UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis del límite a bajas energías de la matriz de dispersión asociada a la ecuación de Schrödinger discreta

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Gerardo Martin Franco Córdova

TUTOR:

Miguel Arturo Ballesteros Montero

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

A mis padres,
Gerardo y Silvia.

Agradecimientos

La presentación de este trabajo representa no solo la conclusión del mismo, si no que también la consumación de una etapa de mi vida, quisiera entonces agradecer a todas las personas que me brindaron su apoyo durante esta etapa y que me ayudaron a concluirla.

Agradezco a mis padres Gerardo Franco y Silvia Córdova por el apoyo incondicional que me brindaron, por que gracias a sus enseñanzas se forjo en mi una vocación por el estudio que me ha ayudado a alcanzar muchos de mis objetivos académicos. A mi hermana Claudia Franco por su gran apoyo y compañía que me brindó en esta etapa.

A toda mi familia, a mis abuelos, mis tios y mis primos por el soporte que me brindaron que fue de gran ayuda y que sin el me hubiera sido difícil incluso iniciar esta etapa.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en particular a la Facultad de Ciencias de la cual tuve el privilegio de formar parte durante 4 años. A todos mis profesores de la carrera por el conocimiento que compartieron conmigo.

A mis amigos con los cuales no solo compartí tiempos de diversión si no también de discusión y reflexión que me ayudaron a fortalecer y aclarar mis conocimientos.

A mi asesor y director de tesis el Dr. Miguel Ballesteros por brindarme las herramientas y el material necesario para la elaboración de este trabajo y por su ayuda en el desarrollo del mismo.

A el Dr. Hermann Schulz-Baldes por las aportaciones que realizó que ayudaron al desarrollo de este trabajo.

A los miembros del jurado por sus comentarios y correcciones realizadas.

Finalmente quiero mencionar que esta investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN108818 y al proyecto SEP-CONACYT 254062.

Índice

1. Introducción.

En este trabajo estudiamos teoria de dispersión para la ecuación matricial de Schrödinger discreta. En particular, definimos la matriz de dispersión a traves de las soluciones de Jost, probamos que el límite de la matriz de dispersión en los umbrales existe y encontramos una expresión para el límite relacionando a este con la existencia o no de soluciones acotadas para los umbrales (half-bounded states), este ánalisis sera de gran utilidad para el desarrollo del Teorema de Levinson, este último relaciona el número de estados acotados (bounded states) con el cambio de argumento del determinante de la matriz de dispersión. Este problema ha sido tratado anteriormente por ejemplo, para el caso escalar discreto por Hinton, Klaus and Shaw [2] y el presente trabajo puede verse como una generalización del mismo en el caso vectorial, o bien como una discretización del caso vectorial continuo que ha sido tratado por Aktosun, Klaus y Van Der Mee [1].
Los Hamiltonianos que aqui analizamos son operadores tridiagonales tambien llamados operadores de Jacobi, estos son analogos discretos de los operadores de Sturm-Liouville y muchas de las técnicas ocupadas para estos se pueden trasladar despues de unas adecuadas modificaciones. Mas aún, estos operadores son frecuentemente usados para modelar fenomenos de bajas energías en física de estado solido. Aqui nos centraremos en la situación de rango corto, es decir, el potencial $V(n)$ satisface la condicion de dispersión $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|nV(n)\| < \infty$.

1.1. Módelo.

La ecuación estacionaria matricial de Shrödinger de dimensión uno es la siguiente

$$H\psi = E\psi, \tag{1.1}$$

donde $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V$, es un operador autoadjunto densamente definido en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^L)$.
La ecuación (1.1) modela a una particula (cuántica) que se desplaza en el eje real y el hecho de que es matricial se pude asociar a grados de libertad del sistema como por ejemplo el spin. Si le imponemos a H la condición de dispersión $V \in L^1_1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{L\times L})$, lo cual significa que la función $(1 + |x|)\|V(x)\|$ es integrable sobre $\mathbb{R}$, para la ecuación (1.1), con $E \in \mathbb{R}$, podemos encontrar soluciones fundamentales acotadas (en cada dirección), que no estan en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^L)$ a las cuales llamamos eigenvalores generalizados, estas soluciones son de utilidad para estudiar problemas de dispersión. Resultados importantes que se asiocian con las soluciones de (1.1), son por ejemplo el Teorema de Levinson y problema de dispersión inverso.
El análogo discreto de esta ecuación, es una ecuación de diferencias matricial símetrica de segundo orden, que esta dada por

$$Hu = Eu, \tag{1.2}$$

donde $H : l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L) \to l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ es un operador tal que

$$(Hu)(n) = -u(n-1) + 2u(n) - u(n+1) + V(n)u(n),$$

y las matrices $V(n) \in \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$ son autoadjuntas.
Notemos que si el operador $\frac{d}{dn}$(la derivada discreta) es tal que

$$\frac{d}{dn}u(n) = u(n+1) - u(n),$$

entonces

$$-\frac{d^2}{dn}u(n-1) = -u(n-1) + 2u(n) - u(n+1),$$

de esta observación podemos notar la razón de su analogia al caso continuo. Sin perdida de geralidad y con el fin de facilitar la notación vamos a considerar el operador

$$H_0 u(n) = u(n+1) + u(n-1),$$

que es un operador unitariamente equivalente al de segunda derivada discreta, igual que en el caso continuo consideraremos al operador $H = H_0 + V$ bajo la condición de dispersión

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\|V(n)\| < \infty. \tag{1.3}$$

Para la ecuación (1.2), con $E \in \sigma_{ac}(H) \setminus \{-2, 2\} = (-2, 2)$, podemos encontrar soluciones fundamentales acotadas, que no estan en $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ conocidas como soluciones de Jost, que seran el ingrediente para la construcción de la matriz de dispersión y que seran fundamentales para el ánalisis de la misma.
En el trabajo presente estudiamos el límite a bajas energias de la matriz de dispersión de la ecuación (1.2). Este limite es de mucha importancia y tiene varias aplicaciones, en particular es el elemento clave para demostrar el problema inverso para la matriz de dispersión a bajas energias, es decir, recuperar el potencial V conociendo el límite a bajas energías de la matriz de dispersión, en un trabajo futuro presetaremos el problema inverso asi como otras aplicaciones como en particular el teorema de Levinson (el cual fue realizado para el caso discreto escalar ($L = 1$) en [2]). El resultado analogo (El límite a bajas energías de la matriz de dispersión) para el caso vectorial continuo fue elaborado en [1].
Para la ecuación (1.2) con la condición (1.3) existen soluciones particulares (ver Lema 3.3), conocidas como soluciones de Jost, tales que satisfacen lo siguiente

$$u_+^z(n) = z^n\mathbf{1} + o(1),\ n \to +\infty,$$

$$u_-^{1/z}(n) = z^{-n}\mathbf{1} + o(1),\ n \to -\infty.$$

donde $z \in \overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{0\}$ es tal que $E = z^{-1} + z$ y $\mathbf{1}$ denota la matriz identidad en $\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$, dichas soluciones son holomorfas (con respecto a z) en $\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ y continuas en $\overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{0\}$. Para estas soluciones existen matrices $M_+(z), M_-(z)$ (ver Observacion 3.8) tales que para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$,

$$u_+^z(n) = u_-^z(n)M_+(z) + u_-^{1/z}(n)N_+(z),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Además $M_+(z)$ es invertible para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$(ver Observacion 4.4) por lo que multiplicando por $M_+(z)^{-1}$ en (1.4) obtenemos

$$u_+^z(n)M_+(z)^{-1} = u_-^z(n) + u_-^{1/z}(n)N_+(z)M_+(z)^{-1},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Y por lo tanto se tiene, para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$, que

$$u_+^z(n)M_+(z)^{-1} = \begin{cases} z^n M_+(z)^{-1} + o(1), & n \to +\infty \\ z^n\mathbf{1} + z^{-n}N_+(z)M_+(z)^{-1} + o(1), & n \to -\infty \end{cases} \tag{1.5}$$

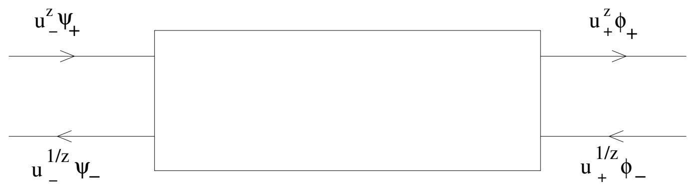

Figura 1: Representación esquematica del proceso de dispersión

Podemos interpretar la ecuación anterior como sigue. Se envia una onda plana z^n desde $-\infty$. Al interactuar con el potencial V, una parte de esta onda es reflejada produciendo la onda $z^{-n}N_+(z)M_+(z)^{-1}$ y $z^nM_+(z)^{-1}$ que es la onda que se transmite hacia $+\infty$.
Por lo que acabamos de explicar, $M_+(z)^{-1}$ se le conoce como coeficiente de transmición y $-N_+(z)M_+(z)^{-1}$ como coeficiente de reflección.
Estos coeficientes determinan la matriz de dispersión, que esta dada por

$$S(z) = \begin{pmatrix} T_+(z) & R_-(z) \\ R_+(z) & T_-(z) \end{pmatrix},$$

para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$. Donde $T_\pm(z) = M_\pm(z)^{-1}$ son los coeficientes de transmisión y $R_\pm(z) = -N_\pm(z)M_\pm(z)^{-1}$ son los coeficientes de reflección, ademas $M_\pm$ se puede extender analícamente a $\mathbb{D}^2 \setminus \{1, -1, 0\}$(ver Definición 4.2). Entonces $T_+(z)$ se puede definir como $T_+(z) = M_+(z)^{-1}$, para las $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{1, -1, 0\}$ tales que $M_+(z)$ es invertible. En el caso que $z = e^{ik}$ represente una onda viajando a la derecha, entonces u^z_- y $u^{1/z}_+$ son soluciones entrantes y u^z_+ y u^x_-1/z son salientes. En este caso la caso la matriz de dispersón expresa las soluciones entrantes en terminos de las salientes

$$\begin{pmatrix} u^{1/z}_- & u^z_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^z_+ & u^{1/z}_- \end{pmatrix} S(z)\ . \tag{1.6}$$

Fig. 1 muestra como la matriz de dispersión conecta las ondas entrantes $u^{1/z}_-$ y u^z_+ con las salientes u^z_+ y $u^{1/z}_-$.

1.2. Resultado Principal.

En este trabajo probamos que los coeficientes de dispersión, $T_\pm(z), R_\pm(z)$ que definiremos mas adelante (ver sección 4) son continuos en $1, -1$, es decir, probamos que $\lim_{z\to 1} T_\pm(z)$ y $\lim_{z\to 1} R_\pm(z)$(donde el límite es tomado sobre $\mathbb{D}^2$) existen, ademas encontamos una expresión para dichos limites.
Como vemos mas abajo (Proposición 4.1),

$$M_+(z) = \frac{z}{z^2-1} W(u^z_-, u^z_+)$$

y

$$W(u^z_-, u^z_+) \to W(u^1_-, u^1_+),\ z \to 1.$$

Si $\Delta_+ := W(u^1_-, u^1_+)$ es invertible (caso génerico) tenderemos que $M_+(z)$ es invertible en una vecindad del 1 y

$$T_+(z) = M_+(z)^{-1} = \frac{z^2-1}{z} W(u^z_-, u^z_+)^{-1} \to 0,\ z \to 1.$$

Este resultado queda establecio en (seccion 6. Teorema 6.1).
Si Δ_+ no es invertible (caso exepcional) , el análisis es mas complicado, pero como vemos dicho análisis depende de la existencia de soluciones acotadas (half-Bounded states) para la ecuación

$$u(n-1) + V(n)u(n) + u(n+1) = 2u(n).$$

En este caso probamos que existe una matriz $\mathbf{Z}$ tal que

$$T_+(z) = \mathbf{Z} + o(1).$$

Este resultado esta establecido en la sección 8 Teorema 8.9.
El trabajo esta dividido de la siguiente forma, en la primera sección se prueban resultados y definiciones básicas que se ocuparan a lo largo del trabajo las cuales estan basados en el contenido de ([1], [2], [3], [4]). En la sección 3 se construyen soluciones particulares y se demuestran algunas propiedades que cumplen. En la sección 4 se definen los coeficientes y la matriz de dispersión y se demuestran algunas de sus propiedades. En la sección 5 se consideran los dos casos en los cuales es importante dividir el análisis. En la sección 6 y 8 se encuentra una expresión para $\lim_{z\to 1} T_+(z)$, en el primer caso (caso genérico) y el segundo (caso exepcional) respectivamente. En la sección 7 se llevan a cabo estimaciones importantes que se usaran en el análisis del caso exepcional.

2. Resultados Preliminares.

En esta sección presentamos propiedades generales básicas que ocuparemos en el desarrollo del trabajo.

Una expresión de diferencias simetrica de segundo orden (e.d.s.), es una transformación lineal de la forma

$$\tau : (\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}} \to (\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}},$$

$$\tau(u)(n) = B(n-1)u(n-1) + A(n)u(n) + B(n)u(n+1),$$

donde $A(n), B(n) \in \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$ son autoadjuntas y $B(n)$ es invertible para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Dada τ como antes, tenemos asociada la ecuacion de autovalores dada por

$$\tau(u) = Eu, \tag{2.1}$$

la cual estudiaremos para $u \in (\mathbb{C}^m)^{\mathbb{Z}}, \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}}$, $E \in \mathbb{C}$.

Observación 2.1. *Notemos que por la relación de recurrencia, las soluciones de* (2.1) *quedan determinadas por dos valores consecutivos, es decir, para* $M, N \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C}), E \in \mathbb{C}$ *y* $n \in \mathbb{Z}$ *existe una única solución de* (2.1)*,* u^E*, tal que* $u^E(n) = M$ *y* $u^E(n+1) = N$*, pues*

$$u^E(j-1) = B(j-1)^{-1}((E - A(j))u^E(j) - B(j)u^E(j+1)),$$

$$u^E(j+1) = B(j)^{-1}((E - A(j))u^E(j) - B(j-1)u^E(j-1)),$$

lo que inductivamente nos permite determinar los valores de $u^E(n)$ *para cualquier* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Lo observación anterior induce la siguiente definición.

Definición 2.2. *Dada* τ *e.d.s.* $E \in \mathbb{C}$ *definimos la matriz de transmición asociada a* τ *como*

$$T^E_\tau : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{2L\times 2L}(\mathbb{C})$$

$$T^E_\tau(n) = \begin{pmatrix} B(n)^{-1}(E - A(n)) & -B(n)^{-1}B(n-1) \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por la observación 2.1 si u^E es solución de (2.1) y $\Phi^E(n-1) = \begin{pmatrix} u^E(n) \\ u^E(n-1) \end{pmatrix}$, entonces

$$T^E_\tau(n)\Phi^E(n-1) = \Phi^E(n),$$

$$T^E_\tau(n)^{-1}\Phi^E(n) = \Phi^E(n+1),$$

donde

$$T^E_\tau(n)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -B(n-1)^{-1}B(n) & B(n-1)^{-1}(E - A(n)) \end{pmatrix}.$$

A continuación, tenemos unas proposiciones y definiciones que nos seran de ayuda mas adelante.

Proposición 2.3 (Suma de Abel ,Integracion por Partes)**.** *Para* $u, v \in (\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$*, se tiene que*

$$\sum_{j=m}^{n} u(j)(v(j+1) - v(j)) = u(n)v(n+1) - u(m-1)v(m) + \sum_{j=m}^{n} (u(j-1) - u(j))v(j).$$

Demostración. Desarrollar de ambos lados.

□

Definición 2.4. *Dadas* $u, v \in (\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ *y* τ *e.d.s definimos el wronskiano de* u *y* v *con respecto a* τ *como*

$$W(u, v, \tau) : (\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}} \to (\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$$
$$W(u, v, \tau)(n) = u(n)^* B(n)v(n+1) - u(n+1)^* B(n)v(n).$$

Proposición 2.5 (Formula de Green)**.** *Dadas* $u, v \in (\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$*,* $l, n \in \mathbb{Z}$ *y* τ *e.d.s. se tiene que*

$$\sum_{j=l}^{n} ((\tau u)^* v - u^*(\tau v))(j) = W(u, v, \tau)(l-1) - W(u, v, \tau)(n).$$

Demostración. Como $B(j), A(j)$ son matrices autoadjuntas se tiene que

$$\sum_{j=l}^{n} (\tau u(j))^* v(j) = \sum_{j=l}^{n} u(j-1)^* B(j-1)v(j) + u(j)^* A(j)v(j) + u(j+1)^* B(j)v(j)$$

y ademas

$$\sum_{j=l}^{n} u(j)^* \tau v(j) = \sum_{j=l}^{n} u(j)^* B(j-1)v(j-1) + u(j)^* A(j)v(j) + u(j)^* B(j)v(j+1)$$

restando estas dos ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{j=l}^{n} u(j-1)^* B(j-1)v(j) - u(j)^* B(j-1)v(j-1) \\ &+ u(j+1)^* B(j)v(j) - u(j)^* B(j)v(j+1) \\ &= \sum_{j=l}^{n} W(u, v, \tau)(j-1) - W(u, v, \tau)(j) = W(u, v, \tau)(l-1) - W(u, v, \tau)(n). \end{aligned}$$

□

Observación 2.6. *Notemos que por la Proposición 2.5, si* $E \in \mathbb{C}$ *y* $u, v \in (M_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ *son tales que*

$$\tau u = \bar{E}u, \tau v = Ev$$

entonces la sucesión $W(u, v, \tau)$ *es constante, denotaremos* $W(u, v, \tau) = W(u, v, \tau)(n)$*. Mas adelante ocuparemos esta observación en varias ocaciones sin mencionarla.*

A continuación estableceremos lo que sera el análogo del operador laplaciano en el caso discreto, con el cual, trabajaremos a lo largo del texto. Denotaremos $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ al espacio de Hilbert que consiste en el conjuto de las sucesiones $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^L$ tales que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|u(n)\|^2 < \infty$, donde $\|.\|$ denota la norma en $\mathbb{C}^L(\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{L} |x_i|^2)$, equipado con el producto interior $\langle u, v\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle u(n), v(n)\rangle$.
Consideremos la siguiente expresion de diferencias, τ_0, con $B(n) = I, A(n) = 0$, es decir

$$(\tau_0 u)(n) = u(n + 1) + u(n - 1),$$

la cual tiene asociada la ecuación de autovalores

$$u(n + 1) + u(n - 1) = Eu(n) \tag{2.2}$$

Esta ecuación a su vez tiene asociado un operador acotado autoadjunto como vemos a continuación.

Definición 2.7. *El operador lapalaciano discreto* $H_0 : l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L) \to l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ *esta dado por*

$$(H_0 u)(n) = u(n + 1) + u(n - 1).$$

Notemos que como para una sucesión $u \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ *tenemos que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|u(n + 1) + u(n - 1)\|^2 \leq 4 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|u(n)\|^2 < \infty,$$

el operador esta bien definido y es acotado.

Proposición 2.8. *El operador laplaciano es un operador autoadjunto, tal que* $\sigma_{abs}(H) = \sigma_{ess}(H) = \sigma(H) = [-2, 2]$ *en particular* $\sigma_p(H) = \emptyset$.

Demostración. Sean $u, v \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ entonces $W(u, v)(n) \to 0, n \to \pm\infty$, y por la Proposición 2.5 tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n}((H_0 u)^* v - u^*(H_0 v))(j) = W(u, v)(l - 1) - W(u, v)(n)$$

tomando limites obtenemos que H_0 es autoadjunto. Para el espectro de H_0 consideremos la transformada de Fourier $\mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L) \to L^2([0, 1], \mathbb{C}^L)$ y su inversa $\mathcal{F}^{-1}$ que estan dadas por

$$\mathcal{F}(u)(r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi\imath nr} u(n), \qquad \mathcal{F}^{-1}(f)(n) = \int_0^1 e^{-2\pi\imath nr} f(r),$$

y que es unitaria, entonces tenemos que

$$\mathcal{F} H_0 \mathcal{F}^{-1}(f)(r) = (e^{-2\pi\imath r} + e^{2\pi\imath r}) f(r) = 2cos(2\pi r) f(r)$$

de donde H_0 es unitariamente equivalente al operador de multiplicacion por $2cos(2\pi r)$, de donde obtenemos el resultado deseado.

$\square$

Por la Proposicion 2.8 sabemos que la ecuación (2.2) no tiene soluciones en $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)$ si consideremos $V \in \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $V(n)$ es una matriz autoadjunta que satisface $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\|V(n)\| < \infty$ entonces sabemos que el operador de multiplicación

$$T_V : l^2(\mathbb{Z}, \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})) \to l^2(\mathbb{Z}, \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))$$

dado por $T_V f(n) = V(n)f(n)$, es acotado, autoadjunto, ademas se tiene que $\sigma_{abs}(H + T_V) = \sigma_{ess}(H + T_V) = [-2, 2]$. Tambien se puede probar que el espectro putual de $H + T_V$ es finito y contar sus elementos en terminos del cambio da argumento del determinante de la matriz de dispersión (Teorema de Levinson). Vamos entonces a establecer la ecuación de diferencias que estudiaremos a lo largo del trabajo. Consideremos la ecuación de diferencias de segundo orden

$$u(n+1) + V(n)u(n) + u(n-1) = Eu(n),\ n \in \mathbb{Z}.$$

donde $E \in \mathbb{C}$ y $V(n)$ son matrices autoadjuntas que satisfacen la condición de dispersión $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|\|V(n)\| < \infty$, la solución u puede estar en $(\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ o bien en $(\mathbb{C}^L)^{\mathbb{Z}}$. Esta ecuación tiene asociado un operador lineal (Laplaciano discreto), dado por

$$(H_0 + V)u(n) = u(n+1) + V(n)u(n) + u(n-1),$$

donde $(H_0u)(n) = u(n+1) + u(n-1)$.

y denotaremos $W_0(u, v)(n) = W(u, v, \tau_0)(n) = u(n)^*v(n+1) - u(n+1)^*v(n)$, la matriz de transferencia asociada la denotaremos $T_0(E) = T_{\tau_0}(E)$ donde

$$T_0^E = T_0(E, n) = \begin{pmatrix} E\mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.9. *Para $E \in \mathbb{C}$ existe solución u de* (2.2) *tal que*

$$u_0(n) = z^n\mathbf{1}, \tag{2.3}$$

para alguna $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Notemos que si tal u_0 existe se tiene que

$$T_0^E \begin{pmatrix} z^{n-1}\mathbf{1} \\ z^n\mathbf{1} \end{pmatrix} = T_0^E \begin{pmatrix} u_0(n) \\ u_0(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(n+1) \\ u_0(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^n\mathbf{1} \\ z^{n+1}\mathbf{1} \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} z^{n-1}\mathbf{1} \\ z^n\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

por lo que z es un autovalor de T_0^E y por lo tanto raiz de su polinomio caracteristico que es $P_{T_0}(x) = (x^2 - Ex + 1)^L$, si tomamos z una raiz de dicho polinomio y definimos $u(E, 0) = \mathbf{1}, u(E, 1) = z\mathbf{1}$, tendremos la solución necesitada. $\square$

Notación 2.10. *Por la proposición anterior sabemos que para $E \in \mathbb{C}$ las raices del polinomio caracteristico de T_0, $P_{T_0}(x) = (x^2 - Ex + 1)^L = (x - z)^L(x - z^{-1})^L$, nos daran soluciones de* (2.2) *tales que $u_0^E(n) = z^n\mathbf{1}$, notemos que $z + z^{-1} = E$, por lo que con la intención de parametrizar dichas soluciones con respecto a "z", denotaremos para $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$, u_0^z a la solucion de* (2.2) *tal que $u_0^z(n) = z^n\mathbf{1}$, es decir, u_0^z es solucion de*

$$u_0^z(n-1) + u_0^z(n+1) = \left(z + \frac{1}{z}\right) u_0^z(n). \tag{2.4}$$

Definición 2.11. *Consideremos* $V : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$ *tal que* $V(n)$ *es autoadjunta para toda* n *y*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\|V(n)\| < \infty.$$

Definimos $(\tau_V u)(n) = (\tau_0 u)(n) + V(n)$*. Notemos que* τ_V *es una e.d.s. de segundo orden tal que* $A(n) = V(n)$ *y* $B(n) = \mathbf{1}$ *y tiene asociada la ecuacion de diferencias*

$$u(n+1) + V(n)u(n) + u(n-1) = Eu(n),$$

que siguiendo la Notación 2.10 podemos escribir como

$$u(n+1) + V(n)u(n) + u(n-1) = \left(z + \frac{1}{z}\right) u(n). \tag{2.5}$$

Denotaremos $W(u,v) = W(u,v,\tau_V) = u(n)^* v(n+1) - u(n+1)^* v(n)$*.*

Observemos que por las condiciones impuestas a V, τ_v 'se comporta' como τ_0 en $n \to +\infty$ y (2.4) 'se comporta' como (2.5) en $n \to +\infty$, por lo cual podemos pensar que existen soluciones de (2.5) que asintoticamente 'se comportan' como $u_0(z)$. Dichas soluciones se conocen como soluciones de jost, y en la siguiente sección las construimos y estudiamos algunas de sus propiedades.

3. Eigen-funciones generalizadas (estados de dispersión).

A continuación construiremos soluciones particulares de (2.5) con un comportamiento asintótico especial. Como mas adelante veremos dichas soluciones nos ayudan a describir el comportamiento asitótico de todas soluciones.

3.1. Soluciones de Jost.

Comenzaremos esta sección con un lema técnico que utilizaremos para construir las soluciones particulares conocidas como soluciones de jost.

Lema 3.1 (Ecuacion de Volterra). *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto,*

$$K : \overline{U} \times \mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\} \to M_{L\times L}(\mathbb{C}),$$

$$\hat{K} : \mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R},$$

tal que satisfacen

- *para $j > n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $K(.,n,j)$ es continua en $\overline{U}$ (holomorfa en U),*
- *para $E \in U, j > n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\|K(E,n,j)\| \leq \hat{K}(n,j)$,*
- *$\hat{K}(n+1,j) \leq \hat{K}(n,j)$, $j > n$,*
- *$\hat{K}(n,.) \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$.*

Entonces para $g : \overline{U} \to l^\infty(\mathbb{N} \cup \{0\}, M_{L\times L}(\mathbb{C}))$ con $g(.,n)$ continua en $\overline{U}$ (holomorfa en U) y acotada existe $f : U \to l^\infty(\mathbb{N} \cup \{0\}, M_{L\times L}(\mathbb{C}))$ tal que

$$f(E,n) = g(E,n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} K(E,n,j)f(E,j). \tag{3.1}$$

Ademas $f(.,n)$ es continua en $\bar{U}$(holomorfa en U) y satisface

$$\|f(k,n)\| \leq \sup_{j>n} \|g(E,j)\| \exp\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \hat{K}(n,j)\right) \tag{3.2}$$

Demostración. Sea $E \in \bar{U}$, para $h \in l^\infty(\mathbb{N} \cup \{0\}, M_{L\times L}(\mathbb{C}))$ definimos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\bar{K}(E,h)(n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} K(E,n,j)h(j).$$

Notemos que $\bar{K}(E,h)(n)$ esta bien definido, ya que

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \|K(E,n,j)h(j)\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|K(E,n,j)\|\|h(j)\| \leq \|h\|_\infty \sum_{j=n+1}^{\infty} \hat{K}(n,j) < \infty$$

luego $\sum_{j=n+1}^{\infty} K(E,n,j)h(j)$ converge en $(M_{L\times L}(\mathbb{C}), ||.||)$.

Ademas

$$\|\bar{K}(E,h)(n)\| \leq \|h\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} \hat{K}(0,j)$$

por lo que

$$\|\bar{K}(E,h)\|_\infty = \sup(\{\|\bar{K}(E,h)(n)\| : n \in \mathbb{N}\}) \leq \|h\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} \hat{K}(0,j).$$

luego $\bar{K}(E,h) \in l^\infty(\mathbb{N}, M_{L\times L}(\mathbb{C}))$ y

$$\bar{K}(E,.) : l^\infty(\mathbb{N}, M_{L\times L}(\mathbb{C})) \to l^\infty(\mathbb{N}, M_{L\times L}(\mathbb{C}))$$

es un operador lineal, continuo.

Para cada $E \in \bar{U}$ definimos recursivamente $f_0(E) = g(E), f_{j+1}(E) = \bar{K}(E, f_j(E))$. Supongamos

$$f(E) := \sum_{j=0}^{\infty} f_j(E), \tag{3.3}$$

existe en $l^\infty(\mathbb{N}, M_{L\times L}(\mathbb{C}))$, entonces puesto que $\bar{K}(E,.)$ es lineal y continuo se tiene que

$$\bar{K}(E,f(E)) + g(E) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{K}(E, f_j(E)) + g(E) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(E) + g(E) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(E) = f(E),$$

que es precisamente (3.1).

Con la finalidad de probar que (3.3) existe probemos que $\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j(E)\|_\infty < \infty$.

Demostraremos

$$\|f_j(E,n)\| \leq \frac{\sup_{i\geq n} \|g(E,i)\|}{j!} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \hat{K}(n,i) \right)^j, \tag{3.4}$$

con lo que se tendria (3.2) y ya que g es acotada con respecto a E y n,

$$\|f_j(E)\|_\infty \leq \frac{C}{j!} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \hat{K}(0,i) \right)^j. \tag{3.5}$$

con lo que se tendria que $\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j(E)\|_\infty < C \exp(\sum_{i=1}^{\infty} \hat{K}(0,i)) < \infty$.

(3.4) se demuestra por inducción sobre j. Es claro la desigualdad para $j = 0$ y el paso inductivo se sigue de lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|f_{j+1}(E,n)\| = \|\bar{K}(E,f_j(E))(n)\| &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \|K(E,n,i)\|\|f_j(E,i)\| \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \hat{K}(n,i)\frac{\sup_{l\geq i}\|g(E,l)\|}{j!}\left(\sum_{l=i+1}^{\infty}\hat{K}(i,l)\right)^j \\
&\leq \frac{\sup_{i\geq n}\|g(E,i)\|}{j!}\sum_{i=n+1}^{\infty}\hat{K}(n,i)\left(\sum_{l=i+1}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^j \\
&\leq \frac{\sup_{i\geq n}\|g(E,i)\|}{(j+1)!}\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\left(\sum_{l=i}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^{j+1} - \left(\sum_{l=i+1}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^{j+1}\right) \\
&= \frac{\sup_{i\geq n}\|g(E,i)\|}{(j+1)!}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\hat{K}(n,i)\right)^{j+1},
\end{aligned}$$

donde para la cuarta desigualdad estamos ocupando que

$$\left(\sum_{l=i}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^{j+1} - \left(\sum_{l=i+1}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^{j+1} = \hat{K}(n,i)\left(\sum_{i=0}^{j}\left(\sum_{l=i}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^{j-i}\left(\sum_{l=i+1}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^{i}\right)$$

y para cada $i \in \{0,...,j\}$

$$\left(\sum_{l=i}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^{j-i}\left(\sum_{l=i+1}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^{i} \geq \left(\sum_{l=i+1}^{\infty}\hat{K}(n,l)\right)^{j}.$$

Ya que $\forall E \in \overline{U}(\|K(E,n,i)\| \leq \hat{K}(0,i))$ y (3.5) se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ la convergencia en

$$f_{j+1}(E,n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} K(E,n,i)f_j(E,i),$$

es uniforme y por inducción se concluye que $f_j(.,n)$ es continua en $\overline{U}$(holomorfa en U), ya que $f_0(.,n) = g(.,n)$ y $K(.,n,i)$ lo son. Por (3.5) para cada $n \in \mathbb{N}$ la convergencia

$$f(E,n) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(E,n),$$

es uniforme, y por lo anterior se tiene que $f(.,n)$ es continua en $\overline{U}$ (holomorfa en U). Esto concluye la prueba. $\square$

Observación 3.2. *Si en el anterior lema cambiamos el dominio* $\mathbb{N}\cup\{0\}$ *por* $\mathbb{Z}^-\cup\{0\}$ *se da un resultado analago para la ecuación*

$$f(E,n) = g(E,n) + \sum_{j=-\infty}^{n-1} K(E,n,j)f(E,j),\ n \in \mathbb{Z}^-\cup\{0\}.$$

pues basta definir $\bar{g}(n) = g(-n)$, $\bar{K}(E,n,j) = K(z,-n,-j)$ *y* $\tilde{K}(n,j) = K(-n,-j)$, *y definir* $f(E,n) = \bar{f}(E,-n)$ *para la* $\bar{f}$ *que te da el lema anterior.*

Lema 3.3 (Soluciones de Jost)**.** *Existen funciones* $u_+ : \overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{0\} \to (M_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$, $u_- : \overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}^2} \to (M_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ *tales que para* $z \in \overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{0\}$, u_+^z *es solución de* (2.5) *y para* $z \in \overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}^2}$, u_-^z *es solución de* (2.5) *y satisfacen*

$$\begin{aligned} u_+^z(n) &= z^n(\mathbf{1} + o(1)),\ z \in \overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{0\},\ n \to +\infty, \\ u_-^z(n) &= z^n(\mathbf{1} + o(1)),\ z \in \overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}^2},\ n \to -\infty, \end{aligned} \tag{3.6}$$

Además para cada n, las funciónes $u_+(n), u_-(n)$, *son holomorfas en* $\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}^2$ *y continuas en* $\overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{0\}$, $\overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}^2}$ *respectivamente y satisfacen las ecuaciónes*

$$\begin{aligned} u_+^z(n) &= z^n\mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty} s_0^z(j-n)V(j)u_+^z(j),\ n \in \mathbb{Z}, \\ u_-^z(n) &= z^n\mathbf{1} + \sum_{j=-\infty}^{n-1} s_0^z(j-n)V(j)u_-^z(j),\ n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde

$$s_0^z(n) = \begin{cases} \frac{z}{1-z^2}(z^{-n} - z^n)\mathbf{1} & z^2 \neq 1 \\ (\pm 1)^{n+1} n\mathbf{1} & z = \pm 1 \end{cases}$$

Demostración. Encontraremos u_+ y, de manera analoga obtenemos u_- usando la observación 3.2. Con la finalidad de ocupar el lema anterior sean

$$\begin{aligned} g(z,n) &= \mathbf{1},\ z \in \mathbb{D}^2, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ K(z,n,j) &= -z^{(j-n)} s_0^z(j-n)V(j), z \in \mathbb{D}^2, j > n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \hat{K}(n,j) &= |j-n|\|V(j)\|,\ n,j \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Se tiene para $j > n$ si $z^2 \neq 1$ que

$$\begin{aligned} \|K(z,n,j)\| &= \left| \frac{z}{1-z^2}(z^{2(j-n)} - 1) \right| \|V(j)\| \\ &= |z|\, |1 + z^2 + ... + (z^2)^{(j-n)-1}| \|V(j)\| \\ &\leq |z|\, (|1| + |z^2| + ... + |z^2|^{(j-n)-1}) \|V(j)\| \\ &\leq |j-n| \|V(j)\| = \hat{K}(n,j), \end{aligned}$$

y si $z = 1, -1$

$$\|K(z,n,j)\| = \|z^{j-n} s_0^z(n-j)V(j)\| \leq |j-n|\|V(j)\| \leq \hat{K}(n,j),$$

y como para toda $j > n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$K(z,n,j) = z(1 + z^2 + ... + (z^2)^{(j-n)-1})V(j)$$

es continua en $\overline{\mathbb{D}^2}$ y holomorfa en $\mathbb{D}^2$ las hipotesis del lema anterior se satisfacen, por lo que existe $\tilde{u}_+ : \mathbb{D}^2 \to l^\infty(\mathbb{N}\cup\{0\}, M_{L\times L}(\mathbb{C}))$ que satisface

$$\tilde{u}_+(z,n) = \mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty} z^{(j-n)} s_0^z(j-n)V(j)\tilde{u}_+(z,j),\ \ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{3.8}$$

con $\tilde{u}(.,n)$ holomorfa en $\mathbb{D}^2$ y continua en $\overline{\mathbb{D}^2}$.

Definimos para $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$

$$u_+^z(n) = \begin{cases} z^n\tilde{u}_+(z,n) & n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ (-V(n+1)+z+\frac{1}{z})u_+^z(n+1) - u_+^z(n+2) & n\in\mathbb{Z}^- \end{cases}$$

De la definicion es claro que u_+ satisface (3.6),y para $n\in\mathbb{Z}$, $u_+(n)$ es holomorfa en $\mathbb{D}^2\setminus\{0\}$ y continua en $\overline{\mathbb{D}^2}\setminus\{0\}$, ademas para $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, u_+^z(n)$ satisface (3.7) y $u_+^z(n)$ satisface (2.5) para $n\in\mathbb{Z}^-$, para probar que u_+^z satisface (3.7) y (2.5) para $n\in\mathbb{Z}$ notemos que

$$\begin{aligned}
&\left(z^{n-1}\mathbf{1} - \sum_{j=n}^{\infty} s_0^z(j-n+1)V(j)u_+^z(j)\right) + \left(z^{n+1}\mathbf{1} - \sum_{j=n+2}^{\infty} s_0^z(j-n-1)V(j)u_+^z(j)\right) \\
&= (z^{n-1}+z^{n+1})\mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty}(s_0^z(j-n+1)+s_0^z(j-n-1))V(j)u_+^z(j) - s_0^z(1)V(n)u_+^z(n) \\
&= \left(z+\frac{1}{z}\right)z^n\mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty}\left(z+\frac{1}{z}\right)s_0^z(j-n)V(j)u_+^z(j) - V(n)u_+^z(n) \\
&= \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^n\mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty} s_0^z(j-n)V(j)u_+^z(j)\right) - V(n)u_+^z(n).
\end{aligned}$$

en donde estamos ocupando que $u_0^z(n) = z^n\mathbf{1}$ y $s_0^z(n) = \frac{z}{1-z^2}\left(u_0^{\frac{1}{z}}(n) + u_0^z(n)\right)$ son soluciones de (2.4). De lo anterior tenemos que para cada $n\in\mathbb{N}$ y $z\in\mathbb{D}^2\setminus\{0\}$ se tiene que

$$u_+^z(n-1) + u_+^z(n+1) = (z+\frac{1}{z} - V(n))u_+^z(n)$$

lo que prueba que $u_+^z(n)$ satisface (2.5) para $n\in\mathbb{N}$. Tambien haciendo $n=0$

$$\begin{aligned} & z^{-1}\mathbf{1} - \sum_{j=0}^{\infty} s_0^z(j+1)V(j)u_+^z(j) = \\ & (-V(0)+z+z^{-1})u_+^z(0) - u_+^z(1) = u_+^z(-1) \end{aligned} \tag{3.9}$$

que prueba que $u(z,-1)$ satisface (3.7) e inductivamente lo probamos para $n\in\mathbb{Z}^-$. □

3.2. Soluciones para los umbrales

Notemos que para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$, $u_{\pm}^{z}$ y $u_{\pm}^{\frac{1}{z}}$ son ambas soluciones de la misma ecuación y como veremos mas adelante sus columnas son l.i. por lo que formaran una base del espacio de soluciones de (3.6) en $(C^L)^{\mathbb{Z}}$, por lo que podremos determinar el comportamiento asintotico de cualquier solución de (2.5), escribiendola en terminos de estas soluciones.

Para $z = 1, -1$ se tiene que $u_{\pm}^{z} = u_{\pm}^{\frac{1}{z}}$ por lo cual necesitaremos encontrar otra solución de (2.5) con $z = 1$, con la finalidad de tener una base para el espacio de soluciones y conocer el comportamiento asintóticos de todas soluciones. El siguiente lema tiene dicho proposito.

Lema 3.4. *Existen $v_{\pm}^{1,-1} \in (M_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ tales que*

$$v_{\pm}^{1}(n) + v_{\pm}^{1}(n+1) = (2 - V(n))v_{\pm}^{1}(n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{3.10}$$

y $v_{\pm}^{1}(n) = \pm n(\mathbf{1} + o(1)),\ n \to \pm\infty$,

$$v_{\pm}^{-1}(n) + v_{\pm}^{-1}(n+1) = -(2 - V(n))v_{\pm}^{-1}(n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{3.11}$$

y $v_{\pm}^{-1}(n) = \pm(-1)^{n+1} n(\mathbf{1} + o(1)),\ n \to \pm\infty$.

Demostración. Encontraremos v_{+}^{1} y v_{-}^{1} se obtiene de manera analoga.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=N}^{\infty} |j|\|V(j)\| < 1/2.$$

Para cada $n, j \in [N, \infty)$ definimos

$$K(n,j) = \begin{cases} jV(j), & j \geq n+1 \\ \frac{j^2}{n}V(j), & N \leq j \leq n \end{cases}$$

entonces

$$\|K(n,j)\| \leq |j|\|V(j)\|. \tag{3.12}$$

Sea $v \in l^{\infty}([N,\infty), \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))$ definimos para $n \in [N, \infty)$

$$(\bar{K}v)(n) = \sum_{j=N}^{\infty} K(n,j)v(j),$$

que esta bien definida ya que v es acotada y (3.12), ademas notemos que para cada $n \in [N, \infty)$

$$\|(\bar{K}v)(n)\| \leq \sum_{j=N}^{\infty} \|K(n,j)\|\|v(j)\| \leq \|v\|_{\infty} \sum_{j=N}^{\infty} |j|\|V(j)\| < 1/2\|v\|_{\infty},$$

asi se tiene que

$$\|\bar{K}v\|_{\infty} < 1/2\|v\|_{\infty}$$

por lo que

$$\bar{K} : l^\infty([N,\infty), \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})) \to l^\infty([N,\infty), \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))$$

es un operador lineal y acotado tal que $\|\bar{K}\| < 1$, entonces que existe $\tilde{v}^1 \in l^\infty([N,\infty), \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))$ tal que

$$\begin{aligned} \tilde{v}^1(n) &= \mathbf{1} + (\bar{K}\tilde{v}^1)(n) = \mathbf{1} + \sum_{j=N}^{\infty} K(n,j)\tilde{v}^1(j) \\ &= \mathbf{1} + \frac{1}{n}\sum_{j=N}^{n} j^2 V(j)\tilde{v}^1(j) + \sum_{j=n+1}^{\infty} jV(j)\tilde{v}^1(j). \end{aligned} \tag{3.13}$$

(Teorema A.1, con $X = l^\infty([N,\infty), \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})), T = \bar{K}, y = \mathbf{1}$.)

Definamos

$$v_+^1(n) = \begin{cases} n\tilde{v}_+^1(n), & n \in [N,\infty) \\ (2 - V(n+1))v_+^1(n+1) - v_+^1(n+2), & n \in (-\infty, N). \end{cases}$$

y notemos que de la definición y (3.13) tenemos para $n \in [N,\infty)$ que

$$v_+^1(n) = n\mathbf{1} + n\sum_{j=n+1}^{\infty} V(j)v_+^1(j) + \sum_{j=N}^{n} jV(j)v_+^1(j). \tag{3.14}$$

por (3.14) tenemos para $n \in [N,\infty)$

$$\begin{aligned} v_+^1(n+1) - v_+^1(n) &= \mathbf{1} + \sum_{j=n+2}^{\infty} V(j)v_+^1(j) + V(n+1)v_+^1(n+1) \\ &= \mathbf{1} + \sum_{j=n+2}^{\infty} jV(j)\tilde{v}_+^1(j) + (n+1)V(n+1)\tilde{v}_+^1(n+1) \\ &= \mathbf{1} + o(1),\ n \to \infty, \end{aligned}$$

donde $\sum_{j=n+2}^{\infty} jV(j)\tilde{v}_+^1(j) \to 0$ pues es convergente y el tercer sumando pues $\tilde{v}_+^1$ es acotada y $nV(n) \to 0$, luego la sucesión de los promedios converge a $\mathbf{1}$, es decir,

$$\frac{1}{n}(v_+^1(n+1) - v_+^1(1)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_+^1(j+1) - v_+^1(j) \to \mathbf{1}$$

$$\implies \frac{v_+^1(n)}{n} \to \mathbf{1},\ n \to \infty,$$

que es precisamente $v_+^1(n) = n(\mathbf{1} + o(1)), n \to \infty$. Es claro de la definición que v_+^1 satisface

(3.10) para $n \in (-\infty, N]$, ademas si $n \in (N, \infty)$ entonces por (3.14) tenemos que

$$\begin{aligned}
&v_+^1(n-1) + v_+^1(n+1) = \\
&2n\mathbf{1} + \left(2n \sum_{j=n+1}^{\infty} V(j)v_+^1(j) - (n+1)V(n+1)v_+^1(n+1) + (n-1)V(n)v_+^1(n)\right) \\
&+ \left(2\sum_{j=N}^{n} jV(j)v_+^1(j) + (n+1)V(n+1)v_+^1(n+1) - nV(n)v_+^1(n)\right) \\
&= 2\left(n\mathbf{1} + n\sum_{j=n+1}^{\infty} V(j)v_+^1(j) + \sum_{j=N}^{n} jV(j)v_+^1(j)\right) - V(n)v_+^1(n) \\
&= (2 - V(n))v_+^1(n).
\end{aligned}$$

que prueba que v_+^1 satisface (3.10). v_+^{-1} se encuentra de manera analoga resolviendo la siguiente ecuación de sumas

$$v_+^{-1}(n) = (-1)^{n+1}\left(n\mathbf{1} + n\sum_{j=n+1}^{\infty} V(j)v_+^1(j) + \sum_{j=N}^{n} jV(j)v_+^1(j)\right).$$

□

3.3. Propiedades de las Eigen-funciones generalizadas

Como antes mencionamos las soluciones particulares previante construidas, tienen la finalidad de describir el comportamiento asintótico de todas las soluciones de (2.5). En esta sección establecemos dicho resultado.

Proposición 3.5. *Las columnas de $u_\pm^1$ y $v_\pm^1$ y las de $u_\pm^{-1}$ y $v_\pm^{-1}$ son l.i. por lo cual forman una base para el espacio de soluciones de* (2.5) *en* $(C^L)^{\mathbb{Z}}$*.*

Demostración. La prueba se hará para u_+^1, v_+^1 y es analoga para las matrices restantes. Sean $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{j=1}^{L}(\alpha_j u_+^1 e_j + \beta_j v_+^1 e_j) = 0$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^{L} -\alpha_j(e_j + o(1)) = \sum_{j=1}^{L} \beta_j n(e_j + o(1)),\ n \to \infty,$$

diviendo entre n y tomando limite obtenemos $\beta_j = 0$, sustituyendo y tomando limite obtenemos $\alpha_j = 0$. □

Observación 3.6. *Notemos que por la proposicion anterior existen $M, N \in \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$ tales que*

$$u_+^1(n) = u_-^1(n)M + v_-^1(n)N,\ n \in \mathbb{Z}.$$

ademas $\|u_-^1(n)M\| \leq C$ y $\|v_-^1(n)N\| \leq C|n|$ para $n \in \mathbb{Z}^-$ y $\|u_+^1(n)\| \leq C$ para $n \in \mathbb{N}$, donde C es una constante que no depende de n. Lo anterior puede escribirse como

$$\|u_+^1(n)\| \leq C(1 + \text{máx}(0, -n)),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{3.15}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} &\|u_-^1(n)\| \leq C(1 + \text{máx}(0, n)),\ n \in \mathbb{Z}, \\ &\|u_+^{-1}(n)\| \leq C(1 + \text{máx}(0, -n)),\ n \in \mathbb{Z}, \\ &\|u_-^{-1}(n)\| \leq C(1 + \text{máx}(0, n)),\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Proposición 3.7. *Sea $z \in \mathbb{S}^1 \backslash \{1, -1\}$, entonces las $2m$ columnas de $u_\pm^z$ y $u_\pm^{\frac{1}{z}}$ son linealmente independientes por lo cual forman una base del espacio de soluciones de* (2.5)*.*

Demostración. Sean $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ tales que

$$\sum_{j=1}^{L} (\alpha_j u_+^z e_j + \beta_j u_+^{\frac{1}{z}} e_j) = 0$$

entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{L} (\alpha_j z^n (e_j + o(1)) + \beta_j z^{-n}(e_j + o(1))) \\ &= \sum_{j=1}^{L} (\alpha_j z^n + \beta_j z^{-n}) e_j + o(1),\ n \to \infty. \end{aligned}$$

pues como $|z| = 1$, $\alpha_j z^{\pm n} o(1) \to 0,\ n \to \infty$.

Entonces para cada $j \in \{1, 2, ..., L\}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha_j z^n + \beta_j z^{-n} + o(1) = 0$. Luego $\alpha_j z^{2n} + \beta_j \to 0,\ n \to \infty$, si $\alpha_j \neq 0$ entonces $(z^2)^n \to -\beta_j \alpha_j^{-1},\ n \to \infty$, esto es imposible pues $z^2 \neq 1$, asi $\alpha_j = 0 \implies \beta_j = 0$. Lo que concluye la prueba. □

Observación 3.8. *Por la afirmación anterior para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$ y $t(z) \in (M_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ solución de* (2.5)*, existen únicas $M_t^{\pm}(z), N_t^{\pm}(z) \in \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$ tales que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} t^z(n) &= u_+^{\frac{1}{z}}(n) M_t^-(z) + u_+^z(n) N_t^-(z), \\ t^z(n) &= u_-^{\frac{1}{z}}(n) M_t^+(z) + u_-^z(n) N_t^+(z), \end{aligned}$$

Con lo que $t(z)$ es acotada.

4. La matriz de dispersión

Notemos que por la Observación 3.8 en particular tenemos que para la solución $t(z) = u_+^z$, existen únicas matrices que denotaremos $M_+(z), N_+(z)$ tales que

$$u_+^z(n) = u_-^z(n)M_+(z) + u_-^{1/z}(n)N_+(z), \; n \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

y para u_-^z existen únicas matrices que denotaremos $M_-(z), N_-(z)$ tales que

$$u_-^{1/z}(n) = u_+^{1/z}(n)M_-(z) + u_+^z(n)N_-(z), \; n \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Estos coeficientes definaran la matriz de dispersión. En las siguiente proposición se da una expresión para estos.

Proposición 4.1. *Sea $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$, para $M_\pm(z), N_\pm(z)$ se tiene que*

$$\begin{aligned} u_+^z(n) &= z^n M_+(z) + z^{-n} N_+(z) + o(1), \; n \to -\infty, \\ u_-^{1/z}(n) &= z^{-n} M_-(z) + z^n N_-(z) + o(1), \; n \to +\infty. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ademas tienen las siguientes expresiones

$$M_+(z) = \frac{z}{z^2-1} W\left(u_-^z, u_+^z\right), \tag{4.4}$$

$$M_-(z) = \frac{z}{1-z^2} W\left(u_+^{1/z}, u_-^{1/z}\right), \tag{4.5}$$

$$N_+(z) = \frac{z}{1-z^2} W\left(u_-^{1/z}, u_+^z\right), \tag{4.6}$$

$$N_-(z) = \frac{z}{z^2-1} W\left(u_+^z, u_-^{1/z}\right). \tag{4.7}$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$, por (4.1) y (3.6) tenemos que para $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} u_+^z(n) &= u_-^z(n)M_+(z) + u_-^{1/z}(n)N_+(z) \\ &= z^n(\mathbf{1} + o(1))M_+(z) + z^{-n}(\mathbf{1} + o(1))N_+(z) \\ &= z^n M_+(z) + z^{-n} N_+(z) + o(1), \; n \to -\infty. \end{aligned}$$

donde estamos ocupando que $z^n o(1) = o(1)$ pues $|z| = 1$, analogamente

$$\begin{aligned} u_-^{1/z}(n) &= u_+^{1/z}(n)M_-(z) + u_+^z(n)N_-(z) \\ &= z^{-n}(\mathbf{1} + o(1))M_-(z) + z^n(\mathbf{1} + o(1))N_-(z) \\ &= z^{-n} M_-(z) + z^n N_-(z) + o(1), \; n \to \infty. \end{aligned}$$

que prueba (4.3). Para probar (4.4) notemos que por (4.3) y (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned}
W(u_-^z, u_+^z)(n) &= z^{-n}(\mathbf{1} + o(1))(z^{n+1}M_+(z) + z^{-n-1}N_+(z) + o(1)) \\
&- z^{-n-1}(\mathbf{1} + o(1))(z^n M_+(z) + z^{-n}N_+(z) + o(1)) \\
&= (\mathbf{1} + o(1))(zM_+(z) + z^{-2n-1}N_+(z) + o(1)) \\
&- (\mathbf{1} + o(1))(z^{-1}M_+(z) + z^{-2n-1}N_+(z) + o(1)) \\
&= \left(z - \frac{1}{z}\right) M_+(z) + o(1),\ n \to -\infty,
\end{aligned}$$

por la Observacion 2.6 sabemos que el wronskiano es constante(con respecto a n), tomando limite $n \to -\infty$ obtenemos el resultado deseado para $M_+(z)$. Los otros coeficientes se calculan de manera analoga. $\square$

Notemos que (4.4) y (4.5) se pueden extender a $\mathbb{D}^2 \setminus \{0, 1, -1\}$ de la siguiente manera,

Definición 4.2. *Sea $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0, 1, -1\}$, definimos*

$$M_+(z) := \frac{z}{z^2 - 1} W(u_-^{1/\bar{z}}, u_+^z), \tag{4.8}$$

$$M_-(z) := \frac{z}{1 - z^2} W(u_+^{\bar{z}}, u_-^{1/z}). \tag{4.9}$$

A partir de estos coeficientes definiremos la matriz de dispersión, antes probaremos algunas propiedades que cumplen.

Proposición 4.3. *Para los coeficiente definidos anteriormente se tienen las siguientes propiedades:*

$$M_-(z) = M_+(\bar{z})^*,\ z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{1, -1, 0\}. \tag{4.10}$$

$$N_-(z) = -N_+(z)^*,\ z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}. \tag{4.11}$$

$$M_+(z)^* M_+(z) = N_+(z)^* N_+(z) + \mathbf{1},\ z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}. \tag{4.12}$$

$$M_-(z)^* M_-(z) = N_-(z)^* N_-(z) + \mathbf{1},\ z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}. \tag{4.13}$$

$$M_+\left(z^{-1}\right)^* N_+(z) = N_+\left(z^{-1}\right)^* M_+(z),\ z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}. \tag{4.14}$$

$$M_-\left(z^{-1}\right)^* N_-(z) = N_-\left(z^{-1}\right)^* M_-(z),\ z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}. \tag{4.15}$$

Demostración. Ocuparemos $W(f, g)^* = -W(g, f)$ que es claro de la definición, para (4.10) de la definición tenemos,

$$M_+\left(\bar{z}\right)^* = \frac{z}{z^2 - 1} W(u_-^{1/z}, u_+^{\bar{z}})^* = -\frac{z}{z^2 - 1} W(u_+^{\bar{z}}, u_-^{1/z}) = M_-(z),$$

para (4.11) de (4.5) y ya que $z \in \mathbb{S}^1$ tenemos que,

$$-N_+(z)^* = -\left(\frac{z}{z^2-1}W(u_-^{1/z}, u_+^z)\right)^* = \frac{z}{1-z^2}W(u_+^z, u_-^{1/z}) = N_-(z),$$

donde estamos ocupando que

$$\overline{\frac{z}{z^2-1}} = \frac{z}{1-z^2}$$

Para (4.12), si $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1,-1\}$ por (3.6), $u_+^z(n)^* = z^{-n}(\mathbf{1}+o(1)), n \to \infty$, de donde

$$W(u_+^z, u_+^z)(n) = z(\mathbf{1}+o(1)) - \frac{1}{z}(\mathbf{1}+o(1)) = \left(z - \frac{1}{z}\right)\mathbf{1} + o(1),\ n \to \infty,$$

tomando limite $n \to \infty$, obtenemos $W(u_+^z, u_+^z) = (z - \frac{1}{z})\mathbf{1}$, ademas por (4.3)

$$u_+^z(n)^* = z^{-n}M_+(z)^* + z^n N_+(z)^* + o(1),\ n \to -\infty,$$

de donde

$$W(u_+^z, u_+^z)(n) = \left(z - \frac{1}{z}\right)(M_+(z)^*M_+(z) - N_+(z)^*N_+(z)) + o(1),\ n \to -\infty,$$

tomando limite obtenemos

$$W(u_+^z, u_+^z) = \left(z - \frac{1}{z}\right)(M_+(z)^*M_+(z) - N_+(z)^*N_+(z)),$$

igualando las expresiones obtenidas para $W(u_+^z, u_+^z)$ tenemos (4.12), (4.13) se obtiene de forma analoga.

Para (4.14), usando (3.6) como antes obtenemos $W(u_+^{1/z}, u_+^z) = 0$ y usando (4.3)

$$W\left(u_+^{1/z}, u_+^z\right) = \left(z - \frac{1}{z}\right)\left(M_+\left(1/z\right)^* N_+(z) - N_+\left(1/z\right)^* M_+(z)\right),$$

igualando las expresiones obtenemos (4.14), analogamente se obtiene (4.15). □

Observación 4.4. *Notemos que para toda $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1,-1\}$, $M_+(z)$ y $M_-(z)$ son invertibles pues si $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1,-1\}$ y $\xi \in \mathbb{C}^L \setminus \{0\}$ entonces por (4.12) se tiene que,*

$$\begin{aligned}
\|M_+(z)\xi\|^2 &= (M_+(z)\xi)^*M_+(z)\xi = \xi^*M_+(z)^*M_+(z)\xi \\
&= \xi^*(N_+(z)^*N_+(z) + \mathbf{1})\xi = \xi^*N_+(z)^*N_+(z)\xi + \xi^*\xi \\
&= \|N_+(z)\xi\|^2 + \|\xi\|^2 > 0
\end{aligned}$$

por lo que $\ker(M_+(z)) = \{0\}$. *Analogamente por (4.13) se prueba para $M_-(z)$.*

Definición 4.5. *Sea $z \in \overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{1,-1,0\}$ tal que $M_+(z), M_-(z)$ son invertibles, definimos los coeficientes de transmición como*

$$T_+(z) := M_+(z)^{-1},\ T_-(z) := M_-(z)^{-1}, \tag{4.16}$$

y para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1,-1\}$ definimos los coeficientes de reflección

$$R_+(z) := -N_+(z)M_+(z)^{-1},\ R_-(z) := -N_-(z)M_-(z)^{-1},\ z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1,-1\}. \tag{4.17}$$

Notemos que por la observación anterior los coefientes de reflección y transición (coeficientes de dispersión) siempre estan definidos para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$. La matriz de dispersión, sera la que tiene como entradas los coeficientes de dispersión.

Definición 4.6. *Para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$, definimos*

$$S(z) := \begin{pmatrix} T_+(z) & R_-(z) \\ R_+(z) & T_-(z) \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Notemos que por la proposición 4.3 se tiene que $S(z)$ es unitaria y por (4.10) tenemos que

$$T_+(\bar{z})^* = T_-(z), \tag{4.19}$$

siempre que $M_-(z)$ sea invertible, y por (4.14) y (4.15) para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$ tenemos que

$$R_-(\bar{z}) = R_-(z)^*, \quad R_+(\bar{z}) = R_+(z)^*.$$

5. El caso génerico y el caso excepcional

El objetivo ahora es demostra que $T_\pm(z)$ existe cuando $z \to 1, -1$ sobre $\overline{\mathbb{D}^2}$ y encontrar una expresión para $T_\pm(\pm 1)$. Basado en el trabajo realizado sobre el caso continuo vectiorial en [1] y en el caso discreto escalar [2] sabemos que es necesario distinguir en dos caso, que dependen de la existencia de soluciones acotadas de (2.5) en $z = 1$. Como veremos a continuación, al igual que en caso vectorial continuo, la existencia de dichas soluciones depende de la invertibilidad de la matriz de $W(u^1_\mp, u^1_\pm)$.

Recordemos que por Lema 3.3, para $z = 1$ existen soluciones $u^1_\pm$ que satisfacen

$$(2 - V(n))u^1_\pm(n) = u^1_\pm(n+1) + u^1_\pm(n-1), \tag{5.1}$$

ademas $u^1_\pm(n) = \mathbf{1} + o(1),\ n \to \pm\infty$, y

$$\begin{aligned} u^1_+(n) &= \mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty} (j-n)V(j)u^1_+(j),\ n \in \mathbb{Z}, \\ u^1_-(n) &= \mathbf{1} + \sum_{j=-\infty}^{n-1} (j-n)V(j)u^1_-(j),\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Definición 5.1. *Definimos* $\Delta_\pm := \pm W(u^1_\mp, u^1_\pm)$

De la definición es facil ver que

$$\Delta_+ = {\Delta_-}^* \tag{5.3}$$

Observación 5.2. *Como $u^z_+(n), u^z_-(n)$ son continuas en $\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ se tiene que*

$$\Delta_+ = W(u^1_-, u^1_+) = \lim_{z\to 1} W\left(u^{\frac{1}{\bar z}}_-, u^z_+\right) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z} M_+(z) \tag{5.4}$$

$$\Delta_- = -W(u^1_+, u^1_-) = -\lim_{z\to 1} W\left(u^{\bar z}_+, u^{\frac{1}{z}}_-\right) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z} M_-(z) \tag{5.5}$$

donde el limite es tomado en $\mathbb{D}^2$.

Si Δ_+ es invertible es facil ver a partir de la Observación 5.2 que

$$\lim_{z\to 1} T_+(z) = \lim_{z\to 1} M_+(z)^{-1} = 0,\ z \to 1.$$

Si no es invertible entonces el objetivo sera estudiar el comportamiento de la convergencia de $W\left(u^{1/\bar z}_-, u^z_+\right)$ en la 'parte no invertible' de Δ_+, es decir, $\ker(\Delta_+)$ que como veremos a continuación consistira en las soluciones acotadas de (2.5) para $z = 1$.

Lema 5.3. *Si $u \in \left(\mathbb{C}^L\right)^{\mathbb{Z}}$ es solucion de (2.5) para $z = 1$ entonces las siguientes expresiones son equivalentes*

(i) u es $o(n), n \to +\infty$.

(ii) u es acotada en $+\infty$.

(iii) u converge $n \to +\infty$.

Ademas u es $o(1)$ $n \to +\infty$, sii $u = 0$.

Demostración. Por el lema 3.5 se tiene que para cualquier solucion $u \in (\mathbb{C}^L)^{\mathbb{Z}}$ de (3.6) para $z = 1$ existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^L$ tales que

$$u = v_+^1 \alpha + u_+^1 \beta.$$

De donde si u es $o(n)$, $n \to +\infty$, entonces

$$0 = \lim_{n \to \infty} u(n)/n = \alpha$$

luego $u = u_+^1 \beta$ de ahi que u sea acotada en $+\infty$ y ademas converge a β, esto es $i \implies$ (ii) y (iii), es claro $(ii) \implies (i)$ y $(iii) \implies (i)$. Si ademas u es $o(1)$ tomando el limite $n \to \infty$, $\beta = 0$ de donde $u = 0$. □

Observación 5.4. *En lema anterior es valido si se cambia $+\infty$ por $-\infty$.*

Lema 5.5. *Se tiene que*

$$u_+^1(n) = n(\Delta_+ + o(1)), \; n \to -\infty.$$
$$u_-^1(n) = n(-\Delta_- + o(1)), \; n \to \infty.$$

Demostración. Por (5.2) para $n \in \mathbb{Z}^-$ tenemos que,

$$\begin{aligned}
\Delta_+ &= W(u_-^1, u_+^1)(n) \\
&= \left(\mathbf{1} + \sum_{j=-\infty}^{n-1} (j-n) u_-^1(j)^* V(j) \right) \left(\mathbf{1} - \sum_{j=n+2}^{\infty} (j-n-1) V(j) u_+^1(j) \right) \\
&- \left(\mathbf{1} + \sum_{j=-\infty}^{n} (j-n-1) u_-^1(j)^* V(j) \right) \left(\mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty} (j-n) V(j) u_+^1(j) \right) \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} V(j) u_+^1(j) - \sum_{i=-\infty}^{n} u_-^1(i)^* V(i) \sum_{j=n+1}^{\infty} (j-n) V(j) u_+^1(j) + o(1), \; n \to -\infty,
\end{aligned}$$

y tomando el limite cuando $n \to -\infty$,

$$\Delta_+ = \sum_{j=-\infty}^{\infty} V(j) u_+^1(j), \tag{5.6}$$

en donde estamos ocupando (3.15), analogamente ocupando (5.2) y (3.16)

$$\Delta_- = -\sum_{j=-\infty}^{\infty} V(j) u_-^1(j). \tag{5.7}$$

Por (5.2) tenemos que

$$\begin{aligned} u_+^1(n+1) - u_+^1(n) &= -\sum_{j=n+2}^{\infty}(j-n-1)V(j)u_+^1(j) + \sum_{j=n+1}^{\infty}(j-n)V(j)u_+^1(j) \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} V(j)u_+^1(j) = \Delta_+ - \sum_{j=-\infty}^{n} V(j)u_+^1(j). \end{aligned}$$

luego $u_+^1(n+1) - u_+^1(n) \to \Delta_+$ cuando $n \to -\infty$, entonces la sucesion de los promedios converge a Δ_+ es decir

$$\frac{1}{n}(u_+^1(n+1) - u_+^1(1)) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_+^1(j+1) - u_+^1(j) \to \Delta_+$$

y como

$$\frac{1}{n}(u_+^1(1)) \to 0$$

entonces

$$\frac{u_+^1(n)}{n} \to \Delta_+, \ n \to -\infty.$$

que es el resultado deseado. □

Definición 5.6. *Definimos*

$$\mathcal{N} := \{\xi \in \mathbb{C}^L : u_+^1\xi \ \textit{es acotada}\},$$

$$\mathcal{M} := \{\chi \in \mathbb{C}^L : u_-^1\chi \ \textit{es acotada}\}.$$

LLamaremos el caso genérico si $\mathcal{N} = \{0\}$ y el caso excepcional cuando $\mathcal{N} \neq \{0\}$.

Lema 5.7. *$Ker(\Delta_+) = \mathcal{N}$ y $Ker(\Delta_-) = \mathcal{M}$ ademas $\dim(\mathcal{N}) = \dim(\mathcal{M})$, por lo que el caso genérico ocurre sii $\Delta_\pm$ es invertible.*

Demostración. Si $\xi \in Ker(\Delta_+)$ entonces por el lema anterior tenemos que $u_+^1(n)\xi = o(n), \ n \to -\infty$, como $u_+^1(n)\xi$ es solución de (2.5),para $z = 1$,se tiene de el lema 5.3 que es acotada en $-\infty$, y como $u_+^1(n)\xi = \xi + o(1), \ n \to +\infty$, es acotada en $+\infty$, por lo cual $\xi \in \mathcal{N}$. Si $\xi \in \mathcal{N}$ entonces por el Lema 5.5,

$$0 = \lim_{n\to-\infty} \frac{u_+^1(n)\xi}{n} = \Delta_+\xi$$

de donde $\xi \in Ker(\Delta_+)$. La prueba de $Ker(\Delta_-) = M$ es analoga y $\dim(N) = \dim(M)$ se sigue de (5.3). □

Con lo anterior podemos estudiar la continuidad de los coeficientes de dispersion en el caso excepcional y el generico.

6. Limite a bajas energias de la matriz de dispersión para el caso genérico.

Teorema 6.1. *Supongamos que el caso genérico ocurre, es decir* $\mathcal{N} = \{0\}$*, entonces*

$$T_+(z) = \frac{z^2-1}{z}(\Delta_+^{-1} + o(1)),\ T_-(z) = \frac{z^2-1}{z}(\Delta_-^{-1} + o(1)),\ z \to 1 \,\text{en}\ \overline{\mathbb{D}^2},$$

$$R_+(z) = \mathbf{1} + o(1),\quad R_-(z) = \mathbf{1} + o(1),\ z \to 1 \,\text{en}\ \mathbb{S}^1.$$

Demostración. Como Δ_+ es invertible y por (5.4) tenemos que existe $U \subset \overline{\mathbb{D}^2}$ vecindad de 1 tal que para cuaquier $z \in U \setminus \{1\}$, $\frac{1-z^2}{z} M_+(z)$ es invertible es decir $T_+(z)$ existe para $z \in U$ y,

$$\lim_{z\to 1} \frac{z}{z^2-1} T_+(z) = \Delta_+^{-1}.$$

De donde se obtiene el resultado deseado para $T_+(z)$, para $T_-(z)$ como Δ_- es invertible por (5.5) para cuaquier $z \in U \setminus \{1\}$, $M_-(z)$ es invertible luego por (4.19) y (5.3) se tiene que

$$T_-(z) = T_+(\bar{z})^* = \frac{z^2-1}{z}((\Delta_+^{-1})^* + o(1)) = \frac{z^2-1}{z}(\Delta_-^{-1} + o(1)).$$

Por definición y (4.6) se tiene para $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1, -1\}$ que

$$R_+(z) = -N_+(z)T_+(z) = W\left(u_-^{\frac{1}{z}}, u_+^z\right)\Delta_+^{-1} + \frac{z}{z+1}o(1),$$

de donde por la definición de Δ_+ y la continuidad de $u_-^z(1)$ y $u_+^z(1)$ se tiene que

$$R_+(z) \to \mathbf{1},\ z \to 1,$$

es analogo para $R_-(z)$. □

El teorema anterior muestra que si el caso genérico ocurre entonces $T_\pm(1) = 0$, la siguiente sección muestra que el regreso tambien es cierto.

7. Estimaciones para el caso exepcional.

Antes de comenzar el análisis de los coeficientes de disperción cuando $z \to 1$ suponiendo el caso excepcional, estableceremos unas estimaciones que seran necesarias para dicho análisis.

7.1. Estimaciones Preliminares

Cuando el caso excepcional ocurre tenemos que $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ tiene al menos un elmento no trivial. Y se puede definir un mapeo natural entre ellos.

Definición 7.1. *Sea $\xi \in \mathcal{N}$, puesto que $u_+^1\xi$ es una solución acotada en $-\infty$ por el Lema 5.3 y la Observación 5.4 converge cuando $n \to -\infty$. Asi definimos $\Gamma\xi$ como*

$$\Gamma\xi = \lim_{n \to -\infty} u_+^1(n)\xi.$$

Lema 7.2. Γ *es una biyeccion entre $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$.*

Demostración. Sea $\xi \in \mathcal{N}$ y $\chi = \Gamma\xi$, notemos que

$$\lim_{n \to -\infty} u_+^1(n)\xi - u_-^1(n)\chi = 0$$

de donde por la observacion 5.4 tenemos que

$$u_+^1(n)\xi = u_-^1(n)\chi, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{7.1}$$

De esto ultimo se deduce que $u_-^1\chi$ es acotada por lo cual $\chi \in \mathcal{M}$ que prueba que $Im(\Gamma) \subset \mathcal{M}$ y tambien prueba la inyectividad. Para la suprayectividad sea $\chi \in \mathcal{M}$ y $\xi = \lim_{n\to\infty} u_-^1(n)\chi$ análogo al procedimiento anterior podemos ver que $u_+^1(n)\xi = u_-^1(n)\chi, n \in \mathbb{Z}$ de donde $\Gamma\xi = \chi$. □

Observación 7.3. *De la ecuacion* (7.1) *podemos encontrar una expresión para* Γ *, tomando $n \in \mathbb{Z}$ tal que $u_-^1(n)$ sea invertible por* (7.1) *se tendria que*

$$\Gamma = (u_-^1(n)^{-1}u_+^1(n))\big|_{\mathcal{N}}. \tag{7.2}$$

Sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u_+^1(n)$ es invertible (pues $u_+^1(n) \to \mathbf{1}, \ n \to +\infty$), sin perdida de generalidad supondremos que $u_+^1(1)$ es invertible y denotaremos

$$\Omega := u_+^1(1)^{-1}u_-^1(1), \tag{7.3}$$

notando que por lo antes mencionado

$$\Omega\big|_M = \Gamma^{-1}.$$

Notación 7.4. *Para $z \in \overline{\mathbb{D}^2} \setminus \{0\}$ denotamos*

$$W(z) := W(u_-^{1/\bar{z}}, u_+^z).$$

Como ya mencionamos antes queremos estudiar $W(z) \to \Delta_+$ cuando $z \to 1$ en la parte no invertible de Δ_+, para asi conseguir una expresión para $W(z)^{-1}$ cuando $z \to 1$ que nos permitira conocer $T_+(z)$ ya que de la definición de T_+ tenemos que

$$T_+(z) = \frac{z^2 - 1}{z} W(z)^{-1}. \tag{7.4}$$

siempre y cuando $W(z)^{-1}$ sea invertible.

Para lo anterior las siguientes funciones que definimos seran relevantes.

Notación 7.5. *Para $z \in \mathbb{D}^1 \setminus \{0\}$ detonamos*

$$F(z) := u_+^1(0)^* u_+^z(1) - u_+^1(1)^* u_+^z(0), \tag{7.5}$$

$$G(z) := u_-^{1/\bar{z}}(0)^* u_+^1(1) - u_-^{1/\bar{z}}(1)^* u_+^1(0). \tag{7.6}$$

Estan funciones son importantes ya que por el siguiente Lema 7.6, $W(z)$ se puede escribir en terminos de ellas y además son el wronskiano de una solución particular que definiremos a continuación.

Lema 7.6. *Para $z \in \mathbb{D}^1 \setminus \{0\}$ se tiene que*

$$W(z) = u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} F(z) + G(z) u_+^1(1)^{-1} u_+^z(1).$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{D}^1 \setminus \{0\}$ de la definición, calculando el wronskiano en $n = 1$, tenemos que

$$W(z) = u_-^{1/\bar{z}}(0)^* u_+^z(1) - u_-^{1/\bar{z}}(1)^* u_+^z(0), \tag{7.7}$$

ademas ya que

$$\begin{aligned} W(u_+^1, u_+^1)(n) &= (\mathbf{1} + o(1))(\mathbf{1} + o(1)) - (\mathbf{1} + o(1))(\mathbf{1} + o(1)),\ n \to \infty \\ &= o(1),\ n \to \infty. \end{aligned}$$

tomando limite $n \to \infty$, y recordando que por la observación 2.6 el wronskiano es constante, tenemos que

$$0 = W(u_+^1, u_+^1)(1) = u_+^1(0)^* u_+^1(1) - u_+^1(1)^* u_+^1(0),$$

y por la observación 7.3, $u_+^1(1)$ es invertible entonces

$$(u_+^1(1)^*)^{-1} u_+^1(0)^* - u_+^1(0) u_+^1(1)^{-1} = 0,$$

de donde

$$u_-^{1/\bar{z}}(1)^* \left((u_+^1(1)^*)^{-1} u_+^1(0)^* - u_+^1(0) u_+^1(1)^{-1} \right) u_+^z(1) = 0,$$

sumando la anterior ecuación a (7.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
W(z) &= u_-^{1/\bar{z}}(0)^* u_+^z(1) - u_-^{1/\bar{z}}(1)^* u_+^z(0) \\
&\quad + u_-^{1/\bar{z}}(1)^* \left((u_+^1(1)^*)^{-1} u_+^1(0)^* - u_+^1(0) u_+^1(1)^{-1} \right) u_+^z(1) \\
&= u_-^{1/\bar{z}}(1)^* \left(-u_+^z(0) + (u_+^1(1)^*)^{-1} u_+^1(0)^* u_+^z(1) \right) \\
&\quad + \left(-u_-^{1/\bar{z}}(1)^* u_+^1(0) u_+^1(1)^{-1} + u_-^z(0)^* \right) u_+^z(1) \\
&= u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} \left(-u_+^1(1)^* u_+^z(0) + u_+^1(0)^* u_+^z(1) \right) \\
&\quad + \left(-u_-^{1/\bar{z}}(1)^* u_+^1(0) + u_-^{1/\bar{z}}(0)^* u_+^1(1) \right) u_+^1(1)^{-1} u_+^z(1) \\
&= u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} F(z) + G(z) u_+^1(1)^{-1} u_+^z(1),
\end{aligned}$$

como se queria probar. $\square$

Definición 7.7. *Para $z \in \mathbb{D}^1 \setminus \{0\}$ definimos $\Phi^z \in (M_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ como la sucesión que es solución de (2.5) y tal que $\Phi^z(0) = u_+^1(0)$ y $\Phi^z(1) = u_+^1(1)$, en particular, notemos que $\Phi^1(n) = u_+^1(n),\ n \in \mathbb{Z}$.*

De la definición anterior es facil ver que

$$F(z) = W(\Phi^{\bar{z}}, u_+^z), \tag{7.8}$$

$$G(z) = W(u_-^{1/\bar{z}}, \Phi^z). \tag{7.9}$$

Con esta escritura queda mas claro que F estudia el comportamiento asintótico de la solución Φ^z en $n \to \infty$ y G en $n \to -\infty$.

El siguiente lema que es variación de parametros nos ayuda a calcular de manera explicita a las funciones F y G.

Lema 7.8. *Sea $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0, 1, -1\}$ entonces para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\Phi^z(n) = \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} c_1 + z^{-n+1} \frac{z^{2n-1} + 1}{z + 1} c_2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z^{n-j} - z^{j-n}}{z - z^{-1}} V(j) \Phi^z(j), \tag{7.10}$$

y para $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

$$\Phi^z(n) = \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} c_1 + z^n \frac{z^{-2n+1} + 1}{z + 1} c_2 + \sum_{j=n+1}^{0} \frac{z^{n-j} - z^{j-n}}{z - z^{-1}} V(j) \Phi^z(j), \tag{7.11}$$

donde $c_1 := u_+^1(1) - u_+^1(0)$ y $c_2 := u_+^1(0)$.

Demostración. Sean

$$S_1(n) := \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} \mathbf{1}$$

$$S_2(n) := \frac{z^{-n+1} + z^n}{z+1}\mathbf{1}$$

notemos que son soluciones de (2.4) ademas $S_1(0) = 0, S_1(1) = \mathbf{1}$ y $S_2(0) = \mathbf{1}, S_2(1) = \mathbf{1}$ entonces por el Teorema A.2 ($A = -(z + z^{-1})\mathbf{1}, B(n) = -V(n), E(n) = \Phi^z(n), C = u_+^1(0), D = u_+^1(1)$) se da (7.10) y (7.11). Ademas notemos que por (5.2) se tiene que

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{j=1}^{\infty} V(j)u_+^1(j) = \sum_{j=1}^{\infty} V(j)\Phi^1(j), \\ c_2 &= \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{\infty} jV(j)u_+^1(j) = \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{\infty} jV(j)\Phi^1(j). \end{aligned} \tag{7.12}$$

□

Con el fin de obtener una expresión explicita de F y G multipliquemos (7.10) por z^n para obtener

$$z^n\Phi^z(n) = \frac{z^{2n} - 1}{z - z^{-1}}c_1 + \frac{z^{2n} + z}{z+1}c_2 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z^{2(n-j)} - 1}{z - z^{-1}} V(j)z^j\Phi^z(j), \tag{7.13}$$

Entonces tenemos que

$$\|z^n\Phi^z(n)\| \le C\left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} \|V(j)\|\|z^j\Phi^z(j)\|\right),$$

donde C es una constante que no depende de n. Entonces por la desigualdad de Gronwall (Lema A.3, $\alpha = C$, $u_n = \|z^n\Phi^z(n)\|$, $w_n = C\|V(n)\|$) obtenemos que para $n \in \mathbb{N}$,

$$\|z^n\Phi^z(n)\| \le C\exp(\sum_{l=1}^{n-1} C\|V(n)\|) \le C\exp\left(\sum_{l=1}^{\infty} C\|V(n)\|\right). \tag{7.14}$$

Por lo tanto $z^n\Phi^z(n)$ es acotada para $n \in \mathbb{N}$. Utilizando esto en (7.13) para $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ tal que $|z| < 1$ tenemos que

$$z^n\Phi^z(n) = -\frac{1}{z - z^{-1}}c_1 + \frac{z}{z+1}c_2 + \frac{1}{z - z^{-1}}\sum_{j=1}^{\infty} V(j)z^j\Phi^z(j) + o(1), \qquad n \to \infty. \tag{7.15}$$

y analogamente tenemos que $z^{-n}\Phi^z(n)$ es acotada para $n \in \mathbb{Z}^-$. Entonces para $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ tal que $|z| < 1$ se tiene que

$$z^{-n}\Phi^z(n) = \frac{1}{z - z^{-1}}c_1 + \frac{1}{z+1}c_2 + \frac{1}{z - z^{-1}}\sum_{j=-\infty}^{0} V(j)z^{-j}\Phi^z(j) + o(1), \qquad n \to -\infty. \tag{7.16}$$

Ocupando las ecuaciones (3.6) ,(7.8) podemos calcular F y G de la siguiente manera

$$F(z) = W(\Phi^{\bar{z}}, u_+^z)(n) = \Phi^{\bar{z}}(n)^* z^{n+1}(\mathbf{1} + o(1)) - \Phi^{\bar{z}}(n+1)^* z^n(\mathbf{1} + o(1))$$

$$= (\bar{z}^n\Phi^{\bar{z}}(n))^* z(\mathbf{1} + o(1)) - (\bar{z}^{n+1}\Phi^{\bar{z}}(n+1))^* z^{-1}(\mathbf{1} + o(1)), \qquad n \to \infty.$$

Tomando el limite y ocupando (7.15) tenemos que

$$\begin{aligned}F(z) =& -\frac{z}{z-z^{-1}}c_1^* + \frac{z^2}{z+1}c_2^* + \frac{z}{z-z^{-1}}\sum_{j=1}^{\infty} z^j \Phi^z(j)^* V(j)\\ &+\frac{z^{-1}}{z-z^{-1}}c_1^* - \frac{1}{z+1}c_2^* - \frac{z^{-1}}{z-z^{-1}}\sum_{j=1}^{\infty} z^j \Phi^z(j)^* V(j)\\ &= -c_1^* + (z-1)c_2^* + \sum_{j=1}^{\infty} z^j \Phi^z(j)^* V(j),\ |z|<1.\end{aligned} \tag{7.17}$$

Analogamente obtenemos para G la siguiente expresion

$$G(z) = W(u^{1/\bar{z}}, \Phi^z)(n) = z^{-n}(\mathbf{1}+o(1))\Phi^z(n+1) - z^{-n-1}(\mathbf{1}+o(1))\Phi^z(n)$$

$$= z(\mathbf{1}+o(1))z^{-(n+1)}\Phi^z(n+1) - z^{-1}(\mathbf{1}+o(1))z^{-n}\Phi^z(n), \qquad n \to -\infty.$$

Tomando el limite

$$\begin{aligned}G(z) =& \frac{z}{z-z^{-1}}c_1 + \frac{z}{z+1}c_2 + \frac{z}{z-z^{-1}}\sum_{j=-\infty}^{0} V(j) z^{-j}\Phi^z(j)\\ &-\frac{z^{-1}}{z-z^{-1}}c_1 - \frac{z^{-1}}{z+1}c_2 - \frac{z^{-1}}{z-z^{-1}}\sum_{j=-\infty}^{0} V(j) z^{-j}\Phi^z(j)\\ &= c_1 + \frac{z-1}{z}c_2 + \sum_{j=-\infty}^{0} V(j) z^{-j}\Phi^z(j),\ |z|<1.\end{aligned} \tag{7.18}$$

Por la ecuación (7.17) podemos escribir a F como

$$F(z) = -c_1^* + (z-1)c_2^* + A_1(z) + A_2(z),\ |z|<1. \tag{7.19}$$

donde

$$A_1(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j(\Phi^z(j) - \Phi^1(j))^* V(j), \qquad A_2(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j \Phi^1(j)^* V(j).$$

Y podemos obtener una expresión similar para G ocupando (7.18). Con el fin de estimar $A_1(z), z \to 1$, necesitamos una estimación para $z^j(\Phi^z(j) - \Phi^1(j)), z \to 1$ que es la que desarrollamos a continuación en los siguientes lemas.

Lema 7.9. *Existe $U \subset \mathbb{D}^2$ vecindad de 1 y $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\forall z \in U \setminus \{1\} \forall n \in \mathbb{N} \left(\left\| \frac{\Phi^z(n) - \Phi^1(n)}{z-1} \right\| \le Cn|z|^{-n} \right), \tag{7.20}$$

$$\forall z \in U \setminus \{1\} \forall n \in \mathbb{Z}^- \left(\|\Phi^z(n) - \Phi^1(n)\| \le |z|^n |n| C \right). \tag{7.21}$$

Además

$$\forall n \in \mathbb{Z} \left(z^{|n|}(\Phi^z(n) - \Phi^1(n)) = o(z-1),\ z \to 1 \right), \tag{7.22}$$

Demostración. A traves de la prueba C denotara una constante que no depende de z y n.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{D}^1 \setminus \{1, -1, 0\}$, definamos

$$d_1(n) := \sum_{j=1}^{n-1} V(j)\Phi^1(n),$$

$$d_2(n) := \sum_{j=n}^{\infty} V(j)\Phi^1(n)$$

y como $\Phi^1 = u_+^1$ es acotada en $\mathbb{N}$ tenemos que

$$n\|d_2(n)\| \leq \sum_{j=n}^{\infty} n\|V(j)\|\|\Phi^1(n)\| < C\sum_{j=n}^{\infty} j\|V(j)\| \leq C\sum_{j=1}^{\infty} j\|V(j)\| = C. \tag{7.23}$$

Definamos tambien

$$\begin{aligned} p_{1,n}(z) &:= z^{2n-1} + 1 - (z+1)z^{n-1} = (z-1)(z^n - 1)(z^{n-2} + ... + 1) \\ p_{2,n}(z) &:= \sum_{l=1}^{n} z^{2(l-1)} - nz^{n-1} = (z-1)q_n(z), \end{aligned}$$

$$q_n(z) := \begin{cases} \sum_{l=1}^{n/2-1} l(z+1)z^{2(l-1)}(z^{2(n-2l)} - 1) + (n/2)z^{n-2}(z-1), & n \text{ es par} \\ \sum_{l=1}^{(n-1)/2} l(z+1)z^{2(l-1)}(z^{2(n-2l)} - 1), & n \text{ es impar} \end{cases}$$

Notemos que de la definición se tiene que

$$\begin{aligned} |p_{1,n}(z)| &\leq |z|^{2n-1} + 1 + |z| + 1 \leq 4. \\ |p_{2,n}(z)| &\leq \sum_{l=1}^{n} |z|^{2(l-1)} + n|z|^{n-1} \leq 2n. \end{aligned} \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned} |q_n(z)| &\leq \sum_{l=1}^{n/2-1} l|z+1||z|^{2(l-1)}(|z|^{2(n-2l)} + 1) + (n/2)|z|^{n-2}(|z|+1) \\ &\leq \sum_{l=1}^{n/2-1} 4l + n = n(n/2) \leq n(n-1), \end{aligned}$$

y si n es impar

$$\begin{aligned} |q_n(z)| &\leq \sum_{l=1}^{(n-1)/2} l|z+1||z|^{2(l-1)}(|z|^{2(n-2l)} + 1) \\ &\leq \sum_{l=1}^{(n-1)/2} 4l = (n-1)((n-1)/2 + 1) \leq n(n-1), \end{aligned}$$

de donde obtenemos,

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_{1,n}(z)}{z-1}\right| &= |z^n-1||z^{n-2}+...+1| \leq 2(n-1)\\ \left|\frac{p_{2,n}(z)}{z-1}\right| &= |q_n(z)| \leq n(n-1).\end{aligned} \tag{7.25}$$

y ademas para $1 \leq j \leq n-1$ se tiene

$$\begin{aligned}z^j p_{2,n-j}(z) - p_{2,n}(z) &= \sum_{l=1}^{n-j} z^{2(l-1)+j} - (n-j)z^{n-1} - \sum_{l=1}^{n} z^{2(l-1)} + nz^{n-1}\\ &= \sum_{l=1}^{n-j}\left(z^{2(l-1)+j} - z^{2(l-1)}\right) - \sum_{l=n-j+1}^{n} z^{2(l-1)} + jz^{n-1}\\ &= (z^j-1)\sum_{l=1}^{n-j} z^{2(l-1)} - \sum_{l=n-j+1}^{n}\left(z^{2(l-1)} - z^{n-1}\right)\\ &= (z-1)\sum_{i=0}^{j-1} z^i \sum_{l=1}^{n-j} z^{2(l-1)} - \sum_{l=n-j+1}^{n} z^{\text{mín}(2(l-1),n-1)}(-1)^{t(l,n)}\left(z^{|2(l-1)-n+1|}-1\right)\\ &= (z-1)\sum_{i=0}^{j-1} z^i \sum_{l=1}^{n-j} z^{2(l-1)} - (z-1)\sum_{l=n-j+1}^{n}(-1)^{t(l,n)} z^{\text{mín}(2(l-1),n-1)} \sum_{i=0}^{|2(l-1)-n|} z^i,\end{aligned}$$

asi para $1 \leq j \leq n-1$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{z^j p_{2,n-j}(z) - p_{2,n}(z)}{z-1}\right| &\leq j(n-j) + \sum_{l=n-j+1}^{n} |2(l-1)-n+1|\\ &\leq j(n-j) + jn \leq 2jn\end{aligned} \tag{7.26}$$

la ultima desigualdad se da ya que $1 \leq l \leq n$ implica $-n \leq 2(l-1)-n+1 \leq n$.

Por ultimo para $i \in \{1,2\}$ es claro que

$$p_{i,n}(z) = o(z-1),\ z \to 1. \tag{7.27}$$

Por (5.2) se tiene que

$$\begin{aligned}\Phi^1(n) &= \mathbf{1} - \sum_{j=n}^{\infty}(j-n)V(j)\Phi^1(j)\\ &= \mathbf{1} - \sum_{j=n}^{\infty} jV(j)\Phi^1(j) + n\sum_{j=n}^{\infty} V(j)\Phi^1(j)\\ &= \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{\infty} jV(j)\Phi^1(j) + n\sum_{j=n}^{\infty} V(j)\Phi^1(j) + \sum_{j=1}^{n-1} jV(j)\Phi^1(j)\\ &= c_2 + nd_2(n) - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}V(j)\Phi^1(j) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(j + \frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}\right)V(j)\Phi^1(j),\end{aligned}$$

donde para la ultima igualdad estamos ocupando (7.12), y por (7.10) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\Phi^z(n) &= z^{-n+1}\frac{z^{2n-1}+1}{z+1}c_2 + \frac{z^n - z^{-n}}{z-z^{-1}}c_1 - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}V(j)\Phi^z(j),\\
&= z^{-n+1}\frac{z^{2n-1}+1}{z+1}c_2 + \frac{z^n - z^{-n}}{z-z^{-1}}d_1(n) + \frac{z^n - z^{-n}}{z-z^{-1}}d_2(n) - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}V(j)\Phi^z(j)\\
&= z^{-n+1}\frac{z^{2n-1}+1}{z+1}c_2 + \frac{z^n - z^{-n}}{z-z^{-1}}d_2(n)\\
&- \sum_{j=1}^{n-1}\frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}V(j)\Phi^z(j) + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}}V(j)\Phi^1(j),
\end{aligned}
$$

por lo que para $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0, 1, -1\}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Phi^z(n) - \Phi^1(n) &= c_2\left(z^{-n+1}\frac{z^{2n-1}+1}{z+1} - 1\right) - d_2(n)\left(n - \frac{z^n - z^{-n}}{z-z^{-1}}\right)\\
&- \sum_{j=1}^{n-1}\frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}V(j)(\Phi^z(j) - \Phi^1(j))\\
&- \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}} - (n-j) - \frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}} + n\right)V(j)\Phi^1(j)\\
&= c_2\frac{z^{-n+1}}{z+1}\left(z^{2n-1} + 1 - z^{n-1}(z+1)\right)\\
&- d_2(n)z^{-n+1}\left(z^{n-1}n - \frac{z^{2n}-1}{z^2-1}\right)\\
&- \sum_{j=1}^{n-1} z^{j-n+1}\frac{z^{2(n-j)}-1}{z^2-1}V(j)(\Phi^z(j) - \Phi^1(j))\\
&- \sum_{j=1}^{n-1} z^{j-n+1}\left(\frac{z^{2(n-j)}-1}{z^2-1} - z^{n-j+1}(n-j)\right) - z^{-n+1}\left(\frac{z^{2n}-1}{z^2-1} - nz^{n-1}\right)V(j)\Phi^1(j)\\
&= c_2\frac{z^{-n+1}}{z+1}p_{1,n}(z) + d_2(n)z^{-n+1}p_{2,n}(z)\\
&- \sum_{j=1}^{n-1} z^{j-n+1}\left(\sum_{l=0}^{n-j-1} z^{2l}\right)V(j)(\Phi^z(j) - \Phi^1(j))\\
&- \sum_{j=1}^{n-1} z^{-n+1}\left(z^j p_{2,n-j}(z) - p_{2,n}(z)\right)V(j)\Phi^1(j),
\end{aligned}
$$

entonces

$$\begin{aligned} z^n(\Phi^z(n)-\Phi^1(n)) &= c_2\frac{z}{z+1}p_{1,n}(z)+d_2(n)zp_{2,n}(z) \\ &- \sum_{j=1}^{n-1} z\left(\sum_{l=0}^{n-j-1} z^{2l}\right)V(j)z^j(\Phi^z(j)-\Phi^1(j)) \\ &- \sum_{j=1}^{n-1} z\left(z^j p_{2,n-j}(z)-p_{2,n}(z)\right)V(j)\Phi^1(j) \end{aligned} \tag{7.28}$$

tomando una vecindad $U \subset \mathbb{D}^1$ de 1 tal que para $z \in U$

$$\left|\frac{1}{1+z}\right| < 1$$

se tendria por (7.28), (7.23), (7.25), (7.26) y que Φ^1 es acotada en $\mathbb{N}$ que, para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in U \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{z^n(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))}{z-1}\right\| &\le c_2\left|\frac{p_{1,n}(z)}{z-1}\right| + \|d_2(n)\|\left|\frac{p_{2,n}(z)}{z-1}\right| \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\|V(j)\|\left\|\frac{z^j(\Phi^z(j)-\Phi^1(j))}{z-1}\right\| \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{z^j p_{2,n-j(z)}-p_{2,n}(z)}{z-1}\right|\|V(j)\|\|\Phi^1(j)\| \\ &\le Cn + n(n-1)\|d_2(n)\| \\ &+ n\sum_{j=1}^{n-1}\|V(j)\|\left\|\frac{z^j(\Phi^z(j)-\Phi^1(j))}{z-1}\right\| + nC\sum_{j=1}^{n-1} j\|V(j)\| \\ &\le n\left(C+\sum_{j=1}^{n-1}\|V(j)\|\left\|\frac{z^j(\Phi^z(j)-\Phi^1(j))}{z-1}\right\|\right). \end{aligned}$$

de donde por el lema de Gronwall(teorema A.3 $u_n = \frac{\|z^n(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))\|}{(z-1)n}$, $w_n = n\|V(n)\|$ y $\alpha = C$) obtenemos que para $n \in \mathbb{N}$ y $z \in U \setminus \{1\}$

$$\left\|\frac{z^n(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))}{z-1}\right\| \le nC\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\|V(j)\|\right).$$

que es (7.20). Ademas ocupando inducción sobre n, (7.28) y (7.27) tenemos que para $n \in \mathbb{N}$

$$z^n(\Phi^z(n)-\Phi^1(n)) = o(z-1),\ z \to 1.$$

La prueba de la segunda parte es analoga, sea $n \in \mathbb{Z}^-$ y $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0,1,-1\}$ entonces por (5.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi^1(n) &= \mathbf{1} - \sum_{j=n+1}^{\infty} (j-n)V(j)\Phi^1(j) \\
&= \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{\infty}(j-n)V(j)\Phi^1(j) - \sum_{j=n+1}^{0} (j-n)V(j)\Phi^1(j) \\
&= \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{\infty} jV(j)\Phi^1(j) + n\sum_{j=1}^{\infty} V(j)\Phi^1(j) - \sum_{j=n+1}^{0} (j-n)V(j)\Phi^1(j) \\
&= c_2 + nc_1 - \sum_{j=n+1}^{0} (j-n)V(j)\Phi^1(j) \\
&= c_2 + nc_1 + \sum_{j=n+1}^{0} \frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}V(j)\Phi^1(j) - \sum_{j=n+1}^{0} \left(j-n+\frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}\right)V(j)\Phi^1(j).
\end{aligned}$$

y por (7.11) tenemos que

$$\Phi^z(n) = \frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}}c_1 + z^n\frac{z^{-2n+1}+1}{z+1}c_2 + \sum_{j=n+1}^{0} \frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}V(j)\Phi^z(j),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\Phi^z(n) - \Phi^1(n) = &\left(z^n\frac{z^{-2n+1}+1}{z+1} - 1\right)c_2 + \left(\frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}} - n\right)c_1 \\
&+ \sum_{j=n+1}^{0} \frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}V(j)(\Phi^z(j)-\Phi^1(j)) \\
&+ \sum_{j=n+1}^{0} \left(j-n+\frac{z^{n-j}-z^{j-n}}{z-z^{-1}}\right)V(j)\Phi^1(j) \\
= &\frac{z^n}{z+1}p_{1,-n+1}(z)c_2 - z^{n+1}p_{2,-n}(z)c_1 \\
&- \sum_{j=n+1}^{0} z^{n-j+1}\left(\sum_{l=0}^{j-n-1} z^{2l}\right)V(j)(\Phi^z(j)-\Phi^1(j)) \\
&- \sum_{j=n+1}^{0} z^{n-j+1}p_{2,j-n}(z)V(j)\Phi^1(j).
\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
z^{-n}(\Phi^z(n)-\Phi^1(n)) = {} & \frac{1}{z+1}p_{1,-n+1}(z)c_2 - zp_{2,-n}(z)c_1 \\
& - \sum_{j=n+1}^{0} z\left(\sum_{l=0}^{j-n-1} z^{2l}\right)V(j)z^{-j}(\Phi^z(j)-\Phi^1(j)) \\
& - \sum_{j=n+1}^{0} z^{-j+1}p_{2,j-n}(z)V(j)\Phi^1(j).
\end{aligned} \tag{7.29}
$$

entonces para $z \in U \setminus \{1\}$ y $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ ya que $\Phi^1(j) < C|j|$ para $j \in \mathbb{Z}^-$ y (7.24) se tiene que

$$
\|z^{-n}(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))\| \leq nC + n\sum_{j=n+1}^{0} \|V(j)\|\|z^{-j}(\Phi^z(j)-\Phi^1(j))\|,
$$

Luego por el lema de Gronwall(teorema A.3 $u_n = \frac{\|z^{-n}(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))\|}{(1-z)n}$, $w_n = \|nV(n)\|$ y $\alpha = C$) se tiene que para $n \in \mathbb{Z}^-$ y $z \in U \setminus \{1\}$

$$
\|z^{-n}(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))\| \leq nC\exp\left(\sum_{j=-\infty}^{0} jV(j)\right)
$$

Ademas ocupando inducción sobre n, (7.29) y (7.27) tenemos para $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

$$
\|z^{-n}(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))\| = o(z-1),\ z \to 1.
$$

Lo que concluye la prueba. □

Lema 7.10. *Sea $\xi \in \mathcal{N}$ entonces existe $U \subset \mathbb{D}^2$ vecindad de 1 y $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$
\forall z \in U \setminus \{1\} \forall n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\left(\left\|\frac{(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))\,\xi}{z-1}\right\| \leq C|z|^n|n|\right), \tag{7.30}
$$

ademas

$$
\forall n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}\left(z^{-n}(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))\xi = o(z-1),\ z \to 1\right). \tag{7.31}
$$

Demostración. Sea $\xi \in \mathcal{N}$, notemos que por el Lema 5.7, (5.6) y (7.12) se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 = \Delta_+\xi &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} V(j)\Phi^1(j)\xi \\
&= \sum_{j=-\infty}^{0} V(j)\Phi^1(j)\xi + \sum_{j=1}^{\infty} V(j)\Phi^1(j)\xi \\
&= \sum_{j=-\infty}^{0} V(j)\Phi^1(j)\xi + c_1\xi
\end{aligned}
$$

de donde

$$c_1\xi = -\sum_{j=-\infty}^{0} V(j)\Phi^1(j)\xi. \tag{7.32}$$

Sea $z \in \mathbb{D}^1 \setminus \{-1,1,0\}$ y $n \in \mathbb{Z}^-$ entonces por (7.29) y (7.32) se tiene que

$$\begin{aligned}
z^{-n}\left(\Phi^z(j) - \Phi^1(j)\right)\xi &= \frac{1}{z+1}p_{1,-n+1}(z)c_2\xi - zp_{2,-n}(z)c_1\xi \\
&- \sum_{j=n+1}^{0} z\left(\sum_{l=0}^{j-n-1} z^{2l}\right) V(j)z^{-j}(\Phi^z(j) - \Phi^1(j))\xi \\
&- \sum_{j=n+1}^{0} z^{-j+1}p_{2,j-n}(z)V(j)\Phi^1(j)\xi \\
&= \frac{1}{z+1}p_{1,-n+1}(z)c_2\xi + zp_{2,-n}(z)\sum_{j=-\infty}^{n} V(j)\Phi^1(j)\xi \\
&- \sum_{j=n+1}^{0} \left(z\sum_{l=1}^{j-n} z^{2(l-1)}\right) V(j)z^{-j}(\Phi^z(j) - \Phi^1(j))\xi \\
&- \sum_{j=n+1}^{0} z(z^{-j}p_{2,j-n}(z) - p_{2,-n}(z))V(j)\Phi^1(j)\xi,
\end{aligned}$$

Sea $U \subset \mathbb{D}^2$ vecindad de 1 tal que si $z \in U$ entonces

$$\left|\frac{1}{1+z}\right| < 1,$$

como $\|\Phi^1(j)\xi\| < C$ para $n \in \mathbb{Z}$, por (7.25), (7.26) y lo anterior se tiene para $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ y

$z \in U$ que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{z^{-n}\left(\Phi^z(n)-\Phi^1(n)\right)\xi}{z-1} \right\| &\leq C \left| \frac{p_{1,-n+1}(z)}{z-1} \right| + C \left| \frac{p_{2,-n}(z)}{z-1} \right| \sum_{j=-\infty}^{n} \|V(j)\| \\
&+ |n| \sum_{j=n+1}^{0} \|V(j)\| \left\| \frac{z^{-j}\left(\Phi^z(j)-\Phi^1(j)\right)\xi}{z-1} \right\| \\
&+ |n| C \sum_{j=n+1}^{0} |j| \|V(j)\| \\
&\leq |n| C + C|n| \sum_{j=-\infty}^{0} |j| \|V(j)\| \\
&+ |n| \sum_{j=n+1}^{0} \|V(j)\| \left\| \frac{z^{-j}\left(\Phi^z(j)-\Phi^1(j)\right)\xi}{z-1} \right\| \\
&+ |n| C \sum_{j=-\infty}^{0} |j| \|V(j)\| \\
&\leq |n| C + |n| \sum_{j=n+1}^{0} \|V(j)\| \left\| \frac{z^{-j}\left(\Phi^z(j)-\Phi^1(j)\right)\xi}{z-1} \right\|.
\end{aligned}$$

y por el lema de Gronwall (Teorema A.3 $u_n = \frac{\|z^{-n}(\Phi^z(n)-\Phi^1(n))\xi\|}{(z-1)n}$, $w_n = \|nV(n)\|$ y $\alpha = C$) se tiene que para $z \in U \setminus \{1\}$ y $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ que

$$\left\| z^{-n} \frac{\left(\Phi^z(n)-\Phi^1(n)\right)\xi}{z-1} \right\| \leq |n| C \exp\left(\sum_{j=-\infty}^{0} |j| \|V(j)\| \right).$$

(7.31) se sigue directamente de (7.22). $\square$

7.2. Resultado principal de la sección (Estimación asintotica de F(z) y G(z))

En esta sección desarrolamos las estimaciones para F y G. Antes de comenzar probamos el siguiente Lema.

Lema 7.11. *Para $\xi \in \mathcal{N}$ se tiene que*

$$\Gamma\xi = \xi - \sum_{j=-\infty}^{\infty} jV(j)u_+^1(j)\xi. \tag{7.33}$$

Demostración. Sea $\xi \in \mathcal{N}$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{j=n+1}^{\infty}(j-n)V(j)u_+^1(j)\xi &= \sum_{j=n+1}^{\infty} jV(j)u_+^1(j)\xi - n\sum_{j=n+1}^{\infty} V(j)u_+^1(j)\xi\\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} jV(j)u_+^1(j)\xi - n\left(\Delta_+ - \sum_{j=-\infty}^{n} V(j)u_+^1(j)\right)\xi\\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} jV(j)u_+^1(j)\xi + n\sum_{j=-\infty}^{n} V(j)u_+^1(j)\xi.\end{aligned}$$

en donde estamos ocupando (5.6) para la segunda igualdad y $\mathcal{N} = \ker(\Delta_+)$ para la tercera, y ya que $u_+^1(j)\xi$ es acotada, tenemos que

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \|jV(j)u_+^1(j)\xi\| \leq C\sum_{j=n+1}^{\infty} |j|\|V(j)\| < C\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|\|V(j)\|$$

y

$$\|n\sum_{j=-\infty}^{n} V(j)u_+^1(j)\xi\| \leq C\sum_{j=-\infty}^{n} |j|\|V(j)\| \to 0,\ n\to-\infty.$$

por lo cual

$$\lim_{n\to-\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}(j-n)V(j)u_+^1(j)\xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} jV(j)u_+^1(j)\xi$$

entonces usando (5.2) y la definicion de Γ tenemos que

$$\begin{aligned}\Gamma\xi = \lim_{n\to-\infty} u_+^1(n)\xi &= \xi - \lim_{n\to-\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}(j-n)V(j)u_+^1(j)\xi\\ &= \xi - \sum_{j=-\infty}^{\infty} jV(j)u_+^1(j)\xi.\end{aligned} \tag{7.34}$$

□

Proposición 7.12. *Sean $F(z)$ y $G(z)$ definidas como antes, entonces cuando $z \to 1$ (en $\mathbb{D}^2$) se tiene que*

(a) $F(z) = (z-1)\mathbf{1} + o(z-1)$,

(b) $G(z) = \Delta_+ + o(1)$.

(c) Para $\xi \in \mathcal{N}$ se tiene que

$$G(z)\xi = (z-1)\Gamma\xi + o(z-1).$$

Demostración. Durante toda la prueba $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0, 1, -1\}$. Comencemos con el inciso a). Para obtener una expresion similar a (7.19) para $|z| = 1$ notemos que (3.6) y (7.8) implican que para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
F(z) = W(\Phi^{\bar{z}}, u_+^z)(n) &= (z^{-n}\alpha_+(\bar{z})^* + z^n\beta_+(\bar{z})^* + o(1))(z^{n+1}\mathbf{1} + o(1)) \\
&- (z^{-n-1}\alpha_+(\bar{z})^* + z^{n+1}\beta_+(\bar{z})^* + o(1))(z^n\mathbf{1} + o(1)) \\
&= \left(z - \frac{1}{z}\right)\alpha_+(\bar{z})^* + o(1),\ n \to \infty,
\end{aligned}$$

donde

$$\alpha_+(z) := -\frac{1}{z - z^{-1}}c_1 + \frac{z}{z+1}c_2 + \frac{1}{z - z^{-1}}\sum_{j=1}^{\infty} z^j V(j)\Phi^z(j),$$

$$\beta_+(z) := \frac{1}{z - z^{-1}}c_1 + \frac{1}{z+1}c_2 - \frac{1}{z - z^{-1}}\sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} V(j)\Phi^z(j),$$

notemos que aqui estamos ocupando que Φ^z es acotada, que sucede cuando $|z| = 1$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
F(z) &= \left(z - z^{-1}\right)\left(-\frac{1}{z - z^{-1}}c_1^* + \frac{z}{z+1}c_2^* + \frac{1}{z - z^{-1}}\sum_{j=1}^{\infty} z^j\Phi^z(j)^*V(j)\right) \\
&= -c_1^* + (z-1)c_2^* + \sum_{j=1}^{\infty} z^j\Phi^z(j)^*V(j).
\end{aligned}$$

De lo anterior y (7.19) tenemos que para $0 < |z| \leq 1$,

$$F(z) = -c_1^* + (z-1)c_2^* + A_1(z) + A_2(z),$$

donde

$$A_1(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j(\Phi^z(j) - \Phi^1(j))^*V(j), \qquad A_2(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j\Phi^1(j)^*V(j).$$

Ocupando (7.12) escribamos $A_2(z)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
A_2(z) &= \sum_{j=1}^{\infty}\Phi^1(j)^*V(j) + (z-1)\left(\sum_{j=1}^{\infty} j\Phi^1(j)^*V(j)\right) + \mathcal{F}(z), \\
&= c_1^* + (z-1)(\mathbf{1} - c_2^*) + \mathcal{F}(z),
\end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{j=1}^{\infty}(z^j - 1 - (z-1)j)\Phi^1(j)^*V(j),$$

que como $\Phi^1(j)^*$ es acotada, se cumple lo siguiente

$$\mathcal{F}(z) = o(z-1),\ z \to 1.$$

Además por (7.20) y (7.22), $A_1(z) = o(z-1),\ z \to 1$. Juntando todo lo anterior tenemos el inciso a).

Para el inciso b) procedemos de manera analoga. Si $|z| = 1$ entonces por (7.9) y (7.11) se tiene para $n \in \mathbb{Z}^-$,

$$G(z) = W(u_-^{1/\bar{z}}, \Phi^z)(n) = z^{-n}(\mathbf{1} + o(1))(z^{n+1}\alpha_-(z) + z^{-(n+1)}\beta_-(z) + o(1))$$

$$- z^{-(n+1)}(\mathbf{1} + o(1))(z^n\alpha_-(z) + z^{-n}\beta_-(z) + o(1))$$

$$= \left(z - z^{-1}\right)\alpha_-(z) + o(1),\ n \to \infty,$$

donde

$$\alpha_-(z) := \frac{1}{z - z^{-1}}c_1 + \frac{1}{z+1}c_2 + \frac{1}{z - z^{-1}}\sum_{j=-\infty}^{0} z^{-j}V(j)\Phi^z(j),$$

$$\beta_-(z) := -\frac{1}{z - z^{-1}}c_1 + \frac{z}{z+1}c_2 - \frac{1}{z - z^{-1}}\sum_{j=-\infty}^{0} z^{j}V(j)\Phi^z(j),$$

entonces por lo anterior y por (7.18) tenemos que para $0 < |z| \leq 1$,

$$G(z) = c_1 + \frac{z-1}{z}c_2 + \sum_{j=-\infty}^{0} V(j)z^{-j}\Phi^z(j).$$

Por (5.6) y (7.12) tenemos que

$$\sum_{j=-\infty}^{0} V(j)\Phi^1(j) = \Delta_+ - c_1,$$

ocupando esto y las cotas obtenidas (7.21) y (7.22) obtenemos lo siguiente

$$\sum_{j=-\infty}^{0} V(j)z^{-j}\Phi^z(j) = \sum_{j=-\infty}^{0} V(j)\Phi^1(j) + \sum_{j=-\infty}^{0} V(j)z^{-j}(\Phi^z(j) - \Phi^1(j))$$
$$+ \sum_{j=-\infty}^{0} (z^{-j} - 1)V(j)\Phi^1(j) = \Delta_+ - c_1 + o(1).$$

Con lo que obtenemos el inciso b).

Por ultimo para el inciso (c), sea $\xi \in \mathcal{N}$ y notemos que para $0 < |z| \leq 1$ tenemos que

$$G(z)\xi = c_1\xi + \frac{z-1}{z}c_2\xi + B_1(z)\xi + B_2(z)\xi,$$

donde

$$B_1(z) = \sum_{j=-\infty}^{0} V(j)z^{-j}(\Phi^z(j) - \Phi^1(j)), \qquad B_2(z) = \sum_{j=-\infty}^{0} V(j)z^{-j}\Phi^1(j).$$

Como $\Phi^1\xi$ es acotada en $\mathbb{Z}^-$ podemos escribir $B_2(z)\xi$ de la siguiente manera

$$B_2(z)\xi = \sum_{j=-\infty}^{0} V(j)\Phi^1(j)\xi - (z-1)\sum_{j=-\infty}^{0} jV(j)\Phi^1(j)\xi + \mathcal{G}(z), \tag{7.35}$$

donde

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{j=-\infty}^{0} (z^{-j} - 1 + (z-1)j)V(j)\Phi^1(j)\xi,$$

que es $o(z-1)$, pues $\Phi^1\xi$ es acotada. Ademas por (7.33) y (7.12) tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{0} jV(j)(\Phi^1(j)\xi) = \xi - \Gamma\xi - \sum_{j=1}^{\infty} jV(j)(\Phi^1(j)\xi) &= -\Gamma\xi + \left(\mathbf{1} - \sum_{j=1}^{\infty} jV(j)\Phi^1(j)\right)\xi \\ &= -\Gamma\xi + c_2\xi.\end{aligned}$$

Tambien ocupando las ecuaciones (5.6), (7.12) y el Lema 5.7 obtenemos

$$\sum_{j=-\infty}^{0} V(j)\Phi^1(j)\xi = (\Delta_+ - c_1)\xi = -c_1\xi.$$

Sustituyendo lo anterior en (7.35) tenemos

$$B_2(z)\xi = -c_1\xi + (z-1)(\Gamma\xi - c_2\xi) + o(z-1).$$

Ademas ocupando las ecuaciones (7.30) y (7.31) obtenemos que $B_1(z)\xi = o(z-1),\ z \to 1$. Juntando lo anterior tenemos el inciso c. Con lo que concluye la prueba. $\square$

Definición 7.13. *Para $z \in \mathbb{D}^2$ definimos*

$$Z(z) := \Omega^* F(z) + G(z). \tag{7.36}$$

Recordemos que por el Lema 7.6, se tiene para $z \neq 0$ que

$$W(z) = u_-^{1/\bar{z}}(1)^*(u_+^1(1)^*)^{-1}F(z) + G(z)u_+^1(1)^{-1}u_+^z(1)$$

entonces

$$W(z) = (Z(z) + \Theta_1(z) + \Theta_2(z))\, u_+^1(1)^{-1}u_+^z(1),$$

donde

$$\Theta_1(z) := \Omega^* F(z)(u_+^z(1)^{-1}u_+^1(1) - \mathbf{1}),$$

$$\Theta_2(z) := \left(u_-^{1/\bar{z}}(1)^* \left(u_+^1(1)^*\right)^{-1} - \Omega^*\right) F(z)u_+^z(1)^{-1}u_+^1(1).$$

Por la Proposición 7.12 se tiene que $\Theta_1(z), \Theta_2(z) = o(z-1),\ z \to 1$.
En la siguiente sección veremos que $Z(z)$ es invertible en una vecindad $U \setminus \{1\} \subset \mathbb{D}^2$ de 1, por lo que para una vecindad $V \setminus \{1\} \subset \mathbb{D}^2$ de 1, $W(z)$ es invertible y

$$W(z)^{-1} = u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) Z(z)^{-1} (\mathbf{1} + (\Theta_1(z) + \Theta_2(z)) Z(z)^{-1})^{-1}.$$

Por lo anterior el análisis de $Z(z)^{-1},\ z \to 1$, es importante y lo desarrollaremos en siguiente sección. Antes, notemos que de la Proposición 7.12 se sigue de inmediato la siguiente proposición.

Proposición 7.14. *Sea $Z(z)$ definida como antes, entonces cuando $z \to 1$ (en $\mathbb{D}^2$) se tiene que*

(a) $Z(z) {=} \Delta_+ + o(1)$,

(b) Para $\xi \in \mathcal{N}$ se tiene que

$$Z(z)\xi = (z-1)(\Gamma + \Omega^*)\xi + o(z-1).$$

Demostración. Se sigue directo sustiyendo en (7.36) las ecuaciones obtenidas en la Proposición 7.12. □

8. Caso excepcional

Basados en [1], con el fin de estudiar la convergencia de $Z(z)^{-1}, \ z \to 1$, encontraremos en $Z(z)$ los elementos de matriz que dominan cuando $z \to 1$, y para facilitar el análisis los agruparemos en un bloque. Acontinuación establecemos la notación que usaremos.

8.1. Notación

A continuación establecemos la notación usada.

Asumamos Δ_+ tiene r bloques de jordan B_α indexados por $\alpha \in \{1, ..., r\}$ cada uno consistentes de n_α vectores $u_{\alpha j}, \ j \in \{1, ..., n_\alpha\}$ tales que

$$(\Delta_+ - E_\alpha)u_{\alpha j} = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ u_{\alpha(j-1)}, & 1 < j \leq n_\alpha \end{cases} \tag{8.1}$$

donde E_α es un eigenvalor de Δ_+. Asumamos que el eigenvalor 0 tiene multiplicidad algebraica ν y multiplicidad geometrica $\mu = \dim(\mathcal{N}) \geq 1$, asi $\sum_{\alpha=1}^{\mu} n_\alpha = \nu$. Consideramos la base $\theta = \{u_{\alpha j} : \alpha \in \{1, ..., r\}, j \in \{1, ...n_\alpha\}\}$ ordenada con el orden lexicográfico ($u_{\alpha j} \leq u_{\beta i} \iff \alpha \leq \beta$ ó $\alpha = \beta$ y $j \leq i$) y de manera que $E_\alpha = 0, \ \alpha \in \{1, ..., \mu\}$, asi $\beta = \{u_{\alpha 1} : \alpha \in \{1, ..., \mu\}\}$ es una base de $\ker(\Delta_+) = \mathcal{N}$. Denotaremos $S := [\mathbf{1}]_\theta^\gamma$ la matriz de cambio de coordenandas donde $\gamma = \{e_1, ..., e_m\}$ es la base canonica de C^L , es decir,

$$S = \begin{bmatrix} u_{11} \ ... \ u_{rn_r} \end{bmatrix},$$

y

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} w_{11} \\ ... \\ w_{rn_r} \end{bmatrix},$$

donde

$$w_{ij}u_{mn} = \delta(i, m)\delta(j, n). \tag{8.2}$$

Observación 8.1. *Sea $s \in \{1, ..., \mu\}$ entonces para $\alpha \in \{1, ..., r\}$ y $j \in \{1, ..., n_\alpha\}$ por (8.1) se tiene que*

$$w_{sn_s}\Delta_+u_{\alpha j} = \begin{cases} E_\alpha w_{sn_s}u_{\alpha j}, & j = 1 \\ E_\alpha w_{sn_s}u_{\alpha j} + w_{sn_s}u_{\alpha(j-1)}, & 1 < j \leq n_\alpha \end{cases}$$

Si $\alpha \neq s$ por (8.2) $w_{sn_s}u_{\alpha j} = 0$ y si $\alpha = s$ como $s \in \{1, ..., \mu\}$, $E_\alpha = 0$ en cualquier caso $E_\alpha w_{sn_s}u_{\alpha j} = 0$. Tambien si $s \neq \alpha$ entonces por (8.2), $w_{sn_s}u_{\alpha(j-1)} = 0$ y si $s = \alpha$ entonces $j-1 < n_s$ por lo que tambien $w_{sn_s}u_{\alpha(j-1)} = 0$, en cualquier caso $w_{sn_s}u_{\alpha(j-1)} = 0$. Por lo tanto para $s \in \{1, ..., \mu\}$ se tiene que

$$\forall \alpha \in \{1, ..., L\} \forall j \in \{1, ..., n_\alpha\}(w_{sn_s}\Delta_+u_{\alpha j} = 0),$$

es decir

$$\forall u \in \theta(w_{sn_s}\Delta_+u = 0), \tag{8.3}$$

como θ es una base de $\mathbb{C}^L$ entonces $w_{sn_s}\Delta_+ = 0$, luego por (5.3), $\Delta_-w_{sn_s}^* = 0$ de donde $\{w_{sn_s}^* : s \in \{1, ..., \mu\}\}$ es una base de $\ker(\Delta_-) = \mathcal{M}$.

Notación 8.2. *Para $M \in M_{L\times L}(\mathbb{C})$ denotaremos*

$$\tilde{M} = S^{-1}MS.$$

Tambien denotaremos

$$M(i,*) = e_i{}^*M,$$
$$M(*,i) = Me_i,$$

es decir, la i-ésima fila y columna respectivamente de M, notemos que con esta notación tenemos que

$$\tilde{M}_{i,j} = S^{-1}(i,*)MS(*,j),$$

notemos para cada $i \in \{1,...,L\}$ existe un único $B(i) \in \{1,...,r\}$ tal que

$$n_0 + ... + n_{B(i)-1} < i \leq n_0 + ... + n_{B(i)},$$

donde $n_0 = 0$, y si $P(i) := i - (n_0 + ... + n_{B(i)-1})$ se tiene que

$$S(*,i) = u_{B(i)P(i)},$$
$$S^{-1}(i,*) = w_{B(i)P(i)},$$

en otras palabras, $B(i)$ denota el bloque de jordan en el que se encuentra la $i-esima$ columna y $P(i)$ la posición que ocupa en ese bloque jordan.

Lo anterior nos permite denotar los elementos de matriz de $\tilde{M}$ de la siguiente manera:

Para $i,j \in \{1,...,L\}$

$$\tilde{M}_{i,j} = S^{-1}(i,*)MS(*,j) = w_{B(i)P(i)}Mu_{B(j)P(j)} \tag{8.4}$$

Notemos que exactamente μ columnas de $\tilde{Z}(z) = \tilde{\Delta}_+ + o(1)$ son $o(1)$, $z \to 1(\tilde{Z}(z)(*, n_0 + ... + n_{s-1} + 1), s \in \{1,...,\mu\}$, que son precisamente las columnas de Δ_+ que son eigenvectores asociados al 0 lo que implica que $\tilde{\Delta}_+(*, n_0 + ... + n_{s-1} + 1) = 0)$, las columnas restantes tienen al menos un elemento que converge a algo distinto de 0 cuando $z \to 1$, tambien existen exactamente μ filas que son $o(1)$ cuando $z \to 1(\tilde{Z}(z)(n_1 + ... + n_s, *), s \in \{1,...,\mu\}$, pues $\tilde{\Delta}_+(n_1+...+n_s, *) = 0)$. Con la finalidad de estudiar los elementos de estas columnas y filas es conveniente permutar las columnas y filas de $\tilde{Z}(z)$ de manera que agrupemos los elementos de matriz de dichas filas y columnas que son los que determinaran el comportamiento asintótico de $Z(z)^{-1}$.

Definición 8.3. *Definimos $\pi_1, \pi_2 : \{1,...,\nu\} \to \{1,...,\nu\}$ permutaciónes tales que*

$$\pi_1(\tau) = \begin{cases} n_0 + ... + n_{\tau-1} + 1, & \tau = 1,...,\mu \\ \tau - \mu + \alpha, & \tau = \{\mu+1,...\nu\} \end{cases} \tag{8.5}$$

$$\pi_2(\tau) = \begin{cases} n_1 + ... + n_\tau, & \tau = 1,...,\mu \\ \tau - \mu + \alpha - 1, & \tau = \{\mu+1,...\nu\} \end{cases} \tag{8.6}$$

donde $\alpha \in \{1,...,\mu\}$ es el único entero tal que

$$n_0 + ... + n_{\alpha-1} - \alpha + j = \tau - \mu.$$

para algún $j \in \{2,...,n_\alpha\}$ y $n_0 = 0$.

Definición 8.4. *Sean* $\Pi_1, \Pi_2 \in M_{\nu\times\nu}(\mathbb{C})$ *tales que*

$$\Pi_1 = \Big[f_{\pi_1(1)} \; ... \; f_{\pi_1(\nu)} \Big], \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} f^*_{\pi_2(1)} \\ \cdots \\ f^*_{\pi_2(\nu)} \end{bmatrix}.$$

donde $\{f_1, ..., f_\nu\}$ *es la base canonica de* $\mathbb{C}^\nu$*. Y sean*

$$P_1 = \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0_{\nu\times(L-\nu)} \\ 0_{(L-\nu)\times\nu} & I_{L-\nu} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \Pi_2 & 0_{\nu\times(L-\nu)} \\ 0_{(L-\nu)\times\nu} & I_{L-\nu} \end{bmatrix},$$

Definimos

$$\mathcal{Z}(z) = P_2\tilde{Z}(z)P_1 = P_2S^{-1}Z(z)SP_1, \tag{8.7}$$

y la partimos como

$$\mathcal{Z}(z) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(z) & \mathcal{B}(z) \\ \mathcal{C}(z) & \mathcal{D}(z) \end{bmatrix}, \tag{8.8}$$

donde $\mathcal{A}(z) \in M_{\mu\times\mu}(\mathbb{C})$ *y* $\mathcal{D}(z) \in M_{(L-\mu)\times(L-\mu)}(\mathbb{C})$.

8.2. Análisis asintótico de Z(z) por bloques

Proposición 8.5. *Existen matrices* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mu\times\mu}(\mathbb{C})$*,* $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{L-\mu\times\mu}(\mathbb{C})$ *y* $\mathbf{D} \in \mathcal{M}_{L-\mu\times L-\mu}(\mathbb{C})$ *tales que para* $z \to 1$ *en* $\mathbb{D}^2$ *se tiene que*

(a) $\mathcal{A}(z) = (z-1)\mathbf{A} + o(z-1)$,

(b) $\mathcal{B}(z) = o(1)$,

(c) $\mathcal{C}(z) = (z-1)\mathbf{C} + o(z-1)$,

(d) $\mathcal{D}(z) = \mathbf{D} + o(1)$.

Ademas $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{D}$ *son invertibles.*

Demostración. Para el inciso (a), tomemos $s, p \in \{1, ..., \mu\}$ y observemos que por (8.4), (8.5), (8.6), (8.7), (8.8) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(z)_{s,p} &= \mathcal{Z}(z)_{s,p} = P_2(s,*)\tilde{Z}P_1(*,p) \\
&= \left(f^*_{\pi_2(s)}, 0, ..., 0\right)\tilde{Z}(z)\begin{pmatrix} f_{\pi_1(p)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^*_{\pi_2(s)}\tilde{Z}(z)e_{\pi_1(p)} = e^*_{n_1+...+n_s}\tilde{Z}(z)e_{n_0+...+n_{p-1}+1} \\
&= \tilde{Z}(z)_{n_1+...+n_s,\; n_0+...+n_{p-1}+1} \\
&= w_{B(n_1+...+n_s)P(n_1+...+n_s)}Z(z)u_{B(n_0+...+n_{p-1}+1)P(n_0+...+n_{p-1}+1)} \\
&= w_{sn_s}Z(z)u_{p1},
\end{aligned}$$

como $p \in \{1, ..., \mu\}$, $u_{p1} \in \mathcal{N}$ entonces por la proposición 7.14 inciso (b) y lo anterior tenemos que

$$\mathcal{A}(z)_{s,p} = w_{sn_s} Z(z) u_{p1} = (1-z) w_{sn_s} (\Gamma + \Omega^*) u_{p1} + o(z-1),$$

definimos $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$ como

$$\mathbf{A}_{s,p} := w_{sn_s}(\Gamma + \Omega^*) u_{p1}, \;\; s, p \in \{1, ..., \mu\},$$

y por lo de antes tenemos que

$$\mathcal{A}(z) = (z-1)\mathbf{A} + o(z-1),$$

como dice el inciso (a), para el inciso (c) de manera analoga para $s \in \{1, ..., \nu - \mu\}$ y $p \in \{1, ..., \mu\}$ entonces por (8.4), (8.5), (8.6), (8.7), (8.8) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(z)_{s,p} = \mathcal{Z}(z)_{(s+\mu),p} &= \left(f^*_{\pi_2(s+\mu)}, 0, ..., 0\right) \tilde{Z}(z) \begin{pmatrix} f_{\pi_1(p)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^*_{\pi_2(s+\mu)} \tilde{Z}(z) e_{n_1+...+n_{p-1}+1} = \tilde{Z}(z)_{\pi_2(s+\mu),\; n_0+...+n_{p-1}+1} \\
&= w_{B(\pi_2(s+\mu))P(\pi_2(s+\mu))} Z(z) u_{B(n_0+...+n_{p-1}+1)P(n_0+...+n_{p-1}+1)} \\
&= w_{B(\pi_2(s+\mu))P(\pi_2(s+\mu))} Z(z) u_{p1},
\end{aligned}$$

y analogamente para $s \in \{\nu - \mu \; + 1, ..., L - \mu\}$ y $p \in \{1, ..., \mu\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(z)_{s,p} = \mathcal{Z}(z)_{(s+\mu),p} &= \left(0, ..., 0, g^*_{s+\mu-\nu}\right) \tilde{Z}(z) \begin{pmatrix} f_{\pi_1(p)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^*_{s+\mu} \tilde{Z}(z) e_{n_1+...+n_{p-1}+1} = \tilde{Z}(z)_{s+\mu,\; n_0+...+n_{p-1}+1} \\
&= w_{B(s+\mu)P(s+\mu)} Z(z) u_{B(n_0+...+n_{p-1}+1)P(n_0+...+n_{p-1}+1)} \\
&= w_{B(s+\mu)P(s+\mu)} Z(z) u_{p1},
\end{aligned}$$

donde $\{g_1, ..., g_{L-\nu}\}$ es la base canonica de $\mathbb{C}^{L-\nu}$, como $p \in \{1, ..., \mu\}$ entonces $u_{p1} \in \mathcal{N}$ luego por la proposición 7.14 inciso (b) y lo anterior para $p \in \{1, ..., \mu\}$ tenemos que

$$\mathcal{C}(z)_{s,p} = \begin{cases} (z-1) w_{B(\pi_2(s+\mu))P(\pi_2(s+\mu))} (\Gamma + \Omega^*) u_{p1} + o(z-1), & s \in \{1, ..., \nu - \mu\} \\ (z-1) w_{B(s+\mu)P(s+\mu)} (\Gamma + \Omega^*) u_{p1} + o(z-1), & s \in \{\nu - \mu + 1, ..., L - \mu\} \end{cases}$$

definimos $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{L-\mu\times\mu}$ como

$$\mathbf{C}_{s,p} := \begin{cases} w_{B(\pi_2(s+\mu))P(\pi_2(s+\mu))} (\Gamma + \Omega^*) u_{p1}, , & s \in \{1, ..., \nu - \mu\}, p \in \{1, ..., \mu\} \\ w_{B(s+\mu)P(s+\mu)} (\Gamma + \Omega^*) u_{p1}, & s \in \{\nu - \mu + 1, ..., L - \mu\}, p \in \{1, ..., \mu\}, \end{cases}$$

y por lo anterior tenemos que

$$\mathcal{C}(z) = (z-1)\mathbf{C} + o(z-1),$$

que es el inciso (c).

Para el inciso (b) sea $s \in \{1,...,\mu\}$ si $p \in \{1,...,\nu-\mu\}$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(z)_{s,p} = \mathcal{Z}(z)_{s,\ p+\mu} = \left(f^*_{\pi_2(s)}, 0, ..., 0\right) \tilde{Z}(z) \begin{pmatrix} f_{\pi_1(p+\mu)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^*_{\pi_2(s)} \tilde{Z}(z) e_{\pi_1(p+\mu)} = e_{n_1+...+n_s} \tilde{Z}(z) e_{\pi_1(p+\mu)} \\
&= w_{B(n_1+...+n_s)P(n_1+...+n_s)} Z(z) u_{B(\pi_1(p+\mu))P(\pi_1(p+\mu))} \\
&= w_{sn_s} Z(z) u_{B(\pi_1(p+\mu))P(\pi_1(p+\mu))} \\
&= w_{sn_s} \Delta_+ u_{B(\pi_1(p+\mu))P(\pi_1(p+\mu))} + o(1) = o(1),
\end{aligned}$$

donde para la penultima igualdad estamos ocupando la proposición 7.14 inciso (a) y para la ultima (8.3), si $p \in \{\nu-\mu+1,...,L-\mu\}$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(z)_{s,p} = \mathcal{Z}(z)_{s,\ p+\mu} = \left(f^*_{\pi_2(s)}, 0, ..., 0\right) \tilde{Z}(z) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{p+\mu-\nu} \end{pmatrix} \\
&= e^*_{\pi_2(s)} \tilde{Z}(z) e_{p+\mu} = e_{n_1+...+n_s} \tilde{Z}(z) e_{p+\mu} \\
&= w_{B(n_1+...+n_s)P(n_1+...+n_s)} \tilde{Z}(z) u_{B(p+\mu)P(p+\mu)} \\
&= w_{sn_s} \tilde{Z}(z) u_{B(p+\mu)P(p+\mu)} \\
&= w_{sn_s} \Delta_+ u_{B(p+\mu)P(p+\mu)} + o(1) = o(1),
\end{aligned}$$

por lo que

$$\forall s \in \{1,...,\mu\} p \in \{1,...,L-\mu\} (\mathcal{B}(z)_{s,p} = o(1)),$$

que es el inciso (b). De manera analoga se prueba el inciso (d), donde $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(I_{\nu-\mu}, B_{\mu+1}, ..., B_z)$ por lo que claramente $\mathbf{D}$ es invertible.

Por ultimo para probar que $\mathbf{A}$ es invertible, sea $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\mu \end{pmatrix} \in \ker(\mathbf{A})$ entonces para $s \in \{1,...,\mu\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
0 = \mathbf{A}(s,*) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_\mu \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{\mu} A_{s,p} c_p \\
= \sum_{p=1}^{\mu} w_{sn_s} (\Gamma + \Omega^*) u_{1p} c_p = w_{sn_s} (\Gamma + \Omega^*) \left(\sum_{p=1}^{\mu} c_p u_{1p} \right)
\end{aligned}$$

Como $\xi := \sum_{p=1}^{\mu} c_p u_{1p} \in \mathcal{N}$, se tiene por el lema 7.2 que $\Gamma\xi \in \mathcal{M}$, por la observación 8.1 $\{w_{ns_n}^* : n \in \{1, ..., \mu\}\}$ es una base de $\mathcal{M}$ entonces se tiene que

$$\Gamma\xi = \sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s w_{sn_s}^*$$

para algunas $\alpha_s \in \mathbb{C}$, asi que por lo anterior

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=1}^{\mu} \overline{\alpha_s} w_{sn_s}(\Gamma + \Omega^*)\xi \\ &= (\Gamma\xi)^*(\Gamma + \Omega^*)\xi = (\Gamma\xi)^*\Gamma\xi + (\Gamma\xi)^*\Omega^*\xi \\ &= \|\Gamma\xi\|^2 + \xi^* u_+^1(1)^*(u_-^1(1)^{-1})^* u_-^1(1)^*(u_+^1(1)^{-1})^*\xi \\ &= \|\Gamma\xi\|^2 + \|\xi\|^2 \end{aligned}$$

donde para la cuarta igualdad estamos ocupando (7.2) y (7.3). De esto obtenemos que $\xi = 0$ de donde $\sum_{p=1}^{\mu} c_p u_{1p} = 0$ y por la independencia lineal de $\{u_{1p}\}$, $c_p = 0,\ p \in \{1, ..., \mu\}$. Con lo que $\ker(\mathbf{A}) = \{0\}$ y concluimos la prueba. □

Proposición 8.6. *Existe una vecindad $U \subset \mathbb{D}^2$ de 1 , tal que $\mathcal{Z}(z)$ es invertible para $z \in U \setminus \{1\}$ y*

$$\mathcal{Z}(z)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1}\left(\mathbf{A}^{-1} + o(1)\right) & (z-1)^{-1}o(1) \\ & \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} + o(1) & \mathbf{D}^{-1} + o(1) \end{bmatrix},\ z \to 1. \tag{8.9}$$

Con lo que para $z \in U \setminus \{1\}$,

$$\mathcal{Z}(z)^{-1} = \frac{1}{z-1}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + o(1)\right),\ z \to 1. \tag{8.10}$$

donde la convergencia es en $\mathbb{D}^2$.

Demostración. Notemos que por la Proposición 8.5 existe $U_1 \subset \mathbb{D}^2$ vecindad de 1 tal que $\mathcal{D}(z)$ es invertible si $z \in U_1$. Ademas para $z \in U_1$ se tiene por la descomposición de Schur que

$$\begin{bmatrix} I_\mu & -\mathcal{B}(z)\mathcal{D}(z)^{-1} \\ 0 & I_{L-\mu} \end{bmatrix} \mathcal{Z}(z) \begin{bmatrix} I_\mu & 0 \\ -\mathcal{D}(z)^{-1}\mathcal{C}(z) & I_{L-\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}(z) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(z) \end{bmatrix},$$

de donde

$$\mathcal{Z}(z) = \begin{bmatrix} I_\mu & \mathcal{B}(z)\mathcal{D}(z)^{-1} \\ 0 & I_{L-\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}(z) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\mu & 0 \\ \mathcal{D}(z)^{-1}\mathcal{C}(z) & I_{L-\mu} \end{bmatrix} \tag{8.11}$$

donde $\mathcal{U}(z) = \mathcal{A}(z) - \mathcal{B}(z)\mathcal{D}(z)^{-1}\mathcal{C}(z)$.

Por la proposición 8.5 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(z)\mathcal{D}(z)^{-1}\mathcal{C}(z) &= o(1)(\mathbf{D}^{-1} + o(1))(\mathbf{C}(z-1) + o(z-1)) \\ &= o(1)(\mathbf{C}(z-1) + o(z-1)) = o(z-1),\ z \to 1, \end{aligned}$$

por lo que
$$\mathcal{U}(z) = (z-1)\mathbf{A} + o(z-1),\ z \to 1,$$
luego $\frac{1}{z-1}\mathcal{U}(z) \to \mathbf{A},\ z \to 1$ y como $\mathbf{A}$ es invertible, existe $U \subset U_1$ vecindad de 1 tal que $\frac{1}{z-1}\mathcal{U}(z)$ es invertible para $z \in U$.

Por lo que $\mathcal{U}(z)$ es invertible para $z \in U \setminus \{1\}$ y
$$\mathcal{U}(z)^{-1}(z-1) \to \mathbf{A}^{-1},$$
luego
$$\mathcal{U}(z)^{-1} = \frac{1}{z-1}\left(\mathbf{A}^{-1} + o(1)\right), z \to 1. \tag{8.12}$$
Asi por (8.11) obtenemos que para $z \in U \setminus \{1\}, \mathcal{Z}(z)$ es invertible y,
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(z)^{-1} &= \begin{bmatrix} I_\mu & 0 \\ -\mathcal{D}(z)^{-1}\mathcal{C}(z) & I_{L-\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}(z)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(z)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\mu & -\mathcal{B}(z)\mathcal{D}(z)^{-1} \\ 0 & I_{L-\mu} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{U}(z)^{-1} & -\mathcal{U}(z)^{-1}\mathcal{B}(z)\mathcal{D}(z)^{-1} \\ -\mathcal{D}(z)^{-1}\mathcal{C}(z)\mathcal{U}^{-1}(z) & \mathcal{D}(z)^{-1}\mathcal{C}(z)\mathcal{U}(z)^{-1}\mathcal{B}(z)\mathcal{D}(z)^{-1} + \mathcal{D}(z)^{-1} \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{8.13}$$
por la proposición 8.5 y (8.12) obtenemos para $z \in U \setminus \{1\}$ las siguientes ecuaciones
$$\begin{aligned}-\mathcal{U}(z)^{-1}\mathcal{B}(z)\mathcal{D}(z)^{-1} &= -\frac{1}{z-1}\left(\mathbf{A}^{-1} + o(1)\right) o(1)(\mathbf{D} + o(1)) \\ &= \frac{1}{z-1} o(1).\end{aligned} \tag{8.14}$$
$$\begin{aligned}-\mathcal{D}(z)^{-1}\mathcal{C}(z)\mathcal{U}^{-1}(z) &= -(\mathbf{D}^{-1} + o(1))((z-1)\mathbf{C} + o(z-1))\left(\frac{1}{z-1}(\mathbf{A}^{-1} + o(1))\right) \\ &= -(\mathbf{D}^{-1} + o(1))(\mathbf{C} + o(1))(\mathbf{A}^{-1} + o(1)) \\ &= -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} + o(1).\end{aligned} \tag{8.15}$$
$$\begin{aligned}&\mathcal{D}(z)^{-1}\mathcal{C}(z)\mathcal{U}(z)^{-1}\mathcal{B}(z)\mathcal{D}(z)^{-1} + \mathcal{D}(z)^{-1} \\ &= (\mathbf{D}^{-1} + o(1))((z-1)\mathbf{C} + o(z-1))\frac{1}{z-1}(\mathbf{A}^{-1} + o(1))o(1)(\mathbf{D}^{-1} + o(1)) \\ &+ \mathbf{D}^{-1} + o(1) \\ &= (\mathbf{D}^{-1} + o(1))(\mathbf{C} + o(1))(\mathbf{A}^{-1} + o(1))o(1)(\mathbf{D}^{-1} + o(1)) + \mathbf{D}^{-1} + o(1). \\ &= \mathbf{D}^{-1} + o(1)\end{aligned} \tag{8.16}$$
de (8.13), (8.12), (8.14), (8.15) y (8.16) obtenemos (8.9) con lo que concluimos la prueba. □

Proposición 8.7. *Existe $U \subset \mathbb{D}^2$ vecindad de 1 tal que para $z \in U \setminus \{1\},\ Z(z)$ es invertible y*
$$Z(z)^{-1} = \frac{1}{z-1}\left(\mathbf{Z} + o(1)\right),\ z \to 1, \tag{8.17}$$
donde
$$\mathbf{Z} := SP_1\mathcal{Z}P_2S^{-1}, \tag{8.18}$$

con

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.19}$$

Donde la convergencia es en $\mathbb{D}^2$.

Demostración. Se sigue directamente de la proposición 8.6 y la definición de $\mathcal{Z}(z)$. □

8.3. Análisis asintótico de W(z)

Proposición 8.8. *Existe una vecindad $U \subset \mathbb{D}^2$ de 1 tal que si $z \in U \setminus \{1\}$, $W(z)$ es invertible y se tiene que*

$$W^{-1}(z) = \frac{1}{z-1} \left(\mathbf{Z} + o(1) \right), \ z \to 1. \tag{8.20}$$

Donde la convergencia es en $\mathbb{D}^2$.

Demostración. Como $u_+^1(1)$ es invetible y $u(.,1)$ es continua existe $U_1 \subset \mathbb{D}^2$ vecindad de 1, tal que $u_+^z(1)$ es invertible para $z \in U_1$. Definamos para $z \in U_1$

$$\begin{aligned}
\Theta_1(z) &:= \Omega^* F(z)(u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) - \mathbf{1}), \\
\Theta_2(z) &:= \left(u_-^z(1)^* \left(u_+^1(1)^* \right)^{-1} - \Omega^* \right) F(z) u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1),
\end{aligned}$$

por el lema 7.6 tenemos que

$$\begin{aligned}
W(z) &= u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} F(z) + G(z) u_+^1(1)^{-1} u_+^z(1) \\
&= \left(u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} F(z) u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) + G(z) \right) u_+^1(1)^{-1} u_+^z(1)
\end{aligned}$$

y notemos que

$$\begin{aligned}
& u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} F(z) u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) + G(z) \\
&= u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} F(z) u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) - \Omega^* F(z) + \Omega^* F(z) + G(z) \\
&= u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} F(z) u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) - \Omega^* F(z) + Z(z) \\
&= u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} F(z) u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) - \Omega^* F(z) u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) \\
&+ \Omega^* F(z) u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) - \Omega^* F(z) + Z(z) \\
&= \left(u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} - \Omega^* \right) F(z) u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) \\
&+ \Omega^* F(z) \left(u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) - \mathbf{1} \right) + Z(z) \\
&= \Theta_2(z) + \Theta_1(z) + Z(z),
\end{aligned}$$

luego sustituyendo en la anterior ecuación tenemos que

$$W(z) = \left(Z(z) + \Theta_1(z) + \Theta_2(z) \right) u_+^1(1)^{-1} u_+^z(1). \tag{8.21}$$

Por la continuidad de $u_+^z(1)$ y $u_-^z(1)$ se tienen las siguientes convergencias

$$u_+^z(1)^{-1} u_+^1(1) \to \mathbf{1}, \qquad u_-^{1/\bar{z}}(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} \to u_-^1(1)^* (u_+^1(1)^*)^{-1} = \Omega^*,$$

donde estamos ocupando (7.3), por lo anterior y la Proposición 7.12 se tiene para $z \in U_1 \setminus \{1\}$ que

$$\begin{aligned}
\Theta_1(z) &= \Omega^* F(z)(u_+^z(1)^{-1}u_+^1(1) - \mathbf{1}) \\
&= \Omega^*((z-1)\mathbf{1} + o(z-1))o(1) = o(z-1), \ z \to 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_2(z) &= \left(u_-^{1/\bar{z}}(1)^* \left(u_+^1(1)^*\right)^{-1} - \Omega^*\right) F(z)u_+^z(1)^{-1}u_+^1(1) \\
&= o(1)F(z)(\mathbf{1} + o(1)) = o(1)(F(z) + o(1)F(z)) = o(1)F(z) \\
&= o(1)(z-1)\mathbf{1} + o(z-1) = o(z-1), \ z \to 1.
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Sabemos por la Proposición 8.7 que existe $U_2 \subset U_1$ vecindad de 1 tal que $Z(z)$ es invertible para $z \in U_2 \setminus \{1\}$ por lo que

$$Z(z) + \Theta_1(z) + \Theta_2(z) = (\mathbf{1} + (\Theta_1(z) + \Theta_2(z))Z(z)^{-1})Z(z),$$

y por (8.17) y (8.22) tenemos que

$$\mathbf{1} + (\Theta_1(z) + \Theta_2(z))Z(z)^{-1} = \mathbf{1} + o(z-1)(z-1)^{-1}(\mathbf{Z} + o(1)) = \mathbf{1} + o(1), \ z \to 1. \tag{8.23}$$

Por lo anterior existe una $U \subset U_2$ tal que si $z \in U_2 \setminus \{1\}$, $Z(z) + \Theta_1(z) + \Theta_2(z)$ es invertible por lo que ocupando esto en (8.21) tenemos que si $z \in U \setminus \{1\}$ entonces $W(z)$ es invertible y lo siguiente

$$\begin{aligned}
W(z)^{-1} &= u_+^z(1)^{-1}u_+^1(1)(Z(z) + \Theta_1(z) + \Theta_2(z))^{-1} \\
&= u_+^z(1)^{-1}u_+^1(1)Z(z)^{-1}(\mathbf{1} + (\Theta_1(z) + \Theta_2(z))Z(z)^{-1})^{-1} \\
&= (\mathbf{1} + o(1))(z-1)^{-1}(\mathbf{Z} + o(1))(\mathbf{1} + o(1)) \\
&= \frac{1}{z-1}(\mathbf{Z} + o(1)), \ z \to 1,
\end{aligned}$$

donde estamos ocupando (8.17) y (8.23) para la tercera igualdad. $\square$

9. Resultado principal

Teorema 9.1. *Supongamos que el caso excepcional ocurre, es decir $\mathcal{N} \neq \{0\}$, entonces los coeficientes de dispersión cumplen que*

$$T_+(z) = \frac{1+z}{z}\mathbf{Z} + o(1),\ T_-(z) = \frac{1+z}{z}\mathbf{Z}^* + o(1),\ z \to 1 \ en\ \mathbb{D}^2, \tag{9.1}$$

$$\operatorname{Im}(T_+(1)) = \ker(\Delta_+),\ \ker(T_+(1)) = \operatorname{Im}(\Delta_+), \tag{9.2}$$

$$\operatorname{Im}(T_-(1)) = \ker(\Delta_-),\ \ker(T_-(1)) = \operatorname{Im}(\Delta_-), \tag{9.3}$$

$$R_+(z) = -\mathbf{1} + \Gamma T_+(1) + o(1), \quad R_-(z) = -\mathbf{1} + \Gamma^{-1}T_+(1)^* + o(1),\ z \to 1 \ en\ \mathbb{S}^1 \tag{9.4}$$

$$\ker(R_+(1) + \mathbf{1}) = \ker(T_+(1)),\ \ker(R_-(1) + \mathbf{1}) = \ker(T_-(1)) \tag{9.5}$$

$$\operatorname{Im}(R_+(1) + \mathbf{1}) = \operatorname{Im}(T_-(1)),\ \operatorname{Im}(R_-(1) + \mathbf{1}) = \operatorname{Im}(T_+(1)). \tag{9.6}$$

Demostración. De la Proposición 8.8 tenemos que existe $U \subset \mathbb{D}^2$ tal que $W(z)$ es invertible para $z \in U \setminus \{1\}$ y por (7.4) y (8.20) se sigue que

$$\begin{aligned} T_+(z) &= \frac{z^2-1}{z}W(z)^{-1} = \frac{z^2-1}{z} \cdot \frac{1}{z-1}\left(\mathbf{Z} + o(1)\right) \\ &= \frac{1+z}{z}\left(\mathbf{Z} + o(1)\right),\ z \to 1, \end{aligned}$$

que es la primera igualdad de (9.1), por lo anterior y (4.19).

$$\begin{aligned} T_-(z) = T_+(\bar{z})^* &= \left(\frac{1+\bar{z}}{\bar{z}}\mathbf{Z} + o(1)\right)^* \\ &= \frac{1+z}{z}\mathbf{Z}^* + o(1),\ z \to 1, \end{aligned}$$

de donde se obtiene (9.1). Para (9.2), notemos que (8.4), (8.5) se tiene que para $s \in \{1, ..., \mu\}$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_+ e_{\pi_1(s)} &= S^{-1}\Delta_+ S(*, \pi_1(s)) = S^{-1}\Delta u_{B(\pi_1(s))P(\pi_1(s))} \\ &= S^{-1}\Delta_+ u_{B(n_0+...+n_{s-1}+1)P(n_0+...+n_{s-1}+1)} = S^{-1}\Delta_+ u_{s1} = 0. \end{aligned}$$

donde para la ultima igualdad ocupamos (8.1), por lo tanto $\{e_{\pi_1(1)}, ..., e_{\pi_1(\mu)}\}$ es una base de $\ker(\tilde{\Delta}_+)$ por (8.19) y como P_2 es invertible se tiene que

$$\operatorname{Im}(\mathcal{Z}P_2) = \mathcal{Z}P_2[\mathbb{C}^L] = \mathcal{Z}[\mathbb{C}^L] = \langle\{e_1, ..., e_\mu\}\rangle,$$

juntando lo anterior tenemos que

$$\operatorname{Im}(P_1\mathcal{Z}P_2) = P_1[\langle\{e_1, ..., e_\mu\}\rangle] = \langle\{e_{\pi_1}(1), ..., e_{\pi_1}(\mu)\}\rangle = \ker(\tilde{\Delta}_+),$$

de donde

$$\operatorname{Im} T_+(1) = \operatorname{Im}(SP_1\mathcal{Z}P_2S^{-1}) = \ker(S\tilde{\Delta}_+S^{-1}) = \ker\Delta_+,$$

lo que nos da la primera igualdad. Para la segunda igualdad notemos que como $\{e_{\pi_1(1)}, ..., e_{\pi_1(\mu)}\}$ es una base de $\ker(\tilde{\Delta}_+)$ entonces

$$\{\tilde{\Delta}_+ e_i : i \notin \pi_1[\{1, ..., \mu\}]\} = \{\tilde{\Delta}_+ e_i : i \notin \{1, n_1 + 1, ..., n_1 + ... + n_{\mu-1} + 1\}\}$$

es una base de $\mathrm{Im}(\tilde{\Delta}_+)$ luego

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\tilde{\Delta}_+) &= \langle\{\tilde{\Delta}_+ e_i : i \notin \{1, n_1 + 1, ..., n_1 + ... + n_{\mu-1} + 1\}\}\rangle \\ &= \langle\{e_i : i \notin \{n_1, ..., n_1 + ... + n_\mu\}\}\rangle, \end{aligned}$$

y

$$\ker(\mathcal{Z}) = \langle\{e_{\mu+i} : i \in \{1, ..., L - \mu\}\}\rangle,$$

luego por la definición de P_2 y como P_1 es invertible se tiene que

$$\begin{aligned} \ker(P_1 \mathcal{Z} P_2) &= \ker(\mathcal{Z} P_2) = P_2^{-1}[\ker(\mathcal{Z})] \\ &= P_2^{-1}[\langle\{e_{\mu+i} : i \in \{1, ..., L - \mu\}\}\rangle] \\ &= \langle\{e_i : i \notin \{n_1, ..., n_1 + ... + n_\mu\}\}\rangle \\ &= \mathrm{Im}(\tilde{\Delta}_+), \end{aligned}$$

de donde

$$\ker(T_+(1)) = \ker(SP_1 \mathcal{Z} P_2 S^{-1}) = \mathrm{Im}(S\tilde{\Delta}_+ S^{-1}) = \mathrm{Im}(\Delta_+),$$

con lo que obtenemos la segunda igualdad.

Para (9.3), ocupando (5.3), (9.1), (9.2) y ocupando que para cualquier matriz M $\ker(M) = \mathrm{Im}(M^*)^\perp$ tenemos que

$$\begin{aligned} \ker(\Delta_-) &= \mathrm{Im}(\Delta_-^*)^\perp = \mathrm{Im}(\Delta_+)^\perp \\ &= \ker(T_+(1))^\perp = \mathrm{Im}(T_+(1)^*) = \mathrm{Im}(T_-(1)). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(\Delta_-) &= \ker(\Delta_-^*)^\perp = \ker(\Delta_+)^\perp \\ &= \mathrm{Im}(T_+(1))^\perp = \ker(T_+(1)^*) = \ker(T_-(1)). \end{aligned}$$

Para (9.4), tomemos $U \subset D^2$ vecindad de 1 tal que $M_+(z)$ es invertible para $z \in U \setminus \{1\}$, por la ecuación (4.1) tenemos que si $z \in (S^1 \cap U) \setminus \{1\}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\begin{aligned} & u_+^z(n)(M_+(z))^{-1} = u_-^z(n) + u_-^{1/z}(n) N_+(z)(M_+(z))^{-1}, \\ \Longrightarrow \ & u_+^z(n) T_+(z) = u_-^z(n) + u_-^{1/z}(n) R_+(z), \end{aligned}$$

sea $n \in \mathbb{Z}^-$ tal que $u_-^1(n)$ es invertible(que existe ya que por (3.6) $u_-^1(n) \to \mathbf{1},\ n \to -\infty$), por la continuidad de $u_-(n)$ existe $U_1 \subset \mathbb{S}^1$ vecindad de 1 tal que si $z \in U_1$ entonces $u_-^{1/z}(n)$ es invertible y ocupando la ecuación anterior tenemos

$$u_-^{1/z}(n)^{-1} u_+^z(n) T_+(z) - u_-^{1/z}(n)^{-1} u_-^z(n) = R_+(z),\ z \in U_1 \setminus \{1\}, \tag{9.7}$$

asi por la continuidad de $u_-(n)$ la ecuación (9.7) y teniendo que $\lim_{z\to 1} T_+(z)$ existe se obtiene lo siguiente

$$\lim_{z\to 1} R_+(z) = u_-^1(n)^{-1}u_+^1(n)T_+(1) - \mathbf{1} = \Gamma T_+(1) - \mathbf{1},$$

donde para la segunda igualdad estamos ocupando (7.2) y que por (9.2) y el lema 5.7 para cualquier $\xi \in \mathbb{C}^L$, $T_+(1)\xi \in \ker(\Delta_+) = \mathcal{N}$. Lo anterior da la primera igualdad de (9.4), la segunda igualdad se obtiene de manera analoga ocupando (4.2). Para probar (9.5) ocupando la ecuación (9.4) tenemos que

$$\ker(R_+(1) + \mathbf{1}) = \ker(\Gamma T_+(1)) = \ker(T_+(1))$$

pues por el Lema 7.2 se tiene que Γ es invertible.

Por ultimo, ocupando los Lemas 5.7 y 7.2 y las ecuaciones (9.3) y (9.4) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(R_+(1) + \mathbf{1}) &= \operatorname{Im}(\Gamma T_+(1)) \\ &= \Gamma[\operatorname{Im} T_+(1)] = \Gamma[\ker(\Delta_+)] \\ &= \Gamma[\mathcal{N}] = \mathcal{M} = \ker(\Delta_-) = \operatorname{Im}(T_-(1)). \end{aligned}$$

que es la primera igualdad de (9.6). Y de manera analoga podemos obtener la segunda. $\square$

A. Apéndice

Teorema A.1 (Ecuación de Volterra)**.** *Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X$ un operador lineal tal que $\|T\| < 1$ entonces para cualquier $y \in X$ existe $x \in X$ tal que*

$$x = y + Tx.$$

Demostración. Como $T \in B(X)$ que es una algebra de Banach y $\|T\| < 1$ tenemos que $I - T$ es invertible hagamos $x = (I - T)^{-1}y$ y claramente satisface la ecuación solicitada. □

Teorema A.2. *Sean $A, B(n) \in \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$ y consideremos la ecuación de diferencias*

$$X(n-1) + AX(n) + X(n+1) = B(n)X(n), n \in \mathbb{Z} \tag{A.1}$$

donde $X \in (\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$.

Supongamos que existen $S_1, S_2 \in (\mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C}))^{\mathbb{Z}}$ soluciones de

$$X(n-1) + AX(n) + X(n+1) = 0, \tag{A.2}$$

tales que $S_1(0) = 0$, $S_1(1) = \mathbf{1}$ y $S_2(1) = \mathbf{1}$, $S_1(1) = \mathbf{1}$. Entonces para $C, D \in \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$ la solucion E de (A.1) *tal que $E(0) = C$ y $E(1) = D$ satisface para $n \in \mathbb{N}$*

$$E(n) = S_1(n)(D - C) + S_2(n)C + \sum_{j=1}^{n} S_1(n-j)B(j)E(j), \tag{A.3}$$

Y para $n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

$$E(n) = S_1(n)(D - C) + S_2(n)C - \sum_{j=n}^{0} S_1(n-j)B(j)E(j), \tag{A.4}$$

Demostración. Denotemos

$$H(n) := S_1(n)(D - C) + S_2(n)C$$

y notemos que es solución de (A.2). Definamos recursivamente $G : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{L\times L}(\mathbb{C})$ como $G(0) = C$, $G(1) = D$ y

$$G(n) = H(n) + \sum_{j=1}^{n} S_1(n-j)B(j)G(j),\ n > 1$$

$$G(n) = H(n) + \sum_{j=n}^{0} S_1(n-j)B(j)G(j),\ n < 0$$

claramente G satisface (A.3) y (A.4) si probamos que G es solución de (A.1) como $G(0) = E(0)$ y $G(1) = E(1)$ por la observación (2.1) $G = E$ con lo se concluiria la prueba.

Sea $n \geq 2$ entonces

$$\begin{aligned}
G(n+1)+G(n-1) &= H(n-1)+H(n+1) \\
&+\sum_{j=1}^{n+1} S_1(n+1-j)B(j)G(j)+\sum_{j=1}^{n-1} S_1(n-1-j)B(j)G(j) \\
&= -AH(n)+\sum_{j=1}^{n} S_1(n+1-j)B(j)G(j)+S_1(0)B(n+1)G(n+1) \\
&+\sum_{j=1}^{n} S_1(n-1-j)B(j)G(j)-S_1(-1)B(n)G(n) \\
&= -AH(n)+\sum_{j=1}^{n}(S_1(n+1-j)+S_1(n-1-j))B(j)G(j)-S_1(-1)B(n)G(n) \\
&= -AH(n)+\sum_{j=1}^{n} -AS_1(n-j)B(j)G(j)+B(n)G(n) \\
&= -AG(n)+B(n)G(n),
\end{aligned}$$

donde ocupamos que $S_1(0)=0$ y $S_1(-1)=\mathbf{-1}$ que se deduce de la recursión. y para $n \leq -1$

$$\begin{aligned}
G(n+1)+G(n-1) &= H(n-1)+H(n+1) \\
&-\sum_{j=n+1}^{0} S_1(n+1-j)B(j)G(j)-\sum_{j=n-1}^{0} S_1(n-1-j)B(j)G(j) \\
&= -AH(n)-\sum_{j=n}^{0} S_1(n+1-j)B(j)G(j)+S_1(1)B(n)G(n) \\
&-\sum_{j=n}^{0} S_1(n-1-j)B(j)G(j)-S_1(0)B(n-1)G(n-1) \\
&= -AH(n)-\sum_{j=n}^{0}(S_1(n+1-j)+S_1(n-1-j))B(j)G(j)+S_1(1)B(n)G(n) \\
&= -AH(n)-\sum_{j=n}^{0} -AS_1(n-j)B(j)G(j)+B(n)G(n) \\
&= -AG(n)+B(n)G(n),
\end{aligned}$$

Notemos que $S_1(2)=-A$ y $S_2(2)=-A-I$, que se deduce de la recursión entonces

$$H(2)=S_1(2)(D-C)+S_2(2)C=-A(D-C)-AC-C=-AD-C$$

entonces

$$G(2)+G(0)=H(2)+S_1(1)B(1)G(1)+G(0)=H(2)+B(1)G(1)+C=-AG(1)+B(1)G(1)$$

Y $S_1(-1) = -\mathbf{1}$ y $S_2(2) = -A - I$, que se deduce de la recursión entonces

$$H(-1) = S_1(-1)(D - C) + S_2(-1)C = -\mathbf{1}(D - C) - AC - C = -D - AC,$$

entonces

$$G(-1)+G(1) = H(-1)-S_1(-1)B(0)G(0)+G(1) = -D-AC+B(0)G(0)+D = -AG(0)+B(0)G(0).$$

Lo anterior prueba que G es solución de (A.1). □

Teorema A.3 (Lema de Gronwall)**.** *Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones no negativas de numeros reales y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$*

$$u_n \leq \alpha + \sum_{i=1}^{n-1} u_i w_i$$

entones para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$u_n \leq \alpha \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i\right)$$

Demostración. Notemos que

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\prod_{l=1}^{i-1}(1 + w_l)\right) w_k \leq \prod_{i=1}^{n-1}(1 + w_k) \tag{A.5}$$

donde el producto vacio se define como 1 y la suma vacia como 0. Probaremos por inducción sobre n que

$$u_n \leq \alpha \prod_{i=1}^{n-1}(1 + w_n) \tag{A.6}$$

para $n = 1$ es claro, y el paso inductivo se deduce de lo siguiente ocupando (A.5),

$$\begin{aligned} \alpha \prod_{i=1}^{n}(1 + w_n) &\geq \alpha + \alpha \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{l=1}^{i-1}(1 + w_l)\right) w_k \\ &\geq \alpha + \sum_{i=1}^{n} u_k w_k \geq u_{n+1} \end{aligned}$$

con lo que se tiene (A.6), notemos que para $x \in \mathbb{R}^+, 1 + x \leq \exp(x)$ ocupando esto y (A.6) se tiene que

$$u_n \leq \alpha \prod_{i=1}^{n-1}(1 + w_n) \leq \alpha \prod_{i=1}^{n-1} \exp(w_n) = \alpha \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_n\right).$$

que es lo que se quiera probar. □

Referencias

[1] Aktosun, T., Klaus, M., & Van Der Mee, C. (2001). Small-energy asymptotics of the scattering matrix for the matrix Schrödinger equation on the line. *Journal of Mathematical Physics*, 42(10), 4627-4652.

[2] Hinton, D. B., Klaus, M., & Shaw, J. K. (1991). Half-bound states and Levinson's theorem for discrete systems. *SIAM journal on mathematical analysis*, 22(3), 754-768.

[3] Teschl, G. (2000). *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices* (No. 72). American Mathematical Soc.

[4] Agranovich, Z. S., & Marchenko, V. A. (1964). *The inverse problem of scattering theory.* Gordon and Breach.

[5] Klaus, M. (1988). Low-energy behaviour of the scattering matrix for the Schrödinger equation on the line. *Inverse Problems*, 4(2), 505.

[6] Case, K. M., & Kac, M. (1973). A discrete version of the inverse scattering problem. *Journal of Mathematical Physics*, 14(5), 594-603.

[7] Case, K. M. (1973). On discrete inverse scattering problems. II. *Journal of Mathematical Physics*, 14(7), 916-920.

[8] Case, K. M., & Chiu, S. C. (1973). The discrete version of the Marchenko equations in the inverse scattering problem. *Journal of Mathematical Physics*, 14(11), 1643-1647.

[9] Case, K. M.(1974). The discrete inverse scattering problem in one dimension. *Journal of Mathematical Physics*, 15(2), 143-146.

[10] Egorova, I., Michor, J., & Teschl, G. (2006). Scattering theory for Jacobi operators with quasi-periodic background. *Communications in mathematical physics*, 264(3), 811-842.

[11] Guseinov, G. S. (1976). The inverse problem of scattering theory for a second-order difference equation on the whole axis. In *Doklady Akademii Nauk* (Vol. 231, No. 5, pp. 1045-1048). Russian Academy of Sciences.