



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**“Construcción de un dispositivo ultrasónico para estudiar
la vorticidad en fluidos”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C A

P R E S E N T A:

JOSEFINA JANETH MIRANDA BLANCAS



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. GERARDO RUIZ CHAVARRÍA
CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2019**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a
Dios*

Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado por DGAPA-UNAM, proyecto PAPIIT IN-114218 "Vorticidad y ondas (internas y de superficie) en dinámica de fluidos".

Gracias a Raul Labbé quien nos proporciono detalles de la construcción de los captosres ultrasonicos.

Agradezco al Dr. Gerardo Ruiz por todo el apoyo, confianza y paciencia para la realización de este trabajo, todo su tiempo y dedicación así como las enseñanzas que obtuve.

Gracias a Sergio Hernández por todo el apoyo y el tiempo dedicado tanto para la construcción del dispositivo así como a conseguir todo el material necesario para la realización del mismo, y por todas las observaciones hechas al trabajo para mejoramiento del mismo.

También al profesor Antonio González Guzmán por el apoyo en toda la parte electrónica usada en el dispositivo, por las asesorias impartidas cada que se tenía algún problema y ayudar en su solución.

Gracias al Dr. Víctor Hugo Espíndola por darme trabajo y confiar en mi.

Gracias a Dios y a mis padres José Miranda Zarza y Concepción Blancas González, pues sin ellos este sueño no se hubiera cumplido, por enseñarme a luchar por lo quiero y estar siempre a mi lado apoyándome. A todos mis hermanos, Linda, Dany, Kity y Gloris, por siempre echarme porras, creer y confiar en mi, en especial a mi hermano Dany por ser mi inspiración y guía para llegar a la carrera de Física, gracias.

Gracias a mi esposo Gerardo Rubén López Hernández por caminar de la mano conmigo, por confiar y creer en mi, apoyando siempre en todos los sentidos, a mi hija Quetzalli López Miranda por haberme dado mucho de su tiempo (sin haberse dado cuenta), y por el sólo hecho de existir pues es mi motor para seguir, superarme y lograr mis sueños para que el día de mañana ella haga lo mismo.

Y por su puesto no puede faltar agradecer a la máxima casa de estudios UNAM, gracias por darme la oportunidad de pertenecer a esta gran comunidad, donde puedo lograr un sueño más, por darme los mejores profesores y enseñanzas, así como los mejores amigos, en especial a mi amiga Karla Ortiz Soto por darme asilo en su casa, por los regaños y consejos, y por todas las aventuras juntas sin ella el paso por la carrera no habría sido igual, y gracias a la facultad de ciencias que además de darme una carrera también ahí conocí al amor de mi vida, mi esposo Gerardo.

Índice general

	Página
Agradecimientos	5
INTRODUCCION	7
1. FUNDAMENTOS FÍSICOS DEL SISTEMA	13
1.1. MARCOS DE REFERENCIA LAGRANGIANO Y EULERIANO	13
1.2. TEOREMA DEL TRANSPORTE DE REYNOLDS	14
1.3. CONSERVACIÓN DE MASA	17
1.4. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO	18
1.5. CIRCULACIÓN Y VORTICIDAD	20
1.6. LEY DE BIOT-SAVART	23
2. ONDAS ACÚSTICAS E INTERACCIÓN VORTICIDAD-ULTRASONIDO	27
2.1. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA	27
2.2. INTERACCIÓN DE MODOS ACÚSTICOS CON UN FLUJO	30
2.3. ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA Y LA ONDA ACÚSTICA . . .	32
2.4. BASES DE LA INTERACCIÓN SONIDO-VÓRTICE	33
2.5. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE ONDA NO HOMOGÉNEA.	34
3. CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA ULTRASONICO	43
3.1. ELABORACIÓN DEL CIRCUITO DEL AMPLIFICADOR DE POTENCIA	51
3.2. RECEPTOR	53
3.3. PRUEBA DEL DISPOSITIVO ULTRASONICO	55
4. CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO	59

INTRODUCCIÓN

El tema principal de esta tesis es el estudio de la vorticidad, y para lograr ésto se hizo la construcción de un dispositivo ultrasonico para la detección de ésta mediante dispersión de ondas sonoras, este es nuestro objetivo principal. Cabe mencionar que la construcción de dicho dispositivo es el primero de su tipo en la UNAM para el estudio de vorticidad, contribuyendo así con los estudios de distintos investigadores de la facultad de ciencias.

Todos hemos visto un vórtice alguna vez, por ejemplo cuando el agua se va por algún desagüe, en éste se forma un remolino, otro ejemplo lo vemos en la televisión cuando se presentan imágenes satelitales de los huracanes formados en los océanos (figura 1 a)), también se pueden ver en las orillas de un río o el pasar del agua alrededor de una piedra, los tornados (figura 1 b)), el humo de un cigarro (figura 1 c)), etc., todos éstos son algunos ejemplos comunes de vórtices, su estudio es muy importante, ya que en la naturaleza es muy común encontrarlos, para ello es necesario el conocimiento del comportamiento de los fluidos, ya que todos estos fenómenos ocurren en un fluido (líquidos y gases).



Figura 1: Ejemplos de algunos vórtices. a) vista satelital de un huracán, b) tornado y c) humo de un cigarro. [Internet]

Los vórtices se pueden reproducir, por ejemplo si se unen dos botellas por la boca, una de estas con agua. Al girar la botella (que tiene agua), toda el agua contenida pasará por las bocas unidas de éstas y allí se formara un remolino el cual es un vórtice (figura 2 a)). También se puede producir un vórtice anular (su nombre lo recibe por tener la forma de anillo), con un tambor que tenga un pequeño orificio, dentro del tambor se mete humo, y se golpea el tambor, de ésta manera se produce una rosca de humo que sale por el orificio (figura 2 b)). Para el estudio de éstos se dispone en la actualidad de diversas técnicas experimentales como la velocimetría por imágenes de partículas o la dispersión de ondas sonoras por vorticidad. La

primera es un método indirecto, ya que se obtiene la velocidad y luego mediante diferenciación se calcula la vorticidad. El segundo método es directo, es decir, la onda dispersada por una distribución de vorticidad tiene información sobre ésta última. En esta tesis describiremos el método de detección de vorticidad por ultrasonido. Si se tiene un vórtice y a él llega una onda ultrasónica, al pasar ésta por el vórtice, causará un cambio en la onda y la nueva señal será tomada con un receptor ultrasonico.

En la teoría de dinámica de fluidos se tienen resultados teóricos que se utilizan para hacer éste método [12, 13]. Con la teoría magnetostática se tiene que al conocer el campo magnético se puede conocer la densidad de corriente, se puede hacer una analogía en mecánica de fluidos donde el campo magnético corresponde al campo de velocidades y la densidad de corriente corresponde a la vorticidad, de manera que al conocer el campo de velocidades se puede conocer la vorticidad, ésto es relativamente fácil de hacer pues la vorticidad esta dada por el rotacional del campo de velocidades por lo que sólo se hace el cálculo de las derivadas parciales del campo de velocidades y se obtiene la vorticidad, pero para el método que se hace en este trabajo, se realiza lo contrario, ahora se obtiene la distribución de vorticidad de manera directa con el dispositivo de ondas sonoras. Por otro lado para tener resultados teóricos de la interacción entre las ondas sonoras y un flujo con vorticidad se toma la ecuación de Euler y la ecuación de continuidad, se llega a que ésta interacción es una ecuación de onda no homogénea, donde el termino fuente depende entre otras cosas de la vorticidad. Ahora para realizar el método experimental se crea un flujo con vorticidad al cual se le lanza una señal acústica, la cual interacciona con una distribución de vórtices de la calle de Von Karman, y al ser recibida por el receptor se tienen ondas dispersadas por éste, así se tiene una medida directa de la distribución de vórtices en el flujo. Cabe mencionar que la onda sonora que se envía a través del emisor se utiliza en el rango ultrasonico, esto debido a que se pueden evitar señales ajenas al experimento, como la voz de las personas que se encuentren en el momento de la experimentación.



a)



b)

Figura 2: a) Botellas unidas por la boca, que contienen agua, formando un vórtice. b) Vórtice anular formado por el humo que sale de un tambor armado de cartón. [Internet]

Esta tesis esta conformada de la siguiente manera, el primer capitulo describe los fundamentos físicos del sistema, en esta parte se expone toda la teoría física que se requiere para el estudio de los fluidos, consta de secciones donde se describen los distintos marcos de referencia lagrangiano y euleriano. También se presentan definiciones importantes como la vorticidad, circulación, entre otras. Se presentan resultados importantes como el teorema de transporte de Reynolds, y a partir de éste se deduce la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler. En este capítulo se muestra la analogía entre la mecánica de fluidos y la teoría electromagnética. Esta analogía está basada en el hecho de que en un flujo incompresible las ecuaciones que lo describen son semejantes a las de la magnetostatica. Por lo tanto si las condiciones de frontera son las mismas, los resultados son iguales. En particular se tiene una ley de Biot-Savart que permite determinar el campo de velocidades a partir de la distribución de vorticidad. La analogía se hace con el objetivo de solo aplicar lo que ya se conoce de la teoría electromagnética y no volver a demostrar resultados ya bien conocidos. El segundo capitulo trata sobre las ondas acústicas e interacción vorticidad-ultrasonido, se hace una deducción de la ecuación de onda sonora a partir de la segunda ley de Newton y con la ecuación de Euler, en donde se toman en cuenta la interacción entre modos acústicos y del fluido. Esto último da lugar a una ecuación de onda con término fuente. Y finalmente se presenta la solución de la ecuación de onda no homogénea. El capitulo tres es la construcción del sistema ultrasonico, en esta sección, se hace una descripción detallada de cómo se construyeron un emisor y un receptor ultrasonico, así como pruebas del funcionamiento de dicho sistema. En el capitulo cuatro se ponen las conclusiones y el trabajo a futuro.

Capítulo 1

FUNDAMENTOS FÍSICOS DEL SISTEMA

1.1. MARCOS DE REFERENCIA LAGRANGIANO Y EULERIANO

Para describir el movimiento de un fluido se necesita del concepto de continuo. Con éste concepto podemos considerar que el fluido es materia continua, sin fijarnos en cada molécula individual. Para un fluido se toma un valor único para cada punto de cantidades como: la densidad, presión, velocidad o cualquier otra variable intensiva que caracteriza al fluido. La condición para que se aplique la hipótesis del continuo es considerar un elemento de volumen dV suficientemente grande de tal manera que la raíz cubica de dV es grande comparado con el camino libre medio entre cada molécula, y que pueda contener un gran número de moléculas, las cuales ocupan todo el elemento de volumen considerado.

En la mecánica de fluidos existen dos descripciones, la lagrangiana y la euleriana. En la representación lagrangiana, para describir el movimiento de un fluido, se toma un volumen de control, de tal manera que podamos identificar siempre las mismas partículas y así describir su comportamiento, por lo cual esto es como viajar con el fluido contenido en el volumen de control. De esta manera en esta representación, las variables que describirán el flujo del fluido serán x_0 , y_0 y z_0 en el tiempo t donde x_0 , y_0 y z_0 son las coordenadas de un elemento de volumen al tiempo t_0 y t es el tiempo de localización instantánea. Cabe mencionar que las leyes de la mecánica clásica (mecánica del punto y del cuerpo rígido) están formuladas en la representación lagrangiana.

En la representación euleriana, se toma un elemento de volumen fijo en el espacio, por lo que ahora se describirá el flujo que pasa a través de éste elemento de volumen. Con ésta representación cualquier propiedad del fluido tales como la densidad y la velocidad son funciones de la coordenada del punto y del tiempo. Es decir, la función densidad es $\rho(x, y, z, t)$ y la función de la velocidad es $\vec{v}(x, y, z, t)$ en el punto (x, y, z) en el instante t . Por otro lado, para aplicar las leyes de la mecánica clásica, se toma un volumen V de forma arbitraria, en una región fija del espacio en un sistema coordenado.

1.2. TEOREMA DEL TRANSPORTE DE REYNOLDS

Para pasar de la descripción lagrangiana a la representación euleriana (esta última es la más comúnmente utilizada en la dinámica de fluidos) se usa una herramienta conocida como Teorema de Transporte de Reynolds, éste relaciona una variable intensiva con una extensiva.

Una variable intensiva es una propiedad física que no depende de la cantidad de materia o masa, ni del volumen, por lo que esta propiedad se mantiene fija, aunque éste se divida en dos o más partes, si no solo del punto donde se esta midiendo.

Una variable extensiva es una propiedad física, que si depende de la cantidad de materia o del volumen. Por lo que, si el sistema se divide en dos o mas partes esta propiedad cambiará.

Sea τ una variable extensiva y sea α una variable intensiva, que están relacionadas de la

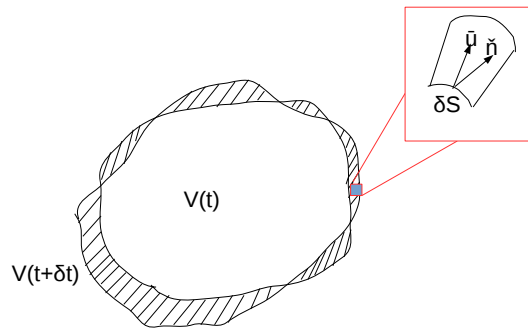


Figura 1.1: Se muestra el volumen de control del fluido en el tiempo t , y ese mismo volumen al tiempo $t + \delta t$.

siguiente manera:

$$\tau = \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t) dV \quad (1.1)$$

Se considera un volumen de control de tipo lagrangiano, es decir, contiene siempre a las mismas partículas. En la ecuación previa el volumen de integración cambia en el tiempo, ver figura 1.1. La variable α se toma en un marco de referencia lagrangiano, es decir, se toma en un punto fijo $\vec{r} = (x_0, y_0, z_0)$ así $\alpha = \alpha(\vec{r}_0, t)$. En el Teorema de Transporte de Reynolds el interés se centra en determinar los cambios que ocurren en el tiempo de la variable extensiva τ . Para ello tomamos la derivada total de τ , de acuerdo a la definición de derivada se tiene que:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\tau(t + \delta t) - \tau(t)}{\delta t} \quad (1.2)$$

Sustituyendo τ de la ecuación (1.1), en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(\vec{r}_0, t + \delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t) dV \right] \quad (1.3)$$

La primera integral del lado derecho de la ecuación (1.3) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int_{V(t+\delta t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV = \int_{V(t+\delta t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV + \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV \quad (1.4)$$

El objetivo es simplificar los cálculos posteriores. Utilizando la ecuación (1.3) y sustituyendo el valor de la primera integral, obtenemos:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV + \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t) dV \right] \quad (1.5)$$

Distribuyendo el limite dentro de las integrales en la ecuación anterior, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{D\tau}{Dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV \right] \\ &\quad + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t) dV \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

De la ecuación anterior, se desarrollará el segundo límite, puesto que las funciones $\alpha(\vec{r}_0, t)$ y $\alpha(\vec{r}_0, t+\delta t)$ son integradas sobre el mismo volumen $V(t)$, entonces la resta de las funciones también lo es, por lo que obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t) dV \right] = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) - \alpha(\vec{r}_0, t) dV \right] \quad (1.7)$$

Ya que el volumen se mantiene fijo, entonces podemos poner el limite dentro de la integral, el cual será por definición la derivada parcial con respecto del tiempo de la función alfa.

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) - \alpha(\vec{r}_0, t) dV \right] &= \int_{V(t)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} [\alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) - \alpha(\vec{r}_0, t)] dV \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha(\vec{r}_0, t)}{\partial t} dV \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por lo tanto la ecuación (1.6) queda de la siguiente manera:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\int_{V(t+\delta t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV - \int_{V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t+\delta t) dV \right] \right\} + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \quad (1.9)$$

Por otra parte las primeras dos integrales de la derecha de esta ecuación contienen a la variable α evaluada al tiempo $t + \delta t$. El dominio de integración son los volúmenes al tiempo t y al tiempo $t + \delta t$, entonces la resta de las dos integrales nos da una integral sobre la región sombreada en la figura 1.1, y por tanto queda una sola integral como sigue:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta t} \int_{V(t+\delta t) - V(t)} \alpha(\vec{r}_0, t + \delta t) dV \right] + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \quad (1.10)$$

Si tenemos un fluido en un volumen de control, después de un tiempo δt , el volumen cambiara de tamaño y forma, esto se puede ver en la figura 1.1. A partir de esta idea se va a trabajar la primera integral de la ecuación anterior. Cuando el fluido se mueve, la componente de velocidad que contribuye al cambio de volumen en forma y tamaño se puede obtener proyectando el vector velocidad sobre la normal a la superficie, o lo que es lo mismo, tomando el producto punto $\vec{u} \cdot \hat{n}$. El cambio de volumen se puede escribir como $dl dS$, en donde dS es el elemento de superficie y dl es cuanto se movió de su posición dicho elemento de volumen. Esta última es simplemente $(\vec{u} \cdot \hat{n}) dt$. Por lo tanto la diferencial de volumen que aparece en la integral es: $(\vec{u} \cdot \hat{n}) \delta t dS$ (Ver figura 1.1)

Así que en la ecuación (1.10) podemos cambiar la integral de volumen por una integral de superficie, dónde $dV = (\vec{u} \cdot \hat{n}) dt dS$ y obtenemos:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta t} \int_{S(t)} \alpha(\vec{r}_0, t + \delta t) (\vec{u} \cdot \hat{n}) \delta t dS \right] + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \quad (1.11)$$

El cambio en el tiempo δt se anula y al tomar el limite queda lo siguiente:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \int_{S(t)} \alpha(\vec{r}_0, t) (\vec{u} \cdot \hat{n}) dS + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV \quad (1.12)$$

Utilizando el teorema de Gauss, donde la integral de superficie es igual a una integral de volumen, se tiene que:

$$\int_{S(t)} \alpha(\vec{r}_0, t) (\vec{u} \cdot \hat{n}) dS = \int_{V(t)} \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) dV \quad (1.13)$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación (1.12), se obtiene que:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \int_{V(t)} \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) dV + \int_{V(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} dV = \int_{V(t)} \left[\nabla \cdot (\alpha \vec{u}) + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] dV \quad (1.14)$$

La ecuación anterior es el teorema de transporte de Reynolds, y también lo podemos expresar en forma tensorial, donde los índices repetidos indican una suma, de la siguiente manera:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \alpha dV = \int_V \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha u_k) \right] dV \quad (1.15)$$

1.3. CONSERVACIÓN DE MASA

A partir del resultado anterior se van a deducir varias de las ecuaciones de la mecánica de fluidos en la representación euleriana. El principio de conservación de masa establece que la masa no se crea ni se destruye, solo se transforma. De forma matemática esto significa que la derivada temporal de la masa es cero, $dm/dt = 0$. Si tenemos un elemento de masa dm dentro de un elemento de volumen dV la densidad ρ , se define como: $\rho = \frac{dm}{dV}$. La masa se puede obtener de la integral de la densidad sobre un volumen V ,

$$\int \rho dV = m \quad (1.16)$$

Donde la masa es una variable extensiva, que se expresa en términos de una variable intensiva, por lo que se puede aplicar a ésta ecuación el teorema de transporte de Reynolds.

La conservación de la masa implica que la derivada temporal de la ecuación anterior es igual a cero, entonces:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (1.17)$$

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds, se tiene que la integral anterior se convierte en una integral con derivadas eulerianas, es decir la derivada ya no es solo con respecto del tiempo, si no también con respecto a la posición, así:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (1.18)$$

Puesto que el volumen V se tomó de manera arbitraria, para que la ecuación anterior se cumpla, entonces debe pasar que el integrando debe ser igual a cero, es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.19)$$

Esta ecuación expresa la conservación de la masa en un fluido, es la ecuación de continuidad de la hidrodinámica.

Se puede hacer una analogía entre ésta ecuación con la electricidad. La analogía es con la ecuación de conservación de la carga, en donde la divergencia de la densidad de corriente da la disminución de la densidad de corriente por unidad de tiempo. En el caso de los fluidos, la divergencia del campo de velocidades multiplicada por la densidad del fluido, da la disminución de la densidad del fluido por unidad de tiempo, esto es:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.20)$$

Si se considera un fluido de densidad constante, es decir incompresible, entonces el cambio de la densidad con respecto del tiempo es igual a cero, por lo que la ecuación de continuidad, queda simplemente que la divergencia del campo de velocidad es igual a cero.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.21)$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación que dice que no hay monopolos magnéticos \vec{B} , ya que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

1.4. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

Otra aplicación del teorema de transporte de Reynolds es la deducción de la ecuación de momento a partir de la segunda ley de Newton. Esta última se puede escribir como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1.22)$$

En esta ecuación aparece un derivada total con respecto al tiempo. Para aplicar el teorema de transporte de Reynolds debemos expresar al momento \vec{P} como la integral de volumen de una variable intensiva, la cual sería la densidad de momento.

$$\vec{P} = \int_V \rho \vec{u} dV \quad (1.23)$$

Esta ecuación se puede ver por componentes, donde las componentes del vector velocidad son $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, se tomará la ecuación anterior para una sola componente j – *esima*, pero los cálculos son los mismos para todas las componentes. Aplicando el teorema de transporte de Reynolds por componentes (ecuación (1.15)) a la ecuación anterior, obtenemos:

$$\frac{DP_j}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV = \int_V \left[\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) \right] dV = \Sigma f_j \quad (1.24)$$

El integrando en la ecuación anterior también se puede escribir de la siguiente forma: $\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_k) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} u_j)$, esta última ecuación se desarrolla utilizando cálculo diferencial y propiedades del gradiente. Si se tiene una función escalar ϕ y una función vectorial f entonces $\nabla \cdot (\phi f) = (f \cdot \nabla) \phi + \phi \nabla \cdot f$, donde la función escalar en este caso corresponde a u_j y la función vectorial es $\rho \vec{u}$ así aplicando este resultado a la ecuación y desarrollando la primera derivada parcial, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} u_j) = u_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j (\nabla \cdot \rho \vec{u}) + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u_j \quad (1.25)$$

Si se toma como factor común u_j y utilizando la conservación de masa, se obtiene que:

$$u_j \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right) + \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u_j = \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u_j \quad (1.26)$$

Con el resultado anterior la ecuación de conservación de momento (ecuación 1.24), queda de la siguiente manera:

$$\int_V \left[\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u_j \right] dV = \Sigma f_j \quad (1.27)$$

Ahora se analizarán las fuerzas que están actuando sobre una masa del fluido, las cuales pueden clasificarse en: fuerzas de cuerpo, que son las que actúan sobre todas las partículas del fluido, tales como la gravedad, fuerza electromagnética, etc. Y están las fuerzas de superficie que son las que actúan en la frontera entre dos elementos de volumen del fluido, tales como la presión y la viscosidad. Por el momento solo se considerarán la presión y la gravedad. Para analizar la fuerza inducida por la presión se considera un elemento de fluido contenido en un elemento de volumen dV , el cual será un cubo como el que se muestra en la figura 1.2, y se verá como es la presión en sus diferentes caras.

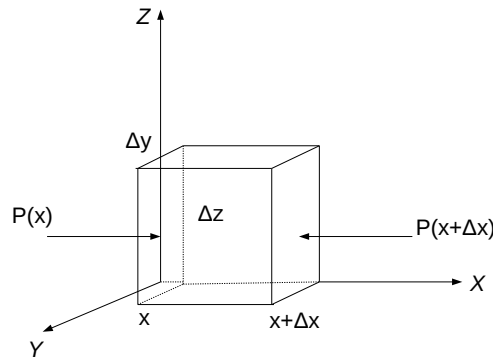


Figura 1.2: Elemento de fluido contenido en un volumen V

Considérese las dos caras contenidas en el plano yz y ubicadas en $x + \Delta x$ y x . El área de ambas caras es $\Delta y \Delta z$. En la cara ubicada en $x + \Delta x$ actúa una fuerza dada por $-P(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z$, mientras que la cara ubicada en x actúa una fuerza dada por $P(x, y, z) \Delta y \Delta z$. La fuerza que produce la presión que actúa sobre la cara en el plano dado por los ejes yz es la presión $P(X)$, que es la fuerza aplicada sobre el área en la superficie $\Delta y \Delta z$ en el punto x , matemáticamente $F_x = P(x, y, z) \Delta y \Delta z$. Puesto que la fuerza de presión siempre actúa perpendicular a la cara y hacia adentro, cuando tomamos la presión en el punto $x + \Delta x$, esta será negativa $F_{x+\Delta x} = -P(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z$. Sumando las fuerzas y aplicando un poco de álgebra se obtiene que la fuerza total en la dirección x es:

$$\begin{aligned}
F_{x+\Delta x} + F_x &= -P(x + \Delta x, y, z)\Delta y\Delta z + P(x, y, z)\Delta y\Delta z \\
&= -[P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z)]\Delta y\Delta z \\
\text{Por lo tanto } F_{x+\Delta x} + F_x &= -\left[\frac{P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z)}{\Delta x}\right]\Delta x\Delta y\Delta z \quad (1.28)
\end{aligned}$$

En la ecuación anterior el término entre paréntesis del lado derecho de la igualdad es aproximadamente la derivada parcial con respecto de x , por lo que la ecuación anterior queda como sigue:

$$F_{x+\Delta x} + F_x = -\frac{\partial P}{\partial x}dV \quad (1.29)$$

El cálculo para el resto de las caras es exactamente el mismo por lo que la suma de las presiones en todas las caras del cubo, esta dada por:

$$d\vec{F} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right)dV = -\nabla P \quad (1.30)$$

Para obtener la fuerza inducida por la presión en el fluido se hace una integral sobre todo el volumen V . Por otro lado, la fuerza de gravedad se puede escribir como la integral de volumen de ρg , integrando sobre el volumen V . Así, estas fuerzas pueden ser sustituidas en la ecuación de conservación de momento (ecuación 1.27) obteniendo:

$$\int_V \left[\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)u_j \right] dV = \int_V -\frac{\partial P}{\partial x_j}dV - \int_V \rho g \delta_{j3}dV \quad (1.31)$$

Todos los elementos de la ecuación anterior están integrados sobre un volumen V por lo que todos se pueden poner en una misma integral e igualar a cero, y puesto que la ecuación anterior fue tomada para un volumen arbitrario V , entonces el integrando es igual a cero y por lo tanto se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)u_j = -\frac{\partial P}{\partial x_j} - \rho g \delta_{j3} \quad (1.32)$$

La ecuación anterior expresa la conservación de momento. A esta ecuación se le conoce como ecuación de Euler y en ella no se toma en cuenta la viscosidad.

1.5. CIRCULACIÓN Y VORTICIDAD

Se define a la circulación sobre una curva cerrada C como la integral de línea de la componente de velocidad tangencial a la curva, esto es:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (1.33)$$

Donde $d\vec{l}$ representa un elemento de contorno de la curva C . La integración se toma en contra de las manecillas del reloj, y la circulación es positiva si la integral es positiva. Una cantidad que está relacionada con la circulación es la vorticidad. A esta última se le define como el rotacional del vector velocidad:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} \quad (1.34)$$

La vorticidad y la circulación están relacionadas entre sí, para ver esta relación se utiliza el teorema de Stokes el cual relaciona una integral de línea con una de superficie, así se tiene que:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n} dA = \int_A \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA \quad (1.35)$$

donde el vector \hat{n} es normal a la superficie. Para darle una interpretación a la vorticidad hay que recordar que en un fluido el movimiento más general es la suma de una traslación, una rotación y una deformación [1]. La vorticidad está relacionada con rotaciones locales de un elemento de volumen. Para ver esta relación se toma un elemento infinitesimal del fluido en movimiento, en un sistema coordenado tridimensional, en general este elemento de fluido puede rotar alrededor de todos sus ejes coordenados. Primero se considerará la rotación alrededor del eje z , la cual se nota en el plano xy , ver figura 1.3. Las componentes de velocidad en este plano son $u(x, y)$ y $v(x, y)$. Para que se pueda dar una rotación debe haber una velocidad relativa entre los puntos o y a de la figura 1.3, en la dirección del eje y , por lo que la velocidad en el punto o es $v(x, y)$ y en el punto a es $v(x + \Delta x, y)$, para ver el cambio relativo que hay entre estas velocidades se toma la diferencia, que es $v_{oa} = v(x + \Delta x, y) - v(x, y)$ si se multiplica por $\frac{\Delta x}{\Delta x}$, obtenemos: $v_{oa} = \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \Delta x$ donde el cociente es aproximadamente la derivada parcial de la componente velocidad v con respecto de x , así $v_{oa} = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$. El desplazamiento relativo en un tiempo Δt es $v_{oa} \Delta t$. Luego en un tiempo Δt hubo un desplazamiento $\Delta \eta$, dado por $v_{oa} \Delta t$, esto es $\Delta \eta = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t$.

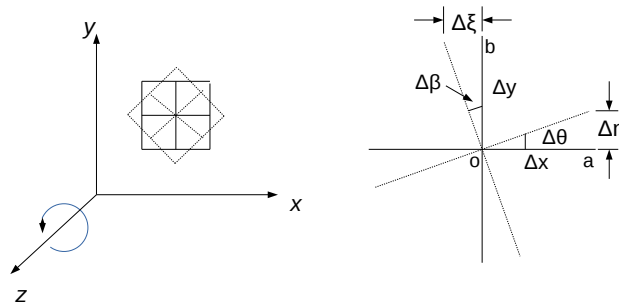


Figura 1.3: Rotación de un elemento de fluido alrededor del eje z

Por otro lado la velocidad angular esta dada por: $\vartheta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. También se sabe que el segmento de arco esta dado en términos de su ángulo de la siguiente manera: $\Delta\eta = \Delta\theta\Delta x$ entonces $\Delta\theta = \frac{\Delta\eta}{\Delta x}$, sustituyendo $\Delta\theta$ y $\Delta\eta$ en la definición de velocidad angular, se obtiene que:

$$\vartheta_{oa} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\eta}{\Delta x}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta t}{\Delta x \Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.36)$$

Ahora para obtener la velocidad relativa entre los puntos o y b de la figura 1.3, donde se ve que hay un cambio de velocidad en la dirección del eje x , entonces la velocidad en el punto o es $u(x, y)$ y la velocidad en el punto b es $u(x, y + \Delta y)$, así para ver el cambio relativo que hay entre ellas se toma la diferencia $u(x, y + \Delta y) - u(x, y)$, al multiplicar por $\frac{\Delta y}{\Delta y}$, obtenemos $u_{oa} = \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \Delta y$, esta velocidad es aproximadamente la derivada parcial de la velocidad u con respecto de y por Δy , esto es: $u_{ob} = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$. Después de un tiempo Δt podemos obtener el segmento de arco $\Delta\xi$, que es $\Delta\xi = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t$. Usando nuevamente el hecho de que un segmento de arco esta dado en términos de su ángulo, se tiene que: $\Delta\xi = \Delta\beta \Delta y$, entonces $\Delta\beta = \frac{\Delta\xi}{\Delta y}$, así obtenemos la velocidad angular en ob

$$\vartheta_{ob} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\xi}{\Delta y}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \Delta t}{\Delta y \Delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.37)$$

El signo menos que se agrega, es porque la dirección de la velocidad u esta en sentido negativo del eje x . La rotación total del elemento de fluido, esta dada por el promedio de la velocidad angular de ϑ_{oa} y ϑ_{ob} , por lo que la rotación en el eje z es:

$$\vartheta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.38)$$

De la misma manera se pueden calcular ϑ_x y ϑ_y , tomando el giro alrededor de los ejes x y y , en los planos yz y xz , respectivamente. Así

$$\vartheta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \text{y} \quad \vartheta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.39)$$

Por lo tanto, la velocidad angular es la suma de las rotaciones locales en los tres ejes coordenados x , y y z :

$$\vec{\vartheta} = \hat{i}\vartheta_x + \hat{j}\vartheta_y + \hat{k}\vartheta_z = \frac{1}{2} \left[\hat{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (1.40)$$

De manera que el término dentro de los corchetes es el rotacional de el campo de velocidades dado por $\vec{v} = (u, v, w)$, y por lo tanto la vorticidad es el doble de la velocidad angular.

$$\vec{\vartheta} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \quad (1.41)$$

1.6. LEY DE BIOT-SAVART

Como ya se ha mencionado en la sección de conservación de masa, existe una analogía de la magnetostática con la mecánica de fluidos. Ahora se verá otra analogía, la ecuación que establece que al conocer el campo magnético, se puede encontrar la densidad de corriente, ambas ecuaciones en magnetostática son las siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}\tag{1.42}$$

Donde μ_0 es la constante de permeabilidad magnética del vacío. La primera ecuación es la expresión matemática de que no existen monopolos magnéticos y la segunda establece que al conocer el campo magnético \vec{B} se puede obtener la densidad de corriente \vec{j} que se genera alrededor de éste. De manera análoga para un flujo incompresible el campo de velocidades satisface las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{u} &= \vec{\omega}\end{aligned}\tag{1.43}$$

La primera es la condición de incompresibilidad y la segunda es la definición de vorticidad. Dado que se tienen las mismas ecuaciones y también las mismas condiciones de frontera, entonces las soluciones del campo magnético y del campo de velocidades son las mismas. En magnetostática existe la ley de Biot-Savart, que permite calcular el campo magnético conociendo la densidad de corriente \vec{j} o la corriente I . Para el campo de velocidades existe también la ley de Biot Savart, que permite determinar el campo de velocidades si se tiene la distribución de vorticidad en el espacio, matemáticamente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{(\vec{r} - \vec{r}_0)^3}\tag{1.44}$$

Puesto que se tienen las mismas ecuaciones, solo se tiene que hacer un intercambio de variables, es decir, el vector \vec{B} se cambia por el vector \vec{u} , y el vector $\mu_0 \vec{j}$ por el vector $\vec{\omega}$. Por otro lado se sabe que la corriente eléctrica esta dada por la ecuación:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dA\tag{1.45}$$

Y la circulación esta dada por la ecuación:

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} dA\tag{1.46}$$

Si se sustituye I por la circulación Γ en la ley de Biot-Savart, se obtiene lo siguiente:

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{(\vec{r} - \vec{r}_0)^3} \quad (1.47)$$

La cual es la ley de Biot-Savart para mecánica de fluidos.

Otro resultado es la ley circuital de Ampere, que en la teoría electromagnética establece que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (1.48)$$

Y en mecánica de fluidos es:

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \Gamma \quad (1.49)$$

EJEMPLO: Usando la analogía con la teoría electromagnética vamos a calcular como es el campo de velocidades de un vórtice tubular infinito de radio R . El equivalente magnético es un alambre recto infinito de radio R por donde circula una corriente I . Primero se calculará el campo magnético que se genera fuera del alambre, es decir, un radio mayor al del alambre $a > R$. Para medir el campo magnético \vec{B} que se genera en un punto P fuera del alambre, se toma un elemento de longitud del alambre localizado a una distancia \vec{r} del punto P , (figura 1.4). Tomando la ley de Biot-Savart se tiene que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (1.50)$$

Para ver quien es $d\vec{l} \cdot \hat{r}$, nos apoyaremos en la figura 1.4, el producto cruz de estos vectores queda afuera de la hoja, por lo que ya sabemos la dirección del campo magnético, que es en dirección de un vector unitario \hat{k} , por como se han ubicado los ejes en la figura 1.4. Como $d\vec{l}$ esta sobre el eje de las x , entonces dicho elemento es $d\vec{l} = d\vec{x}$, como ya sabemos la dirección que tiene el vector \vec{B} nos centraremos en el cálculo de su magnitud, sabemos que la magnitud del producto cruz de un vector unitario con otro es:

$$|d\vec{x} \cdot \hat{r}| = dx \text{sen}(\theta) \quad (1.51)$$

Así sustituyendo ésta última expresión en la ecuación de Biot-Savart se tiene que la magnitud de B es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dx \text{sen}(\theta)}{r^2} \quad (1.52)$$

Para resolver la integral debemos hacer la relación entre las variables θ , r y x , como la distancia r forma un triangulo con la distancia a de ángulo θ , entonces se tiene que están relacionadas de la siguiente forma:

$$r = \frac{a}{\text{sen}(\theta)} = \text{acsc}(\theta) \quad (1.53)$$

Y nuevamente apoyándonos en la figura 1.4, vemos que dx está en dirección negativa por lo que:

$$x = -\text{acot}(\theta) \quad (1.54)$$

Si derivamos x se tiene:

$$dx = \text{acsc}^2(\theta)d\theta \quad (1.55)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.55 y 1.53 en 1.52, se obtiene:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\text{acsc}^2(\theta)\text{sen}(\theta)d\theta}{a^2\text{csc}^2(\theta)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \text{sen}(\theta)d\theta \quad (1.56)$$

Puesto que se considero un alambre infinito entonces los ángulos de integración van desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, por lo tanto la magnitud del campo magnético es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (1.57)$$

Para determinar el campo magnético en el interior del alambre de radio R con $a < R$, se usa el resultado anterior sobre un círculo de radio $a < R$. En este caso la corriente encerrada por el círculo ya no es la corriente total que pasa por el alambre, sino solo una fracción de ésta. Para determinar esta corriente usemos la relación entre I y J :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}dA \quad (1.58)$$

Donde la integral es el área del círculo de radio a , multiplicado por la densidad de corriente J_0 , pero esta densidad de corriente, solo corresponde a la que pasa por el cilindro de radio a , y sabiendo que la densidad de corriente es igual a la corriente entre el área, se tiene que:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}dA = J_0\pi a^2 = \frac{I\pi a^2}{\pi R^2} \quad (1.59)$$

Por último sustituyendo éste resultado, en la ecuación del campo magnético, se obtiene:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0}{2\pi a} \left(\frac{I\pi a^2}{\pi R^2} \right) = \frac{\mu_0 I a}{\pi R^2} \quad (1.60)$$

La correspondencia con este problema en mecánica de fluidos es tener un cilindro sólido de radio R , con vorticidad constante donde para obtener el campo de velocidades a partir de lo ya obtenido para el campo magnético se cambia $\mu_0 I$ por Γ [9]. Con ello se obtiene el campo de velocidades para $a > R$ como el inverso de a , es decir, entre más me aleje del cilindro sólido menor será el campo de velocidades, así el resultado anterior simplemente queda:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (1.61)$$

Por otra parte el campo de velocidades en el interior del núcleo del vórtice se expresa de la siguiente manera:

$$u = \frac{\Gamma a}{\pi R^2} \quad (1.62)$$

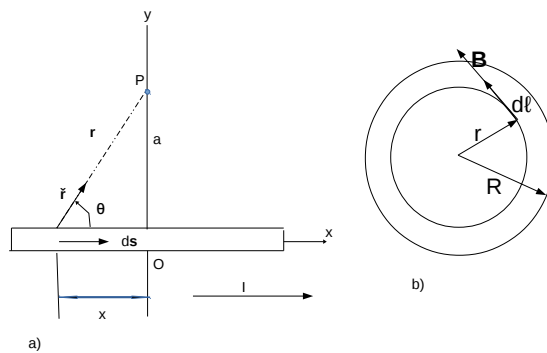


Figura 1.4: a) Vista lateral del alambre b) Vista superior del alambre de radio r

Capítulo 2

ONDAS ACÚSTICAS E INTERACCIÓN VORTICIDAD-ULTRASONIDO

2.1. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Las ondas acústicas son ondas mecánicas las cuales corresponden a compresiones y dilataciones del medio, comúnmente en el aire, el cual se considera no viscoso. Dichas compresiones son variaciones de presión o de densidad en un elemento de volumen. Para obtener la ecuación de onda acústica, utilizamos la segunda ley de Newton aplicada a un elemento de volumen. La fuerza que se considera en este caso es la inducida por la presión

$$(-\nabla P)\Delta x\Delta y\Delta z = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\zeta, \eta, \xi) \quad (2.1)$$

Donde el vector (ζ, η, ξ) es el vector de desplazamiento del elemento de volumen ΔV , por otro lado se sabe que $\rho = \frac{m}{V}$, entonces $m = \rho V = \rho\Delta x\Delta y\Delta z$, por lo que la ecuación anterior queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (-\nabla P)\Delta x\Delta y\Delta z &= \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\zeta, \eta, \xi)\Delta x\Delta y\Delta z \\ -\nabla P &= \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\zeta, \eta, \xi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

A la ecuación anterior se le aplica la divergencia:

$$\begin{aligned} \text{div}(-\nabla P) &= \text{div}\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\zeta, \eta, \xi)\right) \\ -\nabla^2 P &= \rho\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\text{div}(\zeta, \eta, \xi)\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cuando las moléculas comienzan a vibrar el volumen V que ocupan puede cambiar, debido a que los gases son fácilmente compresibles. Para determinar el cambio de volumen primero se van a determinar las variaciones de longitud en los tres ejes coordenados:

$$\begin{aligned} x + \Delta x + \zeta(x + \Delta x) - (x + \zeta(x)) &= \Delta x + \zeta(x + \Delta x) - \zeta(x) \\ &= \Delta x + \left(\frac{\zeta(x + \Delta x) - \zeta(x)}{\Delta x} \right) \Delta x \simeq \Delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Delta x \end{aligned}$$

esto es para el eje x , para los ejes y y z el calculo es análogo, obteniendo :

$$\begin{aligned} \Delta y + \left(\frac{\eta(y + \Delta y) - \eta(y)}{\Delta y} \right) \Delta y &\simeq \Delta y + \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y \\ \Delta z + \left(\frac{\xi(z + \Delta z) - \xi(z)}{\Delta z} \right) \Delta z &\simeq \Delta z + \frac{\partial \xi}{\partial z} \Delta z \end{aligned}$$

Para realizar el cálculo del volumen final, se multiplican las cantidades anteriores y se desprecian los términos cuadráticos y de orden mayor, ya que éstos son cantidades muy pequeñas, entonces el cambio del volumen es:

$$\chi = \frac{dV}{V} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = \text{div}(\zeta, \eta, \xi) \quad (2.4)$$

A su vez el volumen esta relacionado con la presión mediante una constante de deformación del medio. Para encontrar dicha relación se hará lo siguiente:

En un fluido o en un medio sólido homogéneo elástico cuando es sometido a un incremento en la presión hidrostática P sufre un decremento en el volumen específico por la deformación χ . Si suponemos que se tiene un proceso adiabático, es decir, que al decrecer el volumen específico no hay intercambio de calor, se tiene que:

$$dQ = dU + PdV = c_v dT + PdV = 0 \quad (2.5)$$

De la ecuación de gas ideal, se puede obtener la presión en términos del volumen, así:

$$P = \frac{nRT}{V} \quad (2.6)$$

Sustituyendo P en la identidad de proceso adiabático (ec. 2.5), se obtiene lo siguiente:

$$c_v dT + \frac{nRT}{V} dV = 0 \quad (2.7)$$

Se divide la ecuación anterior entre T y se integra, así se obtiene lo siguiente:

$$c_v \ln(T) + nR \ln(V) = \text{cte} \quad (2.8)$$

Por propiedades del logaritmo se tiene que:

$$\ln(T^{c_v}V^{nR}) = cte = c_1 \quad (2.9)$$

Usando nuevamente la ecuación de gas ideal para eliminar T y obtener una relación entre P y V :

$$T = \frac{PV}{nR} \quad (2.10)$$

Esto se sustituye en la ecuación 2.9, quedando:

$$P^{c_v}V^{c_v}V^{nR} = c_2 \quad (2.11)$$

Donde c_2 es una constante dada por $c_2 = c_1(nR)^{c_v}$. La ecuación anterior se puede reescribir como:

$$P^{c_v}V^{c_v+nR} = c_2 \quad (2.12)$$

O bien:

$$PV^\gamma = c_2 \quad (2.13)$$

Donde $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ y $c_p = c_v + nR$. Puesto que lo que se quiere obtener son los cambios de presión dado un cambio en el volumen, se toma la diferencial de la ecuación anterior, de manera que se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(PV^\gamma) &= 0 \\ V^\gamma dP + P\gamma V^{\gamma-1} dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por último se despeja dP , que son los cambios de presión dados por un cambio en el volumen

$$dP = -P\gamma \frac{V^{\gamma-1}}{V^\gamma} dV = -P\gamma \frac{dV}{V} \quad (2.15)$$

Puesto que el cambio en el volumen esta dado por la ecuación 2.4, entonces el cambio en la presión es:

$$dP = -P\gamma\chi \quad (2.16)$$

Ya que se tiene una ecuación que permite relacionar a χ con las variaciones de presión se puede a partir de ésta obtener la ecuación de onda. Tomando la ecuación de onda (ecuación 2.3), y sustituyendo el cambio en el volumen χ , dado por la ecuación anterior se obtiene que:

$$-\nabla^2 P = \frac{\rho}{\gamma P} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

donde $c = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$. A c se le conoce como velocidad de fase, γ es el cociente de los calores molares a presión y volumen constante ($\gamma = \frac{c_p}{c_v}$) y P es la presión del gas, pero utilizando la ecuación de los gases ideales se tiene que: $\frac{P}{\rho} = \frac{NRT}{m}$ y además la masa molar es: $M = \frac{m}{N}$, por lo que se obtiene: $c^2 = \left(\gamma \frac{RT}{M}\right)$.

Tomando los valores $\gamma = 1,4$ para el aire, la constante universal de los gases $R = 8,314 \frac{J}{molK}$, $M_a = 2,897 \times 10^{-2} kg/mol$ y una temperatura $T = 293K$, se tiene que la velocidad de fase del sonido en el aire es $c = 343,224 \frac{m}{s}$.

2.2. INTERACCIÓN DE MODOS ACÚSTICOS CON UN FLUJO

Las ondas acústicas y un flujo con vorticidad son dos soluciones de las ecuaciones de la dinámica de fluidos. A orden cero se pueden considerar que cada uno es independiente del otro. Sin embargo, un desarrollo a orden superior permite establecer cuál es la interacción entre estos dos modos. En los modos acústicos se considera que el fluido es compresible, mientras que la vorticidad es cero. Por otra parte, en un flujo se supone que hay incompresibilidad mientras que la vorticidad es diferente de cero. Para investigar la interacción entre estos modos vamos a descomponer a la velocidad y la presión en un termino base que corresponde al flujo con vorticidad mas una perturbación que corresponde a la onda acústica. La interacción entre estos modos surge por el carácter no lineal de la ecuación de Euler. Para este desarrollo vamos a suponer que la longitud de onda acústica λ es mucho menor que la escala característica L del flujo que se va a estudiar.

Sean $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_s$; $P = P_0 + P_s$; $\rho = \rho_0 + \rho_s$; $\|\vec{u}_s\| \ll \|\vec{u}_0\|$ y $\rho_s \ll \rho_0$, a partir de la ecuación de Euler, se tiene que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}_0 + \vec{u}_s) \cdot \vec{\nabla}\right) (\vec{u}_0 + \vec{u}_s) = -\frac{1}{\rho_0 + \rho_s} \nabla(P_0 + P_s) \quad (2.18)$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_s + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s = -\frac{1}{\rho_0 + \rho_s} \nabla(P_0 + P_s) \quad (2.19)$$

Por otro lado el cociente de la suma de las densidades se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho_0 + \rho_s} = \frac{\frac{1}{\rho_0}}{1 + \frac{\rho_s}{\rho_0}} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{1 + \frac{\rho_s}{\rho_0}} \right)$$

en donde $\frac{\rho_s}{\rho_0}$ es mucho menor que 1. Utilizando un desarrollo en serie de Taylor a primer orden de $\frac{1}{1+x}$ se tiene:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x$$

utilizando el resultado anterior se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_s + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s = -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \vec{\nabla} (P_0 + P_s) \quad (2.20)$$

Desarrollando el lado derecho de la igualdad anterior se tiene que:

$$-\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_0} \right) \vec{\nabla} (P_0 + P_s) = \left(-\frac{1}{\rho_0} + \frac{\rho_s}{\rho_0^2} \right) \vec{\nabla} (P_0 + P_s) = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} (P_0 + P_s) + \frac{\rho_s}{\rho_0^2} \vec{\nabla} (P_0 + P_s)$$

Como $\rho_s \ll \rho_0$, entonces el cociente $\frac{\rho_s}{\rho_0^2}$ es muy pequeño, por lo que éstos términos se desprecian, por lo tanto la ecuación 2.20 queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_s + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} (P_0 + P_s) \quad (2.21)$$

Podemos ver que de la ecuación anterior los términos $\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_0 + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0$ y $-\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_0$ son iguales por lo que éstos términos se eliminan de la ecuación. Así

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_s + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_s \quad (2.22)$$

Ahora se trabajara con los términos $(\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s$ y $(\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0$, donde $\vec{u}_0 = (u_{0x}, u_{0y}, u_{0z})$ y $\vec{u}_s = (u_{sx}, u_{sy}, u_{sz})$ por lo que:

$$(\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s = \left[(u_{0x}, u_{0y}, u_{0z}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \vec{u}_s = u_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_s + u_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_s + u_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_s \text{ y}$$

$$(\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 = u_{sx} \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_0 + u_{sy} \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_0 + u_{sz} \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_0$$

Las derivadas parciales de \vec{u}_s van como $\frac{u_s}{\lambda}$, es decir; $\frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_s \approx \frac{\|u_s\|}{\lambda}$, $\frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_s \approx \frac{\|u_s\|}{\lambda}$ y $\frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_s \approx \frac{\|u_s\|}{\lambda}$ y las derivadas espaciales de \vec{u}_0 van como $\frac{u_0}{L}$, es decir; $\frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_0 \approx \frac{\|u_0\|}{L}$, $\frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_0 \approx \frac{\|u_0\|}{L}$ y $\frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_0 \approx \frac{\|u_0\|}{L}$.

Como $\lambda \ll L$ entonces $\frac{1}{L} \ll \frac{1}{\lambda}$ y comparando los términos $(\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_0 \ll (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s$, haciendo uso de las relaciones anteriores el término más pequeño se despreciará. Así

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_s + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s + (\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_s$$

Por último si se comparan los términos $(\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s$ y $(\vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_s$ éste último es menor y se despreciará ya que ambos van como $\frac{\|u_s\|}{\lambda}$, pero al hacer el producto punto con el vector \vec{u}_0 y \vec{u}_s

respectivamente, los términos del vector \vec{u}_s son más pequeños en comparación con el vector \vec{u}_0 ya que $\|\vec{u}_s\| \ll \|\vec{u}_0\|$, por lo que se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\vec{u}_s + (\vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_s &= \frac{-1}{\rho_0}\vec{\nabla}P_s \\ \rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{u}_s &= -\vec{\nabla}P_s\end{aligned}\quad (2.23)$$

En esta ecuación se muestra como es la interacción de una onda acústica, con un campo de velocidades \vec{u}_0 , en la cual se observa que prevalecen ambos términos.

2.3. ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA Y LA ONDA ACÚSTICA

De la misma manera que se hizo con la ecuación de Euler, ahora vamos a escribir la ecuación de continuidad considerando que la densidad y la velocidad son la suma de un término base y una perturbación acústica. Al hacer esto la ecuación de continuidad queda como sigue:

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho_s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 + \rho_s)(\vec{u}_0 + \vec{u}_s) = 0$$

Haciendo el desarrollo algebraico en la ecuación anterior se tiene que:

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0\vec{u}_0 + \rho_0\vec{u}_s + \rho_s\vec{u}_0 + \rho_s\vec{u}_s) = \frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0\vec{u}_0) + \nabla \cdot (\rho_0\vec{u}_s) + \nabla \cdot (\rho_s\vec{u}_0) + \nabla \cdot (\rho_s\vec{u}_s) = 0$$

Como ρ_s y ρ_0 son funciones escalares que dependen de la posición, así por propiedades de la divergencia se tiene que:

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0\vec{u}_0) + \nabla \cdot (\rho_0\vec{u}_s) + \nabla \cdot (\rho_s\vec{u}_0) + \nabla \cdot (\rho_s\vec{u}_s) = \frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \rho_0\text{div}(\vec{u}_0) + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u}_0 + \rho_0\text{div}(\vec{u}_s) + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u}_s + \rho_s\text{div}(\vec{u}_0) + \nabla\rho_s \cdot \vec{u}_0 + \rho_s\text{div}(\vec{u}_s) + \nabla\rho_s \cdot \vec{u}_s = 0$$

Puesto que el flujo base satisface la ecuación de continuidad entonces resulta que:

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \rho_0\text{div}(\vec{u}_s) + \nabla\rho_0 \cdot \vec{u}_s + \rho_s\text{div}(\vec{u}_0) + \nabla\rho_s \cdot \vec{u}_0 + \rho_s\text{div}(\vec{u}_s) + \nabla\rho_s \cdot \vec{u}_s = 0$$

Debido a que $\|\vec{u}_s\| \ll \|\vec{u}_0\|$ y $\|\rho_s\| \ll \|\rho_0\|$, entonces los términos $\rho_s\text{div}(\vec{u}_s) + \nabla\rho_s \cdot \vec{u}_s$ son muy pequeños comparados con los demás, ya que van como el cuadrado de términos muy pequeños, por lo que se desprecian en la ecuación, de manera que se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \rho_0\text{div}(\vec{u}_s) + (\nabla\rho_0) \cdot \vec{u}_s + \rho_s\text{div}(\vec{u}_0) + (\nabla\rho_s) \cdot \vec{u}_0 = 0$$

Las derivadas espaciales de \vec{u}_s y de ρ_s van como el inverso de la longitud de onda λ , esto debido a que si se consideran a u_s y ρ_s como funciones de tipo ondulatorio $f_s = f_{s0} \exp^{i(k\vec{x} + \omega t)}$ donde k es el vector de la onda, cuya magnitud es: $\frac{2\pi}{\lambda}$, ω es la frecuencia y f_{s0} es la amplitud. Al calcular la derivada espacial de alguna coordenada x_i se obtiene lo siguiente: $\frac{\partial f_s}{\partial x_i} = f_{s0} k_i \exp^{i(k\vec{x} + \omega t)} = f_{s0} \frac{2\pi}{\lambda} \exp^{i(k\vec{x} + \omega t)}$, de esta manera $\rho_0\text{div}(\vec{u}_s) \sim \frac{\rho_0 u_s}{\lambda}$ y $(\nabla\rho_s) \cdot \vec{u}_0 \sim \frac{u_0 \rho_s}{\lambda}$. Con

respecto a las derivadas espaciales de u_0 y ρ_0 , por orden de magnitud estas son proporcionales a $\frac{1}{L}$, por lo tanto $(\nabla\rho_0)\cdot\vec{u}_s \sim \frac{u_s\rho_0}{L}$ y $\rho_s\text{div}(\vec{u}_0) \sim \frac{\rho_s u_0}{L}$. Sí ahora comparamos éstos cuatro términos en orden de magnitud entonces: $(\nabla\rho_0)\cdot\vec{u}_s \ll (\nabla\rho_s)\cdot\vec{u}_0$ y $\rho_s\text{div}(\vec{u}_0) \ll \rho_0\text{div}(\vec{u}_s)$, ya que $\lambda \ll L$ y por tanto $\frac{1}{L} \ll \frac{1}{\lambda}$, de esta manera los términos más pequeños se desprecian y la ecuación de conservación de masa, queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \rho_0\text{div}(\vec{u}_s) + \vec{u}_0\cdot\nabla\rho_s &= 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0\nabla\right]\rho_s + \rho_0\text{div}(\vec{u}_s) &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.4. BASES DE LA INTERACCIÓN SONIDO-VÓRTICE

Si se considera un flujo, sin viscosidad y despreciando las fuerzas de cuerpo, tales como la gravedad y fuerzas electromagnéticas, la ecuación de Euler esta dada por:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla P$$

Los términos no lineales se pueden expandir utilizando la identidad vectorial:

$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \nabla(\frac{1}{2}u^2) - \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})$, y sabiendo que la vorticidad esta dada por el rotacional de la velocidad, entonces la ecuación de Euler queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nabla(\frac{1}{2}u^2) - \vec{u}\times\vec{\omega} = -\frac{1}{\rho}\nabla P \quad (2.25)$$

Aplicando la divergencia, y multiplicando por $-\rho$, de la ecuación anterior, se obtiene lo siguiente:

$$\nabla^2 P = \text{div}\left[-\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \rho\nabla\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \rho(\vec{u}\times\vec{\omega})\right] \quad (2.26)$$

Por otra parte tomando la ecuación de conservación de masa $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\rho\vec{u} = 0$ y aplicando la derivada parcial con respecto del tiempo se tiene que: $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}[\text{div}\rho\vec{u}] = \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \text{div}\left[\frac{\partial\rho\vec{u}}{\partial t}\right] = 0$, desarrollando el producto dentro de la derivada parcial con respecto del tiempo se llega a lo siguiente: $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \text{div}\left[\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right] = 0$. Utilizando la condición de que el proceso es adiabático, es decir, que los cambios en la presión son iguales a la velocidad del sonido al cuadrado por cambios en la densidad, se puede usar la siguiente igualdad $\rho = \frac{P}{c^2}$, por lo tanto la ecuación de conservación de masa queda como sigue:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \text{div}\left[\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\frac{\partial\rho}{\partial t}\right] = 0 \quad (2.27)$$

Ahora restando ésta ecuación con la 2.26, se obtiene que:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \text{div} \left[\vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \rho (\vec{u} \times \vec{\omega}) \right] \quad (2.28)$$

Esta es una ecuación de onda no homogénea, donde el termino fuente depende entre otras cosas de la vorticidad. Como la velocidad de flujo se considera que es mucho menor que la velocidad del sonido en el aire, entonces el primer término del lado derecho de la igualdad que es la divergencia de la velocidad es aún mas pequeño, y como el segundo es la divergencia del gradiente de la velocidad al cuadrado lo hace muy pequeño, así estos términos se pueden despreciar, quedando únicamente lo siguiente:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \text{div} [\rho (\vec{u} \times \vec{\omega})] \quad (2.29)$$

2.5. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE ONDA NO HOMOGÉNEA.

La ecuación de onda con presencia de fuentes es no homogénea y se escribe de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\eta \quad (2.30)$$

Si consideramos un fenómeno donde no existe dependencia con respecto al tiempo lo que se obtiene es la ecuación de Poisson, la cual es una ecuación lineal, para encontrar su solución vamos a usar los resultados que se tienen de la teoría electromagnética, si se hace una analogía se tiene la ecuación de un potencial de distribución de carga estático:

$$\nabla^2 \phi = -\eta \quad (2.31)$$

La solución a ésta ecuación se puede obtener a partir de la Ley de Coulomb, la cual establece que el campo eléctrico esta dado por el cociente de la carga q y la distancia que hay de ésta al punto de medición: $\vec{E} = \frac{q}{4\phi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$ y puesto que el campo eléctrico es igual a menos el gradiente del potencial, entonces se tiene que $\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{q}{4\phi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$. Por lo tanto, el potencial eléctrico producido por una carga puntual es: $E = -\nabla\phi = \frac{q}{4\phi\epsilon_0}$. Cuando se tiene una distribución de cargas en un volumen, el potencial se obtiene integrando sobre el volumen v donde están esas cargas, donde $dq = \rho dv$, entonces la solución a la ecuación 2.31 es la siguiente:

$$\phi(x_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(x'_i)}{|(x_i - x'_i)|} dv' \quad (2.32)$$

Donde $| (x_i - x'_i) |$ es la distancia del punto de observación al punto donde están las cargas o las fuentes, así las variables primadas son aquellas que se encuentran en el volumen a integrar.

Consideremos ahora la ecuación de onda con termino fuente, recordemos que esta ecuación es:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\eta \quad (2.33)$$

Donde η es una fuente la cual puede depender tanto de las coordenadas espaciales como de la temporal, por lo que se considerará a ésta como una función en general $f(x_i, t)$. Para encontrar la solución de esta última ecuación vamos a hacer un desarrollo en serie de Fourier tanto de ϕ como del término fuente η , así:

$$\phi(x_i, t) = \sum_{\omega} \phi_{\omega}(x_i)e^{i\omega t} \quad (2.34)$$

$$f(x_i, t) = \sum_{\omega} f_{\omega}(x_i)e^{i\omega t} \quad (2.35)$$

Ahora se realizan los cálculos del laplaciano y la segunda derivada con respecto del tiempo para el potencial ϕ , donde al aplicar el laplaciano a la serie del potencial éste simplemente entra dentro de la suma debido a que éstos conmutan, así se obtiene que:

$$\nabla^2\phi = \sum_{\omega} \nabla^2\phi_{\omega}(x_i)e^{i\omega t} \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \sum_{\omega} \frac{1}{c^2}\phi_{\omega}(x_i)(i\omega)^2e^{i\omega t} = -\sum_{\omega} \frac{\omega^2}{c^2}\phi_{\omega}(x_i)e^{i\omega t} \quad (2.37)$$

Sustituyendo cada término en la ecuación 2.33 se tiene que:

$$\sum_{\omega} \nabla^2\phi_{\omega}(x_i)e^{i\omega t} + \sum_{\omega} \frac{\omega^2}{c^2}\phi_{\omega}(x_i)e^{i\omega t} = -\sum_{\omega} f_{\omega}(x_i)e^{i\omega t} \quad (2.38)$$

Puesto que los términos de cada suma son todos sobre ω , se pueden poner en una sola suma, de manera que se obtiene lo siguiente:

$$\sum_{\omega} \left[\nabla^2\phi_{\omega}(x_i) + \frac{\omega^2}{c^2}\phi_{\omega}(x_i) + f_{\omega}(x_i) \right] e^{i\omega t} = 0 \quad (2.39)$$

Para que la ecuación anterior se cumpla, todos los términos que se encuentran dentro de los corchetes deben ser igual a cero, así se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla^2\phi_{\omega}(x_i) + \frac{\omega^2}{c^2}\phi_{\omega}(x_i) + f_{\omega}(x_i) = 0 \quad (2.40)$$

La ecuación 2.40 solo depende de las coordenadas espaciales, y se tiene una ecuación muy parecida a la del problema inicial. Si se considera a la función fuente $f_{\omega}(x_i, t)$ puntual, se puede reemplazar a ésta por una función Delta de Dirac. Recordemos que la función delta de Dirac tiene las siguientes propiedades:

$$i) \quad \delta(x_i - x'_i) = 0 \text{ para } x_i \neq x'_i$$

$$ii) \quad \int \delta(x_i - x'_i) dv' = 1$$

Un procedimiento común para resolver las ecuaciones del electromagnetismo y de ondas es la introducción de la función de Green [11], así la ecuación 2.40 se puede resolver introduciendo ésta función, ya que por definición ésta cumple que: $\nabla^2 G(x_i, x'_i) = \delta(x_i - x'_i)$.

De esta manera en la ecuación 2.40 el potencial ϕ será reemplazado por la función de Green, donde dicha función $G(x_i, x'_i)$ representa el potencial en el punto de observación x_i debido a una carga colocada en x'_i , así:

$$\nabla^2 G(x_i, x'_i) + \frac{\omega^2}{c^2} G(x_i, x'_i) = -\delta(x_i - x'_i) \quad (2.41)$$

La solución a la ecuación 2.40 es:

$$\phi_\omega(x_i) = \int f_\omega(x'_i) G(x_i, x'_i) dv' \quad (2.42)$$

La función $G(x_i, x'_i)$ por definición es simétrica y el problema que se tiene también es simétrico con respecto a $r = 0$, es decir, el problema es radial, por lo que para facilitar los cálculos se utilizarán coordenadas esféricas, puesto que G solo depende del radio las variables de los ángulos se eliminarán, por lo que en el laplaciano de G solo se tendrá en derivadas totales con respecto de r , y la función δ vale cero para todo punto distinto de $r = 0$. De manera que al hacer el cambio de coordenadas la ecuación 2.41 se escribe:

$$\frac{2}{r} \frac{dG}{dr} + r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + k^2 G = 0 \quad (2.43)$$

Donde $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, ésta es una ecuación de segundo grado homogénea, para la cual se va a proponer una solución de la forma $G = \frac{1}{r} e^{\alpha r}$

Para sustituir esta expresión en la ecuación 2.43 tomemos en cuenta que $\frac{dG}{dr} = \frac{\alpha e^{\alpha r}}{r} + \frac{1}{r^2} e^{\alpha r} = e^{\alpha r} \left(\frac{\alpha}{r} - \frac{1}{r^2} \right)$, y la segunda derivada es $\frac{d^2 G}{dr^2} = e^{\alpha r} \left(\frac{\alpha^2}{r} - \frac{2\alpha}{r^2} + \frac{2}{r^3} \right)$. Esto nos lleva a la siguiente relación $\frac{e^{\alpha r}}{r} (\alpha^2 + k^2) = 0$, para que ésta ecuación tenga solución debe cumplirse que $\alpha^2 + k^2 = 0$, de manera que $\alpha = \pm ik$. Por lo tanto la función G admite las siguientes soluciones $G = \frac{e^{\pm ikr}}{r}$. A partir de este resultado ya podemos determinar la solución a la ecuación 2.40:

$$\phi_\omega(x_i) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f_\omega(x'_i)}{r(x_i, x'_i)} e^{ikr(x_i, x'_i)} dv' \quad (2.44)$$

Esta solución difiere de la solución a la ecuación 2.31 en la exponencial. A partir de la ecuación 2.44 es posible obtener la solución de la ecuación de onda. Para llegar a ella recordemos que ϕ_ω resultan de aplicar la serie de Fourier a la función ϕ . Si recordamos la ecuación 2.34 resulta que la solución buscada es:

$$\phi(x_i, t) = \sum_{\omega} \phi_{\omega}(x_i) e^{i\omega t} = \sum_{\omega} \frac{1}{4\pi} \int \frac{f_{\omega}(x'_i) e^{i(\omega t + kr)}}{r(x_i, x'_i)} dv' \quad (2.45)$$

Para avanzar en la determinación de la solución hagamos el siguiente cambio de variable $s = t - \frac{kr}{\omega}$. A partir de lo anterior la solución toma la forma:

$$\phi(x_i, t) = \sum_{\omega} \frac{1}{4\pi} \int \frac{f_{\omega}(x'_i) e^{i\omega(t + \frac{kr}{\omega})}}{r(x_i, x'_i)} dv' = \sum_{\omega} \frac{1}{4\pi} \int \frac{f_{\omega}(x'_i) e^{i\omega s}}{r(x_i, x'_i)} dv' \quad (2.46)$$

Esta solución es semejante a la obtenida para la ecuación de Poisson, excepto porque la variable s corresponde a un tiempo retardado, es decir, al tiempo actual se le resta el tiempo que tarda la señal (la onda) de viajar del punto donde esta la fuente al punto de observación. Puesto que la suma es sobre ω puede cambiar con la integral, es decir, la suma se puede intercambiar con la integral, ya que ésta suma esta actuando solo sobre la función fuente $f_{\omega}(x_i)$ y no sobre toda la integral, de ésta manera se puede ver a la función fuente como una serie de Fourier, justo como la que se sugirió al inicio, de manera que ésta es igual a la función fuente que depende del tiempo $f(x'_i, t)$ de manera que al sustituir se tiene lo siguiente:

$$\phi(x_i, t) = \sum_{\omega} \frac{1}{4\pi} \int \frac{f_{\omega}(x'_i) e^{i\omega s}}{r(x_i, x'_i)} dv' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sum_{\omega} f_{\omega}(x'_i) e^{i\omega s}}{r(x_i, x'_i)} dv' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(x'_i, s)}{r(x_i, x'_i)} dv' \quad (2.47)$$

Pero la variable $s = t - \frac{kr}{\omega}$ y $k = \frac{\omega}{c}$ de manera que al sustituir k en s , se tiene $s = t - \frac{r}{c}$, y sustituyendo esta variable a la ecuación 2.47, se tiene que:

$$\phi(x_i, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(x'_i, t - \frac{r}{c})}{r(x_i, x'_i)} dv' \quad (2.48)$$

Otra manera de tratar el problema es de la siguiente forma: se puede ver desde un punto de vista dimensional, primero se ve que en dos dimensiones el potencial esta dado tan solo por las segundas derivadas parciales de dos coordenadas, en ecuación se tiene que: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\eta$, donde ya es sabido que la solución a ésta ecuación es una integral de superficie $\phi(x, y) = \int \frac{\rho ds'}{|r-r'|}$, si ahora vemos el problema en tres dimensiones, el cual es el que se vio al inicio y cuya solución es una integral de volumen, por último se puede ver a la ecuación 2.33 como el mismo problema pero ahora en cuatro dimensiones donde la cuarta dimension corresponderia a la coordenada temporal, esta ecuación puede verse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -f(x_i, t) \quad (2.49)$$

Si introducimos el operador conocido como D'Ambertiano cuyo símbolo es \square , el cual es la suma del laplaciano y la segunda derivada parcial temporal, es decir, $\square = \nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, se puede sustituir este operador en la ecuación 2.33, y se tiene simplemente:

$$\square\phi = -f(x_i, t) \quad (2.50)$$

Ésta última ecuación tiene la forma de un laplaciano generalizado, de esta manera se puede hacer una analogía en 4 dimensiones y cuya solución sería como las soluciones en 2 y 3 dimensiones, como ya se menciona. La ecuación 2.49 se resolverá con el mismo procedimiento que ya se hizo anteriormente, de manera que nuevamente se utilizará la función de Green con dependencia no solo espacial sino también con el tiempo $G(x_i, t, x'_i, t')$, y serán dos Delta de Dirac, una con variable espacial $\delta(x_i, x'_i)$ y la otra con variable en el tiempo $\delta(t - t')$, de esta manera la función de Green cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$\nabla^2 G(x_i, t; x'_i, t') = -\delta(x_i - x'_i)\delta(t - t').$$

Ahora se debe ver como es el tiempo primado t' , así como en la función de Green $G(x_i, x'_i)$ y la función Delta de Dirac $\delta(x_i, x'_i)$ representan el potencial en el punto de observación en x_i , debido a una carga colocada en x'_i , de la misma manera t' se refiere al tiempo en la variable x'_i , por lo que se debe encontrar el tiempo que tarda en llegar la señal del punto x'_i al punto de observación en x_i .

Sea $\tau = \alpha(t - t')$, donde alfa es simplemente una constante, ahora se calcula la derivada con respecto del tiempo con la nueva variable τ , de manera que $\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial\tau}$, haciendo la segunda derivada se tiene: $\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau^2} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) \left(\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)^2$ la cual debe ser igual al termino: $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$, entonces $\left(\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)^2 = -\frac{1}{c^2}$, para hacer la derivada parcial de t con respecto de τ se toma $t = \frac{\tau}{\alpha} + t'$ y se tiene $\left(\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)^2 = \left(\frac{\partial(\frac{\tau}{\alpha} + t')}{\partial\tau}\right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$, entonces $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = -\frac{1}{c^2}$, para que un número elevado al cuadrado sea igual a un número negativo éste debe ser un número imaginario i , por lo tanto: $\alpha = \frac{c}{i} = -ic$, de esta manera $\tau = -ic(t - t')$ y por lo tanto $t' = t - \frac{i\tau}{c}$, por como se definió el tiempo τ el cual es un múltiplo del tiempo $t - t'$, entonces τ esta relacionado con la distancia que recorre la señal de la función fuente al punto de observación por lo que τ es justamente ésta distancia $r(x_i, x'_i)$, por lo tanto la variable del tiempo es una función que depende de la distancia que recorre la señal al punto de observación, así $t'(x_i, x'_i) = t - \frac{r(x_i, x'_i)}{c}$.

De esta manera tomando la ecuación 2.47, la cual es solución de la ecuación 2.49, con el nuevo parámetro del tiempo se tiene que:

$$\phi(x_i, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f(x'_i, t - \frac{r(x_i, x'_i)}{c})}{r(x_i, x'_i)} dv' \quad (2.51)$$

A esta solución se le conoce comúnmente como potencial retardado.

Ahora se considerará el caso donde el término fuente esta dado por la divergencia de una función, $f(x_i, t) = \nabla \cdot F(x_i, t)$, entonces la solución se puede escribir como:

$$\phi(x_i, t) = \int G(x_i, t; x'_i, t') (\nabla \cdot F(x'_i, t)) dv' dt' \quad (2.52)$$

Donde la función de Green con dependencia en las variables espaciales y temporales esta dada por:

$$G(x_i, t; x'_i, t') = \frac{1}{4\pi r(x_i, x'_i)} \delta\left(t - t' - \frac{r(x_i, x'_i)}{c}\right) \quad (2.53)$$

La identidad de la divergencia de una función escalar ϕ por una función vectorial \vec{f} , esta dada de la siguiente manera: $\nabla \cdot (\phi \vec{f}) = \phi(\nabla \cdot \vec{f}) + (\vec{f} \cdot \nabla)\phi$, al aplicarse esta identidad al integrando de la ecuación 2.51 se tiene que:

$$\phi(x_i, t) = \int \nabla \cdot (G(x_i, t; x'_i, t')F(x_i, t))dv'dt' - \int (F(x_i, t) \cdot \nabla)G(x_i, t; x', t')dv'dt' \quad (2.54)$$

A la primera integral del lado derecho de la ecuación se le aplica el teorema de Gauss, el cual dice que la integral de volumen de la divergencia de una función h, es igual a la integral de superficie de dicha función, así se tiene que:

$$\int \nabla \cdot (G(x_i, t; x'_i, t')F(x_i, t))dv'dt' = \int dt' \int G(x_i, t; x'_i, t')F(x_i, t)\hat{n}'_i dS' \quad (2.55)$$

Donde \hat{n}' es el vector normal a la superficie S' , la cual debe cubrir por completo el volumen v' lo cual implica que contiene a la función fuente. Si se toma una superficie fuera del volumen, esta superficie seguira siendo la frontera pero ya no contiene a la función fuente por lo tanto la integral 2.55 vale cero. De esta manera la ecuación 2.54 queda de la siguiente manera:

$$\phi(x_i, t) = - \int (F(x_i, t) \cdot \nabla)G(x_i, t; x', t')dv'dt' \quad (2.56)$$

Para resolver esta integral primero se verá la forma de la función de Green, la cual esta dada por la ecuación 2.53, esta función esta dada por una Delta de Dirac a ésta se le aplicará la transformada de Fourier:

$$\mathcal{F} \left(\delta \left(t - t' - \frac{r(x_i, x'_i)}{c} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu t} \delta \left(t - t' - \frac{r(x_i, x'_i)}{c} \right) dt = \frac{e^{i\nu(t' - \frac{r(x_i, x'_i)}{c})}}{\sqrt{2\pi}}$$

Este resultado implica que la transformada de Fourier de la función Delta de Dirac, es simplemente evaluar la función en el punto. Ahora se aplica la transformada de Fourier inversa:

$$\delta \left(t - t' - \frac{r(x_i, x'_i)}{c} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu t} \frac{e^{-i\nu(t' - \frac{r(x_i, x'_i)}{c})}}{\sqrt{2\pi}} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(t - t' - \frac{r(x_i, x'_i)}{c})} d\nu \quad (2.57)$$

Así se tiene otra forma de expresar a la Delta de Dirac, de manera que utilizando ésta, la función de Green (ec. 2.53) se puede reescribir como:

$$G(x_i, t; x'_i, t') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\nu(t - t' - \frac{r(x_i, x'_i)}{c})}}{r(x_i, x'_i)} d\nu \quad (2.58)$$

Se utilizó en todo el desarrollo la notación $r(x_i, x'_i)$ para la distancia de la fuente al punto de observación por componentes, y en notación vectorial es igual a la norma de la resta de los vectores \vec{x} y \vec{x}' .

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^2 = (\vec{x} - \vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}') = \vec{x}^2 + \vec{x}'^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'$$

Como se hace un análisis del comportamiento lejos de la fuente se tiene que la distancia x' es muy pequeña comparada con la distancia de observación x , por lo que el cuadrado de esta cantidad es aún más pequeña así esta cantidad se desprecia, de manera que se tiene:

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}'} = \sqrt{\vec{x}^2 \left(1 - \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2}\right)} = \vec{x} \sqrt{1 - \frac{2\vec{x} \cdot \vec{x}'}{\vec{x}^2}}$$

Haciendo el desarrollo en serie de Taylor a primer orden se obtiene lo siguiente:

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \vec{x} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2(\vec{x} \cdot \vec{x}')}{\vec{x}^2}\right)\right) = x - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{x} \quad (2.59)$$

Como se hace un análisis lejos de la fuente, entonces se sustituye ésta último resultado (ec. 2.59), en la función exponencial de la ecuación 2.58, ya que es en donde se observa el comportamiento asintótico y como la integral es sobre la variable ν entonces la norma de la distancia entre los vectores \vec{x} y \vec{x}' , es simplemente la distancia x la cual sale de la integral, así se tiene:

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') \sim \frac{1}{8\pi^2 x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu(t-t'-\frac{x}{c})} e^{-i\nu(\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{xc})} d\nu \quad (2.60)$$

Pero lo que se esta buscando es el gradiente de G con respecto de \vec{x}' , de manera que:

$$\nabla G = \frac{1}{8\pi^2 x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu(t-t'-\frac{x}{c})} e^{-i\nu(\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{xc})} \left(-\frac{i\nu}{c} \hat{x}\right) d\nu \quad (2.61)$$

La derivada parcial de la función G con respecto del tiempo es:

$$\frac{\partial G(\vec{x}, t; \vec{x}', t')}{\partial t} = \frac{1}{8\pi^2 x} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\nu) e^{-i\nu(t-t'-\frac{x}{c})} e^{-i\nu(\frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{xc})} d\nu \quad (2.62)$$

De manera que el gradiente de G es igual a:

$$\nabla G = \frac{\hat{x}}{c} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (2.63)$$

Sustituyendo éste último resultado en la ecuación 2.56, se tiene que la función ϕ la cual es la solución a la ecuación de onda con el término fuente como la divergencia de una función F , es:

$$\phi(\vec{x}, t) = -\frac{\hat{x}}{4\pi xc} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V'} \vec{F}(\vec{x}', t - \frac{x}{c} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{xc}) dv' \quad (2.64)$$

Capítulo 3

CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA ULTRASONICO

En base a las hipótesis que se tienen, se requiere que la longitud de onda acústica λ sea mucho más pequeña que la escala característica del flujo que se va a estudiar, por lo que si se toma una frecuencia $f = 34 \text{ kHz}$ y se sabe que la velocidad del sonido es de alrededor de 340 m/s en el aire, entonces haciendo uso de la ecuación $c = \lambda f$ se tiene que: $\lambda = 1 \text{ cm}$ lo cual requiere que el medio en el que se propague esta onda sea mucho mayor a 1 cm , así que con un túnel de viento de alrededor de 10 cm es suficiente. Además de que es conveniente trabajar en el ultrasónico debido a que se puede asegurar que no hay perturbaciones ajenas a las emitidas por el emisor, es decir, éstas frecuencias están por encima de los sonidos audibles, al estar trabajando con este tipo de frecuencias nuestra voz no podrá causar señales adicionales al experimento. Por otro lado para obtener un emisor con frecuencias superiores a 34 kHz , se construyó un emisor ultrasonico, el cual esta basado en el modelo creado por el Dr. Raúl Labbé de la Universidad de Santiago de Chile (USACH) [3].

Se construyó un sistema para el estudio de la vorticidad en fluidos mediante la dispersión de una onda ultrasónica. La onda que se hace incidir sobre la distribución de vorticidad es monocromática y se debe cumplir que el número de Mach sea pequeño ($M \ll 1$). Donde el número de Mach esta definido como el cociente de la velocidad del fluido v y la velocidad del sonido c , $M = \frac{v}{c}$, para que esta cantidad sea mucho menor que uno, se debe tener que la velocidad del flujo debe ser mucho menor a la velocidad del sonido en el aire, con esto se obtendrá un número de Mach mucho menor a uno, esta condición es equivalente a decir que el flujo es incompresible.

Un transductor es un dispositivo que a la entrada recibe algún tipo de energía y a la salida cambia ésta energía por otra, esta es la idea de la construcción del emisor y receptor ultrasónico, el emisor será excitado por un voltaje, pero a la salida de éste se obtendrá una onda ultrasonica, y para el receptor será en viceversa, es decir, a la entrada recibe una onda ultrasonica y a la salida se obtiene un voltaje. El emisor además de ser excitado por un voltaje cuenta adicionalmente con una señal variable. Tanto el emisor como el receptor son de tipo capacitivo, es decir, éstos funcionan como un condensador de placas paralelas, el cual consiste de dos placas conductoras planas colocadas de manera paralela separadas por una distancia d , cada placa esta cargada, una contiene carga positiva $+Q$ y la otra carga negativa $-Q$, y esto genera una diferencia de potencial entre ellas. La relación que hay entre la carga y la diferencia de potencial es la *capacidad del condensador o capacitancia*. La capacitancia dependerá solamente de las dimensiones y de la forma geométrica de las placas, así como de la separación entre ellas. La capacidad del condensador plano de placas circulares, despreciando los campos en los bordes, está dada por:

$$C = \frac{A}{4\pi d} \quad (3.1)$$

Donde A es el área de las placas y d la separación entre éstas, la capacidad tiene dimensiones de longitud, por lo que las unidades son simplemente centímetros, las cuales están en sistema CGS, en éste sistema hay tres unidades base, y a partir de éstas se derivan otras como lo son la carga que esta en *ues* y diferencia de potencial en *statvolt*. En el SI hay siete unidades base bien definidas y dimensionalmente independientes, hay otras unidades que se forman con la combinación de las unidades básicas, que son las unidades suplementarias, de éstas se deriva la capacitancia, la cual tiene unidades dadas por el cociente de la unidad de carga que es el coulomb o ampere por segundo, sobre la unidad de la diferencia de potencial que es el *volt*, a éste cociente se le denomina farad [$\frac{C}{V}$] = [f], ésta es la unidad de la capacitancia en el SI. Así para relacionar las unidades del sistema CGS con el SI, se tienen las siguientes equivalencias: $1 \text{ volt} = \frac{1}{300} \text{ statvolt}$ y $1 \text{ coulomb} = 3 \times 10^9 \text{ ues}$. Así que:

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}} = \frac{3 \times 10^9 \text{ ues}}{\frac{1}{300} \text{ statvolt}} = 9 \times 10^{11} \frac{\text{ues}}{\text{statvolt}} = 9 \times 10^{11} \text{ cm} \quad (3.2)$$

Se hizo el diseño de los transductores de tipo capacitivo, tales transductores serán un emisor y un receptor, lo que los diferencia es un circuito electrónico. Los materiales utilizados fueron: aluminio de 3 *mm* de grosor, zinc de 3 *mm* de grosor, se utiliza este metal por el fotograbado que lleva, polietileno de 15 *mm* de grosor y papel mylar aluminizado por un solo lado. A continuación se presentan las piezas y algunos detalles de su construcción. En la figura 3.1 se presenta el diseño de la pieza que será la parte posterior del transductor, la cual es un disco de aluminio de grosor 3 *mm*, y radio de 100 *mm*, con agujeros de diámetro 4 *mm*, los cuatro agujeros del centro van avellanados en su parte interior, en esta pieza va el agujero de $\frac{3}{8}$ " para poner una conexión BNC en la cual se conectará el circuito electrónico que servirá para que funcione como emisor o receptor. A esta pieza la llamaremos la número 1.

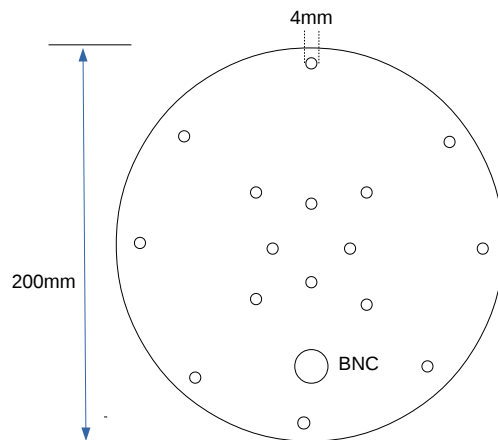


Figura 3.1: Diseño de la pieza número 1

La pieza número 2 es de polietileno de grosor 15 *mm*, es un disco de radio de 71 *mm*, ésta

pieza va unida a la pieza número 1 (disco de aluminio). En la figura 3.2 se presenta el esquema del diseño de ésta.

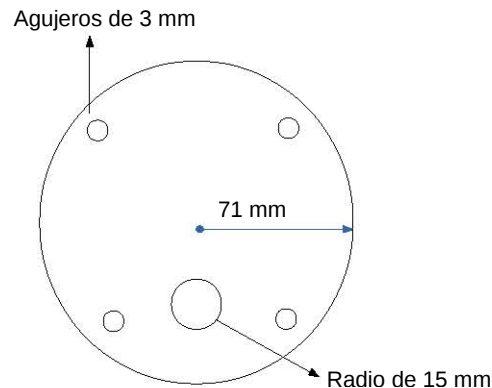


Figura 3.2: Diseño de la pieza número 2

La pieza número 3 es un disco de zinc de grosor 3 mm , con un radio de 71 mm , el cual servirá como electrodo, el cual tiene un grabado electrolytíco en la cara que estará en contacto con la parte no aluminizada del mylar, el grabado consiste en un patrón de puntos que sobresalen $0,5\text{ mm}$, ésto hace que el funcionamiento del transductor cambie la distancia cuando se suministre el voltaje, y con ello cambia la capacitancia. Se hizo el calculo del valor de la capacitancia considerando que la distancia entre las placas es constante, así utilizando la ecuación 66, se obtiene lo siguiente:

$$C = \frac{A}{4\pi d} = \frac{158,368\text{cm}^2}{0,628\text{cm}} = 252,178\text{cm} = 0,28\text{nF}$$

La placa de zinc va unida a la pieza número 2, mediante tornillos con cuerda y cabeza cónica, por lo cual los agujeros en el zinc deben ser avellanados, para que las cabezas de los tornillos no sobresalgan y perturben el grabado que ya se tiene en el zinc. En la figura 3.3 se presenta el esquema de ésta pieza, cabe mencionar que el grabado son una serie de puntos muy finos, por lo que en la figura no se puede ver a detalle, se debe tener el diseño en algún programa de dibujo como corel draw, y se debe mandar a hacer en un establecimiento de fotograbado. A ésta pieza debe ser soldado un alambre de 10 cm aproximadamente, y al otro extremo un conector BNC.

La pieza número 4, es un anillo con radio exterior de 100 mm y radio interior de 71 mm , de polietileno de grosor 15 mm . Esta pieza va unida a la pieza número 1 (disco de aluminio, ver figura 3.1), por medio de ocho tornillos de 4 mm . El esquema de esta pieza se encuentra en la figura 3.4.

La pieza número 5 es igual a la pieza número 4 (ver figura 3.4), sólo que el material utilizado es aluminio de grosor 3 mm y los agujeros para los ocho tornillos de 4 mm van avellanados en la parte que quedará hacia el exterior.

La pieza que sirve para fijar el transductor es de aluminio, ésta pieza se fija a la número 1 (ver figura 3.1), cuyas dimensiones se especifican en la figura 3.5.

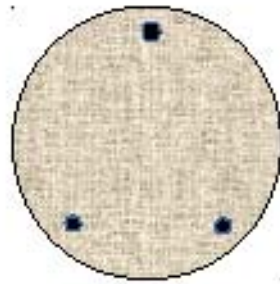


Figura 3.3: Disco de zinc con grabado electrolítico, pieza número 3.

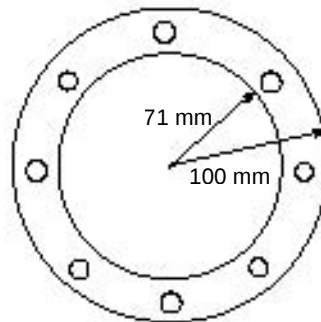


Figura 3.4: Diseño de la pieza número 4 (anillo de polietileno) y 5 (anillo de aluminio).

Se utilizó mylar aluminizado por un solo lado, se cortó un disco de radio de 100 mm con ocho orificios en el contorno de las mismas dimensiones que el disco de aluminio (figura 3.1), solo que sin los orificios del centro, en la parte donde van los ocho tornillos se hacen dos cortes en forma de cruz de 4 mm . El mylar se pone entre la placa de zinc (electrodo) y el aro de aluminio. La parte no aluminizada se pone del lado de la placa de zinc. En la figura 3.6 se presenta una vista explosionada del transductor, cuyo diseño es proporcionado por el Dr. Raúl Labbe [3].

Ya terminada la etapa de diseño se procede al armado de las piezas, para lo cual se consiguieron los materiales ya mencionados en la etapa anterior, se tuvieron varios problemas tales como contactar a los proveedores de dichos materiales, una vez contactado el distribuidor tarda aproximadamente 15 días en la entrega. Se mandan a hacer los cortes necesarios del diseño en el taller de la Facultad de Ciencias, y los de aluminio se mandan a un cortador láser, esto con la finalidad de obtener mayor precisión. En ambos lugares es tardado debido al exceso de trabajo. En las figuras 3.7 y 3.8, se presentan las fotos de las piezas ya concluidas.

Los circuitos electrónicos que caracterizan al transductor como emisor y receptor, consisten de un capacitor, una resistencia y una fuente de alto voltaje, en la figura 3.9 se presentan dichos circuitos. Para resolver el circuito de la figura 3.9 a) se tiene que éste es uno de tipo

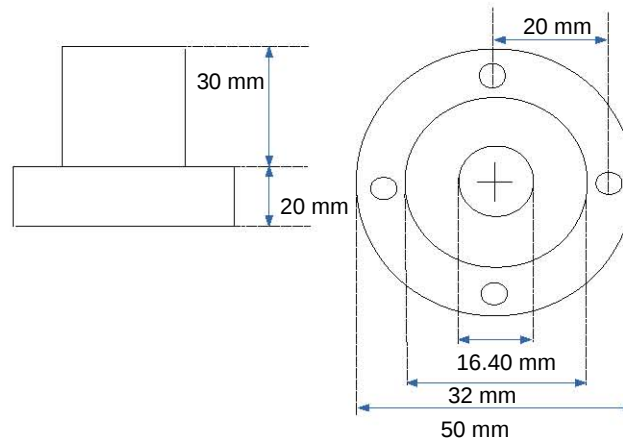


Figura 3.5: Pieza de soporte para el transductor. Del lado izquierdo se observa la vista lateral y del lado derecho la vista superior. La escala esta en milímetros.

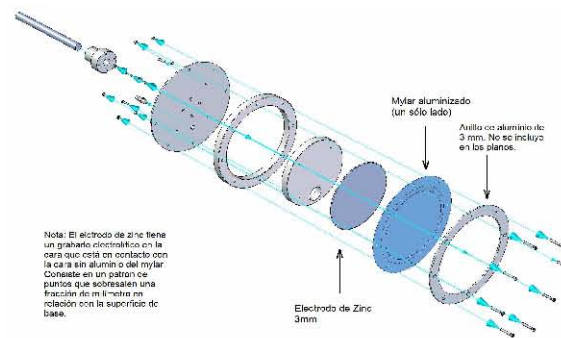


Figura 3.6: Vista explosionada del transductor.[3]

RC, pero además se tiene un generador de funciones, el cual puede considerarse simplemente como una fuente de voltaje, de manera que podemos simplificar el circuito de la figura 3.9 a) a simplemente resolver el de la figura 3.10, solo con fines teóricos de resolución de circuitos RC, pero el circuito a utilizar en el dispositivo es el de la figura 3.9 a), así aplicando la segunda ley de Kirchhoff ¹ al circuito RC de dicha figura, resulta la siguiente ecuación diferencial:

$$V_0 + V \text{sen}(\omega t) = \frac{dQ}{dt} R + \frac{Q}{C} \quad (3.3)$$

Donde V_0 es la fuente de alto voltaje, $V \text{sen}(\omega t)$ es el generador de funciones con 80 Vrms , R es la resistencia, Q es la carga y C es el capacitor, para resolver ésta ecuación diferencial, primero se obtiene la solución de la ecuación no homogénea:

$$V_0 = R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q, \text{ ésta ecuación se divide entre } R, \text{ entonces:}$$

$$\frac{V_0}{R} = \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q, \text{ despejando } \frac{dQ}{dt} \text{ se tiene que:}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC} = \frac{V_0 C - Q}{RC}, \text{ y haciendo ahora separación de variables se obtiene:}$$

¹En un circuito cerrado o malla, la suma algebraica de las fuerzas electromotrices aplicadas, o subidas de tensión, es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión en todos los elementos pasivos. En otras palabras, la suma algebraica de las diferencias de potencial en todo circuito cerrado es nula.[5]

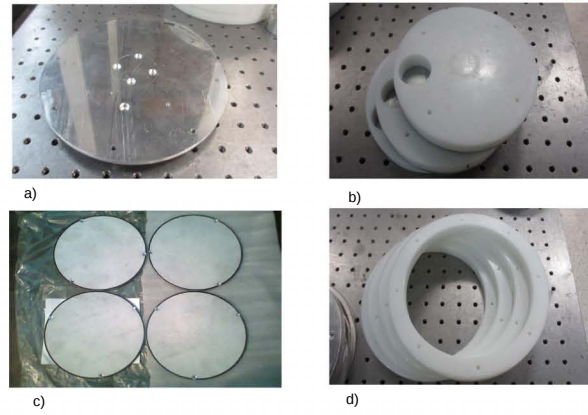


Figura 3.7: a) Disco de aluminio (pieza 1), b) Disco de polietileno (pieza 2), c) Disco de zinc con grabado electrolítico (pieza 3) y d) anillo de polietileno (pieza 4).

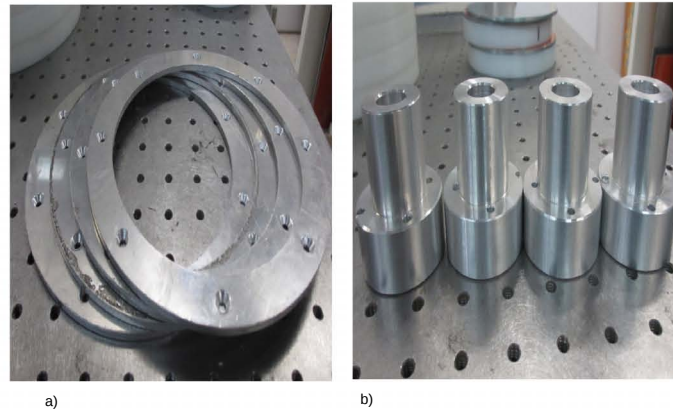


Figura 3.8: a) Anillo de aluminio (pieza 5), b) Soporte de aluminio para el transductor.

$\frac{dQ}{V_0C - Q} = \frac{dt}{RC}$, entonces:

$\frac{dQ}{Q - V_0C} = -\frac{dt}{RC}$, ahora integrando:

$\ln(Q - V_0C) = -\frac{t}{RC} + k_1$, donde k_1 es la constante de integración, ahora se aplica la función exponencial a ésta ecuación, así:

$Q - V_0C = Ae^{-\frac{t}{RC}}$, donde A es la nueva constante que corresponde al $\ln(k_1)$, y despejando Q se tiene que:

$$Q = V_0C + Ae^{-\frac{t}{RC}}.$$

Ahora sólo queda por resolver la ecuación $V \text{sen}(\omega t) = R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q$, para lo cual se propone la siguiente solución particular: $Q = \alpha \text{sen}(\omega t) + \beta \text{cos}(\omega t)$ y al hacer la derivada con respecto de t se tiene que:

$\frac{dQ}{dt} = \alpha \omega \text{cos}(\omega t) - \beta \omega \text{sen}(\omega t)$, al sustituir Q y $\frac{dQ}{dt}$ en la ecuación a resolver se obtiene:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = R \alpha \omega \text{cos}(\omega t) - R \beta \omega \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{C} [\alpha \text{sen}(\omega t) + \beta \text{cos}(\omega t)] = \text{cos}(\omega t) \left[R \alpha \omega + \frac{\beta}{C} \right] + \text{sen}(\omega t) \left[-R \beta \omega + \frac{\alpha}{C} \right] = V \text{sen}(\omega t)$$

Para que se cumpla la última igualdad de la ecuación anterior debe ocurrir que:

$$R \alpha \omega + \frac{\beta}{C} = 0 \quad (3.4)$$

Así que:

$$-R\beta\omega + \frac{\alpha}{C} = V \quad (3.5)$$

Si despejamos β de la ecuación 3.4, entonces $\beta = -R\alpha\omega C$, sustituyendo éste valor en la ecuación 3.5 se tiene que:

$$R^2\omega^2\alpha C + \frac{\alpha}{C} = V, \text{ y despejando el valor de alfa:}$$

$$\alpha = \frac{VC}{1+R^2\omega^2C^2}$$

sustituyendo éste valor, en la igualdad de β , se obtiene: $\beta = -\frac{R\omega C^2V}{1+R^2\omega^2C^2}$

Ya que se tienen los valores de α y β , se sustituyen en la solución particular, y ésta se suma a la solución de la ecuación no homogénea. Por lo tanto la solución a la ecuación 3.3 es la siguiente:

$$Q = V_0C + Ae^{-\frac{t}{RC}} + \frac{VC}{1+R^2\omega^2C^2} \{sen(\omega t) - \omega RC cos(\omega t)\} \quad (3.6)$$

Resolver el circuito quiere decir encontrar la corriente que pasa a través de éste, por lo que al derivar la carga Q con respecto del tiempo, ésta es igual a la corriente I , así:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{A}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{VC}{1+R^2\omega^2C^2} \{\omega cos(\omega t) + \omega^2 RC sen(\omega t)\} \quad (3.7)$$

Para encontrar el valor de la constante A se tiene que dar una condición inicial, la cual se dirá que para el tiempo $t_0 = 0$, no hay corriente en el circuito, por lo que:

$$I = 0 = -\frac{A}{RC}e^{-\frac{0}{RC}} + \frac{VC}{1+R^2\omega^2C^2} (\omega cos(\omega 0) + \omega^2 RC sen(\omega 0)) = -\frac{A}{RC} + \frac{VC}{1+R^2\omega^2C^2}\omega$$

Y despejando A de la ecuación anterior se tiene que: $A = \frac{VRC^2\omega}{1+R^2\omega^2C^2}$, sustituyendo éste valor en la ecuación 3.7, se tiene que la solución final a la ecuación 3.3 es:

$$I = -\frac{VC\omega}{1+R^2\omega^2C^2}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{VC\omega}{1+R^2\omega^2C^2} (cos(\omega t) + \omega RC sen\omega t) \quad (3.8)$$

En el primer miembro del lado derecho de la ecuación anterior, se puede ver que el tiempo característico de la exponencial está dado por los valores de la resistencia y el capacitor, los cuales son: $R = 5,6 \times 10^6 \Omega$, $C = 1 \times 10^{-6} F$, haciendo el cálculo de RC se obtiene que el tiempo δt debe ser mayor a 5,6 segundos, para que se pueda hacer la aproximación de que la función exponencial tiende a cero, por lo que la ecuación que caracteriza el circuito es simplemente la siguiente:

$$I = \frac{VC\omega}{1+R^2\omega^2C^2} \{cos(\omega t) + \omega RC sen(\omega t)\} \quad (3.9)$$

Sí ahora se introducen los valores que se tienen de los elementos del circuito: $R = 5,6 \times 10^6 \Omega$, $C = 1 \times 10^{-6} F$, $\omega = 2\pi(3,4 \times 10^4) Hz$, se puede ver de la ecuación 3.9 que el coeficiente de la función seno es: $\omega RC = 1,196 \times 10^6$, por lo que éste factor hace que el valor de la función

seno predomine de la función coseno, por lo que ésta función puede eliminarse de la ecuación 3.9, así solo queda:

$$I = \frac{VC^2R\omega^2}{1 + R^2\omega^2C^2} \{sen(\omega t)\} \quad (3.10)$$

Del cociente que se tiene en la ecuación anterior, se puede ver que en el denominador el factor 1 es muy pequeño comparado con $R^2\omega^2C^2$, por lo que tan solo se considerará éste último, por lo tanto la corriente es:

$$I = \frac{VC^2R\omega^2}{R^2\omega^2C^2} \{sen(\omega t)\} = \frac{V}{R} sen(\omega t) \quad (3.11)$$

De la ecuación anterior podemos concluir que la corriente en el circuito dependerá en gran medida del voltaje variable que se suministre, el cual en este caso es de 80 Vrms o alrededor de 120 V , de la resistencia y de la frecuencia del generador la cual es de $3,4 \times 10^4 \text{ Hz}$.

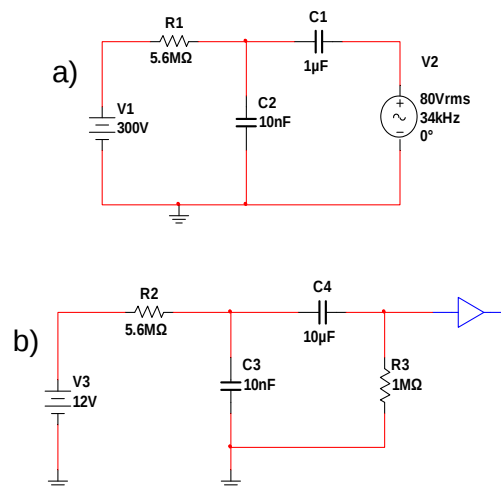


Figura 3.9: a)circuito utilizado como emisor, b)circuito utilizado como receptor

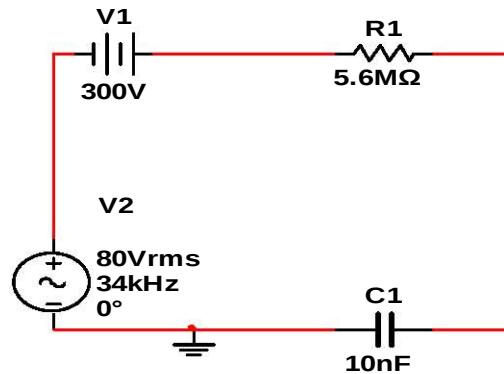


Figura 3.10: Circuito RC

3.1. ELABORACIÓN DEL CIRCUITO DEL AMPLIFICADOR DE POTENCIA

De la figura 3.9 a) se puede ver que se requiere de un amplificador de potencia, ya que el generador de funciones (marca Stanford Research Systems, modelo *DS345*), da una señal con una amplitud máxima de 10 V, y se requieren al menos 120 V. Para la construcción del amplificador de potencia se utiliza un amplificador operacional el cual es un dispositivo electrónico cuya principal característica es su alta ganancia en tensión [7]. Con base a las necesidades de la amplificación requerida se utiliza el amplificador operacional modelo *LM3876* y se construye el circuito electrónico que sugiere la hoja de datos de dicho componente electrónico o datasheet (este documento se encuentra en el anexo I), en este circuito se omiten los componentes en asterisco ya que se presentan como componentes opcionales, entre dichos elementos se omite el transformador, por que el modelo que sugiere no estaba de acuerdo a lo que se requiere, por lo que éste fue construido, más adelante se presentan los detalles de su construcción. El circuito que se hizo es el de la figura 3.11. El amplificador operacional tiene varias patillas para las conexiones de los distintos elementos, para éste se tienen 11, dos de éstas son de entrada, etiquetadas con los signos + y - (patillas 9 y 10), y una patilla de salida (3), además de la común o tierra, se requiere de una alimentación de una fuente de corriente continua simétrica que suministre +12 V y -12 V. Una fuente de voltaje de computadora suministra 12 V los cuales son suficientes para este circuito, sin embargo la potencia que dan que es de 800 W no es suficiente para este circuito por lo que se necesitan dos fuentes de voltaje de computadora cada una de 12 V y 800 W de potencia, las cuales deben conectarse en paralelo para aumentar la potencia, de esta manera se obtienen +12 V que van conectados a la pata 1 y -12 V, que va a la pata 4. Por otro lado se debe construir un transformador, ya que el modelo que sugiere el datasheet no es adecuado para lograr la amplificación que se requiere, para la elaboración de éste se necesita un núcleo de hierro, el cual es para que todo el flujo magnético circule con el máximo de intensidad. El número de espiras de la bobina primaria y secundaria se eligieron de manera empírica, por lo cual después de varios intentos se llegó a 10 vueltas en la bobina primaria, con alambre más grueso que el que va en la bobina secundaria, y alrededor de 200 vueltas en la bobina secundaria, para embobinar dicho núcleo se debe tener el alambre enredado en algún tornillo o algún elemento pequeño, el cual pueda pasar alrededor del núcleo, ya que de lo contrario el embobinado puede resultar muy complicado, sobre todo en la bobina de 200 vueltas donde se requieren de alrededor de 10 m de alambre. Este transformador va conectado

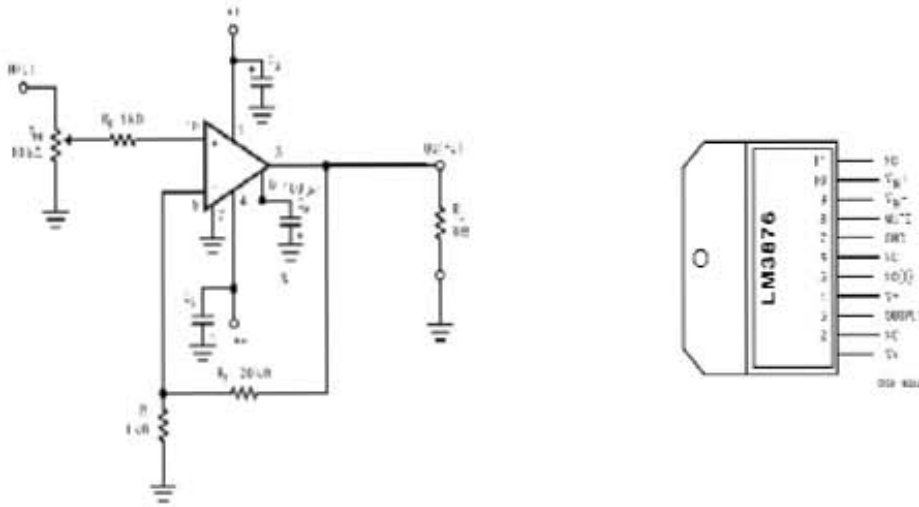


Figura 3.11: Circuito del amplificador operacional *LM3876* sin los elementos en asterisco, y las características del amplificador operacional en sus once patillas.

en la patilla 3 que es la de salida y a la tierra o común, ya que la finalidad de éste es aumentar la potencia de la señal ya amplificada por el amplificador operacional. Al transformador van conectadas dos resistencias en paralelo una que es de $3,3 \Omega$ y $5 W$ de potencia y una resistencia de $1 k\Omega$ y $15 W$ de potencia, así el circuito final para la amplificación de potencia es el de la figura 3.12. Este circuito se hizo en un protoboard, esto con la finalidad de que se tuviera la facilidad de cambiar, agregar o quitar elementos electrónicos fácilmente.

Para ver que el circuito funciona con la amplificación que se requiere, se realizaron varias pruebas antes de ser conectado al circuito del emisor. En el circuito de amplificación se conectó un osciloscopio (marca Tektronix, modelo TDS2014) a la entrada, para ver en éste como llegaba la señal del generador, y a su vez en otro canal del osciloscopio se conectó a la salida del circuito para ver la señal ya amplificada, para proteger el osciloscopio de los altos voltajes que se producen también se conectó una sonda de prueba con división de tensión en el osciloscopio, se tienen varias imágenes de éstas pruebas en un rango que va desde los $26 kHz$ hasta los $50 kHz$, donde la señal permanece estable, es decir, la señal no presenta distorsiones, ni ruidos que puedan modificarla, presentándose de manera senoidal. Solo se presenta una imagen de éstas pruebas en la figura 3.13, en la cual la frecuencia es de $34 kHz$, y donde la señal en color amarillo es la de entrada, la cual esta dada por el generador, y presenta una amplitud de menos de $500 mV$ y en color azul es la señal de salida del amplificador que presenta una amplitud de más de $150 V$, por lo que se logro la amplificación que se requiere. En la figura 3.13, se puede ver que la señal tiene un desfase de 180° , esto se debe a que hay una retroalimentación con la salida en la patilla negativa, cuando existe esta retroalimentación se le llama amplificador operacional inversor, que quiere decir que la señal estará desfasada 180° ó de polarización inversa a la de la entrada, para este experimento no es relevante este hecho, ya que ésta señal será polarizada completamente de manera positiva. Mientras se realizaron todas estas pruebas se notó que había un sobrecalentamiento en el amplificador operacional, por lo que se le puso

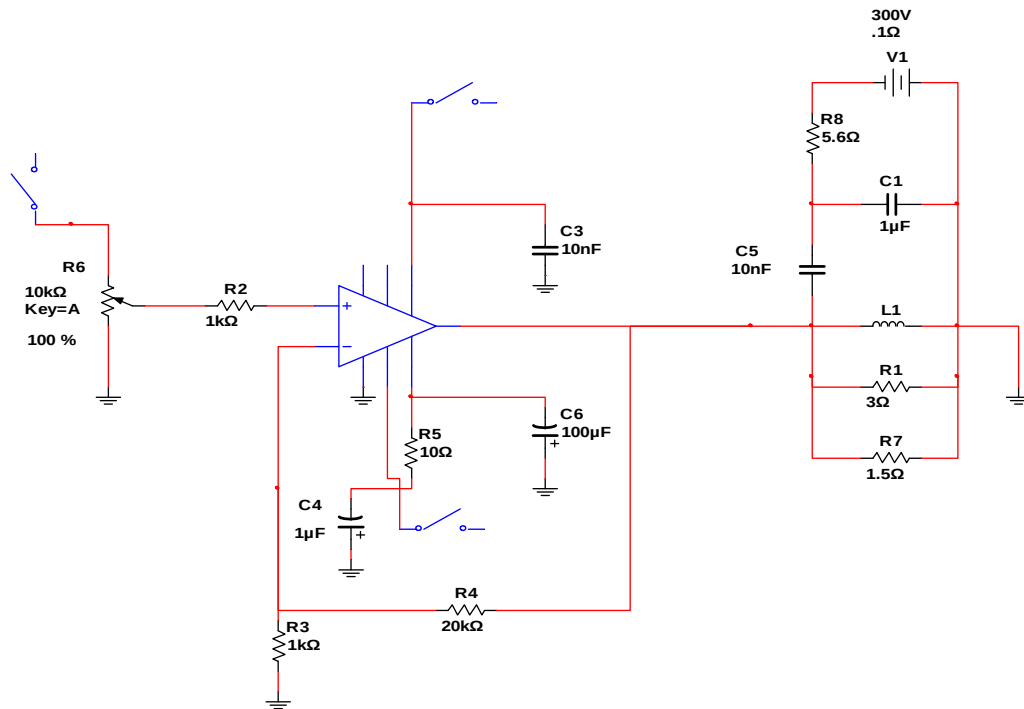


Figura 3.12: Circuito final utilizado para el emisor ultrasonico.

un disipador de calor, sin embargo esto no fue suficiente y se agrego un ventilador para poder enfriar dicho elemento electrónico. Ya que se tiene la amplificación que se necesita, se hace la conexión al circuito del emisor (figura 3.9 a)), y se vuelven a hacer pruebas, para verificar su buen funcionamiento y que al conectarse a éste circuito no haya ninguna modificación en la señal. Se agrega la fuente de alto voltaje para la polarización del electrodo y se vuelven a hacer pruebas, la señal sube por encima del eje x por lo que la señal en vez de oscilar alrededor de $y = 0 V$, ahora oscila en un valor mayor, ésto sin cambiar la señal en amplitud y frecuencia. Por último el circuito electrónico final se pasa del protoboard a una placa grabada y cada elemento electrónico se solda a ésta. Finalmente esta tableta electrónica se instala en una caja hecha en aluminio, que se diseño de acuerdo a las medidas de la tableta, se mando a hacer al Taller de la Facultad de Ciencias, se utilizó una base en madera para fijar la tableta electrónica, y el resto de la caja así como su tapa esta hecha en aluminio, en la parte donde se encuentra el ventilador se hicieron unos agujeros para hacer circular el aire y así evitar un sobrecalentamiento, de esta manera esta caja funciona como una jaula de Faraday, que aísla el circuito electrónico de posibles campos electromagnéticos exteriores. Dicho circuito electrónico, así como la caja terminada se muestran en la figura 3.14.

3.2. RECEPTOR

Ahora para tener el transductor funcionando como receptor se conecta al circuito de la figura 3.9 b), este circuito lleva una resistencia de $1 M\Omega$ que va de la entrada del amplificador a tierra, con la finalidad de proteger el amplificador de los altos voltajes que se puedan desarrollar. El amplificador de carga (marca Brüel & Kjaer modelo NEXUS 2692), es el que se utilizó en este experimento. Como ya se menciono antes tanto el emisor como el receptor ultrasónico son de

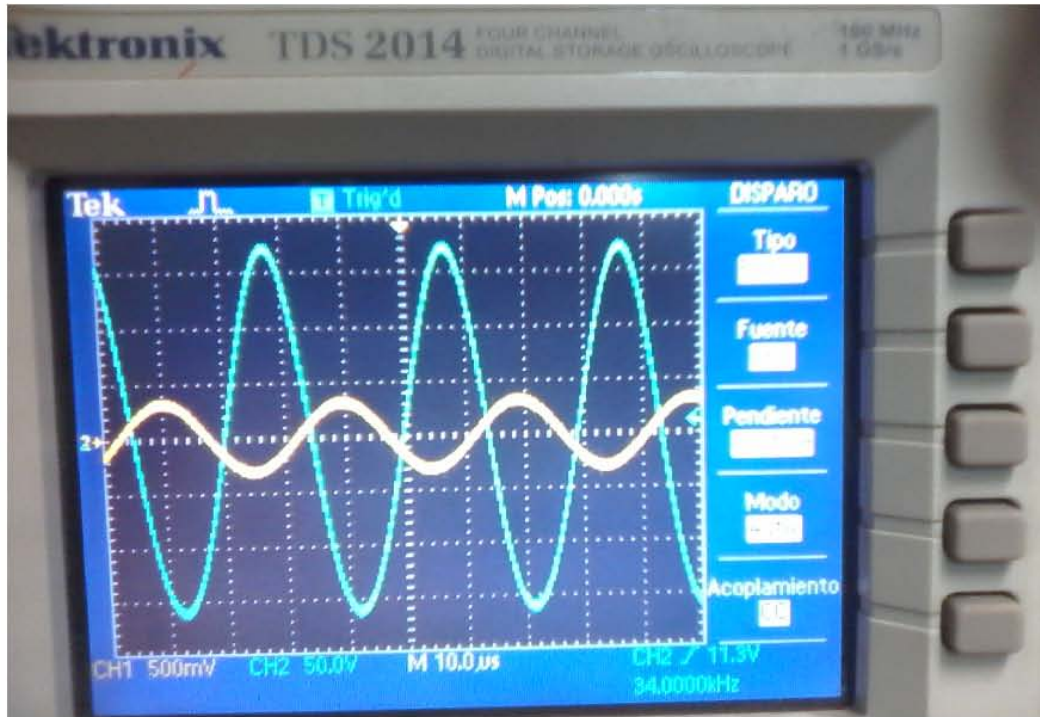


Figura 3.13: Fotografía del osciloscopio, donde se presenta la señal amplificada.

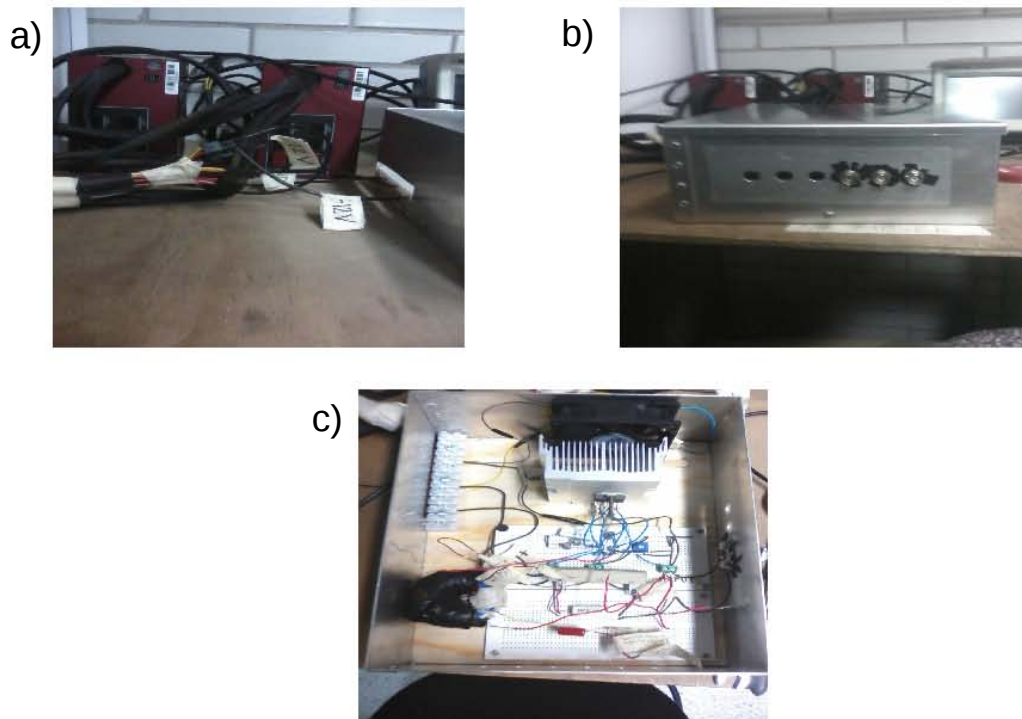


Figura 3.14: a) Fotografía de las dos fuentes de voltaje que alimentan al circuito, una con $+12\text{ V}$ y otra con -12 V . b) Caja de Faraday terminada con el circuito electrónico dentro y las conexiones coaxiales. c) Vista terminada del circuito con todos los elementos electrónicos entre ellos el transformador, el amplificador operacional sujeto al disipador de calor y el ventilador.

tipo capacitivo, por lo que el receptor funcionará como tal, es decir, se espera que se cargue y descargue, con determinada frecuencia, de esta manera se realizó una prueba para determinar el periodo y la frecuencia, ya que el circuito de éste es un circuito RC y se tienen los valores $C = 1 \mu F$ y una resistencia de $R = 1 M\Omega$, entonces el tiempo de carga y descarga esta dado por $\tau = RC = (1 \times 10^{-9})(1 \times 10^6) = 1 \times 10^{-3} = 0,001 \text{ s}$, y la frecuencia es $f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{10^{-3}} = 1000 \text{ Hz}$.

3.3. PRUEBA DEL DISPOSITIVO ULTRASONICO

Para probar que éste dispositivo puede detectar la vorticidad se hizo un experimento en un flujo cuya vorticidad apunta siempre en la misma dirección. Lo que se buscó con la prueba realizada, fue comprobar la teoría demostrada en capítulos previos, donde se afirma que al emitir una onda ultrasonica sobre un vórtice éste emitirá una onda sonora la cual será detectada, de esta manera se puede obtener información directa de las características de dicho vórtice. Para lograr ésto se estudia la calle de Von Karman, ya que se puede obtener de manera relativamente sencilla y por ser una estructura de vórtices muy estudiada. Al hacer incidir las ondas ultrasonicas a ésta distribución de vórtices, éstos emiten una onda sonora que es captada por el receptor. Al calcular la transformada de Fourier se obtiene información sobre la distribución de vorticidad. La señal contiene no solo la onda dispersada, sino debido a la difracción, el receptor capta también la onda producida por el emisor. Los resultados son semejantes a los que aparecen en el artículo titulado "Spectral Analysis of the von Kármán Flow Using Ultrasound Scattering" de C. Baudet, S. Ciliberto y J.F. Pinton [10], donde realizaron pruebas muy similares utilizando el mismo método.

Breve descripción de la calle de Von Karman

Si se tiene un flujo de velocidad constante y éste pasa por la zona donde hay un cilindro sólido, entonces comienza a formarse un patrón de vórtices ubicados a lo largo de una línea recta, dicho patrón es una secuencia de vórtices de dos filas, y se supone que la distancia entre dichos vórtices es la misma respecto uno de otro, es decir, la frecuencia de generación de éstos es constante, a este fenómeno se le conoce como calle de Von Karman. Los vórtices formados salen de manera que los de un lado giran en sentido de las manecillas del reloj y los del otro lado giran en sentido contrario a las manecillas del reloj (ver figura 3.15). Tales estructuras pueden observarse para números de Reynolds mayores a 47 [9].

El número de Reynolds es una cantidad sin dimensiones que relaciona la velocidad de flujo, el diámetro del cilindro y la viscosidad del fluido, el cual en forma matemática es:

$$Re = \frac{Ud}{\nu} \quad (3.12)$$

Donde U es la velocidad de flujo, d es el diámetro del cilindro, y ν es la viscosidad cinemática del fluido. Una de las características importantes que debe cumplir el flujo en el fenómeno de la calle de Von Karman es que el número de Reynolds sea mayor a 47, alrededor de éste valor el flujo ya no es estacionario sino que depende explícitamente del tiempo: los vórtices salen periódicamente del flujo, en dos filas. La frecuencia es directamente proporcional a la



Figura 3.15: Desprendimiento de vórtices causado por la interacción de un flujo con una obstrucción. Este fenómeno se conoce como calle de vórtices de Von Karman. (Van Dyke, 1982) [Internet]

viscosidad cinemática e inversamente proporcional al diámetro del cilindro de manera que la relación matemática es la siguiente [10]:

$$f = (0,21Re - 4,5) \frac{\nu}{d^2} \quad (3.13)$$

Para un cilindro de diámetro $d = 0,003 \text{ m}$, y considerando que el aire tiene una viscosidad cinemática de $1,5 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, y utilizando las ecuaciones 3.12 y 3.13, se obtiene la siguiente tabla de valores para el número de Reynolds, la velocidad del flujo y la frecuencia de emisión de vórtices:

Re	u[m/s]	f[Hz]
47	0.235	8.95
80	0.4	20.5
100	0.5	27.5
200	1.0	62.5
400	2.0	132.5

A partir de ésta tabla se puede observar que el valor mínimo de la velocidad de flujo es de $0,055 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, y la máxima es $2,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, de manera que las frecuencias de emisión de vórtices va de $8,95 \text{ Hz}$ a $132,5 \text{ Hz}$.

Dispositivo experimental

Para realizar las pruebas del dispositivo ultrasónico y estudiar la calle de vórtices de Von Karman, se utiliza un túnel de viento con dimensiones de $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$ y $1,20 \text{ m}$ de longitud, éste genera un flujo de aire de velocidad constante con valor $U = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ en dirección al eje x , el túnel de viento tiene instalado un cilindro de manera transversal en dirección z , de diámetro $d = 0,003 \text{ m}$ con el cual se generaran los vórtices. Se colocan el emisor y el receptor de manera que forman un ángulo de 30° entre ellos y dirigidos a dicho túnel de viento (de frente, pero sin perturbar la salida de aire de éste)(ver figura 3.16). El emisor va conectado a un generador

de funciones el cual se pone en una frecuencia $f = 26 \text{ kHz}$ y amplitud $A = 5,28 \text{ v}$ y ésta se amplifica a 250 v_{pp} a la salida, a su vez el emisor se conecta a la fuente de alto voltaje con la cual se suministran 300 v esto con la finalidad de polarizar el emisor. El receptor también se conecta a la fuente de alto voltaje y a un amplificador de potencia de éste se manda a una tarjeta de datos para la obtención de los mismos.

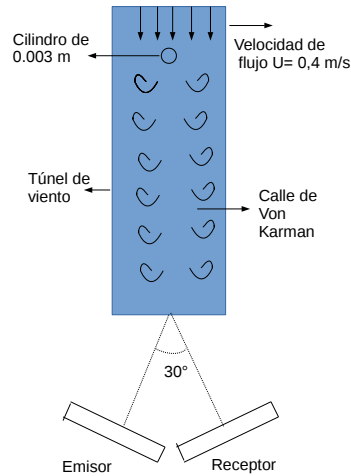


Figura 3.16: Dispositivo experimental.

En la prueba experimental se elige una velocidad de flujo $U = 0,4 \frac{m}{s}$ en el túnel de viento, lo que corresponde a un número de Reynolds igual a 80 y se espera encontrar una frecuencia de emisión de vórtices de $20,5 \text{ Hz}$. A través del emisor se mandan ondas ultrasónicas de frecuencia $f = 26 \text{ kHz}$, y éstas interactúan con una distribución de vórtices de la calle de Von Karman, generada por el cilindro de diámetro $d = 0,003 \text{ m}$ en el tubo de viento. Se puede obtener información de dicha distribución de manera directa. Para la toma de datos se debe tomar una frecuencia de muestreo superior al doble de la frecuencia del emisor, de manera que se eligió una frecuencia de muestreo de 100 kHz . El emisor envía ondas sonoras, las cuales son cambios de presión en el medio, una vez que éstas ondas pasan a través de la distribución de vorticidad, ésta emitirá una nueva onda sonora la cual es captada por el receptor y éste obtiene señales de voltaje, a éstos datos se aplica la transformada de Fourier para obtener las frecuencias de emisión de los vórtices. De una de las pruebas que se realizaron se presenta a continuación la gráfica de la transformada de Fourier de la presión vs frecuencia (figura 3.17), en ésta gráfica se puede ver como aparece la frecuencia natural de 26 kHz que es la frecuencia de emisión y se observa un pico a la derecha que está corrido 20 Hz que corresponde a la frecuencia de emisión de los vórtices. El corrimiento es a la derecha ya que los vórtices se acercan al receptor (debido a la configuración del dispositivo experimental) y esto genera el efecto Doppler.

La elección del ángulo entre emisor y receptor, frecuencias y tamaño del cilindro se hizo para que hubiera interferencia constructiva por la emisión de los diferentes vórtices que conforman la calle de Von Karman. Esto es semejante a lo que ocurre en la difracción de Bragg en redes cristalinas, en este caso el equivalente de los nodos de la red cristalina son los vórtices de la Calle de von Karman.

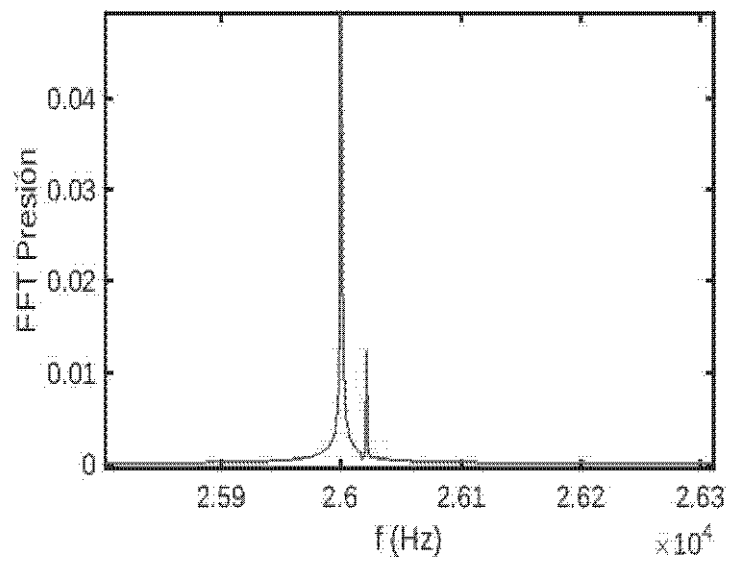


Figura 3.17: Gráfica obtenida a partir de aplicar la transformada de Fourier a los datos obtenidos del receptor ultrasonico.

Capítulo 4

CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

Se estudiaron varios conceptos importantes de la mecánica de fluidos para tener una base teórica acerca de la interacción de los modos acústicos con un flujo. Se utilizó la ecuación de Euler y la ecuación de continuidad para ver el comportamiento de la interacción entre una onda acústica y un campo de velocidades en un flujo, se llegó a que ambos términos prevalecen. De esta manera cuando se emite una onda ultrasónica hacia una distribución de vorticidad de la calle de Von Karman se obtiene la frecuencia de emisión de los vórtices, y con la teoría que ya se tiene de la ley de Biot-Savart, se podría calcular el campo de velocidades del flujo.

Se encontró la solución a la ecuación de onda no homogénea de manera general, es decir, donde el término fuente esta dado por cualquier función, para después ver como es la solución cuando éste es la divergencia de dicha función. Los resultados que se encontraron de la interacción de una onda acústica con un vórtice, es que éste emite una onda sonora y la frecuencia de emisión de ésta es la frecuencia de emisión de los vórtices, de esta manera se puede decir que hay una dispersión de la señal.

En este trabajo se hizo la construcción de un sistema ultrasonico para el estudio de los vórtices, el cual se compone de dos transductores, uno que funciona como emisor y otro como receptor, con estos dispositivos se logró emitir una onda ultrasonica hacia un vórtice y se detectan los cambios producidos por éste en el receptor. La construcción se basó en el modelo proporcionado por el Dr. Raúl Labbé de la Universidad de Santiago de Chile (USACH)[3].

Los transductores son de tipo capacitivo, para hacer ésto se hizo con dos placas paralelas, una de ellas es una placa de zinc con grabado electrolítico cuya finalidad es cambiar la distancia entre las placas, y la otra es una hoja de mylar aluminizada por un solo lado. Para hacer todas las piezas necesarias para la construcción de los transductores se requirió del taller de mecánica de la Facultad de Ciencias, así como de otros talleres exteriores.

Ya que se tuvieron los transductores armados, para que funcionaran de manera adecuada se construyeron dos dispositivos electrónicos, uno para que funcione como emisor y otro como receptor. Además se construyo un amplificador de potencia que va conectado al emisor, con esto se logro obtener mas de 80 V_{rms} en la señal emitida. Se hicieron modificaciones del circuito tomado del datasheet (anexo I), entre ellas fue construir un transformador compuesto por una bobina, con esto se logró tener transductores que por sus características electrónicas funcionan en un rango de frecuencias, que van desde los 20 kHz hasta los 50 kHz , donde la

señal es una onda sinusoidal que permanecía estable, sin verse modificada, con características bien establecidas como frecuencia y amplitud, que es justo lo que se quería, la amplitud fue de más de 150 V por lo que se logró la amplificación que se requiere. Esto se logra ver en un osciloscopio, que va conectado a la entrada del circuito y al emisor, de manera que se puede asegurar que la señal que se está introduciendo es la que emite el transductor. Al emitir en las frecuencias más bajas alrededor de 20 kHz se detectó el sonido emitido por el transductor. Para la realización de las pruebas se tomaron frecuencias desde 26 kHz hasta los 50 kHz , en éstas frecuencias se verificó que los ruidos externos (como las voces) no perturbaban el sistema, ya que los sonidos en laboratorio están por debajo de éstas frecuencias.

Para verificar toda la parte práctica se resolvió el circuito RC del transductor que funciona como emisor, y se encontró que: la corriente en el circuito es una señal de tipo sinusoidal que depende de la frecuencia, y la amplitud de dicha onda depende del cociente entre el voltaje variable que se suministre y la resistencia. Con esto se verificaron los resultados experimentales antes mencionados de frecuencia, voltaje, corriente y resistencias utilizadas en el sistema.

Dado que todo el dispositivo quedó funcionando y además se hizo una prueba con resultados en los que se puede obtener información directa de una distribución de vórtices de la calle de Von Karman, lo siguiente es hacer diversas pruebas cambiando las variables como la velocidad del flujo U , la frecuencia de emisión f , el diámetro del cilindro y/o la posición de los transductores, y hacer un estudio más profundo de los datos obtenidos para la caracterización del flujo, utilizando la ley de Biot-Savart para mecánica de fluidos. Además ya se cuentan con los materiales necesarios para construir cuatro transductores más y poder obtener las dos componentes que faltan de una distribución de vórtices, (recuerde que con este dispositivo se obtiene solamente la componente perpendicular al plano generado por las ondas de emisión).

ANEXO I

LM3876 Overture™ Audio Power Amplifier Series High-Performance 56W Audio Power Amplifier w/Mute

General Description

The LM3876 is a high-performance audio power amplifier capable of delivering 56W of continuous average power to an 8Ω load with 0.1% (THD + N) from 20 Hz–20 kHz.

The performance of the LM3876, utilizing its Self Peak Instantaneous Temperature ("Ke) (**SPiKe**™) Protection Circuitry, puts it in a class above discrete and hybrid amplifiers by providing an inherently, dynamically protected Safe Operating Area (SOA). **SPiKe** Protection means that these parts are completely safeguarded at the output against overvoltage, undervoltage, overloads, including shorts to the supplies, thermal runaway, and instantaneous temperature peaks.

The LM3876 maintains an excellent Signal-to-Noise Ratio of greater than 95 dB(min) with a typical low noise floor of 2.0 μV. It exhibits extremely low (THD + N) values of 0.06% at the rated output into the rated load over the audio spectrum, and provides excellent linearity with an IMD (SMPTE) typical rating of 0.004%.

Features

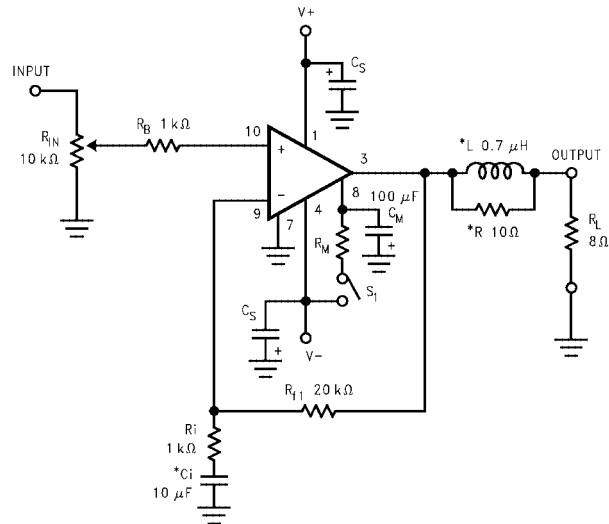
- 56W continuous average output power into 8Ω
- 100W instantaneous peak output power capability
- Signal-to-Noise Ratio ≥ 95 dB(min)
- An input mute function
- Output protection from a short to ground or to the supplies via internal current limiting circuitry
- Output over-voltage protection against transients from inductive loads
- Supply under-voltage protection, not allowing internal biasing to occur when $|V_{EE}| + |V_{CC}| \leq 12V$, thus eliminating turn-on and turn-off transients
- 11-lead TO-220 package

Applications

- Component stereo
- Compact stereo
- Self-powered speakers
- Surround-sound amplifiers
- High-end stereo TVs

Overture™ and SPiKe™ Protection are trademarks of National Semiconductor Corporation.

Typical Application

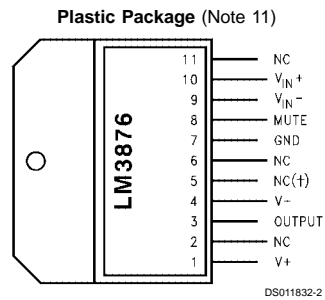


DS011832-1

*Optional components dependent upon specific design requirements. Refer to the External Components Description section for a component functional description.

FIGURE 1. Typical Audio Amplifier Application Circuit

Connection Diagram



[†]Connect Pin 5 to V⁺ for Compatibility with LM3886.

Top View
Order Number LM3876T
or LM3876TF
See NS Package Number TA11B for
Staggered Lead Non-Isolated
Package or TF11B for
Staggered Lead Isolated Package

BIBLIOGRAFÍA

[1] Sommerfeld, A.; Mechanics of deformable bodies, Segunda Edición, Academic Press, New York, 1950, 407 páginas.

[2] Elmore W. C., Heald M. A.; Physics of Waves, International student edition, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, 1969, 493 páginas.

[3] Labbé R.; Transductor electrostático para la generación y detección de señales ultrasónicas, Comunicación privada. Universidad de Santiago de Chile, 2014.

[4] Purcell, M. E.; Electricidad y magnetismo, Editorial Reverté, S.A. España, 1980, 472 páginas.

[5] Edminister J. A.; Teoría y problemas de circuitos eléctricos, Primera Edición, Serie de compendios Schaum, McGraw-Hill, México, 1970, 284 páginas.

[6] LM3876 Overture™ Audio Power Amplifier Series High-Performance 56 W Audio Power Amplifier w-Mute, Nacional Semiconductor April 1995.

[7] Juan Carlos Manuel Castillo., Electrónica, Editex.

[8] Currie, I. G.; Fundamental Mechanics of Fluids, Third Edition, Marcel Dekker, Inc. New York, Basel 1993, 525 páginas.

[9] Guyon E., Hulin J.P., Petit L y Miitescu D. Physical Hydrodynamics. Primera edición. Oxford University Press, New York, 2001, 505 páginas.

[10] Baudet C., Ciliberto S. y Pinton J.F. Spectral analysis of the von Karman flow using ultrasound scattering. Phys. Rev. Lett., 67((1991) 193-195.

[11] Panofsky W.K.H. y Phillips M.; Classical Electricity and Magnetism, Segunda Edición, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Massachussets, 1962, 494 páginas.

[12] Pinton J.F. Mesure de vorticité par diffusion ultrasonore. Tesis de doctorado. Universidad Claude Bernard. Lyon, 1992, 179 páginas.

[13] Lund F. Sound—Vortex Interaction in Infinite Media. In: Aurégan Y., Pagneux V., Pinton JF., Maurel A. (eds) Sound-Flow Interactions. Lecture Notes in Physics, vol 586. Springer, Berlin, Heidelberg, (2002) 112-159.

Disponible en: <https://www.springer.com/gp/book/9783540433323>