m$; aquí en los espacios simétricos complejos con $V = \mathbb{C}^m$ sobre $\mathbb{C}$ y $m = 2$ se satisface:

$$[-R],\, [R] \in \mathrm{Curv}_{\Phi=0}(V)/_{\mathrm{GL}(V)}$$

esto es, R y $-R$ están en la misma clase y por lo tanto cada espacio simétrico complejo en dimensión dos es auto dual:

$$\circlearrowleft (\mathbb{C}^2,\, *_{\mathrm{plano}}) \qquad\qquad \circlearrowleft (\mathbb{C}^2,\, *_{\mathrm{exot}}) \qquad\qquad \circlearrowleft (S^2_{\mathbb{C}},\, *). \tag{3.27}$$

Epílogo

Los espacios simétricos pertenecen al mundo de las variedades diferenciables. Pueden verse como generalizaciones de los grupos de Lie, como espacios homogéneos, como espacios reductivos, etc. Por lo cual se pueden considerar desde varios puntos de vista para su estudio:

Punto de Vista Algebraico

El concepto de álgebra triple de Lie fue introducido por K. Yamaguti en [Y] con el nombre de sistema triple de Lie general, que abreviamos con **STLG**. Dicho concepto resulta ser la generalización de los sistemas triples de Lie **STL**, de uso frecuente en Geometría Diferencial y álgebras de Jordan, y está íntimamente relacionado con los espacios homogéneos reductivos.

i) **Espacios homogéneos y Álgebras triples de Lie.** La conocida correspondencia entre los grupos de Lie y álgebras de Lie crea un importante vínculo entre el Álgebra y la Geometría que permite tratar algunos problemas desde distintas perspectivas. Los grupos de Lie aparecen como grupos de simetrías de ciertos objetos geométricos, y su importancia radica esencialmente en su acción sobre otras variedades diferenciables, entre las cuales destacamos los espacios homogéneos.

   Un espacio homogéneo es una variedad $\mathbb{M}$ con una acción transitiva del grupo de Lie G. Se puede identificar $\mathbb{M}$ con el conjunto de clases a la izquierda G/H, en donde H es el subgrupo cerrado de isotropía de un elemento fijo de $\mathbb{M}$ llamado el punto base, de tal manera que la identificación $G/H \xrightarrow{\cong} \mathbb{M}$ es suave y G–equivariante por la acción

   $$G \times G/_{H} \longrightarrow G/_{H} \qquad\qquad (\gamma, gH) \longmapsto \gamma gH$$

   que dota al cociente G/H con la estructura de una variedad diferenciable.

   Si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son las álgebras de Lie de los grupos G y H respectivamente, el espacio homogéneo $\mathbb{M} \cong G/H$ se dice reductivo, si $\mathfrak{g}$ se descompone como $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ con $\mathfrak{m}$ un subespacio de $\mathfrak{g}$ invariante bajo la acción adjunta de H. Esta condición de invarianza implica que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ y, si H es conexo, ambas condiciones son equivalentes. En esta situación para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{m}$ las proyecciones del corchete $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{h}$ permiten definir en $\mathfrak{m}$ un producto binario y un producto triple

   $$\begin{array}{lclcclcl} \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} & \longrightarrow & \mathfrak{m}, & (X, Y) & \longmapsto & X \circ Y & := & [X, Y]_{\mathfrak{m}} \\ \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} & \longrightarrow & \mathfrak{m}, & (X, Y, Z) & \longmapsto & [X, Y, Z] & := & [[X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z]_{\mathfrak{m}} . \end{array}$$

Un espacio vectorial $\mathfrak{m}$ dotado con los productos $\circ$ y $[\ ,\ ,\ ]$ que satisfacen ciertos axiomas se llama álgebra triple de Lie o sistema triple de Lie generalizado **STLG**. Estos sistemas triples generalizados contienen información esencial sobre la geometría de los espacios homogéneos reductivos. Un caso particular es un sistema triple de Lie **STL**, en el cual el producto $\circ$ es trivial con $X \circ Y = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{m}$.

En el contexto algebraico estos sistemas han permitido, entre otras cosas, la incorporación de métodos y resultados de álgebras de Lie en el estudio de álgebras de Jordan: un álgebra de Jordan es un álgebra conmutativa en la cual se cumple la identidad $X(X^2Y) = X^2(XY)$. Se puede demostrar que toda álgebra de Jordan es un álgebra triple de Lie. En el contexto geométrico, los **STL** están relacionados con un tipo especial de espacios homogéneos reductivos, los llamados **espacios simétricos**, en los cuales G está dotado de un automorfismo diferenciable involutivo θ, con lo cual resulta que H es "aproximadamente" el conjunto de elementos fijados por θ. Así en cualquier espacio simétrico G/H se tiene la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, en donde

$$\mathfrak{h} = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \theta_{*,e}(X) = +X \} \qquad\qquad \mathfrak{m} = \{ X \in \mathfrak{g} \mid \theta_{*,e}(X) = -X \}$$

son los dos subespacios propios de la diferencial involutiva $\theta_{*,e} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Esta descomposición satisface que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ y $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h}$, por lo cual el **STLG** tiene producto binario trivial. Así dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ arbitraria con corchete $[X, Y]$, la descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ satisface $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ y $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. En esta situación, $\mathfrak{h}$ es subálgebra de $\mathfrak{g}$. El par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ se llama par reductivo y el subespacio vectorial $\mathfrak{m}$ dotado con los productos binario $\circ$ y triple $[\ ,\ ,\ ]$ tiene estructura de **STLG**.

Por lo tanto la Geometría Diferencial proporciona abundantes e interesantes ejemplos de **STLG**, lo que justifica desde una perspectiva algebraica el estudio de estos sistemas.

ii) **Conexiones Afines y Álgebras No Asociativas.** Desde el punto de vista de la Geometría Diferencial, una de las motivaciones para el estudio abstracto de los **STLG** surge de que cada conexión afín invariante está determinada por un producto bilineal $\circ : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$ definido sobre $\mathfrak{m}$ tal que $\mathrm{Ad}\, H|_{\mathfrak{m}} \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{m}, \alpha)$ es un subgrupo del grupo de automorfismos del álgebra no asociativa $(\mathfrak{m}, \circ)$. Esto implica que $\mathrm{ad}\, \mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}}$ es una subálgebra del álgebra $\mathrm{Der}(\mathfrak{m}, \alpha)$ de derivaciones del álgebra $(\mathfrak{m}, \circ)$, de modo que ambas condiciones son equivalentes, si H es conexo.

Esto permite estudiar y expresar la torsión, curvatura, holonomía etc. de la conexión asociada al álgebra $(\mathfrak{m}, \circ)$ en términos de esta álgebra no asociativa. Observamos que el conjunto de todas las multiplicaciones bilineales $\circ : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$, tales que $\mathrm{ad}\, \mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathrm{Der}(\mathfrak{m}, \circ)$ es exactamente el espacio vectorial $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ de homomorfismos de $\mathfrak{h}$–módulos de $\mathfrak{m} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}$ a $\mathfrak{m}$. Así para espacios homogéneos reductivos y espacios simétricos el problema geométrico de encontrar conexiones afines invariantes se traduce al problema algebraico de encontrar estructuras de álgebras no asociativas en $\mathfrak{m}$ con un conjunto prefijado $\{ \mathrm{Ad}\, h|_{\mathfrak{m}} \mid h \in H \} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathfrak{m}, \circ)$ de automorfismos o alternativamente con una subálgebra prefijada $\{ \mathrm{ad}\, X|_{\mathfrak{m}} \mid X \in \mathfrak{h} \} \subseteq \mathrm{Der}(\mathfrak{m}, \circ)$ del álgebra de derivaciones en el caso conexo. Así las álgebras no asociativas y las conexiones afines constituyen otro puente entre el álgebra y la geometría.

Punto de Vista Geométrico

Aquí los espacios simétricos se pueden ver como casos particulares de variedades riemannianas de los siguientes espacios, que se definen mediante propiedades de su grupo de isometrías, que resultan ser propiedades muy importantes de los grupos de isometrías de los espacios simétricos. Entre estos tipos de espacios simétricos generalizados están:

- Espacios naturalmente reductivos.
- Espacios riemannianos g. o.
- Espacios débilmente simétricos.
- Espacios conmutativos.
- Espacios de D'Atri.

Apéndice A

Apéndice Misceláneo

Definición A.1 (Acciones de Grupos)**.**
Sea G un grupo y sea $S \neq \emptyset$ un conjunto no vacío. Se dice que una aplicación

$$\rho: \; G \times S \longrightarrow S \qquad\qquad (g, s) \longmapsto \rho(g, s)$$

es una acción del grupo G sobre el conjunto S, si satisface los axiomas

$$\begin{array}{lll} \text{Ai)} \;\; \rho(e, s) & = & s \\ \text{Aii)} \;\; \rho(\gamma, \rho(g, s)) & = & \rho(\gamma * g, s) \end{array}$$

para todo $\gamma, g \in G$ y todo $s \in S$, en donde $e \in G$ denota el elemento neutro y $*$ la multiplicación en el grupo G. Una representación es una acción lineal, es decir una acción

$$\rho: \; G \times V \longrightarrow V \qquad\qquad (g, v) \longmapsto \rho(g, v)$$

en un espacio vectorial V tal que la aplicación $v \longmapsto \rho(g, v)$ es lineal para todo $g \in G$.

Lema A.2 (Subgrupos de Isotropía)**.**
Si $\rho : G \times S \longrightarrow S$ es una acción de un grupo G sobre un conjunto S, entonces el estabilizador o subgrupo de isotropía de un punto arbitrario $s \in S$ es un subgrupo de G:

$$\mathrm{Stab}_G s \;:=\; \{\; g \in G \;|\; \rho(g, s) = s \;\} \;\subseteq\; G.$$

Ahora K denota un campo arbitrario y R un anillo arbitrario con uno.

Definición A.3 (Módulos y Bimódulos)**.**
Un módulo izquierdo sobre un anillo R asociativo con uno $\mathbf{1} \in R$ es un grupo abeliano G dotado con una aplicación

$$m: \;\; R \times G \longrightarrow G \qquad\qquad (r, g) \longmapsto r \cdot g$$

tal que para todo r, r_1, $r_2 \in R$ y g, g_1, $g_2 \in G$:

$$\begin{array}{lll}
\text{Mi)} & r \cdot (g_1 + g_2) & = & r \cdot g_1 + r \cdot g_2 \\
\text{Mii)} & (r_1 + r_2) \cdot g & = & r_1 \cdot g + r_2 \cdot g \\
\text{Miii)} & (r_1 r_2) \cdot g & = & r_1 \cdot (r_2 \cdot g) \\
\text{Miv)} & \mathbf{1} \cdot g & = & g\,.
\end{array}$$

Análogamente se define un R–módulo derecho. Un grupo abeliano G con dos estructuras

$$\begin{array}{llll}
m: & R \times G \longrightarrow G & & (r, g) \longmapsto r \cdot g \\
\widetilde{m}: & G \times R \longrightarrow G & & (g, r) \longmapsto g \,\tilde{\cdot}\, r
\end{array}$$

de R–módulo izquierdo y derecho respectivamente es llamado un R–bimódulo, si y sólo si:

$$r_1 \cdot (g \,\tilde{\cdot}\, r_2) = (r_1 \cdot g) \,\tilde{\cdot}\, r_2$$

Definición A.4 (Álgebras)**.**
Un álgebra sobre un campo K es un espacio vectorial V dotado con una operación K–bilineal

$$\cdot : \quad V \times V \longrightarrow V \qquad\qquad (u, v) \longmapsto u \cdot v$$

que se llama el producto o la multiplicación de V. Si la multiplicación satisface además

$$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$$

para todo u, v, $w \in V$, entonces el álgebra $(V, \cdot)$ se llama álgebra asociativa.

Definición A.5.
Un álgebra $(V, \cdot)$ sobre K se llama álgebra de división, si tiene un elemento neutro **1** para la multiplicación y cada elemento distinto de cero tiene un inverso multiplicativo.

Definición A.6 (Álgebra de Lie)**.**
Sea V un espacio vectorial sobre un campo K junto con una operación binaria K–bilineal

$$[\,\cdot, \cdot\,]: \quad V \times V \longrightarrow V \qquad\qquad (X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

llamada el corchete, entonces V es un *álgebra de Lie* sobre K, si la operación corchete satisface los siguientes axiomas para todo X, Y, $Z \in V$:

$$\begin{array}{lll}
\text{Li)} & [X, X] & = 0 \\
\text{Lii)} & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] & = 0.
\end{array}$$

Definición A.7 (Derivación)**.**
Sea V un álgebra sobre K, se dice que la aplicación K–lineal

$$D: \quad V \longrightarrow V$$

es una derivación, si satisface la llamada regla de Leibniz para todo u, $v \in V$:

$$D(u \cdot v) = (Du) \cdot v + u \cdot (Dv).$$

Definición A.8 (Espacio Afín).
Sea V un espacio vectorial sobre un campo K. Un *espacio afín* modelado por V es un conjunto no vacío $\mathcal{V} \neq \emptyset$ dotado con dos operaciones binarias de la forma

$$\begin{array}{rcl} + : \mathcal{V} \times V & \longrightarrow & \mathcal{V} \\ - : \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \longrightarrow & V \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} (p, v) & \longmapsto & p + v \\ (p, q) & \longmapsto & p - q \end{array}$$

que satisfacen los siguientes axiomas para todo $p, q \in \mathcal{V}$ y $v, w \in V$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Ai)} & p + 0_V & = & p \\ \text{Aii)} & (p + v) + w & = & p + (v + w) \\ \text{Aiii)} & (p + v) - p & = & v \\ \text{Aiv)} & p + (q - p) & = & q. \end{array}$$

Definición A.9 (Aplicación Afín Lineal).
Una aplicación afín lineal entre dos espacios afines $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ es una aplicación

$$F : \quad \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$$

tal que existe una aplicación lineal $\Delta F : V \longrightarrow W$ entre sus respectivos espacios modelos V y W llamada la diferencial de F con la propiedad, que para todo $p \in \mathcal{V}$ y $v \in V$:

$$F(p + v) = F(p) + \Delta F(v)$$

Lema A.10 (Propiedades de Aplicaciones Afines Lineales).
Sea $F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ una aplicación afín lineal entre espacios afines $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ con espacios modelos V y W respectivamente, y sea $\Delta F : V \longrightarrow W$ la diferencial de F:

i) La aplicación F es inyectiva, si y sólo si su diferencial ΔF es inyectiva.

ii) La aplicación F es sobreyectiva, si y sólo si su diferencial ΔF es sobreyectiva.

En particular $F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ es biyectiva, si y sólo si su diferencial ΔF es invertible.

Observación A.11 (Interpolación).
Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ funcionales lineales. Entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son linealmente independientes, si y sólo si el problema de interpolación

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1(v) & = & \lambda_1 \\ \alpha_2(v) & = & \lambda_2 \\ & \vdots & \\ \alpha_k(v) & = & \lambda_k \end{array}$$

tiene una solución $v \in V$ para constantes arbitrarias $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$. Si además de existir la solución es única, entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ es una base del espacio vectorial dual.

Proposición A.12 (Propiedades de Productos Tensoriales)**.**
Sean V, W y U espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K y sea V^* el espacio vectorial dual de V, entonces el producto tensorial es conmutativo y asociativo

$$V \otimes W \;\cong\; W \otimes V \qquad\qquad V \otimes (W \otimes U) \;\cong\; (V \otimes W) \otimes U$$

salvo isomorfismos naturales. Tenemos un isomorfismo canónico de espacios vectoriales

$$V^* \otimes W \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(V, W), \qquad \alpha \otimes w \longmapsto \Big(V \longrightarrow W,\; v \longmapsto \alpha(v)\, w \Big)$$

lo cual implica $\dim(V^* \otimes W) = \dim \mathrm{Hom}(V,W) = (\dim V) \cdot (\dim W)$*, además tenemos:*

$$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \;=\; \mathrm{Bil}(U, V; W) \qquad\qquad (U \otimes V)^* \;\cong\; U^* \otimes V^*.$$

Proposición A.13 (Interpretación de Tensores Como Aplicaciones Lineales)**.**
Todo elemento del producto tensorial $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ de r espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K tiene 2^r interpretaciones como una aplicación. Para el elemento

$$\Theta \;=\; \sum_{\mu=1}^{N} \lambda_\mu\, \alpha_\mu \otimes w_\mu \;\in\; V^* \otimes W$$

por ejemplo con escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in K$, formas lineales $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in V^*$ y vectores $w_1, \ldots, w_N \in W$ las cuatro interpretaciones como una aplicación lineal o multilineal son:

$$\begin{array}{llcl@{\qquad\qquad}llcl} \Theta_\emptyset : & K & \longrightarrow & V^* \otimes W & \Theta_{\{V\}} : & V & \longrightarrow & W \\ \Theta_{\{V, W^*\}} : & V \times W^* & \longrightarrow & K & \Theta_{\{W^*\}} : & W^* & \longrightarrow & V^*\,. \end{array}$$

La primera interpretación es simplemente la recta $t \longmapsto t\,\Theta$ generada por Θ, las otras tres interpretaciones están definidas para todo vector $v \in V$ y toda forma lineal $\omega \in W^*$ por:

$$\Theta_{\{V, W^*\}}(v, \omega) \;:=\; \sum_{\mu=1}^{N} \lambda_\mu\, \omega(w_\mu)\, \alpha_\mu(v) \;=\; \langle\, \Theta_{\{V\}}(v),\, \omega \,\rangle \;=\; \langle\, v,\, \Theta_{\{W^*\}}(\omega) \,\rangle.$$

Proposición A.14 (Tipos de Tensores)**.**
El espacio vectorial de tensores de tipo $(r, r^*) \in \mathbb{N}_0^2$ asociado a un espacio vectorial V

$$\bigotimes^{r, r^*} V \;:=\; \bigotimes^r V \otimes \bigotimes^{r^*} V^* \;:=\; \underbrace{(V \otimes \cdots \otimes V)}_{r-veces} \otimes \underbrace{(V^* \otimes \cdots \otimes V^*)}_{r^*-veces}$$

es canónicamente isomorfo al espacio vectorial

$$M^{r, r^*}(V^*, V; K) \;:=\; \{\; \Omega : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r-veces} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r^*-veces} \longrightarrow K \;\mid\; \Omega \text{ es multilineal } \}$$

de dimensión $(\dim V)^{r + r^*}$. En particular obtenemos los isomorfismos:

$$\begin{aligned} \bigotimes^{r, r^*} V \;&\cong\; \bigotimes^{r^*, r} V^* \;\cong\; (\bigotimes^{r^*, r} V)^* \\ \bigotimes^{1, r^*} V \;&\cong\; M^{0, r^*}(V^*, V; V) \\ \bigotimes^{1, 1^*} V \;&\cong\; \mathrm{End}(V) \;\cong\; M_{n \times n}(K) \end{aligned}$$

Definición A.15 (Álgebra Graduada).
Sea G un monoide conmutativo escrito aditivamente y sea 0 su elemento neutro:

i) Sea $\{ A_\gamma \}_{\gamma \in G}$ una familia de R–módulos con índices en G. La suma directa

$$A = \bigoplus_{\gamma \in G} A_\gamma$$

se llamará el R–módulo G–graduado asociado a la familia $\{ A_\gamma \}_{\gamma \in G}$. Los elementos $a \in A_\gamma$ de un sumando directo A_γ se llaman elementos homogéneos de grado γ.

ii) Sea $\{ A_\gamma \}_{\gamma \in G}$ una familia de R–módulos con índices en G, tal que la suma directa

$$A = \bigoplus_{\gamma \in G} A_\gamma$$

es un álgebra sobre R con producto $\cdot : A \times A \longrightarrow A$. Si la ley producto del álgebra A satisface

$$A_\gamma \times A_{\tilde{\gamma}} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} A_{\gamma + \tilde{\gamma}}$$

para todo $\gamma, \tilde{\gamma} \in G$, entonces el álgebra A se llama álgebra G–graduada. Se nota que A_0 es una subálgebra para cualquier álgebra G–graduada.

Como ejemplos importantes de álgebras graduadas tenemos el álgebra tensorial, el álgebra exterior y el álgebra simétrica asociadas a un espacio vectorial V de dimensión finita:

i) A la familia de espacios vectoriales $\{ \bigotimes^n V \}_{n \in \mathbb{N}_0}$ se le da estructura de álgebra $\mathbb{N}_0$–graduada, llamada el álgebra tensorial de V:

$$\bigotimes V := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} (\underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{n \text{ veces}}) .$$

ii) A la familia de espacios vectoriales $\{ \Lambda^n V \}_{n \in \mathbb{N}_0}$ también se le da estructura de álgebra $\mathbb{N}_0$–graduada, llamada el álgebra exterior o álgebra de Graßmann de V:

$$\Lambda V := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \Lambda^n V.$$

Sobre un campo K de característica diferente a dos un álgebra $\mathbb{Z}_2$–graduada A es esencialmente lo mismo que un álgebra con un automorfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}_K A$ involutivo $\varphi^2 = \mathrm{id}_A$:

Lema A.16 (Automorfismos Involutivos y $\mathbb{Z}_2$–Graduaciones).
El polinomio mínimo de un automorfismo $\varphi : A \longrightarrow A$ involutivo de un álgebra A divide al polinomio $x^2 - 1$, el cual tiene dos raíces diferentes $+1$ y -1 en el campo K. Por lo cual el automorfismo φ es diagonalizable y la descomposición de A en los subespacios propios

$$A = A_{+1} \oplus A_{-1} =: A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$$

para los valores propios $+1$ y -1 respectivamente nos da una $\mathbb{Z}_2$–graduación del álgebra A.

Lema A.17 (Propiedades de la Traza)**.**
Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K y sean $F : V \longrightarrow W$, $H : V \longrightarrow W$ Y $J : W \longrightarrow V$ aplicaciones lineales, entonces:

$$\begin{array}{lrcl} i) & \mathrm{tr}_V(\,J\,H\,) & = & \mathrm{tr}_W(\,H\,J\,) \\ ii) & \mathrm{tr}_V(\,F\,+\,H\,) & = & \mathrm{tr}_V F\,+\,\mathrm{tr}_V H. \end{array}$$

Por comodidad la matriz asociada a la aplicación lineal se ha denotado por la misma letra, con lo cual se toma la traza del producto de las matrices respectivas.

Observación A.18 (Cálculo de la Traza)**.**
Para simplificar el cálculo de la traza hay una identidad bastante útil: Si $F \in \mathrm{End}\,V$ es un endomorfismo de rango uno y $v \in V$ es un vector que satisface $\mathrm{im}\,F \subset \mathbb{R}\,v$, entonces:

$$F\,v \;=\; (\,\mathrm{tr}_V F\,)\,v.$$

Corolario A.19 (Invarianza de la Traza bajo Isomorfismos)**.**
Sea $F : V \longrightarrow W$ un isomorfismo de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo K y sean $A \in \mathrm{End}\,V$ y $B \in \mathrm{End}\,W$ endomorfismos entrelazados por el isomorfismo F en el sentido $F \circ A = B \circ F$, entonces $\mathrm{tr}_V A = \mathrm{tr}_W B$.

Este argumento simple usa la primera propiedad de la traza en el Lema A.17 dos veces:

$$\mathrm{tr}_V A \;=\; \mathrm{tr}_V(\,A \circ F^{-1} \circ F\,) \;=\; \mathrm{tr}_W(\,F \circ A \circ F^{-1}\,) \;=\; \mathrm{tr}_W(\,B \circ F \circ F^{-1}\,) \;=\; \mathrm{tr}_W B$$

Corolario A.20 (Criterio de Anulación de la Traza)**.**
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K de característica diferente a dos y sea $\eta : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal y no degenerada en el sentido que existe para cada vector no cero $v \in V$ un vector $w \in V$ con la propiedad $\eta(\,v,\,w\,) \neq 0$. Sea además $A \in \mathrm{End}\,V$ un endomorfismo tal que $A \star \eta = 0$, es decir, tal que

$$\eta(\,A\,v,\;w\,) \;+\; \eta(\,v,\;A\,w\,) \;=\; 0$$

para todo $v,\,w \in V$, entonces $\mathrm{tr}_V A = 0$.

Dado que η es no degenerada la aplicación musical $\flat : V \longrightarrow V^*$, $v \longmapsto \eta(\,v,\,\cdot\,)$, es inyectiva y por ende un isomorfismo de espacios vectoriales para la igualdad de las dimensiones de V y V^*. La otra asunción $\eta(\,Av,\,w\,) + \eta(\,v,\,Aw\,) = 0$ para $A \in \mathrm{End}\,V$ es equivalente a

$$\flat \circ A \;=\; (\,-\,A^*\,) \circ \flat$$

en donde $A^* : V^* \longrightarrow V^*$, $\alpha \longmapsto \alpha(A\,\cdot\,)$, es la aplicación adjunta a A. Entonces

$$\mathrm{tr}_V A \;=\; \mathrm{tr}_{V^*}(\,-\,A^*\,) \;=\; -\,\mathrm{tr}_{V^*} A^* \;=\; -\,\mathrm{tr}_V A$$

según el Corolario A.19, porque las matrices de A y A^* con respecto a cualquier pareja de bases duales para V y V^* son matrices transpuestas y por ende $\mathrm{tr}_V A = \mathrm{tr}_{V^*} A^*$. En un campo K de característica diferente a dos la ecuación $\mathrm{tr}_V A = -\mathrm{tr}_V A$ equivale a $\mathrm{tr}_V A = 0$.

Teorema A.21 (Semirango de Formas Bilineales Alternantes).
Sea K un campo de característica diferente a dos y sea $\eta : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineal y alternante en un espacio vectorial de dimensión $m \in \mathbb{N}_0$ sobre K. Entonces existen formas lineales $\alpha_1,\, \beta_1,\, \ldots,\, \alpha_r,\, \beta_r \in V^*$ para V que son linealmente independientes y satisfacen:

$$\eta \;=\; \alpha_1 \wedge \beta_1 \;+\; \alpha_2 \wedge \beta_2 \;+\; \ldots \;+\; \alpha_r \wedge \beta_r .$$

El número $r \in \mathbb{N}_0$ en esta igualdad se llama el semirango de η. La acción de $\mathrm{GL}(V)$

$$\star : \;\; \mathrm{GL}(V) \times \Lambda^2 V^* \longrightarrow \Lambda^2 V^* \qquad\qquad (\mathbb{F},\, \eta) \longmapsto \mathbb{F} \star \eta$$

en las formas bilineales alternantes definido por $(\mathbb{F} \star \eta)(X,\, Y) := \eta(\mathbb{F}^{-1}X,\, \mathbb{F}^{-1}Y)$ tiene exactamente $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ órbitas clasificadas únicamente por el semirango $r = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

Teorema A.22 (Teorema de Inercia de Sylvester).
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $m \in \mathbb{N}_0$, entonces la acción de $\mathrm{GL}(V)$

$$\star : \;\; \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{Sym}^2 V^* \longrightarrow \mathrm{Sym}^2 V^* \qquad\qquad (\mathbb{F},\, g) \longmapsto \mathbb{F} \star g$$

en $\mathrm{Sym}^2 V^*$ *definido por $(\mathbb{F} \star g)(X,\, Y) := g(\mathbb{F}^{-1}X,\, \mathbb{F}^{-1}Y)$ tiene exactamente*

$$\binom{m+2}{2} \;=\; \frac{(m+2)\,(m+1)}{2}$$

órbitas clasificadas por la signatura $(p,\, n) \in \mathbb{N}_0^2$ de $g \in \mathrm{Sym}^2 V^*$, que satisface $p + n \leq m$.

Lema A.23 (Identidad de Parseval).
Sea $e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_m$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$ con respecto a la forma bilineal canónica $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces para todos los vectores $A,\, B \in \mathbb{R}^m$ es verdad que:

$$\langle A,\, B \rangle \;=\; \sum_{\mu=1}^{m} \langle A,\, e_\mu \rangle \, \langle e_\mu,\, B \rangle \; .$$

Lema A.24 ($\mathbb{P}_n$ es Subvariedad).
$\mathbb{P}_n$ es una subvariedad de las matrices simétricas $\mathrm{Mat}^{\mathrm{sim}}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Demostración. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n &:= \{\; P \in \mathrm{Mat}^{\mathrm{sim}}_{n\times n}(\mathbb{R}) \;|\; P^t = P \text{ y definida positiva } x^t P x > 0 \quad \forall\, x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \;\} \\
&= \bigcap_{x \neq 0 \in \mathbb{R}^n} \{\; P \in \mathrm{Mat}^{\mathrm{sim}}_{n\times n}(\mathbb{R}) \;|\; x^t P x > 0 \;\} \\
&= \bigcap_{x \neq 0 \in \mathbb{R}^n} \{\; P \in \mathrm{Mat}^{\mathrm{sim}}_{n\times n}(\mathbb{R}) \;|\; \langle P, x x^t \rangle > 0 \;\}
\end{aligned}$$

donde

$$\langle\, ,\, \rangle : \mathrm{Mat}^{\mathrm{sim}}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}^{\mathrm{sim}}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (P, B) \longmapsto \langle P, B \rangle := \mathrm{tr}(PB)$$

es un producto escalar definido positivo sólo para las matrices simétricas (no en general para cualquier matriz) pues tenemos que toda matriz simétrica sobre los reales es diagonalizable y por ende $\mathrm{tr}(PP) = \mathrm{tr}(P^2) = \sum_{i,j} p_{ij}^2 \geq 0$ y es igual a cero si y sólo si $P = 0$ por lo tanto $\langle\ ,\ \rangle \geq 0$.

Tenemos que $\langle\ ,\ \rangle$ es continua pues el producto de matrices y la traza son funciones continuas.

Ahora mostremos que $\mathbb{P}_n$ es un abierto: sea $P \in \mathbb{P}_n$ con lo cual se tiene que

$$\inf_{x \neq 0 \,\in\, \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{x^t P x}{\| x \|^2} \right\} = \inf_{x \,\in\, S^{n-1}} \{ x^t P x \} = \min_{x \,\in\, S^{n-1}} \{ x^t P x \} := \varepsilon(P)$$

P.D $B_{\varepsilon(P)}(P) \subset \mathbb{P}_n$.

Sea $x \in S^{n-1}, \tilde{P} \in B_{\varepsilon(P)}(P)$ entonces se vale lo siguiente:

$$| x^t P x - x^t \tilde{P} x | = | \mathrm{tr}(P - \tilde{P}) x x^t | = | \langle P - \tilde{P}, x x^t \rangle | \leq \| P - \tilde{P} \| \, \| x x^t \| \tag{A.1}$$

por Cauchy–Schwarz, pero

$$\| P - \tilde{P} \| \, \| x x^t \| < \varepsilon(P) \, \| x x^t \| \leq \frac{x^t P x}{\| x \|^2} \, \| x x^t \| \leq x^t P x.$$

Entonces

$$| x^t P x - x^t \tilde{P} x | < x^t P x \implies x^t P x - x^t \tilde{P} x < x^t P x \implies x^t \tilde{P} x > 0$$

esto vale $\forall\ x \in S^{n-1}, \tilde{P} \in B_{\varepsilon(P)}(P)$, por lo cual $B_{\varepsilon(P)}(P) \subset \mathbb{P}_n$ y por lo tanto $\mathbb{P}_n$ es un abierto y como todo abierto de una variedad diferenciable es una subvariedad diferenciable, concluimos que $\mathbb{P}_n$ es una subvariedad de las matrices simétricas. ∎

Bibliografía

[B] Bredon, Glen E. : *Topology and Geometry,* Springer, New York, 1993.

[D] Dupont, Johan L. : *Differential Geometry,* Lecture Notes Series 1993 No. 62, Institut for Matematik, Aarhus Universitet, Aarhus, 1993.

[FH] Fulton, William & Harris, Joe: *Representation Theory: A First Course,* Readings in Mathematics 131, Springer, 1990.

[G] Greub, Werner: *Multilinear Algebra,* Springer, New York, 1978.

[H] Helgason, Sigurdur: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces,* Academic Press, New York, 1978.

[KN] Kobayashi, Soshichi & Nomizu, Katsumi: *Foundations of Differential Geometry, Volume I & II,* Interscience Publication, Wiley, New York, 1969.

[L] Lee, Jeffrey M. : *Manifolds and Differential Geometry. Volume I,* Springer, New York, 2008.

[ST] Singer, Isadore M. & Thorpe, John A. : *Lectures Notes On Elementary Topology and Geometry,* Scott, Foresman & Co. , Glenview, 1967.

[T] Taubes, Clifford H. : *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature,* Oxford University Press, Oxford, 2011.

[Wa] Warner, Frank W. : *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups,* Springer, New York, 1983.

[We] Weingart, Gregor: *Four Constructions of the Loos Connection,* Notas personales.

[Y] Yamaguti, Kiyosi: *On the Lie triple systems and its generalization,* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A 21, 1957/1958, 155—160.