



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
GRAVITACIÓN Y ALTAS ENERGÍAS

ESPACIO EMERGENTE EN EL MODELO DE ISING

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
PEDRO JESÚS TREJO CALDERÓN

TUTOR PRINCIPAL
DR. ERICK LEONARDO PATIÑO JAIDAR
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. RODOLFO PATRICIO MARTÍNEZ Y ROMERO
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

CDMX, NOVIEMBRE 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis Padres,
mis hermanas,
Alexandra Elbakyan
...y a la memoria de Carlos Guerra.

Contenido

Introducción	IV
1. Fundamentos	1
1.1. Motivación	1
1.2. Estados enredados y operador de densidad	3
1.3. Entropía e Información mutua	7
1.4. Multidimensional Scaling Method (MDS)	10
2. Geometría emergente debida al entrelazamiento cuántico	17
2.1. Entropía y geometría	17
2.2. Construcción de la geometría	20
3. Geometría emergente en el modelo de Ising	27
3.1. Modelo de Ising en 1D	29
3.2. Modelo de Ising en 2D	34
3.2.1. Exponentes críticos	38
3.2.2. Información mutua cerca de la temperatura crítica T_c	39
4. Discusión y conclusiones	45
4.1. Entropía, geometría y gravedad	45
4.2. Conclusiones y trabajo futuro	47
4.2.1. Sistemas cuánticos, espacios topológicos y complejos CW: una propuesta	48
Bibliografía	53

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mi asesor el Dr. Leonardo Patiño por la comprensión y paciencia que ha tenido conmigo y que me ha permitido terminar este trabajo.

Gracias a la Tía Cony por su bondad al otorgarme una generosa beca con la que pude realizar mis estudios de maestría.

Agradezco a la facultad de Ciencias por el espacio que me proporcionaron durante mis estudios. Sin este, hubiera tenido más conflictos para encontrar un lugar donde poder trabajar.

Esta parte es especial y bastante emotiva para mi, puesto que todo indica que este trabajo será lo último que haré como miembro de la UNAM por, al menos, 4 años. Lo escribo a manera de despedida, además del inconmensurable agradecimiento que le tengo a la UNAM. Mi vínculo con esta maravillosa casa de estudios comenzó en 2005, cuando fue aceptado en el CCH Oriente. Mi primer Goya fue una experiencia religiosa y desde ese momento supe que tengo la sangre azul y la piel dorada. Mi segundo año en el CCH definió mi vida: gracias al profesor de Física que tuve en ese año fue que consideré dedicarme a la ciencia. Espero que, donde quiera que esté el Fís. Ismael Molina Romero, sepa que uno de sus estudiantes de bachillerato fue tocado y motivado por su pasión por la física, y que también desarrolló esa convicción por hacer ciencia. A pesar de lo anterior, tuve mis dudas y terminé por solicitar mi ingreso a la carrera de ingeniería mecánica, mi primer gran error en la vida, pues en ese momento pensé que lo mejor sería asegurarme una estabilidad económica sin dejar de lado mi convicción por la física. Craso error.

Como estaba previsto, terminé el bachillerato en 3 años, e ingresé a la carrera de ingeniería mecánica. Pase 3 años con más pena que gloria en la facultad de ingeniería, en gran parte porque nunca fue lo que buscaba. Decidí presentar mi examen de admisión para cambiarme a Física en la segunda vuelta de exámenes para ingresar en el ciclo 2012, es decir, decidí cambiarme después de estar tres años «*estudiando*» ingeniería mecánica (destripe: sí logré entrar).

Ya estando en la facultad, me preguntaba qué rama de la física elegiría, eventualmente, para dedicarme a ello. Sabía que no quería ser un «*jalacables*» por lo que quedaba ser un teórico inútil. La idea de ser inservible me hacía(hace) bastante feliz. Después de varios titubeos y de trabajar un rato en óptica cuántica, decidí intentarlo en el área de gravitación y altas energías. Primero hice mi servicio social con el Dr. Saúl Ramos y después mi tesis de licenciatura con el Dr. Leonardo Patiño, con quien seguí trabajando en la maestría, y que conllevó a realizar el trabajo que estoy presentando.

Mis últimos renglones como estudiante de la UNAM los dejo para que aquellos que se interesaron o encuentren útil este trabajo, para que sepan que tuvo más de fondo que los resultados que aquí aparecen. Este escrito es un resumen de muchos años de preparación, esfuerzo y dedicación, condensados en una tesis.

Siempre estaré agradecido con la UNAM, y siempre llevaré mi sangre azul y piel dorada a donde quiera que vaya.

Me gustaría también agradecer a mi buen amigo Joaquín, quien me estuvo apoyando en mis momentos difíciles y ha sido de las pocas personas que han logrado entender mi situación. También quiero agradecer a Axel, por ser la voz de mi conciencia cuando he tocado fondo o me he encontrado en la más profunda depresión y con ganas de mandar todo al demonio. Agradezco a mis amigos: Sebastián, José Juan, Mario, Ernesto, quiénes han sido grandes amigos desde que inicié la carrera. También tiene una mención muy especial a mis amigos de casino: Alba, Arantza, Citlalli, Maryana, Mike, César, Ángel, Francisco, Lorz, Rubén, con quienes he pasado momentos muy padres y divertidos. Hicieron que la última parte del proceso de graduación fuera menos horroroso y molesto. Si faltó alguno, no se ofenda, a todos los quiero por igual.¿, son importantes en mi vida.

Finalmente, quiero agradecerle a Yanín, por todo lo que me dio, por ser una excelente compañera de vida y una gran mujer. Siempre tendrás un lugar especial en mi corazón y en mi vida, gracias a ti es que este trabajo pudo concretarse. No tendré más que palabras de cariño y agradecimiento para ti.

Introducción

El presente trabajo utilizó la teoría desarrollada en [1] para construir el espacio emergente en el modelo de Ising en una y dos dimensiones. Dicha teoría yace en la idea de que existe una conexión entre entropía y gravedad como lo sugieren los trabajos [2, 3, 4, 5, 6]. Durante el capítulo 1 se revisan los antecedentes y hallazgos que llevaron a esta idea, además de algunos conceptos clave para el entendimiento de la propuesta.

A partir de la entropía de entrelazamiento es posible definir una noción de distancia en un conjunto de puntos cuyos elementos son subespacios de un espacio de Hilbert total, en los cuales puede descomponerse el espacio de estados de un sistema. En [1] proponen una estructura de gráfica para este conjunto de puntos, como se explica en el capítulo 2. Sin embargo, en el transcurso de este proyecto se encontraron algunas inconsistencias con tal construcción, pues no permite usar un espacio de Hilbert 2-dimensional para generar un espacio unidimensional a la vez que presentan el espacio generado por una cadena de Heisenberg antiferromagnético. Para dar consistencia a este aspecto, se propone considerar a estos puntos simplemente como un conjunto, al cual se le dotará de propiedades geométricas a través de cálculos posteriores, inspirado en este trabajo. El tratamiento está inspirado por [1], pero supera la limitante mencionada arriba. Además, en este trabajo se hace una ligera corrección en la definición de distancia con la finalidad de garantizar que el espacio métrico obtenido pueda representarse de manera isométrica en un espacio euclideano.

En el capítulo 3 se presenta el modelo de Ising y, usando la teoría expuesta en

el capítulo 2, se reproduce un segmento de recta para el modelo de Ising en una dimensión, mientras que en el modelo bidimensional se encontró una sección de un plano, debido a que se utilizó una cantidad finita de puntos. En el primer ejemplo se tiene la ventaja respecto a [1] de no haber usado una teoría de campo para calcular los correladores, que sirven para estimar la entropía de entrelazamiento. En el segundo ejemplo se construyó un segmento de plano a la temperatura crítica del sistema, detectando que cerca de esta última, existe cierta sensibilidad en el método respecto a la definición de distancia que se tome.

En el capítulo 4 se hace la discusión de los resultados obtenidos en este trabajo, así como varias directrices en las que se puede seguir investigando desde este enfoque donde el espaciotiempo y la gravedad son un fenómeno emergente debido al entrelazamiento cuántico.

■ 1.1. Motivación

Uno de los grandes problemas que quedan sin resolver en física es la incompatibilidad de la mecánica cuántica y la relatividad general. Ambas teorías son exitosas en sus respectivas escalas, no obstante, aun se carece de una teoría cuántica de la gravedad o un mejor entendimiento *gravitacional* de la mecánica cuántica. Hasta el momento se ha logrado conciliar la mecánica cuántica con la relatividad especial a través de la teoría cuántica de campos, la cual es la herramienta fundamental para el entendimiento de las interacciones fundamentales que suceden en la naturaleza, salvo la gravedad, y que ha conllevado a la construcción del modelo estándar de partículas. Dicho de otro modo, hasta el momento se tiene una descripción de tres de las cuatro interacciones fundamentales que se conocen en la naturaleza, gracias a la combinación de la mecánica cuántica y la relatividad especial. Si bien aun no se conoce todo respecto a la naturaleza de las interacciones que describe el modelo estándar, se tiene un panorama bastante amplio respecto a lo que se ha logrado entender del *comportamiento cuántico* de la materia.

Existen muchas propuestas para establecer una teoría que contemple la gravedad en las interacciones cuánticas como la teoría de cuerdas o la teoría cuántica por lazos (LQG por sus siglas en inglés), por nombrar las más famosas hasta el momento. Dentro de los desarrollos en teoría de cuerdas existe una rama que ha cobrado mucha fuerza dentro de la comunidad científica debido a su poder de predicción, la llamada correspondencia norma/gravedad establecida por Juan Maldacena [7]. En este formalismo,

se postula una dualidad entre una teoría gravitacional y una teoría cuántica de campos conforme; para los lectores interesados en ahondar más respecto a los avances de este tema, pueden consultar [8] y las referencias que hay en él.

Años más tarde, en 2013, Maldacena y Susskind sugirieron, en el contexto de la correspondencia norma/gravedad, que el enredamiento cuántico en una teoría de campos es equivalente a la existencia de puentes de Einstein-Rosen en la teoría dual gravitacional [2]. A partir de que este artículo vió la luz, la comunidad científica se volcó a prestar atención a las propiedades del enredamiento cuántico y entropía de entrelazamiento, así como su traducción a la teoría gravitacional dual. En este aspecto se ha encontrado aplicación de esta herramienta a problemas de información cuántica que antes eran difíciles de atacar debido a lo complejo que puede llegar a ser el calcular la entropía de entrelazamiento. Particularmente, también cobró fuerza la idea de que el espaciotiempo y la gravedad pueden emerger como consecuencia del entrelazamiento cuántico pues en los trabajos [4, 9] la entropía de entrelazamiento en una región de la CFT es tal que corresponde a una superficie de codimensión dos extremal. Por otra parte, en [10, 11] encontraron que la métrica de la teoría gravitacional puede recuperarse tomando una infinidad de curvas que atraviesen una superficie en el bulto ancladas a la frontera del espacio, que es donde se encuentra la teoría de campos.

Esta aproximación tiene sus problemas pues, a pesar de tener un entendimiento microscópico de la entropía, sólo se han podido recuperar las ecuaciones de Einstein hasta orden lineal. No obstante, se espera que puedan recuperarse en su totalidad ya que las ecuaciones de Einstein implican la primera ley de enredamiento [5, 6].

La idea de un espacio emergente no es nueva como puede verificarse en [12], sin embargo, en los últimos años se ha explorado de manera activa debido a lo que mencionado arriba, aunado a un trabajo de Ted Jacobson [3], en donde logra recuperar las ecuaciones de Einstein usando una teoría cuántica de campos en fondos curvos. Al igual que en los trabajo de correspondencia norma/gravedad, la entropía juega un papel preponderante en el desarrollo de la teoría, lo que sugiere que, en caso de que el espaciotiempo y la gravedad sean un fenómeno emergente, la entropía debe ser protagonista en la construcción del modelo. En el formalismo desarrollado por Ted Jacobson, se obtienen las ecuaciones de Einstein completas, pero tiene el defecto de que carece de una definición microscópica y precisa de la entropía pues la aproximación es semiclásica.

En vista de lo expuesto con anterioridad, el desarrollar todo un programa para

buscar la emergencia del espaciotiempo debido a la mecánica cuántica suena como algo bastante prometedor y, como es evidente, no es una empresa sencilla. Este trabajo toma como base parte de la teoría desarrollada en los artículos de Sean Carroll [1], en donde prescinde de la correspondencia norma/gravedad y toma como punto fundamental el entrelazamiento cuántico para obtener un espacio emergente, teniendo como finalidad encontrar el espacio de un sistema específico: el modelo de Ising 1D y 2D. El extender la investigación mencionada tiene por objetivo entender mejor el programa desarrollado, así como sus limitantes con la intención de contribuir en el desarrollo de un formalismo más robusto que pueda contemplar más casos que los considerados inicialmente en los trabajos citados, tener una mejor comprensión del papel que juega la entropía en la emergencia del espacio y dar un paso hacia adelante en del papel que juega la gravedad a escalas muy pequeñas.

Más adelante se expondrá, de manera precisa, la forma en que el espacio emerge pero antes es necesario desarrollar varios conceptos fundamentales para el entendimiento del plan propuesto por Sean Carroll y su grupo de trabajo.

■ 1.2. Estados enredados y operador de densidad

La mecánica cuántica es la teoría que describe el mundo microscópico, en donde falla la física clásica y el *sentido común* pues tiene predicciones que van en contra de lo que observa una persona en su vida cotidiana. Uno de estos fenómenos que resultan contraintuitivos, desde el punto de vista clásico, es el **enredamiento** o **entrelazamiento** de partículas, cuyo comportamiento es consecuencia de las leyes de la mecánica cuántica y es lo que se explicará a continuación.

Un sistema cuántico, como bien se sabe, tiene asociado un espacio de Hilbert, el cual está determinado por todos los estados en los que puede encontrarse al sistema. Los observables físicos están representados por operadores hermitianos cuyos eigenvalores están asociados con los valores esperados de esta magnitud, estos se pueden recuperar a través de la realización de mediciones de dicha cantidad. Para una partícula, este espacio de estados se puede descomponer en subespacios asociados a eigenvalores de observables como la energía, la componente del momento angular en alguna dirección, el momento angular total, el momento lineal, etc., de manera que puede encontrarse una base de estados que sean invariantes de estos operadores. Esta descomposición permite describir completamente a la partícula en cualquier estado, que estará descrito por una combinación lineal de los estados invariantes de los

observables de interés. Para un conjunto de partículas¹, el espacio de Hilbert asociado está dado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada una de las partículas, esto es, para la i -ésima partícula se tiene un espacio de Hilbert \mathcal{H}_i , de manera que el estado del sistema, $|\psi\rangle$, es un elemento del espacio de Hilbert

$$\mathcal{H} = \bigotimes_i \mathcal{H}_i.$$

Dado que para cada espacio de Hilbert \mathcal{H}_i existe una base $\{|e_j\rangle_i\}_{j \in J}$, donde J es un conjunto de índices, puede construirse una base para \mathcal{H} tomando el producto tensorial de la bases, esto es, el conjunto

$$\{\otimes_i |e_j\rangle_i : i \in I, j \in J\},$$

donde I tiene la misma cardinalidad que el conjunto de subsistemas del total. A pesar de que se pueden tener otras bases, esta en particular es interesante pues arroja cierta información respecto al comportamiento de los subsistemas como se verá a continuación. Si se tiene un estado $|\Psi\rangle$ en el espacio Hilbert \mathcal{H} , uno puede preguntarse si existen estados $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$ tales que

$$|\Psi\rangle = \bigotimes_i |\psi_i\rangle, \tag{1.2.1}$$

Naturalmente la respuesta a la pregunta anterior es que no siempre es posible encontrar dichos estados, de manera que puede hacerse una distinción entre los estados que admitan esta descomposición y los que no. Cuando un estado se puede expresar como (1.2.1) se dirá que el estado es **puro**, en caso contrario, el estado se llamará **enredado** y admitirá ser escrito como una combinación lineal de estados de la forma (1.2.1).

Los estados enredados tienen la particularidad de que la medición de dos observables de distintos subsistemas no son independientes una de la otra, es decir, si el i -ésimo subsistema y el j -ésimo subsistema tiene asociados un observable O_i y O_j , entonces al medir O_i se tendrá información del observable O_j y viceversa, por ejemplo: si se toma el caso de dos partículas de espín un medio, cuyo espacio de

¹En el caso de partículas no interactuantes es claro que el espacio de estados del sistema debe descomponerse así aunque, en general, la descomposición del espacio de Hilbert del sistema dependerá, en gran medida, del tipo de interacción que exista entre sus componentes, es decir, del Hamiltoniano al cual está sujeto el sistema.

Hilbert tiene dimensión 2, se toma la base de eigenestados del operador S_z , denotados por $\{|+\rangle_i, |-\rangle_i\}$, $i = 1, 2$, y se considera el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 + |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2),$$

se puede saber el valor de S_z^1 al conocer el valor de S_z^2 , y viceversa; si el valor que se mide para la partícula 1 es $S_z^1 = +$, entonces, la partícula 2 arrojará el resultado $S_z^2 = -$. Así, se puede calcular el valor esperado de S_z^1 y S_z^2 y comparar con $S_z^1 \otimes S_z^2$ a través de la función de correlación, cuya definición es

$$\Gamma(S_z^1, S_z^2) = (\langle S_z^1 \otimes S_z^2 \rangle - \langle S_z^1 \rangle \langle S_z^2 \rangle)^2.$$

Cuando el estado es puro, es evidente que la cantidad anterior es cero, y para el estado considerado no sucederá así. Un calculo directo lleva a

$$\langle S_z^i \rangle = 0, \quad \langle S_z^1 \otimes S_z^2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{4},$$

de manera que

$$\Gamma(S_z^1, S_z^2) = \frac{\hbar^4}{16} \neq 0.$$

El ejemplo anterior muestra que existe un vínculo entre enredamiento y los valores de expectación y esto fue relevante en el trabajo que se hizo, también es de esperarse que esta cantidad alcance un máximo y esto estará relacionado de manera directa con el nivel de enredamiento. Al estado que maximiza esta cantidad se le conoce como **estado maximamente enredado**.

En mecánica cuántica, el estado de una partícula queda totalmente descrito por su función de onda, la cual puede descomponerse en una base dada del espacio de Hilbert asociado al conjunto de estados que puede tener la partícula. Ahora bien, se puede tener un conjunto de partículas idénticas en distintos estados, cuya probabilidad dependerá de las condiciones en que se generan, de tal suerte que la función de onda del sistema puede verse como una superposición de productos tensoriales de los distintos estados que puedan tener las partículas. A este conjunto de partículas descritas por esta combinación de estados se le denominará **ensamble**. En la práctica, es difícil determinar el conjunto de estados y sus probabilidades, razón por lo que

es conveniente usar otra forma para describir al sistema, con la que resulta más sencillo trabajar con estados enredados. Este método fue introducido por Landau y se conoce como operador de densidad estadístico o simplemente operador de densidad. Este objeto contiene toda la información relevante al sistema, en particular, sobre el entrelazamiento que pueda existir entre subsistemas, también permite calcular valores esperados, como se puede hacer con la función de onda. El operador de densidad se define como

$$\varrho = \sum_{\alpha} w^{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}|, \quad (1.2.2)$$

donde los coeficientes w^{α} son los pesos estadísticos o las probabilidades de hallar al sistema en el estado $|\psi_{\alpha}\rangle$. En efecto, pues al calcular $\langle \psi_{\beta} | \varrho | \psi_{\beta} \rangle$, que es el valor esperado de ϱ en el estado $|\psi_{\beta}\rangle$ se obtiene

$$\langle \psi_{\beta} | \varrho | \psi_{\beta} \rangle = \sum_{\alpha} w^{\alpha} \langle \psi_{\beta} | \psi_{\alpha} \rangle \langle \psi_{\alpha} | \psi_{\beta} \rangle = w^{\alpha} \delta_{\alpha, \beta} = w^{\beta}.$$

Los coeficientes w^{α} , al tratarse de probabilidades, cumplen con

$$w^{\alpha} \geq 0, \quad \sum_{\alpha} w^{\alpha} = 1,$$

por tanto se sigue

$$\text{tr } \varrho = 1.$$

También es claro de su definición que debe cumplirse que

$$\varrho = \varrho^{\dagger},$$

es decir, es un operador hermitiano.

Lo siguiente es definir una forma de realizar cálculos de las cantidades físicas del sistema a partir de su operador de densidad, esto es, cómo calcular valores esperados de las magnitudes físicas. Dado un operador O asociado a un observable del sistema, su valor esperado estará dado por

$$\langle O \rangle = \text{tr}(\varrho O), \quad (1.2.3)$$

pues de la definición del operador de densidad se llega a

$$\text{tr}(\varrho O) = \sum_{\alpha} w^{\alpha} \langle O \rangle_{\alpha},$$

donde $\langle O \rangle_\alpha = \langle \psi_\alpha | O | \psi_\alpha \rangle$.

Si se quiere analizar solo una parte del sistema total, es necesario encontrar el operador de densidad correspondiente a ese subsistema. Dado que el operador de densidad contiene toda la información del sistema, particularmente, la que proviene de la interacción entre sus elementos y de la correlación entre observables de estos, es natural definir el operador de densidad del subsistema trazando parcialmente el operador de densidad total. Así pues, el operador de densidad reducido al subsistema A es

$$\varrho_A = \text{tr}_{\bar{A}}(\varrho),$$

donde \bar{A} denota al complemento de A .

El operador de densidad tiene muchas más propiedades pero no son relevantes para los fines de este trabajo. El lector interesado puede profundizar en este tema consultando las referencias [13, 14].

■ 1.3. Entropía e Información mutua

En termodinámica y física estadística, se entiende a la entropía como una medida de la cantidad de microestados que componen un estado macroscópico del sistema termodinámico en cuestión. Dicho estado tendrá una mayor entropía cuantos más microestados puedan componerlo. La forma en que está definida la entropía, según está escrita en el epitafio de Boltzmann, es

$$S = k_B \ln \Omega, \tag{1.3.1}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y Ω es el hipervolumen que ocupan los estados accesibles del sistema en el espacio fase.

Existe una versión *cuántica* de entropía en la cual no existe, a priori, una noción de temperatura, lo cual tiene sentido físico pues se está tratando con estado y no son observables físicos. La entropía en un sistema cuántico está relacionada con la concepción estadística para variables aleatorias, a esta cantidad se le conoce como **entropía de Von Neumann** y se define por

$$S = -\text{tr}(\varrho \log \varrho). \tag{1.3.2}$$

De acuerdo a (1.2.3), puede pensar a la entropía de Von Neumann como el valor esperado del operador $\log \varrho^{-1}$. Debe observarse que esta cantidad es positiva; en el

caso de un espacio de Hilbert de dimensión finita es relativamente sencillo verificar esto pues, dado que el operador de densidad es hermitiano, entonces, por el teorema espectral, existen eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ y eigenvectores e_1, e_2, \dots, e_D , $d \leq D$, base del espacio de Hilbert, tales que ϱ tiene una representación matricial diagonal en esta base. Así, se sigue que

$$S = - \sum_a \lambda_a \ln(\lambda_a),$$

luego, dado que la traza es invariante ante cambios de base, se puede concluir lo siguiente

$$\text{tr } \varrho = \sum_a \lambda_a = 1.$$

Por otro lado, usando el mismo argumento que se usó para w^α , se llega a

$$0 \leq \lambda_a.$$

Juntando estos resultados se obtiene la desigualdad

$$0 \leq \lambda_a \leq 1 \implies S \geq 0.$$

Una propiedad importante de la entropía de Von Neuman es la siguiente: supóngase que el operador de densidad está dado por

$$\varrho = \frac{1}{N} \mathbb{1}_N,$$

donde $\mathbb{1}_N$ es la matriz identidad de dimensión N . Al calcular su entropía se obtiene

$$\begin{aligned} S(\varrho) &= -\text{tr}(\varrho \ln \varrho) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \ln N \\ &= \ln N, \end{aligned}$$

por lo que la entropía tendrá como cota superior la cantidad

$$S \leq \ln N,$$

pues el operador usado para este cálculo resulta ser un estado cuyo enredamiento es máximo.

Si se tienen dos operadores de densidad, ϱ y σ , para un sistema, se puede calcular la entropía de ϱ relativa a σ a través de la fórmula

$$S(\varrho||\sigma) = -\text{tr}(\varrho(\log \varrho - \log \sigma)). \quad (1.3.3)$$

La entropía relativa mide, en cierto sentido, la diferencia entre los operadores ϱ y σ . En teoría de la información y probabilidad, a la entropía relativa también se le conoce como divergencia de Kullback-Liebler.

En particular, si se toman dos subsistemas A y B , a partir del operador de densidad ϱ del sistema, puede calcularse el operador reducido sobre $A \cup B$, A y B y luego, usando (1.3.3), se calcula la entropía relativa entre ambas. A esta última se le conoce como **información mutua** y está dada por

$$I(A : B) = S(\varrho_{AB}||\varrho_A \otimes \varrho_B) = -\text{tr} \varrho_{AB}(\log \varrho_{AB} - \log \varrho_A \otimes \varrho_B). \quad (1.3.4)$$

La expresión anterior es cero si el operador reducido ϱ_{AB} es igual al producto tensorial de los operadores reducidos ϱ_A y ϱ_B , entonces, la información mutua es una medida del enredamiento entre dos subsistemas de un sistema y arroja información de la correlación que existe entre los subsistemas, ya que es una cota superior para función de correlación, pues se tiene

$$I(A : B) = S(\varrho_{AB}||\varrho_A \otimes \varrho_B) \quad (1.3.5)$$

$$\geq \frac{1}{2}|\varrho_{AB} - \varrho_A \otimes \varrho_B|^2 \quad (1.3.6)$$

$$\geq \frac{(\text{tr}((\varrho_{AB} - \varrho_A \otimes \varrho_B)(O_A O_B)))^2}{2\|O_A\|\|O_B\|} \quad (1.3.7)$$

$$= \frac{(\langle O_A O_B \rangle - \langle O_A \rangle \langle O_B \rangle)^2}{2\|O_A\|\|O_B\|}. \quad (1.3.8)$$

Otra propiedad que tiene la información mutua es que es semipositiva, pues satisface

$$I(A : B) \geq 0. \quad (1.3.9)$$

Ademas, cumple con ser simétrica, esto es

$$I(A : B) = I(B : A). \quad (1.3.10)$$

Dadas estas propiedades, uno puede pensar que la información mutua por si misma sería suficiente para definir una métrica, sin embargo, no cumple que la información mutua sea cero cuando se calcula sobre un mismo sistema, de hecho, sucede que

$$I(A : A) = S(A),$$

este resultado se sigue de otra definición equivalente a (1.3.4) como se muestra en [15], la cual es

$$I(A : B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}). \quad (1.3.11)$$

Para que la información mutua sea, efectivamente, una distancia debería cumplir

$$I(A : A) = 0,$$

lo cual no siempre se cumple pues depende de la región A y del estado.

No todo está perdido pues, como se verá más adelante, puede usarse la información mutua para definir una métrica en función de esta con las propiedades adecuadas para que cumpla con las axiomas que debe satisfacer una métrica.

■ 1.4. Multidimensional Scaling Method (MDS)

En este apartado se detallará el método que se usará para encontrar una representación euclideana del espacio métrico² originado por el sistema cuántico. La exposición que viene a continuación está basado en [18]. Considérense dos vectores en un espacio euclideano $\mathbf{x}_i = (x_i^1, \dots, x_i^N)$, $\mathbf{x}_j = (x_j^1, \dots, x_j^N)$, con los cuales se puede calcular la cantidad

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^N x_i^k x_j^k = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j.$$

Nótese que la magnitud de un vector x_i corresponde con

$$h_i = \sqrt{b_{ii}} = \|\mathbf{x}_i\|,$$

ya que, como es usual, la norma de un vector en un espacio euclideano, se define como la raíz cuadrada del producto de interior del vector consigo mismo.

²Ver [16, 17]

Dados dos vectores, el ángulo que forman está dado por

$$\cos \theta_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i\| \|\mathbf{x}_j\|} = \frac{b_{ij}}{h_i h_j}, \quad (1.4.1)$$

de esta manera las cantidades b_{ij} codifican completamente las relaciones entre un conjunto de vectores, sus magnitudes y el ángulo que forman entre ellos. La construcción anterior puede escribirse como una matriz \mathbf{B} de dimensión $m \times m$ para un conjunto de m vectores, cuya entradas estarán dadas por b_{ij} .

En un espacio euclideano de dimensión N se satisface la ley de cosenos para cualesquiera puntos (vectores) $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$, entonces, tomando como punto de referencia a \mathbf{x}_0 , se debe cumplir la fórmula

$$d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) + d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0) - 2d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0)d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0) \cos \theta_{ij},$$

que despejando conlleva a

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0)d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0) \cos \theta_{ij} = \frac{1}{2} \left(d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) + d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0) - d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right). \quad (1.4.2)$$

Usando (1.4.1) se puede relacionar a los elementos de la matriz \mathbf{B} con las distancias y magnitudes entre los distintos vectores a través de la fórmula

$$b_{ij} = \frac{1}{2} \left(d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0) + d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_0) - d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \right). \quad (1.4.3)$$

Una elección estándar para el origen de coordenadas es el centroide, \mathbf{z} , de manera que el producto interior b_{ij} se ve modificado al recorrerse las componentes de los vectores como

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^N (x_i^k - z^k)(x_j^k - z^k), \quad (1.4.4)$$

donde

$$\mathbf{z} = (z^1, z^2, \dots, z^N) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_1^k, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_2^k, \dots, \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_N^k \right).$$

Sustituyendo esto último en (1.4.4), reordenando los términos y usando las ecuaciones (1.4.1) y (1.4.2) se llega a

$$b_{ij} = -\frac{1}{2} \left(d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l) - \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N d^2(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l) + \frac{1}{N^2} \sum_{l,m=1}^N d^2(\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_m) \right). \quad (1.4.5)$$

De esta manera, se tiene determinada la matriz \mathbf{B} en función de las distancias, tomando como origen de coordenadas el centroide del conjunto de puntos. Lo siguiente es encontrar el conjunto de vectores columna $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^N$ tales que

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}, \quad (1.4.6)$$

donde

$$\mathbf{X} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_N].$$

Nótese que la expresión anterior es única salvo una transformación ortonormal de coordenadas pues si $\mathbf{X}' = \mathcal{O}\mathbf{X}$ y $\mathcal{O}^T \mathcal{O} = I$, entonces

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{X}')^T \mathbf{X}' = (\mathcal{O}\mathbf{X})^T (\mathcal{O}\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathcal{O}^T \mathcal{O} \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Las propiedades de distancia garantizan que la matriz \mathbf{B} sea simétrica, de manera que es diagonalizable, es decir, existe una matriz Λ tal que

$$\mathbf{B} = \Lambda \mathbf{D} \Lambda^T. \quad (1.4.7)$$

Entonces, una de las soluciones para la ecuación (1.4.6) es tomar los eigenvectores $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \leq N}$ de manera que

$$\mathbf{X} = [\sqrt{\lambda_1} \mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_N} \mathbf{e}_N], \quad (1.4.8)$$

donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N$.

Dado un espacio métrico (X, d) , en principio arbitrario, se puede tomar una colección de puntos $\{p_1, \dots, p_m\}$ y construir una matriz \mathbf{B} , según la fórmula (1.4.5), diagonalizarla y encontrar los eigenvectores, cuyas componentes x^i , definirán un encaje de los puntos $\{p_i\}_{i=1}^m$ en un \mathbb{R}^D , con $D \in \mathbb{N}$. La dimensión del espacio euclideo al que pertenecen los $\mathbf{x}_i = \sqrt{\lambda_i} \mathbf{e}_i$ estará definida por todos los eigenvalores distintos de cero que se obtengan de la diagonalización, es decir, del rango de la matriz \mathbf{B} , más aún, determinan la dimensionalidad del espacio (X, d) . Las coordenadas del encaje isométrico de los m puntos estarán dadas por

$$\tilde{\mathbf{X}} = [\sqrt{\lambda_1} \mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_D} \mathbf{e}_D \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}] \quad (1.4.9)$$

donde d es el rango de la matriz \mathbf{B} y $\mathbf{0}$ es el vector columna cero. Es conveniente aclarar que la cantidad de vectores $\mathbf{0}$ está relacionado con el espacio en donde se quiera hacer el encaje, como se verá más adelante con el modelo de Ising en una dimensión.

El encaje hecho a través del MDS puede resultar en un espacio que no sea exactamente euclideo, pero sí en buena aproximación. Se puede considerar que el encaje es válido si la cantidad

$$\epsilon_d = 1 - \frac{\sum_{i=1}^d |\lambda_i|}{\sum_{i=1}^N |\lambda_i|}, \quad (1.4.10)$$

es suficientemente pequeña. La forma en la cual se puede cuantificar la distorsión del encaje es a través de la **función de esfuerzo**

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{\left(\sum_{p,q} d(p,q)d_E(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q)\right)^2}{\sum_{p,q} d^2(p,q)d_E^2(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q)}}, \quad (1.4.11)$$

donde $d_E(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q)$ representa la distancia euclidea, de los puntos p y q , cuyo encaje en el espacio euclideo corresponden a \mathbf{x}_p y \mathbf{x}_q .

En este punto caben varias observaciones importantes respecto al método. La primera cosa que hay que notar es que, a pesar de que la matriz es simétrica y diagonalizable, no puede garantizarse que los eigenvalores obtenidos sean positivos de tal suerte que las raíces cuadradas en (1.4.8) estén bien definidas. En caso de que existan eigenvalores negativos lo que puede decirse respecto al espacio métrico con el que se construyó la matriz \mathbf{B} es que no es euclideo, es decir, no admite un encaje isométrico en un \mathbb{R}^n . Esto no quiere decir inmediatamente que el espacio sea Lorentziano, ni mucho menos. Puede tomarse (\mathbb{R}^n, d_1) ³ y se llegará a que no puede hacerse un encaje euclideo, lo cual era de esperarse a pesar de que se trate de un espacio plano, pues la distancia no proviene de un producto interior. Las figuras 1.1 y 1.2 muestran el *encaje* y los eigenvalores, para este ejemplo, usando el método de escalamiento multidimensional (MDS). Esto restringe de manera drástica la forma que debe tener la distancia en el espacio métrico para que puede encajarse en un espacio euclideo. A fin de cuentas, el método lo que hace es, en cierto modo, establecer un difeomorfismo isométrico entre el espacio métrico y un espacio euclideo.

Si se quiere establecer una relación entre un espacio euclideo y un espacio generado por un sistema cuántico usando este método, es fundamental definir de manera adecuada la métrica en el espacio generado por el sistema cuántico, de tal suerte que las distancias obtenidas entre los puntos del espacio sean lo más parecidas

³Ver [16, 17]

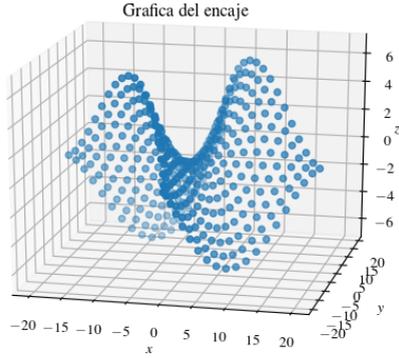


Figura 1.1: Pseudoencaje del espacio generado por el espacio métrico (\mathbb{R}^2, d_1) , considerando 400 puntos.

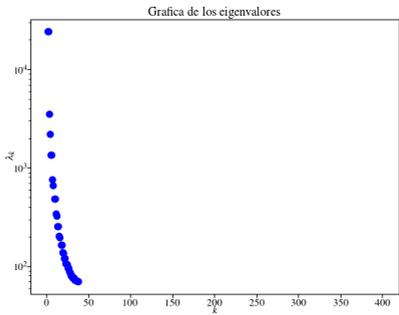


Figura 1.2: Gráfica de los eigenvalores de la matriz de productos interiores para (\mathbb{R}^2, d_1) , con 400 puntos.

a una distancia que provenga de un producto interior. Esto último implica que la forma del espacio métrico no es completamente arbitrario, sino que la métrica debe cumplir con ciertas propiedades para que sea candidato a poder encajarse en un espacio euclideo y, en un sentido más profundo, a generar una variedad.

Por supuesto, esta no es la única forma de verificar que el espacio generado sea un espacio euclideo donde la distancia sea inducida por un producto interior, sin embargo, es una forma rápida de corroborarlo y entender mejor la emergencia del espacio. También, como sugiere Carroll en su trabajo [1], puede verificarse usando el *cálculo de Regge* [19]. Aun así, debido a que ambos enfoques yacen en la misma estructura geométrica, debe ser indistinto el método que se use para corroborar la teoría.

El siguiente capítulo desarrollará la forma en que se puede obtener un espacio métrico a partir de un sistema cuántico, usando la entropía de entrelazamiento para definir distancias en este espacio. Se revisarán las propiedades de este espacio discreto que, en un límite adecuado, debe resultar en un espacio continuo.

Capítulo 2

Geometría emergente debida al entrelazamiento cuántico

En este capítulo se buscará establecer la geometría emergente a partir de un sistema cuántico dado. La pieza clave para obtener un espacio métrico a partir de este sistema es la información mutua o la entropía de entrelazamiento, pues definirá la distancia entre puntos correlacionados. Se desarrollará aquí la teoría que puede encontrarse en [1].

■ 2.1. Entropía y geometría

Como ya se mencionó, la forma en que se establecerá la conexión entre un sistema cuántico y un espacio euclideano será a través de la entropía de entrelazamiento. Lo primero a desarrollar para tener una mejor idea de por qué es posible que exista este puente es la **Ley de área de entropía**. El ejemplo clásico en donde se tiene una ley de área es un agujero negro, cuya entropía en 3+1 dimensiones está dada, en unidades naturales, por

$$S_{BH} = \frac{2\pi\mathcal{A}}{\ell_p^2}, \quad (2.1.1)$$

donde ℓ_p es la longitud de Planck reducida y \mathcal{A} es el área del horizonte de eventos. Esta cantidad resultó sorprendente y un tanto extraña, pues para un sistema termodinámico clásico se sabe que la entropía es proporcional al volumen del sistema debido a que es una cantidad extensiva. Esta propiedad de los agujeros negros, o de cualquier

otro sistema que cumpla con una ley de área, debe ser una consecuencia de alguna propiedad del espacio de Hilbert que lo describe.

Por ejemplo, si se considera un conjunto de qubits arreglados en una retícula cuyo espaciado entre cada elemento sea ℓ_0 y cuyos lados midan r , entonces el número total de qubits es proporcional al volumen de la retícula de dimensión D , esto es

$$n \propto \left(\frac{r}{\ell_0}\right)^D.$$

Por su parte, el espacio de Hilbert del sistema completo tendrá por dimensión $N = 2^n$. Si el sistema está máximamente enredado entonces la entropía asociada al operador de densidad que lo describe estará dada por

$$S_{\max} \propto \log_2 N = n,$$

es decir, la entropía máxima del sistema es proporcional a su volumen. No obstante, Bekenstein argumentó que en un agujero negro gran parte de los estados incluidos en el cálculo no son físicos y, en consecuencia, la entropía de un sistema de masa M y tamaño lineal R está acotada por la cantidad

$$S \leq 2\pi RM.$$

Dado que un sistema que satisfaga la desigualdad $GM > R/2$ colapsará eventualmente en un agujero negro, se puede concluir que (2.1.1) representa más bien una cota superior a la entropía de cualquier sistema en el espacio. Esta restricción se conoce como la cota holográfica. Si fuera posible construir un estado con una entropía alta y una energía menor a la de un agujero negro, este estado colapsaría a un agujero negro, lo cual haría que su entropía disminuyera violando así la segunda ley de la termodinámica. La cota de Bousso es una versión covariante de la cota holográfica y con ella 't Hooft y Susskind postularon el principio holográfico, el cual puede enunciarse como: *En teorías con gravedad, el número total de grados de libertad verdaderos dentro de cualquier región es proporcional al área de la frontera de la región.* Dicho sistema puede describirse por un espacio de Hilbert con una dimensión aproximadamente dada por

$$\dim \mathcal{H} \sim e^S \sim \exp\left(\frac{r}{\ell_0}\right)^{D-1}. \quad (2.1.2)$$

Este tipo de comportamientos también se observa en sistemas cuánticos, como sucede en materia condensada, donde no se consideran efectos gravitacionales.

Se dice que un estado $|\psi\rangle$ obedece una ley de área si la entropía S_A , asociada a una región A en el espacio, de la matriz de densidad reducida $\varrho_A = \text{tr}_{\bar{A}} |\psi\rangle \langle\psi|$, puede aproximarse como

$$S_A = \eta \mathcal{A} + \dots, \quad (2.1.3)$$

donde \mathcal{A} es el área de la frontera de la región A y η es una constante. Dicho de otro modo, el término dominante en la entropía es proporcional al área de la frontera de la región considerada. Este tipo de comportamiento se observa en la mayoría de los estados de energía baja en teorías cuánticas de campos con corte en el ultravioleta y aquellos sistemas discretos en materia condensada con hamiltonianos con interacción de corto alcance o de interacción finita entre los distintos componentes. En esta dirección, Ryu y Takayanagi mostraron que, en una teoría de campos conforme, la entropía de una región está relacionada con el área de una superficie extremal en la geometría del bulto dual a la teoría [4].

La existencia de una ley de área no implica por si misma un comportamiento holográfico. La holografía es un postulado acerca del número de grados de libertad en una región, lo cual está relacionado con la entropía máxima posible y no con la entropía de algún estado en específico como en (2.1.3).

Conforme el espaciamiento entre qubits, ℓ_0 , tienda a cero, la dimensión del espacio de Hilbert se volverá infinita como sucede en cualquier teoría cuántica de campos y, en consecuencia, sucede que la entropía de cualquier región en el espacio sea divergente. Ésta última cantidad puede regularizarse, como usualmente se hace con las cantidades físicas en teoría de campos, tomando una versión cuántica de la cota de Bousso. El procedimiento consiste en sustraer a cualquier estado con operador de densidad ϱ_A en una región dada, la entropía del vacío de la teoría, con operador de densidad σ_A . Ésta cantidad se conoce como entropía de Casini y está dada por

$$\Delta S = S(\varrho_A) - S(\sigma_A) = -\text{tr} \varrho_A \log \varrho_A + \text{tr} \sigma_A \log \sigma_A. \quad (2.1.4)$$

La entropía de Casini resulta ser finita a pesar de que las entropías del vacío y del estado en cuestión sean infinitas. Cabe la pregunta de si el espacio de Hilbert físico es de dimensión infinita y la cota holográfica está referida a un entropía medida desde la entropía del vacío o si es de dimensión finita y la regularización es un truco matemático

conveniente para controlar las divergencia que conlleva el tratar con sistemas con grados de libertad infinitos.

Dado este contexto se puede ir más allá y suponer que la cota holográfica no es una desigualdad sino que toda región del espacio la satura, esto es, cada región del espacio tiene una entropía que obedece una ley de área. El trabajo de Jacobson [3] muestra que si la física en la región UV mantiene la entropía finita, entonces a través de un argumento termodinámico se obtiene la emergencia de la gravedad y viceversa. En ese sentido se puede relacionar a la entropía con la gravedad y geometría.

Lo siguiente es describir la forma en que puede generarse un espacio a través de la entropía en sistemas que obedezcan una ley de área, y esto se hará en la siguiente sección.

■ 2.2. Construcción de la geometría

Un sistema cuántico general tiene asociado un espacio de Hilbert, \mathcal{H} , el cual es un espacio vectorial con un producto interior y completo respecto a la norma que induce dicho producto interior. Para este espacio siempre puede encontrarse una base $\{|\phi_i\rangle\}_{i \in I}$, donde I es un conjunto de índices cuya cardinalidad puede ser finita o infinita, la cual satisface la condición

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in I. \quad (2.2.1)$$

Si se quiere obtener mayor información respecto al sistema es necesario conocer el hamiltoniano al cual esta sujeto. A su vez, puede conocerse más respecto al espacio de Hilbert si se sabe cómo puede descomponerse, ya sea en suma directa o en productos tensoriales de subespacios de este espacio. Es claro que la forma explícita del hamiltoniano dependerá tanto de la base que se utilice para el espacio de Hilbert, como de la descomposición que se haga de este último. Por ejemplo, para un par de osciladores armónicos acoplados se puede usar la base dada por los modos normales del sistema. En esta descripción, el hamiltoniano aparece como la suma de dos términos, asociados cada uno a un oscilador armónico y sin acoplamiento entre ellos. Esto sugiere descomponer al espacio de Hilbert en los dos subespacios asociados a cada uno de los osciladores desacoplados, haciendo muy fácil hallar, por ejemplo, el estado base de la teoría. A pesar de la simplicidad del tratamiento anterior, debe recordarse que los modos normales están asociados con estados del sistema completo, y no son propios de solo uno de los dos osciladores originales. El ejemplo anterior pone

en evidencia que no toda descomposición del Hamiltoniano se corresponde con lo que visualizaríamos como una separación del sistema en las partes que consideraríamos como sus constituyentes. Así, una de las cosas que hay que contemplar es que la descomposición elegida corresponda a una en subsistemas y no de los diferentes eigenestados colectivos de todo el sistema considerado. La primera suposición que se hará sobre el espacio de Hilbert, \mathcal{H} , asociado a los estados de un sistema cuántico es que admite la siguiente descomposición

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{H}_{\alpha}, \quad (2.2.2)$$

donde los componentes \mathcal{H}_{α} son espacios de dimensión finita y corresponden a subespacios asociados a subsistemas del espacio total. Al suponer que los subespacios \mathcal{H}_{α} son de dimensión finita se está aceptando que el espacio de Hilbert de una región en el espacio y su entropía están relacionados con un conjunto finito de grados de libertad. Dichos espacios de Hilbert corresponderán a un conjunto de *puntos*, es decir, el conjunto

$$X = \{\mathcal{H}_{\alpha}\}_{\alpha \in A}, \quad (2.2.3)$$

será el espacio donde se definirá, a través de la información mutua, una métrica para volverlo un espacio métrico. En [1], se construye un grafo cuyos vértices corresponden a los elementos de X , y se coloca una arista entre cualesquiera dos de estos últimos para los que la información mutua no sea nula. En principio, las aristas no están dotadas de una longitud a la que se le pueda llamar *distancia* entre los vértices. La distancia la introducen después de manera que el grafo se convierte en un espacio métrico. Si bien esta representación puede facilitar la visualización de las conexiones entre los distintos vértices, existen sistemas no triviales donde se puede caer en errores que, de alguna manera, distorsionen la conexión entre el sistema cuántico y la geometría que genera, dicho de otro modo, no se debe presuponer una geometría a priori aunque parezca evidente del grafo generado. Este trabajo, a diferencia de lo hecho por Carroll y compañía, perseguirá la construcción de un espacio métrico discreto que tenga una realización geométrica a través del método de multiescalamiento dimensional presentado en el capítulo 1. Otra diferencia, al menos conceptual, es que no se considerará la existencia de un espacio o la noción de localidad, a priori, como ellos hicieron en sus ejemplos. Esto porque puede considerarse, siendo estrictos, que el argumento es redundante, ya que parten de una teoría cuántica en donde la noción

de espacio existe y calculan la información mutua entre ellos para generar el espacio donde está definida la teoría. Claro que es un buen ejercicio para verificar que la teoría sea, por lo menos, consistente. No obstante, si de verdad son las interacciones cuánticas las que generan el espaciotiempo, entonces se debe dejar de lado la idea espacio, de manera que la teoría resultante lo haga emerger como una consecuencia de la misma.

Considérese una región en el espacio U y $\{W_i\}_{i \in I}$ una colección de subregiones que no se traslapan entre sí y que cubren al espacio. Para estados cuyo enredamiento es de corto alcance, la entropía de U puede aproximarse a través de la función de corte

$$S(U) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in U, \beta \in U^c} I(W_\alpha : W_\beta), \quad (2.2.4)$$

donde U^c denota al complemento de U . Esta igualdad muestra que es suficiente conocer la información mutua entre subregiones contenidas dentro de una región más grande y subregiones dentro de su complemento para determinar la entropía de dicha región.

Se puede conjeturar que la información mutua captura todo la información de la geometría en este *granulado* que se ha hecho del espacio para estados que obedezcan una ley de área. Para este tipo de enredamiento, es suficiente con determinar la información mutua entre todos los distintos factores para determinar su entropía, aunque esto no suceda para cualquier estado, en general. Así, si se toman particiones más grandes del sistema, la información debida a la entropía de entrelazamiento será *redundante* pues ya estará capturada en la información mutua de sus componentes más pequeños.

Se han discutido algunas de las propiedades de los estados que obedecen una ley de área, en donde existe una noción clara de espacio y localidad. Lo siguiente es pensar en un contexto más general o, mejor dicho, en las propiedades de dichos estados y del espacio de Hilbert al que pertenecen, de manera que se tenga una forma de identificar un estado que obedece una ley de área sin la necesidad de introducir la noción de espacio. Así, un estado que obedece una ley de área, será aquel cuya entropía puede determinarse a través del conocimiento de la información mutua entre los distintos factores en que se descomponga el espacio de Hilbert. A este estado se le dirá, según [1], **redundantemente constreñido**. De forma más precisa, un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, donde \mathcal{H} admite una descomposición como en (2.2.2), se dirá *redundantemente constreñido*

si para cualquier subsistema \tilde{A} construido a partir de un subconjunto de $\{\mathcal{H}_\alpha\}$, su entropía de entrelazamiento puede calcularse con la función de corte (2.2.4), donde $W_\alpha \rightarrow \mathcal{H}_\alpha$, es decir, W_α será el subsistema cuyo espacio de estados es \mathcal{H}_α .

Dado un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ redundantemente constreñido se calcula su operador de densidad ρ y después la información mutua, o su entropía de entrelazamiento, entre los distintos subsistemas \mathcal{H}_i de la descomposición de \mathcal{H} , con la finalidad de establecer un criterio de distinguibilidad. De acuerdo a [1], se puede realizar un grafo tomando como vértices todos los subespacios \mathcal{H}_α , este será el conjunto de vértices, V , del grafo G y se trazan aristas entre aquellos cuya información mutua sea distinta de cero. El grado de un vértice se define como el número de aristas que salen de él, entonces, de acuerdo a la función de corte y a la cota en la entropía se tiene

$$\text{grad}(W_\alpha) = \sum_{\beta} I(W_\alpha : W_\beta) \leq 2S_{\max}(W_\alpha) \leq 2 \ln D_\alpha, \quad (2.2.5)$$

donde $D_\alpha = \dim \mathcal{H}_\alpha$. Esta expresión será analizada más adelante a la luz de los resultados obtenidos por Carroll y los obtenidos en este trabajo ya que lleva a un problema serio respecto a uno de los ejemplos mostrados en [1] y el modelo de Ising en 1D, pues no la satisfacen. Para un sistema de espines, cada espacio de Hilbert de sus componentes tiene dimensión 2, al sustituir en (2.2.5), se obtiene

$$\text{grad}(\mathcal{H}_\alpha) \leq 2 \ln 2 \approx 1.3863,$$

en consecuencia, ningún sistema de espines podría generar, por sí solo, siquiera un espacio de dimensión 1, pues no podría conectarse con más de un subsistema, mientras que en [1] presentan el espacio generado por una cadena de Heisenberg antiferromagnética, considerando como vértices los espacios de Hilbert de cada espinor. De hecho, en su ejemplo, cada espacio comparte información con los demás elementos. Debido a lo anterior, la idea de considerar una gráfica con aristas pesadas a través de la información mutua no parece una idea aceptable. En cambio, si simplemente se piensa en los espacios de Hilbert como *puntos* en un espacio métrico, no se está limitado a que satisfagan dicha expresión. Ahora bien, esto repercute fuertemente en que la entropía de cada subsistema no puede expresarse como (2.2.4), no son estados redundantemente constreñidos, o bien, la definición de estado redundantemente constreñido es deficiente.

Para volver al conjunto X , dado por (2.2.3), en un espacio métrico es necesario definir una distancia. Se seguirá considerando que el número de subsistemas que se

relacionan entre ellos son finitos, debido a que las interacciones siguen siendo de corto alcance. Así, dados dos espacios entrelazados \mathcal{H}_a y \mathcal{H}_b , los cuales serán mapeados en el conjunto X como $\mathcal{H}_a \mapsto p$ y $\mathcal{H}_b \mapsto q$, se determina su distancia a través de la expresión

$$\tilde{d}(p, q) = \ell \Phi(I(\mathcal{H}_a : \mathcal{H}_b)/I_0), \quad (2.2.6)$$

donde I_0 es una constante de normalización asociada a dos subespacios cuya información mutua sea máxima y ℓ es una constante asociado con la longitud característica del sistema. La función Φ debe ser monótona decreciente y positiva. Esta función estará determinada por el tipo de sistema que se esté trabajando, particularmente, con el comportamiento de la información mutua respecto a los distintos subsistemas. Se espera que la información mutua entre los subsistemas \mathcal{H}_a y \mathcal{H}_b sea función de estos, es decir

$$I(\mathcal{H}_a : \mathcal{H}_b) \sim f(a, b),$$

donde a, b son naturales. En principio, no puede asumirse una forma explícita de la función f , aunque pueden hacerse ciertas suposiciones respecto a ella, usando las propiedades que debe cumplir la información mutua. Dado que la información mutua siempre es positiva, la función f también debe serlo, debe ser simétrica, es decir, debe cumplir $f(a, b) = f(b, a)$, también debe considerar que si el sistema es isotrópico, entonces debe ser invariante ante *rotaciones*. Así, una buena suposición es que la información mutua sea

$$I(\mathcal{H}_a : \mathcal{H}_b) = \varphi(\|a - b\|),$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma usual para el caso euclideo. Si el comportamiento es de esta manera, entonces la función Φ debe ser

$$\Phi \sim \varphi^{-1},$$

de tal suerte que

$$\tilde{d}(p, q) \simeq k\|a - b\|,$$

con k una constante positiva de proporcionalidad de acuerdo al sistema bajo consideración.

Cuando dos vértices no se encuentren conectados por una arista, por la misma construcción del grafo, existirá cuando menos una trayectoria entre dichos vértices que consistirá en una sucesión de vértices que sí estén conectadas a través de una

arista. En estos casos, se pueden definir distintas distancias; en [1] sugieren tomar el mínimo de la suma de las distancias, sin embargo, esta distancia conllevaría a generar espacios métricos con mayor similitud a (\mathbb{R}^n, d_∞) , en lugar del espacio euclideo en donde se pretende encajar el espacio (X, d) .

En virtud de lo expuesto arriba, la distancia entre dos puntos cualesquiera p y q del conjunto X estará dada por

$$d(p, q) = \begin{cases} \tilde{d}(p, q) & \text{si } I(\mathcal{H}_p : \mathcal{H}_q) \neq 0, \\ \text{mín}_{\mathcal{C}} \left\{ \sqrt{\sum_{i=0}^m \tilde{d}^2(p_i, p_{i+1})} \right\} & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

donde $p_0 = p$ y $p_{m+1} = q$, y \mathcal{C} son todos las formas posibles que hay de llegar de p hasta q por una sucesión de aristas. De esta manera, el conjunto (X, d) resulta ser un espacio métrico.

Aquí hay un diferencia sutil pero importante para poder encajar el espacio generado por el sistema cuántico en un espacio de dimensión ≥ 2 . En cierto sentido, esta definición recuerda la forma en que deberían de ser las distancias en espacios euclidianos y sí, esa es la intención, pues se busca tener una distancia lo más parecida a la de un espacio euclideo para que provenga de un producto interior, justo como se discutió al final del capítulo 1.

La métrica que se propone en [1] es de la forma

$$d(p, q) = \text{mín}_{\mathcal{C}} \sum_{n=0}^{k-1} \tilde{d}(p_n, p_{n+1}),$$

que, esencialmente, es muy similar a la métrica d_∞ y, como ya se mostró, no admite un encaje a través del MDS con la matriz de productos interiores.

Lo más importante de la estructura en la que yace la relatividad general es la métrica, pues esta dicta la forma que toma el espacio, la cual a su vez está determinada por el contenido de materia. Así, si el espacio es emergente desde esta perspectiva, lo que debe de seguir prevaleciendo es el concepto de producto interior, dado por la métrica, sobre cualquier otra cosa.

Capítulo 3

Geometría emergente en el modelo de Ising

En este capítulo se implementará la teoría desarrollada en el capítulo 2 para el modelo de Ising en 1D y 2D. Se comparará el comportamiento de los espacios obtenidos mediante la fórmula propuesta por Carroll y lo que se propone en este trabajo, basados en la observación hecha al final del capítulo 1.

En sentido estricto, se debería de calcular la entropía de entrelazamiento de cada subsistema considerado (1.3.4), sin embargo, realizar dicho cálculo suele ser muy difícil y, en ciertos casos, sólo se puede hacer mediante métodos numéricos. Si se utiliza la matriz de transferencia, que se definirá más adelante, se puede calcular directamente la entropía de entrelazamiento haciendo uso de la descomposición de Schmidt, como puede verificarse en [20]. También puede calcularse usando el método de *Corner Matrix Transfer* introducido por Baxter [21]. En el modelo de Ising se pueden implementar ambos esquemas para calcular directamente la información mutua, no obstante, en una primera aproximación, es mucho más sencillo calcular los correladores a través de la matriz de transferencia para verificar la teoría. Lo que se está buscando en este trabajo es comprobar la validez de la construcción propuesta en [1], más que nada, en las condiciones adecuadas. Realizar el cálculo de la entropía de entrelazamiento conlleva a detalles más técnicos y de cálculo que físicos, por lo que no se obtendría información adicional sobre los fundamentos de las ideas de Carroll ni tampoco se tendría un mejor entendimiento de la física en la que yace todo lo expuesto

en los capítulos anteriores.

Entonces, al igual que Carroll, se usarán los correladores como una estimación de la información mutua entre subsistemas, con la principal diferencia de que, en este caso, el cálculo se realiza usando la matriz de transferencia. De manera que en ningún momento se introduce una teoría cuántica de campo como hizo él en su trabajo, ni noción alguna de espacio como se verá más adelante. Para el modelo en 1D se recupera un espacio unidimensional como un segmento de recta, mientras que el modelo 2D tiene ciertos problemas técnicos para realizar el cálculo de los correladores de espín, por lo que se usó la función de correlación del parámetro de orden, con esto se recuperó un espacio plano en la temperatura crítica y, para valores cercanos a esta última, se observó una ligera deformación en los bordes del segmento de plano generado. La deformación hallada en este último caso se debe a la elección de la función que se usó para construir la distancia.

La razón por la cual se estudiará el modelo de Ising son sus múltiples aplicaciones a varios problemas físicos. En una dimensión es relativamente sencillo obtener la información termodinámica del sistema tales como la magnetización, la energía libre, la capacidad térmica específica, etc. Cuando se considera el modelo en dos dimensiones las cosas se ponen más interesantes debido a que existen transiciones de fase en el sistema y los cálculos resultan bastante complicados. La solución exacta a este problema en dos dimensiones la dio Onsager y se han hecho estudios exhaustivos a través de su solución. En particular, se tiene una fórmula exacta para hallar el correlador de espín-espín de dos puntos [22] en este sistema, no obstante, la expresión es bastante complicada a pesar de hacer varias aproximaciones, como se verá más adelante. En el caso de tres dimensiones sólo se conocen soluciones aproximadas a través de teorías de campo o usando el método de campo medio y métodos de renormalización. Así pues, el modelo de Ising es uno de los primeros en estudiarse cuando se adentra a los conceptos antes mencionados como parte de la herramienta para entender el modelo estándar de partículas. También es importante su estudio cuando ocurren fenómenos críticos por su *universalidad*, esto quiere decir que muchos sistemas tienen comportamientos diferentes dependiendo de sus interacciones y temperatura, sin embargo, cerca de la temperatura crítica todos muestran comportamientos similares. Así pues, al entender qué sucede en el modelo de Ising en éste régimen, se entienden muchos otros sistemas que, en principio, pudieran ser más complicados de analizar.

Debido a lo anterior, usar el modelo de Ising como prueba para la teoría desa-

rollada en los capítulos anteriores suena bastante sensato, considerando que puede presentar un comportamiento de ley de área en la entropía cerca de la temperatura crítica.

En los dos ejemplos que se tratarán mas adelante, se tomará el espacio de Hilbert del sistema como

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_{\text{espín}},$$

donde $\mathcal{H}_{\text{espín}}$ corresponde al espacio de Hilbert asociado a cada espín.

■ 3.1. Modelo de Ising en 1D

El hamiltoniano para un sistema de partículas con espín 1/2, sumergido en un campo magnético constante con magnitud constante h y transversal al sistema, está dado por la expresión

$$\hat{H} = -h \sum_i \sigma_i - J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j, \tag{3.1.1}$$

donde $\langle i, j \rangle$ significa a primeros vecinos; en el caso en una dimensión es claro cómo realizar la suma con un sólo índice. Para este sistema se puede considerar un ensamble de Gibbs, el cual tiene por operador de densidad

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}}, \tag{3.1.2}$$

donde Z es la función de partición del sistema y está dada por

$$Z_N = \sum_{s_1} \cdots \sum_{s_N} \exp \left(-\beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i - \beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \right), \tag{3.1.3}$$

esta última expresión puede reescribirse como

$$Z_N = \sum_{s_i} \prod_{i=1}^N \exp \left(K \sum_i \sigma_{i+1} \sigma_i + \frac{L}{2} \sum_{i=1}^N (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \right), \tag{3.1.4}$$

donde $K = \beta J$, $L = \beta h$ y el segundo término se ha rearreglado con la condición de frontera $S_{N+1} = S_1$ de manera que la expresión quede simétrica. Para poder calcular

la función de partición se utiliza un método conocido como *matriz de transferencia* \mathbf{T} , la cual permite escribir a la función de partición como

$$Z_N = \sum_{S_1, \dots, S_N} \prod_{i=1}^N T(\sigma_i, \sigma_{i+1}), \quad (3.1.5)$$

donde

$$T(\sigma_i, \sigma_{i+1}) = \exp\left(K\sigma_i\sigma_{i+1} + \frac{L}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1})\right). \quad (3.1.6)$$

Esta última expresión puede arreglarse en una matriz 2×2 para los distintos valores de $\sigma_i = \pm 1$ y $\sigma_{i+1} = \pm 1$, de manera que se tiene

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T(+, +) & T(+, -) \\ T(-, +) & T(-, -) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(K + L) & \exp(-K) \\ \exp(-K) & \exp(K - L) \end{bmatrix}. \quad (3.1.7)$$

Así, la función de partición puede escribirse como

$$Z_N = \text{tr } \mathbf{T}^N. \quad (3.1.8)$$

Debido a que la matriz de transferencia es simétrica, puede diagonalizarse de manera que existe una matriz \mathbf{D} y una matriz ortogonal $\mathbf{\Lambda}$ tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}^{-1}.$$

Como la traza es invariante ante transformaciones de similaridad, se puede concluir que

$$Z_N = \text{tr}(\mathbf{T}^N) = \lambda_1^N + \lambda_2^N, \quad (3.1.9)$$

donde $\lambda_{1,2}$ son los eigenvalores de la matriz de transferencia. De acuerdo a (3.1.7), los eigenvalores de la matriz de transferencia para el modelo de Ising en una dimensión son

$$\lambda_{1,2} = e^K \cosh L \pm \sqrt{e^{2K} \cosh^2 L - 2 \sinh(2K)}, \quad (3.1.10)$$

en consecuencia, la función de partición, según (3.1.9), es

$$Z_N = \lambda_1^N \left(1 + \frac{\lambda_2^N}{\lambda_1^N} \right). \quad (3.1.11)$$

Por la forma en que se han etiquetado los eigenvalores, se tiene que $\lambda_1 > \lambda_2$. Así, se puede hacer la siguiente aproximación en el límite termodinámico, es decir, cuando $N \rightarrow \infty$

$$Z_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_1^N \left(1 + \frac{\lambda_2^N}{\lambda_1^N} \right) = \lambda_1^N,$$

que tiene sentido físico en tanto que no se espera que el espacio sea generado por unos pocos puntos.

El correlador de dos puntos puede calcularse usando el método de la matriz de transferencia, ya que para el operador de espín del a -ésimo espinor, σ_a , y el operador de espín del b -ésimo subsistema, σ_b , estará dado por

$$\langle \sigma_a \sigma_b \rangle = \frac{1}{Z} \text{tr} \left(\sigma_a \sigma_b \exp(-\beta \hat{H}) \right), \quad (3.1.12)$$

donde $a > b$. Después de un rato de álgebra, al igual que con la función de partición, se obtiene

$$\langle \sigma_a \sigma_b \rangle = \frac{\lambda_1^{N-(a-b)} \lambda_2^{a-b} + \lambda_1^{a-b} \lambda_2^{N-(a-b)}}{\lambda_1^N + \lambda_2^N}, \quad (3.1.13)$$

esta expresión puede reescribirse, en el límite termodinámico y en ausencia de campo magnético externo, como

$$\langle \sigma_a \sigma_b \rangle = \tanh(J/T)^{(a-b)}. \quad (3.1.14)$$

Nótese que este procedimiento funciona de igual forma si $a < b$, intercambiando a por b y viceversa, de manera que puede escribirse

$$\langle \sigma_a \sigma_b \rangle = \tanh(J/T)^{|a-b|}. \quad (3.1.15)$$

Por tanto, la información mutua entre el espinor a -ésimo y b -ésimo es

$$I(a : b) \simeq \tanh(J/T)^{2|a-b|}, \quad (3.1.16)$$

ya que $\langle \sigma_a \rangle = 0$, pues no tienen una dirección predilecta para alinearse debido a la ausencia de campo magnético externo. Así, tomando $\Phi(x) = |\ln(x)|$, la distancia entre los puntos en (X, d) es

$$d(a, b) = 2\tilde{\ell} |a - b| |\ln(\tanh(J/T))| = \frac{2\tilde{\ell} |a - b|}{\xi} = \ell |a - b|. \quad (3.1.17)$$

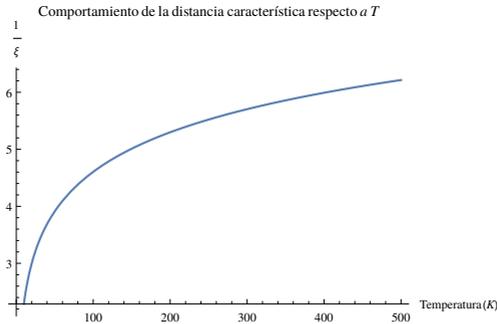


Figura 3.1: Gráfica de la longitud característica del sistema en función de la temperatura con $J = 1$.

donde $\xi = 1/|\ln(\tanh(J/T))|$ y $\ell = 2\tilde{\ell}/\xi$. Se puede apreciar una dependencia en la temperatura de la distancia entre los distintos puntos. la gráfica de $\ell(T)$ como función de T se muestra en la figura 3.1.

Ya que se tiene el espacio métrico (X, d) , donde $X = \{\mathcal{H}_i^s\}_{i=1, \dots, n}$, con \mathcal{H}^s el espacio de Hilbert de estados de partículas con espín $1/2$, y la distancia d , dada por (3.1.17), puede construirse la matriz \mathbf{B} de acuerdo a la expresión (1.4.5). Una vez determinada \mathbf{B} , se diagonaliza para encontrar sus eigenvalores y sus correspondientes eigenvectores para construir la matriz $\tilde{\mathbf{X}}$ (1.4.9), que especifica las coordenadas del encaje del espacio métrico (X, d) en un \mathbb{R}^3 o \mathbb{R}^2 .

Se muestra el encaje en 3D del espacio obtenido para 1000 puntos en la figura 3.2.

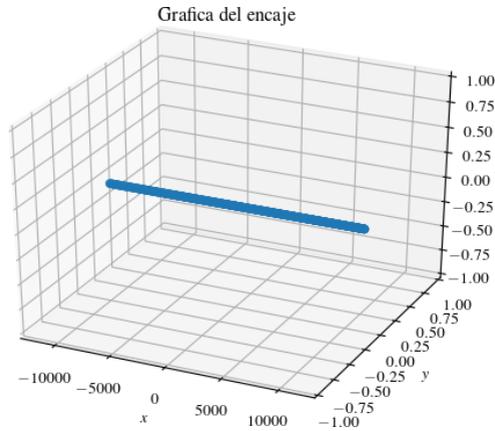


Figura 3.2: Encaje en 3D del espacio obtenido para el modelo de Ising en 1D para una temperatura de $T = 315\text{ K}$

La figura 3.3 muestra el encaje del mismo espacio generado en \mathbb{R}^2

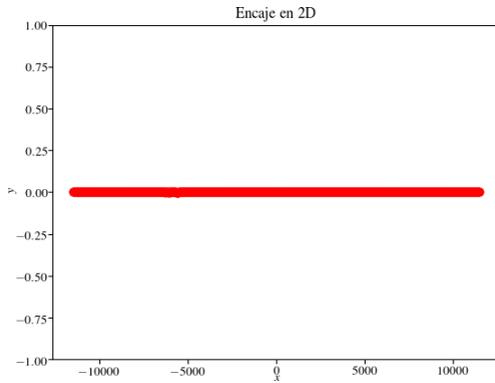


Figura 3.3: Encaje en 2D del espacio obtenido para el modelo de Ising en 1D para una temperatura de $T = 315\text{ K}$

Los eigenvalores obtenidos al realizar la diagonalización de la matriz \mathbf{B} se muestran en la gráfica 3.4. Aquí debe observarse que existe sólo un eigenvalor dominante sobre los demás, con trece órdenes de magnitud de diferencia respecto al más cercano. Este comportamiento está determinando la dimensionalidad del espacio generado, es decir,

surge del tratamiento que se está utilizando. De esta manera, puede determinarse tanto el encaje como la dimensionalidad del espacio emergente, usando el MDS.

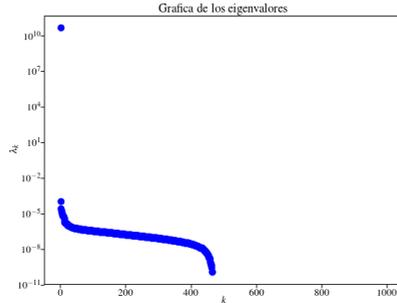


Figura 3.4: Gráfica de los eigenvalores obtenidos para 1000 puntos del modelo de Ising a $T = 315 K$

■ 3.2. Modelo de Ising en 2D

El hamiltoniano para un modelo de Ising en 2D es similar al mostrado en (3.1.1), salvo que en este caso cada espín interactúa con cuatro vecinos, considerando un arreglo cuadrado (ver fig. 3.5), aunque pueden ser tres vecinos en un arreglo de panal de abeja (ver fig. 3.6); también podría usarse una estructura triangular. Por simplicidad se tomará el caso del la retícula cuadrada con condiciones de frontera periódicas, de tal suerte que el sistema tenga la *topología* de un toro, además de invarianza traslacional.

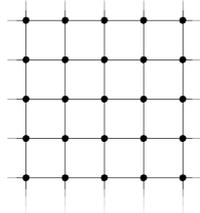


Figura 3.5: Retícula cuadrada para el modelo de Ising en 2D

En dos dimensiones, el modelo de Ising tiene propiedades termodinámicas que no tiene el modelo de una dimensión. Existen transiciones de fase a una temperatura distinta de cero; ocurre una magnetización espontánea en el sistema debido a la

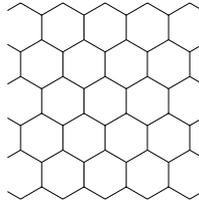


Figura 3.6: Retícula hexagonal para el modelo de Ising en 2D

interacción entre los distintos espines de las partículas, etc.. En [23] puede verificarse que, usando el método de la matriz de transferencia, se puede determinar la función de partición hallando su eigenvalor más grande. Para este modelo, la matriz tiene una dimensión $2^n \times 2^n$. A su vez, el método de la matriz de transferencia ya no resulta útil para realizar el cálculo de los correladores de espín-espín entre las distintas partículas, es por ello que se utilizan métodos de teoría de campos, expansión en cúmulos, etc., para realizar los cálculos pertinentes. Si bien es cierto que se conoce la expresión exacta para los correladores, por su complejidad es necesario desarrollar un programa computacional para hacer los cálculos. La fórmula para los correladores varía, según la temperatura, pues hay distintas aproximaciones cuando la temperatura es menor que la temperatura crítica, T_c , o cuando es mayor.

Respecto al cálculo de los correladores de espín-espín en este modelo existen varios trabajos, en particular [22], donde dan una expresión completa de ellos. En general, los correladores toman diferentes formas bajo distintas condiciones o métodos. Entonces, realizar este cálculo no es cosa sencilla y es mucho más complicado estimar la entropía de entrelazamiento, como puede verificarse en [24]. Otra cosa que hay que considerar es que, si bien los estados base de la teoría obedecen una ley de área [25] en 1D y 2D, no es claro que eso mismo suceda para un ensamble térmico.

Según [22], el correlador de dos puntos cuando $T < T_c$ es

$$\langle \sigma_{0,0} \sigma_{M,N} \rangle = S^< \exp(-F_{<MN}), \quad (3.2.1)$$

donde

$$S^< = [1 - (\sinh 2\beta J)^{-4}]^{1/4}, \quad (3.2.2)$$

y

$$F_{<MN} = \sum_{n=1}^{\infty} F_{<MN}^{(2n)}. \quad (3.2.3)$$

Las funciones $F_{<MN}^{(2n)}$ tiene una expresión integral bastante extensa que puede consultarse en el artículo citado. Mientras que para temperaturas superiores a la temperatura crítica el correlador será

$$\langle \sigma_{0,0} \sigma_{M,N} \rangle = S^> \left(\sum_{k=1}^{\infty} G_{>MN}^{(2k-1)} \right) \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_{>MN}^{(2n)} \right). \quad (3.2.4)$$

donde

$$S^> = [(\sinh \beta J)^{-4} - 1]^{1/4},$$

y las funciones $G_{>MN}^{(2k-1)}$ también tiene una fórmula integral que puede revisarse en [22].

En primera instancia, el correlador de dos puntos puede calcularse a cualquier temperatura, no obstante, la entropía no obedece siempre una ley de área, esto último sólo sucede cerca de la temperatura crítica T_c [26]. El correlador de dos puntos cerca de esta temperatura y cuando el número de espines es suficientemente grande, está dado por la expresión

$$\langle \sigma_{0,0} \sigma_{M,N} \rangle_{T_c} = (1-s)^{1/4} [\hat{F}_{\pm}(t) + o(R^{-1})], \quad (3.2.5)$$

donde las funciones \hat{F}_{\pm} dependen de J , M y N a través de la variable $t = |z^2 + 2z - 1|(z(1-z^2))R$, $z = \tanh \beta J$ y $R = \sqrt{M^2 + N^2}$, $s = (\sinh \beta J)^{-4}$. Los subíndices \pm denotan si se está en un régimen por encima de la temperatura crítica o por debajo, respectivamente. Al igual que en el modelo en una dimensión, en ausencia de campo magnético externo, se cumple

$$\langle \sigma_a \rangle = 0,$$

por lo que la información mutua quedará en función del correlador (3.2.5). Las funciones $\hat{F}_{\pm}(t)$ no tiene una expresión sencilla o manejable para cualquier M, N , sólo tienen una fórmula relativamente sencilla en los límites cuando t tiende a cero o infinito. Así pues, para cualquier valor de M, N debe usarse la expresión completa de las funciones $\hat{F}_{\pm}(t)$, la cual es, para temperaturas por debajo de la temperatura crítica, la siguiente [22]

$$\hat{F}_-(t) = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} f^{(2n)}(t) \right), \quad (3.2.6)$$

donde

$$f^{(2n)}(t) = (-1)^n \pi^{-2n} n^{-1} \int_1^\infty dy_1 \cdots \int_1^\infty dy_{2n} \prod_{j=1}^{2n} \frac{e^{-ty_j}}{\sqrt{y_j^2 - 1}(y_j + y_{j+1})} \prod_{j=1}^n (y_{2j}^2 - 1),$$

y se tienen las condiciones de frontera $y_{2n+1} \equiv y_1$. Para las funciones por encima de la temperatura crítica se tiene

$$\hat{F}_+(t) = G(t)\hat{F}_-(t), \quad (3.2.7)$$

con

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(2k+1)}(t), \quad (3.2.8)$$

y

$$g^{(2k+1)}(t) = (-1)^k \pi^{-2k-1} \int_1^\infty dy_1 \cdots \int_1^\infty dy_{2k+1} \prod_{j=1}^{2k+1} \frac{e^{-ty_j}}{\sqrt{y_j^2 - 1}} \prod_{j=1}^{2k} (y_j + y_{j+1})^{-1} \\ \times \prod_{j=1}^k (y_{2j}^2 - 1). \quad (3.2.9)$$

Si bien puede implementarse un programa para calcular directamente esta cantidad, no es la única función de correlación para el modelo de Ising. Existe otra cantidad conocida como el parámetro de orden dado por [23]

$$M = \left\langle \int dr^2 m(\vec{r}) \right\rangle, \quad (3.2.10)$$

donde $m(\vec{r})$ es la densidad del parámetro de orden. La función de correlación será

$$\Gamma(\vec{r}) = \langle m(\vec{r})m(0) \rangle - \langle m(\vec{r}) \rangle \langle m(0) \rangle. \quad (3.2.11)$$

Cuando hay invarianza traslacional e isotropía y con una temperatura $T > T_c$, la función de correlación para el parámetro de orden es

$$\Gamma(\vec{r}) = \frac{e^{-r/\xi}}{r}, \quad (3.2.12)$$

donde ξ es la longitud de correlación, la cual es función de la temperatura.

3.2.1. Exponentes críticos

En los sistemas en los que ocurren transiciones de fase y fenómenos críticos, existen cantidades medibles que tienen una singularidad, esto es, tiene un comportamiento divergente. Para poder describir su naturaleza se definen los *exponentes críticos*, los cuales se denotan por $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu$. Se usará la cantidad

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (3.2.13)$$

que, por definición tiende a cero cuando la temperatura T tiende a la temperatura crítica T_c . En dicho límite se asumirá que cualquier cantidad termodinámica puede descomponerse en una parte *regular*, que permanece finita aunque no necesariamente continua, y una parte *singular* que puede ser divergente o tener derivadas que lo sean. Se asumirá que esta parte es proporcional a una potencia τ .

Así, cuatro de los seis exponentes críticos tienen la siguiente definición:

$$\text{Capacidad térmica:} \quad C \sim |\tau|^{-\alpha} \quad (3.2.14)$$

$$\text{Parámetro de orden:} \quad M \sim |\tau|^\beta \quad (3.2.15)$$

$$\text{Susceptibilidad:} \quad \chi \sim |\tau|^{-\gamma} \quad (3.2.16)$$

$$\text{Ecuación de estado:} \quad \Phi \sim h^{1/\delta} \quad (3.2.17)$$

El símbolo “ \sim ” quiere decir en este contexto que la parte singular es proporcional a la expresión que le sigue.

Los dos exponentes críticos restantes se definen a través de la función de correlación, la cual se asumirá que se comporta como [23]

$$\Gamma(\vec{r}) \rightarrow r^{-p} e^{-r/\xi}, \quad \text{con } \tau \rightarrow 0. \quad (3.2.18)$$

Entonces, ν y η se definen como

$$\text{Longitud de correlación:} \quad \xi \sim |\tau|^{-\nu} \quad (3.2.19)$$

$$\text{Ley de potencia de decaimiento en } \tau = 0: \quad p = D - 2 + \eta, \quad (3.2.20)$$

donde D es la dimensionalidad del espacio.

Los exponentes críticos describen a toda una clase de sistemas cerca de su temperatura crítica, como se mencionó antes, debido a la universalidad que muestran

los sistemas de manera experimental. Esto es, para distintos sistemas que caen en la misma clase de universalidad, sus exponentes críticos son aproximadamente los mismos, de tal suerte que el comportamiento singular, que es el dominante en el regimen cercano a la temperatura crítica, es equivalente.

3.2.2. Información mutua cerca de la temperatura crítica T_c

De acuerdo a (1.3.8) y (3.2.18), la información mutua estará dada por la fórmula

$$I(\mathcal{H}_M : \mathcal{H}_N) \simeq \frac{1}{r^{2(D-2+\eta)}}. \quad (3.2.21)$$

Para este modelo $p = 1/4$, por lo que la distancia es

$$d(p, q) = \ell \|\vec{x}_p - \vec{x}_q\| = R, \quad (3.2.22)$$

donde ℓ es una constante positiva y se ha tomando como función

$$\Phi(I(\mathcal{H}_M : \mathcal{H}_N)) = \frac{1}{(I(\mathcal{H}_M : \mathcal{H}_N))^2}. \quad (3.2.23)$$

De acuerdo a (3.2.22), es claro que el encaje de este espacio será un espacio euclideo de dimensión 2. Cabe preguntarse qué sucede si se expande la función de correlación a primer orden en ξ^{-1} , en este régimen, de manera que pueda observarse el comportamiento de la información mutua entre distintos subsistemas cerca de la temperatura crítica en donde se satisface una ley de área en la entropía.

A primer orden se tiene la expresión

$$\Gamma(\vec{r}) \simeq r^{-1/4} \left(1 - \frac{r}{\xi} \right) + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad (3.2.24)$$

por lo cual la información mutua será

$$I(\mathcal{H}_M : \mathcal{H}_N) \simeq R^{-1/2} \left(1 - \frac{R}{\xi} \right)^2, \quad (3.2.25)$$

y la distancia puede escribirse como

$$d(p, q) \simeq \ell_{T_c} R \left(1 + \frac{4R}{\xi} \right), \quad (3.2.26)$$

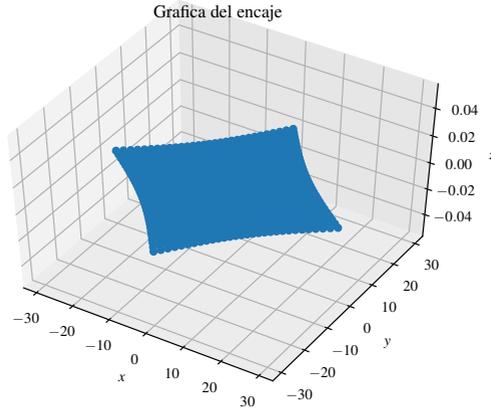


Figura 3.7: Encaje generado para el modelo de Ising en 2D considerando 900 puntos y $\tau = 0.0025$.

en esta última expresión se ha usado que $R \ll \xi$ y la aproximación

$$\left(1 - \frac{R}{\xi}\right)^{-4} \simeq \left(1 + \frac{4R}{\xi}\right).$$

Cerca de la temperatura crítica, la longitud de correlación obedece (3.2.19), de manera que la distancia quedará como

$$d(p, q) \sim \ell_{T_c} R(1 + 4|\tau|^\nu R). \quad (3.2.27)$$

En el modelo de Ising en 2D $\nu = 1$, por lo que el comportamiento de la distancia es lineal respecto a la temperatura. En la figura 3.7 se muestra el encaje obtenido para 900 puntos con $\tau = 0.0025$, usando (3.2.27). Para este ejemplo existen eigenvalores negativos, lo que indica que el encaje, en principio, no es euclideo. Claro que este resultado es de esperarse pues se está usando la misma función para definir la distancia que se usó en la temperatura crítica. En la figura 3.8 se muestran los eigenvalores en valor absoluto que se obtuvieron de la matriz (1.4.5) para el encaje

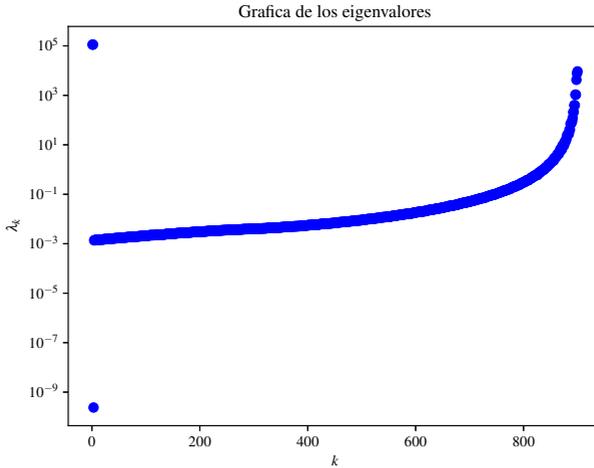


Figura 3.8: Eigenvalores de la matriz \mathbf{B} para 900 puntos con $\tau = 0.0025$.

anterior. En (3.2.27) se observa una parte proporcional a $|\tau|$, de manera que para valores suficientemente pequeños, la función (3.2.23) sirve. Para un caso más general, debe usarse otro mapeo para definir la distancia, de tal forma que el encaje resulte euclidiano. En el ejemplo considerado aquí, los dos eigenvalores positivos dominantes son del orden de $\lambda_+ \sim 10^5$, mientras que los eigenvalores negativos llegan a ser del orden de $\lambda_- \sim 10^3$, lo cual muestra que siguen dominando en dos órdenes de magnitud los eigenvalores positivos y puede considerarse que el encaje es suficientemente bueno, pues de acuerdo a (1.4.10), para este ejemplo se obtuvo

$$\epsilon \simeq 0.10126 \tag{3.2.28}$$

Para un valor de $\tau = 0.1$ se obtiene el encaje mostrado en la figura 3.9, usando la distancia (3.2.27), mientras que la gráfica del valor absoluto de los eigenvalores se muestra en la figura 3.10. En esta última se observa que la diferencia de órdenes de magnitud entre los eigenvalores positivos y negativos ya no es considerable. Esto también se ve manifestado en el valor

$$\epsilon \simeq 0.3, \tag{3.2.29}$$

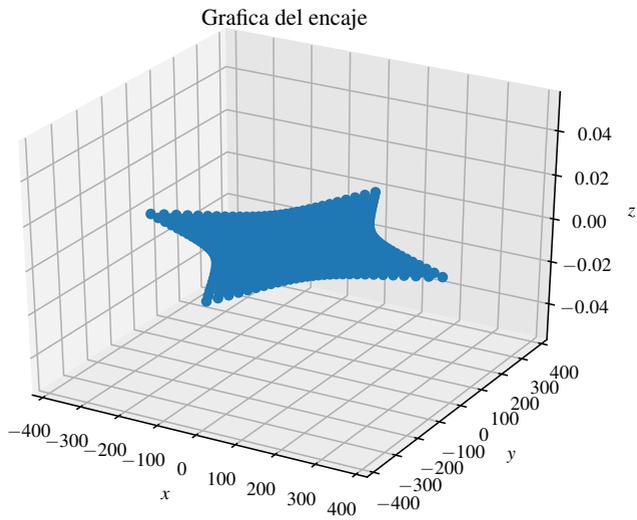


Figura 3.9: Encaje generado para el mismo sistema con $\tau = 0.1$

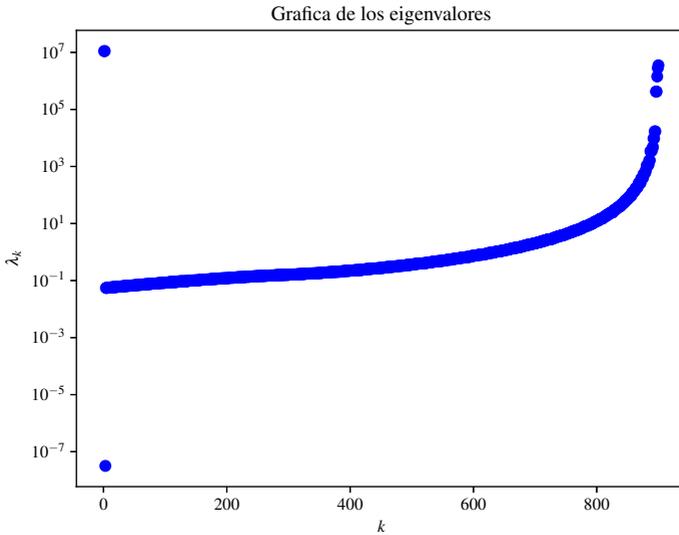


Figura 3.10: Gráfica del valor absoluto de los eigenvalores para $\tau = 0.1$

obtenido para este caso, lo cual indica que el encaje no es muy bueno, en el sentido de que no se preserva de manera adecuada las distancias en la representación del espacio métrico como subconjunto de un espacio euclideo.

Discusión y conclusiones

En este capítulo se hará una discusión de los resultados obtenidos en el trabajo que se realizó, así como los posibles caminos que a tomarse para seguir avanzando en el entendimiento de la relación que existe entre la entropía de entrelazamiento entre los distintos componentes de un sistema y la geometría. En particular, se darán algunas propuestas para seguir adelante con la investigación.

■ 4.1. Entropía, geometría y gravedad

En el capítulo 3 se mostraron los resultados al usar la construcción propuesta en [1], con sus correcciones, aplicada a un estado de Gibbs en el modelo de Ising en 1D y 2D. Al igual que Carroll, se calcularon los correladores por su sencillez en este tipo de estados, usando la matriz de transferencia, en el caso unidimensional, mientras que en el caso bidimensional se utilizó el parámetro de orden, del cual se tiene una expresión sencilla y manejable de forma analítica.

La primera diferencia entre el tratamiento hecho para el modelo de 1D y 2D es que en el primero se utilizó un método que no parte de la existencia de un espacio entre los distintos componentes, para realizar el cálculo de la función de correlación del operador de espín σ , entre los distintos componentes del sistema. Para el modelo en dos dimensiones se utilizó un correlador cuya expresión es sencilla y es mucho más manejable que los correladores de espín, pues a pesar de tener una expresión analítica (3.2.1), es claro que se necesita del desarrollo de un programa computacional para realizar los cálculo de manera numérica. No obstante, no tiene más información

respecto a la entropía de entrelazamiento que el parámetro de orden, es por ello que se utilizó este último.

Este trabajo, como el presentado en [1], muestra que la realización de un ejemplo concreto con esta estrategia no es sencillo, no obstante, puede hacerse y muestra consistencia, en tanto que generan el espacio sobre el cual están definidos, en el caso en 2D. En el caso en 1D la mejoría respecto a lo que presentan en [1] proviene del hecho de no usar teoría de campos para realizar los cálculos. Puede decirse que en el modelo unidimensional se *recupera* el espacio, de primeros principios, de la teoría.

También cabe señalar que el enfoque en este trabajo es diferente en cuestión conceptual, dado que es posible recuperar espacios que, según [1], no se podría. Además de que en el ensamble de Gibbs para el modelo unidimensional, puede obtenerse un encaje a cualquier temperatura y no se necesitó considerar que la entropía siempre cumpliera una ley de área para realizar los cálculos. Ahondando más en este último punto, se puede decir que se ha logrado *geometrizarse* un sistema cuántico con esta construcción, aunque no puede garantizarse que toda la información del sistema esté capturada allí. Es posible mejorar éste último aspecto con la propuesta que se hará un poco más abajo, de tal manera que se garantice que el espacio obtenido contenga la misma información que el sistema cuántico. En tanto, el esquema es consistente si se considera un conjunto que puede dotarse de una métrica, en lugar de un grafo, pues con esto no existe una limitación entre el número de puntos, pensados como vértices, que pueden conectarse. Debe hacerse la aclaración de que la idea del grafo proviene justamente de la construcción hecha en el capítulo 2, sin embargo, tiene un fallo esencial, que es que la expresión (2.2.4) el número de subregiones dentro y fuera de la región A no necesariamente son finitas, lo que se refleja en el hecho de que los correladores decaigan de manera exponencial con la distancia, tanto en el modelo de Ising y en los ejemplos mostrados en [1]. De manera que la construcción del grafo, así como la definición de estado redundantemente constreñido, no son consistentes con la función de corte en la entropía.

En el modelo de Ising bidimensional, se encontró que en la temperatura crítica se puede recuperar la distancia de forma directa, tomando como función una potencia fraccionaria del inverso de la información mutua. A su vez, cerca de la temperatura crítica, puede usarse la misma fórmula para la distancia para valores pequeños de $|\tau|$. El encaje obtenido se ve completamente contenido en un plano, con la observación de que presenta cierta deformación en los lados que componen al sistema. El segundo

ejemplo hecho con la misma distancia muestra lo sensible que es el método respecto a la función de distancia que se escoja para determinar la distancia, de manera que puede decirse que definir la función que dará lugar a la distancia no es un aspecto trivial en la estrategia a seguir y en la construcción del espacio. Es este caso, el encaje generado se ve con una distorsión completa de los bordes, de tal suerte que el espacio obtenido se asemeja a una estrella. Dado que el sistema es isotrópico y que aún no se considera algún efecto que pudiese deformarlo, se concluye, como se dijo antes, que está relacionado con la elección de la función de distancia.

■ 4.2. Conclusiones y trabajo futuro

El modelo propuesto por [1], a pesar de las inconsistencias que tiene, es valioso por las ideas que presenta respecto a la relación entre la entropía de entrelazamiento y la gravedad. Este trabajo mostró que las éstas siguen siendo aplicables aun en sistemas cuyo comportamiento no obedece una ley de área, con el detalle de que no se puede garantizar que el espacio emergente contenga toda la información del sistema, por ello, como se comentó antes, uno de los trabajos a realizar es seguir la investigación para hallar la manera de representar geoméricamente de forma equivalente al sistema. Conceptualmente se logró hacer compatible la idea de espacio emergente reemplazando el grafo por un conjunto *metrizable* así como el cambio en la definición de distancia, en los caso en que la información mutua entre dos subsistemas sea nula, buscando que este espacio tenga una distancia lo más parecida a un espacio euclideo. Cabe aclarar que no es por conveniencia, es más bien, una necesidad para establecer la conexión entre ambos espacios, como se explicó en el capítulo 1 y se ejemplificó con el espacio (\mathbb{R}^2, d_1) .

Queda pendiente de análisis la deducción que hacen en [27] respecto a la obtención de las ecuaciones de Einstein a orden lineal, ya que sus resultados estriban fuertemente en la definición de estado redundantemente constreñido. Entonces, entender cómo surge la gravedad en este esquema, con nuevas hipótesis que lo hagan consistente, es uno de los trabajos que pueden desarrollarse en un futuro.

Un aspecto interesante a investigar, resultado de este trabajo, es la forma en que puede emerger una teoría de campos sobre el espacio generado a través de este método. El primer campo que puede estudiarse por la simplicidad que implica es el campo escalar y, considerando que puede verse como un conjunto infinito de osciladores, el sistema en el que puede emerger de manera natural es en un conjunto de osciladores

armónicos. Particularmente, deben trabajarse dos enfoques: en uno debe mantenerse la hipótesis de que los espacios de Hilbert de la descomposición tienen dimensión finita, con la finalidad de investigar si el espacio de Hilbert asociado a los verdaderos grados de libertad es finito o tomar el otro enfoque, y considerar que el espacio de Hilbert es de dimensión infinita e investigar si en este formalismo resulta claro cómo ocurre el corte de los grados de libertad en el UV para mantener la entropía finita.

4.2.1. Sistemas cuánticos, espacios topológicos y complejos CW: una propuesta

Los resultados obtenidos en este trabajo manifiestan la necesidad de mejorar la parte conceptual en esta construcción que busca la emergencia del espaciotiempo. De acuerdo a [28], tomar la entropía de entrelazamiento como punto de partida para construir este enfoque está equivocado pues existen sistemas gravitacionales que no cumplen con las hipótesis planteadas en [1], además de las observaciones indicadas en el presente trabajo. En particular, debe enfatizarse que la definición de estado redundantemente constreñido no es adecuado. Por el momento se dejará de lado el considerar un estado particular y se buscará una forma de generar ahora un espacio topológico usando la información mutua y los observables del sistema.

En [29] se muestra una manera de obtener una noción de vecindad a través de las álgebras de operadores que conmuten así que a continuación, siguiendo un poco las ideas propuestas en [30, 31], se dará una topología al espacio de puntos que se obtendrá del álgebra de operadores. Sea \mathcal{H} el espacio de Hilbert asociado a un sistema cuántico y sean $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un conjunto de operadores asociados a observables de interés de dicho sistema, este conjunto de operadores forman una álgebra \mathfrak{A} . En general, los elementos de \mathfrak{A} no conmutan entre sí, no obstante, se asumirá que la restricción de un subconjunto de estos operadores (tal vez finito) $\{O_i\}_{i \in I}$ conmutan en un subespacio invariante \mathcal{H}_j del espacio de Hilbert del sistema \mathcal{H} ¹. \mathcal{H}_j definirá a un subsistema del total. Nótese que el pedir que estos operadores conmuten en este subespacio es equivalente a encontrar una base de eigenestados para describir a este subsistema, como usualmente se hace en mecánica cuántica. Si se toma un subconjunto de los operadores $\{O_a\}$ del conjunto $\{O_i\}$, dicho subconjunto definirá otro subespacio \mathcal{H}_a y

¹Es fácil convencerse de que es un subespacio de \mathcal{H} ya que el estado nulo y cualquier combinación lineal de elementos de \mathcal{H}_j sigue siendo un elemento de \mathcal{H}_j

una inclusión de este en \mathcal{H}_i , es decir,

$$\mathcal{H}_a \subset \mathcal{H}_j,$$

Al conjunto de subsistemas del espacio de Hilbert \mathcal{H} se le denotará por S y estará dado por

$$S = \{\mathcal{H}_j : \mathcal{H}_j \subset \mathcal{H} \text{ es un subsistema}\}.$$

Hasta este punto no se ha hecho nada salvo tener una definición de subsistema en términos de los observables. Por supuesto, en teoría cuántica de campos se tienen operadores que conmutan fuera del cono de luz, por lo que esto definiría subsistemas tipo espacio, mientras que también permite la definición de subsistemas tipo tiempo. La diferencia esencial entre un subsistema tipo tiempo y tipo espacio es que en el primer caso los observables que conmutan forman un subconjunto propio del total de observables; por su parte, en un subsistema tipo espacio, los elementos de cualquier subconjunto de observables de interés restringido a este subsistema conmutan.

Con la definición de subsistema, se puede mapear a un espacio distinto y dar condiciones para que este espacio tenga una estructura de espacio topológico. Es claro que si dos subsistemas \mathcal{H}_i y \mathcal{H}_j tienen en común operadores que conmuten, entonces la intersección de estos subespacios $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j$ es también un subespacio y, en consecuencia, también define un subsistema. Si se sigue reduciendo un subsistema en subespacios más pequeños, a través de la intersección de los mismos y usando menos operadores, es lógico pensar que existirá una cantidad de operadores tales que el subespacio que determinan tiene intersección con el elemento neutro con el resto de los subsistemas o, en su defecto, es un subconjunto propio de otro subsistema. Por supuesto, este subespacio también es el más grande de los subespacios invariantes que determinan los operadores. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo: si se considera un sistema de partículas de espín $1/2$, este tiene como observables que conmutan a S_z y S^2 entre sí, y el espacio de Hilbert asociado es de dos dimensiones, sin embargo, cada eigenestado $|+\rangle$, $|-\rangle$ define un subespacio invariante de estos operadores, es por ello que se pide que el subespacio sea el de mayor dimensión y que cumpla con la condición de intersección vacía con el resto de subsistemas o inclusión completa. De este modo se puede encontrar una colección de subsistemas $\{\mathcal{A}_\beta\}_{\beta \in B}$ tal que satisfagan

$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \{0\}, \quad \forall i, j \in B.$$

Este tipo de subsistemas se les denominará como **subsistemas principales**, se considerará que son de dimensión finita por lo expuesto anteriormente respecto a los grados de libertad y la entropía², y el conjunto de subsistemas principales representarán puntos de un conjunto que se denotará por \mathcal{X} .

Hasta el momento se ha hecho una construcción del espacio topológico en dónde no se ha introducido el tipo de interacción que tienen los elementos de los subsistemas. Las interacciones serán las que permitirán la manera de refinar las vecindades de los espacios elementales \mathcal{A}_p lo cual definirá diferentes tipos de vecindades y determinará la dimensión del espacio \mathbb{R}^n al cual el sistema es homeomorfo. Esto tiene sentido ya que si se toma el ejemplo de \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 , ambos tienen la misma cardinalidad, no obstante, sus puntos tienen una noción diferente de cercanía[32]. El operador que carga con la información de la interacción es el hamiltoniano, entonces será pieza clave en la forma en que se obtendrán los subsistemas del espacio total y, en consecuencia, de las vecindades de los puntos y la dimensión del espacio.

La forma en que se determinará el homeomorfismo es como sigue: dado un sistema cuántico, se considerará como una *vecindad* del subespacio principal \mathcal{A}_α a aquellos subsistemas tales que

$$I(\mathcal{A}_\alpha : \mathcal{A}_\beta) \neq 0, \quad \forall \beta,$$

de manera que

$$\mathcal{W}_\alpha = \{\mathcal{A}_\beta \subset \mathcal{H}_\alpha : I(\mathcal{A}_\alpha : \mathcal{A}_\beta) \neq 0, \quad \forall \beta\} \subseteq \mathcal{H}_\alpha.$$

La información mutua o entropía de entrelazamiento dará la noción de vecindad, en el sentido topológico, no en un sentido métrico. Esto, debido a que la métrica en relatividad general está determinada por el contenido de materia y energía, y se está asumiendo que esto genera dicho espaciotiempo a través de las interacciones. En consecuencia, debe ser el contenido energético y de materia a nivel cuántico lo que determine la métrica, o bien, puede surgir como un fenómeno efectivo de interacciones cuánticas. También debe indicarse la manera en que se le puede dar coordenadas a estas vecindades, en ese aspecto el método de escalamiento multidimensional (MDS) es capaz de determinarlas, como se hizo en este trabajo con el modelo de Ising en 1D y 2D, suponiendo que el espacio sea plano o localmente plano.

²Hipótesis que probablemente no sea necesaria, en caso de que ocurra un corte en el UV como en teoría de campos.

Es evidente que el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathcal{W}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ también es una base para una topología \mathcal{T} , sin embargo, con esta definición el espacio topológico resultante es separable, pues es posible encontrar subespacios tales que contengan a cada uno y no contengan al otro. A partir de esta base puede construirse la topología del espacio quedando pendiente verificar que dicho espacio puede mapearse localmente a un subconjunto de \mathbb{R}^n , para alguna n natural, posteriormente dotar al espacio de una estructura de variedad diferenciable y, finalmente, encontrar la manera en que la métrica puede incluirse. En este momento el camino no es directo ni obvio por lo que requiere más tiempo de investigación.

Otra forma de darle una realización geométrica al conjunto de puntos derivado de lo anterior es el siguiente: considérese el conjunto $X^0 = \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in A\}$ que es un conjunto discreto, como lo es un sistema cuántico de N elementos y el conjunto $X^1 = \{I(\mathcal{A}_\alpha : \mathcal{A}_\beta) : \alpha, \beta \in A\}$. Esto definirá, en principio, una cadena que caracterizará a un complejo CW de un espacio topológico \mathcal{X} , el cual deberá corresponder a un complejo CW de un \mathbb{R}^n , al menos de manera local, pues lo que se espera es que el espacio topológico \mathcal{X} sea una variedad diferenciable. Por supuesto, esto tiene detalles pues hay que definir, cuando menos, los espacios $X^2 \subset X^3 \subset \dots \subset X^k = \mathcal{X}$ para completar el complejo CW. La manera más natural es definir *regiones*, \mathcal{B}_α , para poder calcular la información mutua entre ellas, con esta forma de construir el espacio se puede capturar más información que solo aquella en dónde los estados obedecen una ley de área en la entropía, como se mencionó arriba, esto representa un paso adelante en el desarrollo de la teoría. Por supuesto, aún queda por investigar más al respecto para poder establecer de manera concreta la forma en que las *regiones* deben tomarse para capturar toda la información del sistema conociendo la entropía de entrelazamiento entre ellas.

Esta aproximación es bastante interesante pues se pueden utilizar los métodos desarrollados en [19] para investigar como se podría incorporar la métrica en términos de los ángulos que forman las aristas o el *esqueleto* del espacio y, eventualmente, buscar incorporar aspectos gravitacionales. Esto último es bastante ambicioso y, seguramente, tomará su tiempo para poder establecer dicha conexión pues primero debe entenderse cómo realizar la construcción del complejo CW para sistemas en general, es decir, esto es un objetivo a mediano plazo.

Así pues, seguir investigando en este tema resulta interesante por los resultados obtenidos, así como los que han obtenido en los trabajos citados aquí, en los cuales

queda claro que no puede negarse la relación entre la gravedad y la termodinámica y esta relación puede significar un nuevo paradigma en el entendimiento de la gravedad.

Bibliografía

- [1] ChunJun Cao, Sean M. Carroll, and Spyridon Michalakis. Space from Hilbert Space: Recovering Geometry from Bulk Entanglement. *Phys. Rev.*, D95(2):024031, 2017.
- [2] Juan Maldacena and Leonard Susskind. Cool horizons for entangled black holes. *Fortsch. Phys.*, 61:781–811, 2013.
- [3] Ted Jacobson. Entanglement Equilibrium and the Einstein Equation. *Phys. Rev. Lett.*, 116(20):201101, 2016.
- [4] Shinsei Ryu and Tadashi Takayanagi. Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT. *Phys. Rev. Lett.*, 96:181602, 2006.
- [5] Thomas Faulkner, Monica Guica, Thomas Hartman, Robert C. Myers, and Mark Van Raamsdonk. Gravitation from Entanglement in Holographic CFTs. *JHEP*, 03:051, 2014.
- [6] Nima Lashkari, Michael B. McDermott, and Mark Van Raamsdonk. Gravitational dynamics from entanglement 'thermodynamics'. *JHEP*, 04:195, 2014.
- [7] Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].

- [8] Veronika E. Hubeny. The AdS/CFT Correspondence. *Class. Quant. Grav.*, 32(12):124010, 2015.
- [9] Veronika E. Hubeny, Mukund Rangamani, and Tadashi Takayanagi. A Covariant holographic entanglement entropy proposal. *JHEP*, 07:062, 2007.
- [10] Vijay Balasubramanian, Bartłomiej Czech, Borun D. Chowdhury, and Jan de Boer. The entropy of a hole in spacetime. *JHEP*, 10:220, 2013.
- [11] Vijay Balasubramanian, Borun D. Chowdhury, Bartłomiej Czech, Jan de Boer, and Michal P. Heller. Bulk curves from boundary data in holography. *Phys. Rev.*, D89(8):086004, 2014.
- [12] Nathan Seiberg. Emergent spacetime. In *The Quantum Structure of Space and Time: Proceedings of the 23rd Solvay Conference on Physics. Brussels, Belgium. 1 - 3 December 2005*, pages 163–178, 2006.
- [13] Jim J. Napolitano J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics (2nd Edition)*. Addison Wesley, 2 edition, 2010.
- [14] L. de la Peña. *Introduccion a la mecanica cuantica / Introduction to Quantum Mechanics*. Ediciones Cientificas Universitarias / Scientific Publishing University. Fondo De Cultura Economica USA, 2010.
- [15] Joy A. Thomas Thomas M. Cover. *Elements of Information Theory*. Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing. Wiley-Interscience, 2nd ed edition, 2006.
- [16] By A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Volume 1: Metric and Normed Spaces*. 1957.
- [17] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 3d ed edition, 1976.
- [18] P. J. F. Groenen I. Borg. *Modern Multidimensional Scaling: Theory and Applications*. Springer Series in Statistics. Springer, 2nd edition, 2005.
- [19] T. Regge. General Relativity without coordinates. *Nuovo Cim.*, 19:558–571, 1961.

- [20] Ingo Peschel and Viktor Eisler. Reduced density matrices and entanglement entropy in free lattice models. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(50):504003, dec 2009.
- [21] R.J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. Elsevier Science, 2016.
- [22] Tai Tsun Wu, Barry M. McCoy, Craig A. Tracy, and Eytan Barouch. Spin-spin correlation functions for the two-dimensional ising model: Exact theory in the scaling region. *Phys. Rev. B*, 13:316–374, Jan 1976.
- [23] Kerson Huang. *Statistical mechanics*. Wiley, 2nd ed edition, 1987.
- [24] Rong Yu, Hubert Saleur, and Stephan Haas. Entanglement entropy in the two-dimensional random transverse field ising model. *Phys. Rev. B*, 77:140402, Apr 2008.
- [25] J. I. Latorre and A. Riera. A short review on entanglement in quantum spin systems. *J. Phys.*, A42:504002, 2009.
- [26] J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio. Area laws for the entanglement entropy - a review. *Rev. Mod. Phys.*, 82:277–306, 2010.
- [27] ChunJun Cao and Sean M. Carroll. Bulk entanglement gravity without a boundary: Towards finding Einstein’s equation in Hilbert space. *Phys. Rev.*, D97(8):086003, 2018.
- [28] Steven B. Giddings. Quantum-first gravity. *Found. Phys.*, 49(3):177–190, 2019.
- [29] Rudolf Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras, Second Edition (Theoretical and Mathematical Physics)*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer, second edition edition, 1996.
- [30] Steven B. Giddings. Black holes, quantum information, and unitary evolution. *Phys. Rev.*, D85:124063, 2012.
- [31] Steven B. Giddings. Quantum gravity: a quantum-first approach. 2018.

[32] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, 12th printing edition, 1978.