



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

Ingeniería Eléctrica - Control

Control cooperativo de robots para la manipulación diestra de
objetos con incertidumbre de peso

TESIS

que para optar por el grado de

Doctor en Ingeniería

presenta

Pablo Sánchez Sánchez

Tutor principal

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez - Facultad de Ingeniería

Comité Tutor

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez - Facultad de Ingeniería

Dr. Emmanuel Nuño Ortega - CUCEI - UDG

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Noviembre 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Secretario: Dr. Emmanuel Nuño Ortega

Vocal 1: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Vocal 2: Dr. Yu Tang Xu

Vocal 3: Dr. Alejandro Rogríguez Angeles

Lugar donde se realizó la tesis:

Laboratorio de Robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Tutor

Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Agradecimientos

Gracias Dios mío por todo en mi vida, por lo bueno y lo malo, por las bendiciones y por las lecciones que me has dado. Gracias por darme la fuerza para seguir adelante y mantenerme unido cuando me estoy desmoronando. Gracias por bendecirme más de lo que merezco.

Gracias Aideé por entenderme en todo, gracias porque en todo momento eres un apoyo incondicional en mi vida, eres mi felicidad en una sola persona, eres mi todo reflejado en otra persona a la cual amo demasiado, y por la cual estoy dispuesto a enfrentar todo.

Querido Nicolás, gracias por ser la fuente de mi fuerza y el motor de mi vida. Gracias por darme la alegría de ser tu padre y motivarme siempre a seguir adelante. Gracias por escucharme y sujetar mi mano con esas pequeñas manitas cuando más lo necesitaba. Gracias por mantener mi voluntad inquebrantable, ya que cuando sentía rendirme noté que me observabas y eso me hacía seguir adelante. Hijo nunca te rindas, aunque el frío queme, aunque el miedo muerda, aunque el sol se esconda y el viento calle. Recuerda, siempre sigue adelante para alcanzar tus sueños.

A mis compañeros y amigos del laboratorio de robótica: Alex, Javier, Daniel, Mauro, Laura, Lauro, Alethia, Marisol[†], Kike, Tona y a todos los de servicio social que sin su ayuda y compañía no hubiera disfrutado las maruchanes y las latas de atún igual ☺. Gracias por todos los buenos momentos que compartimos y gracias por sus consejos.

Gracias al Posgrado en Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme permitido formarme en él. Gracias a todas las personas que fueron partícipes de este proceso, ya sea de manera directa o indirecta. Gracias al PRODEP (antes PROMEP) con el número de Folio BUAP-811 y los proyectos PAPIIT 116314 y 114617 por el apoyo recibido.

Gracias al Dr. Gerardo René Espinosa Pérez, al Dr. Yu Tang Xu, al Dr. Alejandro Rodríguez Angeles y al Dr. Emmanuel Nuño Ortega por el tiempo dedicado a esta Tesis y por sus observaciones y aportaciones en su carácter de jurado revisor.

Y finalmente, pero no menos importante, gracias al Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez, por su tiempo, su paciencia, su apoyo, comprensión, sus consejos y observaciones ya que sin él no hubiera podido terminar este trabajo de tesis. Gracias Doctor Arteaga.

Pablo Sánchez Sánchez

Dedicatoria

A mi esposa Aideé y a mi hijo Nicolás

Índice general

Jurado	III
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	4
1.2. Antecedentes	4
1.3. Formulación del problema	8
1.4. Contribuciones	9
1.5. Organización de la tesis	10
2. Preliminares matemáticos	11
2.1. Sistema cooperativo polinómico homogéneo	11
2.2. Principio de ortogonalización	15
2.3. Dinámica	18
2.3.1. Modelo dinámico del sistema cooperativo	19
2.3.2. Modelo del objeto	21
2.3.3. Fuerza de contacto	21
3. Control de posición/fuerza con estimación de masa	23
3.1. Control propuesto	23
4. Resultados experimentales	39
4.1. Descripción del sistema cooperativo	39
4.2. Trayectoria deseada	40
4.3. Resultados experimentales	40
Conclusiones	55
A. Datos técnicos de los robots	57
A.1. Robot CR-A255	57
A.1.1. Cinemática directa	59
A.1.2. Cinemática inversa	60
A.1.3. Modelo dinámico	61

A.2. Robot CRS-A465	62
A.2.1. Cinemática directa	63
A.2.2. Cinemática inversa	64
A.2.3. Modelo dinámico	66
A.3. Constantes mecánicas y eléctricas de los motores	67
B. Sensor fuerza/torque JR3 de ejes múltiples	69
C. Publicaciones	71

Índice de figuras

1.1.	Trayectorias nominal y real de un robot, control impedancia.	3
1.2.	Sistema cooperativo bajo restricciones geométricas	8
2.1.	Manipulación de un objeto usando robots cooperativos	11
2.2.	Mapeo de un vector en un plano normal	13
2.3.	Descomposición geométrica en el punto de contacto.	15
2.4.	Plano tangente a la superficie (error de seguimiento).	17
2.5.	Sistemas de referencia del sistema cooperativo	19
2.6.	Diagrama de cuerpo libre	21
4.1.	Sistema cooperativo	39
4.2.	Seguimiento en coordenadas articulares del robot A255	42
4.3.	Seguimiento en coordenadas articulares del robot A465	43
4.4.	Error de seguimiento en coordenadas articulares del robot A255	44
4.5.	Error de seguimiento en coordenadas articulares del robot A465	45
4.6.	Seguimiento en coordenadas cartesianas del robot A255	46
4.7.	Seguimiento en coordenadas cartesianas del robot A465	47
4.8.	Error de seguimiento en coordenadas cartesianas del robot A255	48
4.9.	Error de seguimiento en coordenadas cartesianas del robot A465	49
4.10.	Trayectoria en el plano yz	50
4.11.	Masa estimada \hat{m}	50
4.12.	Error paramétrico Δm	51
4.13.	Seguimiento de fuerza	51
4.14.	Error de seguimiento de fuerza.	52
4.15.	Comparación entre el control propuesto y el control en [1] a nivel de fuerza.	53
4.16.	Índice de desempeño.	54
A.1.	Robot CRS–A255	58
A.2.	Proyección del centro de la muñeca sobre el plano $\{x_0, y_0\}$	60
A.3.	Robot CRS–A465.	62
A.4.	Proyección del centro de la muñeca sobre el plano $\{x_0, y_0\}$	65
B.1.	Sensor JR3 modelo 67M25A 63N4	70

Índice de tablas

4.1. Parámetros usados en los experimento.	41
4.2. Ganancias	41
A.1. Características de las articulaciones	57
A.2. Parámetros físicos robot CRS–A255	58
A.3. Tabla D–H del robot CRS–A255 (Posicionamiento)	59
A.4. Características de las articulaciones	62
A.5. Parámetros físicos robot CRS–A465	63
A.6. Tabla D–H del robot CRS–A465 (Posicionamiento)	63
A.7. Radio de los sistemas de engranaje	67
A.8. Constantes eléctricas y mecánicas de los motores	67
B.1. Rango máximo de la fuerza en z para sensores JR3[®] serie M	70

Capítulo 1

Introducción

A principios de la década de los setenta, poco después de la aparición de las tecnologías robóticas, la investigación sobre los sistemas robóticos de múltiples brazos y el uso de dos o más robots para realizar una tarea cooperativa tomó un gran auge. Los primeros trabajos incluyen el realizado por Fuji y Kurono en el cual se propone adoptar el concepto de control de cumplimiento (*compliance control*) para coordinar múltiples manipuladores a través de un vector de tarea definido con respecto al objeto [2]. Una característica interesante de [2] y usada en Takase *et al.* en [3] es que el control de fuerza-cumplimiento (*force-compliance control*) se implementó aprovechando la retroalimentación de los actuadores sin hacer uso de los sensores de fuerza-par. Sin embargo, la importancia de esta técnica en aplicaciones prácticas no fue reconocida en ese momento, ya que los enfoques más usados requerían de dichos sensores. En [4, 5] se propuso un enfoque del control de fuerza tipo maestro-esclavo para dirigir dos brazos robot que sujetaban un objeto y se señaló la necesidad del control de fuerza para robots cooperativos múltiples.

Con base en los resultados teóricos obtenidos sobre robots de un solo brazo en la década de los ochenta se renovó el interés sobre los sistemas robóticos de múltiples brazos [6]. Dicho interés se enfocó en definir el vector de tareas con respecto al objeto a manipular [7], en determinar la dinámica y el control de la cadena cinemática cerrada formada por el robot de múltiples brazos y el objeto [8, 9] y resolver problemas de control de fuerza tales como el control híbrido (posición-fuerza) [10–13], lo que formó una sólida base teórica para el control de robots de múltiples brazos.

El interés de los sistemas cooperativos se debió principalmente a las limitaciones típicas de un solo robot o de los robots de un solo brazo. De hecho, muchas tareas que son difíciles o imposibles de ejecutar por un solo robot se vuelven factibles cuando dos o más manipuladores se emplean de manera cooperativa [14]. Por lo que el uso de los sistemas cooperativos ha aumentado debido a las ventajas que estos ofrecen, ya que son capaces de compartir información y recursos, permiten la interacción con un objeto de forma conjunta, tienen mayor tolerancia a fallas, y con este tipo de sistemas se pueden realizar tareas que con un solo robot serían imposibles de lograr [15].

De manera general, las tareas realizadas por los sistemas cooperativos se pueden clasificar como: *tareas cooperativas hombre-hombre, hombre-robot y robot-robot*. Para que un sistema cooperativo robot-robot realice una tarea es necesario estudiar las características de las tareas realizadas por los seres humanos, lo que permite modelar y reproducir las interacciones entre el sistema *humano-robot* o el sistema *robot-robot* [15].

Un ejemplo de las tareas cooperativas realizadas por el sistema humano-robot son las aplicaciones médicas, donde un sistema robótico es capaz de asistir al médico en una microcirugía donde se precisa una manipulación fina que requiere la experiencia del cirujano. En aplicaciones médicas se usa un *control de fuerza y posición* para obtener una manipulación segura y firme [16].

Las *tareas cooperativas robot-robot* tienen un amplio rango de aplicación en la industria ya que permiten la ejecución de tareas tales como el traslado de materiales que exceden la capacidad de carga de un solo robot, el ensamblado y desensamblado de productos, etcétera, siendo la principal desventaja de los sistemas cooperativos el considerable aumento en la complejidad de la planificación, el control y la ejecución de las tareas [15]. En entornos donde trabaja un solo robot manipulador, la variable controlada puede ser la posición o la fuerza del efector final del robot, o bien puede realizarse un control híbrido de posición y fuerza. Teniendo en cuenta esto y que los sistemas donde trabajan dos o más manipuladores forman una cadena cinemática cerrada entonces se crea la necesidad de controlar las fuerzas internas que actúan sobre el objeto [17]. La manera de parametrizar las fuerzas y los momentos de restricción en el objeto según el modelo dinámico de todo el sistema cooperativo se ha considerado como un problema crítico; de hecho, esta parametrización conduce a la definición de variables de tarea para el control y, por tanto, a una de las preguntas más frecuentes en el campo de la robótica de brazos múltiples: cómo controlar simultáneamente la trayectoria del objeto, las tensiones mecánicas (fuerzas y momentos internos) que actúan sobre el objeto, compartiendo la carga entre los brazos, e incluso las fuerzas y los momentos externos sobre el objeto [14]. La descomposición de la fuerza es la clave para resolver estos problemas y ha sido estudiada por Uchiyama y Dauchez en [12, 13], en Walker *et al.* en [18], y por Bonitz y Hsia en [19].

El diseño de una parametrización geoméricamente clara de las fuerzas y los momentos internos que actúan sobre el objeto es un problema importante; una solución a esto se ha dado en Williams y Khatib en [20, 21]. Además, se han diseñado varios esquemas de control cooperativo basados en la parametrización adecuada de la fuerza y el uso apropiado del control de movimiento y fuerza [12, 13, 22–24] y el control de impedancia/cumplimiento [25–27]. Otros enfoques incluyen el uso del control adaptable [28, 29], del control cinemático [30], de la regulación del espacio de tareas [31], del control del espacio conjunto [32, 33] y del control coordinado [34]. Además, la definición de la orientación del usuario del espacio de tareas para el control coordinado [31] y el desarrollo de medidas de rendimiento significativos [35–37] se han investigado fructíferamente en los años noventa. Debe tenerse en cuenta que cuando se realizan tareas cooperativas entre robots manipuladores y el hombre se debe contar con un número considerable de sensores externos e internos, a fin de evitar que el usuario pueda sufrir algún daño físico. Es importante destacar que las tareas donde resulta necesaria la intervención del ser humano son en su mayoría aplicaciones donde se necesitan cualidades como: habilidad, inteligencia y juicio, las cuales son habilidades propias del ser humano [15]. Referente a los sistemas cooperativos se puede realizar la siguiente clasificación:

- **Maestro-Esclavo [38]**: este enfoque se utilizó en los primeros trabajos realizados sobre el tema; consiste en aplicar el control de posición en uno de los manipuladores (maestro) y el control de fuerza en el resto de los robots (esclavos). Los *manipuladores esclavos* se limitan a seguir el movimiento y la evolución del *manipulador maestro*. Este enfoque tiene una implementación simple mediante algoritmos de control sencillos, pero no aprovecha muchas de las ventajas introducidas por el uso de múltiples robots, como por ejemplo: el reparto de la carga entre manipuladores.

- **Control Conjunto [17]:** en este enfoque se considera la cadena cinemática como un todo, para ello se modela y se controla el sistema completo. El principal inconveniente de este método es que dentro de la cadena cinemática se encuentra el elemento a manipular el cual tiene ciertas características y especificaciones distintas, lo que hace perder generalidad y homogeneidad al método. La principal ventaja de este esquema es que la coordinación necesaria se trata de forma natural optimizando los criterios establecidos.
- **Control de Impedancia [26]:** este esquema proporciona a cada uno de los robots el comportamiento de un sistema físico compuesto por una masa, un resorte y un amortiguador, Figura 1.1. En el caso de que no se apliquen fuerzas externas en el efector final éste sigue su *trayectoria nominal*, en caso contrario el robot modifica dicha trayectoria del mismo modo que lo haría una masa sometida a dichas fuerzas y ligada a la trayectoria nominal mediante un resorte y un amortiguador. Este esquema tiene la ventaja de que la información requerida del sistema es casi nula, por lo tanto, es muy útil para sistemas poco estructurados o sistemas en los que se dispone de muy poca información sobre su estructura geométrica.

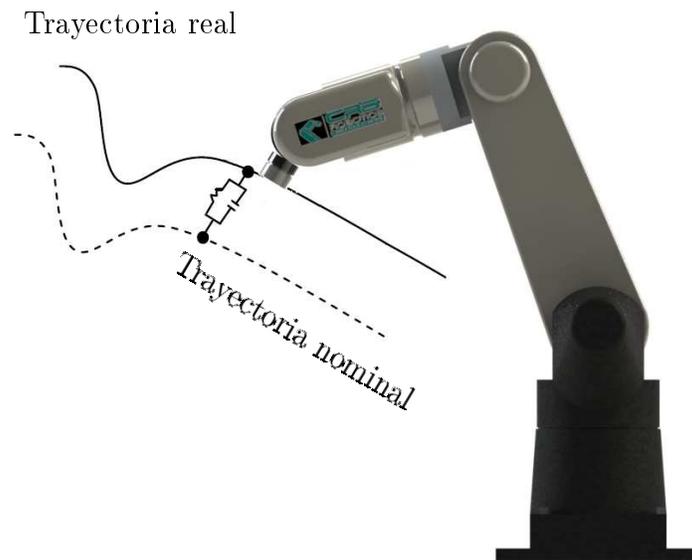


Figura 1.1: Trayectorias nominal y real de un robot, control impedancia.

- **Control de Fuerzas [39]:** en este enfoque se trabaja directamente sobre el modelo del objeto manipulado describiendo las diferentes fuerzas que ejercen los diferentes manipuladores sobre el cuerpo lo que permite obtener la fuerza total que actúa sobre el cuerpo y por lo tanto la trayectoria que seguirá.
- **Control Posición/Fuerza o Híbrido [40, 41]:** consiste en descomponer el espacio en las fuerzas y las posiciones que se pretenden controlar. En caso de manipulación donde intervienen dos o más manipuladores lo que se busca es realizar esta descomposición controlando por un lado la trayectoria del objeto manipulado y por otro las fuerzas internas que actúan sobre el mismo.

Para llevar a cabo tareas de manipulación cooperativa de forma exitosa, es crucial controlar la interacción entre el sistema formado por l robots y el objeto, es decir, el sistema de control debe garantizar que la posición real del efector final de cada manipulador se desvíe lo menos posible de la posición deseada a lo largo de la trayectoria especificada. Durante esta interacción, el medio ambiente establece restricciones sobre las trayectorias que pueden ser seguidas por cada efector final [42], es decir, el entorno define el volumen donde se pueden ejecutar los movimientos de cada robot; este espacio está limitado por las características mecánicas del sistema cooperativo (*movimiento restringido*) [43]. Por lo tanto, el éxito en la ejecución de la tarea depende de la exactitud del planteamiento y funcionamiento del controlador, por lo que es necesario contar con un modelo matemático preciso del sistema *manipuladores–objeto–entorno*, lo que puede ser bastante complicado.

1.1. Motivación

Manipular un objeto usando un sistema cooperativo de robots manipuladores no es una tarea sencilla debido a que se necesita controlar de forma individual cada manipulador antes, durante y después del contacto con el objeto. Actualmente existen varias propuestas de control que le permiten al sistema cooperativo cumplir con la tarea asignada, sin embargo, todas necesitan definir la fuerza aplicada sin considerar las propiedades físicas del objeto, es decir, la fuerza aplicada por cada manipulador es en todo momento la misma sin importar la forma, el material, el tamaño o el peso del objeto. Por lo tanto, los experimentos que se realizan bajo este esquema solo manipulan el mismo objeto ubicado en la misma posición, la cual se considera como conocida en la mayoría de los casos. La capacidad de manipular diferentes tipos de objetos no importando sus propiedades físicas (tales como forma, material, tamaño o peso) es una característica deseable en los sistemas cooperativos; motivo por el cual es fundamental realizar el estudio de estrategias de control que permitan resolver esta problemática.

1.2. Antecedentes

El primer trabajo que existe en los registros de la IEEE que expone el control de robots cooperativos data de 1985 y fue realizado por Joonhong y Chyung [44]. En este artículo se estudia el problema de controlar dos brazos robot de una manera cooperativa cuyo objetivo principal es mover un objeto al sujetarlo en dos puntos diferentes haciendo uso de una estructura de control de posición que emplea las relaciones diferenciales entre el objeto y los dos brazos [44]. Un año más tarde, Clark *et al.* presentaron una comparación de leyes de control usadas en un sistema de robots cooperativos del tipo maestro–esclavo, en este trabajo se realizaron simulaciones usando una carga útil con un resorte de compensación, los resultados obtenidos mostraron la vinculación física bidireccional entre la salida de posición y la regulación de la fuerza dinámica [45].

En 1987, Arimoto *et al.* presentan un esquema de control de movimiento cooperativo aplicable a brazos robot o dedos robóticos [46]. Ese mismo año Joonhong y Chyung presentan una modificación a su trabajo previo al definir la trayectoria de los robots en coordenadas Cartesianas [47]. Para 1988 se dio un gran aumento en la investigación de los robots cooperativos, trabajos como el realizado por Yan–Ru Hu *et al.* donde se describe un control híbrido aplicado a robots cooperativos [48]; o el

hecho por Hayward *et al.* donde desarrollan un ambiente de programación y control de manipuladores cooperativos [49]; o la investigación de Stark *et al.* donde aplican el control cooperativo en la tele-robótica usando procesamiento de imagen [50].

El control de fuerza aplicado en un sistema cooperativo formado por dos manipuladores es presentado por Peng–Yung en 1989 [51]; y meses después Wen *et al.* abordan el control de movimiento presentando sus resultados en *International Conference on Robotics and Automation* [52]; en la misma conferencia es abordado por Schneider *et al.* el control de impedancia para la manipulación cooperativa de objetos presentando resultados teóricos y experimentales [26].

En la década de los noventa, se estudia la generación de trayectorias aplicadas en sistemas cooperativos [53], se estudia el uso de manos robóticas con sensores para la manipulación de objetos [54], se aplica el control dinámico de posición/fuerza para manipular un objeto considerando sus restricciones [55], se tiene en cuenta que los robots del sistema cooperativo tienen articulaciones flexibles [56], se aplica el control robusto [57] y el control adaptable predictivo [58] en robots en movimiento cooperativo, o en ambientes dinámicos [59], además se estudia el movimiento cooperativo realizado entre un robot y un ser humano [60], así como el agarre de un objeto usando dos robots manipuladores [61]. Además, se estudia el control adaptable considerando restricciones holonómicas para maniobrar un objeto de forma suave [62].

En 1999, Caccavale *et al.* describen un sistema cooperativo formado por dos manipuladores proponiendo que los robots realicen roles complementarios durante la ejecución de las tareas, planteando para uno de los robots un *control de posición* y para el otro un *control de fuerza/par* con retroalimentación, con el objetivo de disminuir la incertidumbre en la planificación de tareas [63]. En cuanto a la intersección de las áreas de trabajo que se produce cuando los robots operan cooperativamente, en 1999 Chiacchio *et al.* proponen un esquema para regular el espacio de trabajo de dos robots transportando coordinadamente un objeto rígido que sujetan con firmeza [64].

El diseño de algoritmos de control basados en el modelo depende directamente de la exactitud con la que se describe el sistema. Por lo que, realizar simulaciones sin el conocimiento exacto de la dinámica de la planta lleva a errores tanto de diseño como de implementación, [65]. Ya que los parámetros proporcionados por el fabricante son insuficientes, inexactos y en algunos casos inexistentes, [66], y como la medición directa de los parámetros físicos en la mayoría de los casos no es posible debido a la complejidad de los mecanismos, la identificación paramétrica experimental es una forma eficiente de obtener una aproximación del modelo [65]. La validez de la estimación de los parámetros depende de la calidad de la señal de entrada–salida y de la selección de la trayectoria de referencia, la cual debe excitar apropiadamente la dinámica del robot [67].

Por otro lado, para interactuar con su ambiente y cumplir con la tarea deseada, los robots necesitan una gran cantidad de sensores, lo cual puede ser un problema debido al incremento en los costos [68]. Debe tenerse en cuenta que los robots al ser equipados con sensores, dependiendo del tipo, pueden introducir incertidumbre haciendo que su cálculo requiera de una gran cantidad de tiempo y de recursos, independientemente de la tarea que se vaya a realizar [69]. Por ejemplo, los sensores de velocidad son susceptibles al ruido y pueden causar inestabilidad en el sistema, mientras que los sensores de posición proporcionan una buena medición del desplazamiento, por lo cual es conveniente estimar la velocidad. Asimismo, dado que muchas estructuras de control requieren del uso de sensores

de fuerza, el sistema está sujeto a la precisión de las mediciones realizadas lo que puede generar incertidumbre. Actualmente, el problema de observación de la fuerza ha sido resuelto de varias formas tales como la propuesta por Huang *et al.* en donde se usan transformaciones no lineales, [70]; o mediante la aplicación del control H^∞ tal y como se explica en [71]; o con la aplicación de observadores tipo Luenberger [72, 73], o usando control de fuerza en lazo abierto [68]; o con observadores de fuerza/velocidad lineales [74] u observadores basados en modos deslizantes [75].

Ya que en las tareas de manipulación la posición y la fuerza en el punto de contacto deben ser controladas simultáneamente, Raibert y Craig (1981) propusieron el *control híbrido de posición/fuerza* mediante la incorporación de una matriz de selección de cumplimiento (*Compliance Selection Matrix*) que distingue los componentes del control de posición a partir de los componentes del control de fuerza en coordenadas Cartesianas [76], mientras que MaClamroch y Wang (1990) propusieron una prueba de estabilidad local mediante la retroalimentación lineal del control cuando la posición constante del objeto y la fuerza de contacto son conocidas [77]. Murphey *et al.* (2008) estudiaron el efecto del contacto intermitente y las incertidumbres del entorno, concluyendo que estos efectos pueden ser aminorados mediante el uso del *control adaptable descentralizado basado en el control híbrido* [78].

Por otro lado, Arimoto *et al.* en 1993 proponen el *Principio de Ortogonalización*, el cual separa las señales de posición de las de fuerza, considerándolas ortogonales entre sí, mediante el uso de una matriz que sirve para proyectarlas sobre un plano tangente a la superficie en cada punto de contacto instantáneo, es decir, cuando se imprime una fuerza sobre una superficie rígida (restricción) y al mismo tiempo existe un desplazamiento sobre ella, el vector de velocidad está contenido en el plano tangente al punto de contacto, mientras que la aplicación de la fuerza es perpendicular al plano [79]. El principio de ortogonalización está relacionado con dos tipos de control: el *control híbrido de seguimiento de trayectoria* y el *control adaptable basado en el modelo*. El primero supone que el modelo dinámico incluye las características de fricción y está disponible, además considera que las señales de posición, velocidad y momentum son medibles en tiempo real. Mientras que el *control adaptable basado en el modelo* se fundamenta en la parametrización del modelo dinámico del manipulador a través de un vector de parámetros θ cuyos componentes son funciones desconocidas o inciertas de las masas y los momentos de inercia de los eslabones [79].

En el año 2000 se realizan experimentos preliminares de microcirugía usando control de fuerza en un sistema cooperativo humano-robot [16] y Wehai Chen *et al.* centran su trabajo en el control cinemático de robots redundantes para el rastreo de trayectorias en espacio Cartesiano, proponiéndose en este artículo algunos algoritmos de interpolación aplicables a un espacio de trabajo finito [80]; en Kato *et al.* se realizan pruebas de limitación de fuerza en un sistema cooperativo que transporta un objeto [81]. La estimación del movimiento en un sistema cooperativo humano-robot es estudiado por Maeda *et al.* en el 2001 [82], y en ese mismo año Arteaga *et al.* presentan el diseño de un control robusto que usando un observador lineal puede estimar la velocidad articular utilizando solamente sensores de posición (encoders) [83].

En el 2002, el control de robots cooperativos sin medición de velocidad se estudia en Arteaga *et al.* [84]; mientras que Okumura *et al.* estudian la operación remota de un sistema cooperativo compuesto por dos robots [85]. En el trabajo expuesto en 2002 por Tinós *et al.* se estudia cómo aumenta la capacidad de carga dinámica al trabajar con manipuladores cooperativos, siendo ésta una de las ventajas más

importantes que ofrecen este tipo de sistemas [86]. En 2003, en el trabajo de Parra *et al.* se presenta la interacción háptica entre un robot PHANToM y un objeto virtual mediante el uso del control de fuerza, reproduciendo propiedades del objeto como la rugosidad y la textura [87]. Ese mismo año Fonseca *et al.* desarrollan un método de control de fuerza y par teniendo en cuenta la dinámica del sistema, aplicando éste control a un sistema cooperativo formado por dos brazos robot [88].

En Gilgueng *et al.*, se estudia un sistema cooperativo con tele-micromanipulación compuesto por un maestro (dispositivo háptico PHANToM), en este trabajo se considera que la diferente configuración cinemática y el número diferente de grados de libertad entre el maestro y el esclavo introducen un problema de mapeo. Para solucionar el problema se usa la regulación de fuerza interna usando SMMS (sistema de tele-micromanipulación maestro único multi-esclavo) [89].

En 2004, M. A. Arteaga y R. Kelly proponen un observador lineal junto con un esquema de control robusto, el cual garantiza que los errores de seguimiento y observación sean uniforme y finalmente acotados [90]. Ese mismo año, el control de la distribución de carga en un sistema cooperativo móvil es analizado por Tsuji *et al.* [91]; mientras que el control adaptable descentralizado se examina en Sadati *et al.* en una aplicación de seguimiento de trayectorias con la intención de eliminar las incertidumbres del lazo cerrado [92]; Sadati *et al.* desarrollan una variación del control descentralizado pero ahora aplicado al control de posición/fuerza sin medición de velocidad [93].

El control PD deslizante descentralizado en el espacio de trabajo considerando restricciones Jacobianas es analizado por García-Rodríguez *et al.* en el 2005, lo novedoso del enfoque radica en que no se usa el modelo del robot y no es necesario el conocimiento exacto de la matriz Jacobiana inversa [94]. Para el año 2006, Arteaga *et al.* proponen un control Cartesiano de robots sin modelo dinámico y observador, en este trabajo, un esquema de control-observador se propone para lograr el seguimiento Cartesiano exacto sin el conocimiento de la dinámica del robot manipulador [95]. Basándose en [95], Sadati *et al.* desarrollan un algoritmo de control descentralizado para sistemas cooperativos con la finalidad de controlar la posición y las fuerzas ejercidas sobre el objeto en la presencia de incertidumbres en la dinámica de los robots [96].

El control de sistemas cooperativos y la sincronización de sistemas Lagrangianos se estudia en el 2007 por Soon-Jo *et al.* En este artículo se presenta un marco de sincronización que se aplica directamente al control cooperativo de sistemas multi-agente y la sincronización de las oscilaciones en la teleoperación [97]. Ese mismo año Wenjie *et al.* consideran un sistema cooperativo con restricciones no holonómicas y desarrollan leyes de control descentralizadas variantes en el tiempo con la ayuda de la teoría de grafos, sólo ofrecen resultados de simulación [98]. En el 2011, R. García Rodríguez *et al.* proponen un neuro-esquema de control por modos deslizantes para robots manipuladores, este trabajo propone garantizar la convergencia global de la fuerza y la posición de seguimiento de errores Cartesiano en el supuesto de que el Jacobiano no se conoce con exactitud [99].

Debido a la evolución de las tareas de manipulación cooperativa en 2012 Rahman *et al.* aplican una estrategia de control basada en la percepción de peso bajo el siguiente supuesto: *el peso debido a la inercia puede ser diferente a la gravedad al levantar un objeto con asistencia eléctrica debido a que el peso percibido es distinto del peso real* [100]. En 2014, Rugthum *et al.* proponen un nuevo algoritmo adaptable para controlar un sistema cooperativo, este algoritmo compensa las fallas del actuador y garantiza la estabilidad asintótica del lazo cerrado a pesar de las incertidumbres [101].

1.3. Formulación del problema

Para el desarrollo de este trabajo se considera como caso de estudio un sistema cooperativo formado por dos robots industriales, el CRS-A255 (5 GDL) y el CRS-A465 (6 GDL), Figura 1.2, cuyo objetivo es realizar la manipulación de un objeto de peso desconocido siguiendo una trayectoria deseada.

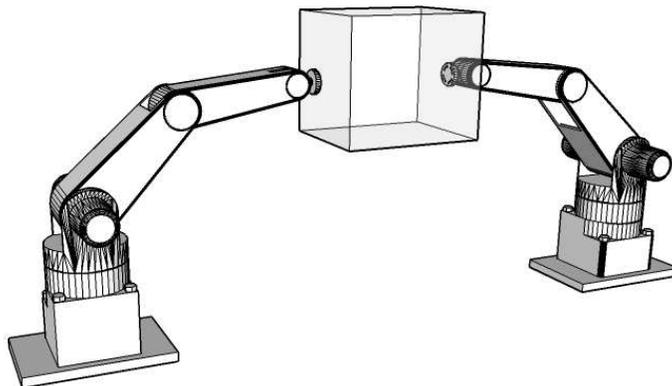


Figura 1.2: Sistema cooperativo bajo restricciones geométricas

Ya que cada manipulador debe mantener contacto con el objeto se considera que cada robot lo sostiene en un solo punto de contacto lo que provoca una reducción de los grados de libertad. De este modo, solo se usan tres articulaciones; mientras que las articulaciones restantes se frenan mecánicamente, lo que restringe el movimiento del sistema a un plano.

Se supone que el objeto a manipular es rígido y no sufre deformaciones cuando es sujetado, por lo que se modela usando un conjunto de restricciones holonómicas homogéneas las cuales restringen el movimiento del robot en cada punto de contacto ($c_i = 1$ restricción). Debido a este hecho se considera que cada robot del sistema cooperativo tiene $n_i = 3$ grados de libertad y $c_i = 1$ restricción, donde $n_i > c_i$ para $i = 1, 2$. Por simplicidad se supone $n_1 = n_2 = n$. Los grados de libertad perdidos se convierten en fuerzas de contacto por lo que deben ser incluidas en la dinámica de cada robot. Sin embargo, con la definición adecuada de las restricciones holonómicas homogéneas la dinámica del objeto no tiene que ser calculada explícitamente. Desde luego, implícitamente se debe tomar en cuenta sus dimensiones, ubicación, etcétera.

La ubicación del objeto (centro de masa) se supone conocida en relación al sistema de referencia fijo colocado en la base del robot CRS-A465. Al ser conocida esta posición los robots se desplazan a través de una trayectoria definida desde su posición inicial hasta la vecindad del objeto (planeación de la trayectoria), por lo que se puede suponer que las fuerzas aplicadas por los 2 robots son colineales, tienen la misma magnitud, pero en sentido opuesto. Se considera que el efector final de los manipuladores entra en contacto con el objeto aplicando la fuerza adecuada para sujetarlo firmemente, por lo que se supone que cuando los robots mueven el objeto, éste no rota. Además, se considera que no existe movimiento relativo, lo que se cumple de manera implícita al proponer regulación o seguimiento de la fuerza calculada.

La fuerza aplicada es medible a través de los sensores de fuerza colocados en el efector final de cada robot. Además, se supone que la fuerza aplicada en el punto de contacto y su derivada pertenecen a \mathcal{L}_∞ . Así mismo, se supone que \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 están acotadas. La posición es medible a través de los encoders de los motores, mientras que la velocidad y la aceleración son calculables a través de diferenciación numérica. También, se supone conocido el modelo del sistema cooperativo.

A través del uso del Principio de Ortogonalización se desacoplan las componentes de fuerza de las componentes de posición y velocidad, las cuales, aunque estén desacopladas, no pueden ser tratadas como problemas independientes, puesto que la fuerza aplicada por los manipuladores es el resultado del movimiento del manipulador, y los errores de movimiento son resultado de la fuerza de reacción sobre los efectores finales causada por los manipuladores. Ahora bien, el desacoplo de las señales se realiza introduciendo una matriz de proyección en coordenadas articulares. Esta matriz es definida como la proyección de la velocidad y el error de posición sobre el plano tangente a la superficie en cada punto de contacto instantáneo. Por lo tanto, las señales residuales del error de posición y la velocidad se vuelven perpendiculares al vector de fuerza, el cual es normal a la superficie en coordenadas articulares. Para preservar esta propiedad, la restricción es manipulada para obtener dos subespacios ortogonales: el espacio de fuerza y el de posición. Estos subespacios dan origen a dos transformaciones que son usadas para obtener una representación adecuada que permita eliminar términos cruzados en el análisis de estabilidad, de manera que puedan formularse controladores sencillos con pruebas de estabilidad simples, y con propiedades de convergencia de posición y fuerza.

Finalmente se considera que para errores $\tilde{\mathbf{q}}$ lo suficientemente pequeños existe una η tal que $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \eta$. Esto significa que puede realizarse un análisis de estabilidad local en una región lo suficientemente pequeña alrededor de $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Asimismo, se propuso una ley de adaptación para estimar la masa del objeto y se estableció una ganancia de adaptación γ muy pequeña debido a la dependencia de esta a $\Delta m(0)$ la cual no converge a cero. Teniendo en cuenta que se ha supuesto que la fuerza aplicada en el punto de contacto y su derivada están acotadas, y satisfaciendo las condiciones impuestas las señales de error $\tilde{\mathbf{q}}$, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ y $\Delta\lambda$ permanecen acotadas y tienen convergencia asintótica.

Hipótesis. Es posible determinar el peso de un objeto cuando se conoce su posición y la fuerza aplicada para levantarlo. Conociendo la masa del objeto es posible determinar la fuerza que necesita ser aplicada por los manipuladores para sujetar el objeto sin dañarlo y seguir una trayectoria deseada.

Alcances. Realizar la manipulación de un objeto de masa desconocida aplicando la fuerza adecuada para seguir una trayectoria sin dejar caer el objeto, garantizando que los errores de posición y fuerza tiendan a cero.

1.4. Contribuciones

En este trabajo se presenta el estudio de la ecuación dinámica de un sistema cooperativo formado por 2 robots manipuladores sujetando un objeto. Se desarrolla una estructura de control posición/fuerza basada en [1] que mejora el término de fuerza usando una función tangente hiperbólica la cual permite acotar el error de fuerza y modular la amplitud de dicha cota según se modifique la ganancia

(amplitud de la función tangente hiperbólica). Experimentalmente el uso de la función tangente hiperbólica permitió usar ganancias más pequeñas, lo que provocó que la convergencia del error de fuerza fuera más suave y rápido en comparación con la estructura propuesta en [1]. Se realiza la estimación de la masa, información que se usa para aplicar la fuerza necesaria para manipular el objeto sin dañarlo. Se presentan los resultados experimentales evaluando el desempeño de la estructura de control propuesta.

1.5. Organización de la tesis

En el Capítulo 1 se presentan los antecedentes, la motivación y las contribuciones de este trabajo. En el Capítulo 2 se exponen los preliminares matemáticos donde se incluye una descripción del modelo dinámico del sistema cooperativo, se definen sus propiedades, se describe el principio de ortogonalización y se realizan algunas suposiciones sobre los manipuladores y el objeto. El desarrollo de la ley de control se muestra en el Capítulo 3, mientras que los resultados experimentales se exhiben en el Capítulo 4. Finalmente, se presentan las conclusiones y los apéndices de este trabajo.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

En este capítulo se desarrolla la dinámica del sistema cooperativo y se presentan algunas definiciones y propiedades que sirven para el diseño de leyes de control.

2.1. Sistema cooperativo polinómico homogéneo

Cuando un sistema cooperativo sostiene un objeto indeformable en c puntos independientes, un conjunto de c restricciones independientes es impuesto sobre cada punto de contacto, Figura 2.1. En este trabajo se considera un sistema cooperativo formado por 2 robots manipuladores de $n_i = n$ grados de libertad, para $i = 1, 2$, y $c_i = 1$ restricciones originadas por el contacto con el objeto a manipular [102].

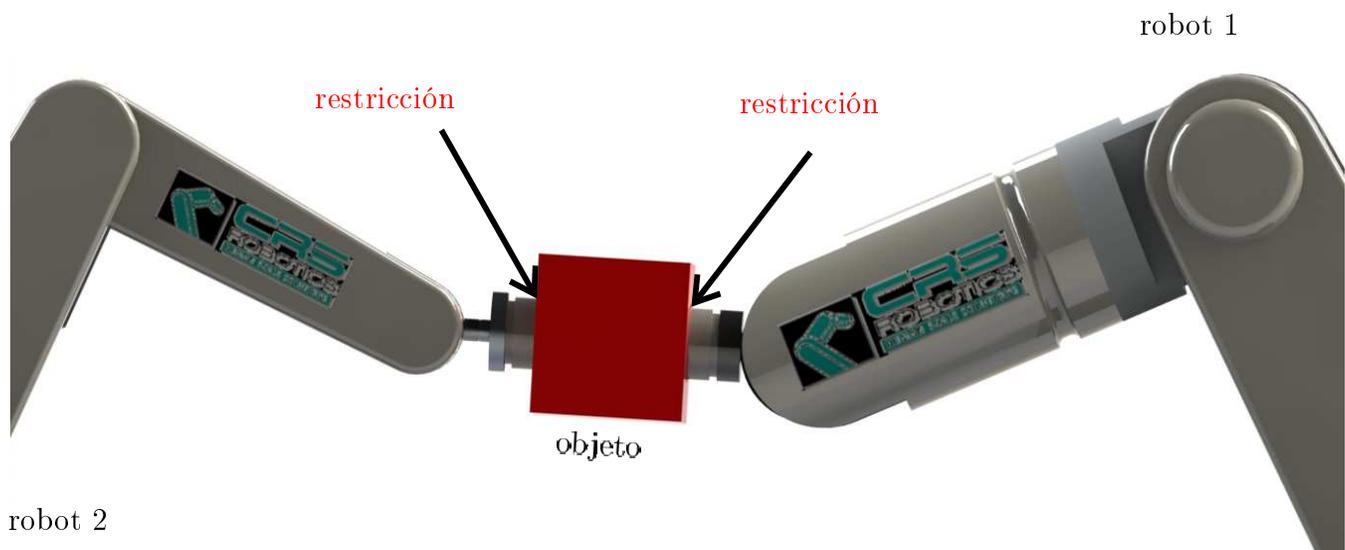


Figura 2.1: Manipulación de un objeto usando robots cooperativos

Debe tenerse en cuenta que un manipulador al desplazarse libremente no tiene restricciones de movimiento y por lo tanto no existen fuerzas de reacción producidas por su entorno. Si en esta situación se pudiera colocar en la muñeca un sensor de fuerza ideal, sólo se registrarían fuerzas inerciales debido a la aceleración del efector final [69]. En cambio, cuando el manipulador tiene contacto con su entorno, uno o más grados de libertad se pierden, ya que no podrá moverse a través de la superficie, sino que estará ejerciendo una *fuerza normal \mathbf{N} sobre la superficie*.

Para desarrollar las ecuaciones que describen la dinámica de cada manipulador que forma parte del sistema cooperativo, es necesario incorporar un conjunto de restricciones impuestas a nivel cinemático por el objeto a ser manipulado, las cuales restringen el movimiento de los robots en cada punto de contacto, por lo que controlar la fuerza con la que un manipulador interactúa con el ambiente para realizar una tarea puede tratarse en términos de *restricciones*.

Definición 1. [68] *Una restricción holonómica se define como aquella ecuación algebraica que aparece en un sistema a nivel cinemático limitando la configuración geométrica y el movimiento del sistema siendo impuesta por el entorno.* ■

La restricción holonómica se clasifica como:

- **Restricción reonómica [102, 103]:** una restricción se dice reonómica si depende del tiempo, es decir, la variable de tiempo t aparece de manera explícita. Esta restricción es variante en el tiempo y está representada como:

$$\varphi_i(\mathbf{q}_i, t) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

donde $\varphi_i \in \mathbb{R}$ es la restricción y $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones del i -ésimo manipulador. También se conoce como *restricción rheo-holonómica*.

- **Restricción escleronómica [102, 103]:** una restricción es escleronómica si es independiente del tiempo, es decir es invariante en el tiempo y su representación general está dada por una función en el espacio articular como:

$$\varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

donde $\varphi_i \in \mathbb{R}$ es la restricción y $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones del i -ésimo manipulador. También se conoce como *restricción esclero-holonómica*.

Definición 2. [103] *La cooperación es holonómica, si sobre un sistema cooperativo formado por l manipuladores las restricciones de movimiento son holonómicas.* ■

Definición 3. [102] *Las restricciones de movimiento impuestas sobre el sistema cooperativo son homogéneas si las restricciones de movimiento de un sistema cooperativo dadas por (2.2) pueden ser escritas de la siguiente forma:*

$$\varphi_i(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_l) = \sum_{i=1}^l \varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

donde $\varphi_i(\mathbf{q}_i)$ depende sólo de las variables articulares del i -ésimo robot. ■

Al incorporar las *restricciones holonómicas* impuestas a nivel cinemático (ecuaciones algebraicas) en la dinámica del sistema cooperativo (ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales) se tiene como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas [103].

Suposición 1. [102] *Si se considera que cada robot sostiene al objeto en un sólo punto de contacto, entonces el número de restricciones del sistema cooperativo será igual al número de manipuladores que lo forman, es decir $c = l$.* ■

El Jacobiano de las restricciones se calcula diferenciando (2.2) y está dado por

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) = \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} = \nabla \varphi_i(\mathbf{q}_i) \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es una matriz ortogonal que se considera de rango completo porque se supone que todas las restricciones son independientes [102]. $\nabla \varphi_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ denota el gradiente de la superficie del objeto $\varphi_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}$ cuya finalidad es mapear cualquier vector en \mathbb{R}^n sobre un plano normal **(PN)** a un plano que es tangente **(PT)** al punto de contacto **(PC)** descrito por (2.2), tal y como se observa en la Figura 2.2, [102, 104].

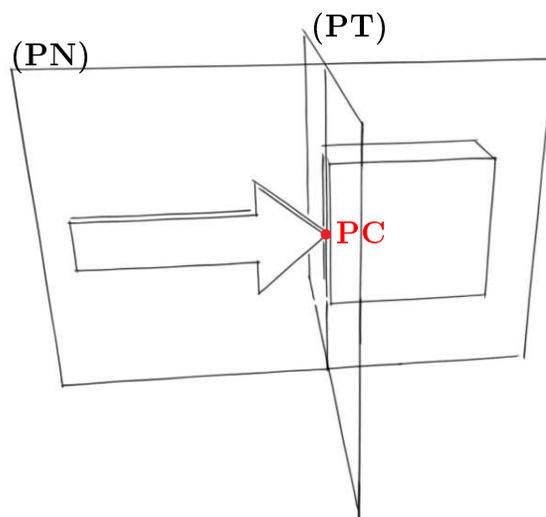


Figura 2.2: Mapeo de un vector en un plano normal

Si las restricciones de movimiento impuestas sobre cada robot del sistema cooperativo sólo dependen de las variables articulares del mismo robot y no de los restantes se dice que las restricciones son homogéneas. Además, al no existir movimiento relativo entre el efector final de cada manipulador y el objeto se puede establecer una constante que relacione geoméricamente los efectores de los manipuladores entre sí. Por ende, la posición del efector final de dicho manipulador puede ser definida en términos de las posiciones de los manipuladores restantes. Además, la velocidad del efector final de cada manipulador también puede ser expresada en términos de las velocidades de los restantes; ya que de no ser así se podría llegar al caso en el que se pierde el punto de contacto entre alguno de los manipuladores y el objeto [68].

Suposición 2. [102,104] *Si las restricciones holonómicas son homogéneas, se pueden escribir las restricciones de posición, velocidad y aceleración de la siguiente forma:*

$$\varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

$$\dot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

$$\ddot{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

donde $\varphi_i(\mathbf{q}_i)$ define la superficie del objeto (restricción) y $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) = \nabla \varphi_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es el gradiente de dicha superficie. ■

Observación 1. [102] *Si se calcula adecuadamente la restricción holonómica es posible identificar los requerimientos que debe satisfacer la trayectoria de los robot para garantizar que los manipuladores permanecerán en contacto con la superficie del objeto.* ■

Usando la relación de cinemática directa, que está en función de las variables articulares $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$, definida como:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{q}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i(\mathbf{q}_i) \\ \boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{q}_i) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

donde $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ el vector de posición del i -ésimo sistema de referencia \sum_i ubicado en el efector final del i -ésimo robot manipulador, $\boldsymbol{\phi}_i \in \mathbb{R}^3$ es el vector de orientación del i -ésimo efector final, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^6$ denota las variables de posición y orientación cartesiana. Se pueden relacionar a nivel cinemático las velocidades cartesianas y articulares por el Jacobiano analítico $\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ del i -ésimo manipulador de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\partial \mathbf{f}_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (2.9)$$

La restricción (2.2) puede expresarse en las coordenadas del espacio de trabajo de la siguiente forma:

$$\varphi_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

y equivalentemente, el Jacobiano de las restricciones en el espacio de trabajo se calcula derivando (2.10)

$$\mathbf{J}_{\varphi_{x_i}}(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} = \nabla \varphi_i(\mathbf{x}_i) \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{J}_{\varphi_{x_i}}(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Suposición 3. [105] *La restricción $\varphi_i(\mathbf{x}_i)$ es diferenciable en \mathbf{q}_i , lo que describe la relación entre el gradiente en espacio articular y el gradiente en el espacio de tarea, lo que puede expresarse como*

$$\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{J}_{\varphi_{x_i}}(\mathbf{x}_i) \mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i). \quad (2.12)$$

■

2.2. Principio de ortogonalización

El principio de ortogonalización es propuesto como una extensión del control híbrido de robots manipuladores bajo restricciones geométricas. Este principio tiene la finalidad de desacoplar las componentes de fuerza de las componentes de posición y velocidad [79, 102, 104, 106], ya que cuando se imprime una fuerza sobre una superficie rígida (restricción) y se realiza un desplazamiento sobre ella, el vector de velocidad queda contenido en un plano tangente (**PT**) al punto de contacto (**PC**), mientras que la fuerza aplicada es perpendicular a dicho plano [105], tal y como se observa en la Figura 2.3.

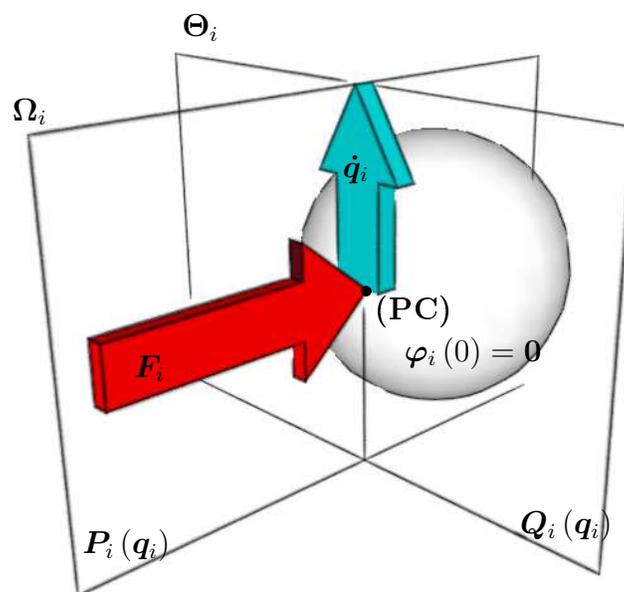


Figura 2.3: Descomposición geométrica en el punto de contacto.

El desacoplo de las señales se realiza introduciendo una matriz de proyección en coordenadas articulares. Esta matriz es definida como la proyección de la velocidad y el error de posición sobre el plano tangente a la superficie en cada punto de contacto instantáneo. Por lo tanto, las señales residuales del error de posición y la velocidad se vuelven perpendiculares al vector de fuerza, el cual es normal a la superficie en coordenadas articulares [79]. Para preservar esta propiedad, la restricción es manipulada para obtener dos subespacios ortogonales: el espacio de fuerza Ω_i y el de posición Θ_i , (ver Figura 2.3). Estos subespacios dan origen a dos transformaciones que son usadas para obtener una representación adecuada que permita eliminar términos cruzados en el análisis de estabilidad, de manera que puedan formularse controladores sencillos con pruebas de estabilidad simples, y con propiedades de convergencia de posición y fuerza [69]. La matriz de transformación $Q_i(\mathbf{q}_i)$ proyecta a un vector al subespacio de posición Θ_i , mientras que la matriz $P_i(\mathbf{q}_i)$ lo proyecta al subespacio de la fuerza Ω_i , (ver Figura 2.3).

Con base en el principio de ortogonalización se puede enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad 1. [1, 107] *El vector $\dot{\mathbf{q}}_i$ puede ser escrito de la siguiente forma:*

$$\dot{\mathbf{q}}_i = Q_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + P_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = Q_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (2.13)$$

donde $P_i(\mathbf{q}_i) = J_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) J_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $Q_i(\mathbf{q}_i) = I - P_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $\text{rango}(Q_i) = n - 1$; I es la matriz identidad; $J_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = J_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) [J_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) J_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)]^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es la pseudo inversa de Moore-Penrose. $J_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)$ y $Q_i(\mathbf{q}_i)$ son ortogonales, es decir, $Q_i(\mathbf{q}_i) J_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = \mathbf{O}$ y $Q_i(\mathbf{q}_i) J_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) = \mathbf{O}$. Obsérvese que $\varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}$, entonces $J_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}$, $Q_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i$ y $P_i(\mathbf{q}_i) J_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) = J_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)$. ■

Suposición 4. [102] *Se puede considerar que existen constantes finitas positivas c_{0i} y c_{1i} tal que satisfacen*

$$c_{0i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n} \|J_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\| \quad (2.14)$$

$$c_{1i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n} \|J_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\| \quad (2.15)$$

La **Suposición 4** es bastante razonables para robots con articulaciones de revolución, puesto que los elementos de \mathbf{q}_i aparecen como argumentos de funciones trigonométricas (senos y cosenos). Esta es la razón de que (2.14) y (2.15) sean válidas.

Observación 2. [105] *De igual forma, el vector $\dot{\mathbf{x}}_i$ puede expresarse como:*

$$\dot{\mathbf{x}}_i = Q_{x_i}(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i + P_{x_i}(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i = Q_{x_i}(\mathbf{x}_i) \dot{\mathbf{x}}_i, \quad (2.16)$$

con $Q_{x_i}(\mathbf{x}_i) = I - J_{\varphi_{x_i}}^+(\mathbf{x}_i) J_{\varphi_{x_i}}(\mathbf{x}_i)$ donde $\text{rango}(Q_{x_i}) = n - 1$; $P_{x_i} = J_{\varphi_{x_i}}^+(\mathbf{x}_i) J_{\varphi_{x_i}}(\mathbf{x}_i)$. Una vez más $J_{\varphi_{x_i}}^+(\mathbf{x}_i)$ y $Q_{x_i}(\mathbf{x}_i)$ son ortogonales. ■

Se considera que la trayectoria deseada cumple con la restricción (2.10), es decir, $\varphi_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_{d_i}) = \mathbf{0}$, por lo que el error de seguimiento se define como:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{d_i} \\ &= \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i)\mathbf{x}_i + \mathbf{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i)\mathbf{x}_i - \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_{d_i})\mathbf{x}_{d_i} - \mathbf{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_{d_i})\mathbf{x}_{d_i}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Hecho 1. [105] *Para errores lo suficientemente pequeños es posible obtener la siguiente aproximación:*

$$\tilde{\mathbf{x}}_i \approx \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i)[\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{d_i}] = \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i)\tilde{\mathbf{x}}_i. \quad (2.18)$$

donde $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ proyecta a $\tilde{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{R}^n$ en el sub-espacio de la posición Θ_i . Además, para (2.16) se cumple:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i \approx \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i)[\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_{d_i}] = \mathbf{Q}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i)\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i. \quad (2.19)$$

Esto significa que un análisis de estabilidad local puede realizarse en una región lo suficientemente pequeña alrededor de $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}$, donde (2.18) y (2.19) se satisfacen. En la Figura 2.4(a), se observa el caso donde el error de seguimiento es grande, mientras que en la Figura 2.4(b) se puede observar que $\tilde{\mathbf{x}}_i$ tiende a ser tangente a la superficie mientras se vuelve más pequeña [77].

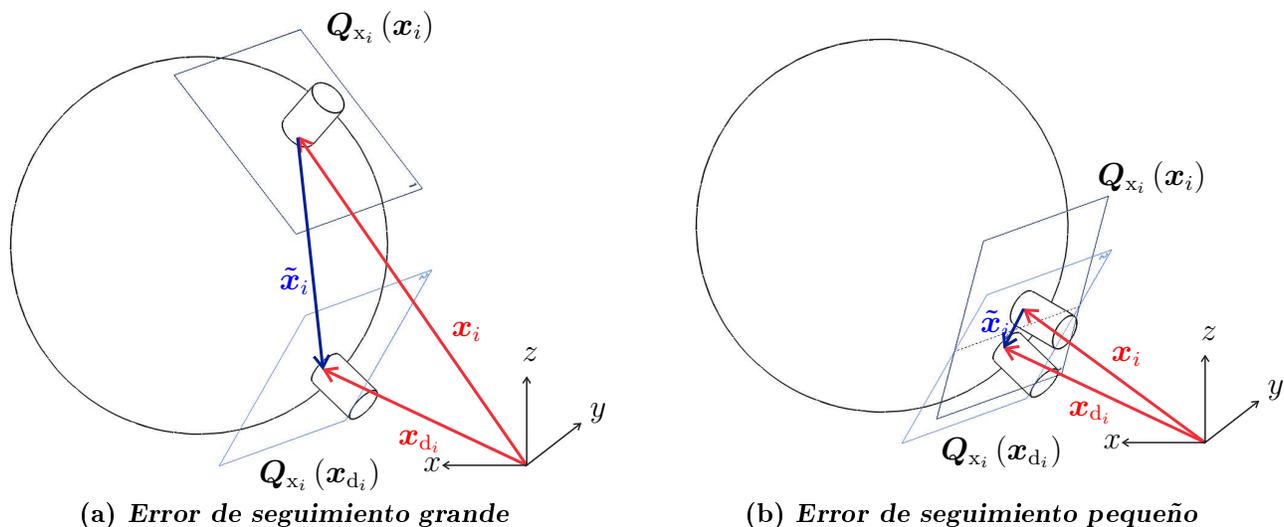


Figura 2.4: Plano tangente a la superficie (error de seguimiento).

Debe tenerse en cuenta que por simplicidad para ilustrar esta suposición se usan las coordenadas del espacio de trabajo. Sin embargo, se puede llegar a la misma conclusión en coordenadas articulares, es decir, si existe una η_i lo suficientemente pequeña tal que si

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i \quad (2.20)$$

entonces

$$\tilde{\mathbf{q}}_i \approx \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \tilde{\mathbf{q}}_i \quad (2.21)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i \approx \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i, \quad (2.22)$$

manteniéndose válido para errores $\tilde{\mathbf{q}}_i$ lo suficientemente pequeños. ■

El uso del principio de ortogonalización permite desacoplar la ley de control en dos subespacios ortogonales: uno para la posición y otro para la fuerza, los cuales, aunque estén desacoplados, no pueden ser tratados como problemas independientes, puesto que la fuerza aplicada por los manipuladores es el resultado del movimiento del manipulador, y los errores de movimiento son resultado de la fuerza de reacción sobre los efectores finales causada por los manipuladores [102].

Suposición 5. [102] *Se asume que $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\Lambda}_i = \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$ donde $\boldsymbol{\Lambda}_i > \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.* ■

2.3. Dinámica

Un robot manipulador que interactúa con su entorno puede ser modelado por un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas no lineales que provienen de aplicar la formulación de Euler-Lagrange [108]. Considérese un sistema cooperativo formado por l robots cuyo objetivo es manipular un objeto, por lo que la posición del efector final de cada uno de ellos queda geoméricamente restringida [102].

Suposición 6. [68, 102] *El objeto manipulado es rígido y no sufre deformaciones cuando es sujetado.* ■

El cuerpo a ser manipulado se debe modelar usando un conjunto de restricciones holonómicas homogéneas, ecuación (2.3), las cuales restringen el movimiento del robot manipulador en cada punto de contacto provocando una reducción de los grados de libertad de movimiento en el sistema cooperativo debido a que el efector final de cada uno de los manipuladores debe mantener el contacto con el objeto, por lo que no se puede mover en todas las direcciones [102].

Suposición 7. [68] *Las restricciones de movimiento impuestas sobre el sistema cooperativo son holonómicas y homogéneas.* ■

Los grados de libertad de movimiento perdidos *se convierten en fuerzas de contacto* por lo que deben ser incluidas en la dinámica de cada uno de los robots que forman el sistema cooperativo [109]. Debe tenerse en cuenta que con la definición adecuada de las restricciones holonómicas homogéneas la dinámica del objeto no tiene que ser calculada explícitamente para controlar un sistema cooperativo. Desde luego, implícitamente se debe tomar en cuenta sus dimensiones, peso, etcétera [102].

2.3.1. Modelo dinámico del sistema cooperativo

Considérese un sistema cooperativo formado por dos robots, cada uno con n grados de libertad y 1 restricción, donde $n > 1$ para $i = 1, 2$; cuya tarea es manipular un objeto (Figura 2.5). Se asume $n_i = n$ y $c_i = 1$. En el centro de masa del objeto se encuentra el sistema de referencia Σ_C cuya posición en el marco de referencia de la base (sistema de referencia fijo) Σ_0 está dada por el vector $\mathbf{p}_C \in \mathbb{R}^n$, mientras que $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$ describe la posición de los puntos de contacto entre los efectores y el objeto, todo expresado en el sistema de coordenadas Σ_0 . El sistema de referencia fijo al i -ésimo efector final del i -ésimo robot manipulador es Σ_i [13, 102]. El modelo dinámico del sistema es

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}_i) \mathcal{F}_i \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas articulares generalizadas; $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de masas e inercias, la cual es simétrica y positiva definida; $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de Coriolis y fuerza centrípeta; $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal positiva semidefinida que describe los coeficientes de fricción viscosa en las articulaciones; $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^n$ es el par gravitacional; $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares que actúan en las articulaciones, [110]; $\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el Jacobiano analítico del manipulador y $\mathcal{F}_i \in \mathbb{R}^n$ describe las fuerzas y momentos aplicados por el efector final en el punto de contacto.

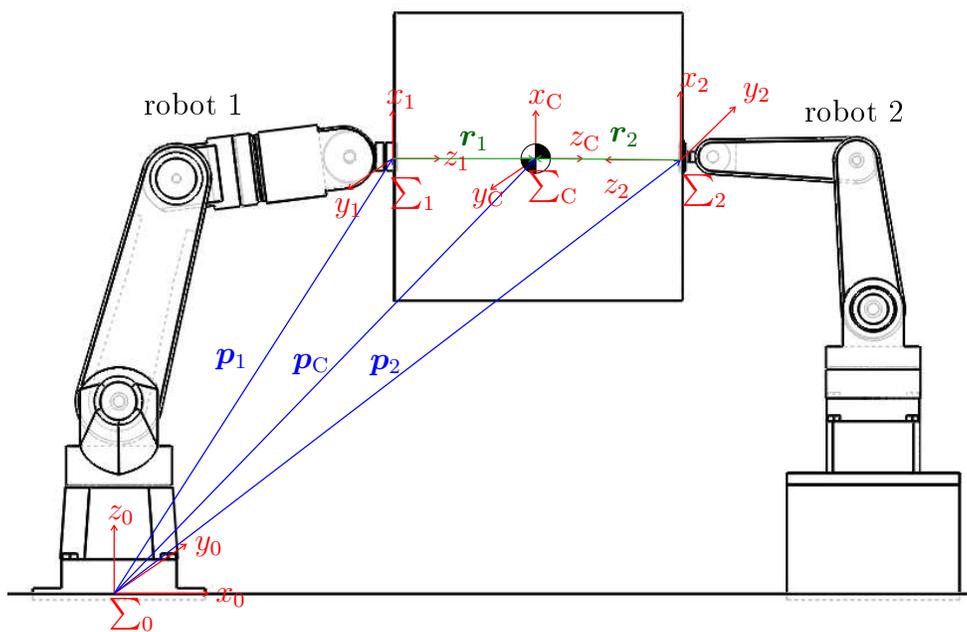


Figura 2.5: Sistemas de referencia del sistema cooperativo

El término $\mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}_i) \mathcal{F}_i$ es el par debido a la interacción con el medio, es decir, es la fuerza total aplicada por los efectores como resultado de los torques en las articulaciones, [42]. Téngase en cuenta que el efector final de estos manipuladores sostiene un objeto, por lo tanto, la posición relativa (efectores–objeto) no cambia durante la ejecución del control.

Suposición 8. [102] *Los brazos robots no entran en configuraciones singulares durante toda la tarea.* ■

La fuerza \mathcal{F}_i está formada por dos elementos, $\mathbf{J}_{\varphi_{x_i}}^T(\mathbf{q}_i) \lambda_i$ describe la fuerza que permiten sujetar el objeto y \mathbf{f}_i determina la fuerza que permite moverlo, por lo que está definida de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}_i = \mathbf{J}_{\varphi_{x_i}}^T(\mathbf{q}_i) \lambda_i + \mathbf{f}_i \quad (2.24)$$

donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ son los multiplicadores de Lagrange que representan la magnitud de la fuerza de contacto; $\mathbf{J}_{\varphi_{x_i}}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ describe la dirección de dicha fuerza (normal al punto de contacto); y $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^n$ es la fuerza inercial debido al movimiento del objeto.

Al sustituir (2.12) y (2.24) en (2.23) se tiene

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \lambda_i + \mathbf{J}_i^T(\mathbf{q}_i) \mathbf{f}_i \quad (2.25)$$

donde $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Por simplicidad se considera que todos los robots tienen articulaciones rotacionales, lo que permite enunciar las siguientes propiedades:

Propiedad 2. [1, 107] $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ *satisface*

$$\lambda_{h_i} \|\mathbf{x}_i\|^2 \leq \mathbf{x}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{x}_i \leq \lambda_{H_i} \|\mathbf{x}_i\|^2 \quad \forall \mathbf{q}_i, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n \quad (2.26)$$

donde $\lambda_{h_i} \triangleq \min_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min_i}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i))$, $\lambda_{H_i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max_i}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i))$, y $0 < \lambda_{h_i} \leq \lambda_{H_i} < \infty$. ■

Propiedad 3. [1, 107] *Con la apropiada definición de $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$, la matriz $[\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)]$ es antisimétrica.* ■

Propiedad 4. [1, 107] *El vector $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x}_i) \mathbf{y}_i$ satisface $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x}_i) \mathbf{y}_i = \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{y}_i) \mathbf{x}_i \quad \forall \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^n$.* ■

2.3.2. Modelo del objeto

Sea un objeto de masa m cuyo movimiento se produce por la aplicación de las fuerzas \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 , tal y como se observa en el diagrama de cuerpo libre descrito en la Figura 2.6. La ecuación de movimiento del objeto en coordenadas articulares se define como:

$$m\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + m\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 \quad (2.27)$$

donde $m \in \mathbb{R}$ es la masa del objeto.

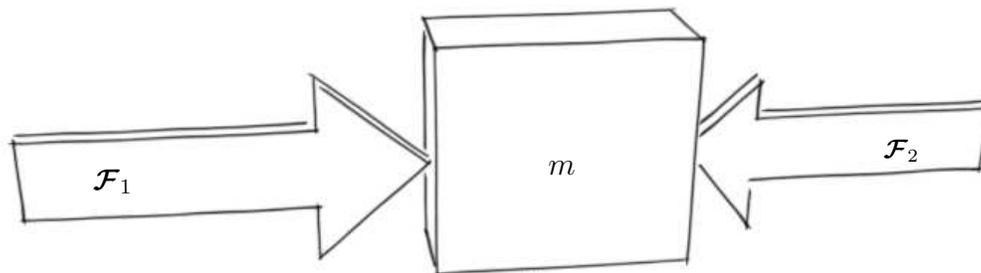


Figura 2.6: Diagrama de cuerpo libre

Suposición 9. Cuando los manipuladores mueven el objeto, éste no rota, es decir, sólo se considera el movimiento de traslación del objeto. ■

2.3.3. Fuerza de contacto

Los multiplicadores de Lagrange $\lambda_i \in \mathbb{R}$ representan la magnitud de la fuerza de contacto, mientras que $\mathbf{J}_{\varphi_{x_i}}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^n$ describe la dirección de dicha fuerza, la cual es normal al punto de contacto [102], tal y como se define en (2.24).

Suposición 10. $\mathbf{J}_{\varphi_{x_1}}^T(\mathbf{q}_1)\lambda_1$ y $\mathbf{J}_{\varphi_{x_2}}^T(\mathbf{q}_2)\lambda_2$ son colineales, tienen la misma magnitud pero en sentido opuesto, tal y como se observa en la Figura 2.6, es decir

$$\mathbf{J}_{\varphi_{x_1}}^T(\mathbf{q}_1)\lambda_1 - \mathbf{J}_{\varphi_{x_2}}^T(\mathbf{q}_2)\lambda_2 = \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

Para cumplir con la **Suposición 10** es necesario realizar la etapa de planeación. Debe tenerse en cuenta que se conoce la ubicación del centro de masa del objeto, no así su peso, el cual está referido al sistema de referencia fijo colocado en la base del robot. Para llegar a la vecindad del punto de contacto se realiza un control en movimiento libre y de ahí se procede a aplicar la misma fuerza sobre el objeto para sujetarlo. ■

Suposición 11. *La fuerza aplicada en el punto de contacto (multiplicador de Lagrange) λ_i y su derivada $\frac{d}{dt}(\lambda_i)$ pertenecen a \mathcal{L}_∞ .* ■

La validéz de la **Suposición 11** se debe a que la fuerza aplicada por los manipuladores físicamente es finita.

Condición 1 (Condición de no deslizamiento). *Para que no exista deslizamiento, la fuerza de contacto debe cumplir con*

$$\lambda \geq \frac{mg}{2\mu} \quad (2.29)$$

donde μ es el coeficiente de fricción estático, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$. ■

Capítulo 3

Control de posición/fuerza con estimación de masa

En este capítulo se presenta un algoritmo de control de seguimiento de posición y fuerza empleando un estimador de masa usado en un sistema cooperativo formado por dos robots manipuladores. Cabe señalar que un algoritmo de control de seguimiento de posición en movimiento libre (sin restricciones) es usado con la finalidad de mover los robots desde su posición inicial hasta tocar el objeto; mientras que el esquema de control propuesto es usado para manipular el objeto (movimiento restringido). Una vez que termina la manipulación se vuelve a usar el algoritmo de control en movimiento libre para llevar de regreso a los robots a su posición original. El control propuesto garantiza convergencia asintótica a cero de los errores de posición y fuerza. Las propiedades de estabilidad del sistema cooperativo en lazo cerrado con la ley de control propuesta se prueban por medio de un análisis de estabilidad basado en el método directo de Lyapunov y en algunas propiedades del sistema cooperativo.

3.1. Control propuesto

Para el análisis del controlador de posición/fuerza se asume $n_1 = n_2 = n$ y $c_i = 1$. Además, se definen las siguientes variables auxiliares

$$\Delta\lambda_i \triangleq \lambda_i - \lambda_{di} \quad (3.1)$$

$$\Delta F_i \triangleq \int_0^t \Delta\lambda_i d\tau \quad (3.2)$$

$$\Delta m \triangleq \hat{m} - m \quad (3.3)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{s}_i \triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{q}_{di} \in \mathbb{R}^n$ es la trayectoria deseada la cual es suave y acotada satisfaciendo $\varphi_i(\mathbf{q}_{di}) = 0$, $\mathbf{q}_{ri} \in \mathbb{R}^n$ es la señal de referencia nominal, $\lambda_{di} > 0$ es la fuerza deseada aplicada por cada manipulador sobre el objeto, $(\hat{\cdot})$ y $\Delta(\cdot)$ representan el error de (\cdot) y $(\hat{\cdot})$ es el valor estimado de (\cdot) .

Se define la siguiente señal de referencia nominal

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) [\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i] + \xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i) \quad (3.6)$$

donde $\xi_i > 0$, $\Lambda_i > \mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con rango $(\mathbf{Q}_i) = n - 1$; \mathbf{I} es la matriz identidad; $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) [\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)]^{-1} \in \mathbb{R}^n$ es la pseudoinversa de Moore–Penrose.

Sustituyendo (2.13) y (3.6) en (3.5) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) [\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i] - \xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i) \\ &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) [\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di} + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i] - \xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i) \\ &= \underbrace{\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) [\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i]}_{\mathbf{s}_{pi}} + \underbrace{[-\xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i)]}_{\mathbf{s}_{fi}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde \mathbf{s}_{pi} y \mathbf{s}_{fi} son ortogonales.

Derivando (3.6) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) [\dot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i] + \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) [\ddot{\mathbf{q}}_{di} - \Lambda_i \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i] + \xi_i \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \tanh(\Delta F_i) + \xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \operatorname{sech}^2(\Delta F_i) \Delta \lambda_i \quad (3.8)$$

donde $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se define de la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \frac{\partial \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i & \dots & \frac{\partial a_{1n}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i & \dots & \frac{\partial a_{nn}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

con a_{jk} elementos de $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$, $j, k = 1, \dots, n$ [1, 107], y $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^n$ se define de la misma forma que $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ en (3.9).

Ahora bien, considerando $i = 1, 2$ de (2.24) se obtiene

$$\mathcal{F}_1 = \mathbf{J}_{\varphi_{x1}}^T(\mathbf{q}_1) \lambda_1 + \mathbf{f}_1 \quad (3.10)$$

$$\mathcal{F}_2 = \mathbf{J}_{\varphi_{x2}}^T(\mathbf{q}_2) \lambda_2 + \mathbf{f}_2. \quad (3.11)$$

Sustituyendo (3.10) y (3.11) en (2.27) se tiene

$$m \mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + m \dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{J}_{\varphi_{x1}}^T(\mathbf{q}_1) \lambda_1 - \mathbf{J}_{\varphi_{x2}}^T(\mathbf{q}_2) \lambda_2. \quad (3.12)$$

Aplicando la **Suposición 10** se puede reducir (3.12) a

$$m\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + m\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2. \quad (3.13)$$

Despejando \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 de (3.13) se tiene

$$\mathbf{f}_1 = m\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + m\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{f}_2 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{f}_2 = -m\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i - m\dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{f}_1. \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.14) en (2.25) para $i = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) &= \boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1)\lambda_1 + \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \left[m\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + m\dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 \right] \\ &+ \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)\mathbf{f}_2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.15) en (2.25) para $i = 2$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{D}_2\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_2) &= \boldsymbol{\tau}_2 + \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2)\lambda_2 - \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \left[m\mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + m\dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2)\dot{\mathbf{q}}_2 \right] \\ &+ \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2)\mathbf{f}_1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se propone la siguiente ley de control para $i = 1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_1 &= \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) - \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1) [\lambda_{d1} - \xi_1 \tanh(\Delta F_1)] - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1)\mathbf{f}_2 \\ &- \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \left[\boldsymbol{\beta}_1 + \hat{m}\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \hat{m}\dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 \right] - \mathbf{K}_1\mathbf{s}_1, \end{aligned} \quad (3.18)$$

con $\boldsymbol{\beta}_1$ por definir.

Se propone la siguiente ley de control para $i = 2$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_2 &= \mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_{r2} + \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2)\dot{\mathbf{q}}_{r2} + \mathbf{D}_2\dot{\mathbf{q}}_{r2} + \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_2) - \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2) [\lambda_{d2} - \xi_2 \tanh(\Delta F_2)] - \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2)\mathbf{f}_1 \\ &+ \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \left[\boldsymbol{\beta}_2 + \hat{m}\mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \hat{m}\dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2)\dot{\mathbf{q}}_2 \right] - \mathbf{K}_2\mathbf{s}_2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

con $\boldsymbol{\beta}_2$ por definir.

Sustituyendo (3.1), (3.3) y (3.18) en (3.16) se puede calcular la dinámica en lazo cerrado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \mathbf{s}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 = & -\mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 + \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1) [\Delta\lambda_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)] \\ & - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \left[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m \mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.1), (3.3) y (3.19) en (3.17) se puede calcular la dinámica en lazo cerrado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{s}}_2 + \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) \mathbf{s}_2 + \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 = & -\mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 + \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2) [\Delta\lambda_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2)] \\ & + \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \left[\boldsymbol{\beta}_2 + \Delta m \mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

De (3.20) se despeja $\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{s}}_1$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{s}}_1 = & -\mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \mathbf{s}_1 - \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 + \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1) [\Delta\lambda_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)] \\ & - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \left[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m \mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

De (3.21) se despeja $\mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{s}}_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{s}}_2 = & -\mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) \mathbf{s}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 + \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2) [\Delta\lambda_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2)] \\ & + \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \left[\boldsymbol{\beta}_2 + \Delta m \mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

El vector de estados se define como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \Delta m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta m \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

para (3.2), (3.22) y (3.23) donde Δm , definida en (3.3), es el error paramétrico cuya dinámica está dada por (3.57).

La idea principal del diseño del controlador es mostrar que, cuando $\|\mathbf{x}_a\|$ tiende a cero, los errores de seguimiento $\tilde{\mathbf{q}}_i, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ y $\Delta\lambda_i$ también tenderán a cero.

Se propone la siguiente función definida positiva

$$V = \frac{1}{2} \left[\mathbf{s}_1^T \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \mathbf{s}_1 + m \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 + 2\xi_1 \ln [\cosh(\Delta F_1)] + \mathbf{s}_2^T \mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2) \mathbf{s}_2 + m \mathbf{s}_2^T \mathbf{s}_2 + 2\xi_2 \ln [\cosh(\Delta F_2)] + \gamma \Delta m^2 \right] \quad (3.25)$$

la cual, para facilitar el análisis, se puede separar de la siguiente forma $V = V_1 + V_2 + V_3$ tal que:

$$V_1 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{s}_1^T \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \mathbf{s}_1 + m \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 \right] + \xi_1 \ln [\cosh(\Delta F_1)] \quad (3.26)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{s}_2^T \mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2) \mathbf{s}_2 + m \mathbf{s}_2^T \mathbf{s}_2 \right] + \xi_2 \ln [\cosh(\Delta F_2)] \quad (3.27)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \gamma \Delta m^2 \quad (3.28)$$

donde $\xi_1, \xi_2 > 0$ y $\gamma > 0$. Derivando (3.26)

$$\dot{V}_1 = \mathbf{s}_1^T \mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{s}}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{H}}_1(\mathbf{q}_1) \mathbf{s}_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1) \Delta \lambda_1 + m \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1. \quad (3.29)$$

Sustituyendo (3.22) en (3.29)

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \mathbf{s}_1^T \left[-\mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \left[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m \mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \right] - \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) \mathbf{s}_1 - \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 \right. \\ & \left. + \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1) [\Delta \lambda_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)] \right] + \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{H}}_1(\mathbf{q}_1) \mathbf{s}_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1) \Delta \lambda_1 + m \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Acomodando (3.30) y aplicando la propiedad de antisimetría (**Propiedad 3**) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & -\mathbf{s}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_1^T \mathbf{J}_{\varphi_1}^T(\mathbf{q}_1) [\Delta \lambda_1 + \xi_1 \tanh(\Delta F_1)] + \xi_1 \tanh(\Delta F_1) \Delta \lambda_1 + m \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 \\ & - \mathbf{s}_1^T \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \left[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m \mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Usando la **Propiedad 1** y (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i = & \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \left[\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \boldsymbol{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{q}}_i \right] - \xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i) \\ = & -\xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i) \end{aligned} \quad (3.32)$$

como $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) [\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)]^{-1}$ se puede reescribir (3.32) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i &= -\xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) [\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)]^{-1} \tanh(\Delta F_i) \\ &= -\xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^{-T}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^{-1}(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i) \\ &= -\xi_i \tanh(\Delta F_i). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sustituyendo (3.33) en el término de fuerza $\mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) [\Delta\lambda_i + \xi_i \tanh(\Delta F_i)]$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) [\Delta\lambda_i + \xi_i \tanh(\Delta F_i)] &= -\xi_i \tanh(\Delta F_i) [\Delta\lambda_i + \xi_i \tanh(\Delta F_i)] \\ &= -\xi_i \tanh(\Delta F_i) \Delta\lambda_i - \xi_i^2 \tanh^2(\Delta F_i). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sustituyendo (3.34) en (3.31) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\mathbf{s}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - \mathbf{s}_1^T \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \left[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m \mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \right] \\ &\quad + m \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.5) en (3.35) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\mathbf{s}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - \mathbf{s}_1^T \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \left[\boldsymbol{\beta}_1 + \Delta m \mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \right] \\ &\quad + \mathbf{s}_1^T [m \ddot{\mathbf{q}}_1 - m \ddot{\mathbf{q}}_{r1}]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

De (3.13) se despeja $m \ddot{\mathbf{q}}_i$

$$m \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{J}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \left[\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - m \dot{\mathbf{J}}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i \right]. \quad (3.37)$$

Sustituyendo para $i = 1$ (3.37) en (3.36)

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \mathbf{s}_1^T \left[\mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{q}_1) [\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2] - m \mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 - m \ddot{\mathbf{q}}_{r1} - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \boldsymbol{\beta}_1 - \Delta m \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 \right. \\ &\quad \left. - \Delta m \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \right] - \mathbf{s}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Definiendo

$$\mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{q}_1) [\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2] - \hat{m} \mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 - \hat{m} \ddot{\mathbf{q}}_{r1} + \mathbf{K}_{D1} \mathbf{s}_1. \quad (3.39)$$

Sustituyendo (3.3) y (3.39) en (3.38)

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \mathbf{s}_1^T \left[\mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 + \ddot{\mathbf{q}}_{r1} - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \right] \Delta m \\ & - \mathbf{s}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_{D_1} \mathbf{s}_1. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Se define

$$\mathbf{Y}_1 \Delta m = \left(\mathbf{J}_1^{-1}(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 + \ddot{\mathbf{q}}_{r1} - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \ddot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{J}}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 \right) \Delta m. \quad (3.41)$$

Así se tiene

$$\dot{V}_1 = -\mathbf{s}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_{D_1} \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_1^T \mathbf{Y}_1 \Delta m. \quad (3.42)$$

Derivando (3.27)

$$\dot{V}_2 = \mathbf{s}_2^T \mathbf{H}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{s}}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^T \dot{\mathbf{H}}_2(\mathbf{q}_2) \mathbf{s}_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2) \Delta \lambda_2 + m \mathbf{s}_2^T \dot{\mathbf{s}}_2. \quad (3.43)$$

Sustituyendo (3.23) en (3.43)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \mathbf{s}_2^T \left[\mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \left[\boldsymbol{\beta}_2 + \Delta m \mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 \right] - \mathbf{C}_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) \mathbf{s}_2 - \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 \right. \\ & \left. + \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2) [\Delta \lambda_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2)] \right] + \frac{1}{2} \mathbf{s}_2^T \dot{\mathbf{H}}_2(\mathbf{q}_2) \mathbf{s}_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2) \Delta \lambda_2 + m \mathbf{s}_2^T \dot{\mathbf{s}}_2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Acomodando (3.44) y aplicando la propiedad de antisimetría (**Propiedad 3**) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -\mathbf{s}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2^T \mathbf{J}_{\varphi_2}^T(\mathbf{q}_2) [\Delta \lambda_2 + \xi_2 \tanh(\Delta F_2)] + \xi_2 \tanh(\Delta F_2) \Delta \lambda_2 + m \mathbf{s}_2^T \dot{\mathbf{s}}_2 \\ & + \mathbf{s}_2^T \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \left[\boldsymbol{\beta}_2 + \Delta m \mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Usando (3.34) en (3.45) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -\mathbf{s}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) + \mathbf{s}_2^T \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \left[\boldsymbol{\beta}_2 + \Delta m \mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 \right] \\ & + m \mathbf{s}_2^T \dot{\mathbf{s}}_2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Sustituyendo (3.5) en (3.46) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -\mathbf{s}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) + \mathbf{s}_2^T \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \left[\boldsymbol{\beta}_2 + \Delta m \mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \Delta m \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 \right] \\ & + \mathbf{s}_2^T [m \ddot{\mathbf{q}}_2 - m \ddot{\mathbf{q}}_{r2}]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Sustituyendo para $i = 2$ (3.37) en (3.47)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \mathbf{s}_2^T \left[\mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{q}_2) [\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2] - m \mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 - m \ddot{\mathbf{q}}_{r2} - \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \boldsymbol{\beta}_2 - \Delta m \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 \right. \\ & \left. - \Delta m \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 \right] - \mathbf{s}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Definiendo

$$\mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \boldsymbol{\beta}_2 = \mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{q}_2) [\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2] - \hat{m} \mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 - \hat{m} \ddot{\mathbf{q}}_{r2} + \mathbf{K}_{D_2} \mathbf{s}_2. \quad (3.49)$$

Sustituyendo (3.3) y (3.49) en (3.48)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \mathbf{s}_2^T \left[\mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 + \ddot{\mathbf{q}}_{r2} - \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 \right] \Delta m \\ & - \mathbf{s}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_{D_2} \mathbf{s}_2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Se define

$$\mathbf{Y}_2 \Delta m = \left(\mathbf{J}_2^{-1}(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 + \ddot{\mathbf{q}}_{r2} - \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \mathbf{J}_2(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 - \mathbf{J}_2^T(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{J}}_2(\mathbf{q}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 \right) \Delta m. \quad (3.51)$$

Así se tiene

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{s}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_{D_2} \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2^T \mathbf{Y}_2 \Delta m. \quad (3.52)$$

Se deriva (3.28)

$$\dot{V}_3 = \gamma \Delta m \frac{d}{dt} (\Delta m) \quad (3.53)$$

Se suma (3.42), (3.52) y (3.53) para analizar la dinámica completa del sistema de lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{s}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{s}_1 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_{D_1} \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_1^T \mathbf{Y}_1 \Delta m + \gamma \Delta m \frac{d}{dt} (\Delta m) \\ & - \mathbf{s}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_2 \mathbf{s}_2 - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_{D_2} \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2^T \mathbf{Y}_2 \Delta m. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Se realiza la siguiente asignación

$$\mathbf{K}_{a_i} = \mathbf{D}_i + \mathbf{K}_i + \mathbf{K}_{d_i}. \quad (3.55)$$

Factorizando (3.54) se tiene

$$\dot{V} = -\mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_{a_1} \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_{a_2} \mathbf{s}_2 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) + \left[\mathbf{Y}_1^T \mathbf{s}_1 + \mathbf{Y}_2^T \mathbf{s}_2 + \gamma \frac{d}{dt}(\Delta m) \right] \Delta m. \quad (3.56)$$

Se propone la siguiente ley de adaptación

$$\dot{m} = -\frac{1}{\gamma} [\mathbf{Y}_1^T \mathbf{s}_1 + \mathbf{Y}_2^T \mathbf{s}_2] \quad (3.57)$$

puesto que m es constante se tiene $\frac{d}{dt}(\Delta m) = \dot{m}$.

Finalmente, sustituyendo (3.57) en (3.56) se obtiene

$$\dot{V} = -\mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_{a_1} \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_{a_2} \mathbf{s}_2 - \xi_1^2 \tanh^2(\Delta F_1) - \xi_2^2 \tanh^2(\Delta F_2) \leq 0. \quad (3.58)$$

donde \dot{V} es negativa semi-definida, esto implica que el estado \mathbf{x} , definido en (3.24), está acotado.

Para probar que $\dot{V} \rightarrow 0$ y con ello $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \Delta F_1$ y $\Delta F_2 \rightarrow 0$ se usa el siguiente lema.

Lema 4.3 (Lyapunov–Like Lemma) [111] *Si una función escalar $V(\mathbf{x}, t)$ cumple con las siguientes condiciones*

- $V(\mathbf{x}, t)$ está acotada por abajo
- $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es semi-definida negativa
- $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es uniformemente continua en el tiempo

entonces $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. ■

Por el **Lema 4.3 (Lyapunov–Like Lemma)** de [111], $\dot{V} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, si (3.58) es uniformemente continua. Una condición suficiente para que (3.58) sea considerada como uniformemente continua es que su derivada, es decir \ddot{V} , esté acotada.

Bajo esta premisa se deriva (3.58) tal que

$$\begin{aligned} \ddot{V} = & -2\xi_1^2 \tanh(\Delta F_1) [1 - \tanh^2(\Delta F_1)] \Delta\lambda_1 - 2\xi_2^2 \tanh(\Delta F_2) [1 - \tanh^2(\Delta F_2)] \Delta\lambda_2 \\ & - 2\mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_{a_1} \dot{\mathbf{s}}_1 - 2\mathbf{s}_2^T \mathbf{K}_{a_2} \dot{\mathbf{s}}_2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Para determinar que \ddot{V} está acotada supóngase que los errores son lo suficientemente pequeños, tal que se cumplen (2.20), (2.21) y (2.22) bajo la **Suposición 5**, por lo cual (3.7) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \mathbf{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{s}_i + \xi_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i). \quad (3.60)$$

Ya que \dot{V} , ecuación definida en (3.58), es negativa semi-definida, y esto implica que el estado \mathbf{x} , descrito en (3.24), está acotado, se puede concluir que el lado derecho de (3.60) también está acotado, y debido a que el lado izquierdo de (3.60) es un filtro lineal estable de primer orden entonces $\tilde{\mathbf{q}}_i$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ también están acotados. Adicionalmente, \mathbf{q}_i y $\dot{\mathbf{q}}_i$ están acotadas debido a que por diseño \mathbf{q}_{di} y $\dot{\mathbf{q}}_{di}$ están acotadas.

Multiplicando (3.60) por $\tilde{\mathbf{q}}_i^T$ se obtiene

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{s}_i + \xi_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i) - \mathbf{\Lambda}_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2. \quad (3.61)$$

Ya que la derivada de $\tilde{\mathbf{q}}_i^T \tilde{\mathbf{q}}_i$ se puede representar como

$$\frac{d}{dt} \left(\tilde{\mathbf{q}}_i^T \tilde{\mathbf{q}}_i \right) = 2\tilde{\mathbf{q}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \frac{d}{dt} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2 \right) = 2\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \right) \quad (3.62)$$

se puede definir la siguiente relación

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \right). \quad (3.63)$$

Sustituyendo (3.63) en (3.61) se tiene

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \right) = \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{s}_i + \xi_i \tilde{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \tanh(\Delta F_i) - \mathbf{\Lambda}_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2. \quad (3.64)$$

Considerando (2.14) y las siguientes relaciones

$$\bar{\xi}_i \triangleq \lambda_{\max} \{ \xi_i \} \quad (3.65)$$

$$\lambda_{\Lambda_i} \triangleq \lambda_{\min} \{ \mathbf{\Lambda}_i \} \quad (3.66)$$

$$|\tanh(\Delta F_i)| \leq |\Delta F_i|, \quad (3.67)$$

se puede reescribir (3.64) de la siguiente forma

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \frac{d}{dt} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \right) \leq \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \|\mathbf{s}_i\| + \bar{\xi}_i \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| c_{0i} |\Delta F_i| - \lambda_{\Lambda i} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|^2. \quad (3.68)$$

Dividiendo (3.68) entre $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\|$ se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \right) \leq \|\mathbf{s}_i\| + \bar{\xi}_i c_{0i} |\Delta F_i| - \lambda_{\Lambda i} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| = \rho_{\max i} - \lambda_{\Lambda i} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \quad (3.69)$$

donde

$$\|\mathbf{s}_i\| + \bar{\xi}_i c_{0i} |\Delta F_i| \leq \rho_{\max i} \quad \forall t \quad (3.70)$$

donde $\rho_{\max i}$ existe ya que $\dot{V} \leq 0$ siempre que los errores satisfacen (2.21) y (2.22). Lo que se busca con (3.69) son las condiciones que deben cumplir las ganancias para garantizar que el **Hecho 1** se cumple, es decir que la proyección del error por $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$ es tangente a la trayectoria. Nótese que (3.69) es válida solamente si cumple (2.20) donde η_i es una constante positiva lo suficientemente pequeña. Por simplicidad se considera $\eta_1 = \eta_2 = \eta$.

La solución de (3.69) se obtiene usando el **Lema de Comparación** de [112] de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}_i\| &\leq \|\tilde{\mathbf{q}}_i(0)\| e^{-\lambda_{\Lambda i} t} + \int_0^t e^{-\lambda_{\Lambda i}(t-\tau)} \rho_{\max i} d\tau \\ &\leq e^{-\lambda_{\Lambda i} t} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i(0)\| + \int_0^t e^{\lambda_{\Lambda i} \tau} \rho_{\max i} d\tau \right) \\ &\leq e^{-\lambda_{\Lambda i} t} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i(0)\| + \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda i}} e^{\lambda_{\Lambda i} \tau} \Big|_0^t \right) \\ &\leq e^{-\lambda_{\Lambda i} t} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i(0)\| + \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda i}} e^{\lambda_{\Lambda i} t} - \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda i}} \right). \end{aligned} \quad (3.71)$$

De (3.71) se puede concluir

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq e^{-\lambda_{\Lambda i} t} \left(\|\tilde{\mathbf{q}}_i(0)\| - \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda i}} \right) + \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda i}} \leq \eta \quad \forall t \geq 0. \quad (3.72)$$

Por lo tanto, (2.20) se cumple si

$$\|\tilde{\mathbf{q}}_i(0)\| \leq \frac{\rho_{\max i}}{\lambda_{\Lambda i}} \leq \eta, \quad (3.73)$$

lo que implica que

$$\rho_{\text{máx } i} \leq \lambda_{\Lambda i} \eta. \quad (3.74)$$

Por simplicidad se busca que

$$\|\mathbf{x}_a\| \leq x_{a \text{ máx}}, \quad (3.75)$$

lo que conlleva a

$$\|\mathbf{s}_i\| \leq x_{a \text{ máx}} \quad (3.76)$$

$$\|\Delta F_i\| \leq x_{a \text{ máx}}. \quad (3.77)$$

Sustituyendo (3.74), (3.76) y (3.77) en (3.70) se obtiene

$$x_{a \text{ máx}} \leq \frac{\lambda_{\Lambda i}}{(1 + \bar{\xi}_i c_{0i})} \eta. \quad (3.78)$$

Esto significa que la cota de $x_{a \text{ máx}}$ debe ser lo suficientemente pequeña para garantizar que (2.20) se cumpla. En este caso, si $\|\mathbf{x}_a\|$ tiende a cero, es claro de (3.69) que $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\|$ también tenderá a cero, lo que conlleva a la convergencia a cero de $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i\|$.

Sin embargo, para que este análisis pueda ser válido falta hallar $\|\mathbf{x}_a\|$ tal que se garantice que (2.20) se cumpla. Para lo cual se considera la siguiente cota

$$\frac{1}{2} \Delta F_i^2 \leq 2 \ln (\cosh (\Delta F_i)) \leq \Delta F_i^2. \quad (3.79)$$

Nótese que V , descrita en (3.25), satisface

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\lambda_{h1} \|\mathbf{s}_1\|^2 + \frac{1}{2} |\Delta F_1|^2 + \lambda_{h2} \|\mathbf{s}_2\|^2 + \frac{1}{2} |\Delta F_2|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right) \leq \\ & \quad V \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\lambda_{H1} \|\mathbf{s}_1\|^2 + |\Delta F_1|^2 + \lambda_{H2} \|\mathbf{s}_2\|^2 + |\Delta F_2|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right), \quad (3.80) \end{aligned}$$

por lo que se pueden definir

$$\varepsilon_1 = \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \lambda_{h1}, \frac{1}{2}, \lambda_{h2} \right\} \quad (3.81)$$

$$\varepsilon_2 = \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \lambda_{H1}, 1, \lambda_{H2} \right\}. \quad (3.82)$$

De tal forma que, de acuerdo con (3.24) y (3.80), se tiene

$$\frac{1}{2} \left[\varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right] \leq V \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a\|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right]. \quad (3.83)$$

Se observa que (3.83) siempre se cumple, pero si $\dot{V} \leq 0$ entonces también se satisface

$$\frac{1}{2} \left[\varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right] \leq V \leq V(0) \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a(0)\|^2 + \gamma |\Delta m(0)|^2 \right]. \quad (3.84)$$

Puesto que

$$\frac{1}{2} \varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 + \gamma |\Delta m|^2 \right] \quad (3.85)$$

se puede redefinir (3.84) de la siguiente forma

$$\frac{1}{2} \varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 \leq V \leq V(0) \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a(0)\|^2 + \gamma |\Delta m(0)|^2 \right]. \quad (3.86)$$

Como lo que se busca es una cota para $\|\mathbf{x}_a\|$ cuando $\dot{V} \leq 0$, por simplicidad se impone la siguiente condición

$$\frac{1}{2} \varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a(0)\|^2 + \gamma |\Delta m(0)|^2 \right] \leq \frac{1}{2} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2, \quad (3.87)$$

donde $x_{a \text{ máx}}$ satisface (3.78). Como se observa, de (3.87) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon_1 \|\mathbf{x}_a\|^2 &\leq \frac{1}{2} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2 \\ \|\mathbf{x}_a\| &\leq x_{a \text{ máx}}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Dado que se supone que (3.88) es cierta para toda t , se propone la siguiente condición

$$\frac{1}{2} \varepsilon_2 \|\mathbf{x}_a(0)\|^2 \leq \frac{1}{4} \varepsilon_1 x_{a \text{ máx}}^2 \quad (3.89)$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{x}_a(0)\| \leq \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} x_{a \text{ máx}} \leq x_{a \text{ máx}} \quad (3.90)$$

donde $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

De tal forma que, de (3.87), $\Delta m(0)$ debe satisfacer

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\gamma|\Delta m(0)|^2 &\leq \frac{1}{2}\varepsilon_1 x_{a\text{máx}}^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} x_{a\text{máx}}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon_1 x_{a\text{máx}}^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_1 x_{a\text{máx}}^2 \\ &\leq \frac{1}{4}\varepsilon_1 x_{a\text{máx}}^2. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Esto impone la siguiente condición sobre la ganancia γ

$$\gamma \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 x_{a\text{máx}}^2}{|\Delta m(0)|^2}. \quad (3.92)$$

Se debe mencionar que no hay forma de garantizar a priori que se cumpla (3.92), así que a lo más γ solo se puede hacer muy pequeña.

Por otro lado, considerando la relación de fuerza, descrita en (3.13), se puede despejar $\ddot{\mathbf{q}}_i$ de la siguiente forma

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \frac{1}{m} \mathbf{J}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) [\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2] + \dot{\mathbf{J}}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (3.93)$$

donde $\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i)$ es de rango completo, existe y está acotada. Además, se supone que \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 están acotadas, luego entonces, $\ddot{\mathbf{q}}_i$ está acotada.

Por otro lado, dado que por diseño las señales deseadas están acotadas, se tiene que λ_{di} está acotada, y de la **Suposición 11** se considera que λ_i está acotada, por lo que $\Delta\lambda_i$ está acotada.

Considerando (2.14), (2.15) y el hecho que $\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{q}_{di}, \dot{\mathbf{q}}_{di}, \ddot{\mathbf{q}}_{di}, \tilde{\mathbf{q}}_i, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i, \mathbf{s}_i, \Delta F_i$ y $\Delta\lambda_i$ están acotadas implica que $\dot{\mathbf{q}}_{ri}$, definida en (3.6), y $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$, definida en (3.8), están acotadas, lo que a su vez significa que $\dot{\mathbf{s}}_i$ está acotada. Lo que permite concluir que \dot{V} , definida en (3.59), está acotada.

Por el **Lema 4.3 (Lyapunov–Like Lemma)** se puede concluir que \dot{V} , definida en (3.58), tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ ya que es uniformemente continua, puesto que su derivada \ddot{V} , definida en (3.59), está acotada. Por lo tanto, \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 tienden a cero, lo que implica que $\tilde{\mathbf{q}}_i$ y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ también tienden a cero. De igual forma ΔF_1 y ΔF_2 tienden a cero.

Para probar que $\Delta\lambda_i \rightarrow 0$ se usa el siguiente lema.

Lema 4.2 (Barbalat) [111] *Si una función diferenciable $f(t)$ tiene un límite finito conforme $t \rightarrow \infty$, y si $\dot{f}(t)$ es uniformemente continua, entonces $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.* ■

Por el **Lema 4.2 (Barbalat)** de [111], $\Delta\lambda_i \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, si $\Delta\lambda_i$ es uniformemente continua, es decir, si su derivada $\frac{d}{dt}(\Delta\lambda_i)$ está acotada. Partiendo de esta idea se deriva (3.1), tal que

$$\frac{d}{dt}(\Delta\lambda_i) = \frac{d}{dt}(\lambda_i) - \frac{d}{dt}(\lambda_{di}). \quad (3.94)$$

Se observa que (3.94) está acotada ya que $\frac{d}{dt}(\lambda_{di})$ está acotada por diseño y de la **Suposición 11** se tiene que $\frac{d}{dt}(\lambda_i) \in \mathcal{L}_\infty$ está acotada, por lo que $\frac{d}{dt}(\Delta\lambda_i) \in \mathcal{L}_\infty$ está acotada, de manera que se puede concluir que $\Delta\lambda_i$ tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$ ya que es uniformemente continua.

Teorema 1. *Considérese la dinámica del sistema cooperativo dado por (2.25) en lazo cerrado con la ley de control descrita en (3.18) y (3.19) y la ley de adaptación definida en (3.57), donde \mathbf{q}_{di} es una trayectoria deseada suave y acotada en coordenadas articulares; y cuyas derivadas $\dot{\mathbf{q}}_{di}$ y $\ddot{\mathbf{q}}_{di}$, también están acotadas. Además, se supone que \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 están acotadas. Considérese también (2.14), (2.15), (3.65), (3.66), (3.67) y (3.79) tal que $x_{a\text{máx}}$ satisface (3.78) siendo lo suficientemente pequeña para garantizar que (2.20) se cumpla. Además, teniendo en cuenta la **Suposición 11** donde λ_i y su derivada están acotadas, y satisfaciendo las condiciones impuestas (3.87), (3.88), (3.89), (3.90), (3.91) y con una γ tal que se satisface (3.92), entonces si las siguientes condiciones se cumplen*

$$\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{K}_{a_i}) = \delta_i \quad (3.95)$$

$$|\bar{\xi}_1| = \sqrt{\delta_i} \quad (3.96)$$

las señales de error $\tilde{\mathbf{q}}_i$, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ y $\Delta\lambda_i$ permanecen acotadas y tienen convergencia asintótica, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0} \quad (3.97)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{0} \quad (3.98)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\lambda_i = 0. \quad (3.99)$$

■

La demostración del **Teorema 1** es directa de todo el análisis realizado en el presente capítulo.

En resumen, el **Teorema 1** debe cumplir las siguientes condiciones:

- La cota de $x_{a\text{máx}}$, definida en (3.78), debe ser lo suficientemente pequeña para garantizar que $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \eta$ se cumpla.
- Para determinar la cota de $\|x_a\|$ cuando $\dot{V} \leq 0$, se impone la condición (3.87) donde $x_{a\text{máx}}$ satisface (3.78)
- Dado que se supone que la cota $\|x_a\| \leq x_a$ es cierta para toda t , se propone la condición (3.89) lo que implica (3.90) de tal forma que $\Delta m(0)$ debe satisfacer (3.91). Esto impone la condición (3.92) sobre la ganancia de adaptación γ . Sin embargo, no hay forma de garantizar a priori que se cumpla (3.92), así que a lo más solo se puede hacer muy pequeña.

Capítulo 4

Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados experimentales que validan el desarrollo teórico del controlador de posición/fuerza y la estimación de la masa.

4.1. Descripción del sistema cooperativo

El sistema cooperativo está formado por dos robots industriales de la empresa **CRS Robotics**, Figura 4.1. Los robots son el **CRS-A255** (5 DOF) y el **CRS-A465**¹ (6 DOF).

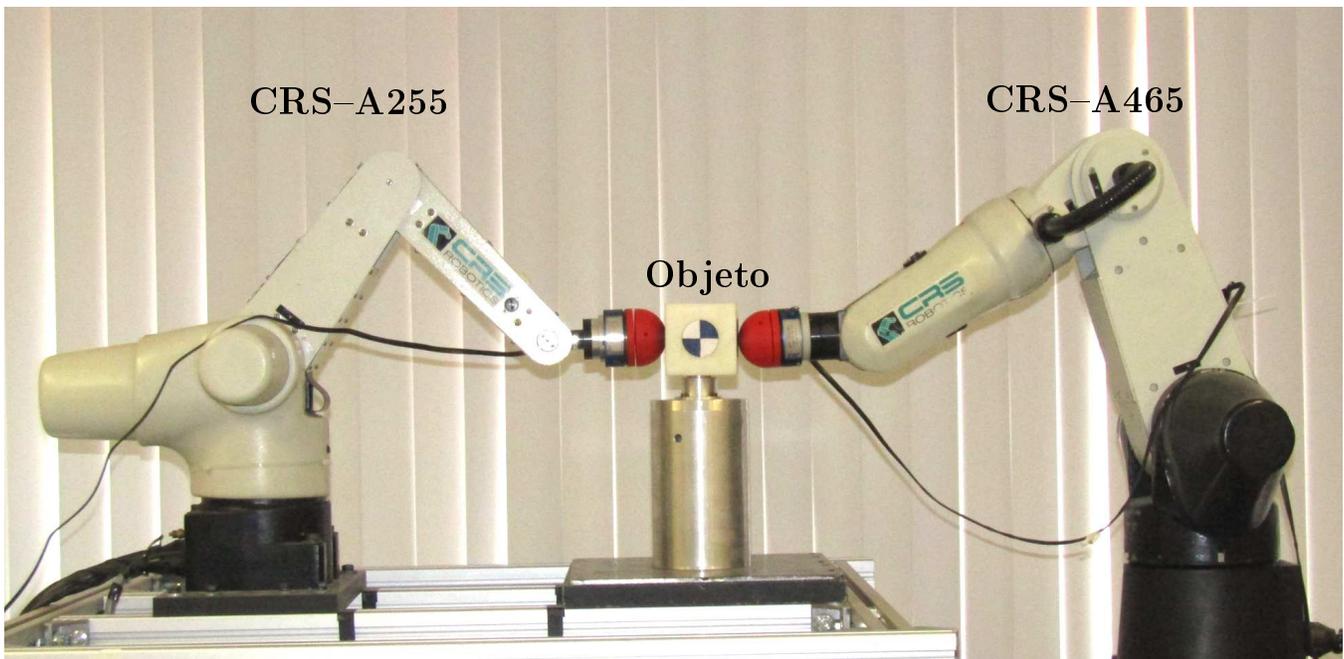


Figura 4.1: Sistema cooperativo

¹Los datos técnicos de los robots se encuentran en el **Apéndice A**

Debe tenerse en cuenta que sólo se usan las tres primeras articulaciones de cada robot, mientras que las articulaciones restantes se bloquean mecánicamente, es decir el sistema cooperativo experimental está formado por dos manipuladores industriales, cada uno de ellos con $n_i = 3$ grados de libertad y con $c_i = 1$ restricciones originadas por el contacto producido al sujetar el objeto. Por lo tanto, el número total de grados de libertad del sistema cooperativo es $n = \sum_{i=1}^2 n_i = 6$, con un número total de $c = \sum_{i=1}^2 c_i = 2$ restricciones. Además, cada articulación es accionada por un motor de corriente continua con codificadores ópticos, cuya dinámica se ha tomado en cuenta en la implementación del control-observador, tal y como se explica en [113]. Ambos manipuladores tienen un dispositivo protector de impacto en el efector final, y un sensor de fuerza de la marca **JR3 Inc.**², [114]. Cada efector final tiene una herramienta intercambiable que se fija en el sensor.

Los algoritmos de control son ejecutados en una computadora **Intel Xeon E5462** con un procesador a 2.8 GHz con una tarjeta de adquisición **CompactRIO NIcRIO-9074** de la empresa **National Instruments** con un tiempo de muestreo de 5 milisegundos. Los controladores son escritos en **Visual C ++** y se usan herramientas de **LabWindows CVI**. Las coordenadas generalizadas del sistema cooperativo son la posición, velocidad y aceleración; también las fuerzas que aparecen por el contacto del efector final sobre el objeto rígido, y las fuerzas generalizadas de entrada o torques ejercidos por las articulaciones [108].

4.2. Trayectoria deseada

La trayectoria deseada se genera con el propósito de guiar los movimientos del robot desde una configuración actual a una posterior requerida. Comúnmente, las trayectorias se describen en el espacio operacional del robot y en seguida se utiliza la cinemática inversa para calcular \mathbf{q}_{di} , para $i = 1, 2$ [115].

La trayectoria deseada es un círculo en el plano yz definido como

$$y_{d1} = y_{c1} + r \sin(\omega(t - t_i)) \quad (4.1)$$

$$z_{d2} = z_{c2} - r \cos(\omega(t - t_i)) \quad (4.2)$$

donde r es el radio, el centro del círculo se define como (y_{c1}, z_{c2}) , t_i tiempo inicial, t_f tiempo final, ω es un polinomio de quinto orden que satisface $\omega(t_i) = \omega(t_f) = 0$. Las derivadas de ω son cero también en t_i y t_f [115].

4.3. Resultados experimentales

La tarea consiste en tomar un objeto (grasping), seguir una trayectoria deseada aplicando una fuerza deseada y posteriormente, regresar el objeto en la posición original. De esta manera, el movimiento descrito por el conjunto de robots se divide en dos partes: movimiento libre y movimiento restringido.

²Los datos técnicos del sensor de fuerza se encuentran en el **Apéndice B**

El movimiento libre consiste en llevar el extremo de cada manipulador a la posición de contacto (antes del agarre), considerándose una fuerza cero, para lo cual se usa el algoritmo de control de seguimiento de posición con un observador de velocidad en movimiento libre (sin restricciones) descrito en [102]. Al realizar el contacto con el objeto el movimiento restringido se realiza con el control propuesto en (3.18) y (3.19) y la ley de adaptación planteada en (3.57), es decir, en el movimiento restringido (agarre del objeto) el efector final se encuentra en contacto con la restricción o superficie y entonces se considera el movimiento con una fuerza aplicada en el objeto. Una vez finalizada la manipulación se vuelve a usar el algoritmo de [102] para regresar los manipuladores a su posición original.

Observación 3. *Los resultados presentados en este capítulo abarcan solamente los obtenidos al realizar el movimiento restringido cuyo objetivo es sujetar el objeto de masa desconocida y seguir una trayectoria deseada. Los resultados del movimiento libre se reportan en [102].* ■

En la Tabla 4.1 se muestran los valores usados en los experimentos.

Parámetro	Valor	Unidades
Centro de la trayectoria A255	(0.490, 0.550)	[m]
Centro de la trayectoria A465	(0.555, 0.550)	[m]
Radio	0.050	[m]
Punto inicial de la trayectoria A255	(0.4900, 0.5027)	[m]
Punto inicial de la trayectoria A465	(0.5500, 0.5027)	[m]
Tiempo de ejecución	18.000	[s]
Masa del objeto	0.350	[Kg]
Dimensiones del objeto	$0.15 \times 0.15 \times 0.311$	[m]

Tabla 4.1: Parámetros usados en los experimento.

En los experimentos se considera que la ubicación del centro de masa del objeto es conocida no así su peso. Los parámetros de la ley de control y la señal de referencia se describen en la **Tabla 4.2**.

Parámetro	A255	A465
Λ_i	diag{150.00, 150.00, 20.000}	diag{600.00, 600.00, 250.00}
K_i	diag{8.0900, 8.0900, 0.8090}	diag{14.562, 14.562, 3.2360}
K_{D_i}	diag{16.180, 16.180, 8.0900}	diag{16.180, 16.180, 8.0900}
ξ_i	1.618	1.618
γ	0.007	0.007

Tabla 4.2: Ganancias

El esquema de control ha sido programado con un tiempo de muestreo de 9 milisegundos. El experimento dura 18 segundos desde el momento que es sujetado el objeto. Antes, los robots están en movimiento libre y no se tiene control de fuerza; para ello se emplea el algoritmo de control y el observador definido en [102]. Después de realizar la tarea los robots regresan a su posición inicial en movimiento libre.

En las Figuras 4.2 y 4.3 se muestran los resultados experimentales para el seguimiento en coordenadas articulares de los robots A255 y A465, respectivamente.

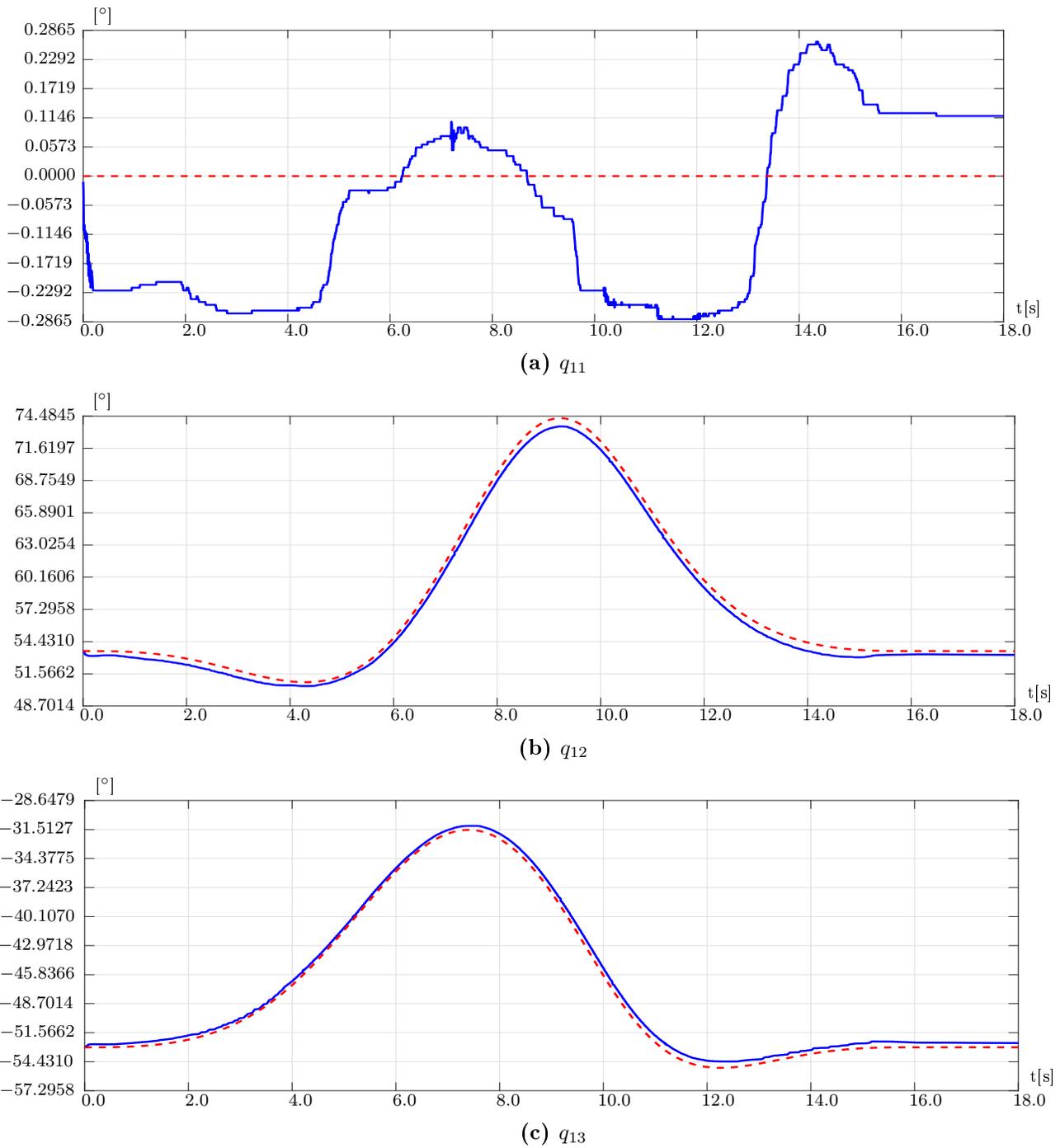


Figura 4.2: Seguimiento en coordenadas articulares. Trayectoria deseada (---) y Trayectoria seguida por el robot A255 (—)

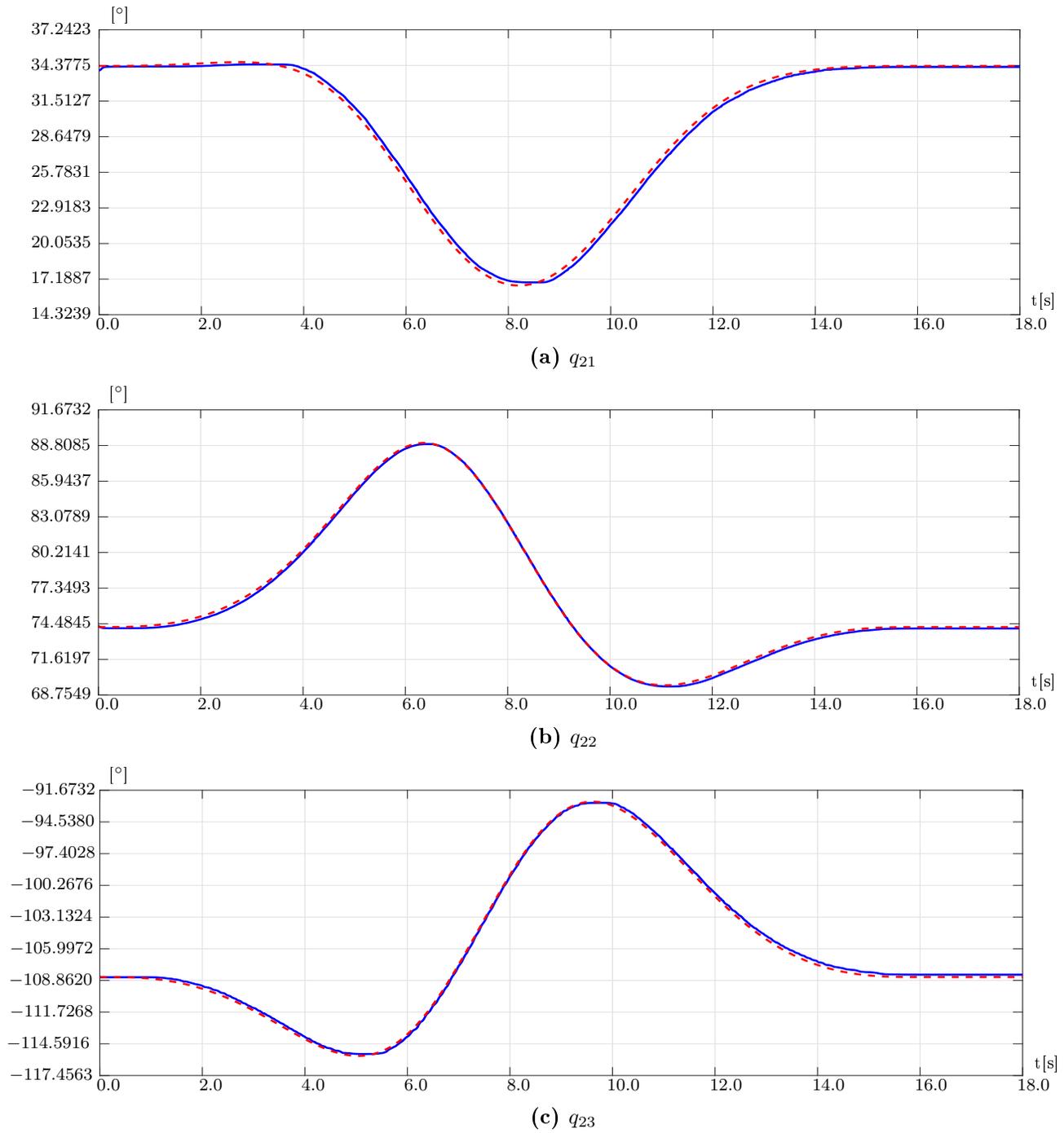


Figura 4.3: Seguimiento en coordenadas articulares. Trayectoria deseada (---) y Trayectoria seguida por el robot A465 (—)

En las Figuras 4.4 y 4.5 se muestran los errores de seguimiento en coordenadas articulares de los robots A255 y A465, respectivamente.

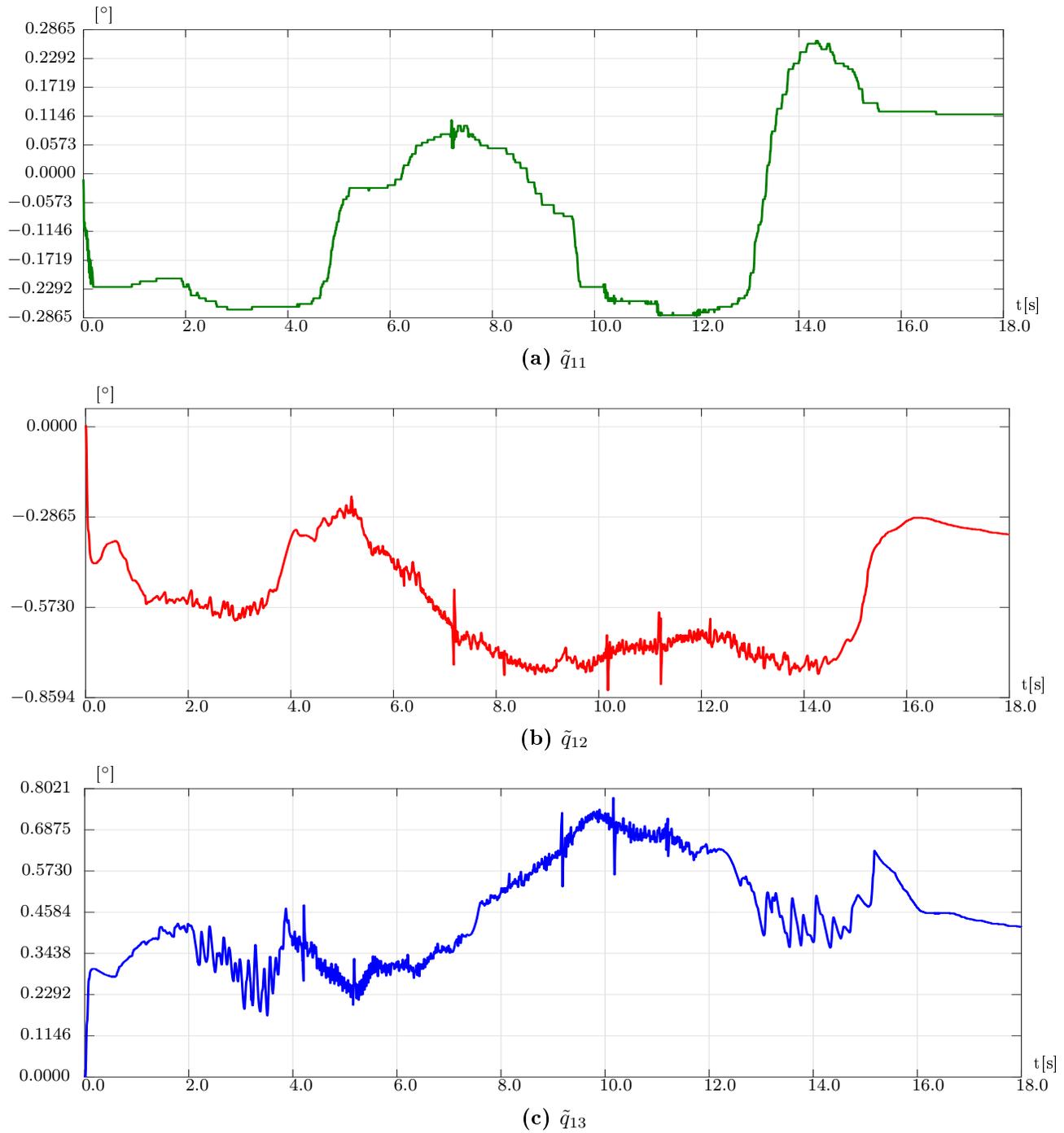
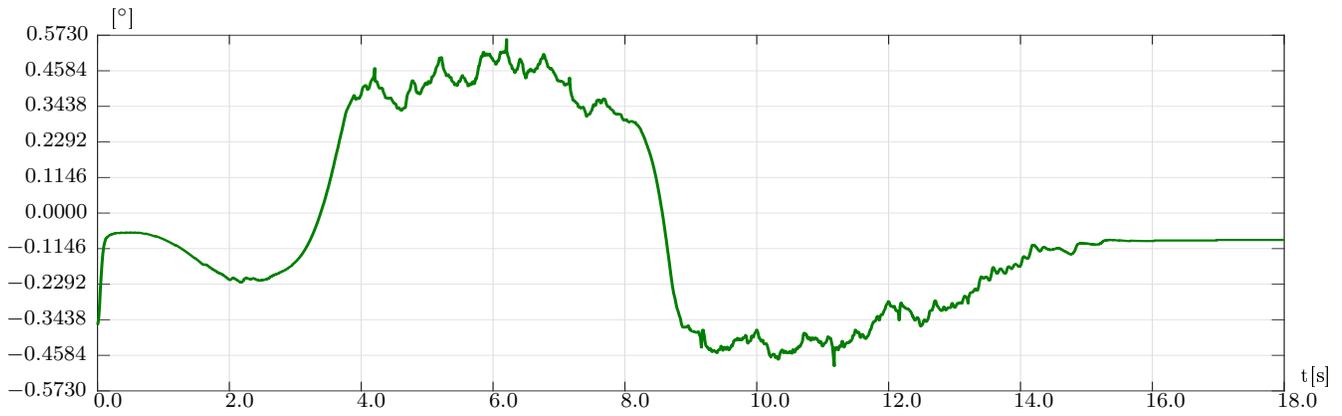
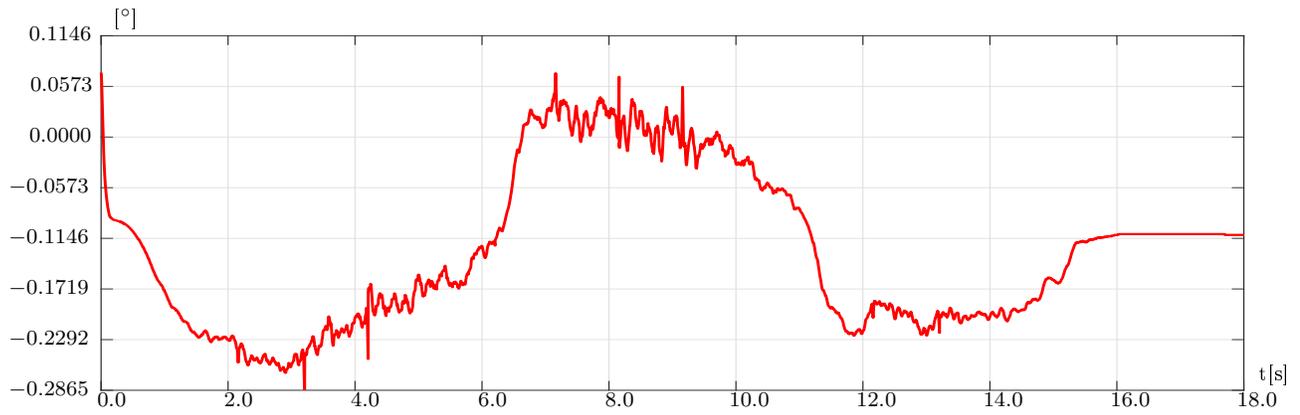


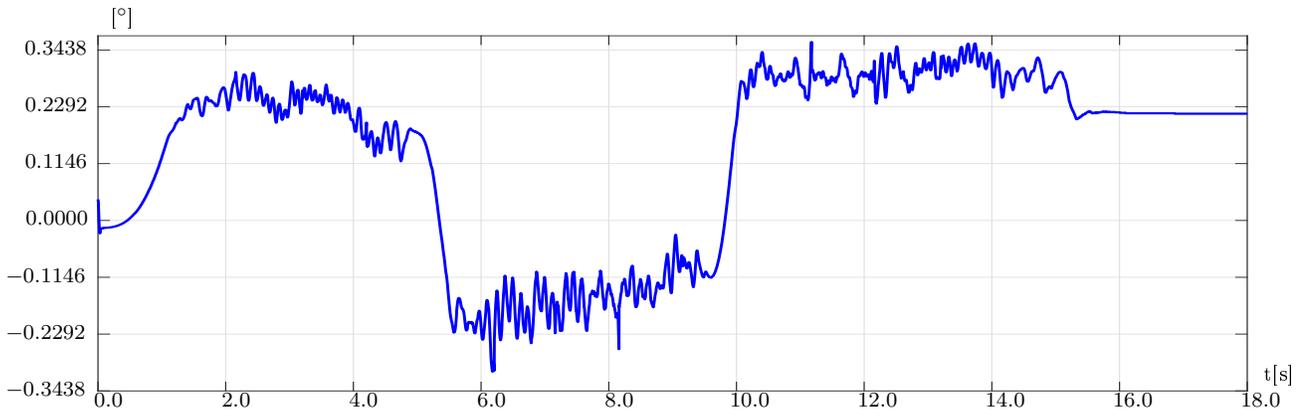
Figura 4.4: Error de seguimiento en coordenadas articulares del robot A255



(a) \tilde{q}_{21}



(b) \tilde{q}_{22}



(c) \tilde{q}_{23}

Figura 4.5: Error de seguimiento en coordenadas articulares del robot A465

En las Figuras 4.6 y 4.7 se muestran los resultados experimentales para el seguimiento en coordenadas cartesianas de los robots A255 y A465, respectivamente.

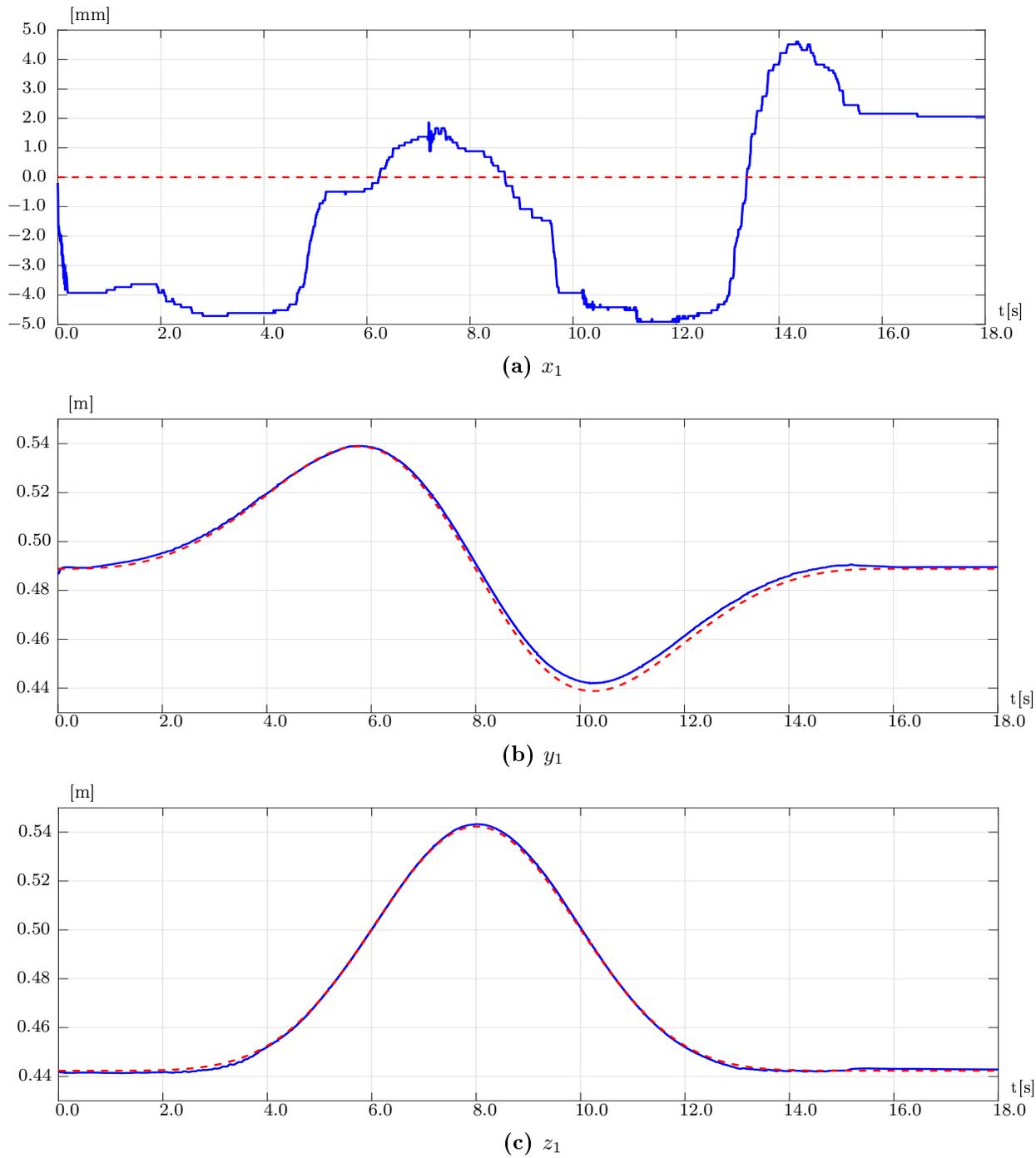


Figura 4.6: Seguimiento en coordenadas cartesianas. Trayectoria deseada (---) y Trayectoria seguida por el robot A255 (—)

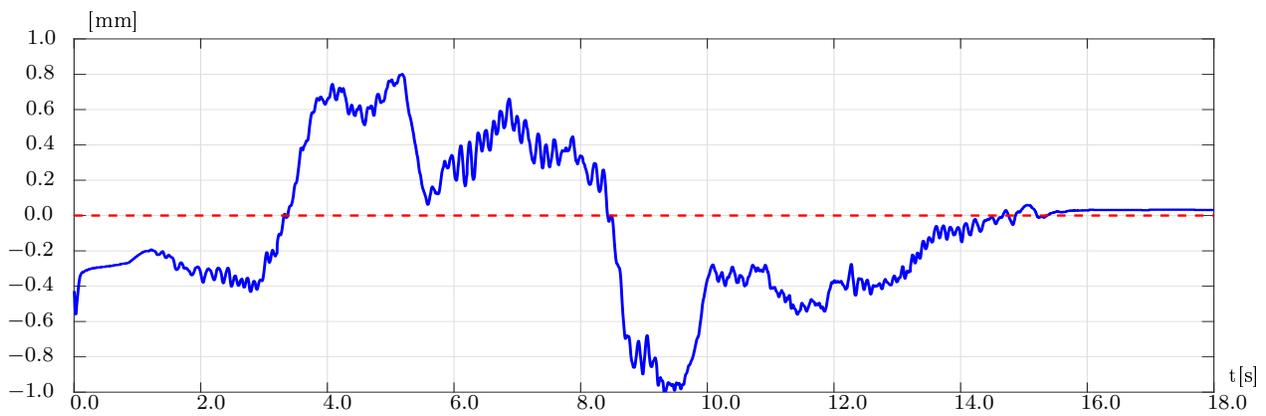
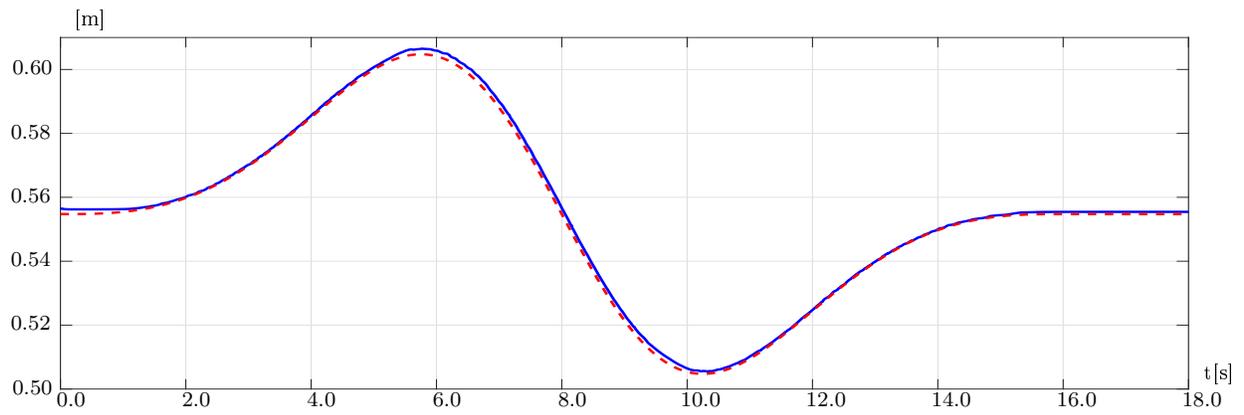
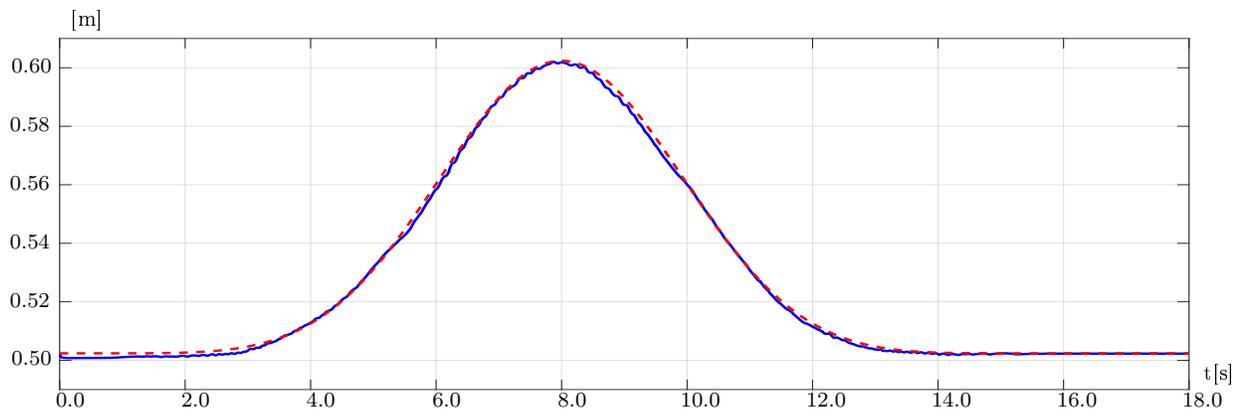
(a) x_2 (b) y_2 (c) z_2

Figura 4.7: Seguimiento en coordenadas cartesianas. Trayectoria deseada (---) y Trayectoria seguida por el robot A465 (—)

En las Figuras 4.8 y 4.9 se muestran los errores de seguimiento en coordenadas de los robots A255 y A465, respectivamente.

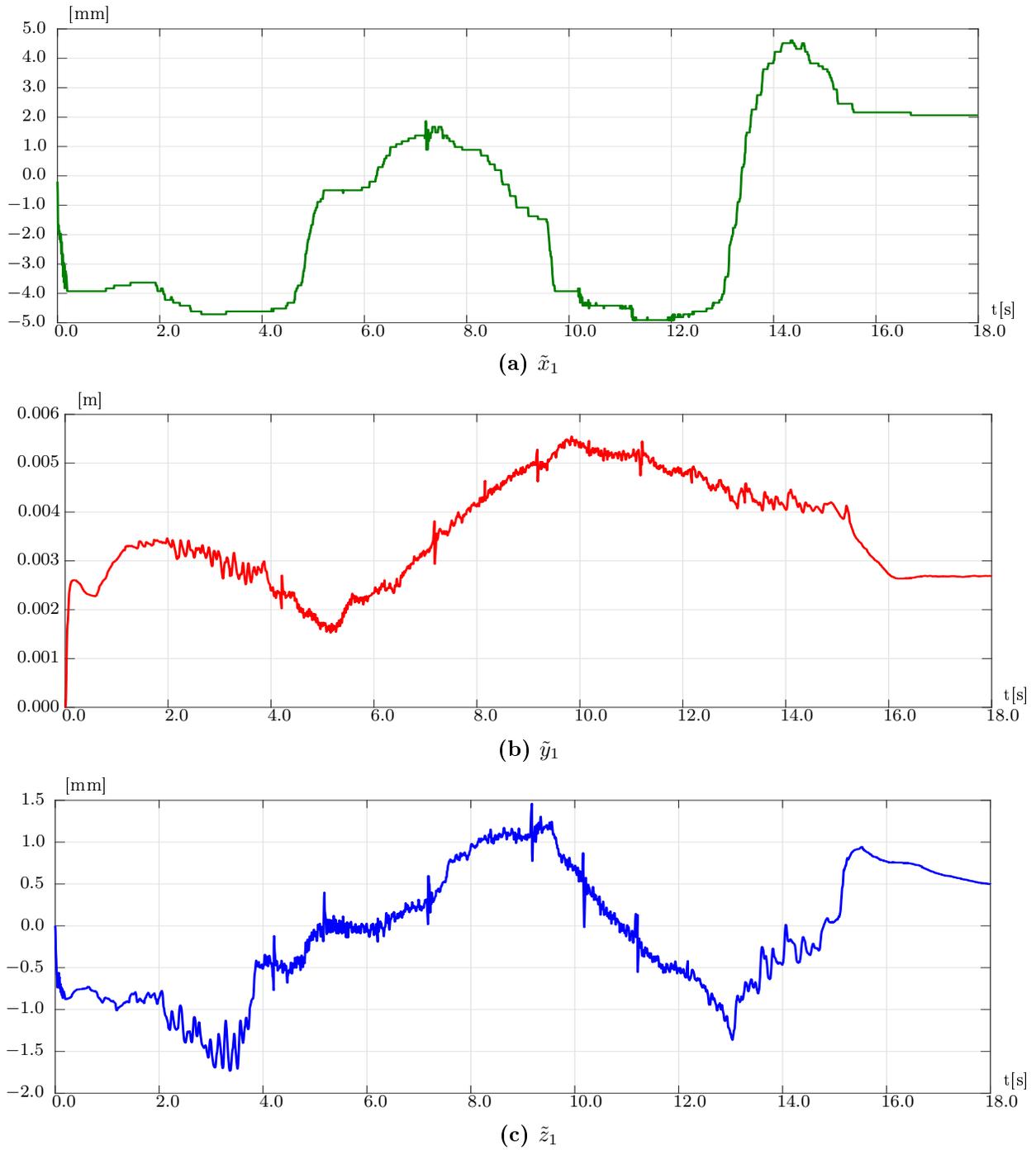
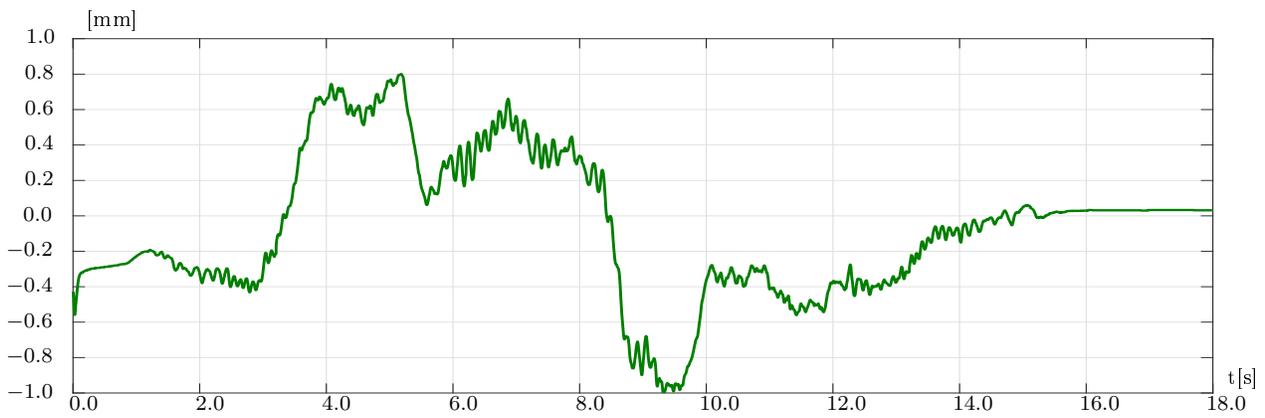
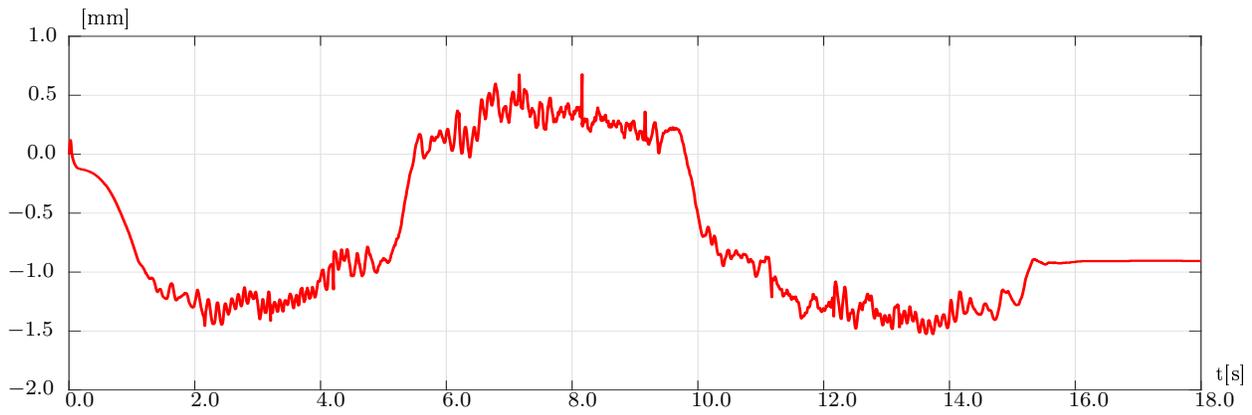


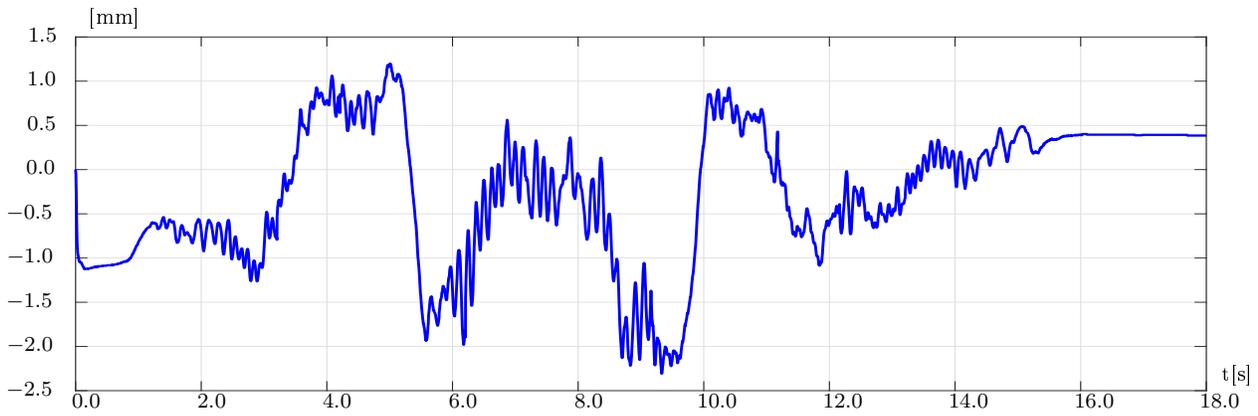
Figura 4.8: Error de seguimiento en coordenadas cartesianas del robot A255



(a) \tilde{x}_2



(b) \tilde{y}_2



(c) \tilde{z}_2

Figura 4.9: Error de seguimiento en coordenadas cartesianas del robot A465

En la Figura 4.10 se muestra la trayectoria que siguen los robots en el plano yz .

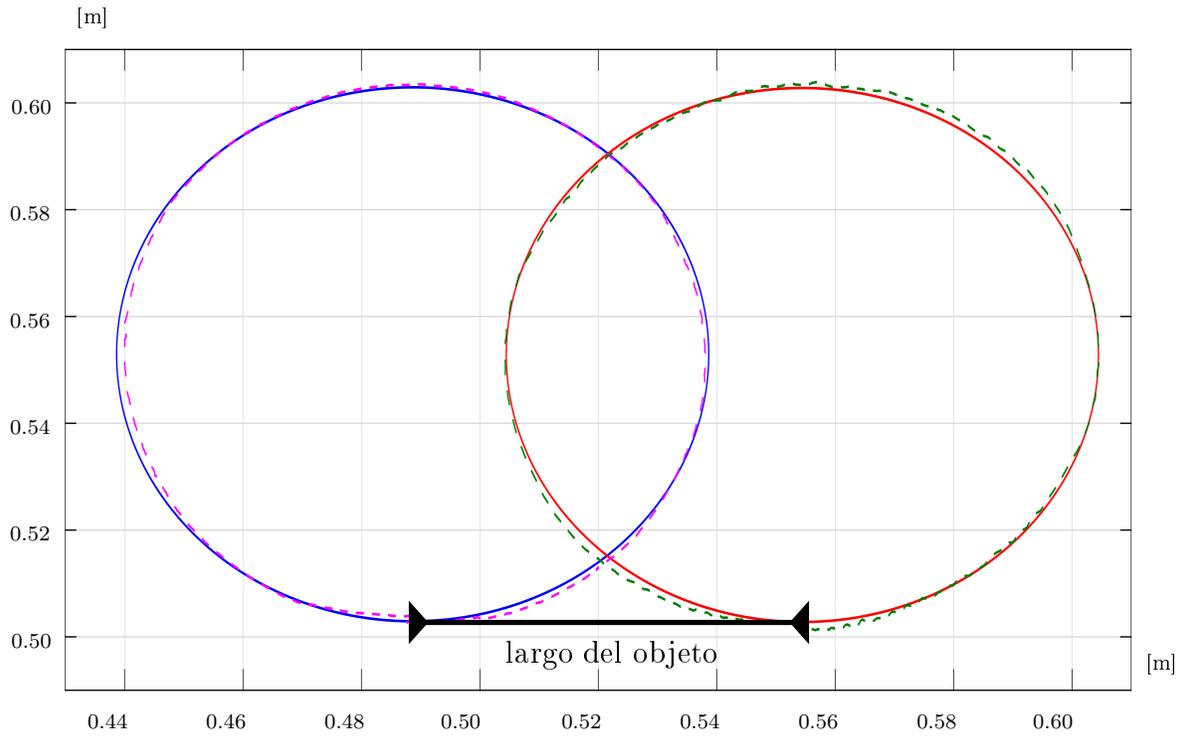


Figura 4.10: Trayectoria en el plano yz . Trayectoria deseada A255 (---), Trayectoria seguida A255 (—), Trayectoria deseada A465 (---) y Trayectoria seguida A465 (—)

La masa estimada \hat{m} se ilustra en la Figura 4.11.

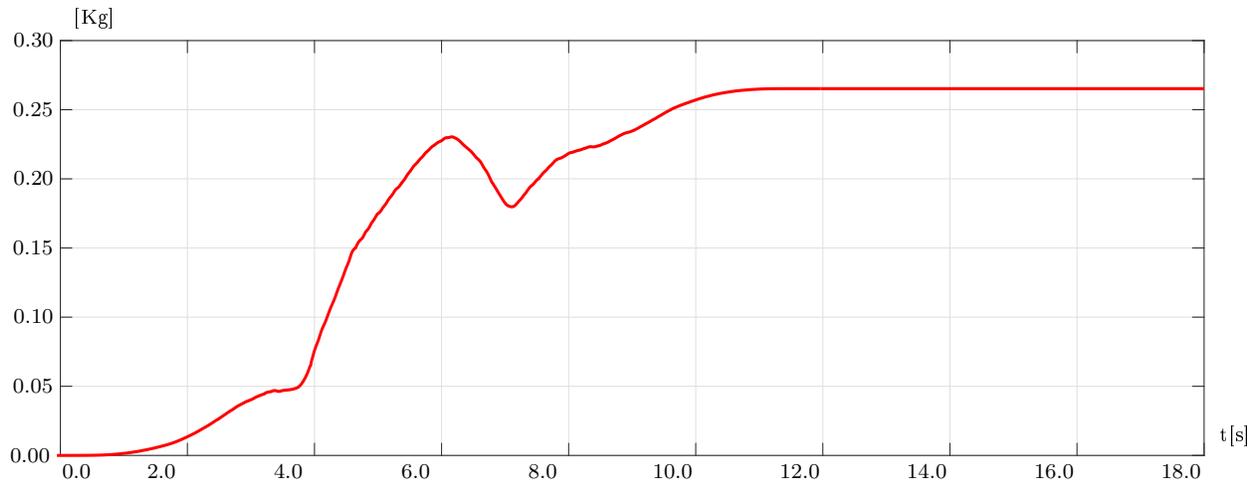


Figura 4.11: Masa estimada. $\hat{m} = 0.2652$ [Kg]

El error paramétrico Δm se muestra en la Figura 4.12.

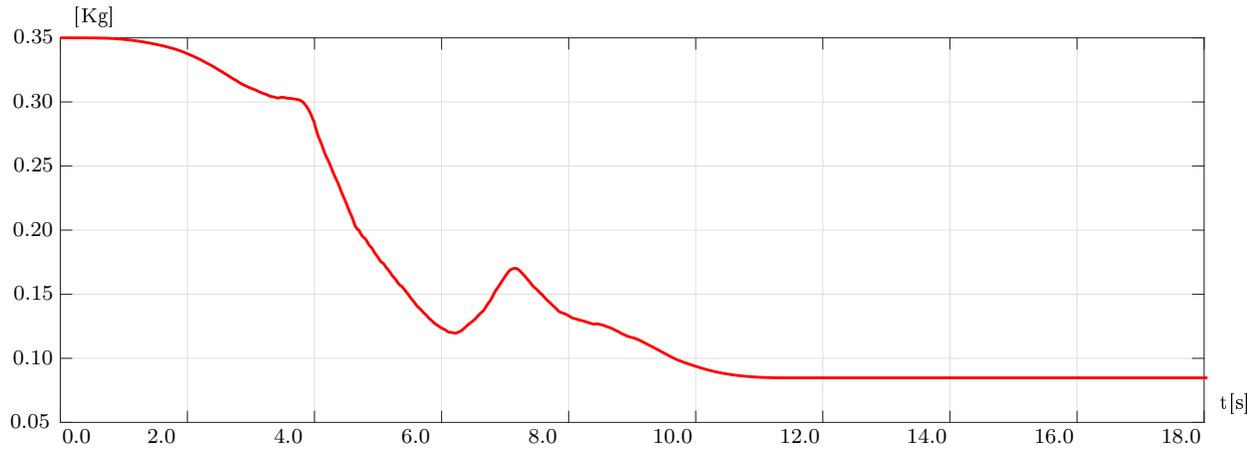
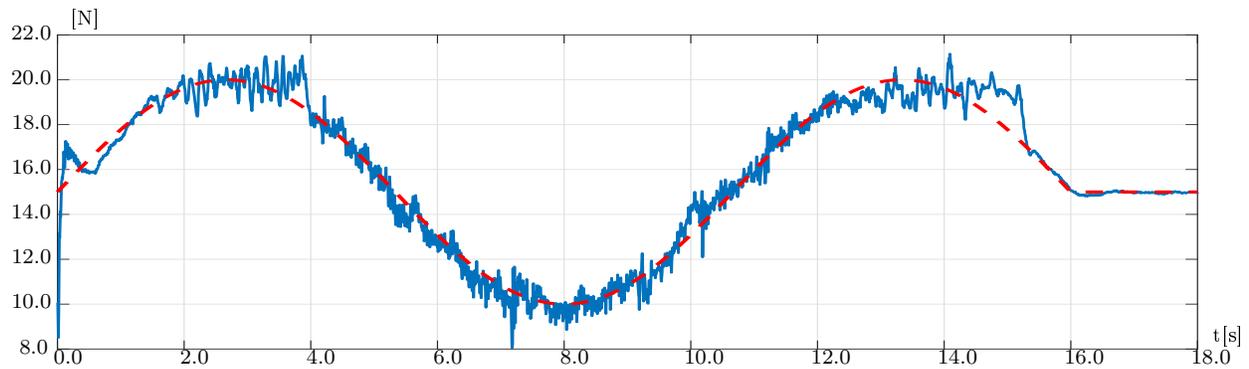
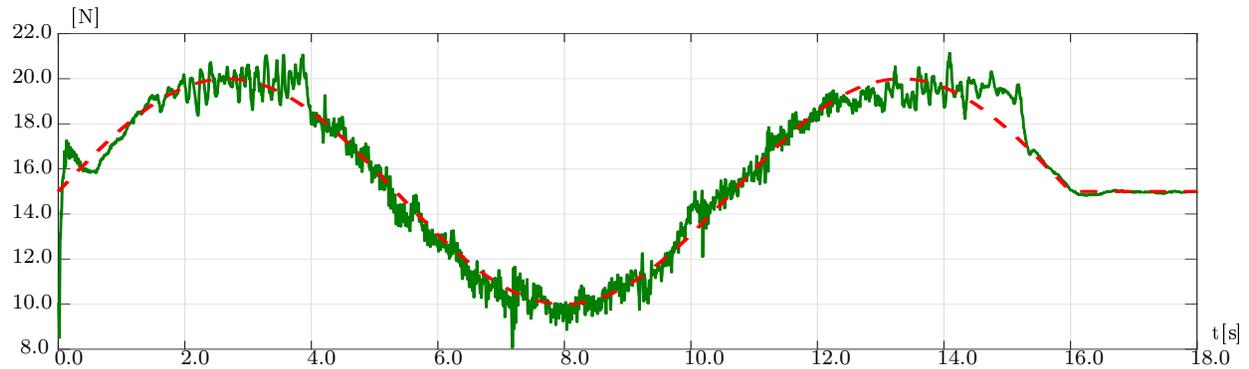


Figura 4.12: Error paramétrico. $\Delta m = 0.0848$ [Kg]

En la Figura 4.13 se presenta la fuerza deseada y las fuerzas aplicadas por los robots sobre el objeto.



(a) Fuerza aplicada por el robot A255 (---) y fuerza deseada (—)



(b) Fuerza aplicada por el robot A465 (---) y fuerza deseada (—)

Figura 4.13: Seguimiento de fuerza

El error de fuerza se presenta en la Figura 4.14

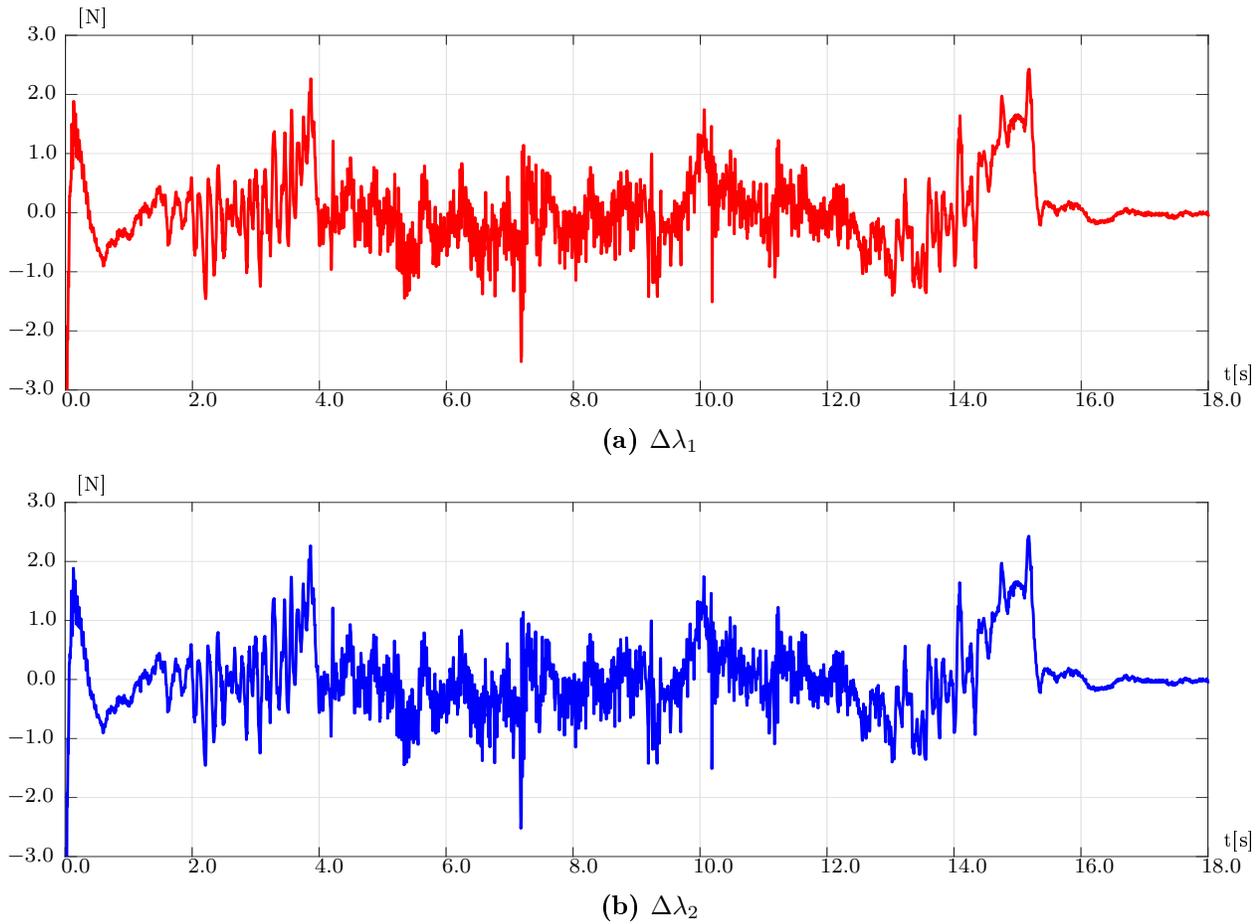


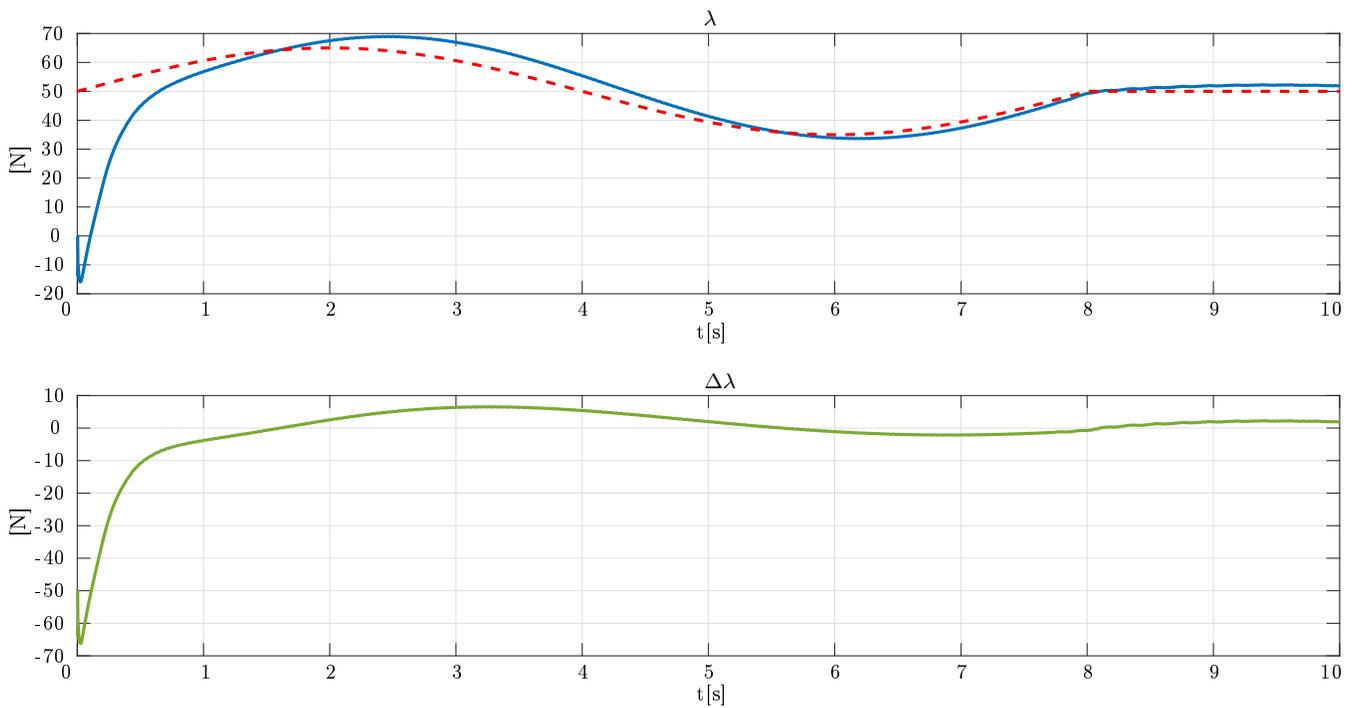
Figura 4.14: Error de seguimiento de fuerza.

Como la estructura de control propuesta está basada en [1] a continuación se realiza la comparación entre ambos controladores bajo las mismas condiciones. Desde un punto de vista práctico, se realiza la comparación del rendimiento de los controladores utilizando el valor escalar estándar de la norma \mathcal{L}_2 , que es una medida objetiva de la curva de error numérico. La norma \mathcal{L}_2 mide el promedio cuadrático medio del error y está definida como

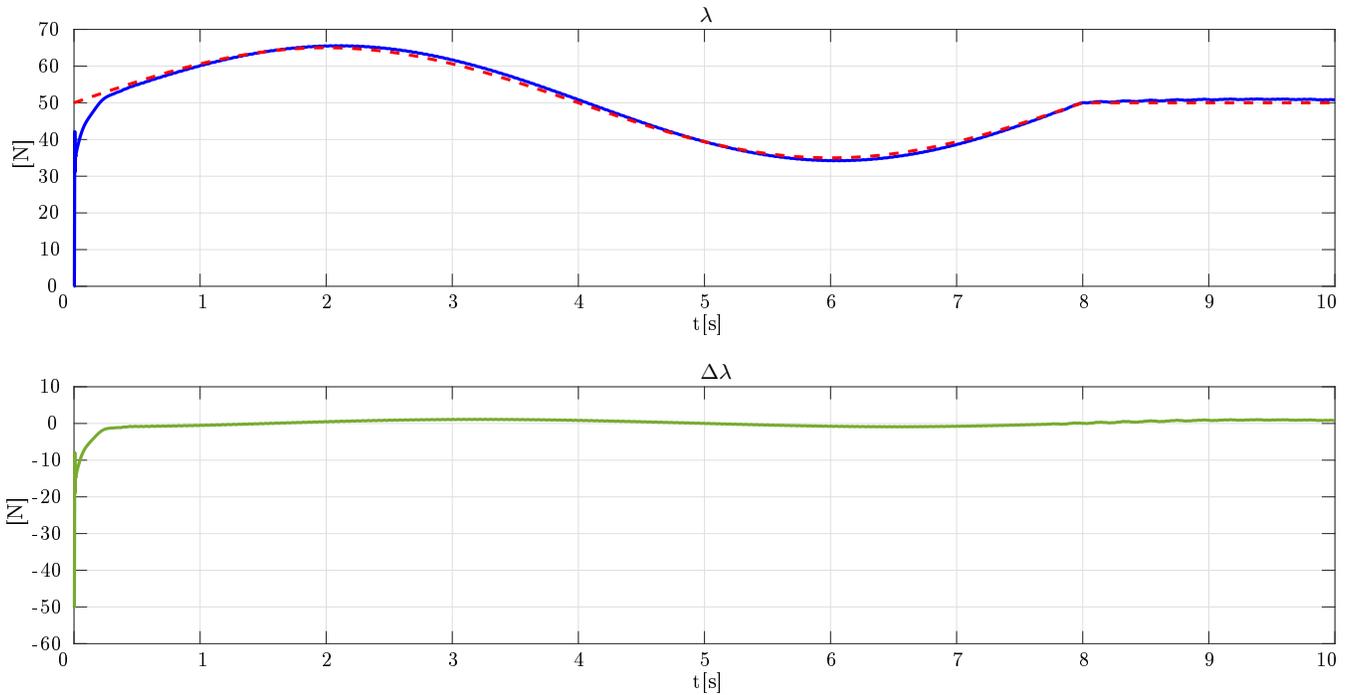
$$\mathcal{L}_2 \left\{ \tilde{(\cdot)} \right\} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_1} \|\tilde{(\cdot)}\|^2 dt}. \quad (4.3)$$

donde $\tilde{(\cdot)}$ representa una función de error del parámetro físico analizado (posición, fuerza, etcétera), y $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$ son los tiempos inicial y final, respectivamente. Un pequeño valor de \mathcal{L}_2 representa un pequeño error de la variable analizada; por lo tanto, el valor más pequeño de \mathcal{L}_2 representa el error más pequeño que indica el mejor rendimiento.

La Figura 4.15 muestra el seguimiento de la fuerza y el error de ambas estructuras de control.



(a) Control de [1]. Fuerza aplicada (—), fuerza deseada (- - -) y error de fuerza (—)



(b) Control propuesto. Fuerza aplicada (—), fuerza deseada (- - -) y error de fuerza (—)

Figura 4.15: Comparación entre el control propuesto y el control en [1] a nivel de fuerza.

Como se observa en 4.15 el controlador propuesto tiene un mejor seguimiento de la fuerza deseada en comparación con el control descrito en [1].

En la siguiente figura se presenta el índice de desempeño de los dos controladores sólo considerando el error de fuerza.

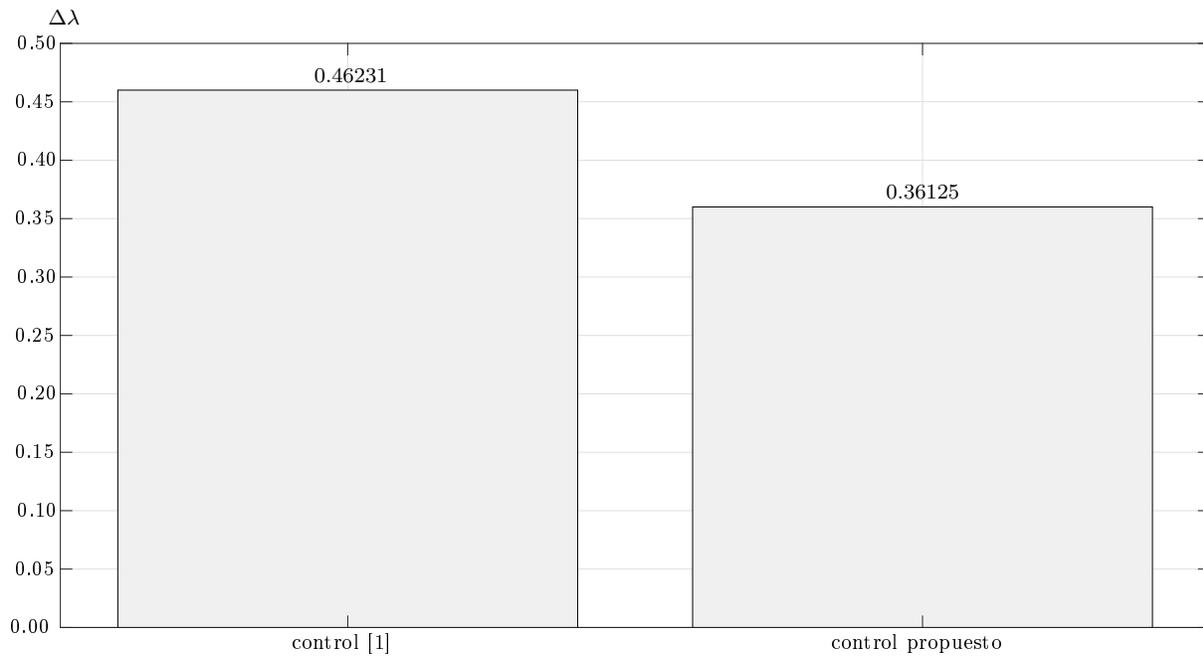


Figura 4.16: Índice de desempeño.

Conclusiones

En el presente trabajo se ha diseñado una estructura de control usando una modificación del principio de ortogonalización propuesto por Arimoto en [79, 116] sobre el algoritmo diseñado en [102]. Dicha modificación consiste en incorporar la función tangente hiperbólica en el término de fuerza y agregar un término que contenga la masa estimada.

Como caso de estudio se analizó un sistema formado por dos manipuladores, obteniendo como primer paso el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico de un sistema cuyo objetivo es sujetar un objeto rígido sin fricción; dicho modelo puede extenderse a l robots manipuladores. El modelo dinámico de cada robot se obtiene usando el método de Euler–Lagrange. Una vez que los manipuladores sujetan el objeto, sus variables articulares son acopladas cinemática y dinámicamente con el modelo dinámico del objeto para obtener una descripción completa del sistema cooperativo.

Para validar los resultados teóricos del modelo dinámico en este trabajo se presenta un experimento que pretende aplicar una fuerza sobre un objeto de masa desconocida y seguir una trayectoria deseada. El resultado general puede ser considerado aceptable. Sin embargo, por razones de seguridad los experimentos se realizaron en lazo cerrado con el controlador, lo que los hace más confiables.

La ley de control que se propone en esta tesis es del tipo descentralizado; es decir, toma en cuenta las restricciones de movimiento en lugar de la dinámica del objeto a manipular. Se asume que la dinámica de los robots es conocida, que a través de la diferenciación numérica se tiene acceso a la velocidad y que se dispone de la medición de las fuerzas de contacto. A pesar del hecho de que el análisis de estabilidad es complejo, el controlador no lo es. Para probar el esquema de control se realizaron varios experimentos. Los resultados fueron buenos tanto en seguimiento de trayectoria de posición/fuerza como en el de regulación de fuerza.

Apéndice A

Datos técnicos de los robots

A continuación se presentan las características técnicas del sistema cooperativo ubicado en el Laboratorio de Robótica de la Facultad de Ingeniería en el Edificio de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El sistema cooperativo está formado por dos robots manipuladores de la empresa canadiense **CRS Robotics**[®] con articulaciones rotacionales impulsadas eléctricamente por motores de corriente directa a través de un sistema de engranaje armónico. Los robots son el CRS–A465 de seis grados de libertad y el CRS–A255 de cinco grados de libertad, ambos robots cuentan con transductores de posición ópticos (encoders) en cada articulación. A cada robot se le coloca en el extremo final un sensor de fuerza de la marca **JR3**[®] con un rango de fuerza máximo de 100 N. Adicionalmente, se utilizan protectores contra choques y fuerzas excesivas.

A.1. Robot CR–A255

El robot industrial **CRS–A255**, Figura A.1, cuenta con cinco grados de libertad formados por articulaciones rotacionales denotados por q_1, \dots, q_5 y un peso total de 17 kilogramos. Tiene la capacidad de cargar hasta 1 kilogramo y un alcance sin la garra de 56 centímetros. El rango de trabajo y la velocidad máxima de cada articulación se describen en la Tabla A.1, [117].

Tabla A.1: Características de las articulaciones

Articulación	Rango de trabajo	Velocidad máxima
q_1	$\pm 175^\circ$	210°/segundos
q_2	+110°	210°/segundos
q_3	-125°	210°/segundos
q_4	$\pm 110^\circ$	675°/segundos
q_5	$\pm 180^\circ$	1350°/segundos

El valor numérico de las constantes se resumen en la Tabla A.2

Tabla A.2: Parámetros físicos robot CRS-A255

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	l_1	0.2540	m
Longitud eslabón 2	l_2	0.2540	m
Longitud eslabón 3	l_3	0.0508	m
Distancia al centro de masa 1	l_{c_1}	0.1270	m
Distancia al centro de masa 2	l_{c_2}	0.1270	m
Distancia al centro de masa 3	l_{c_3}	0.0290	m
Masa 1	m_1	21.500	Kg
Masa 2	m_2	12.600	Kg
Masa 3	m_2	1.0000	Kg
Inercia eslabón 1	I_1	0.6500	Kg m ²
Inercia eslabón 2	I_2	0.5000	Kg m ²
Inercia eslabón 3	I_3	0.1400	Kg m ²
Aceleración de la gravedad	g	9.8100	m/s ²

La estructura física del robot es rígida, es decir, cada eslabón es metálico y suficientemente duro lo que evita que exista deformación en sus eslabones [102].



Figura A.1: Robot CRS-A255

Los actuadores utilizados en cada articulación son motores eléctricos de corriente directa con un alto par de arranque. Los robots cuentan con un sistema de engranes acoplado a la flecha de cada motor. La medición del desplazamiento articular realizado por cada una de las articulaciones se hace por medio de encoders de cuadratura de alta resolución [102].

A.1.1. Cinemática directa

La cinemática directa de un robot manipulador se describe mediante una matriz que transforma las coordenadas de la última articulación (o de cualquier otro punto) con respecto al sistema de referencia fijo $\{x_0, y_0, z_0\}$ localizado en la base del robot. Uno de los métodos para obtener la cinemática directa es el algoritmo de Denavit–Hartenberg, el cual, a través de la obtención de los parámetros θ_i, d_i, a_i y α_i y la resolución de la matriz de transformación homogénea, permite obtener la cinemática directa del sistema [118].

La tabla de parámetros de Denavit–Hartenberg para el robot A255 es la siguiente:

Tabla A.3: Tabla D–H del robot CRS–A255 (Posicionamiento)

i	θ_i	a_i	d_i	α_i
1	q_1	0	l_1	90°
2	q_2	l_2	0	0°
3	q_3	l_3	0	90°

Las matrices de transformación son las siguientes:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \text{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \text{sen}(q_3) & l_3 \cos(q_3) \\ \text{sen}(q_3) & 0 & -\cos(q_3) & l_3 \text{sen}(q_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

La cinemática directa de las tres primeras articulaciones del robot CRS–A225 es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) - l_3 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \text{sen}(q_3) + l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) \\ l_3 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) - l_3 \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_2) \text{sen}(q_3) + l_2 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\ l_1 + l_2 \text{sen}(q_2) + l_3 \cos(q_2) \text{sen}(q_3) + l_3 \text{sen}(q_2) \cos(q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2. Cinemática inversa

Para resolver el problema de la cinemática inversa es necesario considerar que las tres últimas articulaciones de un robot de 5 grados de libertad se intersectan en un punto. De esta forma, la cinemática inversa se divide en dos problemas simples conocidos respectivamente como: *cinemática de posición inversa* y *cinemática de orientación inversa*. Dicho de otra manera, primero se encuentra la posición \mathbf{d} de la intersección de los ejes de la muñeca llamado *centro de la muñeca* y después se encuentra su orientación \mathbf{R} . La cinemática de posición inversa del robot A255 se describe por la ecuación:

$$\mathbf{p}_{m_i} = \mathbf{d}_i - d_i \mathbf{R}_i \mathbf{a}_i \quad (\text{A.5})$$

donde $\mathbf{p}_{m_i} = [p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i}]^T$ es el vector de posición del centro de la muñeca medido desde el origen de la base del robot; \mathbf{d}_i es el vector de posición del efector final medido desde la base del robot; d_i es la distancia entre la parte terminal del robot y el centro de la muñeca considerando el tamaño del último eslabón más el tamaño del efector final; \mathbf{R}_i determina la orientación del sistema coordenado de la última articulación respecto de la base; y \mathbf{a} es el vector unitario orientado en la dirección del acercamiento del efector final.

La ecuación (A.5) da una relación:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - d_6 r_{13} \\ p_y - d_6 r_{23} \\ p_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Nótese que la ecuación (A.6) depende de las primeras tres variables articulares $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Conocidas las componentes del vector \mathbf{p} , se puede utilizar el enfoque geométrico para calcular las variables articulares $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}$ este procedimiento se basa en la trigonometría. Para calcular el valor de la primer variable, se proyecta el vector \mathbf{p}_{m_i} sobre el plano $\{x_0, y_0\}$ (A.2).

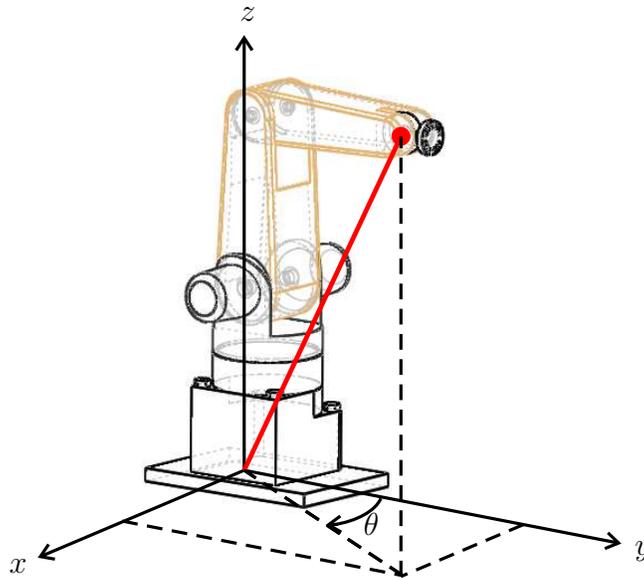


Figura A.2: Proyección del centro de la muñeca sobre el plano $\{x_0, y_0\}$

De esta proyección se tiene que:

$$\theta_1 = \arctan (P_x, P_y) \quad (\text{A.7})$$

θ_2 y θ_3 se calculan de la siguiente forma:

$$\theta_2 = \arctan \left(D, \pm \sqrt{1 - D^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\theta_3 = \arctan \left(p_x - d_1, \sqrt{p_x^2 + p_y^2} - \arctan (a_3 \text{ sen } (\theta_3), a_2 + a_3 \text{ sen } (\theta_3)) \right) \quad (\text{A.9})$$

donde

$$D = \frac{P_x^2 + P_y^2 + (P_z - d_1)^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2d_4^2} \quad (\text{A.10})$$

A.1.3. Modelo dinámico

El modelo dinámico del robot A255 se define como:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

donde:

$$h_{11} = 0.65 + 0.25 \cos (2q_2) + 0.05 \text{ sen } (2q_2 + 2q_3) \quad (\text{A.12})$$

$$h_{12} = 0.00 \quad (\text{A.13})$$

$$h_{13} = 0.00 \quad (\text{A.14})$$

$$h_{22} = 1.10 \quad (\text{A.15})$$

$$h_{23} = 0.03 \cos (q_2 - q_3) \quad (\text{A.16})$$

$$h_{33} = 0.57 \quad (\text{A.17})$$

$$c_{11} = 3.20 - 0.25 \text{ sen } (2q_2) \dot{q}_2 - 0.05 \text{ sen } (q_2) \dot{q}_2 - 0.05 \text{ sen } (q_3) \dot{q}_3 \quad (\text{A.18})$$

$$c_{12} = -0.25 \text{ sen } (2q_2) \dot{q}_1 - 0.05 \text{ sen } (q_2) \dot{q}_1 \quad (\text{A.19})$$

$$c_{13} = 0.05 - \text{ sen } (q_3) \dot{q}_1 \quad (\text{A.20})$$

$$c_{21} = 0.25 \text{ sen } (2q_2) \dot{q}_1 + 0.05 \text{ sen } (q_2) \dot{q}_1 \quad (\text{A.21})$$

$$c_{22} = 1.80 \quad (\text{A.22})$$

$$c_{23} = 0.03 \cos (q_2) - q_3 \dot{q}_3 \quad (\text{A.23})$$

$$c_{31} = 0.05 \text{ sen } (q_3) \dot{q}_1 \quad (\text{A.24})$$

$$c_{32} = -0.03 \cos (q_2) - q_3 \dot{q}_2 \quad (\text{A.25})$$

$$c_{33} = 1.20 \quad (\text{A.26})$$

$$g_1 = 0.00 \quad (\text{A.27})$$

$$g_2 = 0.00 \quad (\text{A.28})$$

$$g_3 = 1.80 \cos (q_3) \quad (\text{A.29})$$

Los términos disipativos correspondientes a la fricción viscosa y fricción de Coulomb están definidos como:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Los parámetros presentados en este apéndice pueden consultarse en [68, 102, 117, 119, 120].

A.2. Robot CRS–A465

El robot industrial **CRS–A465**, Figura A.3, cuenta con seis grados de libertad formados por articulaciones del tipo rotacional denotados por q_1, \dots, q_6 . y un peso total de 31 kilogramos. Tiene la capacidad de cargar hasta 2 kilogramos y un alcance sin la garra de 71.1 centímetros. El rango de trabajo y la velocidad máxima de cada articulación se describen en la Tabla A.4, [120].

Tabla A.4: Características de las articulaciones

Articulación	Rango de trabajo	Velocidad máxima
q_1	$\pm 175^\circ$	180°/segundos
q_2	$\pm 090^\circ$	180°/segundos
q_3	$\pm 110^\circ$	180°/segundos
q_4	$\pm 180^\circ$	171°/segundos
q_5	$\pm 105^\circ$	173°/segundos
q_6	$\pm 180^\circ$	171°/segundos

La estructura física del robot es rígida, es decir, cada eslabón es metálico y suficientemente duro lo que evita que exista deformación en sus eslabones [102].



Figura A.3: Robot CRS–A465.

Los actuadores utilizados en cada articulación son motores eléctricos de corriente directa con un alto par de arranque. Los robots cuentan con una transmisión de engranes acoplada a la flecha de cada uno de los seis motores. La medición del desplazamiento articular realizado por cada una de las articulaciones del robot se hace por medio de encoders de cuadratura de alta resolución [102].

El valor numérico de las constantes se resumen en la Tabla A.5

Tabla A.5: Parámetros físicos robot CRS-A465

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	l_1	0.33	m
Longitud eslabón 2	l_2	0.35	m
Longitud eslabón 3	l_3	0.13	m
Distancia al centro de masa 1	l_{c_1}	0.14	m
Distancia al centro de masa 2	l_{c_2}	0.14	m
Distancia al centro de masa 3	l_{c_3}	0.07	m
Masa 1	m_1	28.5	Kg
Masa 2	m_2	16.6	Kg
Masa 3	m_2	1.00	Kg
Inercia eslabón 1	I_1	0.85	Kg m ²
Inercia eslabón 2	I_2	0.70	Kg m ²
Inercia eslabón 3	I_3	0.18	Kg m ²
Aceleración de la gravedad	g	9.81	m/s ²

A.2.1. Cinemática directa

La cinemática directa de un robot manipulador se describe por medio de una matriz que transforma las coordenadas de la última articulación (o de cualquier otro punto) con respecto de un sistema coordenado fijo $\{x_0, y_0, z_0\}$ localizado en la base del robot. Para obtener la cinemática se utiliza la convención de Denavit–Hartenberg; usada comúnmente para seleccionar la orientación de los marcos de referencia que se colocan en cada articulación.

La tabla de parámetros de Denavit–Hartenberg para el robot A465 es la siguiente:

Tabla A.6: Tabla D-H del robot CRS-A465 (Posicionamiento)

i	θ_i	a_i	d_i	α_i
1	q_1	0	l_1	90°
2	q_2	l_2	0	0°
3	q_3	l_3	0	90°

Las respectivas matrices de transformación para el robot A465 son:

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \text{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$${}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \text{sen}(q_3) & l_3 \cos(q_3) \\ \text{sen}(q_3) & 0 & -\cos(q_3) & l_3 \text{sen}(q_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

La cinemática directa de las tres primeras articulaciones del robot CRS-A465 es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \cos(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) - l_3 \cos(q_1) \text{sen}(q_2) \text{sen}(q_3) + l_2 \cos(q_1) \cos(q_2) \\ l_3 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \cos(q_3) - l_3 \text{sen}(q_1) \text{sen}(q_2) \text{sen}(q_3) + l_2 \text{sen}(q_1) \cos(q_2) \\ l_1 + l_2 \text{sen}(q_2) + l_3 \cos(q_2) \text{sen}(q_3) + l_3 \text{sen}(q_2) \cos(q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

A.2.2. Cinemática inversa

Para resolver el problema de la cinemática inversa es necesario considerar que las tres últimas articulaciones de un robot de 6 grados de libertad se intersecan en un punto. De esta forma, la cinemática inversa se divide en dos problemas simples conocidos respectivamente como: *cinemática de posición inversa* y *cinemática de orientación inversa*. Dicho de otra manera, primero se encuentra la posición \mathbf{d} de la intersección de los ejes de la muñeca llamado *centro de la muñeca* y después se encuentra su orientación \mathbf{R} . La cinemática de posición inversa del robot A465 se describe por la ecuación:

$$\mathbf{p}_{m_i} = \mathbf{d}_i - d_i \mathbf{R}_i \mathbf{a}_i \quad (\text{A.35})$$

donde $\mathbf{p}_{m_i} = [p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i}]^T$ es el vector de posición del centro de la muñeca medido desde el origen de la base del robot; \mathbf{d}_i es el vector de posición del efector final medido desde la base del robot; d_i es la distancia entre la parte terminal del robot y el centro de la muñeca considerando el tamaño del último eslabón más el tamaño del efector final; \mathbf{R}_i determina la orientación del sistema coordinado de la última articulación respecto de la base; y \mathbf{a} es el vector unitario orientado en la dirección del acercamiento del efector final.

La ecuación (A.35) da una relación:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x - d_6 r_{13} \\ p_y - d_6 r_{23} \\ p_z - d_6 r_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Nótese que la ecuación (A.36) depende de las primeras tres variables articulares $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Conocidas las componentes del vector \mathbf{p} , se puede utilizar el enfoque geométrico para calcular las variables articulares $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \theta_{i3}$ este procedimiento se basa en la trigonometría. Para calcular el valor de la primer variable, se proyecta el vector \mathbf{p}_{mi} sobre el plano $\{x_0, y_0\}$ (A.4).

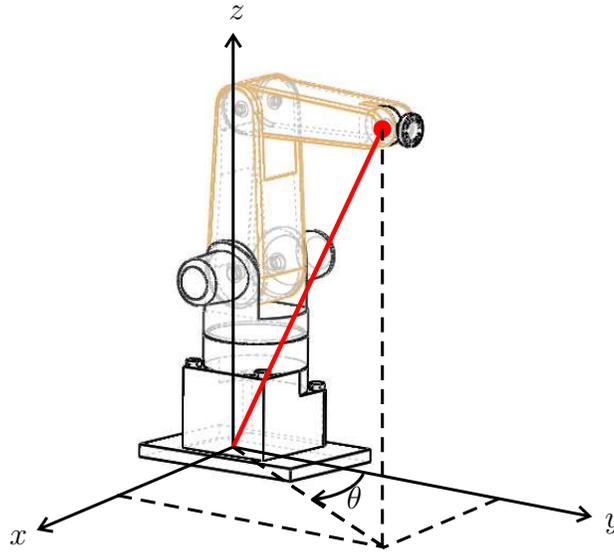


Figura A.4: Proyección del centro de la muñeca sobre el plano $\{x_0, y_0\}$

De esta proyección se tiene que:

$$\theta_1 = \arctan (P_x, P_y) \quad (\text{A.37})$$

θ_2 y θ_3 se calculan de la siguiente forma:

$$\theta_2 = \arctan \left(D, \pm \sqrt{1 - D^2} \right) \quad (\text{A.38})$$

$$\theta_3 = \arctan \left(p_x - d_1, \sqrt{p_x^2 + p_y^2} - \arctan (a_3 \text{ sen } (\theta_3), a_2 + a_3 \text{ sen } (\theta_3)) \right) \quad (\text{A.39})$$

donde

$$D = \frac{P_x^2 + P_y^2 + (P_z - d_1)^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2d_4^2} \quad (\text{A.40})$$

A.2.3. Modelo dinámico

El modelo dinámico del robot A465 se define como:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

donde:

$$h_{11} = 0.72899 + 0.36865 \cos(2q_2) + 0.36987 \sin(2q_2 + q_3) - 0.162177 \cos(2q_2 + 2q_3) \quad (\text{A.42})$$

$$h_{12} = 0.00000 \quad (\text{A.43})$$

$$h_{13} = 0.00000 \quad (\text{A.44})$$

$$h_{22} = 1.08725 + 6 \times 10^{-11} \cos(2q_2) + 0.739747 \sin(q_3) \quad (\text{A.45})$$

$$h_{23} = 0.36987 \sin(q_3) + 0.34077 \quad (\text{A.46})$$

$$h_{33} = 0.34077 \quad (\text{A.47})$$

$$c_{11} = [-0.369 \sin(2q_2) + 0.1622 \sin(2q_2 + 2q_3) + 0.37 \cos(2q_2 + q_3)] \dot{q}_2 + [0.185 \cos(q_3) + 0.1622 \sin(2q_2 + 2q_3) + 0.185 \cos(2q_2 + q_3)] \dot{q}_3 \quad (\text{A.48})$$

$$c_{12} = [-0.369 \sin(2q_2) - 0.1622 \sin(2q_2 + 2q_3) - 0.37 \cos(2q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \quad (\text{A.49})$$

$$c_{13} = [0.185 \cos(q_3) + 0.1622 \sin(2q_2 + 2q_3) + 0.185 \cos(2q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \quad (\text{A.50})$$

$$c_{21} = [0.369 \sin(2q_2) - 0.1622 \sin(2q_2 + 2q_3) - 0.37 \cos(2q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \quad (\text{A.51})$$

$$c_{22} = -6 \times 10^{-11} \sin(2q_2) \dot{q}_2 + 0.37 \cos(q_3) \dot{q}_3 \quad (\text{A.52})$$

$$c_{23} = 0.37000 \cos(q_3) \dot{q}_2 + 0.37 \cos(q_3) \dot{q}_3 \quad (\text{A.53})$$

$$c_{31} = [-0.185 \cos(q_3) - 0.1622 \sin(2q_2 + 2q_3) - 0.185 \cos(2q_2 + q_3)] \dot{q}_1 \quad (\text{A.54})$$

$$c_{32} = -0.37000 \cos(q_3) \dot{q}_2 \quad (\text{A.55})$$

$$c_{33} = 0.00000 \quad (\text{A.56})$$

$$g_1 = 0.00000 \quad (\text{A.57})$$

$$g_2 = 24.70650 \cos(q_2) + 11.897 \sin(q_2 + q_3) \quad (\text{A.58})$$

$$g_3 = 11.89700 \sin(q_2 + q_3) \quad (\text{A.59})$$

A.3. Constantes mecánicas y eléctricas de los motores

Para obtener el modelo dinámico general del sistema cooperativo se debe considerar la dinámica de cada motor. Las características de cada motor se definen en la Tabla A.7.

Tabla A.7: Radio de los sistemas de engranaje

Motor	Marca	Modelo	Radio
Motor 1	CMC	MH3515	$r_1 = 100$
Motor 2	CMC	MH3515	$r_2 = 100$
Motor 3	CMC	MH3515	$r_3 = 100$
Motor 4	CMC	MH3515	$r_4 = 100$
Motor 5	Tamagawa	TS3253N	$r_5 = 100$
Motor 6	Tamagawa	TS908N7	$r_6 = 100$

Las constantes eléctricas de cada motor según el fabricante se definen en la siguiente tabla:

Tabla A.8: Constantes eléctricas y mecánicas de los motores

Motor	Momento de inercia J_m	Fricción viscosa f_{m_1}	Constante mecánica K_a	Constante eléctrica K_b	Resistencia de armadura R_a
Motor 1	9.0376×10^{-5}	9.70996×10^{-5}	0.14234	0.14229	0.84
Motor 2	9.0376×10^{-5}	9.70996×10^{-5}	0.14234	0.14229	0.84
Motor 3	9.0376×10^{-5}	9.70996×10^{-5}	0.14234	0.14229	0.84
Motor 4	4.9000×10^{-6}	0.02234	5.3×10^{-2}	0.05340	2.70
Motor 5	4.9000×10^{-6}	0.02234	5.3×10^{-2}	0.05340	2.70
Motor 6	1.5680×10^{-6}	4.67920×10^{-5}	0.03920	0.05340	6.90

Las matrices diagonales \mathbf{D}_j , \mathbf{D}_f , \mathbf{D}_k y \mathbf{D}_n se definen respectivamente:

$$\mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} 9.0376 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.0376 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.0376 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.9 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.9 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.568 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} 0.0242080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0242080 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0242080 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.234 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.234 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00026949 \end{bmatrix} \quad (\text{A.61})$$

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0.001694 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001694 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001694 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001943 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001962 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000562 \end{bmatrix} \quad (\text{A.62})$$

$$\mathbf{D}_n = \begin{bmatrix} 0.0001000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000980 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000980 \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

Las matrices anteriores forman el modelo dinámico completo de los motores

$$\mathbf{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_f \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_n \boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}_k \mathbf{V} \quad (\text{A.64})$$

Apéndice B

Sensor fuerza/torque JR3 de ejes múltiples

La empresa **JR3 Inc.** fabrica sensores de seis y doce grados de libertad, ambos miden simultáneamente la fuerza y el momento a lo largo y alrededor de los tres ejes ortogonales. Los sensores de doce grados de libertad miden además las aceleraciones lineales y angulares en los ejes x , y y z . Los sensores **JR3**[®] se basan en una célula de carga triaxial y se fabrican en aluminio, en acero inoxidable ó en titanio. En la mayoría de los modelos los datos analógicos se convierten a formato digital mediante sistemas electrónicos incluidos en el sensor. Opcionalmente algunos modelos proporcionan la salida analógica en lugar de la digital [121]. Los fabricantes de los sensores **JR3**[®] establecen a $\{x, y\}$ como el plano horizontal medio del sensor, y al eje z como su eje central. El origen de este sistema de coordenadas es el punto de referencia que el sensor toma para todas las mediciones [121]. El sensor **JR3**[®] se divide en dos modelos: la serie M y la serie E [114].

- Los sensores **JR3**[®] **serie M** incluyen electrónica interna para una mayor inmunidad al ruido, tienen la opción de salida digital para ser usada con una tarjeta de adquisición de datos PCI de **JR3**[®] **Inc.**, tienen la opción de salida analógica y una configuración electrónica de medio puente [122]. Las especificaciones típicas son:
 - Exactitud nominal: 1 % del FS.
 - Linealidad: 0.5 % de FS dentro del rango y del 0.1 % por debajo de 0.25 de FS.
 - Resolución: 250×10^{-6} FS.

- Los sensores **JR3**[®] **serie E** son de alta precisión diseñados para las aplicaciones más exigentes. La característica principal de este sensor es que poseen un puente completo en su configuración electrónica, frente al medio puente de la serie M, lo que le proporciona al sensor una alta precisión [122]. los sensores E poseen una salida analógica y una digital. Las especificaciones típicas son:
 - Precisión nominal: 0.25 % FS.
 - Linealidad: 0.5 % de FS dentro del rango y del 0.1 % por debajo de 0.25 de FS.
 - Resolución: 125×10^{-6} FS

En la Tabla B.1 se muestra el rango máximo en F_z para los sensores **JR3[®] serie M** [122].

Tabla B.1: Rango máximo de la fuerza en z para sensores **JR3[®] serie M**

Modelo	Valor máximo de F_z
50M31	± 200 N ± 580 N en acero inoxidable
67M25	± 400 N ± 1200 N en acero inoxidable
90M31	± 400 N ± 1200 N en acero inoxidable
90M40	± 800 N ± 2000 N en acero inoxidable
100M40	± 800 N ± 2000 N en acero inoxidable
160M50	± 2000 N ± 6300 N en acero inoxidable

El sensor de fuerza empleado es el sensor **JR3 modelo 67M25A 63N4** que se muestra en la Figura B.1, cuyas características de operación están indicadas en [123]. Es un dispositivo de aluminio monolítico, compuesto de galgas extensiométricas que sensan las cargas impuestas al sensor, para producir señales que representan los momentos y fuerza sobre tres ejes ortogonales. El sensor JR3 se orienta de tal forma que los ejes x y y se encuentran sobre el cuerpo del mismo y el eje z es perpendicular al plano $\{x, y\}$. El punto de referencia para todos los datos de la carga es el centro geométrico del sensor.



Figura B.1: Sensor JR3 modelo 67M25A 63N4

Apéndice C

Publicaciones

A continuación se enlistan las publicaciones resultado de este trabajo de Tesis.

■ Artículos en revistas indexadas

- Sánchez-Sánchez, P. and Arteaga-Pérez, M. A., “Simplified methodology for obtaining the dynamic model of robot manipulators“, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 9(5), p.p. 1–12, 2012. <https://doi.org/10.5772/51305>
- Sánchez-Sánchez, P. and Arteaga-Pérez, M. A., “Improving Force Tracking Control Performance in Cooperative Robots“, *International Journal of Advance Robotic Systems*, 14(4), p.p. 1–15, 2017, <https://doi.org/10.1177/1729881417708969>.
- Sánchez-Sánchez, P. and Gutiérrez-Giles, A. and Pliego-Jiménez, J. and Arteaga-Pérez, M. A., “Track Trajectories with Model Uncertainty Using a Robust Differentiator“, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 16(2), p.p. 1–12, 2019, DOI <https://doi.org/10.4995/riai.2019.10265>.
- Pliego-Jiménez, J. and Arteaga-Pérez, M. A. and Sánchez-Sánchez, P., “Dexterous robotic manipulation via a dynamic sliding mode force/position control with bounded inputs“, *IET Control Theory & Applications*, 13(6), p.p. 832–840, 2019, DOI: 10.1049/iet-cta.2018.5331, Print ISSN 1751–8644, Online ISSN 1751–8652.

■ Capítulos en libros

- Sánchez-Sánchez and Arteaga-Pérez, M. A., “Cooperative robots“, in *Robotics, Automation and Control in Industrial and Service Settings* (Zongwei, L., ed.), ch. 2, pp. 30–91, IGI Global, 2015.

■ Artículos en congresos internacionales

- Sánchez-Sánchez, P. and Pliego-Jiménez, J. and Arteaga-Pérez, M. A., “A centralized hybrid position/force controller for cooperative robots with bounded torque inputs“, in *Proc. 13th IEEE International Conference on Control and Automation, ICCA 2017*, (Orhid, Macedonia), 2017.

■ Artículos en congresos nacionales

- Gómez–Moya, S. and Pliego–Jiménez, Javier and Sánchez–Sánchez, P. and Arteaga–Pérez, M. A., “Planeación De Trayectorias Para El Control De Fuerza Sobre Superficies Esféricas Empleando Cuaterniones Unitarios“, in *Proc. Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA 2014*, (Cancún, Quintana Roo), 2014.
- Gutiérrez–Giles, A. and Arteaga–Pérez, M. A. and Sánchez–Sánchez, P.; “Observer based transparent bilateral teleoperation“, in *Congreso Nacional de Control Automático AMCA*; (Cuernavaca, Morelos); 2015.

Bibliografía

- [1] J. Gudiño Lau and M. A. Arteaga-Pérez, “Force control with a velocity observer,” in *Proc. European Control Conference*, (Cambridge, UK), September 2003.
- [2] S. Fujii and S. Kurono, “Coordinated computer control of a pair of manipulators,” in *Proceedings 4th IFToMM World Congress, University of Newcastle upon Tyne*, (England), pp. 411–417, 1975.
- [3] K. Takase, H. Inoue, K. Sato, and S. Hagiwara, “The design of an articulated manipulator with torque control ability,” in *Proceedings of 4th Int. Symp. Ind. Robots*, (Tokyo, Japan), pp. 261–270, 1972.
- [4] E. Nakano, S. Ozaki, T. Ishida, and I. Kato, “Cooperational control of the anthropomorphous manipulator melarm,” in *Proceedings 4th Int. Symp. Industrial Robots*, (Tokyo, Japan), pp. 251–260, 1974.
- [5] S. Kurono, “Cooperative control of two artificial hands by a mini-computer,” in *Prepr. 15th Joint Conf. on Automatic Control*, (Tokyo, Japan), pp. 365–366, 1972.
- [6] A. J. Koivo and G. A. Bekey, “Report of the workshop on coordinated multiple robot manipulators: Planning, control and applications,” *IEEE Trans. of Robotic and Automation*, vol. 4, no. 1, pp. 91–93, 1987.
- [7] P. Dauchez and R. Zapata, “Co-ordinated control of two cooperative manipulators: the use of a kinematic model,” in *Proceedings 15th Int. Symp. Industrial Robots*, (Tokyo, Japan), pp. 641–648, 1985.
- [8] N. H. McClamroch, “Singular systems of differential equations as dynamic models for constrained robot systems,” in *Proceedings of 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Francisco, CA, USA, USA), pp. 21–28, 1986.
- [9] T. J. Tarn, A. K. Bejczy, and X. Yun, “New nonlinear control algorithms for multiple robot arms,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 24, no. 5, pp. 571–583, 1988.
- [10] S. Hayati, “Hybrid position/force control of multi-arm cooperating robots,” in *Proceedings of 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Francisco, CA, USA, USA), pp. 82–89, 1986.

- [11] M. Uchiyama, N. Iwasawa, and K. Hakomori, "Hybrid position/force control for coordination of a two-arm robot," in *Proceedings of 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Raleigh, NC, USA, USA), pp. 1242–1247, 1987.
- [12] M. Uchiyama and P. Dauchez, "A symmetric hybrid position/force control scheme for the coordination of two robots," in *Proceedings of 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Philadelphia, PA, USA, USA), pp. 350–356, 1988.
- [13] M. Uchiyama and P. Dauchez, "Symmetric kinematic formulation and non-master/slave coordinated control of two-arm robots," *Adv. Robot.*, vol. 7, no. 4, pp. 361–383, 1993.
- [14] B. Siciliano and O. Khatib, *Handbook of Robotics*. Switzerland: sv, 2006.
- [15] C. S. Díaz-Baca, *Manipulación cooperativa robot-robot y humano-robot. Aplicación a sistemas flexibles de desensamblado automático*. PhD thesis, Universidad de Alicante, Alicante, 2007.
- [16] R. Kumar, P. Berkelman, P. Gupta, A. Barnes, P. S. Jensen, L. L. Whitcomb, and R. Taylor, "Preliminary experiments in cooperative human/robot force control for robot assisted microsurgical manipulation," in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Francisco, California), April 2000.
- [17] R. Costa-Castelló and L. Basañez Villaluenga, "Planificación de movimientos y control de fuerzas en entornos multi-robot," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 1, pp. 29–42, Octubre 2004.
- [18] I. D. Walker, R. A. Freeman, and S. I. Marcus, "Analysis of motion and internal force loading of objects grasped by multiple cooperating manipulators," *Int. J. Robot. Res.*, vol. 10, no. 4, pp. 396–409, 1991.
- [19] R. G. Bonitz and T. C. Hsia, "Force decomposition in cooperating manipulators using the theory of metric spaces and generalized inverses," in *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Diego, CA, USA, USA), pp. 1521–1527, 1994.
- [20] D. Williams and O. Khatib, "The virtual linkage: a model for internal forces in multi-grasp manipulation," in *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Atlanta, GA, USA, USA), pp. 1025–1030, 1993.
- [21] K. S. Sang, R. Holmberg, and O. Khatib, "The augmented object model: cooperative manipulation and parallel mechanisms dynamics," in *Proceedings of the 2000 ICRA. Millennium Conference. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Symposia Proceedings (Cat. No.00CH37065)*, (San Francisco, CA, USA, USA), pp. 1050–4729, 2000.
- [22] J. T. Wen and K. Kreutz-Delgado, "Motion and force control of multiple robotic manipulators," *Automatica*, vol. 28, no. 4, pp. 729–743, 1992.
- [23] T. Yoshikawa and X. Z. Zheng, "Coordinated dynamic hybrid position/force control for multiple robot manipulators handling one constrained object," in *Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Cincinnati, OH, USA, USA), pp. 1050–4729, 1993.

- [24] V. Perdereau and M. Drouin, "Hybrid external control for two robot coordinated motion," *Robotica*, vol. 14, no. 2, pp. 141–153, 1996.
- [25] H. Bruhm, J. Deisenroth, and P. Schadler, "On the design and simulation-based validation of an active compliance law for multi-arm robots," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 5, no. 4, pp. 307–321, 1989.
- [26] S. Schneider and R. Cannon, "Object impedance control for cooperative manipulation: Theory and experimental results.," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, no. 3, pp. 383–394, 1992.
- [27] R. Bonitz and T. Hsia, "Internal force-based impedance control for cooperating manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, pp. 78–89, February 1996.
- [28] Y. R. Hu, A. A. Goldenberg, and C. Zhou, "Motion and force control of coordinated robots during constrained motion tasks," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 14, no. 4, pp. 351–365, 1995.
- [29] Y.-H. Liu and S. Arimoto, "Decentralized adaptive and nonadaptive position/force controllers for redundant manipulators in cooperations," *International Journal of Robotics Research*, vol. 17, no. 3, pp. 232–247, 1998.
- [30] P. Chiacchio, S. Chiaverini, and B. Siciliano, "Direct and inverse kinematics for coordinated motion tasks of a two-manipulator system," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 118, no. 4, pp. 691–697, 1996.
- [31] F. Caccavale, P. Chiacchio, and S. Chiaverini, "Task-space regulation of cooperative manipulators," *Automatica*, vol. 36, no. 6, pp. 978–887, 2000.
- [32] G. R. Luecke and K. W. Lai, "A joint error-feedback approach to internal force regulation in cooperating manipulator systems," *J. Robot. Syst.*, vol. 14, no. 9, pp. 631–648, 1997.
- [33] F. Caccavale, P. Chiacchio, and S. Chiaverini, "Stability analysis of a joint space control law for a two manipulator system," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 85–88, 1999.
- [34] P. Hsu, "Coordinated control of multiple manipulator systems," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, no. 4, pp. 400–410, 1993.
- [35] P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco, and B. Siciliano, "Global task space manipulability ellipsoids for multiple arm systems," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, no. 5, pp. 678–685, 1991.
- [36] S. Lee, "Dual redundant arm configuration optimization with task-oriented dual arm manipulability," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 5, no. 1, pp. 78–97, 1991.
- [37] T. Kokkinis and B. Paden, "Kinetostatic performance limits of cooperating robot manipulators using force-velocity polytopes," in *Proceedings of ASME Winter Annual Meeting-robotics Research*, (San Francisco, USA, USA), pp. 78–97, 1989.

- [38] S. Hayati, K. Tso, and T. Lee, “Generalized master/slave coordination and control for dual arm robotic system,” in *Proceedings of the 2nd International Symposium on Robotics and Manufacturing*, (Albuquerque), pp. 421–430, 1998.
- [39] W. F. Dellinger and J. N. Anderson, “Interactive force dynamics of two robotic manipulators grasping a nonrigid object,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2205–2210, 1992.
- [40] M. Tao-Jian and J. Y. Luh, “Position and force control for two coordinating robots,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Sacramento, California), pp. 176–181, 1991.
- [41] S. Boleko, R. Costa-Castelló, and L. Basañez Villaluenga, “On the identification and control of internal forces in multi-robot manipulation,” in *Proc. of the 32nd International Symposium on Robotics*, (Seul, Korea), pp. 108–113, 2001.
- [42] B. Siciliano and L. Villani, *Robot Force Control*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [43] M. M. Rahman, R. Ikeura, and K. Mizutani, “Control characteristics of two humans in cooperative task and its application to robot control,” in *Proc. IEEE Conference on Industrial Electronics Society*, (Nagoya, Aichi, Japan), pp. 1773–1778, October 2000.
- [44] L. Joonhong and D. H. Chyung, “On a control scheme for two cooperating robot arms,” in *Proceedings of 24th IEEE Conference on Decision and Control*, (Fort Lauderdale, Florida), pp. 334–337, December 1985.
- [45] C. Clark and L. Stark, “A comparison of control laws for a cooperative robot system,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Francisco, California), pp. 390–394, April 1986.
- [46] S. Arimoto, F. Miyazaki, and S. Kawamura, “Cooperative motion control of multiple robot arms or fingers,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Francisco, California), pp. 1407–1412, March 1987.
- [47] L. Joonhong and D. H. Chyung, “A control scheme for two cooperating robot arms,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 7, pp. 65–68, January 1987.
- [48] H. Yan-Ru, C. Wen-Sen, and Z. Liang-Qi, “Hybrid control of two cooperative robots,” in *Proc. IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, (Beijing and Shenyang, China), pp. 255–258, August 1988.
- [49] V. Hayward and S. Hayati, “Kali: An environment for the programming and control of cooperative manipulators,” in *Proc. American Control Conference*, (Atlanta, GA), pp. 473–478, June 1988.
- [50] L. W. Stark, W. S. Kim, and F. Tendick, “Cooperative control in telerobotics,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Philadelphia, Pennsylvania), pp. 593–595, April 1988.

- [51] W. Peng-Yung, “Cooperative force control of two multi-link manipulators,” in *Proc. American Control Conference*, (Pittsburgh, PA), pp. 1019–1020, June 1989.
- [52] J. Wen and K.-D. K., “Motion and force control for multiple cooperative manipulators,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Scottsdale, Arizona), pp. 1246–1251, May 1989.
- [53] C. L. Lewis and A. A. Maciejewski, “Trajectory generation for cooperating robots,” in *Proceedings of IEEE International Conference on Systems Engineering*, (Pittsburgh, Pennsylvania), pp. 300–303, August 1990.
- [54] E. Ono, H. Okabe, H. Ichijo, N. Aisaka, and H. Akami, “Robot hand with sensor for handling cloth,” in *Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS*, (Isuchiura Ibaraki, Japan), pp. 995–1000, July 1990.
- [55] T. Yoshikawa and X. Zheng, “Coordinated dynamic hybrid position/force control for multiple robot manipulators handling one constrained object,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 12, pp. 219–230, June 1993.
- [56] S. Ahmad, “Control of cooperative multiple flexible joint robots,” *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 23, pp. 1413–1418, August 1991.
- [57] M. Zribi and S. Ahmad, “Robust adaptive control of multiple robots in cooperative motion using sigma modification,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2160–2165, April 1991.
- [58] M. Zribi and S. Ahmad, “Predictive adaptive control of multiple robots in cooperative motion,” *Dynamics and Control*, vol. 5, pp. 139–161, April 1991.
- [59] L. Zhi-Wei, K. Ito, and M. Ito, “Multiple robot manipulators’ cooperative compliant manipulation on dynamical environments,” in *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (Tokio, Japan), pp. 1927–1934, July 1993.
- [60] R. Ikeura, H. Monden, and H. Inooka, “Cooperative motion control of a robot and a human,” in *Proceedings of the IEEE Workshop on Robot and Human Communication*, (Nagoya, Japan), pp. 112–117, July 1994.
- [61] K. Kyunghwan and Y. Hori, “Analysis and control of grasping motion by two cooperative robots,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Power Conversion*, (Nagaoka, Japan), pp. 513–518, August 1997.
- [62] A. Rodríguez-Ángeles and V. Parra-Vega, “Adaptive control with impedance of cooperative multi-robot system,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1522–1527, May 1998.
- [63] F. Caccavale, C. Natale, B. Siciliano, and L. Villani, “Achieving a cooperative behaviour in a dual arm robot system via a modular control structure,” *Journal of Robotics Systems*, vol. 18, pp. 691–699, December 2001.

- [64] P. Chiacchio, F. Caccavale, and S. Chiaverini, "Analysis of a task-space regulator for cooperative manipulators," in *Proc. American Control Conference*, (San Diego, California), June 1999.
- [65] J. Swevers, C. Ganseman, D.-B. Tukel, J. de Schutter, and H. Van-Brussel, "Optimal robot excitation and identification," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 13, no. 5, pp. 730–740, 1997.
- [66] K. Radkhah, D. Kulic, and E. Croft, "Dynamic parameter identification for the crs a460 robot," in *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1–6, 2007.
- [67] G. Calafiore, M. Indri, and B. Bona, "Robot dynamic calibration: Optimal excitation trajectories and experimental parameter estimation," *Journal of Robotic Systems*, vol. 18, pp. 55–68, February 2001.
- [68] J. C. Martínez-Rosas, *Control de robots cooperativos sin medición de velocidad/fuerza*. PhD thesis, UNAM, México, 2006.
- [69] J. C. Rivera-Dueñas, "Control de posición/fuerza para manipuladores rígidos basado en cuaterniones unitarios," Master's thesis, UNAM, México, 2007.
- [70] H. Huang and W. L. Tseng, "An observer design for constrained robot systems," in *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, (Austin, Texas. U. S. A.), pp. 2261–2263, December 1988.
- [71] K. Ohishi, M. Miyazaki, and M. Fujita, "Hybrid control of force and position without force sensor," in *Proceedings of 1992 IEEE International Conference on Industrial Electronics, Control, Instrumentation, and Automation*, (San Diego, California. U. S. A.), pp. 670–675, November 1992.
- [72] P. J. Hacksel and S. E. Salcudean, "Estimation of environment forces and rigid-body velocities using observers," in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (San Diego, California), pp. 931–936, May 1994.
- [73] A. Alcocera, A. Robertssona, A. Valerac, and R. Johanssona, "Force estimation and control in robot manipulators," in *7th IFAC Symposium in Robot Control (SYROCO'03)*, (Wroclaw, Poland), pp. 55–61, September 2003.
- [74] J. C. Martínez-Rosas and M. A. Arteaga-Pérez, "Force and velocity observers for the control of cooperative robots," *Robotica*, vol. 26, pp. 85–92, January 2008.
- [75] M. A. Arteaga-Perez, J. C. Rivera-Dueñas, and A. Gutierrez-Giles, "Velocity and force observers for the control of robot manipulators," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 136, August 2013.
- [76] M. Raibert and J. Craig, "Hybrid position/force control of manipulators," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 103, pp. 126–133, 1981.

- [77] H. McClamroch and D. Wang, “Linear feedback control of position and contact force for a nonlinear constrained mechanism,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 112, pp. 640–645, 1990.
- [78] T. D. Murphey and M. Horowitz, “Adaptive cooperative manipulation with intermittent contact,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Pasadena, California. U. S. A.), pp. 1483–1488, May 2008.
- [79] S. Arimoto, Y. H. Liu, and T. Naniwa, “Principle of orthogonalization for hybrid control of robot arms,” in *Proceedings of the 12th IFAC World Congress*, vol. 1, (Sidney, Australia), pp. 507–512, July 1993.
- [80] C. Wehai, L. I-Ming, C. and Wee-Kiat, and Y. Guilin, “Cartesian coordinate control for redundant modular robots,” *Proc. IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 5, pp. 3253–3258, October 2000.
- [81] K. Kato, K. Inoue, T. Arai, and Y. Mae, “Cooperative control and force limitation for multiple robots in single object transportation,” in *Proc. IEEE Conference on Industrial Electronics Society*, (Denver, Colorado), December 2001.
- [82] Y. Maeda, T. Hara, and T. Arai, “Human–robot cooperative manipulation with motion estimation,” in *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (Maui, Hawaii), October 2001.
- [83] M. A. Arteaga-Pérez and Y. Tang, “Robust control of robots by using a linear observer,” in *Proc. CD ROM, Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM’01)*, (Como, Italy), July 2001.
- [84] M. A. Arteaga-Pérez and A. Muñoz, “Control of cooperative robots without velocity measurements,” in *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (Lausanne, Switzerland), pp. 2837–2842, September–October 2002.
- [85] K. Okumura, S. Fujii, and Z. Kang, “Cooperative control of two robots by remote operation,” in *Proceedings of 41st SICE Annual Conference*, 2002.
- [86] R. Tinós, M. Terra, and M. Bergman, “Dynamic load-carrying capacity of cooperative manipulators with passive joints,” in *Congreso Brasileiro de Automática*, September 2002.
- [87] O. A. Domínguez-Ramírez and V. Parra-Vega, “Texture, roughness, and shape haptic perception of deformable virtual objects with constrained lagrangian formulation,” in *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (Las Vegas, Nevada), October 2003.
- [88] N. M. Fonseca-Ferreira and J. A. Tenreiro-Machado, “Fractional order position/force control of two cooperating manipulators,” in *IEEE International Conference on Computational Cybernetics Siófok*, (Hungary), August 2003.

- [89] H. Gilgueng, H. Hashimoto, P. Szemes, and N. Ando, “An evaluation of grasp force control in single–master multi–slave tele–micromanipulation,” in *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005.
- [90] M. A. Arteaga-Pérez and R. Kelly, “Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 20, no. 2, pp. 297–308, 2004.
- [91] K. Tsuji and T. Murakami, “Load distribution control for cooperative transportation by multiple mobile robots,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Advanced Motion Control*, 2004.
- [92] N. Sadati and E. Elhamifar, “Output feedback adaptive decentralized control of cooperative robots,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Industrial Electronics and Control Applications*, 2005.
- [93] N. Sadati and E. Elhamifar, “Robust decentralized position/force control of cooperative robots without velocity measurement,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Industrial Technology*, 2005.
- [94] R. García-Rodríguez and V. Parra-Vega, “Decentralized sliding force/position pd control of cooperative robots in operational space under jacobian uncertainty,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005.
- [95] M. A. Arteaga-Pérez, A. Castillo-Sánchez, and V. Parra-Vega, “Cartesian control of robots without dynamic model and observer design,” *Automatica*, vol. 42, pp. 473–480, March 2006.
- [96] N. Sadati and E. Elhamifar, “Output feedback decentralized control of multi-agent manipulation systems,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Engineering of Intelligent Systems*, 2006.
- [97] C. Soon-Jo and J. J. E. Slotine, “Cooperative robot control and synchronization of lagrangian systems,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
- [98] D. Wenjie and J. A. Farrell, “Decentralized cooperative control of multiple nonholonomic systems,” in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
- [99] R. García-Rodríguez and V. Parra-Vega, “Task–space neuro–sliding mode control of robot manipulators under jacobian uncertainties,” 2011.
- [100] S. M. M. Rahman and R. Ikeura, “Weight–perception-based novel control for cooperative lifting of objects with a power assist robot by two humans,” in *International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob)*, 2012.
- [101] T. Rugthum and T. Gang, “An adaptive actuator failure compensation scheme for a cooperative manipulator system,” in *Proc. American Control Conference*, 2014.
- [102] J. Gudiño Lau, *Control no lineal de robots cooperativos sin Medición de velocidad*. PhD thesis, UNAM, México, 2005.
- [103] C. S. G. Lee and B. H. Lee, “Planning of straight line manipulator trajectory in cartesian space with torque constraints,” in *23rd IEEE Conference on Decision and Control*, December 1984.

- [104] Y.-H. Liu, S. Arimoto, V. Parra-Vega, and K. Kitagaki, “Decentralized adaptive control of multiple manipulators in cooperations,” *International Journal of Control*, vol. 67, no. 5, pp. 649–673, 1997.
- [105] J. C. Rivera-Dueñas, *Control de posición/fuerza-torque para manipuladores con compensación de fricción*. PhD thesis, UNAM, México, 2012.
- [106] Y. H. Liu and S. Arimoto, “Implicit and explicit force controllers for rheo-holonomically constrained manipulators and their extension to distributed cooperation control,” in *IFAC 13th Triennial World Congress*, (San Francisco. USA), pp. 618–623, 1996.
- [107] J. Gudiño Lau, M. A. Arteaga-Pérez, L. A. Muñoz, and V. Parra-Vega, “On the control of cooperative robots without velocity measurements,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 600–608, 2004.
- [108] L. R. Sagredo-Hernández, “Control de robots cooperativos con un observador lineal,” Master’s thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2006.
- [109] Y.-H. Liu, S. Arimoto, V., and K. Kitagaki, “Adaptive control for holonomically constrained robots: timeinvariant and time-variant cases,” in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Seoul, Korea), pp. 649–673, July 1995.
- [110] R. Kelly and V. Santibáñez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Madrid, España: Pearson Prentice-Hall, 2003.
- [111] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [112] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 2nd ed., 1996.
- [113] J. Gudiño Lau and M. A. Arteaga-Pérez, “Dynamic model and simulation of cooperative robots: A case study,” *Robotica*, vol. 23, pp. 615–624, 2005.
- [114] C. de la Hoz-Najarro, “Puesta en marcha del sensor fuerza/par jr3,” b. s. thesis, Universidad Carlos III de Madrid, España, 2011.
- [115] M. W. Spong, S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*. U .S. A.: John Wiley & Sons, 2006.
- [116] M. A. Arteaga-Pérez, “Experimental results on the control of cooperative robots without velocity measurements,” in *Proc. CD ROM, IEEE 11th Mediterranean Conference on Control and Automation*, (Rhodes, Greece), June 2003.
- [117] C. R. Corporation, *A255 Robot Arm User Guide for use with C500C Controller*, 2000.
- [118] D. T. Greenwood, *Principles of Dynamics*. uk: pph, 1987.
- [119] A. M. Castillo Sánchez, “Adaptación de dos robots industriales para su utilización en el desarrollo de nuevas técnicas y algoritmos de control,” Master’s thesis, ENEP. Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2002.

- [120] C. R. Corporation, *A465 Robot Arm User Guide for use with C500C Controller*, 2000.
- [121] A. Barrientos, L. F. Peñin, C. Balaguer, and R. Aracil, *Fundamentos de Robótica*. maes: mgh, 1997.
- [122] JR3-Technologies, *JR3 Multi-Axis Force-Torque Sensor Technical Specifications*, 2000.
- [123] JR3-Technologies, *JR3 Multi/axis Force/Torque Sensors connect directly to adept MV controllers*, 2006.