



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

PROCESO ESTOCÁSTICO ASOCIADO A UNA  
PARTÍCULA BROWNIANA BAJO EL EFECTO  
DE UN POTENCIAL CONSERVATIVO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

SALVADOR DE JESÚS HERNÁNDEZ

TUTOR

DR. LUIS ANTONIO RINCÓN SOLÍS



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional durante los años que duró la licenciatura. Agradezco también a todos los profesores que tuve en mi estancia en la Facultad de Ciencias, quienes fomentaron y contribuyeron en mi formación profesional.

# Introducción

El movimiento browniano consiste en el movimiento irregular de pequeñas partículas suspendidas en un fluido. Las fluctuaciones estocásticas observadas en el movimiento browniano de una partícula, surgen del hecho de que las moléculas del fluido tienen posiciones y momentos aleatorios [2,3]. Una manera de modelar el movimiento aleatorio de una partícula browniana, es mediante cálculos directos a nivel de partícula, con el fin de obtener las fluctuaciones térmicas. El precio que se paga es el excesivo tiempo computacional, ya que la dinámica de cada molécula es más rápida que los tiempos de escala hidrodinámica [6]. Alternativamente, las fluctuaciones térmicas pueden incluirse en la ecuación de Navier-Stokes, introduciendo términos estocásticos en la fuerza, según lo propuesto por Landau y Lifshitz [7]. La idea básica para el tratamiento de las fluctuaciones en la hidrodinámica es que pueden generarse mediante la adición de un tensor de esfuerzo estocástico en el tensor usual de viscosidad. Se ha demostrado que este modelo proporciona resultados suficientemente buenos a escala molecular [5,9–13]. Otro modelo estocástico del movimiento browniano construye la trayectoria de partículas coloidales a partir de saltos independientes aleatorios de acuerdo con cierta probabilidad de transición. Por otro lado, el formalismo para la mecánica cuántica a través de la integral de trayectoria, introducido por Feynman en 1948 [15], el cual es ampliamente utilizado en la física teórica ya que proporciona un enfoque alternativo a los tratamientos existentes y es útil en el desarrollo de nuevas ideas y aproximaciones en la descripción de los fenómenos físicos [16], puede ser utilizado para proporcionar un procedimiento de cuantificación basado en la existencia de un lagrangiano para el sistema en cuestión. Dado que la integral de trayectoria está definida por una integral que considera una acción estacionaria, este procedi-

miento produce las ecuaciones clásicas de movimiento cuando  $\hbar$  tiende a cero [17]. En este sentido, es posible obtener una teoría que implique ecuaciones disipativas para un sistema cuántico; en particular, dicha teoría reproduce las ecuaciones clásicas del movimiento browniano en el límite apropiado [18,19]. Por otro lado, la ecuación de Langevin se ha utilizado como base para la teoría del movimiento browniano. Sin embargo, como sucede con cualquier otra ecuación fenomenológica, la ecuación de Langevin tiene un rango de validez limitado. De modo que es razonable usar las ecuaciones de Langevin cuando se tiene interés en el comportamiento a largo plazo del sistema. En este caso, no se necesita una descripción a nivel cuántico porque los efectos sobre las partículas macroscópicas en un fluido viscoso pueden explicarse por la teoría clásica [18]. La presente investigación se basa en el trabajo hecho en [1], el cual utiliza el enfoque de la integral de trayectoria de Feynman, para concluir que la acción clásica correspondiente al movimiento browniano, es la acción clásica asociada a una partícula libre en un contexto de mecánica clásica [16,20,21,17]. El objetivo de esta investigación es obtener el proceso estocástico asociado a una partícula browniana afectada por un potencial conservativo  $V(\mathbf{x})$ , de modo que el lagrangiano para este sistema es  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \epsilon V(\mathbf{x})$ . Donde  $\epsilon$  es una constante de acoplamiento y  $L_0$  es el lagrangiano asociado a una partícula libre, es decir, la energía cinética. Se utilizan los métodos de la integral de trayectoria para obtener una aproximación de la probabilidad de transición para un proceso estocástico. El problema se plantea de forma general para  $d$  dimensiones y los resultados que se obtienen pueden aplicarse para obtener aproximación a primer orden de las funciones de transición (íntimamente relacionadas con las probabilidades de transición) y de los momentos de las variables aleatorias asociadas al proceso estocástico que se obtiene. Esta investigación está pensada para ser leída tanto por un físico, como por un matemático. Los elementos de matemáticas y física utilizados para alcanzar el objetivo propuesto, se presentan antes de ser usados. Este trabajo está organizado de la siguiente manera: El primer capítulo se divide en dos secciones, en la primera de ellas se exponen los sistemas conservativos, el principio de Hamilton, el lagrangiano de un sistema y las ecuaciones de Lagrange. En la segunda sección se presentan, breve y formalmente los

elementos fundamentales de la teoría de la probabilidad. En el capítulo dos se definen los procesos estocásticos, los procesos de Markov y el movimiento browniano, desde la perspectiva de la probabilidad. En el tercer capítulo se ofrece un breve panorama de la integral de trayectoria de Feynman y con el uso de ella se concluye que el movimiento browniano tiene asociado el lagrangiano de una partícula libre. Con lo anterior como motivación, se obtienen las funciones de transición y los momentos de un proceso estocástico que surge del lagrangiano  $\mathcal{L}$ , presentado arriba. Finalmente, en el último capítulo, se aplican los resultados del capítulo tres a potenciales específicos.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>II</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Mecánica Clásica . . . . .	1
1.1.1. Sistemas Conservativos . . . . .	1
1.1.2. Métodos de Cálculo Variacional . . . . .	4
1.1.3. Principio de Hamilton y las Ecuaciones de Lagrange . . . . .	7
1.2. Teoría de la Probabilidad . . . . .	9
1.2.1. Fundamentos de la Probabilidad . . . . .	10
1.2.2. Integral de Lebesgue . . . . .	18
1.2.3. Esperanza . . . . .	20
1.2.4. Probabilidad Condicional . . . . .	22
<b>2. Procesos de Markov</b>	<b>25</b>
2.1. Procesos Estocásticos . . . . .	25
2.2. Filtraciones y Procesos de Markov . . . . .	26
2.3. Movimiento Browniano . . . . .	30
<b>3. Proceso estocástico asociado a un Lagrangiano</b>	<b>35</b>
3.1. Integral de trayectoria de Feynman . . . . .	35
3.2. Lagrangiano asociado al Movimiento Browniano . . . . .	37

3.3. Proceso Estocástico asociado a una partícula que se mueve en un potencial conservativo . . . . .	40
3.4. Condiciones de Normalización para $P_V$ . . . . .	43
3.5. Función Generadora de Momentos . . . . .	45
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>47</b>
4.1. Potencial Lineal $V(x) = \kappa x$ . . . . .	47
4.2. Potencial $V(x) = \kappa x^2$ . . . . .	49
4.3. Potencial $V(x) = \lambda_1 \exp \{ \lambda_2 x \}$ . . . . .	51
<b>5. Conclusiones</b>	<b>53</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

Este capítulo está enfocado en presentar los elementos pertinentes de Mecánica Clásica y Teoría de la Probabilidad necesarios para el desarrollo de esta de investigación, la cual, como se mencionó en la introducción, se basa en [1] y tiene como principal objetivo obtener el proceso estocástico que surge del movimiento de una partícula browniana perturbada por una fuerza conservativa. El capítulo se divide en dos secciones. La primera de ellas inicia con la exposición de los sistemas conservativos, luego se presentan, sucintamente, los elementos más básicos del cálculo variacional con el fin de enunciar el Principio de Hamilton, lo que a su vez conlleva a definir el Lagrangiano de un sistema, concepto que es de gran relevancia en capítulos posteriores. En la segunda sección se ofrece un breve panorama de los conceptos elementales de la teoría de la probabilidad, con el fin de poder definir más adelante los procesos de Markov y el movimiento browniano.

### 1.1. Mecánica Clásica

#### 1.1.1. Sistemas Conservativos

La mecánica clásica ofrece una descripción precisa y consistente de la dinámica de partículas y sistemas de éstas, es decir, un conjunto de leyes físicas que matemáticamente describen el movimiento de cuerpos y partículas. Para lograrlo, se necesitan

conceptos fundamentales, tales como distancia y tiempo. Con lo anterior se define la velocidad y la aceleración de una partícula. La masa, otro concepto fundamental, requiere una mayor elaboración. En este trabajo se da por hecho que dichos conceptos se conocen, pues no es relevante para los fines que se persiguen abundar en los conceptos más fundamentales de la mecánica.

Considérese una partícula con masa  $m$  que tiene posición dada por el vector  $\mathbf{r}(t)$ . La velocidad  $\mathbf{v}(t)$  y el momento lineal  $\mathbf{p}(t)$  de la partícula se definen como

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \quad \mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t). \quad (1.1.1)$$

Si  $\mathbf{F}$  representa la fuerza neta sobre la partícula, entonces, la segunda ley de Newton afirma que

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}. \quad (1.1.2)$$

El trabajo hecho por una fuerza externa  $\mathbf{F}$  sobre una partícula que la lleva desde una posición 1 hasta una posición 2, se define como

$$W_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}(t). \quad (1.1.3)$$

Si la masa de la partícula es constante se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} W_{1,2} &= \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}(t) = \int_1^2 m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \int_1^2 m d\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int_1^2 \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt = \int_1^2 \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \\ &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \end{aligned}$$

donde  $v^2(t) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ , y  $v_1, v_2$  denotan los módulos de las velocidades en las posiciones 1 y 2 respectivamente. La cantidad escalar  $T = \frac{mv^2}{2}$  se conoce como la *Energía Cinética* de la partícula. Por lo anterior

$$W_{1,2} = T_2 - T_1. \quad (1.1.4)$$

En muchos problemas físicos la fuerza  $\mathbf{F}$  tiene la propiedad de que el trabajo que se requiere para mover a una partícula desde una posición dada a cualquier otra, depende únicamente de las posiciones iniciales y finales y no de la trayectoria que se sigue para relizar dicho movimiento, en cuyo caso se dice que la fuerza es *conservativa* y el sistema en cuestión se denomina *sistema conservativo*. De modo que si  $\mathbf{F}$  es conservativa y se realiza un trabajo para mover a una partícula desde la posición 1 a la posición 2, por cualquier trayectoria, y luego se realiza un trabajo para regresar a la partícula desde la posición 2 a la posición 1 por un camino diferente, entonces, es claro que se ha hecho un trabajo sobre un camino cerrado que cumple

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.1.5)$$

Por el Teorema 7, sección 8.3 de [27], se tiene que una condición necesaria y suficiente para que el trabajo  $W_{1,2}$  sea independiente de la trayectoria, es que la fuerza sea el gradiente de una función escalar  $-V(\mathbf{r})$ , que depende de la posición  $\mathbf{r}(t)$  de la partícula, es decir,

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (1.1.6)$$

A la función  $V(\mathbf{r})$  se le llama *Potencial* o *Energía Potencial*. Es claro que a la función  $V(\mathbf{r})$  se le puede agregar cualquier constante, sin que ello afecte el valor de la fuerza. Por lo anterior, se dice que el nivel cero del potencial es arbitrario. El trabajo realizado en este caso es el siguiente.

$$W_{1,2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \nabla V(r) \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 dV(\mathbf{r}) = V_1 - V_2. \quad (1.1.7)$$

Donde  $V_1, V_2$  representan el valor de la energía potencial en las posiciones 1 y 2 respectivamente. Por lo tanto, cuando únicamente una fuerza conservativa actúa sobre una partícula, se tiene que

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2. \quad (1.1.8)$$

En consecuencia,

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2. \quad (1.1.9)$$

La cantidad  $T + V$  se conoce como energía del sistema y para sistemas conservativos la cantidad  $T + V$  se conserva. Lo que se conoce como el *Principio de Conservación de la Energía*.

### 1.1.2. Métodos de Cálculo Variacional

Muchos problemas en la mecánica Newtoniana son en ocasiones analizados más fácilmente mediante postulados alternativos a las leyes de Newton. Entre ellos destacan por su importancia y utilidad, el Principio de Hamilton y las ecuaciones de Lagrange. Para poder presentar formalmente dichas técnicas se necesita un preludio a los principios generales del Cálculo Variacional. La exposición que en seguida se ofrece, se enfoca en aquellos aspectos del cálculo variacional que tienen una aplicación directa a los sistemas físicos clásicos. El principal interés está en determinar la trayectoria que da soluciones extremas a cierto funcional. Un ejemplo clásico en física del uso de los principios variacionales se encuentra en el Principio de Fermat.

El problema básico del cálculo variacional es determinar la función  $y(x)$  tal que el funcional  $J$ , dado por

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x); x) dx. \quad (1.1.10)$$

es un extremo, es decir, es un máximo o un mínimo. El funcional  $J$  es función de  $y(x), y'(x), x$ . La función  $y(x)$  debe variarse hasta encontrar un valor extremo de  $J$ . Si por ejemplo,  $y = y(x)$  es tal que  $J$  toma un valor mínimo, entonces, cualquier función vecina, no importa que tan cerca de  $y(x)$  esté, debe ser tal que  $J$  crezca. Por una función vecina de  $y(x)$  debe entenderse una función de la forma  $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$ , donde  $\eta(x)$  es una función de  $x$ , continua, diferenciable y tal que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  y  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Si únicamente se consideran funciones de la forma  $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$ ,

donde  $y(x)$  hace que  $J$  sea un extremo, entonces

$$J = J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x) dx. \quad (1.1.11)$$

La condición de que la integral tiene un valor estacionario, es decir, un valor extremo, se traduce en que  $J$  es independiente de  $\alpha$  a primer orden a lo largo de la trayectoria que hace que  $J$  sea un extremo. Lo anterior se puede escribir como

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (1.1.12)$$

y es válido para todas las funciones  $\eta(x)$ . Como los límites de la integral que aparece en  $J$  están fijos se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(y(\alpha, x), y'(\alpha, x); x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx. \end{aligned}$$

Por la forma de las funciones  $y(\alpha, x)$  se tiene que

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x), \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx}. \quad (1.1.13)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} \right) dx. \quad (1.1.14)$$

Nótese que el segundo miembro de la última integral puede integrarse por partes

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx. \quad (1.1.15)$$

Dado que  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  se tiene que el primer miembro de lado derecho de la igualdad anterior es cero. Usando la última igualdad, se tiene que

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right) dx \quad (1.1.16)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) dx. \quad (1.1.17)$$

Como  $\frac{\partial J}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = 0$  para valores extremos y la función  $\eta(x)$  es arbitraria, la integral anterior se anula cuando  $\alpha = 0$ , en consecuencia

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \quad (1.1.18)$$

Nótese que las funciones  $y$  y  $y'$ , que aparecen en la igualdad de arriba, son las funciones que hacen que  $J$  tenga un valor extremo, las cuales, además, son independientes de  $\alpha$ . De modo que la última igualdad es una condición necesaria para que el funcional  $J$  tenga un valor extremo. Y dicha ecuación se conoce como Ecuación de Euler.

En análisis que requieren del cálculo variacional se usa una notación que representa la variación. Nótese que la ecuación (1.1.17) puede reescribirse de la siguiente forma.

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx d\alpha. \quad (1.1.19)$$

Y a su vez, la igualdad anterior puede reescribirse del siguiente modo.

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx, \quad (1.1.20)$$

donde

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \delta J, \quad (1.1.21)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha = \delta y. \quad (1.1.22)$$

En consecuencia, la condición para que  $J$  tenga un extremo, con la nueva notación se escribe como

$$\delta J = 0. \tag{1.1.23}$$

Aunque la notación  $\delta$  se usa frecuentemente, es importante darse cuenta que sólo es una representación de las diferenciales de otras cantidades.

### 1.1.3. Principio de Hamilton y las Ecuaciones de Lagrange

La experiencia ha mostrado que el movimiento de una partícula, medido desde un marco de referencia inercial, está correctamente descrito por la segunda ley de Newton. Si la partícula no está obligada a moverse en forma complicada y se utilizan coordenadas rectangulares para describir el movimiento, entonces, las ecuaciones de movimiento suelen ser relativamente simples. Pero si, por ejemplo, una partícula se mueve sobre la superficie de una esfera y el movimiento que realiza se describe en coordenadas rectangulares, la expresión que toma la aceleración es bastante complicada y difícil de tratar. Siempre que una partícula está restringida a moverse sobre una superficie debe existir algún tipo de fuerza que la mantenga sobre dicha superficie. En ocasiones, puede ser muy difícil o quizá imposible obtener expresiones explícitas para las fuerzas de restricción. Y dado que la descripción del movimiento, cuando se utiliza la mecánica de Newton, se obtiene del conocimiento de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula, debe buscarse algún método alternativo cuando no es posible obtener expresiones explícitas para las fuerzas. Lo anterior no implica que deba buscarse una nueva teoría de la mecánica, sino únicamente métodos alternativos. Tales métodos pueden encontrarse en el Principio de Hamilton, del cual emergen las ecuaciones de movimiento Lagrange. Si dichas ecuaciones son adecuadas para describir la dinámica de una partícula, entonces deben ser equivalentes a las ecuaciones de Newton. El Principio de Hamilton es uno de los principios físicos más elegantes y ampliamente buscados por los físicos desde hace siglos y dado el alcance de aplicación

que posee, no es descabellado afirmar que es más fundamental que las ecuaciones de Newton. A continuación se postula el principio de Hamilton, luego las ecuaciones de Lagrange y después se prueba su equivalencia con las ecuaciones de Newton. En esta investigación sólo se exploran sistemas conservativos, de modo que las ecuaciones de Lagrange que se presentan no contienen efectos disipativos.

**Principio de Hamilton:** *De entre todas las trayectorias posibles en que un sistema dinámico puede moverse de un punto a otro en un intervalo de tiempo específico, lo hace sobre la trayectoria que minimiza la integral de la diferencia de la energía cinética y potencial.*

En términos de cálculo variacional, el principio de Hamilton se convierte en:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (1.1.24)$$

La afirmación variacional del principio requiere únicamente que la integral de  $T - U$  sea un extremo, no necesariamente un mínimo. Pero en casi todas las aplicaciones importantes en dinámica sucede que es un mínimo. Si se supone que la partícula se mueve en un campo de fuerza conservativo, entonces la energía potencial  $U = U(\mathbf{x})$  y la energía cinética  $T = T(\mathbf{x}')$ . A la diferencia entre  $T$  y  $U$  se le conoce como *Lagrangiano* y se denota como  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = T(\mathbf{x}') - U(\mathbf{x})$ . De modo que el principio de Hamilton en terminos del Lagrangiano se escribe como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dt = 0. \quad (1.1.25)$$

Si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  y  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  se tiene que las *Ecuaciones de Lagrange*, las cuales describen el movimiento de la partículas, son las ecuaciones de Euler presentadas previamente.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.26)$$

Como ya se mencionó, la formulación Lagrangiana y Newtoniana de la mecánica son formas equivalentes. El punto de vista es diferente pero el contenido es el mismo. Teniendo en cuenta que se está trabajando con un sistema conservativo, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x'_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.27)$$

Como  $\mathcal{L} = T(\mathbf{x}') - U(\mathbf{x})$ , las ecuaciones de Lagrange se reescriben del siguiente modo:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.28)$$

Dado que

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.29)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( \frac{m(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}')}{2} \right) = \frac{d}{dt} (mx'_i) = p'_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.30)$$

Por lo tanto:

$$F_i = p'_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.31)$$

Lo anterior no es otra cosa que las ecuaciones de Newton.

## 1.2. Teoría de la Probabilidad

La teoría de la probabilidad es la rama de las matemáticas que estudia modelos de fenómenos aleatorios. Al final del Siglo XIX, la teoría de la probabilidad consistía de métodos sofisticados para resolver problemas en los que se involucraban *eventos igualmente probables* y teoremas importantes sobre sumas de *variables aleatorias independientes*. Sin embargo, no había una definición precisa de probabilidad que permitiera dar un marco general de estudio. En 1900 se celebró en París el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, en donde David Hilbert (1862-1943) presentó una conferencia describiendo 23 problemas (los llamados Problemas de Hilbert) en

los que a su parecer, la comunidad matemática de inicios del Siglo XX debería poner su atención. El problema seis menciona: “Las investigaciones sobre los fundamentos de la geometría sugieren el problema de considerar de la misma manera, mediante axiomas, aquellas ciencias físicas en donde la matemática juega un papel importante, en primer lugar la teoría de la probabilidad y la mecánica”. Hilbert describía a la probabilidad como una ciencia física. La idea de Hilbert refleja tanto el progreso de la mecánica estadística, en donde la probabilidad juega un papel importante, así como el estado de la probabilidad en aquellos tiempos, no aceptada como una rama pura de las matemáticas, debido, entre otras cosas, a que no se contaba con una definición precisa de probabilidad. Los fundamentos de la teoría moderna de la probabilidad se basan en el desarrollo de la teoría de conjuntos de George Cantor (1845-1918), los avances en la teoría de la medida e integración de finales del Siglo XIX, en los trabajos de Borel, en las aportaciones de Lebesgue y de especial importancia fueron los trabajos realizados por Johann Radon (1887-1956). En el contexto de espacios abstractos, el trabajo realizado por Otton Nikodym (1887-1956), Constantin Charatheidory (1873-1950) y Maurice Fréchet (1878-1973), son igualmente importantes. Su reconocimiento como una rama bien establecida de las matemáticas fue un proceso largo y su posición dentro de las mismas se debe en gran parte a el *Ars Conjectandi* de Jacobo Bernoulli, publicado en 1713 y *Los Fundamentos de Probabilidad* de Andreí Kolmogorov, publicado en 1933, donde además se dio solución al problema seis de Hilbert.

### 1.2.1. Fundamentos de la Probabilidad

La teoría de la probabilidad, en la investigación presente, es uno de los ejes principales de desarrollo, así que a continuación se presentan de manera breve aquellos conceptos y resultados que son de utilidad para el desarrollo de este trabajo.

**Definición 1.2.1.**

Un *Espacio Muestral*, en un experimento aleatorio, es un conjunto  $\Omega$  distinto del vacío en el que se agrupan todos los posibles resultados del experimento aleatorio.

Usualmente el interés está en subconjuntos de  $\Omega$  a los cuales se les pueda asignar una *Probabilidad*, a dichos subconjuntos se les conoce como *Eventos* y son elementos de una estructura que se conoce como  $\sigma$ -álgebra.

**Definición 1.2.2.**

Sea  $\Omega$  un conjunto distinto del vacío. Se dice que  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$  si cumple lo siguiente:

- a)  $\Omega \in \mathcal{F}$ .
- b) Si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces,  $A^c \in \mathcal{F}$ .
- c) Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , entonces,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

A la pareja  $(\Omega, \mathcal{F})$  se le conoce como *Espacio Medible*.

Considérese un conjunto no vacío  $\mathcal{C}$  formado por subconjuntos de  $\Omega$ . Si se toma la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}$  que contiene a  $\mathcal{C}$ , el resultado es otra  $\sigma$ -álgebra, que se denota como  $\sigma(\mathcal{C})$  y se denomina como la *mínima  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$* .

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F} \}. \quad (1.2.1)$$

Cuando el espacio muestral  $\Omega$  es tal que  $\Omega \subseteq \mathbf{R}$ , es común trabajar con una  $\sigma$ -álgebra muy particular, generada por todos los intervalos abiertos en  $\mathbf{R}$ . Dicha  $\sigma$ -álgebra se conoce como la  *$\sigma$ -álgebra de Borel* y se denota como  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ .

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma\{(a, b) \subseteq \mathbf{R} : a < b\}. \quad (1.2.2)$$

A los elementos de  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  se les llama *Borelianos*. Por otra parte, si  $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ , se tiene

que la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbf{R}^n$  está definida como

$$\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma\{\mathcal{B}(\mathbf{R}) \times \cdots \times \mathcal{B}(\mathbf{R})\}. \quad (1.2.3)$$

A menudo se consideran sucesiones de eventos y la noción de convergencia surge por sí solo. A continuación se presentan dos conjuntos, los cuales aparecen muy frecuentemente en el estudio de la teoría de la probabilidad y sirven para definir la convergencia de una sucesión de eventos.

**Definición 1.2.3.**

Sea  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de elementos de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ . Se definen el límite superior e inferior como sigue

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.2.4)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.2.5)$$

Tanto el límite superior como el límite inferior siempre existen, son únicos y además son elementos de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ . No es muy difícil verificar que un elemento pertenece al límite superior si y sólo si, pertenece a una infinidad de elementos de la sucesión. Análogamente, un elemento pertenece al límite inferior si y sólo si, pertenece a todos los elementos de la sucesión excepto un número finito de ellos. Con base en la definición anterior se puede establecer la definición de convergencia de una sucesión de eventos.

**Definición 1.2.4.**

Sea  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de eventos. Se dice que la sucesión converge al conjunto  $A$  si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = A. \quad (1.2.6)$$

Lo anterior se denota como  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ .

Una vez definido el concepto de  $\sigma$ -álgebra y el de sucesión de eventos, el concepto de *Medida de Probabilidad* puede presentarse.

**Definición 1.2.5.**

Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible. Una función  $\mathbf{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  se llama *Medida de Probabilidad* si satisface los siguiente:

- a)  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ .
- b) Para todo  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{P}(A) \geq 0$ .
- c) Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  son tales que  $A_n \cap A_m = \emptyset$  para  $m \neq n$ , entonces,
 
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

La terna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  se conoce como *Espacio de Probabilidad* y es uno de los conceptos más fundamentales de la teoría de la probabilidad. Existen varias propiedades que cumple la medida de probabilidad, muchas de ellas se siguen fácilmente de la definición y de entre todas ellas destacan aquellas que involucran la noción de continuidad, las cuales se presentan a continuación, cuya demostración puede consultarse en [25] Teorema 10.2.

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad. Sea  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de eventos de  $\mathcal{F}$ .*

- a) *Si la sucesión es no decreciente, es decir,  $A_n \subseteq A_{n+1}$  para todo  $n \geq 1$ , entonces*

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n).$$

- b) *Si la sucesión es no creciente, es decir,  $A_{n+1} \subseteq A_n$  para todo  $n \geq 1$ , entonces*

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n).$$

c) Si la sucesión converge a un conjunto  $A$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A).$$

Otro de los conceptos fundamentales en la teoría de la probabilidad es el de *Variable Aleatoria* el cual se define a continuación.

**Definición 1.2.6.**

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad. Una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  se dice que es una variable aleatoria si para todo  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  se tiene que  $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ .

La notación  $X^{-1}(A)$  denota la imagen inversa del conjunto  $A$ . En la teoría de la medida, una función que satisface la condición anterior se dice que es *Medible* respecto de las  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ . Lo que a menudo se denota como  $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbf{R})$ . Dada un variable aleatoria  $X$  definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , se puede definir una nueva medida de probabilidad en el espacio medible  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ . Si  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  y se define  $\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B))$ , entonces, es fácil verificar que  $\mathbf{P}_X$  es una medida de probabilidad y se le conoce como *Medida inducida por la variable aleatoria  $X$* . Cuando se usa la medida inducida es común denotar a los elementos  $X^{-1}(B)$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  como  $(X \in B)$ . Cuando el conjunto  $B$  toma una de las siguientes formas  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(-\infty, x)$ ,  $(x, \infty)$ , donde  $x \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ , es común denotarlos como  $(a < X < b)$ ,  $(a < X \leq b)$ ,  $(X < x)$ ,  $(X > x)$  respectivamente. Hay variantes de lo anterior, pero con estos ejemplos se intuyen fácilmente los diferentes casos. El concepto de variable aleatoria puede extenderse a varias dimensiones, en cuyo caso, es común referirse a tal objeto como *Vector Aleatorio*.

**Definición 1.2.7.**

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad. Una función  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$  se dice que es un vector aleatorio si para todo  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$  se tiene que  $\mathbf{X}^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ .

Dado que el vector  $\mathbf{X}$  está en  $\mathbf{R}^n$ , se tiene que  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , donde  $X_i :$

$\Omega \rightarrow \mathbf{R}^n, i = 1, \dots, n$ . Con base en la definición anterior se puede probar que  $\mathbf{X}$  es un vector aleatorio, si y sólo si,  $X_i$  es una variable aleatoria,  $i = 1, \dots, n$ . De la misma manera en que una variable aleatoria unidimensional induce una medida, un vector aleatorio  $\mathbf{X}$  definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  induce una medida en el espacio medible  $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$ . Si  $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ , entonces la función definida como  $\mathbf{P}_{\mathbf{X}} = \mathbf{P}(\mathbf{X}^{-1}(B))$  es una medida de probabilidad sobre el espacio  $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$ . A la imagen inversa de los borelianos en  $\mathbf{R}^n$  de la forma  $((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n))$ , se les denotan como  $(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ . A continuación se presenta una  $\sigma$ -álgebra relevante asociada a una variable aleatoria.

**Definición 1.2.8.**

Sean los espacios medibles  $(\Omega, \mathcal{F}), (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  y la variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , se denota por  $\sigma(X)$  a la mínima  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  respecto a la cual  $X$  es medible. Donde

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}. \quad (1.2.7)$$

Ya se mencionó que una variable aleatoria  $X$  induce una medida de probabilidad  $\mathbf{P}_X$  definida en el espacio medible  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ , la cual se conoce como *Función de Distribución* de la variable aleatoria  $X$ .

**Definición 1.2.9.**

La función de distribución  $F : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$  de una variable aleatoria  $X$  se define como

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x). \quad (1.2.8)$$

La importancia de la función de distribución de una variable aleatoria  $X$ , es que contiene toda la información de ésta y de la medida de probabilidad que tiene asociada. Las propiedades más representativas de una función de distribución son las siguientes.

**Proposición 1.2.2.** *Sea  $F$  una función de distribución, entonces*

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ .
- c) *Es no decreciente.*
- d) *Es continua por la derecha.*

Un resultado importante, que requiere de conceptos más elaborados de teoría de la medida, es que dada cualquier función de distribución  $F$ , existe un espacio de probabilidad y una variable aleatoria cuya función de distribución es  $F$ . Si la función de distribución  $F$  de una variable aleatoria  $X$ , es continua, se dice que la variable aleatoria  $X$  es continua. Si además, existe una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$  cuya integral sobre todo  $\mathbf{R}$  es igual a uno y  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ , entonces, se dice que  $X$  es *Absolutamente Continua*. A la función  $f$  se le llama *Función de Densidad* de  $X$ .

Los vectores aleatorios inducen una medida de probabilidad, a la cual se le conoce como *Función de Distribución Conjunta*.

**Definición 1.2.10.**

Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un vector aleatorio definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . La función de distribución conjunta  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , asociada a  $\mathbf{X}$  se define como

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(\mathbf{X}^{-1}((-\infty, x_1) \times \dots \times (-\infty, x_n))) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n). \quad (1.2.9)$$

Si el vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  tiene función de distribución conjunta  $F(x_1, \dots, x_n)$  y existe una función  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  integrable, tal que para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  se cumple que  $F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_1$ , entonces, se dice que  $X$  es absolutamente continuo y a la función  $f$  se le conoce como *Densidad Conjunta*. Dado que las entradas de un vector aleatorio son variables aleatoria unidimensionales, es posible obtener la función de distribución de cualquiera de

dichas variables, a partir de la distribución conjunta.

**Definición 1.2.11.**

Sea  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  un vector aleatorio con función de distribución conjunta  $F(x_1, \dots, x_n)$ .

A la función

$$\lim_{\substack{x_j \rightarrow \infty \\ j \neq i}} F(x_1, \dots, x_n) = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2.10)$$

se le conoce como la *Función Marginal* de la variable aleatoria  $X_i$ , la cual, además, coincide con su función de distribución.

La probabilidad, en un sentido muy restrictivo, es una rama de la teoría de la medida, lo cual no impide que sea rica en resultados y estructura, muchos de ellos deben su origen al concepto de *Independencia*, cuyo esplendor se aprecia enfocando a la probabilidad como rama de la teoría de la medida.

**Definición 1.2.12.**

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad. Se dice que los eventos  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  son independientes si para todo  $\{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , se tiene que

$$\mathbf{P} \left( \bigcap_{i=1}^k A_{j_i} \right) = \prod_{i=1}^k \mathbf{P}(A_{j_i}). \quad (1.2.11)$$

Con la noción de independencia de eventos se puede definir la independencia de clases de eventos.

**Definición 1.2.13.**

Sean las clases de eventos  $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Se dice que las clases  $\mathcal{C}_i$  son independientes, si para toda colección de eventos  $A_1, \dots, A_n$ , donde  $A_i \in \mathcal{C}_i$ , se tiene que los eventos  $A_i$  son independientes.

La definición anterior puede hacerse aún más general del siguiente modo.

**Definición 1.2.14.**

Sea  $T$  un conjunto arbitrario de índices. Se dice que las clase  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in T}$  son independientes, si para todo subconjunto  $I \subset T$ , se tiene que las clase  $\mathcal{C}_i$ ,  $i \in I$ , son independientes.

Con base en las definiciones anteriores se establece el concepto de independencia de variables aleatorias, el cual es mucho más útil que los anteriores.

**Definición 1.2.15.**

Sea  $\{X_t\}_{t \in T}$  una familia de variables aleatorias, donde  $T$  es un conjunto de índices arbitrario. Se dice que las variables aleatorias  $X_t$ ,  $t \in T$ , son independientes si  $\{\sigma(X_t)\}_{t \in T}$  son independientes.

En la práctica no es común que la independencia de variables aleatorias se verifique a través de la definición anterior. El siguiente criterio es en ocasiones más sencillo, el cual se enuncia a continuación.

**Proposición 1.2.3.** Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias con función de distribución conjunta  $F$ . Si  $F_i$  denota la función de distribución de la variable aleatoria  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Entonces, las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  son independientes si y sólo si

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i). \quad (1.2.12)$$

En [25] sección 20, puede hallarse una demostración de lo anterior. El siguiente concepto fundamental es el de *Esperanza* de una variable aleatoria, el cual, para ser presentado requiere del concepto de *Integral de Lebesgue*, mismo que se expone brevemente a continuación.

**1.2.2. Integral de Lebesgue**

La teoría de la medida estudia, entre otras cosas, el concepto de integral de una función con respecto de una medida, conocida como integral de Lebesgue. La proba-

bilidad es una medida, de modo que se puede definir la integral con respecto a ésta. La construcción de la integral de Lebesgue se define primero para *Funciones Simples No Negativas Medibles*, luego, se define para funciones medibles no negativas y después para funciones medibles.

**Definición 1.2.16.**

Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible. Sean  $c_i \in \mathbf{R}^+$ ,  $A_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, \dots, k$  donde  $\Omega = \bigcup_{i=1}^k A_i$ .

Se dice que la función  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^+$  es simple no negativa medible si

$$f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{A_i}. \quad (1.2.13)$$

Con esta primera definición se define la integral de Lebesgue.

**Definición 1.2.17.**

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad. Si  $f = f(x) = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}_{A_i}$  es simple no negativa medible, se define la integral de  $f$  con respecto a la medida de probabilidad  $\mathbf{P}$  como

$$\int_{\Omega} f d\mathbf{P} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{P}(A_i). \quad (1.2.14)$$

Una vez definido la integral de una función simple no negativa medible, se puede definir la integral de una función medible no negativa como sigue.

**Definición 1.2.18.**

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^+$  una función medible. Se define la integral de  $f$  con respecto a la medida de probabilidad  $\mathbf{P}$  como

$$\int_{\Omega} f d\mathbf{P} = \sup \left\{ \int_{\Omega} \phi d\mathbf{P} : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ función simple no negativa medible.} \right\} \quad (1.2.15)$$

El caso de una función medible que puede tomar tanto valores negativos como positivos, se define con base en las definiciones anteriores. Antes, nótese que cualquier

función  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , puede escribirse como

$$f(x) = f(x)\mathbf{1}_{\{x:f(x)\geq 0\}} + f(x)\mathbf{1}_{\{x:f(x)< 0\}}. \quad (1.2.16)$$

Si se definen las siguientes funciones  $f^+ = f(x)\mathbf{1}_{\{x:f(x)\geq 0\}}$  y  $f^- = -f(x)\mathbf{1}_{\{x:f(x)< 0\}}$ , entonces, toda función  $f$  se descompone como la diferencia de dos funciones no negativas.

$$f = f^+ - f^-. \quad (1.2.17)$$

Si la función  $f$  es medible, entonces,  $f^+$  y  $f^-$  también lo son. Si además se cumple que

$$\int f^+ d\mathbf{P} < \infty \quad \text{y} \quad \int f^- d\mathbf{P} < \infty. \quad (1.2.18)$$

Entonces, se dice que la función medible  $f$  es *Integrable con respecto a la medida de probabilidad  $\mathbf{P}$* . La integral de Lebesgue cumple las siguientes propiedades.

**Proposición 1.2.4.** *Sea  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  funciones medible e integrables con respecto a  $\mathbf{P}$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , entonces:*

1.  $\int_{\Omega} (af + bg) d\mathbf{P} = a \int_{\Omega} f d\mathbf{P} + b \int_{\Omega} g d\mathbf{P}$ .
2. Si  $f \leq g$ , entonces  $\int_{\Omega} f d\mathbf{P} \leq \int_{\Omega} g d\mathbf{P}$ .
3.  $f$  es integrable, si y sólo si,  $|f|$  es integrable. Y se cumple  $|\int_{\Omega} f d\mathbf{P}| \leq \int_{\Omega} |f| d\mathbf{P}$ .

La demostración de las dos primeras propiedades se basa en un famoso resultado, conocido como *Teorema de Convergencia Monótona*. La tercera propiedad se basa en la segunda y en la desigualdad del triángulo. La demostración puede consultarse en [25] Teorema 16.1.

### 1.2.3. Esperanza

La breve exposición anterior permite presentar el concepto de esperanza, el cual se define a continuación.

**Definición 1.2.19.**

Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad,  $X$  una variable aleatoria cuya función de distribución es  $F(x) = \mathbf{P}(X^{-1} \leq x)$ . Se define la esperanza de  $X$ , la cual se denota como  $\mathbf{E}(X)$ , del siguiente modo

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbf{P}. \quad (1.2.19)$$

El Teorema 16.17 de [25] permite calcular la esperanza de una variable aleatoria  $X$  haciendo uso de la medida inducida por ésta, es decir, su función de distribución. Dicho resultado, afirma lo siguiente:

**Teorema 1.2.1.** *Sean los espacios medibles  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  y sea la variable aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , con función de distribución  $F(x) = \mathbf{P}(X^{-1} \leq x)$ . Entonces*

$$\int_{\Omega} X d\mathbf{P} = \int_{\mathbf{R}} x d\mathbf{P}(X^{-1} \leq x) = \int_{\mathbf{R}} x dF(x). \quad (1.2.20)$$

De acuerdo al resultado anterior, la esperanza de una variable aleatoria  $X$  con función de distribución  $F$ , puede calcularse como

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbf{R}} x dF(x). \quad (1.2.21)$$

Si la variable aleatoria es absolutamente continua y su función de densidad es  $f$ , se tiene que

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbf{R}} x f(x) dx. \quad (1.2.22)$$

Considérese una variable aleatoria  $X$  con función de distribución  $F_X$  y a una función  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  medible con respecto a  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ . No es difícil ver que  $g(X)$  es una variable aleatoria y como tal tiene asociada una función de distribución  $F_{g(X)}$ . Existe un resultado que afirma que si  $\mathbf{E}(g(X)) < \infty$ , entonces,  $\mathbf{E}(g(X)) = \int_{\mathbf{R}} g(x) dF_{g(x)} = \int_{\mathbf{R}} g(x) dF_X(x)$ . La función  $g(x) = x^n$  donde  $n$  es un natural, ciertamente cumple las condiciones anteriores.

**Definición 1.2.20.**

Si  $n$  es un número natural y  $X$  es una variable aleatoria con función de distribución  $F_X$ , al número  $\mathbf{E}(X^n)$  se le llama el  $n$ -ésimo *Momento* de  $X$ .

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_{\mathbf{R}} x^n dF_X(x). \quad (1.2.23)$$

En muchas ocasiones calcular los momentos de una variable aleatoria  $X$  puede ser un tarea bastante complicada, de modo que un método alternativo siempre es deseable. Una opción para calcular los momentos de una variable aleatoria es a través de su *Función Generadora de Momentos*  $M_X(t)$  la cual se define como

$$M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX}), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (1.2.24)$$

Si  $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$  existe en una vecindad en torno a  $t = 0$ , entonces el Teorema 16.7 de [25] afirma que la  $n$ -ésima derivada de  $M_X(t)$  valuada en cero, coincide con el  $n$ -ésimo momento de  $X$ .

$$M_X(t)^{(n)}|_{t=0} = \mathbf{E}(X^n). \quad (1.2.25)$$

**1.2.4. Probabilidad Condicional**

El último concepto que se introduce en este capítulo es el de *Probabilidad Condicional*.

**Definición 1.2.21.**

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad y  $A, B \in \mathcal{F}$  con  $\mathbf{P}(B) > 0$ . Se define la probabilidad condicional de  $A$  dado  $B$  como

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}. \quad (1.2.26)$$

La probabilidad condicional es una medida de probabilidad y como tal cumple todas las propiedades de una medida de probabilidad cualquiera. Considérese un

vector aleatorio  $(X, Y_1, \dots, Y_n)$  absolutamente continuo con función de densidad conjunta  $f_{X, Y_1, \dots, Y_n}(x, y_1, \dots, y_n)$ . Si  $f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n)$  representa la función de densidad conjunta del vector aleatorio  $(Y_1, \dots, Y_n)$ , entonces, se define la *Función de Densidad Condicional de X dado*  $(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n)$ , como:

$$f_{X|Y_1, \dots, Y_n}(x, y_1, \dots, y_n) = \frac{f_{X, Y_1, \dots, Y_n}(x, y_1, \dots, y_n)}{f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n)}, \quad \text{si } f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) > 0. \quad (1.2.27)$$

La *Función de distribución Condicional de X dado*  $(Y_1, \dots, Y_n)$ , se define como

$$F_{X|Y_1, \dots, Y_n}(x, y_1, \dots, y_n) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y_1, \dots, Y_n}(s, y_1, \dots, y_n) ds. \quad (1.2.28)$$

Sea  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , si  $\mathbf{E}(g(X)) < \infty$ , entonces, se define *La Esperanza Condicional de g(X) dado*  $(Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n)$ , como:

$$\mathbf{E}(g(X)|Y_1, \dots, Y_n) = \int_{\Omega} g(X) f_{X|Y_1, \dots, Y_n}(s, y_1, \dots, y_n) ds. \quad (1.2.29)$$

Nótese que la esperanza condicional define una variable aleatoria nueva y no un simple número como a primera vista parece. Por cada valor que tome el vector aleatorio  $(Y_1, \dots, Y_n)$ , se tiene un valor de la variable esperanza condicional. También es importante notar que los posibles valores del vector aleatorio  $(Y_1, \dots, Y_n)$  varían según los elementos  $\omega \in \Omega$ . Existe una manera más formal de presentar a la esperanza condicional, cuya justificación requiere del teorema de Radon-Nikodym, el cual se basa en conceptos de teoría de medida que se alejan de esta investigación. Sin embargo, se ofrece el resultado a modo de definición.

**Definición 1.2.22.**

Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad,  $X$  una variable aleatoria con esperanza finita y  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  una sub- $\sigma$ -álgebra. La esperanza condicional de  $X$  dada la sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$ , denota como  $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ , es una variable aleatoria medible con respecto a  $\mathcal{G}$ ,

con esperanza finita, tal que

$$\int_A \mathbf{E}(X|\mathcal{G})d\mathbf{P} = \int_A Xd\mathbf{P}, \text{ para todo } A \in \mathcal{G}. \quad (1.2.30)$$

# Capítulo 2

## Procesos de Markov

En el capítulo anterior se presentaron los elementos más básicos de la teoría de la probabilidad, mismos que permiten introducir conceptos más elaborados de gran utilidad más adelante. En el presente capítulo se definen los *Procesos Estocásticos* a tiempo continuo, luego se presentan los *Procesos de Markov* y finalmente se define el *Movimiento Browniano* y se dan algunas de sus principales propiedades. Estos elementos, aunados a los elementos de mecánica clásica presentados previamente, son el material necesaria para alcanzar el objetivo de esta investigación.

### 2.1. Procesos Estocásticos

En esta sección se consideran conjuntos de variables aleatorias indexadas por un conjunto  $T \subseteq [0, \infty)$ . A tales conjuntos se les conoce como *Procesos Estocásticos*.

#### **Definición 2.1.1.**

Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible. Considérese el conjunto  $\{X(t, \omega) : t \in T \subseteq [0, \infty), \omega \in \Omega\}$ , si para cada  $t \in T$ ,  $X(t, \omega)$  es una variable aleatoria, entonces, se dice que es un proceso estocástico.

Es común denotar a un proceso estocástico, como el de la definición anterior, simplemente como  $\{X_t : t \in T\}$ , sobreentendiendo que las variables aleatorias  $X_t =$

$X(t, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ . Las variables aleatorias que se consideran durante todo este trabajo son tales que  $X_t \in \mathbf{R}$ , para todo  $t \in T \subseteq [0, \infty)$ . Al conjunto en el que toman valores las variables aleatorias de un proceso estocástico, se le conoce como *Espacio de Estados*. Es casi una convención estándar interpretar a los elementos de  $T$  como tiempos. Cuando se fija un  $\omega \in \Omega$ , el mapeo  $t \rightarrow X_t(\omega)$ , se conoce como *Trayectoria*. Por último, si  $0 \leq t_1 < \dots < t_{p+1} \in T \subseteq [0, \infty)$ , se considerarán probabilidades de eventos del tipo  $\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_{p+1}} \in A_{p+1}\}$ , donde  $A_1, \dots, A_{p+1} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  y serán ampliamente consideradas las probabilidades de los eventos  $\{X_{t_{p+1}} \in A_{p+1}\}$  dado  $\{X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_p} \in A_p\}$ . A continuación se definen dos propiedad importantes que poseen algunos procesos estocásticos.

**Definición 2.1.2.**

Sea  $\{X_t : t \geq 0\}$  un proceso estocástico a tiempo continuo.

- a) Si para cualesquiera tiempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , las variables aleatorias  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes, se dice que el proceso tiene *Incrementos Independientes*.
- b) Si para cualesquiera  $s < t$  y para cualquiera  $h > 0$ , las variables aleatorias  $X_{t+h} - X_{s+h}$  y  $X_t - X_s$  tienen la misma función de distribución, se dice que el proceso tiene *Incrementos Estacionarios*.

## 2.2. Filtraciones y Procesos de Markov

Cuando se estudian las varibales aleatorias, el concepto de espacio de probabilidad es fundamental para ello, pero si el objeto de estudio cambia a un proceso estocástico, la estructura de espacio de probabilidad resulta insuficiente, no por ello se desecha, sino que se amplía el concepto a lo que se conoce como *Espacio Filtrado*, el cual consiste de un espacio de probabilidad más un objeto llamado *Filtración*.

**Definición 2.2.1.**

Sean  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible. y  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$  una familia de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ . Si se cumple que

1.  $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}$  para todo  $t \in [0, \infty)$ .
2. Si  $t \leq s$ , entonces,  $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{G}_s$

Entonces, se dice que  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$  es una *Filtración*.

Si sucede que  $X_t$  es medible con respecto a  $\mathcal{G}_t$ , para todo  $t \geq 0$ , entonces, se dice que  $X_t$  es *Adaptado* a la filtración  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ . Considérese un proceso estocástico  $\{X_t : t \geq 0\}$ , si  $\mathcal{G}_s = \sigma(X_t : t \leq s)$ , entonces,  $\{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$  es una filtración, llamada *Filtración Natural* y claramente el proceso es adaptado a ella. A continuación se define una clase muy particular de procesos estocásticos, conocidos como *Procesos de Markov*, los cuales aparecen más adelante.

**Definición 2.2.2.**

Sea  $\{X_t : t \geq 0\}$  un proceso estocástico con valores en  $\mathbf{R}$ , adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  y sea la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s : s \geq t \geq 0)$ . Se dice que  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un *Proceso de Markov con respecto a la filtración*  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , si para todo  $A \in \mathcal{F}_t$  y para todo  $B \in \mathcal{G}_t$ , se tiene que

$$\mathbf{P}(A \cap B | X_t) = \mathbf{P}(A | X_t) \mathbf{P}(B | X_t). \quad (2.2.1)$$

Una exposición más completa de los Procesos de Markov se halla en [26]. Nótese que en la definición anterior se puede hacer  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ , en cuyo caso se dice que  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un *Proceso de Markov*. De modo que un proceso de Markov es tal, que las  $\sigma$ -álgebras  $\sigma(X_s : s \geq t \geq 0)$  y  $\sigma(X_s : s \leq t)$  son independientes. En un lenguaje menos formal, lo anterior equivale a decir que el pasado y el futuro del proceso son independientes. El siguiente teorema ofrece formas equivalentes de la definición anterior, cuya demostración puede encontrarse en [26] Teorema 1.3-a.

**Teorema 2.2.1.** *Sea  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  un proceso adaptado a la filtración  $\{\sigma(X_u : u \leq t)\}_{t \geq 0}$  entonces, los enunciados siguientes son equivalentes:*

1.  $X$  es un proceso de Markov.
2. Para todo  $t \geq 0$ , y  $Y$  función acotada y medible respecto a  $\sigma(X_s : s \leq t)$ , se tiene

$$\mathbf{E}(Y|\sigma(X_s : s \leq t)) = \mathbf{E}(Y|X_t). \quad (2.2.2)$$

3. Si  $t \leq s$ , entonces

$$\mathbf{E}(X_s|\sigma(X_s : s \leq t)) = \mathbf{E}(X_s|X_t) \quad (2.2.3)$$

Los últimos dos enunciados del teorema contienen la noción mencionada, de que el pasado y el futuro son independientes en un proceso de Markov. El siguiente resultado es una consecuencia del teorema anterior y de la definición de esperanza condicional, la demostración puede encontrarse en [26] Teorema 1.3-b.

**Teorema 2.2.2.** *Sea  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  un proceso de Markov y  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t$ , entonces*

$$\mathbf{E}(X_t|X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \mathbf{E}(X_t|X_{t_n}). \quad (2.2.4)$$

En la igualdad anterior, el término  $\mathbf{E}(X_t|X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ , denota a  $\mathbf{E}(X_t|\sigma(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}))$ , el cual es un poco más formal.

A continuación se definen las *Funciones de Transición*, que se asocian con las probabilidades de pasar de un estado (o conjunto de estados) a otro en un intervalo de tiempo dado.

**Definición 2.2.3.**

Sea el espacio medible  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ . La función  $P(x, t; A, s)$  definida para  $0 \leq t < s < \infty$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ , se llama *Función de Transición de Markov* sobre  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  y cumple lo siguiente:

1. El mapeo  $A \longrightarrow P(x, t; A, s)$  es una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{B}(\mathbf{R})$  para todo  $t < s$  y  $x \in \mathbf{R}$ .
2. El mapeo  $x \longrightarrow P(x, t; A, s) \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ , para todo  $0 \leq t < s < \infty$ , y  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ .
3. Si  $0 \leq t < s < u$ , entonces para todo  $x \in \mathbf{R}$  y  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  se tiene

$$P(x, t; A, u) = \int_{\mathbf{R}} P(x, t; dy, s) P(y, s; A, u). \quad (2.2.5)$$

La propiedad del enunciado 3, es la más representativa de una función de transición y se conoce como *Ecuación de Chapman-kolmogorov*. La función  $P(x, t; A, s)$  representará a la función de densidad de probabilidad de que el proceso esté en  $A$  al tiempo  $s$  y que esté en el estado  $x$  al tiempo  $t < s$ . Por otra parte, si existe una función  $P(x, A, t)$  definida para todo  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$  tal que  $P(x, t; A, s) = P(x, A, s - t)$ , se dice que la función de transición de Markov es *Homogénea en el Tiempo*, en cuyo caso la ecuación de Chapman-Kolmogorov se escribe como  $P(x, A, s + t) = \int_{\mathbf{R}} P(x, dy, t) P(y, A, s)$ .

#### Definición 2.2.4.

Sea  $X$  un proceso estocástico con valores en  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  y sea  $P(x, t; A, s)$  una función de transición de Markov sobre  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ . Se dice que  $X$  es un proceso de Markov con respecto a  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  con función de transición  $P(x, t; A, s)$  si se cumple

$$\mathbf{E}(X_s | \mathcal{F}_t) = P(X_t, t; x, s), \quad \text{para todo } 0 \leq t < s. \quad (2.2.6)$$

Donde  $P(y, t; x, s) = \int_{\mathbf{R}} P(y, t; dx, s)$ . Si  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u : u \leq t)$ , entonces,  $\mathbf{E}(X_s | \sigma(X_u : u \leq t)) = \mathbf{E}(X_s | X_t) = P(X_t, t; x, s)$ .

Los resultados y definiciones anteriores permiten presentar el siguiente teorema, el cual ofrece una forma de calcular las *Distribuciones finito dimensionales* de un

proceso de Markov.

**Teorema 2.2.3.** Sean  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  un proceso de Markov,  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  y  $\mathbf{P}_{X_0}$  la distribución de la variable aleatorio  $X_0$ . La distribución del vector aleatorio  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ , está dada por

$$\mathbf{P}_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}_{X_0}(x_0)P_{0, t_1}(x_0, x_1) \cdots P_{t_{n-1}, t_n}(x_{t_{n-1}}, x_{t_n}). \quad (2.2.7)$$

## 2.3. Movimiento Browniano

En 1827 el botánico Robert Brown observó que, cuando se suspendían pequeños granos de polen en agua, estos presentaban un movimiento irregular. Este fenómeno se llamó Movimiento Browniano en honor al trabajo de Brown, quien además demostró que el movimiento estaba presente en cualquier suspensión de partículas finas de vidrio y minerales, quedando descartado cualquier origen orgánico de este movimiento. El problema de explicar satisfactoriamente el movimiento Browniano lo resolvió Einstein en 1905. Una explicación alternativa la dio independientemente Smoluchowski. Los siguientes dos puntos son representativos de la solución de Einstein al problema del movimiento Browniano.

- El movimiento de los granos de polen es causado por impactos sucesivos de las moléculas del líquido, las cuales están en movimiento todo el tiempo.
- El movimiento de las moléculas del líquido es tan complicado, que su efecto en el grano de polen puede describirse sólo probabilísticamente, en términos de los sucesivos impactos que son estadísticamente independientes.

El movimiento Browniano se entiende de dos maneras, por un lado está el aspecto físico y por otro el aspecto matemático. Como fenómeno físico es entendido con la mecánica estadística. Una sencilla forma de abordar el aspecto físico del movimiento

browniano unidimensional puede ser a través de dos parámetros, la densidad de partículas  $\rho(x, t)$  y la corriente de partículas  $j(x, t)$ . El primero se refiere a el número de ellas dentro de un intervalo infinitesimal alrededor de un punto  $x$  al tiempo  $t$  y el segundo a el número de éstas que pasan por  $x$  en dirección positiva por unidad de tiempo. Es un hecho experimental que

$$j(x, t) = -D \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x}. \quad (2.3.1)$$

Donde  $D$  es una constante de proporcionalidad. Suponiendo que las partículas no se crean ni se destruyen durante el proceso, entonces

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}. \quad (2.3.2)$$

Derivando con respecto a la posición la primera expresión e igualando a la segunda se obtiene:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}. \quad (2.3.3)$$

Esta última ecuación se llama *Ecuación de difusión* y fue la que dedujo Einstein en su estudio del movimiento Browniano y asoció a las probabilidades de transición. El aspecto matemático del Movimiento Browniano, que es el de interés en este estudio, se basa en las observaciones del fenómeno físico, cuyo lugar en los procesos estocásticos se debe al matemático Norbert Wiener quien demostró la existencia y unicidad de un proceso con tales características.

### Definición 2.3.1.

Un movimiento Browniano unidimensional con parámetro  $\sigma^2$  es un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{B_t : t \geq 0\}$  con valores en  $\mathbf{R}$  que cumple las siguientes condiciones.

- a)  $B_0 = 0$ .
- b) Las trayectorias son continuas.
- c) El proceso tiene incrementos independientes.

d) Para  $0 \leq s \leq t$ , la variable  $B_t - B_s$  tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2(t-s)}\right\}}{\sigma\sqrt{2\pi(t-s)}}. \quad (2.3.4)$$

La densidad de la variable aleatoria  $B_t - B_s$  se conoce como *Densidad Normal* y se representa como  $N(0, \sigma^2(t-s))$ . Lo anterior se denota como  $B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$  y además significa que los incrementos del movimiento Browniano son estacionarios.

Sean  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ . Sean  $Y_1 = B_{t_1}$  y  $Y_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ , para  $i \geq 2$ , las cuales por definición son independientes. Defínase  $X_i = \sum_{j=1}^i Y_j = B_{t_i}$ . Si  $f_{B_{t_1}, \dots, B_{t_n}}$  representa la función de densidad del vector aleatorio  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ , por independencia se tiene que

$$\begin{aligned} f_{B_{t_1}, \dots, B_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) &= f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= f_{Y_1, Y_1+Y_2, \dots, \sum_{j=1}^n Y_j}(x_1, \dots, x_n) \\ &= f_{Y_1, \dots, Y_n}(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) \\ &= f_{Y_1}(x_1) \cdots f_{Y_n}(x_n - x_{n-1}) \\ &= f_{B_{t_1}}(x_1) \cdots f_{B_{t_n} - B_{t_{n-1}}}(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Donde  $f_{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}}(x_j - x_{j-1})$  representa la función de densidad de la variable  $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ , la cual es una normal  $N(0, \sigma^2(t_j - t_{j-1}))$ . Con lo anterior se puede probar que el movimiento Browniano es un Proceso de Markov.

**Teorema 2.3.1.** *El movimiento Browniano es un proceso de Markov.*

**Demostración.**

Sean  $0 \leq t_1 < \dots < t_{n+1}$  y  $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbf{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 f_{B_{t_{n+1}}|B_{t_n}, \dots, B_{t_1}}(x_{n+1}, \dots, x_1) &= \frac{f_{B_{t_{n+1}}, \dots, B_{t_1}}(x_{n+1}, \dots, x_1)}{f_{B_{t_n}, \dots, B_{t_1}}(x_n, \dots, x_1)} \\
 &= \frac{f_{B_{t_1}}(x_1) \cdots f_{B_{t_{n+1}}-B_{t_n}}(x_{n+1} - x_n)}{f_{B_{t_1}}(x_1) \cdots f_{B_{t_n}-B_{t_{n-1}}}(x_n - x_{n-1})} \\
 &= f_{B_{t_{n+1}}-B_{t_n}}(x_{n+1} - x_n) \\
 &= f_{B_{t_{n+1}}-B_{t_n}}(x_{n+1} - x_n) \frac{f_{B_{t_n}}(x_n)}{f_{B_{t_n}}(x_n)} \\
 &= f_{B_{t_{n+1}}|B_{t_n}}(x_{n+1}, x_n)
 \end{aligned}$$

■

Si  $0 \leq s < t$  y  $y, x \in \mathbf{R}$ , las funciones  $f_{B_t-B_s}(x-y)$  son las funciones de transición de Markov del Movimiento Browniano,  $P(y, s; x, t)$ , y está asociadas con la probabilidad de que el proceso esté al tiempo  $s$  en el estado  $y$  y al tiempo  $t$  esté en  $x$ .

$$f_{B_t-B_s}(x-y) = P(y, s; x, t). \quad (2.3.5)$$

De la definición del movimiento Browniano fácilmente se ve que las funciones de transición son homogéneas en el tiempo, por lo que la función  $P(y, s; x, t)$  se denota como  $P(y, x, t-s)$ . Además si  $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ , se tiene que la probabilidad de que el proceso esté al tiempo  $s$  en  $y$  y al tiempo  $t$  esté en  $A$  está dada por

$$P(y, A, t-s) = \int_A P(x, x, t-s) dx. \quad (2.3.6)$$

Integrando directamente se ve que las funciones de transición cumplen la propiedad de Chapman-Kolmogorov.

$$P(y, x, t+s) = \int_{-\infty}^{\infty} P(y, u, s) P(u, x, t) du. \quad (2.3.7)$$

Además satisfacen la ecuación de Difusión de Einstein, como puede corroborarse fá-

cilmente derivando. A continuación se define el Movimiento Browniano  $n$ -dimensional.

**Definición 2.3.2.**

Sean  $B_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, d$  movimientos Brownianos unidimensionales independientes con parámetro  $\sigma^2$ , el movimiento Browniano  $d$ -dimensional es el proceso  $\mathbf{B}(t) = (B_1(t), \dots, B_d(t))$ .

Si  $0 \leq s < t$  y  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$  entonces el vector aleatorio  $\mathbf{B}(s) - \mathbf{B}(t)$  tiene densidad dada por

$$f_{\mathbf{B}(s)-\mathbf{B}(t)}(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2\sigma^2(t-s)}\right\}}{(2\sigma^2\pi(t-s))^{d/2}}. \quad (2.3.8)$$

Donde  $\|\mathbf{x}\|$  representa la norma euclidiana en  $\mathbf{R}^d$ . Análogamente al caso unidimensional, el movimiento Browniano  $d$ -dimensional es un proceso de Markov y las funciones de transición de Markov asociadas a la probabilidad de que el proceso al tiempo  $s$  esté en el estado  $\mathbf{y}$  y en el tiempo  $t$  esté en el estado  $\mathbf{x}$  son

$$P(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t - s) = f_{\mathbf{B}(s)-\mathbf{B}(t)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.3.9)$$

# Capítulo 3

## Proceso estocástico asociado a un Lagrangiano

En este capítulo se desarrolla la parte más importante de esta investigación, la cual consiste, como ya se ha dicho, en la obtención de un proceso estocástico asociado a una partícula que se mueve bajo el efecto de una fuerza conservativa. Para dicho fin es necesario la idea de *Integral de Trayectoria de Feynman*, la cual se presenta brevemente. Luego, dicha integral se utiliza para concluir que una partícula Browniana tiene asociado el lagrangiano de una partícula libre. Esto último sirve de motivación para encontrar las funciones de transición de Markov y la función generadora de momentos de un proceso estocástico que surge de sumarle al lagrangiano de una partícula libre un potencial conservativo.

### 3.1. Integral de trayectoria de Feynman

Imagínese una partícula con masa  $m$  restringida a moverse sobre el eje  $x$ , la cual está sujeta al efecto de una fuerza conservativa  $F(x)$ . En mecánica clásica, usualmente se procede a resolver la ecuación de Newton  $m \frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$ , donde  $V(x)$  es un potencial conservativo, para obtener la posición de la partícula  $x(t)$  y con ella otras variables dinámicas de interés. Las condiciones iniciales  $x(0)$  y  $x'(0)$  son suficientes para dicho fin. En mecánica cuántica el mismo problema se aborda de una manera

muy diferente. En este caso lo que se busca es la *Función de Onda* de la partícula, denotada como  $\psi(x, t)$ , y en vez de resolver la ecuación de Newton se resuelve la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi. \quad (3.1.1)$$

Donde  $i$  representa la unidad imaginaria y  $\hbar$  la constante de Planck normalizada. Las condiciones iniciales  $\psi(x, 0), \psi'(x, 0)$  también son necesarias. La función de onda  $\psi(x, t)$  es un elemento del espacio de Hilbert de las funciones cuadrado integrables. Con la función de onda se calculan las variables dinámicas. Uno de los aspectos más sorprendentes de la mecánica cuántica, propuesto por el físico alemán Max Born en 1926, es que el término  $|\psi(x, t)|^2 = \langle \psi(x, t), \psi(x, t) \rangle$  está asociado a la probabilidad de encontrar a la partícula en la posición  $x$  al tiempo  $t$ . La cantidad  $\langle \psi(x, t), \psi(x, t) \rangle$  representa el producto interno en el espacio de las funciones cuadrado integrables. Dada la interpretación probabilística de Born es necesario que se cumpla que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi(x, t), \psi(x, t) \rangle dx = 1. \quad (3.1.2)$$

En el contexto de la teoría de la probabilidad, se diría que  $|\psi(x, t)|^2$  es una función de densidad de probabilidad. En mecánica cuántica se le llama *Amplitud de Probabilidad*. Las formulaciones de la mecánica cuántica fueron desarrolladas por Schrödinger, Heisenberg y otros en la década de 1920, y poco después se mostró que las distintas formulaciones eran equivalentes entre sí. En 1933, Dirac hizo la observación de que la acción juega un papel central en la mecánica clásica, pero parecía no haber un análogo en la mecánica cuántica. Especuló sobre cómo podría estudiarse la evolución en el tiempo de un sistema cuántico a partir de la acción clásica. En 1948, Feynman desarrolló la idea de Dirac y obtuvo una formulación de la mecánica cuántica, basada en el hecho de que la evolución de un sistema cuántico se puede escribir como una suma que considera todas las posibles trayectorias (no solo las trayectorias clásicas) entre dos puntos. Dicha descripción se hace a través de una función llamada *El propagador*,

denotado como  $A(x_f, t_f; x_i, t_i)$ , donde  $x_i$  es la posición de la que parte el sistema al tiempo  $t_i$  y  $x_f$  es la posición a la que llega el sistema al tiempo  $t_f$ . La forma del propagador es la siguiente

$$A(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{\Gamma} \mathcal{D}(x) \exp \{iS/\hbar\}. \quad (3.1.3)$$

Donde  $S$  es la acción clásica,  $\hbar$  la constante de Planck normalizada,  $\mathcal{D}(x)$  una función que depende de  $x$  y  $\Gamma$  el conjunto de trayectorias que existen entre los puntos  $x_i$  y  $x_f$ , además es importante mencionar que la integral anterior no es una integral de Lebesgue ni mucho menos una integral de Riemann. Una explicación más completa de la integral de trayectoria de Feynman y su relación con el propagador puede hallarse en [17,18,20]. La propiedad interesante del propagador es que permite obtener la función de onda  $\psi(x_f, t_f)$  a partir de  $\psi(x_i, t_i)$  del siguiente modo.

$$\psi(x_f, t_f) = \int_{\mathbf{R}} A(x_f, t_f; x_i, t_i) \psi(x_i, t_i) dx_i. \quad (3.1.4)$$

Además el propagador cumple la ecuación de Schrödinger con la condición inicial

$$A(x_f, 0; x_i, 0) = \delta(x_f - x_i). \quad (3.1.5)$$

## 3.2. Lagrangiano asociado al Movimiento Browniano

Considérese una partícula Browniana. Ya se vió que la función de densidad de probabilidad de que la partícula esté en la posición  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$  al tiempo  $t$ , y al tiempo  $t_0 \leq t$  se encuentre en  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d$ , es una normal  $N(0, \sigma^2(t - t_0))$ , si en este caso se hace  $\sigma^2 = 2D$ , entonces

$$P(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}, t) = \frac{1}{[4D\pi(t - t_0)]^{d/2}} \exp \left[ -\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{4D(t - t_0)} \right]. \quad (3.2.1)$$

Para dicha partícula defínase la siguiente función

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \int_{t_0}^{\infty} P(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}, t) dt. \quad (3.2.2)$$

La cual se denomina *Función de Green*. Como el movimiento browniano es un proceso de Markov, entonces, la función de transición satisface la ecuación de Chapman-kolmogorov, de modo que

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_E P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') P(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x}' \quad (3.2.3)$$

Donde  $t_0 \leq t' \leq t$ ,  $E$  es el conjunto de todos los posible estados del proceso y  $\mathbf{x}'$  es un estado intermedio por el que puede pasar la partícula al tiempo  $t'$  antes de llegar a  $\mathbf{x}$ . Si  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = t$  es una partición del intervalo  $[t_0, t]$  y  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  son estados intermedios por los que puede pasar la partícula antes de llegar a  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ , entonces se puede escribir lo siguiente:

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_E P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) d\mathbf{x}_1.$$

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = \int_E P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_2, t_2) P(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) d\mathbf{x}_2.$$

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_2, t_2) = \int_E P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_3, t_3) P(\mathbf{x}_3, t_3; \mathbf{x}_2, t_2) d\mathbf{x}_3.$$

⋮

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_{n-2}, t_{n-2}) = \int_E P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1}) P(\mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1}; \mathbf{x}_{n-2}, t_{n-2}) d\mathbf{x}_{n-1}.$$

Combinando estas integrales se obtiene:

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \quad (3.2.4)$$

$$\int_E \cdots \int_E P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) P(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) \cdots P(\mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1}; \mathbf{x}_{n-2}, t_{n-2}) dx_1 \cdots dx_{n-1}. \quad (3.2.5)$$

Sustituyendo el valor de  $P(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}; \mathbf{x}_j, t_j)$  en la ecuación anterior y denotando las  $n$  integrales por una sola se obtiene que

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_E \prod_{j=1}^{n-1} \left( \frac{d\mathbf{x}_j}{[4D\pi(t_j - t_{j-1})]^{d/2}} \right) \exp \left[ -\frac{1}{4D} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|^2}{(t_{j+1} - t_j)} \right]. \quad (3.2.6)$$

Si se hace  $n \rightarrow \infty$ , es decir, que la partición del intervalo  $[t_0, t]$  sea infinita y la longitud de los intervalos tienda a cero,  $\Delta t_j \rightarrow 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} & \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{n-1} \left( \frac{d\mathbf{x}_j}{[4D\pi(t_j - t_{j-1})]^{d/2}} \right) \exp \left[ -\frac{1}{4D} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|^2}{(t_{j+1} - t_j)} \right] = \\ & \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{n-1} \left( \frac{d\mathbf{x}_j}{[4D\pi(t_j - t_{j-1})]^{d/2}} \right) \exp \left[ -\frac{1}{4D} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|^2 \Delta t_j}{(t_{j+1} - t_j)^2} \right] = \\ & \int_E \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int_{t_0}^t d\tau \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|^2 \right] \mathcal{D}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Donde

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{n-1} \left( \frac{d\mathbf{x}_j}{[4D\pi(t_j - t_{j-1})]^{d/2}} \right). \quad (3.2.7)$$

En consecuencia las funciones de transición, cuando la partícula puede dar una infinidad de saltos antes de llegar a  $\mathbf{x}$  partiendo de  $\mathbf{x}_0$  se reescriben como:

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_E \mathcal{D}(\mathbf{x}) \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int_{t_0}^t d\tau \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|^2 \right]. \quad (3.2.8)$$

De modo que la ecuación de Green toma la forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \int_{t_0}^{\infty} dt \int_E \mathcal{D}(\mathbf{x}) \exp \left[ -\frac{1}{4D} \int_{t_0}^t d\tau \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|^2 \right]. \quad (3.2.9)$$

Si en esta última ecuación, el argumento de la exponencial estuviera multiplicado por el número complejo  $\frac{i}{\hbar}$ , entonces, según se hace en [16,20,21,17], la integral tomaría la forma de una integral de trayectoria de Feynman, y el movimiento de la partícula representaría un sistema físico donde la acción sería  $S_0 = \frac{1}{4D} \int_{t_0}^t d\tau \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|^2$ , de modo que el lagrangiano de la partícula sería,  $\mathcal{L}_0 = \frac{\|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|^2}{4D}$ , es decir, representaría el movimiento de una partícula libre de masa  $m = \frac{1}{2D}$ . De esta manera, el proceso estocástico asociado al lagrangiano de una partícula libre es un movimiento browniano. Una vez que se conoce esta conexión, surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿Qué pasaría si en la función de Green anterior, en vez de considerar el lagrangiano  $\mathcal{L}_0$  se considera un lagrangiano de la forma  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon V(\mathbf{x}(t))$ ? Donde  $V(\mathbf{x})$  es un potencial conservativo y  $\epsilon \ll 1$  es una constante de acoplamiento. Una respuesta a esta pregunta se desarrolla en la siguiente sección.

### 3.3. Proceso Estocástico asociado a una partícula que se mueve en un potencial conservativo

Siguiendo la línea de desarrollo de la sección anterior, en esta sección se obtiene el proceso estocástico asociado a una partícula de masa  $m = \frac{1}{2D}$ , cuyo lagrangiano es de la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \epsilon V(\mathbf{x}(t)) \quad (3.3.1)$$

Donde  $\mathcal{L}_0$  representa el lagrangiano de una partícula libre de masa  $m = \frac{1}{2D}$ ,  $V(\mathbf{x}(t))$  representa un potencial conservativo y  $|\epsilon| \ll 1$ . La acción asociada a este lagrangiano es:

$$S = \int_{t_0}^t d\tau \mathcal{L} = S_0 + \epsilon \int_{t_0}^t d\tau V(\mathbf{x}(\tau)) \quad (3.3.2)$$

En cuyo caso la función de Green es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)_V = \int_{t_0}^{\infty} dt \int_E \mathcal{D}(\mathbf{x}) \exp \left[ S_0 + \epsilon \int_{t_0}^t d\tau V(\mathbf{x}(\tau)) \right]. \quad (3.3.3)$$

Si  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = t$  es una partición del intervalo  $[t_0, t]$  y  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  son estados intermedio por los que puede pasar la partícula antes de llegar a  $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ , entonces se puede hacer la siguiente aproximación

$$\int_{t_0}^t d\tau V(\mathbf{x}(\tau)) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} v(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}; \mathbf{x}_j, t_j). \quad (3.3.4)$$

Donde  $v(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}; \mathbf{x}_j, t_j) = (t_{j+1} - t_j)(V(\mathbf{x}_{j+1}) + V(\mathbf{x}_j))$ . De esta manera, la integral es el promedio de las sumas de Riemann y  $v$  depende de sus puntos iniciales y finales. Con lo anterior es posible ver la siguiente proporcionalidad

$$\begin{aligned} & \int_E \mathcal{D}(\mathbf{x}) \exp \left[ S_0 + \epsilon \int_{t_0}^t d\tau V(\mathbf{x}(\tau)) \right] \\ & \propto \int_E \left( \prod_{j=1}^{n-1} d\mathbf{x}_j \right) \exp \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \left[ -\frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|^2}{4D(t_{j+1} - t_j)} + \frac{\epsilon}{2} v(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}; \mathbf{x}_j, t_j) \right] \right]. \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned} & \exp \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \left[ -\frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|^2}{4D(t_{j+1} - t_j)} + \frac{\epsilon}{2} v(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}; \mathbf{x}_j, t_j) \right] \right] \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \exp \left[ -\frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|^2}{4D(t_{j+1} - t_j)} + \frac{\epsilon}{2} v(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}; \mathbf{x}_j, t_j) \right]. \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene lo siguiente

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)_V \propto \int_{t_0}^{\infty} dt \int_E \left( \prod_{j=1}^{n-1} d\mathbf{x}_j \right) \left( \prod_{j=0}^{n-1} \exp \left[ -\frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|^2}{4D(t_{j+1} - t_j)} + \frac{\epsilon}{2} v(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}; \mathbf{x}_j, t_j) \right] \right). \quad (3.3.5)$$

Partiendo de lo hecho en la sección anterior, es posible asociar el último término de la integral anterior con las funciones de transición  $P_V(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0)$  de un proceso estocástico, es decir

$$P_V(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}, \mathbf{x}_j, t_j) \propto \exp \left[ -\frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|^2}{4D(t_{j+1} - t_j)} + \frac{\epsilon}{2} v(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}; \mathbf{x}_j, t_j) \right]. \quad (3.3.6)$$

De modo que la función de Green es tal que

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)_V \propto \int_{t_0}^{\infty} dt \int_E \left( \prod_{j=1}^{n-1} d\mathbf{x}_j \right) \left( \prod_{j=0}^{n-1} P_V(\mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}, \mathbf{x}_j, t_j) \right). \quad (3.3.7)$$

De esta manera, debe existir una constante de proporcionalidad  $\mathcal{N}$  tal que

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)_V = \int_{t_0}^{\infty} dt \mathcal{N} P_V(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0). \quad (3.3.8)$$

El subíndice  $V$  en la función de Green y en la función de transición, es para distinguirla

de las de la sección anterior. En la siguiente sección se obtiene una aproximación a primer orden de la constante  $\mathcal{N}$ , la cual depende de  $\mathcal{D}(\mathbf{x})$ . Las últimas dos ecuaciones implican que el proceso estocástico asociado al lagrangiano  $\mathcal{L}$  es tal que sus funciones de transición satisfacen la ecuación de Champman-Kolmogorov.

### 3.4. Condiciones de Normalización para $P_V$

El objetivo de esta sección es encontrar una aproximación a primer orden de la constante normalizadora  $\mathcal{N}$ . Dicha aproximación será útil en los casos en que la forma del potencial  $V(\mathbf{x})$  complique la obtención de una forma exacta. Sin embargo, en el último capítulo se presentan algunos ejemplos en los que se puede obtener formas exactas para la constante  $\mathcal{N}$ , de este modo, también se calculan expresiones exactas de las funciones de transición  $P_V(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ . En la sección previa se obtuvieron algunas expresiones que involucran a dichas funciones de transición, de las cuales se puede concluir que

$$P_V(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) = \mathcal{N} \exp \left[ -\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{4D(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{2} v(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \right]. \quad (3.4.1)$$

Partiendo del hecho de que las funciones de transición son densidades de probabilidad, debe cumplirse que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} P_V(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) dx_1 \cdots dx_d = 1. \quad (3.4.2)$$

Donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ . Por otra parte nótese que

$$\exp \left[ \frac{\epsilon}{2} v \right] = 1 + \frac{\epsilon}{2} v + \frac{1}{2!} \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^2 v^2 + \cdots \quad (3.4.3)$$

En lo sucesivo se hará  $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_d = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}$ . Si para todo entero  $k \geq 0$

se define

$$I_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^k \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{4D(t-t_0)}\right] v^k(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0). \quad (3.4.4)$$

Entonces

$$\mathcal{N}[I_0 + I_1 + I_2 + \dots] = 1. \quad (3.4.5)$$

Nótese que

$$I_0 = [4D\pi(t-t_0)]^{d/2}. \quad (3.4.6)$$

La cual es la constante de normalización de las funciones de transición del movimiento Browniano, de modo que debe utilizarse para completar la expresión (3.3.6). Dado que se pretende encontrar una aproximación de  $\mathcal{N}$  a primer orden, es necesario  $I_1$

$$I_1 = \frac{\epsilon(t-t_0)}{2} \left[ V(\mathbf{x}_0)[4D\pi(t-t_0)]^{d/2} + \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{4D(t-t_0)}\right] V(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.4.7)$$

Considérese únicamente el último término de la igualdad anterior y supóngase que existe la serie de Taylor alrededor del punto  $\mathbf{x}_0$  de la función  $V(\mathbf{x})$ , entonces, procediendo como en [1], se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}{4D(t-t_0)}\right] V(\mathbf{x}) \\ &= [4D(t-t_0)]^{d/2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{v_{2n_1, \dots, 2n_d}}{2^{n_1 + \dots + n_d}} \frac{[2D(t-t_0)]^{(n_1 + \dots + n_d)}}{n_1! \dots n_d!}. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Donde los coeficientes se calculan a través de la siguiente expresión

$$v_{2n_1, \dots, 2n_d} = \frac{\partial^{2n_1}}{\partial x_1^{2n_1}} \dots \frac{\partial^{2n_d}}{\partial x_d^{2n_d}} V(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0}. \quad (3.4.9)$$

Utilizando  $I_0$  y  $I_1$  se obtiene la aproximación a primer orden de la constante  $\mathcal{N}$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}^{-1} &= [4D(t-t_0)]^{d/2} \left( 1 + \frac{\epsilon(t-t_0)}{2} V(\mathbf{x}) + \epsilon(t-t_0)2\Gamma \right) \\
 &= [4D(t-t_0)]^{d/2} \mathcal{N}'^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Donde  $\Gamma$  representa todas las sumas que aparecen en la ecuación (3.4.8) y  $\mathcal{N}'^{-1} = 1 + \frac{\epsilon(t-t_0)}{2} V(\mathbf{x}) + \epsilon(t-t_0)2\Gamma$  es la constante de normalización de  $P_V$ . De esta manera se tiene la siguiente expresión a primer orden para  $P_V$ .

$$\begin{aligned}
 &P_V(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) \\
 &= P(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) - \frac{\epsilon(t-t_0)}{2} \Gamma \mathcal{N}' P(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) + \frac{\epsilon(t-t_0)}{2} \mathcal{N}' V(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0).
 \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Se reitera que las funciones  $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0)$  son las funciones de transición del movimiento Browniano. Por otra parte, la aproximación anterior es mejor siempre que el término a segundo orden en la serie de Taylor de  $\exp\left[\frac{\epsilon v}{2}\right]$  es más pequeño que el término a primer orden, es decir,  $\frac{\epsilon}{2}v > \frac{\epsilon^2}{8}v^2$ , lo que puede expresarse como  $v < \frac{4}{\epsilon}$ .

### 3.5. Función Generadora de Momentos

En el capítulo uno se presentó la función generadora de momentos de una variable aleatoria y se mencionó que su principal utilidad es que permite calcular los momentos de la variable aleatoria correspondiente, siempre que existe en una vecindad entorno a cero. En esta sección se calculan los momentos de las variables aleatorias cuyas funciones de densidad son las funciones de transición  $P_V$ . Si dichas variables se denotan por  $\mathbf{y}$ , entonces

$$M_{P_V}(\mathbf{s}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{y} \exp[\mathbf{y} \cdot \mathbf{s}] P_V. \tag{3.5.1}$$

Donde  $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^d$ . Utilizando la aproximación para  $P_V$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 & M_{P_V}(\mathbf{s}) \\
 &= M_P(\mathbf{s}) - \frac{\epsilon(t-t_0)}{2} \Gamma \mathcal{N}' M_P(\mathbf{s}) + \frac{\epsilon(t-t_0)}{2} \mathcal{N}' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{y} \exp[\mathbf{y} \cdot \mathbf{s}] V(\mathbf{y}) P(\mathbf{y}, t; \mathbf{y}_0, t_0).
 \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

En la última expresión  $M_P$  denota a la función generadora de momentos de los incrementos del movimiento Browniano. Nótese que la última integral en la expresión anterior tiene la forma de la ecuación (3.4.8), de modo que si existe la serie de Taylor de  $V(\mathbf{x})$  alrededor del punto  $\mathbf{x}_0 + 2D(t-t_0)\mathbf{s}$ , se tiene que la función generadora de momentos se reescribe como

$$\begin{aligned}
 & M_{P_V}(\mathbf{s}) \\
 &= M_P(\mathbf{s}) - \frac{\epsilon(t-t_0)}{2} \Gamma \mathcal{N}' M_P(\mathbf{s}) + \frac{\epsilon(t-t_0)}{2} \mathcal{N}' \mathcal{N}'' \exp[\mathbf{s} \cdot (\mathbf{x}_0 + D(t-t_0)\mathbf{x}_0)].
 \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Donde

$$\mathcal{N}'' = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{v'_{2n_1, \dots, 2n_d}}{2^{n_1 + \dots + n_d}} \frac{[2D(t-t_0)]^{(n_1 + \dots + n_d)}}{n_1! \cdots n_d!}. \tag{3.5.4}$$

Y las constantes  $v'_{2n_1, \dots, 2n_d}$  están dadas por

$$v'_{2n_1, \dots, 2n_d} = \frac{\partial^{2n_1}}{\partial x_1^{2n_1}} \cdots \frac{\partial^{2n_d}}{\partial x_d^{2n_d}} V'(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}_0 + 2D(t-t_0)\mathbf{s}}. \tag{3.5.5}$$

Nótese que la función  $M_P(\mathbf{s})$  corresponde a los momentos de una variable normal  $N(0, 2D)$ .

# Capítulo 4

## Aplicaciones

En este capítulo se obtienen las funciones de transición y la función generadora de momentos de los procesos estocásticos que se surgen cuando se varía el potencial. Los potenciales que se consideran son: el potencial lineal, el potencial del oscilador armónico y el potencial de decaimiento exponencial.

### 4.1. Potencial Lineal $V(x) = \kappa x$

Uno de los problemas más sencillos en la mecánica clásica es el estudio de una partícula sometida a un potencial lineal de la forma  $V(x) = \kappa x$ , lo que se corresponde con el movimiento de una partícula sometida a una fuerza constante. Para simplificar el problema se considera el problema unidimensional. Considérese que la partícula parte del punto  $x_0$  al tiempo  $t_0$ . Entonces, utilizando (3.4.1) se tiene que las funciones de transición son

$$P_V(x, t; x_0, t_0) = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{4D(t - t_0)} + \frac{\epsilon}{2} \kappa (t - t_0)(x + x_0) \right\}. \quad (4.1.1)$$

Completando cuadrados, el argumento de la exponencial puede reescribirse como

$$-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{2}\kappa(t-t_0)(x+x_0) = -\frac{1}{4D(t-t_0)}[x - (x_0 + \epsilon\kappa D(t-t_0)^2)]^2 + \epsilon\kappa(t-t_0)x_0 + \frac{\epsilon^2\kappa^2 D(t-t_0)^3}{4}. \quad (4.1.2)$$

En consecuencia, las funciones de transición son tales que

$$P_V(x, t; x_0, t_0) \propto \exp\left\{-\frac{[x - (x_0 + \epsilon\kappa D(t-t_0)^2)]^2}{4D(t-t_0)}\right\} \times \exp\left\{\epsilon\kappa(t-t_0)x_0 + \frac{\epsilon^2\kappa^2 D(t-t_0)^3}{4}\right\}. \quad (4.1.3)$$

Dado que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N} P_V dx. \quad (4.1.4)$$

Resolviendo la integral se obtiene

$$\mathcal{N}^{-1} = \sqrt{4\pi D(t-t_0)} \exp\left\{\epsilon\kappa(t-t_0)x_0 + \frac{\epsilon^2\kappa^2 D(t-t_0)^3}{4}\right\}. \quad (4.1.5)$$

Por lo tanto

$$P_V(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{[x - (x_0 + \epsilon\kappa D(t-t_0)^2)]^2}{4D(t-t_0)}\right\}. \quad (4.1.6)$$

La función anterior es una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , donde  $\mu = x_0 + \epsilon\kappa D(t-t_0)^2$  y  $\sigma^2 = 2D(t-t_0)$ .

En este caso la función generadora de momentos es

$$M_{P_V}(s) = e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}}. \quad (4.1.7)$$

El  $n$ -ésimo momento de la variable aleatoria  $X$  cuya densidad es  $P_V$ , está dado por

$$\mathbf{E}_{P_V}(X^n) = \frac{d^n}{ds^n} M_{X, P_V}(s)|_{s=0}. \quad (4.1.8)$$

En consecuencia el primer y segundo momento de  $X$  están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{P_V}(X) &= \mu \\ \mathbf{E}_{P_V}(X^2) &= \mu^2 + \sigma^2. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

De la ecuación de movimiento de Newton se sabe que si una partícula de masa  $m = \frac{1}{2D}$  se mueve bajo el efecto de una fuerza cuya magnitud es  $\epsilon\kappa$ , entonces, su posición al tiempo  $t$  está dada por  $x = x_0 + \epsilon\kappa D(t - t_0)^2$ , donde  $x_0$  es la posición de la partícula al tiempo  $t_0$ . De modo que la posición promedio de una partícula Browniana afectada por una fuerza constante de magnitud  $\epsilon\kappa$ , coincide con la posición de la partícula previamente mencionada.

## 4.2. Potencial $V(x) = \kappa x^2$

En esta sección se considera un potencial del tipo de un oscilador armónico. Nuevamente, el problema es unidimensional y se obtiene una forma exacta para la constante  $\mathcal{N}$ , lo que implica formas exactas para las funciones de transición. Si el potencial que se considera es  $V(x) = \kappa x^2$ , entonces, (3.4.1) implica que

$$P_V(x, t; x_0, t_0) = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{4D(t - t_0)} + \frac{\epsilon}{2} \kappa (t - t_0) (x^2 + x_0^2) \right\}. \quad (4.2.1)$$

Manipulando el argumento de la exponencial anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} & -\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{2}\kappa(t-t_0)(x^2+x_0^2) \\ & = -\frac{1-2\epsilon\kappa D(t-t_0)^2}{4D(t-t_0)} \left[ x - \frac{x_0}{1-2\epsilon\kappa D(t-t_0)^2} \right]^2 + \phi. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Donde

$$\phi = \frac{x_0^2}{[1-2\epsilon\kappa D(t-t_0)^2]^2} - \frac{x_0^2}{4D(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{2}\kappa x_0^2(t-t_0). \quad (4.2.3)$$

En consecuencia

$$P_V \propto \exp \left\{ -\frac{1-2\epsilon\kappa D(t-t_0)^2}{4D(t-t_0)} \left[ x - \frac{x_0}{1-2\epsilon\kappa D(t-t_0)^2} \right]^2 + \phi \right\}. \quad (4.2.4)$$

El valor de  $\mathcal{N}$  se obtiene de la ecuación

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N} P_V dx. \quad (4.2.5)$$

De modo que al resolver la integral se obtiene

$$\mathcal{N}^{-1} = \exp \{ \phi \} \sqrt{\frac{4\pi D(t-t_0)}{1-2\epsilon\kappa D(t-t_0)^2}}. \quad (4.2.6)$$

Nótese que la expresión anterior sólo es válida siempre que

$$(t-t_0)^2 < \frac{1}{2\epsilon\kappa D}. \quad (4.2.7)$$

De la misma manera, las funciones de transición son válidas para los tiempos anteriores.

$$P_V(x, t; x_0, t_0) = \sqrt{\frac{1 - 2\epsilon\kappa D(t - t_0)^2}{4\pi D(t - t_0)}} \times \exp \left\{ -\frac{1 - 2\epsilon\kappa D(t - t_0)^2}{4D(t - t_0)} \left[ x - \frac{x_0}{1 - 2\epsilon\kappa D(t - t_0)^2} \right]^2 \right\}. \quad (4.2.8)$$

Nótese que la función anterior es una distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , donde  $\mu = \frac{x_0}{1 - 2\epsilon\kappa D(t - t_0)^2}$  y  $\sigma^2 = \frac{2D(t - t_0)}{1 - 2\epsilon\kappa D(t - t_0)^2}$ . La función generadora de momentos tiene la misma forma que (4.1.7), de modo que sus primeros dos momentos están dados por (4.1.9).

### 4.3. Potencial $V(x) = \lambda_1 \exp \{ \lambda_2 x \}$

En esta sección se presenta el problema para un potencial de tipo decaimiento exponencial de la forma  $V(x) = \lambda_1 \exp \{ \lambda_2 x \}$ , donde  $\lambda_1, \lambda_2$  son constantes de acoplamiento. Para este caso se hará uso de las aproximaciones a primer orden que se desarrollaron en el capítulo previo para la constante de normalización y las funciones de transición, con estas últimas la función generadora de momentos puede calcularse a partir de la definición . Los parámetros necesarios para las aproximaciones están dados por

$$\begin{aligned} v(x, t, x_0, t_0) &= \lambda_1(t - t_0)[\exp \{ -\lambda_2 x \} + \exp \{ -\lambda_2 x_0 \}]. \\ \mathcal{N}^{-1} &= 1 + \frac{\epsilon\lambda_1(t - t_0)}{2} \exp \{ -\lambda_2 x_0 \} + \frac{\epsilon\lambda_1(t - t_0)}{2} M_P(-\lambda_2). \\ \Gamma &= \frac{\epsilon\lambda_1(t - t_0)}{2} M_P(-\lambda_2). \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Donde  $M_P(-\lambda_2)$  es una constante con la misma forma funcional que la función generadora de momentos de una distribución normal  $N(0, 2D(t - t_0))$  valuada en  $\lambda_2$ . Por

(3.4.11) se tiene que

$$\begin{aligned}
 P_V(x, t; x_0, t_0) &= P(x, t; x_0, t_0) - \frac{\epsilon\lambda_1}{2}(t - t_0)\mathcal{N}'M_P(-\lambda_2)P(x, t; x_0, t_0) \\
 &\quad + \frac{\epsilon\lambda_1}{2}(t - t_0)\mathcal{N}'\exp\{-\lambda_2x\}P(x, t; x_0, t_0).
 \end{aligned}
 \tag{4.3.2}$$

Por (3.5.1) se tiene que

$$M_{P_V}(s) = M_P(s) + \frac{\epsilon\lambda_1}{2}(t - t_0)\mathcal{N}'M_P(-\lambda_2)M_P(s)[\exp\{2D(t - t_0)\lambda_2s\} - 1]. \tag{4.3.3}$$

En consecuencia el  $n$ -ésimo momento de la variable aleatoria  $X$  cuya función de densidad es  $P_V(x, t; x_0, t_0)$  está dado por

$$\mathbf{E}_{P_V}(X^n) = \mathbf{E}_P(X^n) + \frac{\epsilon\lambda_1}{2}(t - t_0)\mathcal{N}'M_P(-\lambda_2)\frac{d^n}{ds^n}[\exp\{2D(t - t_0)\lambda_2s\} - 1]|_{s=0}. \tag{4.3.4}$$

# Capítulo 5

## Conclusiones

La herramienta que se desarrolló en este trabajo, ofrece un método para determinar de manera analítica las funciones de transición de un proceso estocástico asociado a una partícula Browniana afectada por un potencial conservativo. Con las funciones de transición de un proceso estocástico se puede obtener toda la información relevante del proceso, según se vio en el capítulo 1, de modo que la obtención de dichas funciones era el principal objetivo, el cual se logró satisfactoriamente. La condición de que el valor del potencial se viera afectado por una constante perturbativa, cuya magnitud además se pidió fuera muy pequeña, fue necesaria para que las aproximaciones a primer orden de las funciones de transición y la función generadora de momentos, tuvieran un rango aceptable de validez. Como ya se ha mencionado, este trabajo se basó y se inspiró en [1], en donde el principal objetivo fue obtener sólo aproximaciones de las funciones de transición. En la presente investigación se desarrollaron las aproximaciones y además se obtuvieron soluciones exactas para un par de casos, dejando las aproximaciones para los casos en que las formas exactas de las funciones de transición no fueran asequibles, por lo que se puede decir que se logró un poco más de lo que en [1] se hizo. La herramienta que se obtuvo puede aplicarse a los potenciales conservativos más comunes. En este trabajo sólo se aplicó a pocos ejemplos unidimensionales, sin embargo, se puede hacer lo mismo para los casos multidimensionales. Hay que resaltar que todo lo que se hizo está basado en los métodos de la integral de trayectoria, la cual permite establecer un vínculo entre la mecánica clásica y los procesos estocásticos.

# Bibliografía

- [1]. E. Ramírez, J. N. Herrera, and M. I. Martínez, Getting a stochastic process from a conservative Lagrangian: A first approach, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 448, pp. 1 - 9, 2016.
- [2]. R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume, *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics*, in: Springer Series in Solid-State Sciences, Springer, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [3]. R. Kubo, The fluctuation–dissipation theorem, *Rep. Progr. Phys.* 29 (1) (1966) 255.
- [4]. A. Donev, B.J. Alder, A.L. Garcia, Stochastic hard-sphere dynamics for hydrodynamics of nonideal fluids, *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008) 075902.
- [5]. A. Donev, J.B. Bell, A. de la Fuente, A.L. Garcia, Diffusive transport by thermal velocity fluctuations, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 204501.
- [6]. S. Delong, F.B. Usabiaga, R. Delgado-Buscalioni, B.E. Griffith, A. Donev, Brownian dynamics without Green’s functions, *J. Chem. Phys.* 140 (13) (2014).
- [7]. L. Landau, E. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1959.

- [8]. H.C. Öttinger, *Beyond Equilibrium Thermodynamics*, John Wiley Sons, 2005.
- [9]. A. Donev, J.B. Bell, A. de la Fuente, A.L. Garcia, Enhancement of diffusive transport by non-equilibrium thermal fluctuations, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* 2011 (06) (2011) P06014.
- [10]. B.Z. Shang, N.K. Voulgarakis, J.-W. Chu, Fluctuating hydrodynamics for multiscale modeling and simulation: Energy and heat transfer in molecular fluids, *J. Chem. Phys.* 137 (4) (2012).
- [11]. N.K. Voulgarakis, J.-W. Chu, Bridging fluctuating hydrodynamics and molecular dynamics simulations of fluids, *J. Chem. Phys.* 130 (13) (2009) 134111.
- [12]. B.Z. Shang, N.K. Voulgarakis, J.-W. Chu, Fluctuating hydrodynamics for multiscale modeling and simulation: Energy and heat transfer in molecular fluids, *J. Chem. Phys.* 137 (4) (2012) 044117.
- [13]. A. Donev, A. Nonaka, Y. Sun, T. Fai, A. Garcia, J. Bell, Low mach number fluctuating hydrodynamics of diffusively mixing fluids, *Commun. Appl. Math. Comput. Sci.* 9 (1) (2014) 47–105.
- [14]. J. Duda, From maximal entropy random walk to quantum thermodynamics, *J. Phys. Conf. Ser.* 361 (1) (2012) 012039.
- [15]. R.P. Feynman, Space–time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Modern Phys.* 20 (1948) 367–387.
- [16]. M. Chaichian, A. Demichev, *Path Integrals in Physics: Volume II Quantum Field Theory, Statistical Physics and other Modern Applications*, Vol. 2, CRC

Press, 2001.

[17]. S.G. Brush, Functional integrals and statistical physics, *Rev. Modern Phys.* 33 (1961) 79–92.

[18]. A. Caldeira, A. Leggett, Path integral approach to quantum brownian motion, *Physica A* 121 (3) (1983) 587–616.

[19]. R. Zwanzig, Nonlinear generalized Langevin equations, *J. Stat. Phys.* 9 (3) (1973) 215–220.

[20]. E. Santos, Interpretation of feynman formalism of quantum mechanics in terms of probabilities of paths, 2012. ArXiv Preprint arXiv:1210.2210.

[21]. C. Itzykson, J. Drouffe, *Statistical Field Theory*, Vol. 1: From Brownian Motion to Renormalization and Lattice Gauge Theory, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.

[22]. M.G. Calkin, R. Weinstock, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, World Scientific, 1996.

[23]. H. Goldstein, C. Poole Jr., *Classical Mechanics*, Addison Wesley San Francisco, 2002.

[24]. K. Konstantopoulos, Topic: Green's function, Seminar on Brownian Motion, 2011.

[25]. P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley series in probability and mathematical statistics, 1995.

[26]. R.M. Blumenthal, R.K. Gettoor. Markov Processes and Potential Theory. Academic Press, New York, 1968.

[27]. J. E. Marsden, A. Tromba. Vector Calculus. W. H. Freeman and Company. New York, 2012.