



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMA DE YAMADA, COTA UNIVERSAL
PARA LA FUNCIÓN DESPLAZAMIENTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

DANIEL ALEJANDRO PALOMINO PICHARDO



DIRECTOR DE TESIS:
DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

CIUDAD DE MÉXICO, 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Palomino
Pichardo
Daniel Alejandro
51 13 79 55
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
311111570

2. Datos del tutor

Dr.
Antonio
Lascurain
Orive

3. Datos del sinodal 1

M. en C.
José Antonio
Gómez
Ortega

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Alberto León
Kushner
Schnur

5. Datos del sinodal 3

Dra.
Adriana
Ortiz
Rodríguez

6. Datos del sinodal 4

M. en C.
Raybel Andrés
García
Ancona

7. Datos del trabajo escrito

Teorema de Yamada, cota universal para la función desplazamiento
74 p
2019

Agradecimientos

Ciertas crisis pueden tornarse insalvables a falta de asistencia, tanto intelectual como humana. Abordar un problema académico y llevarlo a buen término, en ocasiones, llega a constituirse crisis personal.

He de expresar mis más sinceros agradecimientos a todas aquellas personas que, directa o indirectamente, hicieron posible la conclusión de cada página en el presente texto e imposible el estallido de una crisis para quien escribe estas palabras.

A mis padres, les reconozco el incondicional apoyo que me brindaron desde la infancia, así como el invaluable afecto y comprensión que difícilmente encontraría en otro lado. Son ellos los responsables de que haya decidido aventurarme en el mundo de las ciencias, pues aunque este les era desconocido jamás me hicieron dudar de mis capacidades y, por el contrario, me proporcionaron el aliento necesario para continuar y verme llegar hasta este punto. Gracias por tantos sacrificios y por saber llevar adelante a una familia que, a pesar de vivir humildemente, nunca ha defallecido ante las adversidades. Gracias por permitirme aprender de sus virtudes.

A mis hermanos mayores: Miguel Ángel, Gabriel y Ariel; por inspirarme a continuar explorando el mundo del conocimiento y posibilitarme iniciar mi travesía desde senderos previamente trazados por ellos. Les agradezco haberme mostrado el camino a seguir para llegar hasta la meta que me propuse alcanzar, por haberme transmitido tantas útiles lecciones de vida, y por ayudarme a comprender, mediante sus acciones y ejemplos, cómo ser un hombre responsable y dedicado. Admiro la facilidad con que me animaron a seguir adelante, aún en los momentos más penosos.

Puedo expresar, sin temor a equivocarme, que soy un individuo muy afortunado por contar con una familia como la mía y, más aún, por tenerlos a todos conmigo.

Agradezco a mi hoy fiel compañera de vida, Lorena, a quien sólo lamento no haber conocido con anterioridad; por su valiosa compañía e innegable dedicación por evitar que la aflicción me asediara en momentos infaustos. Aprecio la habilidad con la que me hace sonreír cuando más lo necesito, así como la paciencia que ha mostrado para con mi persona desde el principio. Gracias por hacerme notar lo equivocado que estaba con respecto a ciertos aspectos de la vida y por alentarme a tomar riesgos que de otra manera simplemente no me habría atrevido a conquistar. Gracias por compartir tantas buenas experiencias conmigo.

Agradezco también a ella cada minuto que invirtió con intención de auxiliarme en el cumplimiento de algunas diligencias cuando el tiempo era para mí un recurso escaso, así como las opiniones que amablemente expresó mientras el presente trabajo adquiría forma.

Manifiesto, por supuesto, mi total gratitud para el Dr. Antonio Lascu-rain Orive, quien fue no sólo mi asesor de tesis sino también un excelente profesor de quien tuve la dicha de aprender tomando sus clases y siguiendo sus provechosos textos. Ha sido por su causa que pude conocer las maravillas que la geometría hiperbólica y la teoría de los grupos fuchsianos ofrecen. Le agradezco el haberme otorgado la oportunidad de desarrollar esta obra, tan importante para mí, bajo su dirección. Gracias por contagiarme el entusiasmo con el que lleva a cabo su labor como profesional de las matemáticas. Gracias por toda su ayuda, paciencia y dedicación; por sus observaciones, correcciones y preciadas aportaciones; y gracias por todo el tiempo que invirtió hasta la culminación de esta ardua empresa.

Agradezco también a mis sinodales: el Maestro José Antonio Gómez Ortega, el Doctor Alberto León Kushner Schnur, la Doctora Adriana Ortiz Rodríguez y el Maestro Raybel Andrés García Ancona; por la admirable labor de revisar mi trabajo sin dejar de lado sus múltiples quehaceres profesionales. Les estaré siempre agradecido por contribuir con sus valiosos conocimientos y comentarios en la mejora de este escrito, así como por todo su tiempo y atención.

Es preciso expresar un agradecimiento a cada uno de mis entrañables compañeros de la Facultad de Ciencias, por vivir a mi lado tantas aventuras y desventuras, afrontando cada situación con su característico e interminable buen humor. Todos ellos contribuyeron a hacer el difícil camino hacia la meta más llevadero. Agradezco especialmente al buen Mario y a su respetable familia por todo el apoyo que amablemente me brindaron, abriendo ante mí las puertas de su casa en más de una ocasión y haciendome sentir como uno de ellos.

Finalmente, doy gracias a la UNAM y a la Facultad de Ciencias por proporcionarme la oportunidad de concluir la carrera que con tanto afán quise estudiar. Asimismo, agradezco el hecho de permitirme, más recientemente, laborar en sus instalaciones como ayudante de profesor compartiendo con los estudiantes parte de los conocimientos que en esta institución adquirí. Todo ello ha contribuido, en gran medida, a mi desarrollo profesional y humano, y ha hecho posible la conclusión satisfactoria de este importante capítulo en mi vida.

Introducción

La teoría de los grupos fuchsianos y kleinianos ha sido un tema central en las matemáticas durante los últimos cincuenta años. Estos grupos incluyen al grupo clásico modular, sus subgrupos y sus extensiones kleinianas; temas fascinantes que conectan a muchas áreas de la matemática teórica. A raíz de los trabajos de Thurston la topología de las variedades de dimensión tres se enriqueció al mostrarse que una familia muy grande de estas tiene estructura hiperbólica, es decir, que se obtiene de acciones de grupos kleinianos. Más aún, los grupos aritméticos se vinculan fuertemente con la geometría y la topología de las variedades de dimensión tres (cf. [7]). Unas áreas dan luz a otras y viceversa: álgebra, teoría de números, topología, variable compleja y geometría van, en este ámbito, en el mismo camino.

En la presente tesis se describen y prueban varios resultados que, junto con otros demostrados en [1] y [9], constituyen un conjunto de argumentos que otorgan validez al Teorema de Yamada. Marden probó que existían cotas universales para la función desplazamiento para un grupo fuchsiano G de rango 2, generado por transformaciones g y h . Yamada afinó este resultado y probó que una cota universal es 0.1318... y se alcanza con el grupo triangular $(2, 3, 7)$ (véase Teorema 4.0.9). Se toman dos parámetros para las cotas universales de la función desplazamiento: $M(g, h)$ que es el ínfimo de los máximos en cada punto y $P(g, h)$ el ínfimo de los productos (cf. p. 37). Los casos que se demuestran a detalle son los correspondientes a grupos generados por dos transformaciones hiperbólicas, ya sea que sus ejes se crucen (Teorema 4.0.1) o no (Teorema 4.0.4), y por una hiperbólica y una elíptica (Teorema 4.0.8). Otras situaciones aparecen en [1] y más detalladamente en [9]. El caso correspondiente a dos transformaciones hiperbólicas cuyos ejes se intersecan es particularmente importante y sofisticado como se puede observar en la clasificación de los grupos fuchsianos de rango 2 en el libro de Gilman, [3].

El Teorema 4.0.1 enriquece el resultado que aparece en [1]. pp. 316, 317,

ya que muestra que la cota inferior de $1/2$ únicamente puede no ser respetada por cuatro grupos triangulares, en contraste con lo expuesto por el autor Alan Beardon, quién señalaba una familia infinita de estos grupos. Dicho teorema se basa profundamente en el análisis de grupos fuchsianos generados por tres elementos elípticos de orden 2. Es por ello que a pesar de que las ideas del Capítulo 3 y, más específicamente, el Teorema 3.0.1 fueron tratadas a detalle en [10] (y también aparecen en [1]) resultó necesario incluirlas, aunque de manera resumida.

En el Capítulo 2 se prueba otro teorema de gran utilidad y que generaliza de cierta manera al teorema de Poincaré: si se tiene un polígono con cerradura compacta y apareamientos de lados de tal manera que el grupo generado es discreto, entonces el área de dicho polígono es igual a k veces el área de la superficie de Riemann (cf. Teorema 2.0.3). La demostración expuesta en el presente trabajo enriquece la prueba proporcionada en [1], pues se incluye un análisis minucioso para los vértices del polígono. Cabe señalar que dicho resultado favorece el entendimiento de los grupos generados por tres transformaciones elípticas de orden 2.

El contenido de esta tesis se apoya en el uso de diversas herramientas y avanzadas técnicas relacionadas con la teoría de grupos fuchsianos y con la geometría hiperbólica en general, las cuales aparecen a lo largo del libro de Alan Beardon, [1]. Entre las herramientas antes mencionadas se pueden destacar ciertos resultados de la geometría de cuadriláteros, pentágonos, hexágonos; trigonometría hiperbólica; áreas de polígonos hiperbólicos así como la signatura de grupos fuchsianos, el producto inversivo, resultados de la función desplazamiento, el teorema de Poincaré y algunos resultados sobre grupos triangulares.

Contenido

1. Preliminares	1
1.1. Transformaciones de Möbius	1
1.2. La métrica hiperbólica	3
1.3. El producto inversivo	6
1.4. Grupos fuchsianos	7
2. Una generalización del Teorema de Poincaré	11
3. Tres elementos elípticos de orden dos	23
4. Cota universal para la función desplazamiento	37

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Transformaciones de Möbius

Las funciones de variable compleja de la forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c, d son números complejos y $ad - bc \neq 0$, reciben el nombre de transformaciones de Möbius y están definidas en todos los puntos del plano complejo extendido. Es bien sabido que a estas funciones se les asocian matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1.$$

Al grupo formado por tales matrices se le denota por $SL(2, \mathbb{C})$ y puede probarse que su centro consiste de las matrices $\pm Id$. El cociente de dicho grupo sobre su centro es el grupo proyectivo especial lineal y se le denota por $PSL(2, \mathbb{C})$. En [6] pp. 8-12, se prueba que el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas. Al subgrupo de matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ con entradas reales se le denota por $SL(2, \mathbb{R})$. La misma prueba del caso complejo es aplicable para mostrar que el centro de este grupo es $\pm Id$ y que se puede identificar a las transformaciones de Möbius definidas por estas matrices con el cociente de $SL(2, \mathbb{R})$ sobre su centro, a este último grupo se le denota por $PSL(2, \mathbb{R})$.

De la forma de las transformaciones de Möbius se observa que éstas poseen al menos un punto fijo en $\hat{\mathbb{C}}$. Más aún, si una de tales transformaciones es

distinta de la identidad entonces tiene a lo más dos puntos fijos. De lo anterior surgen las definiciones que conforman una clasificación para estas funciones.

Definición 1 *Sea g una transformación de Möbius que fija exactamente un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces a g se le llama parabólica.*

Es un hecho conocido que las transformaciones parabólicas son conjugadas en $PSL(2, \mathbb{C})$ a traslaciones. Incluso cualquiera de estas transformaciones es conjugada a la traslación $z \mapsto z + 1$. Las transformaciones que no son parabólicas son conjugadas en $PSL(2, \mathbb{C})$ a transformaciones de la forma $z \mapsto \alpha z, \alpha \in \mathbb{C}$.

Definición 2 *Sea g una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ que fija exactamente dos puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$. Supóngase que g es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a la transformación $z \mapsto \alpha z$. Entonces:*

- (i) si $|\alpha| = 1$, a g se le llama elíptica;
- (ii) si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a g se le llama hiperbólica;
- (iii) si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, a g se le llama loxodrómica.

Para las transformaciones elípticas, es posible expresar el coeficiente α como $e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$, pues éste tiene norma unitaria. El real θ es el ángulo de rotación de la transformación.

Para finalizar esta sección es conveniente mencionar que en algunas partes del presente trabajo se hará referencia a la traza de una transformación.

Definición 3 *Sea $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ dada por*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

se define la traza de g como

$$tr(g) = \pm \frac{a + d}{\sqrt{ad - bc}}.$$

Cabe mencionar que las transformaciones de Möbius también pueden clasificarse de acuerdo con su traza (véase [6], pp. 40,41).

1.2. La métrica hiperbólica

En esta sección se presenta la métrica utilizada en los modelos del semiplano superior y del disco de Poincaré para el plano hiperbólico. Es necesario comenzar introduciendo el concepto de densidad:

Definición 4 Sea A una región en \mathbb{R}^n . Una densidad en A es una función continua $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Una densidad λ (en una región A) permite medir la longitud de una curva γ de clase C^1 en A , a través de la llamada λ -longitud de γ , la cual se define como

$$l_\lambda(\gamma) = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow A$. Es posible extender esta definición, de manera natural, a curvas de clase C^1 por tramos. Esta medición de curvas permite, a su vez, medir la distancia entre dos puntos.

Definición 5 Sea λ una densidad en una región A y z_1, z_2 puntos en A . Se define la λ -distancia de z_1 a z_2 como

$$\rho_\lambda(z_1, z_2) = \inf_\gamma l_\lambda(\gamma),$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas γ de clase C^1 por tramos que unen z_1 con z_2 .

Resulta que las densidades definen métricas. Al semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

provisto con la métrica definida por la densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im } z}$$

se le conoce como el plano hiperbólico y a tal métrica se le llama la métrica hiperbólica. Por otra parte, al disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ provisto con la métrica que define la densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2}$$

se le conoce como el disco de Poincaré y a la métrica inducida se le llama, de igual manera, hiperbólica. Ambos modelos, el disco de Poincaré y el semiplano \mathbb{H}^2 , son conocidos como el plano hiperbólico. La distancia hiperbólica entre dos puntos z_1 y z_2 suele denotarse simplemente como $\rho(z_1, z_2)$.

De la invarianza de ciertas expresiones bajo la acción de isometrías en el plano hiperbólico pueden deducirse algunas fórmulas para la distancia hiperbólica, por ejemplo, para puntos z y w en \mathbb{H}^2 se tiene

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w},$$

mientras que, en el modelo del disco, la distancia hiperbólica entre z y w satisface

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Las pruebas de estas igualdades pueden encontrarse en [6] pp. 53, 77-78.

Se sabe que la función de Cayley dada por

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

es una biyección conforme entre el semiplano superior \mathbb{H}^2 y el disco unitario Δ que, además, es una isometría hiperbólica entre los dos modelos. Lo anterior permite trabajar arbitrariamente en cualquiera de los dos modelos según sea conveniente.

Se sabe que las transformaciones elípticas tienen un punto fijo en el plano hiperbólico y otro fuera de él, más aún, cualquier isometría elíptica queda completamente determinada por su punto fijo en el plano hiperbólico (\mathbb{H}^2 o Δ) y su ángulo de rotación.

Las transformaciones hiperbólicas tienen dos puntos fijos que se encuentran en la frontera del plano hiperbólico, es decir, en $\widehat{\mathbb{R}}$ o en la circunferencia unitaria, según el modelo utilizado. Estos puntos fijos determinan una única geodésica conocida como el eje de la transformación. Además, es posible definir una cantidad para una transformación hiperbólica h , conocida como longitud de traslación y denotada por T_h , como sigue:

$$T_h = \inf_z \rho(z, hz).$$

Aprovechando la introducción de esta terminología se presenta un resultado que será de utilidad más adelante en este trabajo. La demostración puede encontrarse en [1], pp. 186, 187.

Teorema 1.2.1 Sean g y h transformaciones hiperbólicas cuyos ejes A_g y A_h se cruzan en un ángulo θ , $0 < \theta < \pi$. Si el conmutador $[g, h]$ no es elíptico, entonces

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sin\theta \geq 1.$$

Para una isometría g del plano hiperbólico, la expresión

$$z \mapsto \rho(z, gz)$$

indica cuántas unidades se desplaza cada punto del plano tras aplicar g . Esta es fundamentalmente la función desplazamiento de la isometría dada, sin embargo, trabajar con ella no suele ser muy práctico, por ello es conveniente definir la función desplazamiento de la siguiente manera:

Definición 6 Dada una isometría g del plano hiperbólico, se define la función desplazamiento para g como

$$z \mapsto \sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz),$$

independientemente del modelo utilizado.

El teorema presentado a continuación explica cómo se comporta la función desplazamiento para dos tipos de isometrías.

Teorema 1.2.2 (i) Si g es hiperbólica con eje A y longitud de traslación T , entonces

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz) = \cosh\rho(z, A)\sinh\left(\frac{1}{2}T\right).$$

(ii) Si g es elíptica con punto fijo v y ángulo de rotación θ , entonces

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz) = \sinh\rho(z, v)|\sin(\theta/2)|,$$

donde $\theta \in [0, 2\pi)$.

La demostración correspondiente se encuentra en [1], pp. 174, 175; para mayor detalle véase [9], pp. 6-8. Del inciso (i) de este teorema puede deducirse que, para el caso hiperbólico, la menor traslación se alcanza en el eje de g , donde el desplazamiento es constante. Para corroborar lo anterior supóngase que $z \in A$. Entonces $\rho(z, A) = 0$, así que

$$\begin{aligned} \sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) &= \cosh \rho(z, A) \sinh \left(\frac{1}{2} T \right) \\ &= \cosh(0) \sinh \left(\frac{1}{2} T \right) \\ &= \sinh \left(\frac{1}{2} T \right). \end{aligned}$$

En este punto puede notarse que, por la definición de la longitud de traslación T , esta última expresión es constante y además corresponde al mínimo valor posible para

$$\cosh \rho(z, A) \sinh \left(\frac{1}{2} T \right),$$

por ser 1 el ínfimo de la función $\cosh(x)$.

1.3. El producto inversivo

Un concepto de gran utilidad dentro de la geometría hiperbólica es el de producto inversivo de dos “círculos” (donde el término “círculo” puede también hacer referencia a una recta). Se trata de una expresión real que depende únicamente de los dos círculos considerados y que es invariante bajo transformaciones de Möbius. Cuando los círculos se intersecan el producto inversivo es una función del ángulo de intersección y cuando son disjuntos es una función de la distancia hiperbólica que hay entre ellos.

Definición 7 Sean C_1 y C_2 dos “círculos”. Se define el producto inversivo entre C_1 y C_2 como

$$(C_1, C_2) = \frac{|r^2 + s^2 - |a - b|^2|}{2rs},$$

donde $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |a - z| = r\}$ y $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |b - z| = s\}$. Si en lugar de dos círculos uno de los dos es una recta, por ejemplo, $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid b \cdot z = s\}$,

entonces el producto inversivo se define como

$$(C_1, C_2) = \frac{|(a \cdot b) - s|}{r|b|}.$$

Finalmente, si tanto C_1 como C_2 son rectas, entonces

$$(C_1, C_2) = \frac{|(a \cdot b)|}{|a||b|},$$

con $C_1 = \{z \in \mathbb{C} | a \cdot z = r\}$ y $C_2 = \{z \in \mathbb{C} | b \cdot z = s\}$.

Una definición más general del producto inversivo puede encontrarse en [1], p. 29. Es bien sabido que cuando los círculos C_1 y C_2 se intersecan en un ángulo θ con $0 \leq \theta \leq \pi/2$, entonces $(C_1, C_2) = \cos \theta$ (cf. [1] pp.157, 158).

A continuación se presenta un lema que hace referencia al producto inversivo de dos geodésicas y que será de utilidad en el Capítulo 3.

Lema 1.3.1 Sean L_1 y L_2 geodésicas distintas y σ_j la reflexión en L_j (con $j \in \{1, 2\}$). Entonces

$$(L_1, L_2) = \frac{1}{2} |tr(\sigma_1 \sigma_2)|,$$

donde $tr(\sigma_1 \sigma_2)$ es la traza de $\sigma_1 \sigma_2$.

Una demostración puede consultarse en [1], pp. 179, 180.

1.4. Grupos fuchsianos

Es bien sabido que las isometrías definidas en cada modelo del plano hiperbólico poseen una estructura algebraica de grupo en el que la operación es la composición, si éstas son tratadas como funciones en el plano complejo extendido. La mayoría de resultados al respecto se prueban para el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$, el cual tiene como subgrupos a los grupos de isometrías hiperbólicas de cada modelo. A continuación se definen los conjuntos límite y ordinario.

Definición 8 Sea $G < PSL(2, \mathbb{C})$, se dice que $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un punto límite con respecto a G , si existen $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y transformaciones distintas $g_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$g_n(z) \rightarrow \alpha,$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

El conjunto de puntos límite se denota por $\mathbb{L}(G)$. Al conjunto $\widehat{\mathbb{C}} - \mathbb{L}(G)$ se le llama el conjunto ordinario y se denota por $\mathbb{O}(G)$. Resulta que si el conjunto límite es finito consiste de uno o dos puntos, de otra manera es una circunferencia, la esfera de Riemann, o bien, un fractal (véase [6]). Se dice que un subgrupo G de $PSL(2, \mathbb{C})$ es discontinuo si el conjunto ordinario $\mathbb{O}(G)$ no es vacío.

Definición 9 Sea $\Gamma < SL(2, \mathbb{C})$, se dice que Γ es discreto si no existe una sucesión de matrices distintas, $T_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $T_n \rightarrow T$, cuando $n \rightarrow \infty$, donde T es una matriz de 2×2 con entradas complejas.

A un subgrupo G de $PSL(2, \mathbb{C})$ se le denominará discreto, si está determinado por un subgrupo discreto Γ de $SL(2, \mathbb{C})$. En [6], pp. 102, 103, se puede constatar que todo subgrupo discontinuo G de $PSL(2, \mathbb{C})$ es discreto y, además, un subgrupo G de $PSL(2, \mathbb{R})$ es discreto si y sólo si es discontinuo. Cuando un subgrupo G de $PSL(2, \mathbb{R})$ es tal que $\mathbb{L}(G) = \widehat{\mathbb{R}}$, éste recibe el nombre de horocíclico o de primera clase.

Definición 10 Un grupo fuchsiano es un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preserva un “disco”, es decir, es un grupo que es conjugado a un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Definición 11 Se dice que $G < PSL(2, \mathbb{C})$ es elemental si $\mathbb{L}(G)$ tiene a lo más dos puntos, en caso contrario se dice que es no elemental.

En un grupo fuchsiano se distinguen dos tipos de elementos hiperbólicos: los simples y los no simples.

Definición 12 Sea h un elemento hiperbólico de un grupo fuchsiano G y sea A el eje de h . Se dice que h es un elemento simple de G si y sólo si para todo g en G sucede que $g(A) = A$ o bien $g(A) \cap A = \emptyset$. En otro caso se dice que h es no simple.

De la teoría de grupos, se sabe que la acción de un subgrupo G de $PSL(2, \mathbb{R})$ en \mathbb{C} define una partición cuyos elementos son las órbitas generadas. Este hecho se utiliza para definir una región fundamental para tal grupo.

Definición 13 Sea $G < PSL(2, \mathbb{R})$. Una región R es un dominio fundamental en \mathbb{H}^2 para G , si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) cualesquiera dos puntos z_1, z_2 en R no son G -equivalentes;
- (2) dado $w \in \mathbb{H}^2$, existe $z \in \tilde{R}$ y $g \in G$ tal que $g(z) = w$, donde \tilde{R} denota la cerradura de R en \mathbb{H}^2 ;
- (3) ∂R tiene medida bidimensional de Lebesgue cero.

Es fácil probar que si G es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ que admite una región fundamental, entonces G es discontinuo y por lo tanto también discreto.

Considerando que cualquier geodésica divide el plano complejo en dos semiplanos, se dice que un polígono hiperbólico es convexo si es la intersección de los semiplanos correspondientes generados por las geodésicas a las que pertenecen sus lados. Se sabe que si se tiene una región fundamental para un grupo fuchsiano G que resulta ser un polígono hiperbólico convexo P , entonces su frontera está conformada por segmentos de geodésicas y puntos, a los que se les llama, respectivamente, lados y vértices.

Si G es un grupo fuchsiano actuando en Δ , un dominio fundamental P para G es llamado localmente finito si y sólo si cada subconjunto compacto de Δ sólo interseca a un número finito de G -imágenes de \tilde{P} ; si además P es convexo se dice que P es un polígono fundamental convexo para G . Un lado de P es de la forma $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ para alguna $g \in G$ distinta de la identidad, y un vértice es de la forma $\tilde{P} \cap g(\tilde{P}) \cap h(\tilde{P})$ para $g, h \in G$ distintas entre sí y distintas de la identidad. Puede mostrarse que los lados de un polígono fundamental convexo se aparean, es decir, existe una transformación $g \in G$ que manda un lado a otro. Existe también un caso donde dos lados no pertenecen a diferentes geodésicas: puede suceder que haya un apareamiento de dos segmentos que están contenidos en una sólo geodésica mediante una transformación elíptica de orden dos. Cuando la cerradura euclídea de P interseca la frontera euclídea del plano hiperbólico, un intervalo maximal en esta intersección es llamado lado libre. Obsérvese que un polígono con un lado libre tiene área infinita.

Para cualquier grupo fuchsiano G y cualquier w resulta que el subgrupo estabilizador

$$G_w = \{g \in G | g(w) = w\}$$

es cíclico. Un elemento parabólico o hiperbólico g de un grupo fuchsiano G es llamado primitivo si y sólo si g genera el estabilizador de cada uno de sus puntos fijos. Con respecto a los elementos hiperbólicos primitivos se tiene el siguiente teorema cuya demostración aparece en [1], pp. 240, 241.

Teorema 1.4.1 *Sea g un elemento hiperbólico primitivo de un grupo fuchsiano G y sea A el eje de g . Entonces g apareja lados de algún polígono fundamental convexo P si y sólo si para cualquier h en G , o bien $h(A) = A$ o bien $h(A) \cap A = \emptyset$.*

Una clase de grupos particularmente importante es la de los grupos triangulares. Dado un triángulo en el plano hiperbólico, con vértices en el plano o en la recta al infinito, se consideran las reflexiones en cada uno de sus lados denotadas por $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, las cuales generan un grupo. Se sabe que si los ángulos en los vértices son de la forma $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$, donde $p, q, r \in \mathbb{N}$ o alguno de ellos es infinito (es decir, el ángulo es de magnitud 0), y se cumple la condición $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, el grupo generado por las composiciones pares de las reflexiones antes mencionadas (el subgrupo conforme) es discreto y recibe el nombre de grupo triangular (p, q, r) .

Dado un grupo fuchsiano G finitamente generado y no elemental, se puede construir un polígono fundamental P para G con un número finito de lados (cf. [1], p.254). Puede probarse que al identificar los lados de \tilde{P} se obtiene una superficie S , de género g , que resulta ser una superficie de Riemann. El grupo G contiene una cantidad finita, s , de clases de subgrupos cíclicos parabólicos maximales, también contiene un número finito, r , de clases de subgrupos cíclicos elípticos maximales, con órdenes m_1, \dots, m_r . El símbolo

$$(g : m_1, \dots, m_r; s; t)$$

es conocido como la signatura de G , en el que cada parámetro es un entero no negativo, $m_j \geq 2$ y t corresponde a las clases de conjugación de subgrupos cíclicos hiperbólicos de frontera, siendo este tipo de elementos hiperbólicos caracterizados por dejar invariante un intervalo de discontinuidad en la recta al infinito. Si se restringe a un grupo G finitamente generado del primer tipo y se permite considerar elementos parabólicos como elementos elípticos de orden $m_j = +\infty$, se puede omitir el último parámetro y acortar la notación a $(g : m_1, \dots, m_r)$. Se sabe que un grupo G es un grupo triangular (p, q, r) si y sólo si es discreto, de primera clase y con signatura $(0 : p, q, r)$. Estos resultados se pueden consultar en [1], pp. 268-286.

CAPÍTULO 2

Una generalización del Teorema de Poincaré

En este capítulo se presenta un resultado que, de cierta manera, generaliza el teorema de Poincaré y cuya utilidad será notable más adelante. El teorema de Poincaré proporciona condiciones para concluir si un polígono hiperbólico convexo con un apareamiento de sus lados es una región fundamental para el grupo generado por el apareamiento antes mencionado; incluso permite decidir si tal grupo es fuchsiano.

Se sabe que cualquier grupo fuchsiano G que actúe sobre Δ tiene un polígono fundamental convexo P . La acción de G sobre P origina un teselado en Δ y hay una colección de transformaciones que aparean los lados de P y que a su vez generan G . El teorema de Poincaré se ocupa de revertir este proceso basándose en el hecho de que la suma angular de ciclos de vértices en la frontera del polígono es igual a $2\pi/q$, para alguna $q \in \mathbb{N}$. Se hace distinción entre dos casos: $q > 1$ y $q = 1$. En el primer caso el ciclo está conformado por puntos fijos de transformaciones elípticas, es decir, es un ciclo elíptico. Mientras tanto, si $q = 1$, entonces los vértices no son puntos fijos y el ciclo es llamado un ciclo accidental. Cuando el polígono P tiene vértices en $\partial\Delta$, estos ciclos deben ser finitos además de estar conformados por puntos fijos de transformaciones parabólicas. En [1] puede encontrarse el teorema de Poincaré enunciado de manera formal, así como una demostración general de éste.

Para demostrar el resultado principal de este capítulo se hará uso del teorema de la convergencia monótona de Lebesgue, cuya prueba puede consultarse en [13], pp. 344, 345, y que establece lo siguiente:

Teorema 2.0.1 *Supóngase que (f_n) es una sucesión de funciones medibles reales sobre \mathbb{R}^n tal que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Sea f definida por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es Lebesgue medible y

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n d\mu.$$

Se recurre también al resultado descrito a continuación.

Teorema 2.0.2 *Sean F_1 y F_2 conjuntos fundamentales medibles para un grupo fuchsiano G . Entonces*

$$h - \text{área}(F_1) = h - \text{área}(F_2).$$

La prueba puede encontrarse en [1], pp. 205, 206 y con más detalle en [4].

Recuérdese que si D es una región fundamental para un grupo fuchsiano G , entonces existe un conjunto fundamental F tal que $D \subset F \subset \tilde{D}$ y también $h - \text{área}(\partial D) = 0$, de donde se sigue la igualdad $h - \text{área}(D) = h - \text{área}(F)$. En este sentido el Teorema 2.0.2 establece que todos los dominios fundamentales medibles para G tienen la misma área hiperbólica.

Se dice que un dominio fundamental D para G es localmente finito si cada subconjunto compacto de Δ interseca sólo un número finito de G -imágenes de \tilde{D} . Se puede probar que si D es un dominio fundamental localmente finito, entonces \tilde{D}/G y Δ/G son homeomorfos (cf. [1] pp. 208-210), donde Δ/G denota el espacio cociente de las órbitas resultantes de la acción de G en Δ . Este espacio resulta ser una variedad de dimensión 2 real con estructura compleja, es decir, una superficie de Riemann (cf. [1] Cap. 6). En virtud de lo anteriormente dicho, resulta natural definir el área hiperbólica de Δ/G como $h - \text{área}(\tilde{D}/G)$ y en consecuencia

$$h - \text{área}(\Delta/G) = h - \text{área}(D).$$

Sea P un polígono hiperbólico en Δ y Φ un apareamiento de lados. Se asume que el apareamiento está compuesto por transformaciones tales que si S es un lado de \tilde{P} , $x \in \text{int}(S)$ y $y = g_S(x)$; entonces, para una elección adecuada de vecindades N_x, N_y de x y y en \tilde{P} , $N_x \cup (g_S^{-1})(N_y)$ es una vecindad de x . En particular N_x y $(g_S^{-1})(N_y)$ están en diferentes lados de S cerca de x .

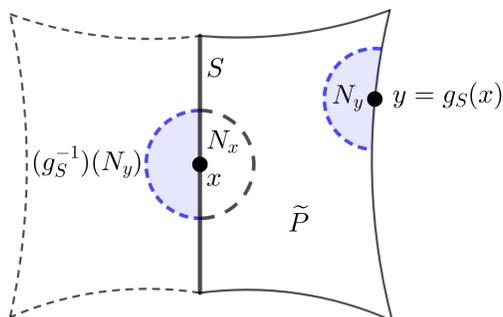


Figura 2.1: Vecindades de x y y adecuadas para el apareamiento.

Por otra parte, para todo $z \in \Delta$ y para todo $g \in G < M(\Delta)$, se define $\theta_g(z)$ como el ángulo que hace $g(\tilde{P})$ en z : si $z \in g(P)$ entonces $\theta_g(z) = 2\pi$, si $z \notin g(\tilde{P})$ entonces $\theta_g(z) = 0$, cuando z pertenece al interior de un lado de $g(\tilde{P})$ se tiene $\theta_g(z) = \pi$ y, finalmente, $\theta_g(z) = \theta$ si z es un vértice de $g(\tilde{P})$ en el que se forma un ángulo interior igual a θ (véase la Figura 2.2). Además, se define

$$\theta(z) = \sum_{g \in G} \theta_g(z).$$

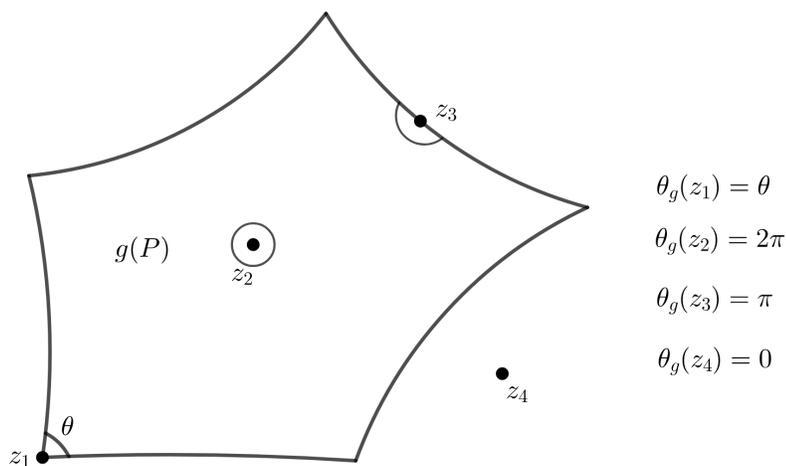


Figura 2.2: Posibles valores para $\theta_g(z)$.

Teorema 2.0.3 *Sea P un polígono hiperbólico con cerradura compacta en Δ y sea Φ un apareamiento de lados que satisfaga las hipótesis de arriba. Si el grupo G generado por el apareamiento de lados es discreto, entonces $\theta(z)$ es constante, de hecho, $\theta(z) = 2k\pi$ en Δ , con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Además, esta k satisface*

$$h - \text{área}(P) = k \cdot h - \text{área}(\Delta/G).$$

DEMOSTRACIÓN. Primeramente, obsérvese que si en el polígono P hubiera un número infinito de lados se tendría un ciclo con una cantidad infinita de puntos, lo cual no es posible, ya que dada la compacidad se tendría un punto límite en Δ . No obstante, G es discreto y por lo tanto discontinuo. Así, necesariamente P tiene un número finito de lados y en consecuencia un número finito de vértices.

Sea V el conjunto de todas las imágenes de los vértices de \tilde{P} . Ya que G es discreto, no existe una sucesión de puntos $(g_n(v_k))_{n=1}^{\infty}$ que se acumule en algún punto de Δ , pues de lo contrario, al ser el conjunto de vértices finito, existiría un vértice v_j apareciendo un número infinito de veces en la sucesión, habiendo así un punto límite. Además, P no tiene vértices al infinito ni lados libres por tener cerradura compacta, de lo cual se sigue que V consiste sólo de puntos aislados.

Sea B la unión de todas las imágenes de ∂P . Claramente $V \subset B$. Además, B es un conjunto cerrado de Δ . Para probar esto último supóngase que existe una sucesión de puntos $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ en B tal que $z_n \rightarrow z$, con $z \in \Delta - B$. Ya que se puede escribir

$$B = \bigcup_{g \in G} \left(\bigcup_S g(S) \right),$$

es posible tomar una subsucesión $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ con $z_{n_k} \rightarrow z$ y

$$z_{n_k} \in \bigcup_{g \in G} g(S),$$

para algún lado S fijo. Ahora, como S es compacto existe $x^* \in S$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x^*$, donde $g_{n_k}(x_{n_k}) = z_{n_k}$. Renombrando, se puede escribir $x_m \rightarrow x^*$, $g_m(x_m) = z_m$ y $z_m \rightarrow z$. Así $\rho(x_m, x^*) < 1/2m$, por lo que, al ser las g_m isometrías, $\rho(g_m(x_m), g_m(x^*)) < 1/2m$, es decir, $\rho(z_m, g_m(x^*)) < 1/2m$ y

$$\rho(g_m(x^*), z) \leq \rho(g_m(x^*), z_m) + \rho(z_m, z) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}.$$

Por lo tanto $g_m(x^*) \rightarrow \tilde{z}$, contradiciendo que G es discreto.

Al ser $\Delta - B$ un conjunto abierto puede expresarse como la unión disjunta de sus componentes conexas, es decir, de dominios Δ_j . Ahora, cada Δ_j está contenida en $g(P)$ o es ajena a $g(P)$, de donde θ_g es igual a 2π en Δ_j o es igual a cero en Δ_j .

A continuación se prueba que no puede ocurrir una intersección infinita de imágenes $g(P)$. Procediendo por contradicción, se supone que efectivamente hay una infinidad de imágenes de P que se intersecan. Trasladando a P se puede suponer que $g_k(\tilde{P}) \cap \tilde{P} \neq \emptyset$ para un número infinito de funciones g_k . En particular hay un lado S tal que $g_k(S) \cap \tilde{P} \neq \emptyset$ para un número infinito de funciones g_k . Se toma un disco hiperbólico $D_h(0, r+t)$ tal que $\tilde{P} \subset D_h(0, r)$, con t mayor o igual que el diámetro hiperbólico de S . Tomando $w \in S$ resulta que las imágenes $g_k(w)$ se acumulan en $D_h(0, r+t)$, lo cual contradice la discontinuidad de G . Se concluye que no hay una intersección infinita de imágenes de P . Luego $\theta(z)$ es constante en cada Δ_j y como cada θ_g es igual a 2π o a cero (en Δ_j), entonces $\theta(z) = 2\pi k_j$ en Δ_j , siendo el entero no negativo k_j igual a la cantidad de imágenes distintas de P que tienen en común a la componente Δ_j .

Ahora, si $w \in B - V$ las hipótesis de los apareamientos establecen que existen pares de elementos distintos, (g_j, g_j^*) con $j = 1, 2, \dots, n$, tales que w está en el interior de un lado común de $g_j(P)$ y $g_j^*(P)$ de modo que, para cualquier otra transformación g , $\theta_g(z)$ es constante (0 o 2π) en una vecindad de w . Los apareamientos anteriormente mencionados son finitos, ya que no hay acumulación infinita de imágenes de lados. Por ser G discreto es posible elegir una tal vecindad, N , que sólo interseque a las imágenes de lados en cuyo interior se encuentra w . Al estar w en el interior de un lado común de $g_j(P)$ y $g_j^*(P)$, ocurre que $\theta_{g_j}(w) = \theta_{g_j^*}(w) = \pi$, por lo que $\theta_{g_j}(w) + \theta_{g_j^*}(w) = 2\pi$ para cualquier $j = 1, 2, \dots, n$. Además, cualquier otro punto z en N que no esté en un tal lado común está en el interior de $g_j(P)$ o en el interior de $g_j^*(P)$, de donde $\theta_{g_j}(z) = 2\pi$ y $\theta_{g_j^*}(z) = 0$ o viceversa, cerca de w para $j = 1, 2, \dots, n$. Así pues, en general cada término $\theta_{g_j}(z) + \theta_{g_j^*}(z)$ es igual a 2π en N . Si además se supone que existen transformaciones distintas a las anteriormente mencionadas, por ejemplo, $g_{n+1}, g_{n+2}, \dots, g_{n+l}$, tales que

$$N \subseteq \bigcap_{i=1}^l g_{n+i}(P);$$

entonces $\theta_{g_{n+i}}(z) = 2\pi$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ y $z \in N$. En consecuencia,

para toda $z \in N$ se tiene que

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \sum_{j=1}^n (\theta_{g_j}(z) + \theta_{g_j^*}(z)) + \sum_{i=1}^l \theta_{g_{n+i}}(z) \\ &= \sum_{j=1}^n 2\pi + \sum_{i=1}^l 2\pi \\ &= 2\pi n + 2\pi l = 2\pi(n+l). \end{aligned}$$

Así, $\theta(z)$ es localmente constante, por lo que $\frac{\theta}{2\pi}$ es continua, ya que toma valores enteros en $\Delta - V$ y V contiene sólo puntos aislados. Por lo tanto, θ es constante en $\Delta - V$, esto es, $\theta(z) = 2\pi k$ con k entero positivo.

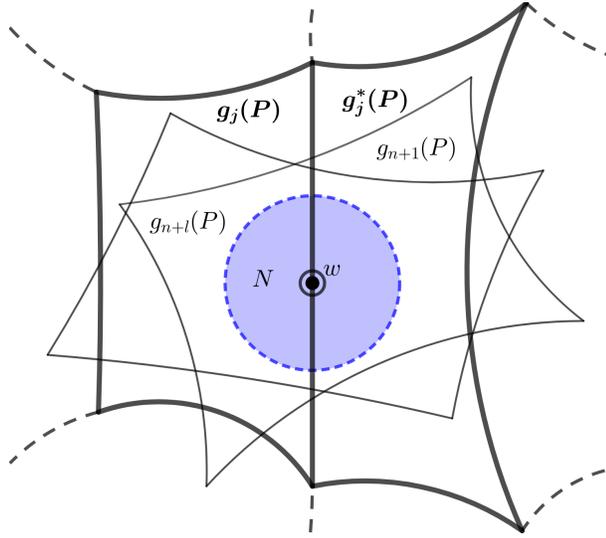


Figura 2.3: Vecindad N de $w \in B - V$ en la prueba del Teorema 2.0.3.

Por otra parte, si $w \in V$, ya que los lados de P se aparean, se forma un teselado local con imágenes de P alrededor de w que posiblemente rodea más de una vez a w . Nótese que dicho teselado debe cerrarse después de un número finito de vueltas, pues de lo contrario habría una cantidad infinita de imágenes de lados de P acumulándose alrededor de w , lo cual es imposible por ser G discreto. Además, el teselado debe dar vueltas completas, ya que en caso contrario existiría una imagen de un lado que no es común en dos imágenes de P , $g_j(P)$ y $g_j^*(P)$, contradiciendo las hipótesis del apareamiento.

En la Figura 2.4, S representa un lado de P con w como vértice. El lado con el que S se aparea puede ser escrito como $g_1(S)$ para alguna $g_1 \in G$. Mientras tanto, $g_2(S), \dots, g_t(S)$ son las imágenes de S que representan los lados de las imágenes de P que forman el teselado en torno a w en sentido opuesto al de las manecillas del reloj. La imagen $g_t(S)$ se aparea con $g_{t+1}(S)$, donde comienza una nueva vuelta alrededor de w .

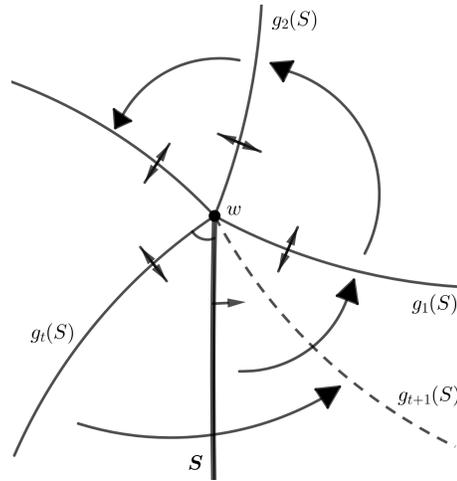


Figura 2.4: Teselado alrededor del vértice w .

Supóngase que las imágenes de P que forman el teselado alrededor de w son $g_1(P), g_2(P), \dots, g_t(P)$. Nuevamente, es posible elegir una vecindad adecuada de w , a la que se llamará M . Se distinguen dos casos:

- a) w no pertenece a $g(P)$, para cualquier g , y w no está en el interior de ningún lado de alguna imagen $g(P)$.
- b) Además de ser un vértice común en las imágenes $g_1(P), g_2(P), \dots, g_t(P)$, ocurre que w se encuentra también en el interior de la imagen de algún lado de P y/o M está contenida propiamente en otras imágenes de P .

En el caso a), M puede ser elegida de tal forma que sólo interseque las imágenes de los lados que forman el teselado en torno a w . Ya que las imágenes $g_1(P), g_2(P), \dots, g_t(P)$ que conforman el teselado rodean completamente a w , se tiene

$$\theta_{g_1}(w) + \theta_{g_2}(w) + \dots + \theta_{g_t}(w) = 2\pi n,$$

donde n es el número de veces que se rodea a w . Por su parte, si $z \in M$ no se encuentra en una imagen de un lado de P , entonces se encuentra en el interior de n imágenes de P así que

$$\theta_{g_1}(z) + \theta_{g_2}(z) + \dots + \theta_{g_i}(z) = 2\pi n.$$

No es necesario considerar la situación en la que $z \in M$ está sobre la imagen de un lado, pues se ha visto que $\theta(z)$ es constante en $\Delta - V$.

En el caso b), se sigue de a) y de un análisis análogo al que se realizó previamente con los lados, que $\theta(z)$ es también un múltiplo entero de 2π en M .

Por lo tanto, $\theta(z)$ es localmente constante alrededor de los elementos de V . Así, $\theta(z)$ es constante incluso en V y se concluye que $\theta(z) = 2\pi k$ en Δ , para algún entero positivo k .

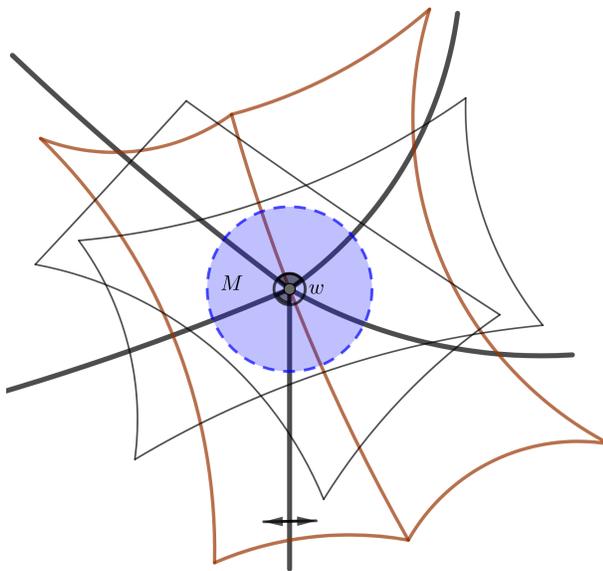


Figura 2.5: Prueba del Teorema 2.0.3 para vértices. Vecindad M de $w \in V$.

Para probar la segunda parte, se considera un polígono fundamental abierto Q , para el grupo discreto G . Siendo A cualquier conjunto, χ_A denota la función característica de A . Para casi todo z en Δ se tiene

$$\sum_{g \in G} \chi_{g(Q)}(z) = 1,$$

ya que al ser Q polígono fundamental el conjunto

$$\bigcup_{g \in G} g(\partial Q)$$

tiene medida cero.

También, por la primera parte, para casi toda z en Δ ,

$$k = \frac{\theta(z)}{2\pi} = \sum_{g \in G} \theta_g(z)/2\pi = \sum_{g \in G} \chi_{g(P)}(z).$$

El área hiperbólica de P está dada por

$$h - \text{área}(P) = \int_P \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dA,$$

donde dA indica que se integra con respecto a la medida de Lebesgue. Obsérvese que la función

$$\frac{4}{(1 - |z|^2)^2}$$

es ciertamente Lebesgue integrable por ser continua. Si $d\mu(z)$ denota $\frac{4}{(1 - |z|^2)^2} dA$, es posible escribir

$$h - \text{área}(P) = \int_P d\mu(z) = \int_{\Delta} \chi_P(z) d\mu(z).$$

En lo sucesivo, se escribirán integrales sin especificar el dominio de integración, en todas ellas el dominio de integración será Δ . Así

$$h - \text{área}(P) = \int \chi_P(z) d\mu(z) = \int \chi_P(z) \left[\sum_{g \in G} \chi_{g(Q)}(z) \right] d\mu(z).$$

Es bien sabido que los grupos fuchsianos son numerables, lo cual permite escribir $G = \{g_1, g_2, \dots\}$. Utilizando este hecho se definen las funciones

$$f_n(z) = \chi_P(z) \left[\sum_{i=1}^n \chi_{g_i(Q)}(z) \right], \quad f(z) = \chi_P(z) \left[\sum_{g \in G} \chi_{g(Q)}(z) \right].$$

Para tales funciones se tiene $0 \leq f_1(z) \leq f_2(z) \leq \dots$, además, $f_n \rightarrow f$ y

$$\int f_n(z) d\mu(z) = \int \chi_P(z) \left[\sum_{i=1}^n \chi_{g_i(Q)}(z) \right] d\mu(z) = \sum_{i=1}^n \int \chi_P(z) \chi_{g_i(Q)}(z) d\mu(z),$$

esto último por la aditividad finita de la integral de Lebesgue (véase [13] p. 345). Nótese que, por la compacidad de la cerradura de P , su área hiperbólica es finita y que dicha área coincide con la integral sobre Δ de f ; en consecuencia esta integral es finita. Así, por el teorema de la convergencia monótona

$$\begin{aligned}
 h - \text{área}(P) &= \int \chi_P(z) \left[\sum_{g \in G} \chi_{g(Q)}(z) \right] d\mu(z) \\
 &= \int f(z) d\mu(z) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(z) d\mu(z) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int \chi_P(z) \chi_{g_i(Q)}(z) d\mu(z) \\
 &= \sum_{g \in G} \int \chi_P(z) \chi_{g(Q)}(z) d\mu(z).
 \end{aligned}$$

Obsérvese que la integral

$$\int \chi_P(z) \chi_{g(Q)}(z) d\mu(z)$$

mide el área hiperbólica del conjunto $P \cap g(Q)$, el cual se transforma en $g^{-1}(P) \cap Q$ tras aplicar g^{-1} y, ya que el área hiperbólica es invariante bajo transformaciones en $M(\Delta)$, se tiene

$$\begin{aligned}
 \int \chi_P(z) \chi_{g(Q)}(z) d\mu(z) &= h - \text{área}(P \cap g(Q)) \\
 &= h - \text{área}(g^{-1}(P) \cap Q) \\
 &= \int \chi_{g^{-1}(P)}(w) \chi_Q(w) d\mu(w).
 \end{aligned}$$

Haciendo, una vez más, uso del teorema de la convergencia monótona se

obtiene

$$\begin{aligned}
h - \text{área}(P) &= \sum_{g \in G} \int \chi_P(z) \chi_{g(Q)}(z) d\mu(z) \\
&= \sum_{g \in G} \int \chi_{g^{-1}(P)}(w) \chi_Q(w) d\mu(w) \\
&= \sum_{g^{-1} \in G} \int \chi_{g^{-1}(P)}(w) \chi_Q(w) d\mu(w) \\
&= \sum_{h \in G} \int \chi_{h(P)}(w) \chi_Q(w) d\mu(w) \\
&= \int \left[\sum_{h \in G} \chi_{h(P)}(w) \right] \chi_Q(w) d\mu(w) \\
&= \int k \cdot \chi_Q(w) d\mu(w) = k \int \chi_Q(w) d\mu(w) \\
&= k \int_Q \frac{4}{(1 - |w|^2)^2} d\mu \\
&= k \cdot h - \text{área}(Q).
\end{aligned}$$

En virtud del Teorema 2.0.2 se concluye que

$$h - \text{área}(P) = k \cdot h - \text{área}(\Delta/G)$$

■

La demostración dada anteriormente está basada en las ideas que se exponen en [1], pero tal resultado originalmente se trata en [5].

Para finalizar este capítulo es conveniente notar que, bajo las hipótesis del Teorema 2.0.3, la expresión

$$\theta(z) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

implica no sólo que casi todo punto del disco Δ es cubierto por k imágenes del polígono P , sino también que dicho polígono contiene k imágenes de casi cada punto en P (salvo un conjunto de medida cero).

Considérese el grupo G descrito en el Teorema 2.0.3. Además, sea z un punto en el interior de P que no sea un punto fijo y que no se encuentre en el conjunto de imágenes de la frontera de P bajo elementos de G . Dado que $\theta(z) = 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se sigue de la elección de z que este punto está cubierto por k imágenes del polígono P . Sean

$$P, g_1(P), g_2(P), \dots, g_{k-1}(P)$$

las imágenes de P que contienen a z en su interior; entonces existen puntos w_1, w_2, \dots, w_{k-1} en el interior de P tales que $g_1(w_1) = z, g_2(w_2) = z, \dots, g_{k-1}(w_{k-1}) = z$. En consecuencia,

$$g_1^{-1}(z) = w_1, g_2^{-1}(z) = w_2, \dots, g_{k-1}^{-1}(z) = w_{k-1}.$$

Así pues, $z, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$ son k imágenes de z contenidas en P . Al ser el conjunto de puntos fijos un conjunto de medida cero, al igual que el conjunto de G -imágenes de la frontera de P , se concluye que el polígono contiene k imágenes de casi cada punto en P .

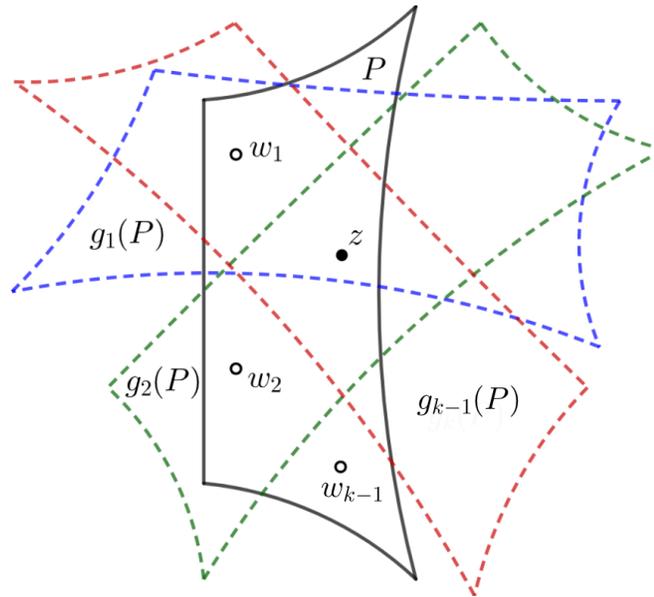


Figura 2.6: P contiene k imágenes del punto z .

CAPÍTULO 3

Tres elementos elípticos de orden dos

Considérense tres elementos elípticos de orden dos, f , g y h , con puntos fijos u , v y w , respectivamente. Supóngase que u , v y w no son colineales. Sean α , β y γ los ángulos del triángulo hiperbólico formado por tales puntos. Así mismo, se asumirá que las longitudes de los lados de dicho triángulo son a , b y c .

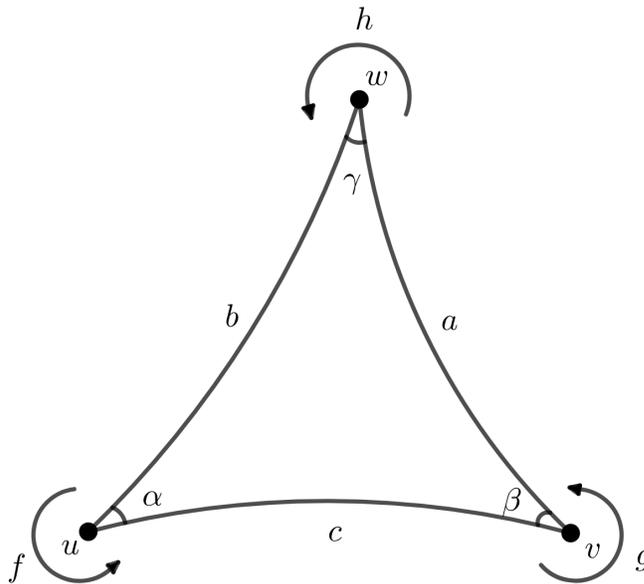


Figura 3.1: Triángulo con vértices u , v y w .

De la ley del seno hiperbólico resultan las igualdades

$$\begin{aligned}(\operatorname{senh} a)(\operatorname{sen} \gamma) &= (\operatorname{senh} c)(\operatorname{sen} \alpha), \\(\operatorname{senh} b)(\operatorname{sen} \alpha) &= (\operatorname{senh} a)(\operatorname{sen} \beta).\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $\operatorname{senh} b$ y la segunda por $\operatorname{senh} c$ se obtiene una cantidad positiva a la que se denotará por λ , es decir,

$$\begin{aligned}\lambda &= (\operatorname{senh} a)(\operatorname{senh} b)(\operatorname{sen} \gamma) \\&= (\operatorname{senh} b)(\operatorname{senh} c)(\operatorname{sen} \alpha) \\&= (\operatorname{senh} c)(\operatorname{senh} a)(\operatorname{sen} \beta).\end{aligned}$$

Si se considera al segmento $[u, v]$ como la base del triángulo y se denota por L_w a la geodésica sobre la cuál se encuentra dicho segmento, entonces la altura del triángulo es $\rho(w, L_w)$. Aplicando la ley del seno al triángulo formado por el pie de la altura, v y w resulta

$$\operatorname{senh} \rho(w, L_w) = (\operatorname{senh} a)(\operatorname{sen} \beta).$$

Así, se puede escribir también

$$\lambda = \operatorname{senh}(\text{base}) \times \operatorname{senh}(\text{altura}).$$

La igualdad anterior es cierta independientemente del lado del triángulo que se considere como su base.

Ahora, sea L la geodésica por u y v . Se construye lo siguiente:

- i) La geodésica L_1 por w ortogonal a L .
- ii) La geodésica L_2 por w ortogonal a L_1 .
- iii) Las geodésicas L_3 y L_4 ortogonales a L que satisfagan:

$$\rho(L_1, L_3) = \rho(u, v) = \rho(L_1, L_4).$$

Sea σ_j la reflexión en L_j , para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Obsérvese que fg (o gf) es un elemento hiperbólico con eje L y longitud de traslación $2\rho(u, v)$, de donde

$$h = \sigma_2\sigma_1, \quad fg = \sigma_1\sigma_3.$$

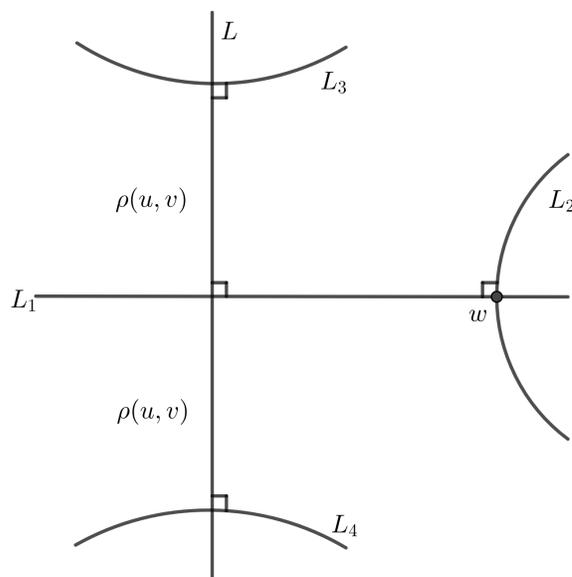


Figura 3.2: Construcción para el Teorema 3.0.1.

Se llamará v' a la primera imagen de v que aparezca entre L_3 y L_4 , resultante de trasladar v a lo largo de L con la transformación hiperbólica fg (o gf). De forma análoga se define el punto al que se llamará u' . Así, u' y v' son imágenes de u y v , respectivamente, bajo ciertas iteraciones de la transformación hiperbólica fg (o gf); supóngase que dichas iteraciones son $(fg)^{s_1}$ y $(fg)^{s_2}$, respectivamente. Nótese que u' y v' son los puntos fijos de las transformaciones elípticas de orden dos $(fg)^{s_1}f(fg)^{-s_1}$ y $(fg)^{s_2}g(fg)^{-s_2}$, respectivamente.

A consecuencia del Lema 1.3.1, se obtiene

$$\frac{1}{2}|tr(hfg)| = \frac{1}{2}|tr(\sigma_2\sigma_3)| = (L_2, L_3).$$

Puesto que el producto inversivo (L_2, L_3) es igual a $\cosh \rho(L_2, L_3)$ cuando L_2 y L_3 son disjuntas e igual a $|\cos \alpha|$ cuando L_2 y L_3 se cortan en un ángulo α (posiblemente cero), entonces se sigue de la geometría de los cuadriláteros y pentágonos (ver [1], pp. 157, 159) que

$$\begin{aligned} (L_2, L_3) &= \sinh \rho(L, L_2) \sinh \rho(L_1, L_3) \\ &= \sinh \rho(w, L) \sinh \rho(u, v) \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

A continuación se analiza un resultado que se utilizará más adelante. Es de particular interés el caso compacto, por lo cual solamente se probará el tercer inciso. Cabe destacar que aunque esta prueba puede encontrarse en [1] y con más detalle en [10], su estructura será de gran apoyo para demostrar el primer teorema de la siguiente sección, es por ello que se incluirá en este trabajo.

Teorema 3.0.1 *Sean f , g y h elementos elípticos de orden dos que generan un grupo no elemental G y sea*

$$\lambda = \frac{|tr(hfg)|}{2},$$

entonces:

- i) Si $\lambda > 1$, entonces G es discreto y tiene signatura $(0 : 2, 2, 2; 0; 1)$.*
- ii) Si $\lambda = 1$, entonces G es discreto y tiene signatura $(0 : 2, 2, 2; 1; 0)$.*
- iii) Si $\lambda < 1$, entonces para que G sea discreto los únicos posibles valores de λ son*

$$\cos(\pi/q), q \geq 3; \quad \cos(2\pi/q), q \geq 5; \quad \cos(3\pi/q), q \geq 7,$$

y las posibles signaturas para G son

$$(0 : 2, 2, 2, q; 0; 0); (0 : 2, 3, q; 0; 0), (q, 3) = 1; (0 : 2, 4, q; 0; 0), (q, 2) = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Se probará *iii*). Si $\lambda < 1$, ya que $\lambda = (L_2, L_3)$, entonces L_3 y L_4 intersecan a L_2 en puntos ζ y ζ' formando un cierto ángulo θ ; luego $\lambda = |\cos \theta|$. Supóngase que G es discreto, entonces $hfg = \sigma_2\sigma_3$, que es una rotación de 2θ alrededor del punto fijo elíptico ζ , debe ser de orden finito. Se asumirá que el orden de dicha rotación es q para alguna $q \in \mathbb{N}$. Así,

$$\theta = \frac{\pi p}{q}$$

con $(p, q) = 1$.

Si $p = 1$, se satisfacen las hipótesis del teorema de Poincaré y se obtiene un polígono fundamental para G . De lo que se deduce que el grupo tiene signatura $(k : 2, 2, 2, q; 0; 0)$. Puede verificarse (ver [10], p. 12) que el género

k es igual a cero, resultando la signatura $(0 : 2, 2, 2, q; 0; 0)$. En este caso $\lambda = \cos(\frac{\pi}{q})$ con $q \geq 3$. Nótese que cualquier grupo con esta signatura, para cualquier natural $q \geq 3$, se puede obtener de esta manera, es decir, generado por tres elementos elípticos de orden 2.

Supóngase que $p \geq 2$. Se puede probar que las G -imágenes del cuadrilátero P delimitado por las geodésicas L, L_4, L_2 y L_3 , cubren el plano hiperbólico, por lo que, a consecuencia del Teorema 2.0.3, no hay elementos hiperbólicos de frontera, pues de lo contrario P tendría un área hiperbólica infinita. Así pues, G tiene signatura $(0 : m_1, \dots, m_r; 0; 0)$. De hecho, en [10] se concluye que $r = 3$ y en consecuencia G es un grupo triangular con signatura $(0 : l, m, n)$, donde $q|n$.

De la fórmula del área hiperbólica para polígonos (cf. [1], p. 153) se sigue que

$$h - \text{área}(P) = 2\pi - (\pi/2 + \pi/2 + \theta + \theta) = \pi - 2\theta = \pi - \frac{2\pi p}{q}.$$

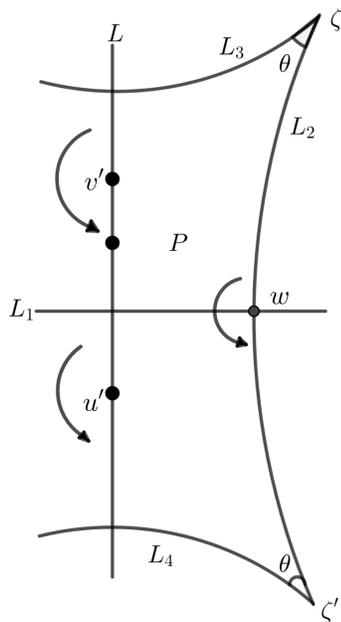


Figura 3.3: Polígono P para el caso $\lambda < 1$.

Por otra parte, si Q es un polígono fundamental convexo para G , de la fórmula del área hiperbólica para polígonos fundamentales convexos para

grupos fuchsianos (cf. [1], p. 269) y del Teorema 2.0.2 se tiene

$$\begin{aligned} h - \text{área}(\Delta/G) &= h - \text{área}(Q) \\ &= 2\pi \left[-2 + \left(1 - \frac{1}{l}\right) + \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= 2\pi \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Así, a consecuencia del Teorema 2.0.3

$$h - \text{área}(P) = k \cdot h - \text{área}(\Delta/G),$$

es decir,

$$\pi - \frac{2\pi p}{q} = 2k\pi \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \right],$$

y dividiendo entre π se obtiene

$$1 - \frac{2p}{q} = 2k \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \right]. \quad (3.1)$$

Del Teorema 2.0.3 se sigue que para el vértice ζ de P , $\theta(\zeta) = 2k\pi$. Ahora, ya que $h(\zeta) = \zeta'$; entonces para cerrar el abanico de G -imágenes del polígono es necesario rotar q veces P y $h(P)$ en torno a ζ , tras lo cual resulta un ángulo de $q\left(\frac{2\pi p}{q}\right) = 2p\pi$ (véase la prueba del Teorema 2.0.3). Así pues, se obtiene que $p \leq k$. De lo anterior y de (3.1) se puede concluir

$$\begin{aligned} 2p \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \right] &\leq 2k \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= 1 - \frac{2p}{q} \\ &\leq 1 - \frac{2p}{n}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es debida al hecho de que $q \leq n$, pues $q|n$. La desigualdad entre el primer término y el último implica que

$$2p \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m}\right) \right] \leq 1$$

y, ya que $p \geq 2$, tras despejar $\frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ de la expresión anterior resulta

$$\frac{3}{4} \leq 1 - \frac{1}{2p} \leq \frac{1}{l} + \frac{1}{m}. \quad (3.2)$$

En [10] se concluye que alguno de los dos enteros l y m debe ser igual a 2, mientras que el otro debe ser mayor o igual que 3. De hecho, si se supone, sin pérdida de generalidad, que $l = 2$ se obtiene que $m = 3$ o $m = 4$. Más aún, para $l = 2$ y $m = 3$ necesariamente $p \leq 3$, y para $l = 2$ y $m = 4$ necesariamente $p = 2$ (cf. [10], p. 16). Así, se tienen tres posibilidades para la terna (l, m, p) .

Si $(l, m, p) = (2, 4, 2)$ se dan las igualdades en (3.2) y en (3.1), de lo cual resulta que $q = n$. Como consecuencia de esto, G tiene signatura $(0 : 2, 4, q)$. Obsérvese que el área de este grupo está dada por

$$\pi \left(1 - \frac{1}{l} - \frac{1}{m} - \frac{1}{q} \right) = \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{q} \right),$$

de manera que, para un área positiva, es necesario que $q \geq 5$ y en este caso $\lambda = \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi p}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$. Al ser $p = 2$, la condición $(p, q) = 1$ implica que q debe ser un número impar.

Si $(l, m, p) = (2, 3, 3)$ entonces la segunda desigualdad en (3.2) se convierte en igualdad y como consecuencia se da la igualdad en (3.1). De nueva cuenta resulta $q = n$, así que en este caso G tiene signatura $(0 : 2, 3, q)$. El área de este grupo triangular es

$$\pi \left(1 - \frac{1}{l} - \frac{1}{m} - \frac{1}{q} \right) = \pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{q} \right),$$

de donde $q \geq 7$ (para un área positiva) y $\lambda = \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi p}{q}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{q}\right)$. Dado que $p = 3$ y $(p, q) = 1$, el valor de q no debe ser múltiplo de 3.

Por último, para el caso $(l, m, p) = (2, 3, 2)$ es necesario notar que los puntos fijos elípticos u', v', w, ζ y ζ' se encuentran distribuidos en a lo más dos órbitas, pues es imposible que u', v' y w pertenezcan a la órbita de orden 3 (ya que son puntos fijos de transformaciones elípticas de orden 2 y 2 no divide a 3). Así mismo, ζ y ζ' pertenecen a la órbita de orden n , por lo que no pueden estar en la órbita de orden 3. Al haber 5 puntos distribuidos en a lo más dos órbitas se concluye que debe haber una órbita con al menos 3 puntos y, dado que el polígono P contiene k imágenes de cada punto, se sigue que $k \geq 3$.

Para justificar esta última afirmación se consideran dos posibles casos: Primero, supóngase que u' , v' y w son los tres puntos que se encuentran en la misma órbita, y sean φ_1, φ_2 transformaciones en G tales que $\varphi_1(w) = u'$ y $\varphi_2(w) = v'$. Si z es un punto en P cercano a w , tal que no es punto fijo ni está en alguna imagen de la frontera de P , entonces el punto $\varphi_1(z)$, al que se denotará por z_1 , se encuentra cercano a u' , aunque tal vez no esté en P . Si este es el caso, entonces tras aplicar la transformación $(fg)^{s_1}f(fg)^{-s_1}$ (elíptica de orden dos que fija u') a z_1 se obtiene un nuevo punto, al que se denotará por z'_1 , que sí se encuentra en P y que es cercano a u' . De manera análoga, el punto $\varphi_2(z)$, al que se denotará por z_2 , se encuentra cercano a v' , aunque quizá no en P ; en tal caso se aplica la transformación $(fg)^{s_2}g(fg)^{-s_2}$ (elíptica de orden dos que fija v') a z_2 obteniéndose un punto z'_2 en P cercano a v' . Así, z, z'_1 y z'_2 son tres G -imágenes de z en P y, ya que, por el Teorema 2.0.3, el polígono P contiene k imágenes de casi cada punto en P , necesariamente k debe ser mayor o igual que tres (véase la Figura 3.4).

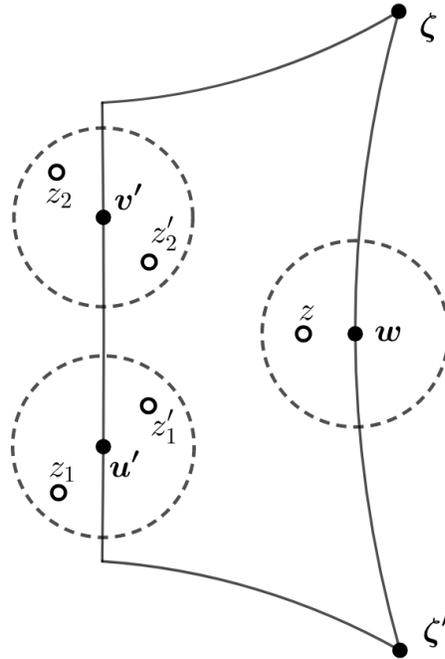


Figura 3.4: Si u', v' y w están en la misma órbita, entonces $k \geq 3$.

Supóngase ahora que los tres puntos que se encuentran en la misma órbita son w, ζ y ζ' , y sean ψ_1, ψ_2 transformaciones en G tales que $\psi_1(w) = \zeta'$ y

$\psi_2(w) = \zeta$. Si z es, de nueva cuenta, un punto en P cercano a w tal que no es punto fijo ni se encuentra en alguna imagen de la frontera de P , entonces el punto $\psi_1(z)$, al que se denotará por z_1 , se encuentra cerca de ζ' , aunque posiblemente no esté en el interior de P . Si este es el caso se puede rotar z_1 en torno a ζ' aplicando una potencia adecuada de $\frac{2\pi}{q}$ hasta obtener un punto z_1' en P cercano a ζ' . Análogamente, el punto $\psi_2(z)$, al que se denotará por z_2 , se encuentra cercano a ζ , posiblemente fuera de P ; en tal caso se rota z_2 en torno a ζ con una potencia adecuada de $\frac{2\pi}{q}$ hasta obtener un punto z_2' en P cercano a ζ . Así, z , z_1' y z_2' son tres G -imágenes de z en P , de donde se sigue que, necesariamente, k es al menos tres (véase la Figura 3.5).

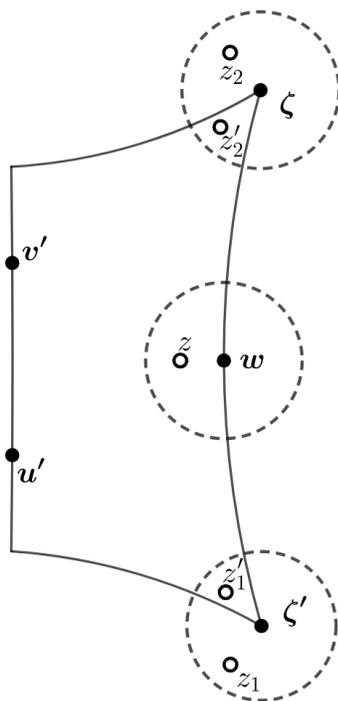


Figura 3.5: Si w , ζ y ζ' están en la misma órbita, entonces $k \geq 3$.

Los argumentos para los posibles casos restantes son análogos. De esta manera, en virtud del Teorema 2.0.3, se puede concluir que efectivamente $k \geq 3$.

De lo anterior y la igualdad intermedia en (3.1) resulta

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2p}{q} &= 2k \left[1 - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &\geq 6 \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= 6 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo $p = 2$ se obtiene

$$1 - \frac{4}{q} \geq 1 - \frac{6}{n},$$

en consecuencia,

$$\frac{n}{q} \leq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

y como $q|n$, entonces necesariamente $n = q$. Se concluye que G tiene signatura $(0 : 2, 3, q)$ y, de manera similar al caso anterior, $q \geq 7$, aunque esta vez $\lambda = \cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi p}{q}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$. ■

En el teorema anterior no se especifica qué signaturas corresponden a cada valor de λ para el caso $\lambda < 1$, y tampoco qué valores de q dan como resultado signaturas correspondientes a grupos discretos que contienen tres elementos elípticos de orden dos, con puntos fijos no colineales. Si en la ecuación (3.1) se utiliza el hecho de que en uno de los casos $l = 2$, $m = 3$, $n = q$ y $p = 2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4}{n} &= 2k \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= 2k \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{n} \right] \\ &= 2k \left[\frac{n-6}{6n} \right] \\ &= k \left[\frac{n-6}{3n} \right]. \end{aligned}$$

Tras despejar k resulta

$$\begin{aligned}
 k &= \left[1 - \frac{4}{n} \right] \left[\frac{3n}{n-6} \right] \\
 &= \left[\frac{n-4}{n} \right] \left[\frac{3n}{n-6} \right] \\
 &= \left[\frac{3(n-4)}{n-6} \right] \\
 &= \left[\frac{3(n-6) + 6}{n-6} \right] \\
 &= 3 + \left[\frac{6}{n-6} \right].
 \end{aligned}$$

Ya que k es un entero no negativo, el cociente $6/(n-6)$ debe ser entero, es decir, $n-6$ divide a 6. Esto último aunado al hecho de que $n \geq 7$ ($q \geq 7$), da como posibles valores para la pareja (n, k) a los siguientes:

$$(7, 9), (8, 6), (9, 5), (12, 4).$$

En [1] p. 307 se menciona que k debe ser necesariamente un múltiplo de 3, lo cual se prueba de manera detallada en [10] pp. 17-19. Siendo así, resulta que en este caso los únicos valores posibles para q son 7 y 8, correspondientes a las dos primeras parejas de la colección anteriormente mostrada (en las cuales k es múltiplo de 3). Las demás soluciones para q no producen firmas que correspondan a algún grupo discreto que cumpla las hipótesis del teorema en cuestión.

Como un ejemplo particular de un caso posible del Teorema 3.0.1 se considera un cuadrilátero como el de la Figura 3.6, donde $\rho(u', v') = \rho(u', w)$ y α, β, γ denotan las reflexiones en los lados del triángulo con vértices u', w y ζ .

Sea G el grupo generado por las transformaciones $f = (\alpha\gamma)^2$, $g = \gamma(\alpha\beta)\gamma$ y $h = \alpha\beta$, cuyos puntos fijos son, respectivamente, u', v' y w . Obsérvese que f^2, g^2 y h^2 fijan a todos los vértices del cuadrilátero, por lo que necesariamente tales transformaciones deben ser iguales a la identidad. En consecuencia f, g y h son elementos elípticos de orden 2. El grupo triangular originado por el triángulo con vértices u', w y ζ , al que se denotará por H , es un grupo discreto del primer tipo con firma $(0 : 2, 4, q)$, con $q \geq 5$, pues $1/2 + 1/4 + 1/q > 1$ si y sólo si $q \geq 5$.

Ahora se mostrará que $G = H$. Primeramente, ya que $H = \langle \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha \rangle$ y f, g, h son composiciones pares de las reflexiones en los lados del triángulo, resulta que $f, g, h \in H$, por lo que $G < H$. Por otra parte, obsérvese que

$$\begin{aligned}
 g \circ f \circ h &= [\gamma(\alpha\beta)\gamma][(\alpha\gamma)^2][\alpha\beta] \\
 &= [\gamma(\alpha\beta)\gamma][\alpha\gamma\alpha\gamma][\alpha\beta] \\
 &= [\gamma(\alpha\beta)\gamma][\gamma\alpha\gamma\alpha][\alpha\beta] \\
 &= [\gamma(\alpha\beta)][\alpha\gamma][\beta] \\
 &= [\gamma(\beta\alpha)][\alpha\gamma][\beta] \\
 &= (\gamma\beta)^2.
 \end{aligned}$$

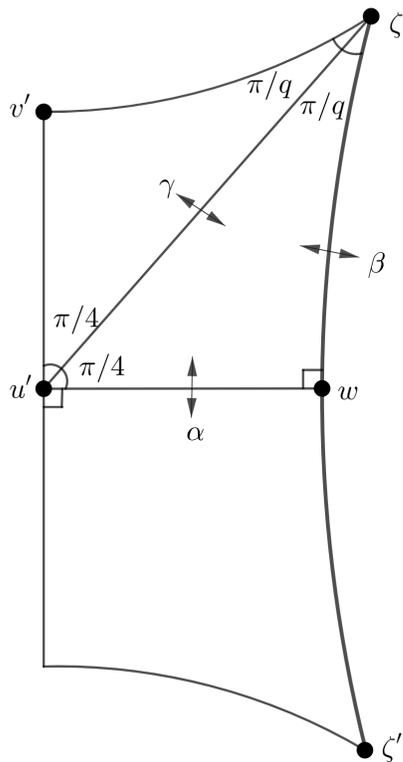


Figura 3.6: Ejemplo del Teorema 3.0.1.

De lo anterior se sigue que G tiene como elemento a la rotación de ángulo $4\pi/q$ alrededor de ζ . Teniendo en cuenta que debe ocurrir $(2, q) = 1$, necesariamente q debe ser un número impar. En consecuencia, existe algún

$k \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$ tal que

$$\frac{4k\pi}{q} = \frac{2\pi}{q} \pmod{2\pi},$$

de donde $\gamma\beta \in G$. Ya que $h = \alpha\beta$, se sigue que las transformaciones $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ y $\gamma\alpha$ pertenecen a G ; así $H < G$ y por lo tanto $G = H$. De esta manera se concluye que el grupo no elemental G generado por tres elementos elípticos de orden 2 tiene signatura $(0 : 2, 4, q; 0; 0)$.

Con el ejemplo anterior se ha visto que el grupo con signatura $(0 : 2, 4, q)$, efectivamente, puede surgir con tres elementos elípticos de orden 2. Aparentemente las condiciones en el inciso *iii*) del Teorema 3.0.1 no sólo son suficientes sino también necesarias. Esto puede consultarse en [12] (véase también [3], [11] y [8]). La suficiencia para el caso $(0 : 2, 3, q)$, con $(q, 3) = 1$ y $q \geq 7$, no se discute en esta tesis (tampoco en [1] ni [10]).

CAPÍTULO 4

Cota universal para la función desplazamiento

En este capítulo se considerarán las cantidades

$$M(g, h) = \inf_z \max\{\operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, gz), \operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, hz)\},$$

$$P(g, h) = \inf_z \{\operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, gz)\operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, hz)\},$$

y se obtendrán sus mejores cotas inferiores para algunas elecciones de transformaciones de Möbius g y h , sujetas a la condición de que $\langle g, h \rangle$ sea un grupo discreto y no elemental.

Obsérvese que, para algún número real no negativo m , la desigualdad

$$M(g, h) \geq m$$

indica que, para cada punto z en el plano hiperbólico, alguna de las funciones g o h mueve z al menos una distancia de $2\operatorname{senh}^{-1}(m)$. La existencia de una cota inferior para $M(g, h)$ fue establecida por Marden y la mejor posible fue obtenida por Yamada, de esta situación surge el teorema principal que se expone en este trabajo. El Teorema de Yamada asegura que en cualquier caso

$$M(g, h) \geq 0.131846\dots$$

Para probar la validéz de esta cota se presentarán primero algunos resultados de gran importancia.

Durante la prueba del siguiente teorema se hará uso del hecho de que si G_0 es un subgrupo de índice k en G y F_0, F son conjuntos fundamentales medibles para G_0 y G , respectivamente; entonces

$$h - \text{área}(F_0) = k \cdot h - \text{área}(F),$$

lo cual, a consecuencia de lo expuesto al inicio del capítulo 2, se traduce en lo siguiente:

$$h - \text{área}(\Delta/G_0) = k \cdot h - \text{área}(\Delta/G).$$

Para una prueba formal de lo anterior véase [1], pp. 205, 206.

Teorema 4.0.1 *Sean g y h elementos hiperbólicos con ejes y longitudes de traslación A_g, A_h, T_g y T_h respectivamente. Supóngase que $\langle g, h \rangle$ es discreto y no elemental, y que A_g y A_h se cruzan en un ángulo θ . Entonces*

$$(1) \quad \text{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right)\text{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right)\text{sen}(\theta) \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = 0.2225\dots$$

(2) *De hecho,*

$$\text{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right)\text{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right)\text{sen}(\theta) \geq \frac{1}{2},$$

excepto posiblemente cuando el grupo $\langle g, h \rangle$ tenga una de las firmas $(0 : 2, 3, 7)$, $(0 : 2, 3, 8)$, $(0 : 2, 4, 5)$ o $(0 : 3, 3, 4)$,

(3) $\text{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right)\text{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right)\text{sen}(\theta) \geq 1$,
si $\langle g, h \rangle$ no tiene elementos elípticos o tiene un dominio fundamental no acotado.

(4) *En particular, si g es un elemento hiperbólico no simple en $\langle g, h \rangle$ entonces $\text{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \geq [\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)]^{\frac{1}{2}} (= 0.47\dots)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea u el punto donde A_g y A_h se cortan. Se construyen puntos v y w en A_g y A_h , respectivamente, tales que

$$\rho(u, v) = \frac{1}{2}T_g, \quad \rho(u, w) = \frac{1}{2}T_h$$

y tales que el triángulo con vértices u, v, w tenga ángulo agudo θ en u (véase la Figura 4.1).

Sean f_u, f_v y f_w elementos elípticos de orden 2 que fijan u, v y w , respectivamente. Reemplazando g (o h) por su inversa si es necesario, se puede suponer que

$$g = f_v f_u, h = f_w f_u \text{ y } gh^{-1} = f_v f_w.$$

Se deduce que cada composición par de los automorfismos f_u, f_v, f_w está en el grupo $\langle g, h \rangle$, pues las posibles composiciones de dos distintos de ellos resultan ser $g, h, gh^{-1}, hg^{-1}, h^{-1}$ y g^{-1} . Así pues, $\langle g, h \rangle$ es un subgrupo de $\langle f_u, f_v, f_w \rangle$ que puede ser de índice uno o dos en $\langle f_u, f_v, f_w \rangle$, dependiendo de si alguna de las transformaciones f_u, f_v o f_w está en el grupo $\langle g, h \rangle$ o no. Lo anterior implica que $\langle f_u, f_v, f_w \rangle$ es discreto, pues es discontinuo debido a que $\langle g, h \rangle$ lo es (cf. [6], pp. 91, 92).

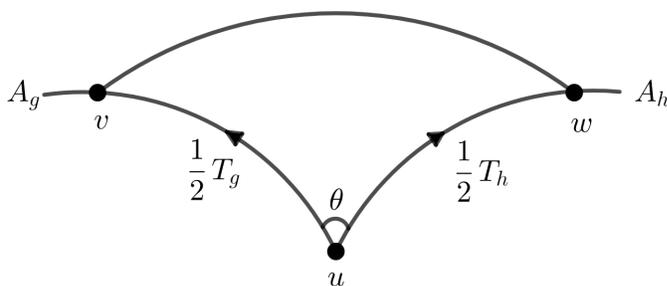


Figura 4.1: Triángulo hiperbólico con vértices u, v y w .

Por otro lado, de lo visto en el capítulo anterior, se tiene que en el triángulo de vértices u, v y w

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sen(\theta) = \lambda = \frac{1}{2}|\text{tr}(f_u f_v f_w)|.$$

Primeramente, nótese que (1) es consecuencia directa del Teorema 3.0.1, pues en cualquier caso $\lambda \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$. Esto debido a que al tenerse $\frac{3\pi}{7} > \frac{2\pi}{5} > \frac{\pi}{3}$, sucede que $\frac{3\pi}{7}$ es el mayor ángulo posible en la colección

$$\frac{\pi}{q}, q \geq 3; \quad \frac{2\pi}{q}, q \geq 5; \quad \frac{3\pi}{q}, q \geq 7;$$

de manera que produce el menor coseno.

Ahora, si $\langle g, h \rangle$ no tiene elementos elípticos, entonces el conmutador $[g, h]$ no es elíptico y (3) se sigue inmediatamente del Teorema 1.2.1. Mientras tanto, si $\langle g, h \rangle$ tiene un dominio fundamental no acotado, entonces (3) se sigue de los casos *i*) y *ii*) del Teorema 3.0.1.

Para verificar la veracidad de (2) es menester notar que, de acuerdo con el tercer inciso del Teorema 3.0.1, se tiene una cota inferior de 1/2 para

$\sinh(\frac{1}{2}T_g)\sinh(\frac{1}{2}T_h)\sen(\theta)$, excepto posiblemente en los casos donde λ es de la forma $\cos(2\pi/q)$ o $\cos(3\pi/q)$, pues los valores de λ de la forma $\cos(\pi/q)$ para $q \geq 3$ son todos mayores que $\frac{1}{2}$. Así pues, en términos de la prueba del Teorema 3.0.1, solamente resulta necesario analizar los casos en los que $p = 2$ y $p = 3$. En lo sucesivo, por brevedad, se denotará al grupo $\langle f_u, f_v, f_w \rangle$ por G^* y a $\langle g, h \rangle$ por G .

Se colocarán los puntos u, v y w de acuerdo con una construcción similar a la considerada en el Teorema 3.0.1 para el caso $\lambda < 1$, donde L es la geodésica a través de u y v , L_1 es la geodésica ortogonal a L que pasa por w , L_2 la geodésica ortogonal a L_1 en w , y las geodésicas L_3 y L_4 son ortogonales a L de tal forma que $\rho(L_1, L_3) = \rho(u, v) = \rho(L_1, L_4)$, es decir,

$$\rho(L_1, L_3) = \frac{1}{2}T_g = \rho(L_1, L_4)$$

(véase la Figura 3.3). De forma análoga a la prueba del Teorema 3.0.1, es posible concluir que G^* contiene al producto $f_w f_u f_v$ de tres elementos elípticos de orden 2 (correspondiente al producto hfg en el Teorema 3.0.1) que genera una rotación alrededor de ζ de ángulo $\frac{2\pi p}{q}$, con $(p, q) = 1$.

Caso 1 (p=2). Aquí, ya que $(p, q) = 1$, necesariamente q debe ser impar. Además, todos los múltiplos del ángulo de rotación $\frac{2\pi p}{q} = \frac{4\pi}{q}$ pueden ser representados como

$$\frac{4\pi}{q} \cdot k, \quad k = 0, 1, \dots, q - 1.$$

Puede mostrarse que tales múltiplos son distintos entre sí tomando k_1, k_2 en el conjunto $\{0, 1, \dots, q - 1\}$: si

$$\frac{4\pi}{q}k_1 - \frac{4\pi}{q}k_2 = 2k\pi,$$

entonces

$$2k_1 - 2k_2 = qk;$$

luego

$$2(k_1 - k_2) = qk,$$

lo cual implica que q divide a $2(k_1 - k_2)$. Sin embargo, debido a que q es impar y $(k_1 - k_2) < q$, esto sólo es posible si $k_1 - k_2 = 0$, es decir, $k_1 = k_2$. Por lo tanto, los múltiplos anteriormente referidos son, efectivamente, distintos entre sí.

Al ser todos estos ángulos múltiplos de $\frac{2\pi}{q}$, necesariamente uno de ellos debe ser de la forma $\frac{2\pi}{q} \pmod{2\pi}$, pues todos los múltiplos de $2\pi/q$ están determinados por q puntos equidistantes en la circunferencia unitaria. Lo anterior implica que G^* contiene una rotación r de ángulo $\frac{2\pi}{q}$ generada por la rotación de ángulo $\frac{4\pi}{q}$. Obsérvese que la rotación r es tal que r^2 coincide con el producto de tres rotaciones de orden 2 antes mencionado, es decir, $r^2 = f_w f_u f_v$. Como r^2 es una composición par (pues todos los cuadrados son palabras pares), entonces $r^2 \in G$ y, ya que

$$r^2(f_u f_v)^{-1} = f_w$$

y $(f_u f_v)^{-1} \in G$, se concluye que $f_w \in G$. Como se mencionó antes, lo anterior implica que G es un subgrupo de índice 1 en G^* , es decir, $G = G^*$. Por lo tanto, G tiene una de las firmas $(0 : 2, 3, q)$ con $q = 7$ o $q = 8$, o $(0 : 2, 4, q)$ con q impar mayor o igual que 5, pues de acuerdo con el Teorema 3.0.1, esas son las posibles firmas para G^* .

Nótese que en este caso

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sen(\theta) = \lambda = \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right),$$

y como

$$\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \geq \frac{1}{2},$$

para cualquier entero $q \geq 7$, entonces las firmas $(0 : 2, 3, q)$ y $(0 : 2, 4, q)$ (con $q \geq 7$) pueden surgir para G respetando la cota inferior de $1/2$ para

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sen(\theta).$$

Sin embargo, si $q = 5$ entonces

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sen(\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) < \frac{1}{2},$$

por lo que la cota inferior establecida en (2) se respeta, excepto cuando G tiene firma $(0 : 2, 4, 5)$.

Caso 2 (p=3). En este caso G^* tiene firma $(0 : 2, 3, q)$ con $q \geq 7$, siempre que q no sea un múltiplo de 3.

Si se supone que G es de índice 1 en G^* , entonces $G = G^*$ y, por ende, G tiene signatura $(0 : 2, 3, q)$ con $q \geq 7$ y $(3, q) = 1$. En este caso

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\sen(\theta) = \lambda = \cos\left(\frac{3\pi}{q}\right).$$

Ya que

$$\cos\left(\frac{3\pi}{q}\right) \geq \frac{1}{2},$$

para cualquier entero $q \geq 10$, y además

$$\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) < \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) < \frac{1}{2};$$

ocurre que la cota inferior en (2) se respeta, excepto si G tiene signatura $(0 : 2, 3, q)$ con $q = 7, 8$.

Para el caso en que G tenga índice 2 en G^* puede observarse primero que

$$h - \text{área}(\Delta/G^*) = 2\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{q} \right) \right] = 2\pi \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{q} \right] = \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{q} \right],$$

y probarse que G es triangular. Dado el índice de G en G^* se tiene

$$h - \text{área}(\Delta/G) = 2 \cdot h - \text{área}(\Delta/G^*) = 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{q} \right]. \quad (4.1)$$

Nótese que de lo anterior se sigue la desigualdad

$$h - \text{área}(\Delta/G) < \frac{2\pi}{3}. \quad (4.2)$$

Por otra parte, debido a que G no tiene elementos parabólicos ni hiperbólicos de frontera, pues $G \leq G^*$ y G^* carece de este tipo de transformaciones, se tiene

$$h - \text{área}(\Delta/G) = 2\pi \left[2g - 2 + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \right]. \quad (4.3)$$

De la igualdad anterior puede deducirse que el género de G es igual a cero. Si se supone que $g \geq 2$, el término $2g - 2$ en la ecuación (4.3) sería mayor o

igual que 2 y, en consecuencia, $h - \text{área}(\Delta/G) \geq 4\pi$, lo cual contradice (4.2). Si $g = 1$ y G tiene elípticas, del hecho de que $m_i \geq 2$, se sigue que

$$\sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq \frac{1}{2}$$

y, en consecuencia, tras sustituír g en (4.3), resulta

$$h - \text{área}(\Delta/G) = 2\pi \left[\sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right] \geq 2\pi \frac{1}{2} = \pi,$$

lo cual, nuevamente, contradice (4.2). Por lo tanto, $g = 0$ y la ecuación (4.3) puede reescribirse simplemente como

$$h - \text{área}(\Delta/G) = 2\pi \left[-2 + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right]. \quad (4.4)$$

Ahora, si G posee al menos 5 clases elípticas, entonces, ya que

$$\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \geq \frac{1}{2},$$

se tiene

$$\sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \geq 5 \cdot \frac{1}{2}.$$

Así,

$$-2 + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \geq \frac{1}{2}$$

y, en consecuencia, resulta

$$h - \text{área}(\Delta/G) = 2\pi \left[-2 + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right] \geq \pi,$$

contradiendo (4.2).

Se afirma que G no puede tener cuatro clases elípticas. Para probarlo se supone lo contrario y se consideran los siguientes subcasos:

Subcaso 1. Supóngase que G tiene signatura $(0 : 2, 2, 2, n)$, con $n \geq 3$. De la expresión (4.4) se tiene

$$\begin{aligned} h - \text{área}(\Delta/G) &= 2\pi \left[-2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Igualando con (4.1) resulta

$$2\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right] = 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{q} \right],$$

es decir,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3} - \frac{2}{q}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{2}{q} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{6-n}{6n}.$$

Así,

$$\frac{q}{2} = \frac{6n}{6-n}, \text{ luego } q = \frac{12n}{6-n}.$$

Recuérdese que q debe ser un entero positivo, para lo cual es necesario que $n \in \{3, 4, 5\}$, pero para estos valores de n el entero q resulta ser múltiplo de 3, lo cual contradice que $(p, q) = 1$. Con este argumento se concluye que G no puede tener tres clases de conjugación de subgrupos cíclicos elípticos maximales de orden 2.

Subcaso 2. Supóngase que G tiene signatura $(0 : 2, 2, 3, n)$, con $n \geq 3$. De (4.4) se obtiene

$$\begin{aligned} h - \text{área}(\Delta/G) &= 2\pi \left[-2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Igualando lo anterior con (4.1)

$$2\pi \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{n} \right] = 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{q} \right],$$

es decir,

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3} - \frac{2}{q}$$

o, equivalentemente,

$$\frac{2}{q} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{n} - \frac{1}{3} = \frac{3-n}{3n}.$$

Así,

$$\frac{q}{2} = \frac{3n}{3-n}, \text{ luego } q = \frac{6n}{3-n}.$$

Puesto que $n \geq 3$, la última igualdad implica que q no puede ser un entero positivo, de manera que esta signatura no puede corresponder a G .

Subcaso 3. Supóngase ahora que G tiene signatura $(0 : 2, 2, 4, n)$, con $n \geq 4$. De (4.4) resulta

$$\begin{aligned} h - \text{área}(\Delta/G) &= 2\pi \left[-2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{n} \right]. \end{aligned}$$

Nótese que al ser $n \geq 4$ se tiene

$$-\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{4},$$

luego

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{n} \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4},$$

es decir,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}.$$

Así pues,

$$h - \text{área}(\Delta/G) = 2\pi \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{n} \right] \geq 2\pi \frac{1}{2} = \pi,$$

contradiendo (4.2). Por lo tanto, este tipo de signatura no surge para G .

A partir de este punto es conveniente notar que a medida que los órdenes de las clases elípticas sean mayores, el valor de $h - \text{área}(\Delta/G)$ se incrementará

superando el valor de π y, consecuentemente, rebasando la cota superior proporcionada por la expresión (4.2). De esta forma, al agotarse todas las posibilidades para los ordenes de las clases elípticas de G , se concluye que G no puede tener cuatro clases elípticas.

Finalmente, si G tuviera 2 clases elípticas o menos, el valor $h - \text{área}(\Delta/G)$ no sería positivo, por lo cual se puede asegurar que G es un grupo triangular. Así, la igualdad (4.4) puede ser escrita como

$$h - \text{área}(\Delta/G) = 2\pi \left[1 - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) \right]. \quad (4.5)$$

Ahora, al ser G^* triangular y G un subgrupo triangular de éste, ocurre que el orden de cada clase elíptica de G debe ser igual a un factor del orden de alguna de las clases elípticas de G^* , incluso el orden de alguna clase elíptica de G^* puede desaparecer en la signatura de G . Así pues, la signatura de G podría tener una de las siguientes formas:

$$(0 : 2, 2, 3), (0 : 2, 3, 3), (0 : 3, 3, 3),$$

en caso de que la clase de orden q desaparezca. Sin embargo, estas posibilidades quedan rápidamente descartadas, ya que, según (4.5), producen un valor no positivo para $h - \text{área}(\Delta/G)$. El mismo argumento aplica para la signatura $(0 : 2, 2, q/k)$, donde k es algún divisor de q , de manera que este tipo de signaturas tampoco corresponden a G .

Suponiendo que la signatura de G es $(0 : 2, 3, \frac{q}{k})$, de (4.5) se tiene

$$h - \text{área}(\Delta/G) = 2\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{k}{q} \right) \right] = 2\pi \left[\frac{1}{6} - \frac{k}{q} \right].$$

Igualando con (4.1),

$$2\pi \left[\frac{1}{6} - \frac{k}{q} \right] = 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{q} \right],$$

es decir,

$$\left[\frac{1}{6} - \frac{k}{q} \right] = \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{q} \right]$$

o, equivalentemente,

$$\frac{2}{q} - \frac{k}{q} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}.$$

De esta forma

$$\frac{2-k}{q} = \frac{1}{6}$$

y despejando q resulta

$$q = 6(2-k).$$

Obsérvese que necesariamente q es un múltiplo de 3. Recordando que $p = 3$ y debe cumplirse $(p, q) = 1$, se deduce que esta signatura no corresponde a G . De la misma manera se descartan aquellas signaturas en las que el orden de dos clases elípticas o el orden de las tres clases son factores de q . Por lo tanto, G tiene signatura

$$\left(0 : 3, 3, \frac{q}{k}\right).$$

Nótese que de (4.5) se sigue

$$h - \text{área}(\Delta/G) = 2\pi \left[1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{k}{q}\right)\right] = 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{k}{q}\right].$$

Igualando con (4.1) resulta

$$2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{k}{q}\right] = 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{q}\right].$$

Dividiendo entre 2π en ambos lados,

$$\left[\frac{1}{3} - \frac{k}{q}\right] = \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{q}\right],$$

de donde se obtiene inmediatamente que $k = 2$. Ya que q/k debe ser un entero positivo, necesariamente q debe ser un número par.

En conclusión, si $p = 3$ y G es un subgrupo de índice 2 en G^* , entonces G tiene signatura

$$\left(0 : 3, 3, \frac{q}{2}\right),$$

con q un entero par mayor que 7. Es menester recordar que en este caso

$$\text{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \text{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right) \text{sen}(\theta) = \lambda = \cos\left(\frac{3\pi}{q}\right),$$

y como

$$\cos\left(\frac{3\pi}{q}\right) \geq \frac{1}{2}$$

para cualquier entero $q \geq 10$, mientras que

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) < \frac{1}{2};$$

resulta que la cota inferior de $1/2$ para

$$\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right)\operatorname{sen}(\theta)$$

se respeta, excepto cuando $q = 8$, es decir, cuando G tiene signatura

$$(0 : 3, 3, 4).$$

Finalmente, se probará (4). Si g es no simple, existe $f \in G$ tal que $f(A_g)$ interseca A_g en un cierto ángulo θ . Tomando $h = f g f^{-1}$, resulta que el eje de h es $f(A_g)$. De esta forma, por el inciso (1),

$$\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right)\operatorname{sen}(\theta) \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right).$$

Obsérvese que al ser h un elemento conjugado de g , se tiene $T_g = T_h$ y la desigualdad anterior se puede escribir como

$$\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{sen}(\theta) \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right),$$

es decir,

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{sen}(\theta) \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right).$$

Por otra parte, es claro que

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) \geq \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{sen}(\theta),$$

de donde

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right).$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \geq \left[\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right]^{1/2} (= 0.47\dots).$$

■

Durante la demostración del siguiente teorema se hará uso de dos resultados conocidos acerca de pentágonos y hexágonos, presentados a continuación.

Teorema 4.0.2 *Para cualquier pentágono con cuatro ángulos rectos y un quinto ángulo ϕ , con $0 \leq \phi < \pi$, como el que se ilustra en la Figura 4.2, se cumple la relación*

$$\cosh a \cosh c + \cos \phi = \sinh a \cosh b \sinh c.$$

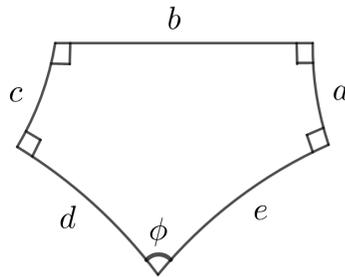


Figura 4.2: Pentágono hiperbólico con cuatro ángulos rectos.

La prueba puede consultarse en [1], p. 159, 160.

Teorema 4.0.3 *Para cualquier hexágono con todos sus ángulos rectos, como el que se muestra en la Figura 4.3, se verifica la relación*

$$\cosh b_1 \sinh a_2 \sinh a_3 = \cosh a_1 + \cosh a_2 \cosh a_3.$$

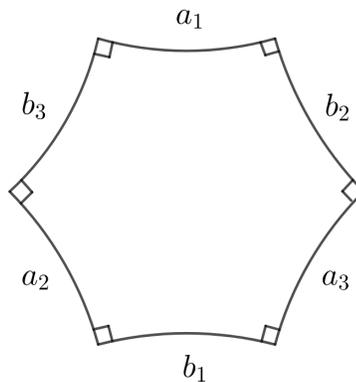


Figura 4.3: Hexágono hiperbólico con ángulos rectos.

Su respectiva demostración puede ser encontrada en [1], p. 161.

Teorema 4.0.4 Sean g y h transformaciones hiperbólicas con ejes y longitudes de traslación A_g , A_h , T_g y T_h , respectivamente. Supóngase que $\langle g, h \rangle$ es discreto y no elemental, y que ninguna imagen de A_g se cruza con alguna de A_h . Entonces

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) - \frac{1}{2}.$$

Si, además, $\langle g, h \rangle$ no tiene elementos elípticos, se puede reemplazar $-\frac{1}{2}$ por $+1$ (en este caso 2 es una cota inferior).

DEMOSTRACIÓN. Se denotará al grupo $\langle g, h \rangle$ por G . Se puede conjugar a G de una manera tal que la perpendicular común de A_g y A_h sea el eje real y que el punto medio de dicha perpendicular sea el origen, tal como en la Figura 4.4 (de ser necesario puede reemplazarse h por h^{-1} o g por g^{-1}). Se denotará por σ_1 , σ_2 y σ_3 a las reflexiones en las geodésicas L_1 , L_2 y L_3 , respectivamente, que aparecen en la Figura 4.4. Obsérvese que $g = \sigma_3\sigma_1$ y $h = \sigma_2\sigma_3$. De esta manera $\sigma_2\sigma_1$ pertenece a G .

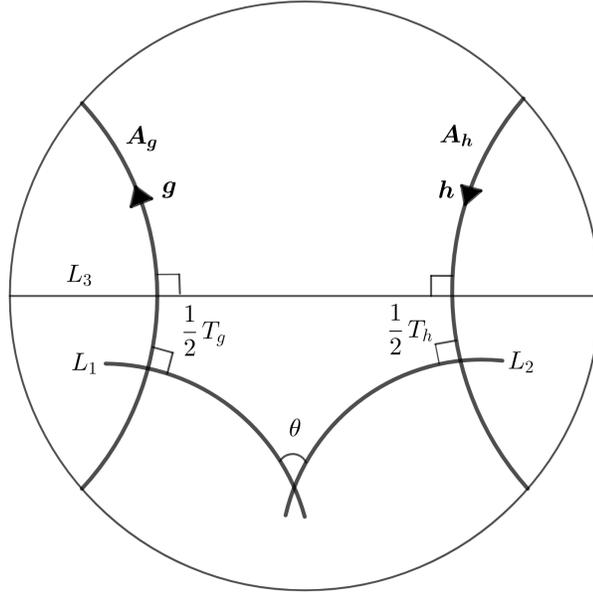


Figura 4.4: Configuración con el eje real como perpendicular de A_g y A_h .

Si G no tiene elementos elípticos, entonces L_1 y L_2 no pueden intersectarse (de lo contrario el punto de intersección sería un punto fijo elíptico y el elemento $\sigma_2\sigma_1$ sería elíptico). Esta situación se muestra en la Figura 4.5.

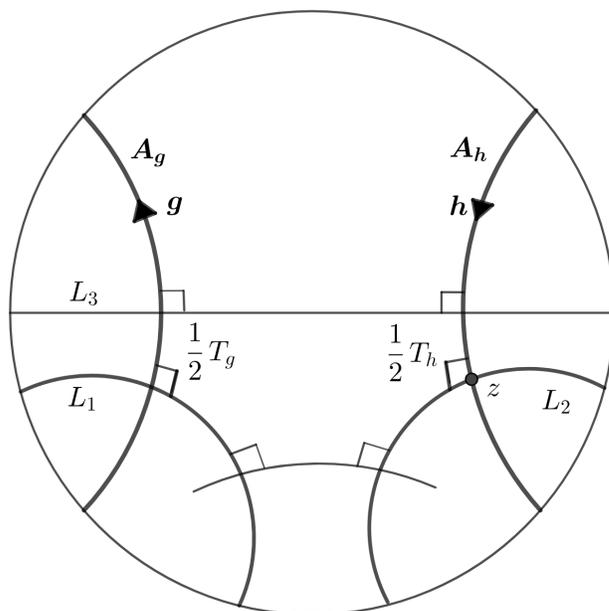


Figura 4.5: Si G no tiene elementos elípticos, L_1 y L_2 no se cortan.

Sea z el punto de intersección de L_2 con A_h . Obsérvese que en este caso (donde no hay elípticas) se obtiene un polígono al mover el haz de geodésicas ortogonales a L_1 que intersecan a L_2 ; cuando una de ellas interseca a L_2 en el punto en la recta al infinito más cercano a L_1 , lo hace en un ángulo (partiendo de L_2 en dirección positiva) de magnitud cero, el cual va creciendo a medida que se eligen geodésicas que corten a L_2 cada vez más cerca de z . No podría suceder que la geodésica ortogonal a L_1 y L_2 corte a L_2 más allá del punto z , es decir, que no se genere un hexágono con L_1 , A_g , L_3 , A_h y L_2 , sino un pentágono; ya que bajo esta situación habría un triángulo con dos ángulos rectos formado por z , un segmento de A_h y el punto donde la ortogonal común a L_1 y L_2 corta a L_2 . Lo anterior garantiza la existencia del hexágono con ángulos rectos que se aprecia en la Figura 4.5. El Teorema 4.0.3, aplicado a este contexto, da como resultado la igualdad entre

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right) \sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right) \cosh \rho(A_g, A_h)$$

y la expresión

$$\cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + \cosh \rho(L_1, L_2).$$

Como la función $\cosh(x)$ está acotada inferiormente por 1, resulta que

$$\cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + \cosh \rho(L_1, L_2) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + 1,$$

de donde se obtiene

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh \rho(A_g, A_h) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + 1,$$

que justamente es la segunda desigualdad de este teorema.

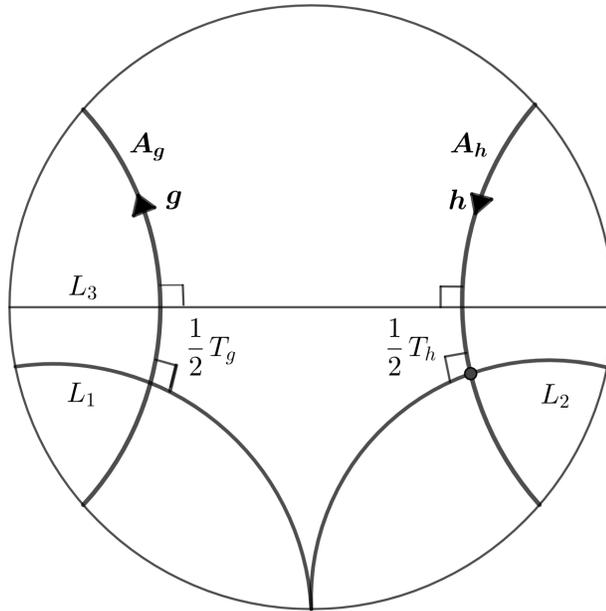


Figura 4.6: Si L_1 y L_2 se intersectan en $\partial\Delta$ se da la igualdad.

En caso de que L_1 y L_2 no se intersecten en el interior de Δ pero sí en $\partial\Delta$, resultaría una configuración como la que se muestra en la Figura 4.6, donde se obtiene un pentágono con cuatro ángulos rectos y un quinto ángulo igual a 0. En estas circunstancias el Teorema 4.0.2 garantiza que se cumple la igualdad

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) = \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + \cos(0),$$

es decir,

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) = \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + 1,$$

con lo que se concluye la prueba de la segunda parte del teorema.

Ahora, si G contiene elementos elípticos, puede suceder que $\sigma_2\sigma_1$ sea elíptico o no. En caso de no serlo se aplican los argumentos anteriores. Si, por el contrario, $\sigma_2\sigma_1$ es efectivamente elíptico, entonces L_1 y L_2 se cortan en un ángulo $\theta = \frac{p\pi}{q}$ con $(p, q) = 1$. En este punto es conveniente distinguir entre dos casos relacionados con la magnitud del ángulo θ .

Caso 1. Supóngase que $\theta \leq 2\pi/q$, es decir, $p\pi/q \leq 2\pi/q$. De esto resulta $p \leq 2$.

Si $p = 1$ entonces $\theta = \pi/q$; de donde se deduce que $q > 1$, pues el valor $q = 1$ da como resultado $\theta = \pi$, lo cual no puede suceder, ya que θ es un ángulo interior del pentágono determinado por A_g , L_3 , A_h , L_2 y L_1 (véase Figura 4.4) y el ángulo de cualquier polígono es un ángulo interior si y sólo si su magnitud se encuentra en el intervalo $(0, \pi)$ (cf. [1], p.153). Así pues, $q \geq 2$, de manera que $\theta \leq \pi/2$. Tras aplicar el Teorema 4.0.2 al pentágono antes mencionado, resulta

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) = \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + \cos(\theta).$$

Pero al ser $\theta \leq \pi/2$ se sigue que $\cos(\theta) \geq \cos(\pi/2)$, es decir, $\cos(\theta) \geq 0$, de donde se obtiene de manera inmediata

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + \cos(\theta) &\geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) \\ &\geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) - \frac{1}{2}.$$

Si $p = 2$ entonces $\theta = 2\pi/q$ y, en consecuencia, $q > 1$, pues $q = 1$ da como resultado $\theta = 2\pi$, lo cual es imposible por ser θ un ángulo interior

del pentágono antes descrito. Por otro lado, ya que $(p, q) = 1$ y $p = 2$, necesariamente $q \geq 3$, con q impar, de donde $\theta \leq 2\pi/3$. En virtud del Teorema 4.0.2, se tiene

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) = \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + \cos(\theta),$$

pero al ser $\theta \leq 2\pi/3$ resulta que $\cos(\theta) \geq \cos(2\pi/3)$, es decir, $\cos(\theta) \geq -\frac{1}{2}$. Así,

$$\cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + \cos(\theta) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) - \frac{1}{2}$$

y, por lo tanto,

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) - \frac{1}{2}.$$

Caso 2. Supóngase ahora que $\theta > \frac{2\pi}{q}$. En este caso es posible rotar A_h alrededor del punto de intersección de L_2 con L_1 (al que por comodidad se llamará α), aplicando alguna potencia de la transformación $\sigma_2\sigma_1$, hasta obtener una imagen de A_h que sea más cercana a A_g pero, por hipótesis, ajena a A_g . Nótese que para lograr esto respetando las hipótesis es necesario que no sean a la vez q impar y p par, pues si se supone que q es impar y p es par, entonces es posible aplicar $\frac{q+1}{2}$ veces la transformación $\sigma_2\sigma_1$ a A_h . En tal caso, la geodésica ortogonal por α a la imagen resultante formará, con respecto a A_h , un ángulo de

$$2\theta\left(\frac{q+1}{2}\right) = \frac{2p\pi}{q}\left(\frac{q+1}{2}\right) = p\pi + \frac{p\pi}{q} = p\pi + \theta,$$

siendo éste igual a θ módulo 2π . Por lo anterior, esa rotación coincidirá con A_g , contradiciendo las hipótesis.

Para un mejor entendimiento del proceso de rotación de A_h se pueden conjugar las transformaciones de tal manera que el punto de intersección α corresponda al origen. La configuración obtenida se muestra en la Figura 4.7.

Todas las imágenes del eje A_h se obtendrán al rotar alrededor de α en

$$\frac{2p\pi}{q}, \frac{4p\pi}{q}, \dots, \frac{2(q-1)p\pi}{q}$$

radianes y estas serán distintas entre sí. Esta última afirmación puede demostrarse suponiendo que para algunos i, j distintos en el conjunto $\{1, 2, \dots, q-1\}$ se cumple

$$\frac{2ip\pi}{q} \equiv \frac{2jp\pi}{q} \pmod{2\pi},$$

esto es,

$$\frac{2ip\pi}{q} - \frac{2jp\pi}{q} = 2k\pi, \text{ para algún entero } k.$$

Por consiguiente,

$$\frac{p}{q}(i-j) = k,$$

o bien

$$p(i-j) = kq,$$

de donde se deduce que q divide a p o q divide a $i-j$. Lo anterior es imposible si $i \neq j$, ya que $(p, q) = 1$ y, además, $i-j < q$, de manera que, necesariamente, $i = j$.

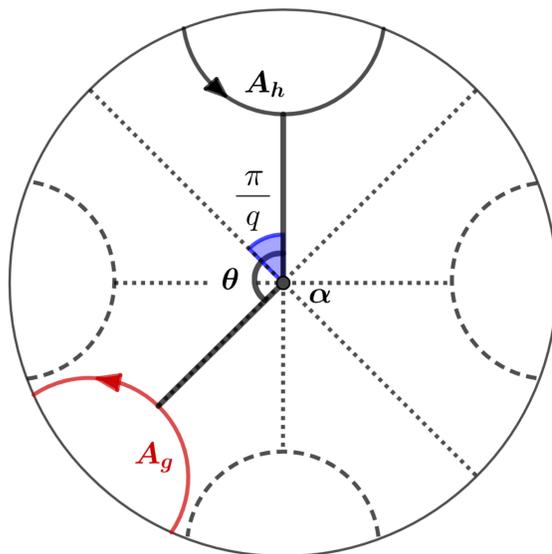


Figura 4.7: Configuración con α como centro de Δ .

Es intuitivamente claro que a medida que se rota A_h en torno a α se obtendrán algunas imágenes de dicho eje más cercanas a A_g . Esto puede visualizarse al tomar hiperciclos por los puntos fijos de g como se muestra en

la Figura 4.8. Al ser los hiperciclos los que determinan las distancias a A_g (cf. [1], p.162), resulta que una imagen que no interseque a cierto hiperciclo cercano a A_g estará más alejada de A_g que una que sí lo interseca. Además, cabe destacar que por ser $\sigma_2\sigma_1$ una isometría de orden q , habrán siempre q imágenes distintas de A_h alrededor de α , y las respectivas geodésicas ortogonales por α de dos de ellas consecutivas formarán un ángulo de $2\pi/q$ en α . Ya que ninguna imagen de A_h interseca a A_g , se puede asegurar que A_g se encuentra entre dos imágenes consecutivas de A_h , así que el ángulo θ' que forma L_1 (la geodésica ortogonal a A_g por α) con la ortogonal a una de esas imágenes de A_h por α será menor que $2\pi/q$.

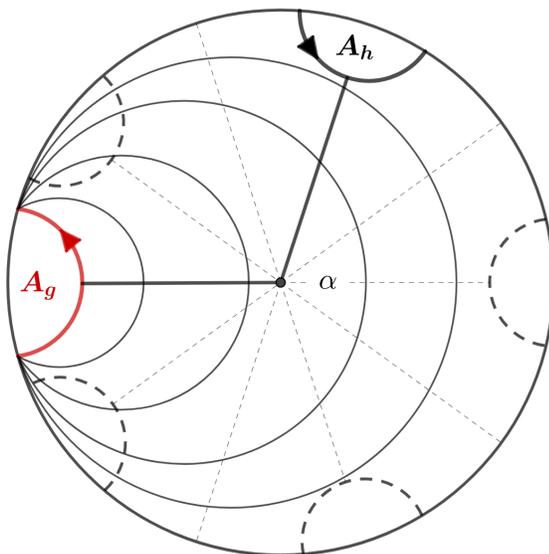


Figura 4.8: Hiperciclos por los puntos fijos de g .

Así, si se reemplaza h por un conjugado fhf^{-1} , donde f es una de las rotaciones alrededor de α antes referidas, con la propiedad de que su eje $f(A_h)$ esté tan cerca como sea posible de A_g (pero distinto de A_g), se tiene la desigualdad

$$\rho(A_g, A_h) \geq \rho(A_g, fA_h)$$

y, por el argumento anterior, al construir un pentágono de manera análoga al considerado en las situaciones anteriores, el correspondiente ángulo θ' satisface $\theta' \leq 2\pi/q$. Ahora se está en condiciones de aplicar lo obtenido en el

Caso 1, tras lo cual resulta la desigualdad

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_{fhf^{-1}}\right)\cosh\rho(A_g, fA_h) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_{fhf^{-1}}\right) - \frac{1}{2}.$$

Recuérdese que por ser elementos conjugados se cumple $T_{fhf^{-1}} = T_h$, así

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, fA_h) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) - \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, dado que $\rho(A_g, A_h) \geq \rho(A_g, fA_h) \geq 0$, entonces se tiene

$$\cosh\rho(A_g, A_h) \geq \cosh\rho(A_g, fA_h),$$

de donde

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) \geq \sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, fA_h).$$

De las desigualdades anteriores se sigue que

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) - \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

En el caso en que g es un elemento hiperbólico simple se puede aplicar este resultado a $\langle g, h \rangle$, con h un conjugado de g , y se obtiene lo siguiente:

Corolario 4.0.5 *Si g y h son elementos hiperbólicos que generan un grupo discreto no elemental y g es simple en este grupo, entonces, para toda f en $\langle g, h \rangle$, se tiene que $f(A_g) = A_g$ o bien*

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g) \geq \frac{1}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Al ser g simple, para cualquier f en $\langle g, h \rangle$ ocurre que $f(A_g) = A_g$ o bien $f(A_g) \cap A_g = \emptyset$. En el segundo caso, tomando $h = fgf^{-1}$ y aplicando el Teorema 4.0.4 se tiene

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right)\cosh\rho(A_g, A_h) \geq \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) - \frac{1}{2}.$$

Pero $T_g = T_h$, por ser g y h elementos conjugados. Además, dada la elección de h , resulta que su eje es $f(A_g)$, así que

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{cosh}\rho(A_g, fA_g) \geq \operatorname{cosh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) - \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

Utilizando algunas identidades trigonométricas básicas puede obtenerse

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh}\rho(A_g, fA_g) &= \operatorname{cosh}\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g) + \frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) \\ &= \operatorname{cosh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) \\ &= 1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) \\ &= 1 + 2\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.6) resulta

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\left[1 + 2\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right)\right] \geq \operatorname{cosh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) - \frac{1}{2},$$

es decir,

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) + 2\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) \geq \operatorname{cosh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) - \frac{1}{2}$$

o, equivalentemente,

$$2\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) \geq \operatorname{cosh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) - \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) - \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente,

$$2\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) \geq \frac{1}{2},$$

pues $\operatorname{cosh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) - \operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right) = 1$. De esta forma se concluye que

$$\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}T_g\right)\operatorname{senh}^2\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) \geq \frac{1}{4}$$

y, por lo tanto,

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right)\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g)\right) \geq \frac{1}{2}.$$

■

El siguiente ejemplo muestra que la cota inferior de $\frac{1}{2}$ es la mejor posible. Durante su explicación se hará uso del siguiente teorema cuya prueba se encuentra en [1], pp. 157-159. Dicho teorema hace referencia a cuadriláteros de Lambert, es decir, cuadriláteros con tres ángulos rectos y un cuarto ángulo ϕ que satisface $0 \leq \phi < \pi/2$.

Teorema 4.0.6 *En el cuadrilátero que se ilustra en la Figura 4.9 se cumplen las igualdades*

(i) $\sinh a_1 \sinh a_2 = \cos \phi,$

(ii) $\cosh a_1 = \cosh b_1 \sin \phi.$

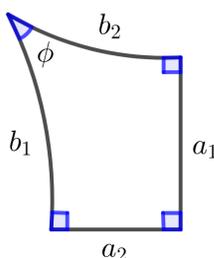


Figura 4.9: Cuadrilátero de Lambert.

Considérese un polígono D construido como en la Figura 4.10, donde f es la transformación elíptica de orden dos que fija al origen, y g es un elemento hiperbólico que apareaa L con L' . Así, f y g aparean los lados de D . Obsérvese que la suma de los ángulos interiores de D es igual a $2\pi/3$. De esta forma, se cumplen las condiciones necesarias para aplicar el Teorema de Poincaré para un ciclo elíptico de orden 3 y, por lo tanto, D es un polígono fundamental para $\langle f, g \rangle$. Se puede probar que el lado libre del polígono D no representa problema alguno para el empleo del Teorema de Poincaré (véase [1] p. 253, o con mayor detalle [2] pp. 18-20). Ya que g apareaa lados del polígono fundamental D , del Teorema 1.4.1 se sigue que g es simple.

Ahora, puesto que el ínfimo de las traslaciones de g se alcanza en el eje (donde el desplazamiento es constante) y g apareaa L y L' , necesariamente

$T_g = \rho(L, L')$. Por otra parte, al ser f una transformación elíptica de orden dos, la imagen de A_g bajo f es como se muestra en la Figura 4.11 (una rotación de A_g de π radianes en torno al origen). Nótese que la geodésica ortogonal a A_g y a $f(A_g)$ pasa por el origen (esto se sigue de la simetría de L y L'). También en dicha geodésica se alcanza la distancia hiperbólica de A_g a $f(A_g)$ y, por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g) = \rho(A_g, 0).$$

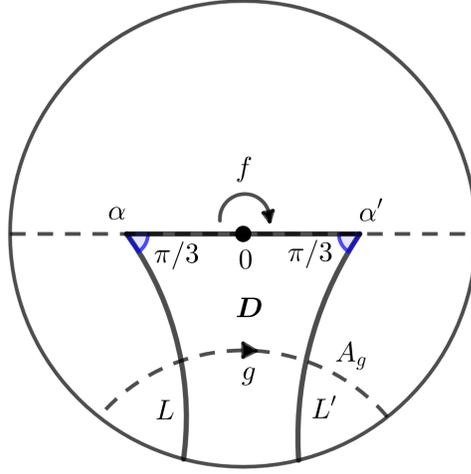


Figura 4.10: Ejemplo del Corolario 4.0.5.

Así, a consecuencia de lo anterior y del Teorema 4.0.6 se tiene la igualdad

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right) \sinh\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g) = \sinh\frac{1}{2}\rho(L, L') \sinh \rho(A_g, 0) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

es decir,

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right) \sinh\frac{1}{2}\rho(A_g, fA_g) = \frac{1}{2}.$$

En la prueba del teorema presentado a continuación se utilizará la siguiente desigualdad

$$\cosh(a)\cosh(b) \geq \frac{1}{2}\cosh(a+b), \quad (4.7)$$

la cual es verdadera, ya que

$$\begin{aligned}
 2\cosh(a)\cosh(b) &= 2\left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2}\right) + \left(\frac{e^{b-a} + e^{a-b}}{2}\right) \\
 &= \cosh(a+b) + \left(\frac{e^{b-a} + e^{a-b}}{2}\right) \\
 &\geq \cosh(a+b).
 \end{aligned}$$

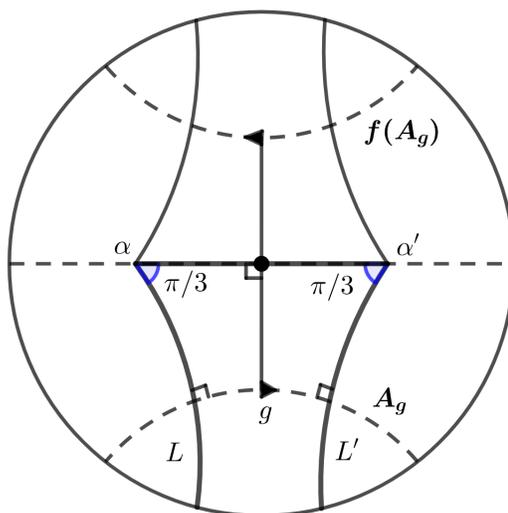


Figura 4.11: Imagen de A_g bajo f .

Los Teoremas 4.0.1 y 4.0.4 proporcionan la siguiente cota para $P(g, h)$.

Teorema 4.0.7 Sean g y h elementos hiperbólicos que generan un grupo discreto no elemental. Entonces $P(g, h) \geq \cos(3\pi/7)$.

DEMOSTRACIÓN. Se utilizará la notación de los Teoremas 4.0.1 y 4.0.4. Si los ejes de g y h se intersectan en algún punto u (como en la Figura 4.1), entonces considerando que el ínfimo de las traslaciones se alcanza en los ejes

donde el desplazamiento es constante, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
P(g, h) &= \sinh \frac{1}{2} \rho(u, gu) \sinh \frac{1}{2} \rho(u, hu) \\
&= \sinh \left(\frac{1}{2} T_g \right) \sinh \left(\frac{1}{2} T_h \right) \\
&\geq \sinh \left(\frac{1}{2} T_g \right) \sinh \left(\frac{1}{2} T_h \right) \operatorname{sen}(\theta) \\
&\geq \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right),
\end{aligned}$$

siendo esta última desigualdad consecuencia del Teorema 4.0.1.

Si alguna de las imágenes de A_g se interseca con alguna imagen de A_h (y A_g no se interseca con A_h) en algún punto w , esto es, $f_1(A_g) \cap f_2(A_h) = \{w\}$, para algunas transformaciones f_1 y f_2 ; entonces existen $w_1 \in A_g$ y $w_2 \in A_h$ tales que $f_1(w_1) = w = f_2(w_2)$. En este caso se tiene

$$\begin{aligned}
P(g, h) &= \sinh \frac{1}{2} \rho(w_1, gw_1) \sinh \frac{1}{2} \rho(w_2, hw_2) \\
&= \sinh \frac{1}{2} \rho(f_1 w_1, f_1 g w_1) \sinh \frac{1}{2} \rho(f_2 w_2, f_2 h w_2) \\
&= \sinh \left(\frac{1}{2} T_{f_1 g f_1^{-1}} \right) \sinh \left(\frac{1}{2} T_{f_2 h f_2^{-1}} \right) \\
&= \sinh \left(\frac{1}{2} T_g \right) \sinh \left(\frac{1}{2} T_h \right) \\
&\geq \sinh \left(\frac{1}{2} T_g \right) \sinh \left(\frac{1}{2} T_h \right) \operatorname{sen}(\theta) \\
&\geq \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad, nuevamente, es consecuencia del Teorema 4.0.1.

Si las imágenes de A_g y A_h no se intersecan se puede utilizar el Teorema 4.0.4. Primeramente, en virtud del Teorema 1.2.2, para cualquier z en el plano hiperbólico se tiene que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, gz) \sinh \frac{1}{2} \rho(z, hz)$$

es igual a

$$\sinh \left(\frac{1}{2} T_g \right) \sinh \left(\frac{1}{2} T_h \right) \cosh \rho(z, A_g) \cosh \rho(z, A_h).$$

Sin embargo, por (4.7), esta última expresión es mayor o igual que

$$\frac{1}{2} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right) \operatorname{cosh}\left[\rho(z, A_g) + \rho(z, A_h)\right],$$

lo cual, a su vez, es mayor o igual que

$$\frac{1}{2} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right) \operatorname{cosh}\rho(A_g, A_h).$$

La última afirmación está justificada por la desigualdad

$$\rho(A_g, z) + \rho(z, A_h) \geq \rho(A_g, A_h),$$

cuya veracidad se puede comprobar tomando w_1 como el punto donde la geodésica por z ortogonal a A_g corta a A_g , y w_2 el punto donde la geodésica por z ortogonal a A_h corta a A_h ; ya que entonces, como consecuencia de la desigualdad del triángulo, resulta

$$\begin{aligned} \rho(A_g, z) + \rho(z, A_h) &= \rho(w_1, z) + \rho(z, w_2) \\ &\geq \rho(w_1, w_2) \geq \rho(A_g, A_h). \end{aligned}$$

Así,

$$\operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, gz) \operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, hz) \geq \frac{1}{2} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right) \operatorname{cosh}\rho(A_g, A_h).$$

Del Teorema 4.0.4 se sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_h\right) \operatorname{cosh}\rho(A_g, A_h) &\geq \frac{1}{2} \left(\operatorname{cosh}\frac{T_g}{2} \operatorname{cosh}\frac{T_h}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \\ &\geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, gz) \operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, hz) \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right),$$

por lo que $\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$ es una cota inferior para las cantidades

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz) \sinh\frac{1}{2}\rho(z, hz)$$

que resultan de tomar z en el plano hiperbólico. Luego,

$$\inf_z \left\{ \sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz) \sinh\frac{1}{2}\rho(z, hz) \right\} \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right),$$

es decir,

$$P(g, h) \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right).$$

■

En el siguiente resultado se considera la cantidad $M(g, h)$ para un elemento elíptico y uno hiperbólico. La razón por la cual no se trabaja con $P(g, h)$ es que cuando alguna de las transformaciones g o h es elíptica, esta tendrá un punto fijo v , por lo que $\rho(v, gv) = 0$ o $\rho(v, hv) = 0$. De esta manera, el producto

$$\sinh\frac{1}{2}\rho(v, gv) \sinh\frac{1}{2}\rho(v, hv)$$

será igual a cero y, en consecuencia, $P(g, h) = 0$, lo cual no aporta información relevante.

Teorema 4.0.8 *Sea g una transformación hiperbólica y h una elíptica de orden q , ($q \geq 2$). Si $\langle g, h \rangle$ es discreto y no elemental, entonces*

$$M(g, h) \geq 1/\sqrt{8}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si g es un elemento hiperbólico no simple de $\langle g, h \rangle$, entonces se puede aplicar el inciso (4) del Teorema 4.0.1 para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \max\left\{ \sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz), \sinh\frac{1}{2}\rho(z, hz) \right\} &\geq \sinh\frac{1}{2}\rho(z, gz) \\ &\geq \sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right) \\ &\geq \left[\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \right]^{\frac{1}{2}} = 0.4717\dots \\ &> 0.3535\dots = 1/\sqrt{8}. \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$\inf_z \max \left\{ \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, gz), \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(z, hz) \right\} \geq 1/\sqrt{8},$$

es decir,

$$M(g, h) \geq 1/\sqrt{8}.$$

Supóngase ahora que g es un elemento hiperbólico simple. Se mostrará que en este caso el punto fijo v de la transformación elíptica h no puede ser un punto en A_g .

Caso 1. Si $v \in A_g$ y $q > 2$, al ser $h(v) = v$, la transformación h rotaría A_g en torno a su elemento interior v , dando origen a una imagen de A_g que se interseca en un punto con dicho eje. Específicamente sucedería

$$\{v\} = A_g \cap h(A_g),$$

contradiendo que g es simple.

Caso 2. Si $v \in A_g$ y $q = 2$, entonces h rota A_g en torno a v preservando dicho eje, pero intercambiando los puntos fijos de g . De esta manera, el grupo $\langle g, h \rangle$ preserva el conjunto de puntos fijos de g e inmediatamente se tiene que cualquier elemento f de $\langle g, h \rangle$ es tal que $f \in \langle g \rangle$ o $hf \in \langle g \rangle$. Lo anterior significa que $\langle g \rangle$ es un subgrupo de índice dos en $\langle g, h \rangle$. Puede demostrarse que si un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ tiene un subgrupo de índice finito, entonces sus conjuntos de puntos límites coinciden (cf. [6], pp. 91, 92). Así pues, en este contexto resulta

$$\mathbb{L}(\langle g, h \rangle) = \mathbb{L}(\langle g \rangle). \quad (4.8)$$

Por otra parte, se sabe que un subgrupo estabilizador discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ tiene a lo más dos puntos límites (cf. [6], p. 110). En este caso, $\langle g \rangle$ es un grupo estabilizador de los puntos fijos de g y, además, es discreto por ser discontinuo. Consecuentemente, $\langle g \rangle$ tiene a lo más dos puntos límites, es decir, es elemental. En virtud de (4.8) el grupo $\langle g, h \rangle$ sería también elemental, contradiciendo las hipótesis.

Lo anterior prueba que v debe estar fuera de A_g . Por ello, una rotación de A_g de ángulo $2\pi/q$ alrededor de v debe asignar a A_g una imagen ajena, la cual puede asumirse que es $h(A_g)$ (véase la Figura 4.12).

Si $q > 2$ puede construirse un pentágono como el de la Figura 4.12 y dividirse en los dos cuadriláteros mostrados. Al aplicar el inciso (ii) del Teorema

4.0.6 a uno de estos cuadriláteros se obtiene

$$\cosh \rho(v, A_g) \operatorname{sen}(\pi/q) = \cosh \frac{1}{2} \rho(A_g, hA_g),$$

además, ya que $\cosh(x) \geq \operatorname{senh}(x)$, resulta

$$\cosh \rho(v, A_g) \operatorname{sen}(\pi/q) \geq \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(A_g, hA_g).$$

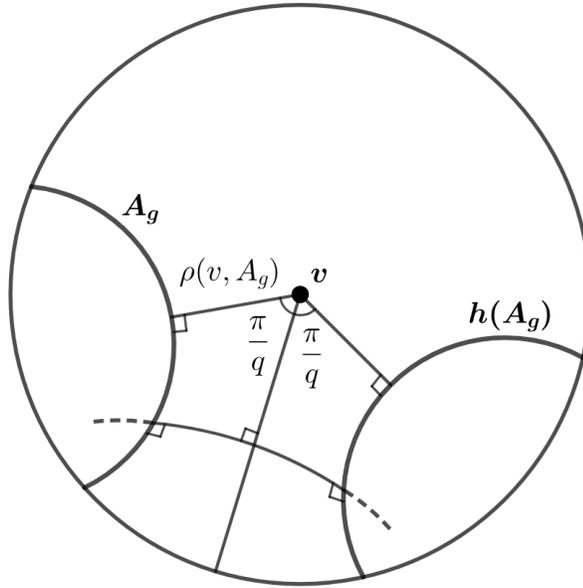


Figura 4.12: Rotación de A_g alrededor de v .

Por otra parte, del Corolario 4.0.5 (aplicado al grupo $\langle g, hgh^{-1} \rangle$) se sigue

$$\operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} T_g \right) \operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(A_g, hA_g) \geq \frac{1}{2}.$$

Así, las dos desigualdades anteriores dan como resultado

$$\cosh \rho(v, A_g) \operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} T_g \right) \geq \frac{1}{2}.$$

Si $q = 2$ no puede construirse el pentágono antes mencionado. Bajo esta situación v coincidiría con el punto medio de la geodésica ortogonal a A_g y

$h(A_g)$, de manera que

$$\frac{1}{2}\rho(A_g, hA_g) = \rho(v, A_g).$$

Luego,

$$\cosh \frac{1}{2}\rho(A_g, hA_g) = \cosh \rho(v, A_g),$$

por lo que

$$\cosh \rho(v, A_g) \geq \sinh \frac{1}{2}\rho(A_g, hA_g).$$

En consecuencia,

$$\sinh \left(\frac{1}{2}T_g \right) \cosh \rho(v, A_g) \geq \sinh \left(\frac{1}{2}T_g \right) \sinh \frac{1}{2}\rho(A_g, hA_g) \geq \frac{1}{2},$$

siendo esta última desigualdad consecuencia del Corolario 4.0.5 aplicado al grupo $\langle g, hgh^{-1} \rangle$. De esta manera, se tiene

$$\cosh \rho(v, A_g) \sinh \left(\frac{1}{2}T_g \right) \geq \frac{1}{2},$$

o equivalentemente (ya que $\sen(\pi/2) = 1$)

$$\cosh \rho(v, A_g) \sen(\pi/2) \sinh \left(\frac{1}{2}T_g \right) \geq \frac{1}{2}.$$

Lo anterior implica que para cualquier $q \geq 2$ se cumple

$$\cosh \rho(v, A_g) \sen(\pi/q) \sinh \left(\frac{1}{2}T_g \right) \geq \frac{1}{2}.$$

Obsérvese que esta última desigualdad expresa una restricción geométrica en términos de los parámetros T_g , $2\pi/q$ y la separación que hay entre h y g medida por $\rho(v, A_g)$. Por comodidad, se escribirá m en lugar de m_z , donde

$$m_z = \max\left\{ \sinh \frac{1}{2}\rho(z, gz), \sinh \frac{1}{2}\rho(z, hz) \right\}.$$

Es intuitivamente claro que

$$\rho(v, A_g) \leq \rho(v, z) + \rho(z, A_g)$$

para cualquier z en Δ . Formalmente, esto se cumple, pues $\rho(v, A_g)$ es la medida de la curva de menor longitud que va de v a A_g (la ortogonal a A_g que pasa por v), lo que significa que cualquier otra curva que una v con A_g tendrá mayor o igual longitud. En particular, esto sucederá para la curva $[v, z] \cup [z, w]$, siendo w el punto en el que A_g se interseca con la geodésica ortogonal a A_g por z .

Así, reescribiendo la última desigualdad obtenida se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \operatorname{cosh}\rho(v, A_g) \\ &\leq \operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \operatorname{cosh}[\rho(v, z) + \rho(z, A_g)]. \end{aligned}$$

Nótese que la expresión de la derecha puede, a su vez, escribirse como

$$\operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) [\operatorname{cosh}\rho(v, z)\operatorname{cosh}\rho(z, A_g) + \operatorname{senh}\rho(v, z)\operatorname{senh}\rho(z, A_g)]$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \operatorname{cosh}\rho(v, z)\operatorname{cosh}\rho(z, A_g) \\ &+ \operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \operatorname{senh}\rho(v, z)\operatorname{senh}\rho(z, A_g). \end{aligned}$$

Haciendo uso de la identidad $\operatorname{cosh}^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$ y del inciso (i) del Teorema 1.2.2, se obtiene la siguiente expresión equivalente para el primer sumando:

$$\operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}\rho(z, gz)\right) [1 + \operatorname{senh}^2\rho(v, z)]^{\frac{1}{2}},$$

que evidentemente es menor o igual que

$$\operatorname{sen}(\pi/q) m [1 + \operatorname{senh}^2\rho(v, z)]^{\frac{1}{2}}.$$

Mientras tanto, el segundo sumando es menor o igual que

$$\operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{2}T_g\right) \operatorname{senh}\rho(v, z)\operatorname{cosh}\rho(z, A_g),$$

lo cual, a su vez, es menor o igual que m^2 , ya que a consecuencia de los incisos (i) y (ii) del Teorema 1.2.2 se tiene

$$\cosh \rho(z, A_g) \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} T_g \right) = \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(z, gz) \right) \leq m$$

y

$$\operatorname{sen}(\pi/q) \operatorname{senh} \rho(v, z) = \operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(z, hz) \right) \leq m.$$

De lo obtenido en el párrafo anterior se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \operatorname{sen}(\pi/q) m [1 + \operatorname{senh}^2 \rho(v, z)]^{\frac{1}{2}} + m^2 \\ &= m [\operatorname{sen}^2(\pi/q) + \operatorname{sen}^2(\pi/q) \operatorname{senh}^2 \rho(v, z)]^{\frac{1}{2}} + m^2 \\ &\leq m [\operatorname{sen}^2(\pi/q) + m^2]^{\frac{1}{2}} + m^2 \\ &\leq m [1 + m^2]^{\frac{1}{2}} + m^2. \end{aligned}$$

Ahora, se puede asegurar que $m \geq 1/\sqrt{8}$, pues si se supone lo contrario sucede

$$\begin{aligned} m [1 + m^2]^{\frac{1}{2}} + m^2 &< \frac{1}{\sqrt{8}} \left[1 + \frac{1}{8} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\frac{9}{8} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\frac{3}{\sqrt{8}} \right] + \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

contradiendo la desigualdad previamente mostrada.

Al ser $1/\sqrt{8}$ una cota inferior para m , resulta que

$$\inf_z m \geq 1/\sqrt{8},$$

es decir,

$$M(g, h) \geq 1/\sqrt{8}.$$



Ahora, recolectando los resultados obtenidos en este capítulo y algunos otros que se prueban en [1] y con más detalle en [9], se puede finalmente establecer la cota inferior universal para $M(g, h)$ buscada.

Teorema 4.0.9 (Yamada) *Si g y h son transformaciones que generan un grupo discreto no elemental, entonces $M(g, h) \geq 0.1318\dots$ y esta cota inferior es alcanzada por dos generadores elípticos del grupo triangular con signatura $(0 : 2, 3, 7)$. Más específicamente:*

(i) *si g y h son parabólicas*

$$M(g, h) \geq \frac{1}{2};$$

(ii) *si g es parabólica y h hiperbólica*

$$M(g, h) \geq \frac{1}{2};$$

(iii) *si g es parabólica y h elíptica*

$$M(g, h) \geq \frac{1}{\sqrt{8}};$$

(iv) *si g y h son elípticas*

$$M(g, h) \geq 0.1318\dots;$$

(v) *si g y h son hiperbólicas*

$$M(g, h) \geq \left[\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \right]^{\frac{1}{2}};$$

(vi) *si g es hiperbólica y h elíptica*

$$M(g, h) \geq \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Primeramente, obsérvese que dado cualquier punto z en el plano hiperbólico se tiene

$$\left(\max\left\{\operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, gz), \operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, hz)\right\}\right)^2 \geq \operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, gz)\operatorname{senh}\frac{1}{2}\rho(z, hz).$$

Por lo que, si se toma el ínfimo sobre todos los puntos del plano, resulta de manera inmediata

$$M(g, h)^2 \geq P(g, h).$$

Ahora, en [9], pp. 18-20 y en [1], p. 309 se prueba que, bajo las hipótesis de este teorema, si g y h son parabólicas, o g es parabólica y h hiperbólica, entonces resulta que $P(g, h) \geq \frac{1}{4}$. De lo anterior se sigue $M(g, h)^2 \geq \frac{1}{4}$ y, por consiguiente,

$$M(g, h) \geq \frac{1}{2},$$

con lo cual quedan demostrados (i) y (ii).

Una prueba del inciso (iii) aparece en [1], pp. 310-313 y más detalladamente en [9], pp. 24-31. La demostración de (iv) también se encuentra en [1], pp. 313-316 y se ha tratado más minuciosamente en [9], pp. 35-40; además, se prueba que la cota inferior de 0.1318... es alcanzada por dos generadores elípticos del grupo triangular con signatura $(0 : 2, 3, 7)$.

Por otra parte, si g y h son hiperbólicas, del Teorema 4.0.7 resulta que $P(g, h) \geq \cos(3\pi/7)$, de donde

$$M(g, h)^2 \geq \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

y, por lo tanto,

$$M(g, h) \geq \left[\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Con esto queda demostrado (v).

Finalmente, si g es hiperbólica y h elíptica, el Teorema 4.0.8 asegura que

$$M(g, h) \geq \frac{1}{\sqrt{8}},$$

y (vi) queda demostrado. ■

Bibliografía

- [1] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [2] GARCÍA ANCONA, R. A., *Grupos fuchsianos finitamente generados y puntos de aproximación*, Tesis de maestría, UNAM, 2013.
- [3] GILMAN, J., *Two-generator discrete subgroups of $PSL(2, \mathbb{R})$* ; *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 117, No. 561, 1995.
- [4] HERNÁNDEZ CASTRO, A. E., *Regiones fundamentales localmente finitas para grupos Fuchsianos*; Tesis de licenciatura, UNAM, 2008.
- [5] KNAPP, A. W., *Doubly generated Fuchsian groups*; *Michigan Math. J.*, 15, 289-304 (1968).
- [6] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [7] MACLACHLAN, C. AND REID, A. W., *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 219, Springer Verlag, 2003.
- [8] MATELSKI, J. P., *The classification of discrete 2-generator subgroups of $PSL(2, \mathbb{R})$* ; *Israel Journal of Mathematics*, Vol. 42, No. 4, 309-317 (1982).
- [9] MEDINA ANGEL, A., *Algunas cotas universales para la función desplazamiento*; Tesis de licenciatura, UNAM, 2017.
- [10] NICOLÁS CARDONA, F. M., *Grupos Fuchsianos generados por tres involuciones*; Tesina de maestría, UNAM, 2016.

- [11] PURZITSKY, N., *All Two-Generator Fuchsian Groups*; Math. Z. 147, 87-92 (1976).
- [12] ROSENBERGER, G., *All generating pairs of all two-generator Fuchsian groups*; Arch. Math., Vol. 46, 198-204 (1986).
- [13] RUDIN, W., *Principios de análisis matemático*, McGraw-Hill, 1980.