



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Solución a las ecuaciones de Einstein con campos escalares,
constante cosmológica negativa y direcciones planas.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Adán Miguel Rubiol García

TUTOR

Dr. Yuri Bonder Grimberg



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Rubiol

García

Adán Miguel

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

312047340

2. Datos del tutor

Dr.

Yuri

Bonder

Grimberg

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Daniel Eduardo

Sudarsky

Saionz

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Jerónimo Alonso

Cortez

Quezada

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Marcelo

Salgado

Rodríguez

5. Datos del sinodal 4

Dr.

Nora Eva

Bretón

Báez

6. Datos del trabajo escrito

Solución a las ecuaciones de Einstein con campos escalares, constante cosmológica negativa y direcciones planas.

40p

2019

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres Marcelina y Miguel y mi hermano Miguel Ángel sin los cuales este trabajo no hubiera sido posible, Así como Yuri por su paciencia al leer este trabajo y a los demás miembros del comité; Nora, Sudarsky, Marcelo y Jerónimo. También quiero agradecer a mis amigos; Ana, Mario, Miguel, Jazmín, David, Alejandro, Sergio. Y finalmente al proyecto PAPIIT-RA101818 por la beca recibida.

Índice

1	Introducción	5
2	Herramientas matemáticas	9
2.1	Variedades y Tensores	9
2.2	Conexión	10
2.3	Transporte Paralelo	12
2.4	Geodésicas	14
2.5	Curvatura	15
2.6	Principio de Acción	19
2.7	Derivada de Lie	21
2.8	Teorema de Killing	23
3	Solución a las ecuaciones de Einstein con campos escalares, constante cosmológica negativa y direcciones planas	22
3.1	Leyes de Conservación	26
3.2	Simetrías del espacio-tiempo, el tensor de energía-momento y los campos	30
3.3	Condiciones de Energía del espacio tiempo con campos escalares, constante cosmológica negativa y direcciones planas	31
4	Conclusiones	33
A	Cálculo de Tensores de Curvatura	34
B	Solución a $f(r)$	35
C	Algoritmo para encontrar todos los vectores de Killing	37

1. INTRODUCCIÓN

Las leyes de Newton son válidas en ciertos marcos de referencia especiales, llamados *inerciales*. En estos sistemas de referencia es posible distinguir movimientos de velocidad constante de movimiento acelerados, sólo en ellos son válidas las leyes de Newton. Todos ellos están relacionados mediante transformaciones de Galileo. En los sistemas inerciales se cumple el principio de relatividad, que sostiene de acuerdo a la referencia [1]:

“*Experimentos idénticos realizados en distintos sistemas de referencia inerciales dan resultados idénticos*”.

En donde este principio se refiere a cualquier experimento y a todos los marcos de referencia inerciales [2]. Suponiendo que existe un tiempo universal, la física newtoniana era compatible con las transformaciones de Galileo; sin embargo, a finales del siglo XIX la física encontró las primeras ecuaciones incompatibles con las transformaciones de Galileo: las ecuaciones de Maxwell, en las que se logró unificar todos los fenómenos electromagnéticos [3]. De las más importantes consecuencias se encuentra la existencia de ondas electromagnéticas, así como su velocidad, pero no era claro respecto a qué marco de referencia se mide dicha velocidad. Se creía que, como toda onda, la luz se propaga sobre un medio llamado *éter*. Las ecuaciones de Maxwell predicen una velocidad constante para este tipo de ondas en vacío, de donde se pensó que esa velocidad sería en el sistema de referencia en reposo del *éter*, siendo este un sistema de referencia absoluto. Por lo tanto, se creyó que para otro marco de referencia, por ejemplo, sobre la superficie de la Tierra, la luz debe tener una velocidad diferente. Esta idea causó confusión entre la comunidad durante largo tiempo y en 1881, se intentó medir esta diferencia de velocidad en el famoso experimento de Michelson y Morley realizado en 1887 [4]. Sorprendentemente no se encontró el efecto esperado. Por el contrario, parecía que la velocidad de la luz era la misma sin importar la velocidad del marco de referencia en el que se mida.

Motivado por lo anterior, Einstein, en 1905, derivó nuevamente las transformaciones de Lorentz entre sistemas inerciales en su famoso artículo de 1905 [5], a partir de dos postulados fundamentales.

- El principio de relatividad.
- La velocidad de luz en el vacío es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, sin importar la velocidad relativa entre ellos, ni la velocidad de la fuente.

A partir de los postulados anteriores Einstein demostró que las ecuaciones de Maxwell son covariantes ante transformaciones de Lorentz, de esa manera argumentó que la introducción del concepto de *éter* era innecesaria y las ondas electromagnéticas podían viajar en el vacío.

Un *evento* es un punto q en el espacio-tiempo, es decir, un lugar y un tiempo específicos. Se dice *cono de luz futuro* al conjunto de todos los eventos que se puede alcanzar desde q cuando se envía una señal física que viaja con velocidad menor o igual a un rayo de luz mientras que, aquellos eventos capaces de enviar una señal hasta el punto q forman el *cono de luz pasado* de dicho punto. En el marco de física newtoniana, un efecto no puede ocurrir antes de su causa, a esto se le llama *causalidad*. En la teoría de la Relatividad Especial, la causalidad significa que un efecto debe ocurrir a partir de una causa que está en el cono de luz pasado de ese evento. De manera similar, una causa no puede tener un efecto fuera de su cono de luz futuro. Además, no existe un concepto de tiempo universal como en la física de Newton, la simultaneidad entre dos eventos depende del observador. Para respetar la causalidad la velocidad de la luz es la máxima velocidad para cualquier señal física. Esta teoría postulada por Einstein, anteriormente descrita, ha sido ampliamente confirmada en diversos experimentos [6, 7]. La teoría de la Relatividad General considera la interacción gravitacional mientras que la teoría de la Relatividad Especial no la considera. Primero veamos la motivación para estudiar la teoría de Relatividad General.

En la teoría de Newton, la gravedad es una fuerza que depende de la distancia instantánea entre dos objetos cuya masas respectivas son m , M , su forma matemática es

$$\vec{F}_g = -G \frac{mM}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^2} \hat{r}_{12}, \quad (1.1)$$

donde G es la constante de Newton, $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$ es la distancia entre los centros de masa de los objetos, \hat{r}_{12} es el vector unitario del objeto 1 al 2. Al ser de alcance inmediato, la ley de gravitación de Newton no podía ser compatible con la Relatividad Especial. Por lo tanto Einstein pensó que la ley de Newton (1.1) debía ser una aproximación de una ley más fundamental [1]. Su motivación fue notar que en la ley de inercia ($\vec{F} = m\vec{a}$), y en la ley de gravitación universal (1.1), la masa m parece ser la misma, como si en dichas leyes, todos los cuerpos de prueba de masa m fueran influenciadas de la misma manera en presencia de la masa M . Esta igualdad entre la masa inercial y la masa gravitacional es conocida como el *principio de equivalencia débil*. No obstante, la piedra angular que permite formular la relatividad general, es el *principio de equivalencia fuerte* [8]

“En pequeñas regiones del espacio-tiempo, las leyes de la física, gravitacionales o no, se reducen a la relatividad especial; es imposible detectar la existencia de campos gravitacionales por medio de experimentos locales”.

Por ejemplo, si una persona se deja caer desde un lugar muy alto, sin efectos de la fricción y mientras cae también deja caer una pelota, para él, la pelota se queda donde se soltó. Sin embargo, existen efectos de fuerzas de marea. Las *fuerzas de marea* surgen porque el campo gravitacional no es constante [9].

Es por la existencia de las fuerzas de marea que la pelota puede ser atraída en otra dirección mientras cae junto a la persona, y la distancia entre ellos cambie durante la caída. No obstante, este efecto es muy pequeño cuando la distancia entre los objetos también es pequeña. Por consiguiente, el principio de equivalencia sólo es válido localmente. Dónde la idea de localidad está determinada, en cada experimento, por el tamaño del cambio en la gravedad donde se realiza el experimento [2].

La diferencia principal de la Relatividad General con la física pre-relativista o física newtoniana es que el espacio-tiempo es un ente dinámico. Es decir, el escenario que era estático en la física newtoniana, en la teoría de la Relatividad General pasa a ser afectado por la materia y energía que hay en este ente llamado *espacio-tiempo*. En palabras del investigador John Wheeler, la teoría de Einstein sobre la gravedad puede resumirse así [10]:

“El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse”.

Este cambio de paradigma está íntimamente ligado a la idea de que la gravedad no es una fuerza. La gravitación en Relatividad General, es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.

Las ecuaciones de campo de Einstein describen cómo el espacio-tiempo se curva por la materia, las cuales pueden ser modificadas con la introducción de un término constante, una constante cosmológica Λ . Su forma matemática es

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

en donde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

es el tensor de Einstein, c es la velocidad de la luz en el vacío. El tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ describe parte de la curvatura del espacio-tiempo, y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento que a su vez da la distribución de materia. El tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ está dado en términos de operadores diferenciales actuando sobre una métrica $g_{\mu\nu}$ que dice cómo medir localmente distancias en el espacio-tiempo. Mientras que el escalar de curvatura R asigna al espacio-tiempo un número real asociado con la geometría. Al considerar $\Lambda = 0$ en (1.2) se obtiene las ecuaciones de campo de Relatividad General. En el caso sin curvatura, es decir $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = 0$ y con $\Lambda = 0$ esta teoría se reduce a Relatividad Especial, donde $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma$ es el tensor de Riemann y se estudiará en la subsección 2.5. Entre los fenómenos que predice la teoría y que se han podido comprobar están el corrimiento al rojo gravitacional [11], la desviación de la luz en una *lente gravitacional*, verificado por Arthur Eddington quien observó el eclipse solar en mayo de 1919 [12]. Recientemente se realizó la detección ondas gravitacionales cuya primera observación directa se anunció en febrero de 2016, cien años después de que Einstein predijera la existencia de las ondas gravitacionales; los autores de la detección fue la colaboración del experimento *LIGO* [13]. Además en 2019 se obtuvieron las primeras observaciones del disco de acreción de un agujero negro por la colaboración *Event Horizon Telescope* [14].

La Relatividad General acepta una formulación lagrangiana, al tomar la acción de la teoría como

$$S = \int \left[\frac{1}{2\kappa} R + \widehat{\mathcal{L}}_M \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.4)$$

donde $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, $g = \det(g_{\mu\nu})$, el término $\widehat{\mathcal{L}}_M$ es el lagrangiano que describe los campos de materia que aparecen en la teoría. Si se considera la acción S bajo variaciones de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ y se busca sus puntos estacionarios, se recupera (1.2). Posteriormente se realiza con mas cuidado este cálculo en la subsección 2.6.

En este trabajo se estudian soluciones en un caso específico a las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, vale la pena estudiar un primer caso. En el vacío, en la ausencia total de cualquier presencia de masa-energía, todos los componentes del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ son iguales a cero y $\Lambda = 0$, en cuyo caso las ecuaciones de campo de Einstein (1.2) son

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (1.5)$$

efectuando la contracción de ambos miembros de esta igualdad con la ayuda del tensor métrico inverso $g^{\mu\nu}$ y utilizando el hecho de que en 4 dimensiones espacio-temporales $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$, se obtiene

$$R = 0 , \quad (1.6)$$

sustituyendo esto último en las ecuaciones de campo de Einstein (1.2) se llega a lo siguiente

$$R_{\mu\nu} = 0 . \quad (1.7)$$

Estas son las ecuaciones de campo para el vacío. Lo cual no implica que el espacio-tiempo sea plano como es el caso de la métrica de Schwarzschild donde el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \neq 0$ pero $R_{\mu\nu} = 0$.

Si repetimos el procedimiento anterior utilizado para obtener las ecuaciones de campo de Einstein para el vacío, en esta ocasión tomando en cuenta a la constante cosmológica, con todas las componentes del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ igualadas a cero y $\Lambda \neq 0$, obtenemos lo siguiente

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} , \quad (1.8)$$

al sacar la traza

$$R = 4\Lambda , \quad (1.9)$$

nos conduce finalmente a

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} . \quad (1.10)$$

Esto nos dice que, si la constante cosmológica no es igual a cero, entonces inclusive en ausencia de cualquier rastro de masa-energía, el espacio-tiempo tendrá un tensor de Ricci distinto de cero. Esto podría ser suficiente para balancear la curvatura ocasionada por toda la masa-energía que hay en el universo de modo tal que tendríamos un universo estático, incapaz de contraerse (por efectos de la gravedad) o de expandirse. Esta fue la razón por la cual Einstein introdujo la constante cosmológica en sus ecuaciones de campo. Al descubrirse que nuestro universo está en expansión continua Einstein la abandonó sin embargo, recientemente esta idea se retomó para explicar la expansión acelerada del universo [15, 16]. Einstein introdujo su constante cosmológica suponiéndola como un parámetro independiente, algo característico del universo, pero el término de la misma en las ecuaciones de campo puede ser movida hacia el otro lado de la igualdad, escrita como una componente del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ para el vacío

$$T_{\mu\nu}^{vacio} = -\frac{\Lambda}{8\pi}g_{\mu\nu} , \quad (1.11)$$

puesto que este resultado vendría correspondiendo directamente con la densidad de energía en el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$, esto tiene como consecuencia que hablemos de la energía del vacío dada por la siguiente relación

$$\rho_{vacio} = \frac{\Lambda}{8\pi} . \quad (1.12)$$

De este modo, la existencia de una constante cosmológica Λ diferente de cero es equivalente a la existencia de una energía del vacío diferente de cero; en un marco de referencia comovil, que es relevante para los modelos cosmológicos [17, 18]. Curiosamente la Mecánica Cuántica también nos habla sobre la existencia de una energía del vacío [19]. Es por esto que un importante segmento de la comunidad científica alberga sospechas de que la gran puerta de entrada hacia una teoría cuántica de la gravitación pueda ser este resultado que parece ser algo más que una coincidencia fortuita, que con base a las observaciones astronómicas más recientes se está descubriendo que la constante cosmológica del universo es, en efecto, diferente de cero, aunque por razones diferentes a las cuales había postulado Einstein [20]. Cuando se incluye una constante cosmológica la acción es

$$S = \int \left[\frac{1}{2\kappa}(R - 2\Lambda) + \widehat{\mathcal{L}}_M \right] \sqrt{-g} d^4x . \quad (1.13)$$

Si se considera la acción S bajo pequeñas variaciones de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$, y se busca sus puntos estacionarios, se recupera (1.2). Las ecuaciones de campo de Einstein (1.2) son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, de segundo orden, no lineales y acopladas. En general, esto las hace difíciles de resolver. No obstante, se han establecido varias técnicas efectivas para obtener soluciones exactas. Lo más simple implica imponer condiciones de simetría en el tensor métrico, como la estacionariedad, traslaciones en el tiempo o rotaciones sobre algún eje de simetría. Con suposiciones suficientemente inteligentes de este tipo, a menudo es posible reducir la ecuación de campo de Einstein a un sistema de ecuaciones mucho más simple, como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (como sucede en el caso del vacío de Schwarzschild)[21].

En este trabajo el objetivo principal será obtener las soluciones a las ecuaciones de Einstein con $\Lambda < 0$ y campos escalares de Klein-Gordon sin masa en dimensión 4, motivados por el artículo [22] en el cual *Adolfo Cisterna* y *Julio Oliva* estudiaron las llamadas *Black Strings* que son soluciones tipo agujero negro en dimensiones estrictamente mayores a 4. Con el uso de campos escalares y separación de la métrica en direcciones planas, ellos logran obtener una solución a las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica negativa. A pesar de no ser realistas se pueden considerar como soluciones matemáticamente interesantes ya que poseen materia no trivial. Si se siguen las simetrías impuestas se puede encontrar las cantidades conservadas a lo largo de geodésicas temporaloides y nulas.

Finalmente se estudiará que a pesar de que dichas soluciones no son físicas, cumplen con las condiciones de energía que se suele pedir a diversos tipos de espacio-tiempo, adicionalmente la densidad de energía es finita y positiva. Lo cual se puede lograr, al igual en la referencia [22], mediante el uso de campos escalares de Klein-Gordon sin masa que se extienden en todo el espacio y se demostrará que el tensor de energía-momento y el espacio-tiempo poseen simetrías que los campos no poseen.

2. HERRAMINETAS MATEMÁTICAS

2.1. Variedades y Tensores

Esta sección estará basada en el libro de Relatividad General de **Wald** [21] y se manejará los conceptos de tensores en variedades diferenciables, por lo tanto, se deben definir lo siguiente; una variedad real M , n -dimensional es un conjunto junto con una colección de subconjuntos $\{O_\alpha\}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

1. Cada $p \in M$ se encuentra en al menos un O_α , i.e., $\{O_\alpha\}$ es una cubierta de M .
2. Para cada O_α hay un mapeo biyectivo, continuo y cuya función inversa es continua, llamado *carta* o *sistema de coordenadas* $\psi_\alpha: O_\alpha \rightarrow U_\alpha$, donde U_α es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .
3. Si cualquiera dos conjuntos O_α y O_β se intersecan, $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, entonces el mapeo entre dos cartas cualesquiera en la región de traslape $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \rightarrow \psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta]$ es infinitamente diferenciable.

La propiedad 1 expresa que la unión de subconjuntos abiertos O_α dan como resultado la variedad M . En la propiedad 2 la *carta*, también llamado homeomorfismo local expresa que cada O_α se ve localmente como un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Mientras que la propiedad 3 es la definición formal de que las cartas se pueden *pegar suavemente*, debido a que $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ solamente está definido y debe ser suave sobre $\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta]$.

Al considerar una variedad M es tal que la estructura del espacio vectorial se pierde. Por ejemplo: en una variedad como la esfera no hay una noción para propiedad de cerradura al sumar dos puntos sobre la esfera y terminar en un tercer punto sobre la misma. La estructura del espacio vectorial se puede recuperar al considerar el límite de desplazamientos infinitesimales o vectores tangentes. Sobre una variedad M , \mathcal{F} denota el conjunto de funciones C^∞ de M a \mathbb{R} . Entonces definimos un vector v en un punto $p \in M$ como una derivación $v: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, el cual es lineal y obedece la regla de Leibnitz.

$$v(af + bg) = av(f) + bv(g), \forall f, g \in \mathcal{F}; a, b \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f). \quad (2.2)$$

Es posible probar que el conjunto de *derivaciones* en un punto $p \in M$ es un espacio vectorial llamado espacio tangente, se denota como V_p [8]. A un elemento de V_p se le llamará entonces un vector tangente a M en p . Ya que el conjunto $(\partial/\partial x|_{\psi_\alpha(p)})$, forman una base de derivaciones de \mathbb{R}^n en $\psi_\alpha(p) \forall p$, si se define $(\partial/\partial x^\alpha|_p)f \equiv (\partial/\partial x^\alpha|_{\psi_\alpha(p)})(f \circ \psi_\alpha^{-1})$ entonces $(\partial/\partial x^\alpha|_p)$ es una base de derivaciones en p y como es una base se puede escribir como $v = v^\beta(\partial/\partial x^\beta)$, la aparición de los índices griegos repetidos indica que se suman sobre todas sus posibilidades. A los números v^β se les conoce como las componentes de v para la carta (O_α, ψ_α) .

Del concepto de vectores es posible definir tensores. Una 1-forma en p es una función lineal $w: V_p \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, es el espacio dual del conjunto V_p y se denota V_p^* . Si en una carta coordenada se definen los funcionales lineales $(dx^\mu)(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) \equiv \delta_\nu^\mu$, esto significa que se está evaluando (dx^μ) en $(\frac{\partial}{\partial x^\nu})$, de álgebra lineal se sigue que el conjunto (dx^μ) forma una base de V_p^* y se puede escribir $w = w_\gamma(dx^\gamma)$.

De acuerdo a Wald [21] un tensor (k, l) es una función multilineal de k 1-formas y l vectores.

$T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}: \underbrace{V_p^* M \times \dots \times V_p^* M}_k \times \underbrace{V_p M \times \dots \times V_p M}_l \rightarrow \mathbb{R}$. Además se define la contracción con respecto al i -ésimo y j -ésimo lugar y es un mapeo $C: T(k, l) \rightarrow T(k-1, l-1)$ definido como sigue: si T es un tensor de tipo (k, l) , entonces

$$CT = \sum_{\sigma=1}^n T(\dots, v^{\sigma*}, \dots; \dots, v_\sigma, \dots), \quad (2.3)$$

donde v_σ es una base de V , $v^{\sigma*}$ es la base dual y estos vectores se encuentran en el i -ésimo y j -ésimo espacios de T . El tensor CT es obtenido independientemente de la elección de la base v_μ [21].

Es conveniente usar la notación para las partes totalmente simétricas (2.4) y totalmente antisimétricas (2.5) de un tensor. Por ejemplo si $T_{\mu\nu}$ es un tensor de tipo $(0, 2)$, se define

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}), \quad (2.4)$$

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \quad (2.5)$$

Más generalmente, para un tensor $T_{\mu_1 \dots \mu_l}$ de tipo $(0, l)$, se define

$$T_{(\mu_1 \dots \mu_l)} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{\mu\pi(1) \dots \mu\pi(l)}, \quad (2.6)$$

$$T_{[\mu_1 \dots \mu_l]} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{\mu\pi(1) \dots \mu\pi(l)}, \quad (2.7)$$

donde la suma se toma sobre todas las permutaciones, π , de $1, \dots, l$ y δ_{π} es $+1$ para permutaciones pares y es -1 para permutaciones impares. Ahora se define un operador derivada actuando sobre un campo tensorial de acuerdo a Wald [21].

Un operador derivada ∇_{α} (llamado derivada covariante) sobre una variedad M es un mapeo el cual toma campo tensorial suave (o diferenciable) de tipo (k, l) a un campo tensorial suave de tipo $(k, l + 1)$ el cual requiere las siguientes 5 condiciones:

Linealidad: Para todos los tensores $A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}, B^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \in \mathbb{T}(k, l)$ y $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\nabla_{\alpha}(aA^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + bB^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}) = a\nabla_{\alpha}A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + b\nabla_{\alpha}B^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (2.8)$$

Regla de Leibnitz: Para todos los tensores $A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \in \mathbb{T}(k, l)$, $B^{\gamma_1 \dots \gamma_{k'}}_{\sigma_1 \dots \sigma_{l'}} \in \mathbb{T}(k', l')$

$$\nabla_{\alpha}[A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} B^{\gamma_1 \dots \gamma_{k'}}_{\sigma_1 \dots \sigma_{l'}}] = [\nabla_{\alpha}A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}] B^{\gamma_1 \dots \gamma_{k'}}_{\sigma_1 \dots \sigma_{l'}} + A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} [\nabla_{\alpha}B^{\gamma_1 \dots \gamma_{k'}}_{\sigma_1 \dots \sigma_{l'}}]. \quad (2.9)$$

Commutatividad con la contracción: Para todo $A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \in \mathbb{T}(k, l)$,

$$\nabla_{\alpha}(A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}) = \nabla_{\alpha}A^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \quad (2.10)$$

Consistencia con la *noción de vector tangente* como la *derivada direccional* sobre campos escalares: para todo $f \in \mathcal{F}$ y $t^{\beta} \in V_p$.

$$t(f) = t^{\beta} \nabla_{\beta} f. \quad (2.11)$$

Libre de *torsión:* para todo $f \in \mathcal{F}$,

$$\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} f = \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} f. \quad (2.12)$$

2.2. Conexión

Se debe estudiar la unicidad del operador derivada mediante la propiedad (2.11), para esto se eligen cualesquiera dos operadores derivada ∇_{α} y $\tilde{\nabla}_{\alpha}$, debido a que deben tener el mismo resultado al actuar sobre campos escalares, se puede considerar ω_{β} un campo vectorial dual y se calcula la diferencia $\tilde{\nabla}_{\alpha}(f\omega_{\beta}) - \nabla_{\alpha}(f\omega_{\beta})$ para un campo escalar f . Por la regla de Leibnitz se obtiene

$$\tilde{\nabla}_{\alpha}(f\omega_{\beta}) - \nabla_{\alpha}(f\omega_{\beta}) = (\tilde{\nabla}_{\alpha}f)\omega_{\beta} + f\tilde{\nabla}_{\alpha}\omega_{\beta} - (\nabla_{\alpha}f)\omega_{\beta} - f\nabla_{\alpha}\omega_{\beta} \quad (2.13)$$

$$= f(\tilde{\nabla}_{\alpha}\omega_{\beta} - \nabla_{\alpha}\omega_{\beta}), \quad (2.14)$$

donde se usó que $\tilde{\nabla}_{\alpha}f = \nabla_{\alpha}f$. Para ver que en la ecuación (2.14) la diferencia $f(\tilde{\nabla}_{\alpha}\omega_{\beta} - \nabla_{\alpha}\omega_{\beta})$ depende únicamente del valor del campo vectorial dual ω_{β} en el punto p , se supone que, otro campo vectorial dual ω'_{β} es igual a ω_{β} en el punto p , esto implica que $\omega'_{\beta} - \omega_{\beta}$ se desvanece en p , por lo tanto se puede encontrar funciones suaves, $f_{(\alpha)}$, las cuales se desvanecen en p , y $\chi_{\nu}^{(\alpha)}$ son campos vectoriales duales diferenciables [21]. Donde el campo escalar $f_{(\alpha)}$ sólo actúa sobre $\chi^{(\alpha)}$. Así que.

$$\omega'_{\nu} - \omega_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} \chi_{\nu}^{(\alpha)}. \quad (2.15)$$

Ahora se usa (2.15), (2.14) en el punto p , se obtiene

$$\tilde{\nabla}_{\mu}(\omega'_{\nu} - \omega_{\nu}) - \nabla_{\mu}(\omega'_{\nu} - \omega_{\nu}) = \sum_{\alpha} \{\tilde{\nabla}_{\mu}(f_{(\alpha)}\chi_{\nu}^{(\alpha)}) - \nabla_{\mu}(f_{(\alpha)}\chi_{\nu}^{(\alpha)})\} \quad (2.16)$$

$$= \sum_{\alpha} f_{(\alpha)} \{\tilde{\nabla}_{\mu}\chi_{\nu}^{(\alpha)} - \nabla_{\mu}\chi_{\nu}^{(\alpha)}\} = 0, \quad (2.17)$$

donde la última igualdad se obtiene de la acción del operador derivada sobre campos escalares $\tilde{\nabla}_\mu f_{(\alpha)} = \nabla_\mu f_{(\alpha)}$, y también cada $f_{(\alpha)} = 0$ en p , entonces

$$\tilde{\nabla}_\mu \omega'_\nu - \nabla_\mu \omega'_\nu = \tilde{\nabla}_\mu \omega_\nu - \nabla_\mu \omega_\nu . \quad (2.18)$$

Por lo tanto, $\tilde{\nabla}_\mu - \nabla_\mu$ actúa de la misma manera sobre vectores duales en p , en consecuencia está bien definido el mapeo de vectores duales a tensores de tipo $(0, 2)$ en p . Por la propiedad (2.8), este mapeo es lineal, consecuentemente $(\tilde{\nabla}_\mu - \nabla_\mu)$ define un tensor de tipo $(1, 2)$, lo cual se denota como C_{ab}^c . Así se ha demostrado que dado cualquier operador derivada $\tilde{\nabla}_\mu$ y ∇_μ existe un campo tensorial $C_{\mu\nu}^\alpha$

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \tilde{\nabla}_\mu \omega_\nu - C_{\mu\nu}^\alpha \omega_\alpha , \quad (2.19)$$

si se considera $\omega_\nu = \nabla_\nu f = \tilde{\nabla}_\nu f$ y se sustituye en (2.19), se encuentra que

$$\nabla_\mu \nabla_\nu f = \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu f - C_{\mu\nu}^\alpha \nabla_\alpha f , \quad (2.20)$$

ya que $\nabla_\mu \nabla_\nu f$ y $\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\mu f$ son simétricos en ν y μ se sigue que

$$C_{\mu\nu}^\alpha = C_{\nu\mu}^\alpha . \quad (2.21)$$

Si ahora se considera un campo vectorial v^μ y un campo de 1-formas w_μ si usamos la propiedad (2.11), esto es

$$(\tilde{\nabla}_\alpha - \nabla_\alpha)(\omega_\mu v^\mu) = 0 , \quad (2.22)$$

por otro lado, de la regla de Leibnitz

$$(\tilde{\nabla}_\alpha - \nabla_\alpha)(\omega_\mu v^\mu) = (C_{\alpha\mu}^\nu \omega_\nu) v^\mu + \omega_\mu (\tilde{\nabla}_\alpha - \nabla_\alpha) v^\mu , \quad (2.23)$$

substituyendo y contrayendo índices se sigue

$$\omega_\mu [(\tilde{\nabla}_\alpha - \nabla_\alpha) v^\mu + C_{\alpha\nu}^\mu v^\nu] = 0 , \quad (2.24)$$

para todo ω_ν , esto implica que

$$\nabla_\alpha v^\nu = \tilde{\nabla}_\alpha v^\nu + C_{\alpha\nu}^\mu v^\mu . \quad (2.25)$$

Un caso particular que tiene una importante aplicación de la ecuación (2.25) surge cuando $\tilde{\nabla}_a$ es un operador derivada parcial ∂_a . En este caso el campo tensorial es denotado como Γ_{ab}^c y es llamado *símbolo de Christoffel*. Entonces escribimos

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}^\nu v^\alpha , \quad (2.26)$$

Continuando de manera similar, podemos derivar una fórmula general para la acción de ∇_μ sobre un campo tensorial arbitrario en términos de $\tilde{\nabla}_\mu$ y $C_{\alpha\beta}^\mu$. Para un tensor tipo (k, l) encontramos que

$$\nabla_\mu T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l} = \tilde{\nabla}_\mu T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l} + \sum_i C^{\nu_i}_{\mu\beta} T^{\nu_1 \dots \beta \dots \nu_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l} - \sum_j C^\beta_{\mu\sigma_j} T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\sigma_1 \dots \beta \dots \sigma_l} . \quad (2.27)$$

2.3. Transporte Paralelo

En cualquier variedad los vectores son elementos de espacios tangentes definidos en puntos individuales en una variedad M . En realidad, es muy natural comparar vectores en diferentes puntos, donde “comparar” significa sumar, restar, tomar el producto punto. La razón por la que es natural es porque tiene sentido, en un espacio-tiempo plano, mover un vector de un punto a otro mientras se mantiene constante en magnitud. Luego, una vez que se obtiene el vector de un punto a otro, podemos realizar las operaciones habituales permitidas en un espacio vectorial. El concepto de mover un vector a lo largo de un camino, que mantiene constante su norma todo el tiempo, se conoce como transporte paralelo. En esta sección se estudia que el transporte paralelo se define cada vez que tenemos una conexión. La manipulación intuitiva de los vectores en el espacio-tiempo plano hace un uso implícito de la conexión de Christoffel en este espacio. La diferencia crucial entre los espacios-tiempos planos y curvos es que, en un espacio curvo, el resultado del transporte paralelo de un vector de un punto a otro depende de la trayectoria tomada entre los puntos. Esto se demuestra más claramente cuando el transporte paralelo de un vector a lo largo de una 2-esfera, como se muestra en la Figura 1. El vector, transportado paralelamente, llegó al mismo punto, pero girado por un ángulo $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, parece como si no hubiera una forma natural de mover un vector de un espacio tangente a otro; siempre se puede hacer transporte paralelo a un vector, pero el resultado depende del camino, y no hay una elección natural de qué camino tomar. Sin embargo, dos vectores solo se pueden comparar de manera natural si son elementos del mismo espacio tangente [23].

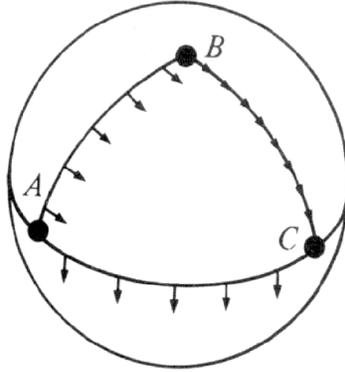


Figura 1: En esta imagen se observa el transporte paralelo de un vector en una 2-esfera por un camino triangular. Imagen tomada de [24].

Con el operador derivada definido en 2.1, 2.2 se estudia noción de transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva C con vector tangente t^μ . Un vector v^ν dado en cada punto sobre la curva C , se dice que es *paralelamente transportado* si la ecuación

$$t^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0, \quad (2.28)$$

se satisface a lo largo de la curva. Se elige un sistema de coordenadas y se usa (2.26) para expresar (2.28) como

$$t^\mu \partial_\mu v^\nu + t^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\nu v^\alpha = 0. \quad (2.29)$$

Si se expresa el vector tangente $t^\mu = dx^\mu/ds$

$$\frac{dv^\nu}{ds} + \frac{dx^\mu}{ds} \Gamma_{\alpha\mu}^\nu v^\alpha = 0. \quad (2.30)$$

También se puede definir la derivada covariante direccional, para un vector tangente t^μ a una curva C

$$\frac{D}{Ds} = t^\mu \nabla_\mu, \quad (2.31)$$

donde s es un parámetro afín a lo largo de la curva, este mapeo, definido sólo a lo largo de la curva, toma tensores (k, l) a tensores (k, l) . Así cuando se define el transporte paralelo de un tensor (k, l) a lo largo de C , se requiere que

$$\left(\frac{D}{Ds} T \right)^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \equiv t^\sigma \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = 0. \quad (2.32)$$

Las ecuaciones (2.30), (2.32) se conocen como la ecuación del transporte paralelo. Se puede observar que la ecuación de transporte paralelo es una ecuación diferencial de primer orden que define un problema de valor inicial: dado un

tensor (k, l) en algún punto a lo largo de una trayectoria, habrá una continuación única del tensor a otros puntos a lo largo de la trayectoria, de manera que la continuación resuelva la ecuación diferencial. Con la estructura de variedad muchos operadores derivadas son posibles y ninguno de ellos tiene preferencia sobre los demás. Sin embargo, si se tiene una métrica sobre la variedad, el operador derivada está unívocamente determinado. Se considera dos vectores v^μ y w^ν , y se exige que su producto interno $g_{\mu\nu}v^\mu w^\nu$ se mantenga sin cambio si transportamos paralelamente a lo largo de una curva. De la regla de Leibnitz

$$t^\alpha \nabla_\alpha (g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu) = (t^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu}) v^\mu w^\nu + g_{\mu\nu} (t^\alpha \nabla_\alpha v^\mu) w^\nu + g_{\mu\nu} v^\mu (t^\alpha \nabla_\alpha w^\nu), \quad (2.33)$$

donde v^μ y w^ν satisface la ecuación (2.28). Así obtenemos

$$t^\alpha v^\mu w^\nu \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.34)$$

La expresión (2.34) es verdadera para todas las curvas y vectores paralelamente transportados si y solo si

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.35)$$

la cual es una condición adicional que imponemos sobre ∇_α . Esto significa que el transporte paralelo con respecto a una métrica compatible con la conexión, preserva la norma y la ortogonalidad o el ángulo entre los vectores.

El siguiente paso es buscar dicha conexión que es compatible con la métrica. Es decir, si $g_{\mu\nu}$ es una métrica, entonces se busca un operador derivada único ∇_α que satisface $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Si se elige $\tilde{\nabla}_\alpha$, por ejemplo un operador derivada asociado con un sistema de coordenadas. Se tratará de resolver para $C_{\alpha\beta}^\nu$, así que el operador derivada determinado por $\tilde{\nabla}_\alpha$ y $C_{\alpha\beta}^\nu$ satisficará la propiedad requerida. Se busca una solución única para $C_{\alpha\beta}^\nu$. Por la ecuación (2.27), $C_{\alpha\beta}^\nu$ debe satisfacer

$$0 = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} - C_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} - C_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta}, \quad (2.36)$$

esto es

$$C_{\nu\alpha\mu} + C_{\mu\alpha\nu} = \tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

por substitución de índices, también tenemos que:

$$C_{\nu\mu\alpha} + C_{\alpha\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\mu g_{\alpha\nu}, \quad (2.38)$$

$$C_{\mu\nu\alpha} + C_{\alpha\nu\mu} = \tilde{\nabla}_\nu g_{\alpha\mu}. \quad (2.39)$$

Sumando la Ec. (2.37) y (2.38) y restando la Ec. (2.39). Usando la propiedad de simetría (2.21), encontramos que.

$$2C_{\nu\alpha\mu} = \tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\mu g_{\alpha\nu} - \tilde{\nabla}_\nu g_{\alpha\mu}, \quad (2.40)$$

esto es

$$C_{\alpha\mu}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\beta} \{ \tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\beta} + \tilde{\nabla}_\mu g_{\alpha\beta} - \tilde{\nabla}_\beta g_{\alpha\mu} \}, \quad (2.41)$$

esta elección de $C_{\alpha\beta}^\mu$, resuelve la ecuación (2.35), lo que prueba que el operador derivada covariante está únicamente determinado por la métrica.

Entonces, una métrica $g_{\mu\nu}$ determina naturalmente el operador derivada ∇_α . Las expresiones (2.41), (2.27) nos dicen como calcular ∇_α en términos del operador derivada $\tilde{\nabla}_\alpha$. En particular si $\tilde{\nabla}_\alpha = \partial_\alpha$, es operador derivada parcial, se obtiene la conexión de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (2.42)$$

2.4. Geodésicas

Las geodésicas son las “líneas más rectas posibles” que se puede dibujar sobre una variedad curva. Dada un operador derivada ∇_α , definimos una *geodésica* siendo una curva cuyo vector tangente t^μ es paralelamente transportado a lo largo de sí mismo. Entonces substituyendo v^μ como vector tangente en (2.28)

$$v^\alpha \nabla_\alpha v^\beta = 0. \quad (2.43)$$

Para una curva geodésica con vectores expresados como $v^\mu = t^\mu = dx^\mu/ds$ la ecuación (2.30) toma la forma

$$\frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = 0. \quad (2.44)$$

Una propiedad de la geodésica del operador derivada surgiendo de una métrica es la extremización de la longitud de curva entre puntos dados medidos por la métrica. Para una curva suave C sobre una variedad M con métrica Riemanniana $g_{\alpha\beta}$, la longitud l de C es definida por

$$l = \int (g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta)^{1/2} ds. \quad (2.45)$$

donde v^α es la tangente a C y s es el parámetro de la curva. Para una métrica de Lorentz con signatura $- + + \dots +$, una curva es *temporaloide*, si la norma es negativa en todos los puntos $g_\alpha v^\alpha v^\beta < 0$, es nulo si $g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0$, y es *espacialoide* si $g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta > 0$. Para curvas espaciales la longitud está dada por (2.45), para curvas nulas la longitud es cero, para curvas temporaloides, usamos el término *tiempo propio*

$$\tau = \int (-g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta)^{1/2} ds. \quad (2.46)$$

La longitud de curvas que cambian de temporaloides a espaciales no está definido. Las geodésicas en una variedad de Lorentz no puede cambiar de temporaloide a espacialoide o nula. Se nota también que la longitud (o tiempo propio) de una curva no depende de la manera en la que esta es parametrizada [21]. Si definimos una nueva parametrización $\lambda = \lambda(s)$, la nueva tangente $w^\alpha = (ds/d\lambda)v^\alpha$ y la nueva longitud será:

$$l' = \int [g_{\alpha\beta} w^\alpha w^\beta]^{1/2} ds = \int [g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta]^{1/2} \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = l. \quad (2.47)$$

2.5. Curvatura

Ahora se hace una discusión acerca de la curvatura del espacio-tiempo, se muestra brevemente que la curvatura se cuantifica mediante el tensor de Riemann, que a su vez se deriva de la conexión afín. La idea básica es que toda la información sobre la curvatura intrínseca de un espacio se proporciona en la métrica a partir de la cual se deriva la conexión de Christoffel en (2.42). Si se desea estudiar la curvatura por medio del transporte paralelo de un vector sobre un circuito cerrado infinitesimal, y se compara los valores inicial y final del vector, por ejemplo: en espacio-tiempo plano de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, todas las derivadas de $\eta_{\mu\nu}$ y todas las componentes de la conexión afín (2.42) son 0, y cuando se hace transporte paralelo de un vector en un circuito cerrado, no sufre cambios, esto es lo que determina que la métrica es “plana”. Si se considera un espacio-tiempo curvo más general, la transformación resultante depende de la curvatura total encerrada, por el bucle o circuito cerrado; por este motivo, optamos por trabajar circuitos infinitesimalmente pequeños [25].

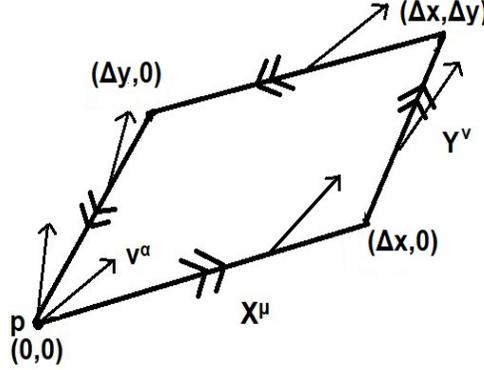


Figura 2: Transporte paralelo de un vector v^α alrededor de un circuito cerrado, con coordenadas x, y .

Se considera un circuito cerrado en $p \in M$ con coordenadas $(0, 0)$, sobre una superficie S , y eligen coordenadas X, Y como se observa en la Figura 2. Se considera un vector v^α que se transporta paralelamente al rededor del circuito. Además un campo de covectores w_α y se calcula el cambio en $v^\alpha w_\alpha$, así la primera aproximación para un cambio δ_1 del punto $(0, 0)$ a $(\Delta x, 0)$ es

$$\delta_1 = \Delta x \left. \frac{\partial}{\partial x} (v^\alpha w_\alpha) \right|_{(\Delta x/2, 0)}, \quad (2.48)$$

lo cual se reescribe como

$$\delta_1 = \Delta x X^\beta \nabla_\beta (v^\alpha w_\alpha) \Big|_{(\Delta x/2, 0)} \quad (2.49)$$

$$= (\Delta x X^\beta \nabla_\beta v^\alpha) w_\alpha \Big|_{(\Delta x/2, 0)} + v^\alpha (\Delta x X^\beta \nabla_\beta w_\alpha) \Big|_{(\Delta x/2, 0)} \quad (2.50)$$

$$= \Delta x v^\alpha X^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(\Delta x/2, 0)}, \quad (2.51)$$

donde la última igualdad se obtiene ya que el vector v^α se transporta paralelamente a lo largo del vector tangente X^β entonces $X^\beta \nabla_\beta v^\alpha = 0$, por la ecuación (2.28). De manera similar sobre el camino de $(\Delta x, 0)$ a $(\Delta x, \Delta y)$ el cambio es

$$\delta_2 = \Delta y \left. \frac{\partial}{\partial y} (v^\alpha w_\alpha) \right|_{(\Delta x, \Delta y/2)} \quad (2.52)$$

$$= \Delta y Y^\beta \nabla_\beta (v^\alpha w_\alpha) \Big|_{(\Delta x, \Delta y/2)} \quad (2.53)$$

$$= \Delta y v^\alpha Y^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(\Delta x, \Delta y/2)}, \quad (2.54)$$

en el último paso se usó que v^α se transporta paralelamente a lo largo del vector tangente Y^α es decir $Y^\beta \nabla_\beta v^\alpha = 0$. Si se repite el procedimiento anterior para δ_3 que va de $(\Delta x, \Delta y)$ a $(\Delta y, 0)$ y δ_4 del punto $(\Delta y, 0)$ a $(0, 0)$, se obtiene

$$\delta_3 = -\Delta x v^\alpha X^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y)} \quad (2.55)$$

$$\delta_4 = -\Delta y v^\alpha Y^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(0, \Delta y/2)} \quad (2.56)$$

Ahora la variación total con Δx es

$$\delta_1 + \delta_2 = \Delta x \left(v^\alpha X^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(\Delta x/2, 0)} - v^\alpha X^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y)} \right), \quad (2.57)$$

similarmente en Δy

$$\delta_3 + \delta_4 = \Delta y \left(v^\alpha Y^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(\Delta x, \Delta y/2)} - v^\alpha Y^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(0, \Delta y/2)} \right). \quad (2.58)$$

En la expresión (2.57) el término entre paréntesis es 0 cuando $\Delta x \rightarrow 0$, similarmente en (2.58) se desvanece cuando $\Delta y \rightarrow 0$. Esto quiere decir que a primer orden en Δx y Δy el cambio en $v^\alpha w_\alpha$ es cero, es decir el transporte paralelo es independiente del camino a primer orden en Δx y Δy . Para encontrar en cambio a segundo orden de (2.57), se considera δ' como el término entre paréntesis de (2.57), ahora este cambio corresponde al transporte paralelo del punto $(\Delta x/2, 0)$ al $(\Delta x/2, \Delta y/2)$ en la Figura 2, por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta' &= v^\alpha X^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(\Delta x/2, 0)} - v^\alpha X^\beta \nabla_\beta w_\alpha \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y)} \\ &= -\Delta y \frac{\partial}{\partial y} (v^\alpha X^\beta \nabla_\beta w_\alpha) \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y/2)} \\ &= -\Delta y Y^\nu \nabla_\nu (v^\alpha X^\mu \nabla_\mu w_\alpha) \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y/2)} \\ &= -\Delta y (Y^\nu \nabla_\nu v^\alpha) X^\mu \nabla_\mu w_\alpha \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y/2)} - \Delta y v^\alpha Y^\nu \nabla_\nu (X^\mu \nabla_\mu w_\alpha) \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y/2)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Debido a que v^α se transporta paralelamente en la curva con la tangente Y^ν entonces el primer término de (2.59) es cero en la expresión anterior, que resulta en

$$\delta' = -\Delta y v^\alpha Y^\nu \nabla_\nu (X^\mu \nabla_\mu w_\alpha) \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y/2)} \quad (2.60)$$

Por lo tanto, a segundo orden en Δx y Δy

$$\delta_1 + \delta_2 = -\Delta x \Delta y v^\alpha Y^\nu \nabla_\nu (X^\mu \nabla_\mu w_\alpha) \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y/2)} \quad (2.61)$$

Se sigue un procedimiento análogo al anterior y se obtiene

$$\delta_3 + \delta_4 = \Delta y \Delta x v^\alpha X^\mu \nabla_\mu (Y^\nu \nabla_\nu w_\alpha) \Big|_{(\Delta x/2, \Delta y/2)} \quad (2.62)$$

Finalmente se considera que, en los cálculos posteriores, el cambio total en $v^\alpha w_\alpha$ es a segundo orden en Δx y Δy , evaluados en $(\Delta x/2, \Delta y/2)$, por lo tanto el cambio total en $v^\alpha w_\alpha$ es

$$\begin{aligned} \delta(v^\alpha w_\alpha) &= \sum_{i=1}^4 \delta_i \\ &= \Delta x \Delta y v^\alpha \{ X^\mu \nabla_\mu (Y^\nu \nabla_\nu w_\alpha) - Y^\nu \nabla_\nu (X^\mu \nabla_\mu w_\alpha) \}, \end{aligned}$$

de la regla de Leibnitz

$$\begin{aligned}
\delta(v^\alpha w_\alpha) &= \Delta x \Delta y v^\alpha \{X^\mu (\nabla_\mu Y^\nu) \nabla_\nu w_\alpha - Y^\mu (\nabla_\mu X^\nu) \nabla_\nu w_\alpha + X^\mu Y^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu w_\alpha - Y^\nu X^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu w_\alpha\} \\
&= \Delta x \Delta y v^\alpha \{[X, Y]^\nu \nabla_\nu w_\alpha + X^\mu Y^\nu (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) w_\alpha\} \\
&= \Delta x \Delta y v^\alpha X^\mu Y^\nu (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) w_\alpha \\
\delta(v^\alpha w_\alpha) &= \Delta x \Delta y X^\mu Y^\nu (R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta) v^\alpha w_\beta
\end{aligned} \tag{2.63}$$

en la última línea se usa que los campos vectoriales conmutan $[X, Y] = 0$, e identificamos el conmutador de las derivadas covariantes como el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta$.

$$R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta v^\alpha = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) v^\alpha \tag{2.64}$$

La expresión (2.63) es verdadera para todo w_α si y solo si el cambio total en v^α es

$$\delta v^\alpha = \Delta x \Delta y X^\mu Y^\nu (R_{\mu\nu\beta}{}^\alpha) v^\beta \tag{2.65}$$

El tensor de Riemann debe ser antisimétrico en los índices μ, ν , es decir $R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta = -R_{\nu\mu\alpha}{}^\beta$, ya que cambiar los vectores X^μ, Y^ν corresponde a atravesar el circuito cerrado en la dirección opuesta, y debe dar el resultado contrario de hacer el transporte paralelo del vector v^β en la dirección original de los vectores X^μ, Y^ν . Además la expresión (2.65) es consistente con el hecho de que la transformación sobre el vector v^β debe desaparecer si X^μ y Y^ν son el mismo vector [8].

El conmutador de dos derivadas covariantes, entonces, mide la diferencia entre el transporte paralelo del vector primero de una manera y luego la forma contraria. Para el cálculo, considera un campo vectorial v^ρ , entonces

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu (\nabla_\nu v^\rho) &= \nabla_\mu \left(\frac{\partial v^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho v^\sigma \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial v^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho v^\sigma \right) + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \left(\frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma v^\lambda \right) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \left(\frac{\partial v^\rho}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho v^\sigma \right) \\
&= \partial_\mu \partial_\nu v^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) v^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu v^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu v^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma v^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda v^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho v^\sigma,
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu v^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) v^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu v^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu v^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma v^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda v^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho v^\sigma, \tag{2.67}$$

donde se usa (2.27) en (2.66), de la misma manera se obtiene

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu v^\rho) = \partial_\nu \partial_\mu v^\rho + (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho) v^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu v^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu v^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma v^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda v^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho v^\sigma, \tag{2.68}$$

Si se resta (2.68) de (2.67), el primer, sexto y séptimo término de ambas expresiones se cancelan, lo mismo ocurre con el tercer y cuarto término, quedando sólo

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v^\rho = \left(\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \right) v^\sigma, \tag{2.69}$$

la expresión de la izquierda en (2.69) es un tensor, por lo que la expresión entre paréntesis debe ser un tensor. Así escribimos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} v^\sigma. \tag{2.70}$$

donde el tensor de Riemann se identifica como

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \tag{2.71}$$

Si ahora se considera ∇_a un operador derivada, w_a un campo vectorial dual y f una función suave. Se calcula la acción de dos operadores derivada aplicados a $f w_a$.

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta (f w_\sigma) = \nabla_\alpha (w_\sigma \nabla_\beta f + f \nabla_\beta w_\sigma) \tag{2.72}$$

$$= (\nabla_\alpha \nabla_\beta f) w_\sigma + \nabla_\beta f \nabla_\alpha w_\sigma + \nabla_\alpha f \nabla_\beta w_\sigma + f \nabla_\alpha \nabla_\beta w_\sigma. \tag{2.73}$$

se resta de (2.73) el tensor $\nabla_b \nabla_a (f w_c)$, los primeros tres términos del lado derecho de (2.73) se cancelan de $\nabla_b \nabla_a (f w_c)$ y obtenemos el resultado:

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) (f w_\sigma) = f (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) w_\sigma. \tag{2.74}$$

Por el mismo razonamiento dado anteriormente en la discusión del operador derivada se sigue que el tensor $(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)w_\sigma$ en un punto p depende únicamente del valor de w_σ en p . Consecuentemente $(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)$ define a un mapeo lineal de vectores duales en p a tensores tipo $(0, 3)$ en p , i.e., la acción del mapeo es la de un tensor del tipo $(1, 3)$. Entonces, el campo tensorial $R^\nu_{\alpha\beta\sigma}$, es el *tensor de curvatura de Riemann* que se obtuvo en (2.71). En donde el “baja” índices con la métrica $R_{\alpha\beta\sigma\nu} = R_{\alpha\beta\sigma}{}^\mu g_{\mu\nu}$ y se “suben” con la métrica inversa $R_{\alpha\beta\sigma\mu} g^{\mu\nu} = R_{\alpha\beta\sigma}{}^\nu$. Las propiedades del tensor de Riemann son [21]

$$R^\nu_{\alpha\beta\sigma} = -R^\nu_{\beta\alpha\sigma}, \quad (2.75)$$

$$R^d_{[\alpha\beta\sigma]} = 0. \quad (2.76)$$

Para un operador derivada ∇_α , naturalmente asociada con la métrica, $\nabla_\alpha g_{\beta\sigma} = 0$ se obtiene

$$R_{\alpha\beta\sigma\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\sigma}, \quad (2.77)$$

Las identidades de Bianchi:

$$\nabla_{[\alpha} R^\mu_{\beta\sigma]\nu} = 0. \quad (2.78)$$

El tensor de curvatura tiene n^4 componentes, donde n es la dimensión de la variedad donde está definido, de las tres relaciones (2.75), (2.76), (2.77) reducen el número de componentes independientes a $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$. En dimensiones 2, 3 y 4, el número de componentes independientes será 1, 6, 20, respectivamente. Es útil descomponer el tensor de Riemann. Por las propiedades de antisimetría de (2.75) y (2.77), la contracción del tensor de Riemann sobre los primeros 2 o los últimos dos índices se desvanece. Sin embargo la traza sobre el segundo y el cuarto (o equivalentemente, el primero y tercero) índices define el tensor de Ricci, $R_{\alpha\sigma}$

$$R_{\alpha\sigma} = R^\beta_{\alpha\beta\sigma}. \quad (2.79)$$

De las propiedades (2.75), (2.76), 2.77, el tensor de Riemann también satisface la siguiente propiedad útil.

$$R_{\alpha\beta\sigma\nu} = R_{\sigma\nu\alpha\beta}, \quad (2.80)$$

de la propiedad (2.80), $R_{\alpha\sigma}$, satisface la siguiente propiedad de simetría

$$R_{\alpha\sigma} = R_{\sigma\alpha}. \quad (2.81)$$

El escalar de curvatura R , es definida como la traza del tensor de Ricci.

$$R = R^\alpha_\alpha. \quad (2.82)$$

2.6. Principio de Acción

Esta sección está basada en el libro de Carroll [8]. La acción de Einstein-Hilbert en la teoría de Relatividad General es

$$S_{GR} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.83)$$

con $g = \det(g_{\mu\nu})$. Se define una acción de constante cosmológica

$$S_\Lambda = -\frac{1}{\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda, \quad (2.84)$$

y una acción de materia

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \widehat{\mathcal{L}}_M, \quad (2.85)$$

donde $\widehat{\mathcal{L}}_M$ es un escalar que depende de un conjunto de campos $\phi(x)$ que cumplen con las ecuaciones de Euler-Lagrange pero con derivadas covariantes, es decir

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}_M}{\partial \phi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}_M}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.86)$$

Entonces la acción de la Relatividad General con constante cosmológica y con materia es

$$S = S_H + S_\Lambda + S_M. \quad (2.87)$$

Se hace la variación de S_H respecto a la métrica inversa $g^{\mu\nu}$, ya que $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$, y la delta de Kronecker se mantiene invariante bajo la variación. Además, la variación de la métrica es

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma}, \quad (2.88)$$

así para puntos estacionarios con respecto a variaciones en $g^{\mu\nu}$ son equivalentes a variaciones en $g_{\mu\nu}$ y se usa que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ la variación total es

$$\delta S_H = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3, \quad (2.89)$$

donde

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.90)$$

$$\delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.91)$$

$$\delta S_3 = \int d^4x R \delta \sqrt{-g}. \quad (2.92)$$

Es importante estudiar las variaciones δS_1 , δS_3 , ya que el segundo término δS_2 ya es una sola expresión multiplicada por $\delta g^{\mu\nu}$. Después de una serie de pasos que se pueden consultar en la referencia [8] ya que no es el objetivo desarrollar detalladamente los pasos en esta tesis, se puede obtener que la variación de S_1

$$\delta S_1 = \int_{\partial\Sigma} d^3x \sqrt{-\gamma} n_\sigma [g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\lambda (\delta g^{\sigma\lambda})], \quad (2.93)$$

donde se usa el Teorema de Stokes

$$\int_\Sigma \sqrt{-g} d^4x \nabla_\mu V^\mu = \int_{\partial\Sigma} \sqrt{-\gamma} d^3x n_\mu V^\mu, \quad (2.94)$$

aquí γ es la métrica en el nuevo espacio-tiempo $n - 1$ dimensional. La integral (2.93) es igual a la contribución de la variación de la métrica inversa, la cual se puede hacer cero en la frontera en infinito. Entonces este término no contribuye a la variación total. El término en la frontera incluirá no solamente la variación en la métrica sino también su primera derivada, la cual no tiene por qué ser cero. Para el propósito de este trabajo, esto no es importante, pero en principio se debe ser cuidadoso de lo que ocurre en la frontera.

Ahora se considera la siguiente propiedad útil

$$\begin{aligned}\delta g &= g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \\ &= -g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}),\end{aligned}\tag{2.95}$$

en el último paso se usó (2.88). Se puede usar para demostrar que

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{g}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{2.96}$$

Ya que en (2.89), δS_1 no contribuye y se inserta (2.96) en (2.92) se obtiene

$$\delta S_H = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu}.\tag{2.97}$$

De nuevo se inserta (2.96) en la variación de (2.84), para obtener

$$\delta S_H = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\widehat{\mathcal{L}}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}.$$

Ya que esta expresión se debe mantener para cualquier variación $\delta g^{\mu\nu}$, esto implica que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},\tag{2.98}$$

esta es la ecuación de movimiento del campo. El lado derecho de esta ecuación es por definición proporcional al tensor de energía-momento.

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\widehat{\mathcal{L}}_M)}{\delta g^{\mu\nu}},$$

Ahora se considera una acción de materia para un campo de Klein-Gordon como

$$S_M = \int \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \sqrt{-g} d^4x,\tag{2.99}$$

Si se varia la acción anterior respecto al campo ϕ para encontrar las ecuaciones de movimiento se obtiene

$$\begin{aligned}\delta S_M &= \int d^4x \sqrt{-g} (-\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \delta \phi - m^2 \phi \delta \phi) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (-\nabla_\mu (\nabla^\mu \phi \delta \phi) + \nabla_\mu \nabla^\mu \phi \delta \phi - m^2 \phi \delta \phi)\end{aligned}\tag{2.100}$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} [(\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - m^2 \phi^2) \delta \phi - \nabla_\mu (\nabla^\mu \phi \delta \phi)].\tag{2.101}$$

Se usa de nuevo el teorema de Stokes (2.94) en el segundo término de (2.101) y se usa que la variación de los campos en la frontera en infinito es cero. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento son

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - m^2 \phi^2 = 0.\tag{2.102}$$

Por otro lado se varia la acción de materia respecto a $g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\delta S_M &= \int d^4x \left[\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \right) + \delta \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right].\end{aligned}\tag{2.103}$$

Por lo tanto, el tensor de energía-momento es

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\widehat{\mathcal{L}}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \phi \nabla_\sigma \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)\end{aligned}\tag{2.104}$$

2.7. Derivada de Lie

Se considera dos variedades M y N , de dimensión $\dim(M) = m$, $\dim(N) = n$, y con sistemas de coordenadas x^μ , y^α , respectivamente. Con un mapeo $\phi : M \rightarrow N$ y una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$. Se puede componer ϕ con f para construir una función; se define el **pullback** de f por ϕ , denotado $\phi_* f$ como [25]

$$\phi_* f = (f \circ \phi) . \quad (2.105)$$

Sin embargo, si se tiene una función $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, no hay forma de que se pueda componer g para crear una función en N . Pero debio a que un vector puede considerarse como un operador derivada que asigna funciones suaves a números reales, entonces se permite definir el pushforward de un vector; si v es un vector en un punto p en M , se define el **pushforward** de un vector $\phi^* v$ como

$$(\phi^* v)(f) = v(\phi^* f) . \quad (2.106)$$

Por lo tanto ϕ es un mapeo del espacio tangente en $p \in M$ a vectores del espacio tangente de $\phi(p) \in N$, es decir $\phi^* : V_p \rightarrow V_{\phi(p)}$ [21]. Entonces, para hacer el pushforward de un campo vectorial, se observa que la acción de $(\phi^* v)$ en cualquier función es simplemente la acción de v en el pullback de esa función. Ya que una base para los vectores en M está dada por el conjunto $(\partial/\partial x^\mu)$, y una base en N está dada por el conjunto $(\partial/\partial y^\alpha)$. Si se aplica el pushforward de un vector a una función de prueba, de la regla de la cadena se obtiene $(\phi^* v)^\alpha \partial_\alpha f = v^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\alpha f$, entonces en las bases anteriores el mapeo $(\phi^*)^\alpha_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$ [23].

Ya que las 1-formas son mapeos lineales de vectores a los números reales. El pullback $\phi_* \omega$ de una 1-forma ω sobre N , por lo tanto, puede definirse por su acción en un vector v en M , al igualarlo con la acción de ω en el pushforward de v^a

$$(\phi^* \omega)v = \omega(\phi_* v) . \quad (2.107)$$

Una vez más, hay una descripción en términos del Jacobiano, es decir $(\phi^*)^\alpha_\mu = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$. Ahora si el mapeo ϕ es invertible y por lo tanto tanto ϕ como ϕ^{-1} son suaves, es decir C^∞ , entonces ϕ define un **difeomorfismo** de M a N . Este solo puede ser el caso si M y N son en realidad la misma variedad y $\dim(M) = \dim(N)$. En los difeomorfismos es que se puede usar tanto ϕ^{-1} como ϕ (por ser suprayectivo) para definir el *pushforward* y el *pullbacks* de tensores arbitrarios de M a N . Específicamente, para un campo tensorial (k, l) sobre M , se define el *pushforward*.

$$(\phi^* T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} (\omega_1)_{\mu_1}, \dots, (\omega_k)_{\mu_k}, (v_1)^{\nu_1}, \dots, (v_l)^{\nu_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} (\phi_* \omega_1)_{\mu_1} \dots ([\phi^{-1}]^* v_l)^{\nu_l} \quad (2.108)$$

Donde $(\phi^{-1})^*$ es un mapeo de $V_{\phi(p)}$ a V_p y dado que un difeomorfismo nos permite hacer el *pullback* y *pushforward* tensores arbitrarios, proporciona otra forma de comparar tensores en diferentes puntos en una variedad. Dado un difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ y un campo tensorial $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$, se puede establecer la diferencia entre el valor del tensor en algún punto p y $\phi^* [T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}]$. Esto sugiere que se puede definir otro tipo de operador derivada en campos tensoriales, uno que categoriza la tasa de cambio del tensor bajo el flujo del difeomorfismo [8]. Para ello, sin embargo, un solo difeomorfismo discreto de la diferencia es insuficiente; se requiere una familia uni-parámetrica de difeomorfismos ϕ_t . Esta familia se puede considerar como un mapeo suave suave $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$, de modo que para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene un difeomorfismo ϕ_t , que satisface $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$. Este último condición implica que ϕ_0 es el mapeo identidad.

Si se considera lo que sucede con el punto p bajo una familia de difeomorfismos, esta describe una curva en M ; ya que lo mismo se aplicará a todos los puntos en M . Se puede definir una familia de uni-paramétrica de difeomorfismos de cualquier campo vectorial. Dado un campo vectorial ξ^μ , se define las **curvas integrales** del campo vectorial como aquellas curvas x^μ que resuelven

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = \xi^\mu(t), \quad (2.109)$$

en donde t es un parámetro afín de la curva y con la condición inicial $\xi^\mu(0) = x^\mu_p$. Con μ la μ -ésima coordenada en p . El teorema de la existencia y la unicidad de las soluciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que, para un intervalo suficientemente pequeño de t , la ecuación (2.109) con la condición inicial mencionada anteriormente tiene una solución única [26]. Se denota además $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ como una curva integral sobre M tal que, $\dot{\gamma}(t) = \xi^\alpha(t)$.

Si se considera $p \in M$, y sea ξ^α el campo vectorial sobre M tal que $\xi^\alpha|_p \neq 0$. Se puede demostrar que en una vecindad O de p y un sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ en O tal que $\xi^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^1}$ en O . Para demostrarlo se considera

$m = \dim(M)$, $\Sigma \subset O$ sea una superficie $(m - 1) - \text{dimensional}$, tal que en ningun punto ξ^α es tangente a Σ y (x^2, \dots, x^n) son las coordenadas de Σ , del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, dado un punto $p \in \Sigma$ existe una única curva integral $\gamma|_p$ de ξ^α que pasa a través de p y satisface $\gamma_p(0) = p$. Para $p \in \Sigma$, se define x^1 a lo largo de γ_p como $x^1 = \int dt$ tal que $x^1 = 0$ sobre Σ , se toma (x^2, \dots, x^n) para que sea constante a lo largo de γ_p . De esta manera $\{x^i\}_{i \in 1, \dots, n}$ es el **sistema de coordenadas adaptado** que se busca [23].

Con lo anterior, es posible definir la **derivada de Lie de un campo tensorial**. Se considera M una variedad y sea $\phi_t: M \rightarrow M$ un grupo uni paramétrico de difeomorfismos, ϕ_t generados por un campo vectorial ξ^α , se define la derivada de Lie a lo largo de ξ^α de un campo tensorial suave $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ como:

$$\mathcal{L}_\xi T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_{-t}^* T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} - T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}}{t}. \quad (2.110)$$

La derivada de Lie es un mapeo de un campo tensoriales (k, l) a (k, l) que es independiente de las coordenadas y además es un mapeo lineal [21].

Al estudiar campos escalares con ξ^α un campo vectorial en M , $p \in M$, $\gamma(t)$ es una curva integral de ξ^μ que pasa a través p , $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ un grupo de transformaciones inducida por ξ^μ , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, se obtiene que $f(\phi_{-t}(x^1, x^2, \dots, x^n)) = f(x^1 + t, x^2, \dots, x^n)$, debido al **sistema de coordenadas adaptado** se obtiene

$$(\mathcal{L}_\xi f)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi_{-t}(x^\mu)) - f(x^\mu)}{t} = \xi^\mu \partial_\mu f, \quad (2.111)$$

es llamada la *derivada de Lie* de f respecto a ξ^μ en p .

Luego con dos campos vectoriales ξ^μ, χ^ν sobre M ; γ una curva integral de ξ^μ ; y $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, el grupo de transformaciones inducido po ξ^μ . Entonces

$$(\mathcal{L}_\xi \chi)^\nu = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\chi^\nu - \phi_{t*} \chi^\nu_{\phi_{-t}(p)}], \quad (2.112)$$

es la derivada de Lie de χ^ν con respecto a ξ^μ . Se usa de nuevo el sistema de coordenadas que es adaptado a las curvas integrales de ξ^μ , entonces

$$(\mathcal{L}_\xi \chi)^\nu = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\chi^\nu(x^1, \dots, x^n) - \chi^\nu(x^1 - t, \dots, x^n)] = \left(\frac{\partial \chi^\nu}{\partial x^1} \right) = \xi^\mu \partial_\mu \chi^\nu. \quad (2.113)$$

El término de la derecha no es un vector, pero lo será si restamos $\chi^\nu \partial_\nu (\xi^\mu)$, ya que $\xi^\nu = \delta_1^\nu$, se obtiene que $\chi^\nu \partial_\nu (\xi^\mu) = 0$. Entonces

$$(\mathcal{L}_\xi \chi)^\nu = \xi^\nu \partial_\nu (\chi^\mu) - \chi^\nu \partial_\nu (\xi^\mu) = [\xi, \chi]^\mu. \quad (2.114)$$

Para el campo de 1-formas ω_a , si usamos la regla de Leibnitz para un campo vectorial χ^μ en M

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi (\omega_\mu \chi^\mu) &= (\mathcal{L}_\xi \omega)_\mu \chi^\mu + \omega_\mu (\mathcal{L}_\xi \chi)^\mu \\ &= (\mathcal{L}_\xi \omega)_\mu \chi^\mu + \omega_\mu [\xi, \chi]^\mu \\ &= (\mathcal{L}_\xi \omega)_\mu \chi^\mu + \omega_\nu (\xi^\mu \partial_\mu \chi^\nu - \chi^\mu \partial_\mu \xi^\nu). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi (\omega_\mu \chi^\mu) &= \xi^\nu \nabla_\nu (\omega_\mu \chi^\mu) \\ &= \xi^\nu \nabla_\nu \omega_\mu \chi^\mu + \omega_\mu \xi^\nu \nabla_\nu \chi^\mu, \end{aligned}$$

Se resuelve para $(\mathcal{L}_\xi \omega_\mu \chi^\mu)$ y ya que ξ^μ es arbitraria

$$(\mathcal{L}_\xi \omega)_\nu = \xi^\nu \nabla_\nu \omega_\mu + \omega_\mu \nabla_\nu \xi^\mu.$$

La derivada de Lie para cualquier campo tensorial es

$$\mathcal{L}_\xi T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \xi^\sigma \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} - \sum_{i=1}^k T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \nabla_{\mu_i} \xi^{\mu_i} + \sum_{j=1}^l T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \nabla_{\nu_j} \xi^{\nu_j}. \quad (2.115)$$

Para un tensor $(0, 2)$ se puede obtener

$$\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu} = \xi^\rho \nabla_\rho T_{\mu\nu} + T_{\rho\nu} \nabla_\mu \xi^\rho + T_{\mu\rho} \nabla_\nu \xi^\rho. \quad (2.116)$$

En particular se puede usar (2.116) para ver que, en el tensor métrico

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = \nabla_\rho g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \xi^\rho g_{\rho\nu} + \nabla_\nu \xi^\rho g_{\mu\rho} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \quad (2.117)$$

Si la métrica no cambia bajo una transformación ϕ_s se dice que la transformación es una isometría y la métrica tiene una simetría. En este caso los vectores ξ que cumplen con $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$ se llaman *vectores de Killing*. Por lo tanto, si se mueve a lo largo del flujo de un vector de Killing, la métrica, y por lo tanto también el espacio-tiempo, permanece completamente constantes. Por lo tanto, es una forma matemática de expresar la invariancia de la métrica, de una manera invariante de coordenadas. En otras palabras, si $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$ en un sistema de coordenadas particular es cierto en todos los sistemas de coordenadas. Ahora dado cualquier campo vectorial ξ^ρ se puede encontrar (localmente) un sistema de coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) , en el cual ξ^ρ toma la forma $\xi^\rho = (1, 0, 0, 0)$.

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^1}, \quad (2.118)$$

Por lo tanto si encontramos un sistema de coordenadas en el cual $g_{\mu\nu}$ es independiente de una de las coordenadas, por ejemplo y , entonces $\frac{\partial}{\partial y}$ debe ser un vector de Killing. ya que

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y} = 0. \quad (2.119)$$

El enunciado inverso no es verdadero: si $g_{\mu\nu}$ depende de todas las coordenadas no significa que $g_{\mu\nu}$ no tenga vectores de Killing.

2.8. Teorema de Killing

Un vector de Killing o campo vectorial de Killing es un vector definido sobre una variedad de Riemann que define un grupo uniparamétrico de isometrías. En teoría de la relatividad general los vectores de Killing son de gran importancia porque permiten definir tanto leyes de conservación como construir otros invariantes útiles en la resolución de problemas físicos.

Se dice que ξ^μ es un campo vectorial, es de Killing si:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \quad (2.120)$$

es decir, la métrica no cambia en la dirección de ξ^α

Teorema: Si ξ_ν es cualquier vector de Killing y u^ν es la tangente a una geodésica, entonces, $\xi^\nu u_\nu$ no cambia sobre la geodésica.

Dem.

$$\frac{D}{Ds}(u^\nu \xi_\nu) = u^\mu \nabla_\mu (u^\nu \xi_\nu) = (u^\mu \nabla_\mu u^\nu) \xi_\nu + u^\mu u^\nu \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (2.121)$$

El primer término es cero por ser de la ecuación geodésica (2.43) y en el segundo término tenemos el producto de un tensor simétrico, es decir:

$$u^\mu u^\nu = u^\nu u^\mu. \quad (2.122)$$

Por un tensor antisimétrico

$$\nabla_\mu \xi_\nu = -\nabla_\nu \xi_\mu, \quad (2.123)$$

entonces el segundo término de (2.121) es cero.

3. SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN CON CAMPOS ESCALARES, CONSTANTE COSMOLÓGICA NEGATIVA Y DIRECCIONES PLANAS

En este trabajo se busca la solución a las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica negativa y con dos campos escalares de Klein-Gordon sin masa. Se dice que un espacio-tiempo es **estacionario** cuando su tensor métrico permite un campo de Killing temporal. También se llama **axisimétrico** si existe un campo Killing cuyas **curvas integrales** son cerradas.

A priori se imponen las simetrías, de tal manera que sea un espacio-tiempo estacionario como lo expresa (3.1). Adicionalmente es invariante ante translaciones en las direcciones planas, dadas por los vectores de Killing (3.2), (3.3), y se tiene una simetría de una rotación (3.4) en el plano generado por X , Y . En las relaciones (3.6) los dos Killings espaciales X, Y del espacio-tiempo conmutan. Más aún T , es ortogonal y conmuta con X y Y , además X y Y son ortogonales. Luego, se pueden elegir las coordenadas dadas por las curvas integrales de los Killings T^μ , X^μ , Y^μ . Con las coordenadas (t, r, x, y) , donde $t \in (-\infty, +\infty)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$. La coordenada **r no es una coordenada radial**, más bien $r \in I$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto que será determinado posteriormente una vez que se encuentre la forma final de la métrica.

$$T^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (3.1)$$

$$X^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\mu = (0, 0, 1, 0) \quad (3.2)$$

$$Y^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (3.3)$$

$$L^\mu = x \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\mu - y \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\mu = (0, 0, -y, x). \quad (3.4)$$

En estas coordenadas los vectores de Killing toman la forma simple

$$\begin{aligned} T &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X &= \frac{\partial}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} \\ L &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

cuyas relaciones de conmutación son

$$\begin{aligned} [T, X] &= [T, Y] = [X, Y] = 0 \\ [X, L] &= Y \\ [Y, L] &= X. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La manera más formal de asegurar que X y Y son coordenadas planas es que la *Holonomía* en el plano XY es igual a cero, sin embargo en este trabajo no será urgente trabajar con esta idea. Debido a que el tensor métrico es simétrico $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ se parte de 10 componentes independientes. De la hipótesis adicional de escoger un espacio-tiempo estático $t \rightarrow -t$ entonces las componentes $g_{tr} = g_{tx} = g_{ty} = 0$, se reduce a 7 componentes independientes, es decir

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2 + 2g_{xy}dxdy + 2g_{xr}dxdr + 2g_{yr}dydr. \quad (3.7)$$

De la ortogonalidad descrita de los Killings, se puede elegir una base ortogonal, así $g_{xy} = 0$, además, admite las transformaciones de coordenadas $x \rightarrow -x$ y $y \rightarrow -y$ hacen que $g_{rx} = g_{ry} = 0$, por lo tanto la métrica es

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2. \quad (3.8)$$

Sobre cada superficie de t, x y y constantes constante, g_{11} debería depender de r . Entonces g_{tt} es una función de una sola variable

$$g_{tt} = f(r).$$

Por un argumento similar se puede mostrar que

$$g_{rr} = h(r) .$$

Entonces, la métrica se puede escribir en la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + g_{xx}(r)dx^2 + g_{yy}(r)dy^2 , \quad (3.9)$$

La solución anterior es mas general en 4 dimensiones que la obtenida en el artículo [22], ya que se tienen funciones arbitrarias g_{xx} , g_{yy} multiplicando las direcciones planas. Se puede esperar que haya una infinidad de soluciones. Sin embargo, la que se busca debe tener escalares de curvatura constantes a pesar de no ser el espacio-tiempo de anti de Sitter como se describirá en la subsección 3.2. Por lo tanto, al escoger $g_{xx}(r) = g_{yy}(r) = 1$ como en el artículo [22] se obtendrá la solución

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + dx^2 + dy^2 , \quad (3.10)$$

Con la métrica (3.10) se calcula los símbolos de Christoffel. Ya que métrica no depende de t y es diagonal, se obtienen los símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\Gamma_{\mu\nu}^t = \frac{1}{2} \frac{d \ln f}{dr} (\delta_\mu^r \delta_\nu^t + \delta_\nu^r \delta_\mu^t) \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^r = \frac{1}{2} (\delta_\mu^r \delta_\nu^r \frac{h'}{h} + \delta_\nu^t \delta_\mu^t \frac{f'}{h}) \quad (3.12)$$

donde $h' = \frac{dh}{dr}$ y $\delta_\mu^t = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq t \\ 1 & \text{si } \mu = t \end{cases}$, similarmente con δ_μ^r . Con lo anterior se puede calcular las componentes del tensor de Riemann (Ver Apéndice A).

$$R_{r\nu\rho}{}^t = \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{f'h'}{fh} - \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} \right) \delta_\nu^t \delta_\rho^r \quad (3.13)$$

$$R_{t\nu\rho}{}^t = \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} - \frac{1}{4} \frac{f'h'}{fh} \right) \delta_\rho^r \delta_\nu^r \quad (3.14)$$

$$R_{r\nu\rho}{}^r = \left(-\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{h} \right) + \frac{1}{4} \frac{f'^2}{fh} - \frac{1}{4} \frac{f'h'}{h^2} \right) \delta_\rho^t \delta_\nu^t , \quad (3.15)$$

todas las demás componentes son 0, y en particular

$$R_{x\nu\rho}{}^\sigma = 0 \quad (3.16)$$

$$R_{y\nu\rho}{}^\sigma = 0 . \quad (3.17)$$

Ahora se contraen los índices para calcular las componentes del tensor de curvatura de Ricci:

$$R_{tt} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{h} \right) + \frac{1}{4} \frac{f'^2}{fh} - \frac{1}{4} \frac{f'h'}{h^2} , \quad (3.18)$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{f'h'}{fh} - \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} , \quad (3.19)$$

El escalar de Ricci es

$$R = -\frac{f''}{fh} + \frac{1}{2} \frac{f'h'}{fh^2} + \frac{1}{2} \frac{f'^2}{f^2 h} . \quad (3.20)$$

Se considera el artículo [22] como motivación y se estudia el caso de dos campos escalares

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = 0; \quad \phi = \lambda x , \quad (3.21)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = 0; \quad \psi = \lambda y . \quad (3.22)$$

Donde λ es constante y su valor particular se encontrará después de resolver las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa, los dos campos escalares de Klein-Gordon sin masa y direcciones planas anteriormente

mencionadas. Se observa que dichos campos escalares divergen conforme aumentamos en las coordenadas cartesianas y es un tipo de materia esparcida en todo el espacio, posteriormente en la subsección 3.3 se demuestra que el tensor de energía-momento de estos campos escalares cumplen con las condiciones de energía y su densidad de energía es finita en toda la variedad M . El tensor de energía-momento total es:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu}^{\phi} + T_{\mu\nu}^{\psi} \\ &= \nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(g^{\rho\sigma}\nabla_{\rho}\phi\nabla_{\sigma}\phi) + \nabla_{\mu}\psi\nabla_{\nu}\psi + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(g^{\rho\sigma}\nabla_{\rho}\psi\nabla_{\sigma}\psi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde cada tensor de energía-momento está dado por (2.104). Por consiguiente, el tensor de energía momento total (considerando que son campos escalares sin masa, $m=0$) es

$$T_{\mu\nu} = \lambda^2 f(r)\delta_{\mu}^t\delta_{\nu}^t - \lambda^2 h(r)\delta_{\mu}^r\delta_{\nu}^r \quad (3.24)$$

Luego con el tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

y el tensor de energía momento (3.24) se estudia las ecuaciones de campo de Einstein, para ello se define el tensor

$$Z_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu} = 0, \quad (3.26)$$

las componentes no triviales del tensor definido son

$$\begin{aligned} Z_{tt} &= -(8\pi\lambda^2 + \Lambda)f(r) = 0 \\ Z_{rr} &= (8\pi\lambda^2 + \Lambda)h(r) = 0 \\ Z_{xx} = Z_{yy} &= \Lambda - \frac{1}{2fh} \left(\frac{f'h'}{2h} + \frac{f'^2}{2f} - f'' \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ahora se considera que $f(r)$ no es idénticamente 0 para todo r , por lo tanto $8\pi\lambda^2 + \Lambda = 0$, y se hace el **truco** $\Lambda < 0$, es decir $|\Lambda| = -\Lambda$, para que λ tenga un valor en \mathbb{R} , se sigue que

$$\lambda = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{8\pi}} \quad (3.28)$$

se observa que en (3.27), se tiene una ecuación diferencial para dos funciones desconocidas. Por lo tanto se tendrá una infinidad de soluciones. La propuesta mas simple es considerar $f(r) = h(r)$ de esta manera las otras componentes se simplifican a

$$\begin{aligned} Z_{xx} &= \Lambda - \frac{1}{2f^2} \left(\frac{f'^2}{f} - f'' \right) \\ &= \Lambda + \frac{1}{2f(r)} \frac{d^2 \ln f}{dr^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

De acuerdo al Apéndice B, la solución más general a (3.29) es

$$f(r) = \frac{C_1}{4|\Lambda|} \sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{C_1} (r + C_2) \right), \quad (3.30)$$

De la expresión anterior se observa que existen **dos tipos de soluciones**. Ya que en el elemento de línea (3.10) la función $f(r)$ debe ser adimensional, se escoge la primera solución con $C_1 = 4|\Lambda| > 0$. Además $f(r)$ es una función periódica, no se pierde generalidad en la solución al escoger $C_2 = 0$ en (3.30), para obtener el primer tipo de solución

$$f_1(r) = \frac{1}{\cos^2(r\sqrt{|\Lambda|})}. \quad (3.31)$$

El segundo tipo de solución se obtiene al escoger $C_1 = -4|\Lambda| < 0$, $C_2 = 0$ en (3.30), para obtener

$$f_2(r) = -\frac{1}{\cosh^2(r\sqrt{|\Lambda|})}. \quad (3.32)$$

Por lo anterior la forma final de las métricas que son solución a las ecuaciones de Einstein con campos escalares de Klein-Gordon sin masa, direcciones planas y constante cosmológica negativa, en el caso en que $C_1 < 0$

$$ds_2^2 = \frac{1}{\cosh^2(r\sqrt{|\Lambda|})} (dt^2 - dr^2) + dx^2 + dy^2. \quad (3.33)$$

En este caso la coordenada radial se vuelve temporal $r \rightarrow t'$ y la coordenada temporal se vuelve radial $t \rightarrow r'$

$$ds_2^2 = \frac{1}{\cosh^2(t'\sqrt{|\Lambda|})} (-dt'^2 + dr'^2) + dx^2 + dy^2. \quad (3.34)$$

Por lo tanto en el segundo tipo de solución la métrica evoluciona con el tiempo t' . En el caso $C_1 = 4|\Lambda| > 0$

$$ds_1^2 = \frac{1}{\cos^2(r\sqrt{|\Lambda|})} (-dt^2 + dr^2) + dx^2 + dy^2. \quad (3.35)$$

En este trabajo nos enfocaremos en el primer tipo de solución. Es importante notar que las componentes de la métrica divergen en $r = -\frac{\pi}{2\sqrt{|\Lambda|}}, \frac{\pi}{2\sqrt{|\Lambda|}}$; esto implica que se puede elegir $r \in \left(-\frac{\pi}{2\sqrt{|\Lambda|}}, \frac{\pi}{2\sqrt{|\Lambda|}}\right)$. Sin embargo al calcular algunos escalares de curvatura, se obtiene

$$\begin{aligned} R &= 2\Lambda \\ R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= 2\Lambda^2 \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} &= 4\Lambda^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por lo tanto, el espacio-tiempo no posee alguna divergencia en la geometría del espacio-tiempo. Adicionalmente, al estudiar la distancia física considerando una trayectoria en la cual $dx = dy = dt = 0$, sobre r se obtiene

$$\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{|\Lambda|}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{|\Lambda|}}} \frac{dr}{\cos(r\sqrt{|\Lambda|})} \rightarrow \infty. \quad (3.37)$$

La expresión(3.37) dice que la distancia de $r = -\frac{\pi}{2\sqrt{|\Lambda|}}$ a $r = \frac{\pi}{2\sqrt{|\Lambda|}}$ es infinita. Lo anterior se puede ver mas claro con el cambio en la coordenada $r \rightarrow \tilde{r} = \frac{\ln(\tan(r\sqrt{|\Lambda|}) + \sec(r\sqrt{|\Lambda|}))}{\sqrt{|\Lambda|}}$, con $d\tilde{r} = \frac{dr}{\cos(r\sqrt{|\Lambda|})}$ lo que conduce a

$$ds_2^2 = -\frac{1}{\cos^2(r\sqrt{|\Lambda|})} dt^2 + d\tilde{r}^2 + dx^2 + dy^2. \quad (3.38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{r} \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

Por lo anterior, y para propósito de esta tesis no fué urgente buscar una extensión de Kruskal.

3.1. Leyes de Conservación

Por facilidad es posible reescalar la coordenada $r \rightarrow r' = r\sqrt{|\Lambda|}$, $t \rightarrow t' = t\sqrt{|\Lambda|}$, $x \rightarrow x' = x\sqrt{|\Lambda|}$, $y \rightarrow y' = y\sqrt{|\Lambda|}$, así la métrica toma la forma

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2(r)}(-dt^2 + dr^2) + dx^2 + dy^2. \quad (3.40)$$

Las geodésicas de la métrica (3.40) son

$$\begin{aligned} \ddot{r} + 2 \tan(r) (\dot{t}^2 + \dot{r}^2) &= 0, \\ \ddot{t} + 2 \tan(r) \dot{r}\dot{t} &= 0 \\ \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Siguiendo el teorema de Killing (2.120) se puede calcular las cantidades conservadas. Para este propósito se define una cantidad E , asociada con la energía. Con $u^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{x}, \dot{y})$ la 4-velocidad o vector tangente a la geodésica. y el punto significa la derivada respecto a un parámetro afín a lo largo de la geodésica.

$$E = -u^\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\mu = f(r)\dot{t}, \quad (3.42)$$

donde $f(r) = \frac{1}{\cos^2(r)}$. También se puede definir una cantidad asociada al momento lineal p_x en la coordenada x .

$$p_x = u^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_\mu = \dot{x}. \quad (3.43)$$

Y otra cantidad asociada al momento en la coordenada y

$$p_y = u^\mu \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_\mu = \dot{y}. \quad (3.44)$$

Finalmente se puede asociar una cantidad conservada con el momento angular L .

$$L = \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)_\mu u^\mu = x\dot{y} - y\dot{x}. \quad (3.45)$$

Se considera $\epsilon = 1$ o 0 , si las geodésicas son temporaloides o nulas respectivamente, y no se pierde generalidad ya que siempre se puede reparametrizar para que $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ sea -1 o 0 .

$$-\epsilon = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \quad (3.46)$$

por consiguiente:

$$-\epsilon = -f(r)\dot{t}^2 + f(r)\dot{r}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2. \quad (3.47)$$

Se puede estudiar las geodésicas sustituyendo \dot{t} de (3.42) en (3.48)

$$-\epsilon = -f(r) \left(\frac{E}{f(r)} \right)^2 + f(r)\dot{r}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2. \quad (3.48)$$

Se usa la energía E y se define la cantidad “momento total” $p^2 = p_x^2 + p_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, por lo tanto.

$$-\epsilon = -\frac{E^2}{f(r)} + f(r)\dot{r}^2 + p^2, \quad (3.49)$$

si dividimos lo anterior por $2f(r)$

$$-\frac{\epsilon}{2f(r)} = -\frac{E^2}{2f(r)^2} + \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{p^2}{2f(r)}, \quad (3.50)$$

se puede reescribir lo anterior como una cantidad relacionada a la energía cinética $\frac{\dot{r}^2}{2}$ más un potencial efectivo $V_{eff}(r)$.

$$0 = \frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r), \quad (3.51)$$

en donde el potencial efectivo tiene la forma.

$$V_{eff} = \frac{1}{2f(r)} \left(p^2 + \epsilon - \frac{E^2}{f(r)} \right). \quad (3.52)$$

Nótese que el potencial $V_{eff} \leq 0$ para que la suma en (3.51) resulte 0. Si se despeja \dot{r} de (3.51) se puede obtener que

$$\dot{r} = \sqrt{-2V_{eff}}. \quad (3.53)$$

De la expresión de $f(r)$ en (3.32), $-2V_{eff} \geq 0$ si se cumple que

$$E^2 > p^2 + \epsilon, \quad (3.54)$$

es decir si el momento lineal total en $|p|$ siempre está acotado por $|E|$. Para hallar “órbitas circulares”, se deriva el potencial y se iguala a cero.

$$\frac{d}{dr} V_{eff}(r) = \sin(r) \cos(r) (2E^2 \cos^2(r) - p^2 - \epsilon) = 0. \quad (3.55)$$

Al considerar la propiedad $\cos^2(r) = \frac{1+\cos(2r)}{2}$, los puntos críticos del potencial son

$$r \in \left\{ \frac{\pi n}{2}, \pm \frac{\arccos\left(\frac{p^2+\epsilon}{E^2} - 1\right)}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De los potenciales en la Figura 3 se puede observar que cuando $\epsilon = 0$, de acuerdo al intervalo elegido para r basta considerar $n = 0, 1$, así el mínimo está en $r_{min} = 0$, y los máximos corresponden a $r_{max} = \pm \frac{\arccos\left(\frac{p^2+\epsilon}{E^2} - 1\right)}{2}$ lo cual está bien definido ya que $\frac{p^2+\epsilon}{E^2} < 1$, como se observa en la Figura 3, se espera que las geodésicas que parten de un punto cercano a $\frac{\pi}{2}$ se acerquen asintóticamente a $-\frac{\pi}{2}$ de esa manera se mantendrán oscilando en ese pozo de potencial. Y conforme se aumenta p el ancho del pozo de potencial disminuye, es decir las geodésicas se mantendrán en un intervalo mas pequeño dentro de $r \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

El objetivo ahora es encontrar una expresión para poder graficar $r(t)$. Para esto se usan las expresiones (3.53), (3.42) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\dot{r}}{t} \\ &= \frac{\sqrt{(E^2 \cos^2(r) - p^2 - \epsilon)}}{E \cos(r)}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Por lo tanto se puede obtener que

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{E \cos(r) dr}{\sqrt{E^2 \cos^2(r) - p^2 - \epsilon}}. \\ t + K_1 &= \arctan \left[\frac{\sqrt{2}|E| \sin(r)}{E^2 \cos(2r) + 1 - 2(p^2 + \epsilon)} \right] + K_2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Con las K_i constantes. Debido a la complicada forma de la expresión (3.57) se puede resolver numéricamente la ecuación diferencial (3.56) [27, 28, 29]. Y obtener el comportamiento en el plano $t - r$ como se observan en las Figuras 4. De acuerdo a la expresión (3.56) cuando $E \neq 0$, $p = \epsilon = 0$, r toma la forma $r(t) = K_3 t$ y cuando $E = 0$ no hay potencial efectivo y por lo tanto solo habrá una línea vertical en el plano $t - r$, Véase la Figura 4.

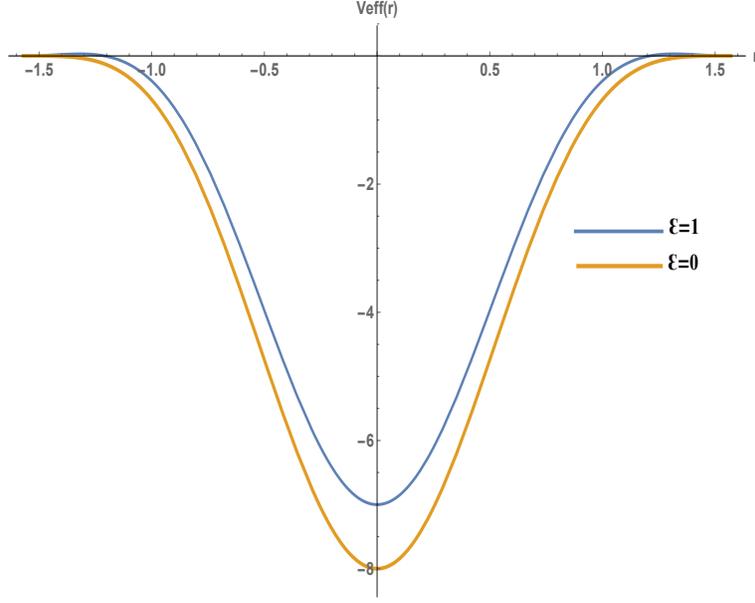


Figura 3: En esta imagen se observa el potencial efectivo en $-\frac{\pi}{2} < r < \frac{\pi}{2}$, con $\epsilon = 0$ corresponde a geodésicas nulas, $\epsilon = 1$ para geodésicas temporales. Se obtuvieron con los valores $E^2 = 16$, $p^2 = \epsilon = 0$, y $E^2 = 16$, $p^2 = \epsilon = 1$.

Se define el horizonte de Killing donde la norma de un campo de Killig temporaloide k^μ se hace nulo, es decir

$$k^\mu k_\mu = 0. \quad (3.58)$$

Debido a que el único campo de Killing temporal del espacio-tiempo (3.35) es $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu$. Si se calcula su norma, entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\nu = -f(r). \quad (3.59)$$

Ya que el dominio de r está restringido en $-\frac{\pi}{2} < r < \frac{\pi}{2}$, entonces la norma del campo de Killing nunca es cero

$$-f(r) = -\frac{1}{\cos(r)} \neq 0. \quad (3.60)$$

Por lo tanto, el espacio-tiempo (3.35) no posee horizontes de Killing.

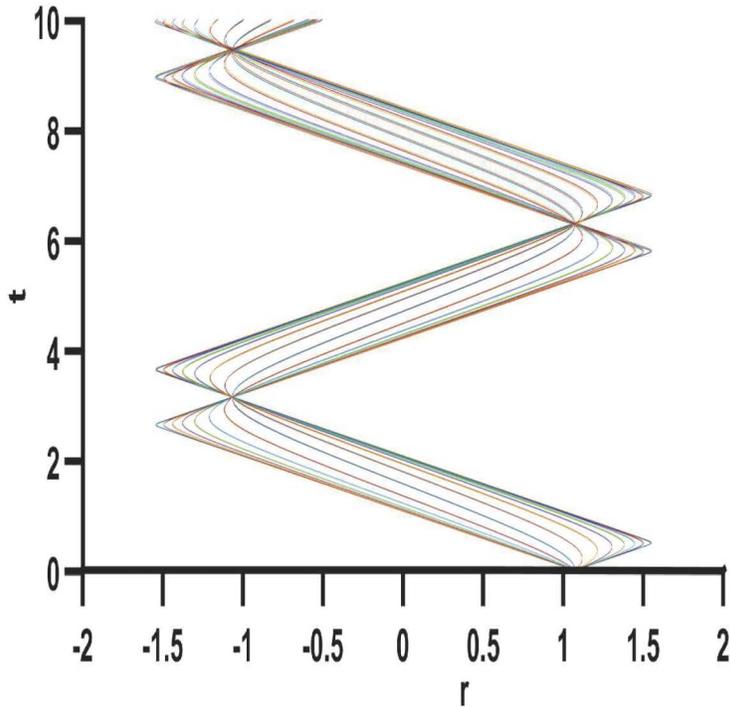
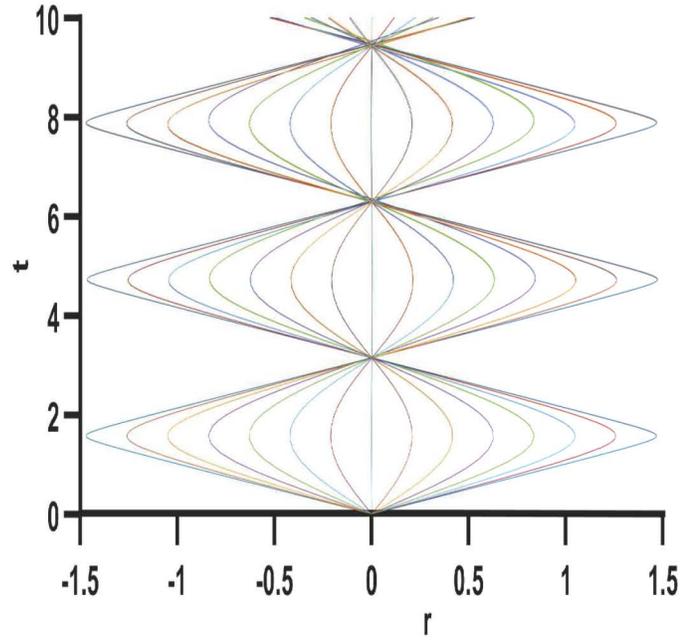
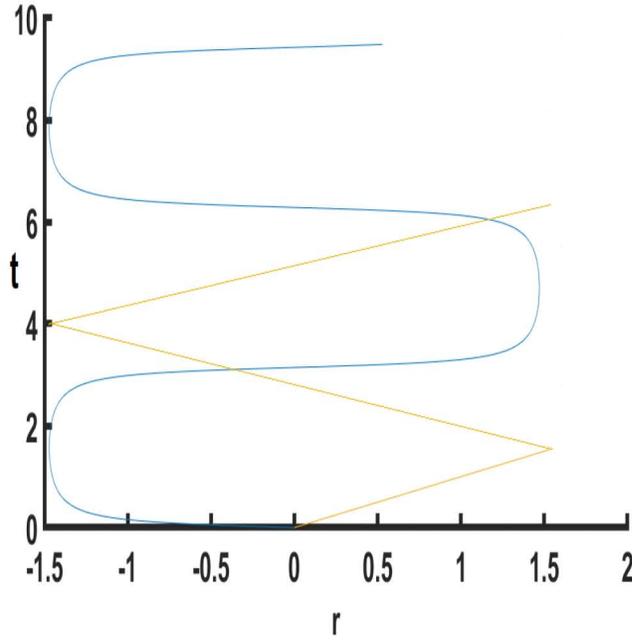


Figura 4: En estas Figuras se observan las **geodésicas nulas** tomando $\epsilon = 0$ en (3.56) en el plano $t - r$; la figura de la esquina superior izquierda se observa las geodésicas que salen del origen con la condición inicial $x(0) = y(0) = r(0) = 0$, son líneas rectas con $E = 4$, $p = 0$ y oscilan cuando $E = 4$, $p = 1$; la figura de la esquina superior derecha corresponde a valores aleatorios de $0 \leq p < E \leq 4$. La última figura corresponde a geodésicas nulas con la condición inicial $x(0) = y(0) = 0$, $r(0) = \frac{\pi}{2} - 0.5$, con los mismos valores aleatorios en los intervalos de E y p .

3.2. Simetrías del espacio-tiempo, el tensor de energía-momento y los campos

La peculiaridad de estas soluciones a las ecuaciones de Einstein es que poseen campos escalares que se extienden en todo el espacio-tiempo, en sentido de que $\phi = \lambda x$ no es acotado en toda la carta, lo mismo ocurre con $\psi = \lambda y$. También se puede observar que la métrica posee las simetrías, ya que por ser vectores de Killing se cumple que $\mathcal{L}_{(T)}g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{(X)}g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{(Y)}g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{(L)}g_{\mu\nu} = 0$, mientras que los campos escalares $\mathcal{L}_{(T)}\phi = \mathcal{L}_{(Y)}\phi = 0$, $\mathcal{L}_{(X)}\phi = \lambda$, $\mathcal{L}_{(L)}\phi = -y\lambda$. Análogamente para ψ se obtiene $\mathcal{L}_{(T)}\psi = \mathcal{L}_{(X)}\psi = 0$, $\mathcal{L}_{(Y)}\psi = \lambda$, $\mathcal{L}_{(L)}\psi = x\lambda$ es decir los campos no tienen las mismas simetrías en el sentido que la derivada de Lie de los campos escalares no es cero para todos los vectores de Killing de la métrica. Como se vió anteriormente el momento angular de las partículas se conserva L debido al teorema de Killing. Por otro lado, al usar (2.116) el tensor de energía-momento $\mathcal{L}_{(T)}T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{(X)}T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{(Y)}T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{(L)}T_{\mu\nu} = 0$ de esta manera la razón por las ecuaciones de campo se satisfacen es que la métrica y el tensor de energía momento tienen las mismas simetrías, mientras que los campos de materia no, lo que normalmente no lo haría soluciones físicas. Sin embargo como se estudiará posteriormente el $T_{\mu\nu}$ cumple con las condiciones de energía que se suele pedir para que las fuentes de materia no tengan densidad de energía negativa o que la misma sea infinita. También es posible pensar que la métrica posea más simetrías de las que se asumió al inicio. Para ello se ideó un algoritmo que usa la definición de vector de Killing (2.120). Es decir, si partimos de una expresión general para un vector de Killing como:

$$\mathcal{E}_\nu = \{T(t, r, x, y), R(t, r, x, y), X(t, r, x, y), Y(t, r, x, y)\}. \quad (3.61)$$

Después de usar (3.61) y se exige que cumpla con la definición de vector de Killing (2.120). Se puede obtener un sistema de ecuaciones descrito en el Apéndice C, que reduce la dependencia en las coordenadas de cada entrada de (3.61). Al aplicar iterativamente en el vector anterior se llega a que el vector de Killing más general es:

$$\mathcal{E}_\nu = \{C, 0, D - Ay, E + Ax\}, \quad (3.62)$$

Con A, C, D, E constantes correspondiente a una combinación lineal de los 4 vectores de Killing asociados a la métrica (3.35), es decir $\mathcal{E}_\nu = CT + DX + EY + AL$. De acuerdo a la referencia [30], el número máximo de isometrías de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones es 10, correspondiente al mismo número de vectores Killing independientes. En vacío tales espacios-tiempo máximamente simétricos tienen escalar de Ricci R constante. Según el signo de R , hay tres posibilidades; espacio-tiempo de Minkowski, $R = 0$, espacio-tiempo de *de Sitter*, $R > 0$ y espacio-tiempo *anti-de Sitter* $R < 0$. Estos tiempos espaciales son las únicas soluciones en vacío de las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica.

El escalar de Ricci en este trabajo es $R = 2\Lambda$, por consiguiente, se obtuvo otra solución a las ecuaciones de Einstein, en la teoría de Relatividad General con constante cosmológica negativa, con escalares de curvatura constantes pero no es maximalmente simétrica como anti-de Sitter.

3.3. Condiciones de Energía del espacio tiempo con campos escalares, constante cosmológica negativa y direcciones planas

A veces se puede considerar las ecuaciones de Einstein sin especificar o pedir las condiciones para obtener el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Esto deja una gran arbitrariedad, ya que si se considera una situación en la que se busca una métrica que resuelva las ecuaciones de Einstein, sin pedir constricciones sobre $T_{\mu\nu}$, se puede encontrar infinitos espacios-tiempo que las resuelvan. Simplemente se considera una métrica, se calcula el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, y se exige que sean iguales a $T_{\mu\nu}$. Sin embargo, las soluciones normalmente se enfocan en fuentes “realistas”. Con estas circunstancias es conveniente imponer *condiciones de energía* que limiten la arbitrariedad de $T_{\mu\nu}$. Las condiciones de energía son restricciones invariantes de las coordenadas. Entonces se construyen escalares, lo cual se puede cumplir contrayendo con vectores temporaloides o nulos. Las condiciones de energía son las siguientes

- La **Condición de Energía Débil** (*WEC*), establece que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ para todo vector temporal t^μ .
- La **Condición de Energía Nula** (*NEC*) establece que $T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \geq 0$, para todos los vectores nulos n^μ .
- La **Condición de Energía Dominante** (*DEC*), la cual incluye a WEC, establece que para todo vector temporaloide t^μ que apunta al futuro se cumple que $T^{\mu\nu}t_\mu$ o equivalentemente $-T^\nu_\beta t^\beta$ apunta al futuro y no es un vector de tipo espacialoide (sabiendo que $T_{\mu\nu}T^\nu_\beta t^\mu t^\beta \leq 0$).
- La **Condición de Energía Fuerte** (*SEC*) establece que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T^\beta_\beta t^\alpha t_\alpha$, para todos los vectores de tipo temporal t^μ .

El tensor de energía-momento es

$$T_{\mu\nu} = \lambda^2 f(r) (\delta_\mu^t \delta_\nu^t - \delta_\mu^r \delta_\nu^r). \quad (3.63)$$

Para ver que se conserva se usa que

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu T^{\nu\alpha} + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T^{\mu\alpha}$$

De los símbolos de Christoffel del Apéndice (A.3) y debido a que $T^{\mu\nu}$ sólo depende de r , lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{\mu\nu} &= \Gamma_{tt}^r T^{tt} + \Gamma_{tr}^t T^{rr} + \partial_r T^{rr} + \Gamma_{rr}^r T^{rr} + \Gamma_{rr}^r T^{rr} \\ &= \frac{\lambda^2 f(r)'}{2 f(r)^2} - \frac{\lambda^2 f(r)'}{2 f(r)^2} + \lambda^2 \frac{f(r)'}{f(r)} - \lambda^2 \frac{f(r)'}{f(r)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto el tensor de energía-momento se conserva. Al calcular la densidad de energía de los campos escalares, considerando en esta teoría, sin pérdida de generalidad, se puede considerar un vector temporaloide o nulo tomando $\epsilon = 1$ o 0 respectivamente en su norma (3.46). Así el vector $u^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{x}, \dot{y})$ cumple con

$$\begin{aligned} \rho &= T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \\ &= \lambda^2 f(r) (\dot{t}^2 - \dot{r}^2) \end{aligned}$$

por otro lado de (3.47)

$$f(r) (\dot{t}^2 - \dot{r}^2) = \epsilon + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0. \quad (3.64)$$

al considerar la desigualdad anterior, se sigue que

$$\rho = \lambda^2 (\epsilon + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) > 0, \quad (3.65)$$

por lo tanto, la **densidad de energía es positiva y finita** aunque los campos divergen conforme aumentamos en las coordenadas. Nótese que a pesar de que el espacio-tiempo tiene simetrías inusuales junto con el tensor de energía-momento, la densidad de energía no es negativa como es el caso para las soluciones a las ecuaciones de Einstein en vacío llamadas “agujeros de gusano” [31] y la densidad tampoco es infinita, lo cual las hace soluciones con una fuente de materia sensata. Así pues al escoger vectores temporaloides t^μ , es decir $\epsilon = 1$ en (3.65) se cumple la condición de energía débil *WEC*. Un resultado similar para vectores nulos n^μ , con la elección de $\epsilon = 0$ en (3.65) por consiguiente se cumple la condición de energía nula *NEC*.

Sea un vector temporaloide t^β que apunta al futuro, es decir $\dot{t} > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
J^\nu &= -T_\beta^\nu t^\beta \\
&= -\lambda^2 f(r) (g^{\nu t} \delta_\beta^t - g^{\nu r} \delta_\beta^r) t^\beta \\
&= -\lambda^2 f(r) (g^{\nu t} \dot{t} - g^{\nu r} \dot{r}) ,
\end{aligned} \tag{3.66}$$

el cual apunta al futuro ya que $J^t = \lambda^2 \dot{t} > 0$. De la condición de energía *DEC*

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} T_\beta^\nu t^\mu t^\beta &= \lambda^2 f(r) (\delta_\nu^t \dot{t} - \delta_\nu^r \dot{r}) \lambda^2 f(r) (g^{\nu t} \dot{t} - g^{\nu r} \dot{r}) \\
&= \lambda^4 f(r)^2 \left(-\frac{1}{f(r)} \dot{t}^2 + \frac{1}{f(r)} \dot{r}^2 \right) \\
&= -\lambda^4 f(r) (\dot{t}^2 - \dot{r}^2) \\
&< 0
\end{aligned} \tag{3.67}$$

La última desigualdad se sigue de (3.65). Por lo tanto, para un observador en una curva temporaloide o nula observará que densidad de corriente se conserva, y por lo tanto la energía no fluye más rápido que la luz. Es decir se cumple la condición de energía dominante *DEC*.

Finalmente la condición de energía fuerte estipula que para cada campo de vectorial temporaloide t^μ , la traza del tensor de energía-momento medida por los observadores correspondientes siempre es no negativa.

Del tensor (3.63)

$$\begin{aligned}
T_\mu^\mu &= \lambda^2 f(r) g^{\mu t} \delta_\mu^t - \lambda^2 f(r) g^{\mu r} \delta_\mu^r \\
&= -2\lambda^2 ,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) t^\mu t^\nu &= \rho - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\
&\geq 0 .
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Es decir, notamos que el espacio tiempo (3.35) cumple con que no existen presiones negativas comparables en magnitud o mas grandes que la densidad de energía. La condición de energía fuerte es un tema de mucha discusión. Por ejemplo algunas teorías con un campo escalar acoplado mínimamente, viola la *SEC*, de hecho, las teorías de campo escalar acopladas por curvatura también violan la *SEC*. Con los datos observacionales recientes respecto al universo acelerado, la *SEC* se viola en escalas cosmológicas ahora mismo según la referencia [32]. Por estas razones se considera que no es una buena guía al momento de buscar fuentes de materia físicamente razonables [20].

4. CONCLUSIONES

En la teoría de la Relatividad General se incorpora la idea en la que el espacio-tiempo es dinámico y pasa a ser afectado por la presencia de materia que hay en él, pero a su vez las partículas libres son afectadas al seguir las líneas más rectas posibles en este espacio-tiempo curvo. Esta teoría ha tenido mucho éxito en su verificación experimental.

Adolfo Cisterna y *Julio Oliva* estudiaron las llamadas *Black Strings* [22] las cuales son soluciones tipo agujero negro en dimensiones mayores a 4, que mediante el uso de campos escalares y separación de la métrica en direcciones planas se logra obtener una solución a las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica negativa.

En la búsqueda de una solución a las ecuaciones de campo de Einstein en 4 dimensiones, con campos escalares de Klein-Gordon sin masa, y con constante cosmológica, en la expresión (2.98); se pueden obtener mediante el uso de un vector de Killing temporal T , 3 Killings espaciales, X, Y, L (3.6); pero, se debe usar el truco adicional de elegir una constante cosmológica negativa, así como un ansatz como en (3.21), (3.22), en los campos escalares como lo sugiere la referencia [22], en la que se motivó este trabajo.

Al estudiar algunos de los escalares de curvatura de este espacio-tiempo en (3.36), se encontró que son constantes, por lo tanto, el espacio-tiempo (3.35) no posee singularidad en la geometría del espacio-tiempo. Adicionalmente se puede concluir que la distancia física para una trayectoria a lo largo de la coordenada r es infinita, donde esta coordenada no se refiere a una coordenada radial. Por consecuencia y para propósito de este trabajo no fué necesario aplicar una extensión de Kruskal.

El análisis de las cantidades conservadas muestra que las partículas libres en este espacio-tiempo se mantienen en un pozo de potencial. Así pues con la elección de coordenadas dadas por los Killings, las geodésicas nulas oscilan en un intervalo en la coordenada r como se puede apreciar en las Figura 4, y justo cuando se elige una condición inicial en un punto cercano a la frontera de r , por ejemplo $r(0) = \frac{\pi}{2} - 0.5$ las geodésicas se mantendrán dentro del pozo de potencial de ancho máximo como se muestra en la Figura 4.

También en (3.50) se observa que la energía solo depende del momento lineal total p en las coordenadas planas, y no depende del momento angular L asociado a la simetría dada por la rotación L^μ , esto se debe a que en las direcciones planas de la métrica se tiene mucha simetrías y no existe un punto especial respecto al cual se pueda definir un momento angular L , por consiguiente las únicas cantidades conservadas útiles para definir la energía E son los momentos lineales p_x, p_y .

Lo anterior se debe a que la elección muy particular de los campos escalares y la constante cosmológica, permiten que la métrica del espacio-tiempo y el tensor de energía-momento posean las simetrías dadas por los vectores de Killing (3.6), sin embargo, la característica peculiar de estas soluciones es que los campos de Klein-Gordon no poseen la misma simetría que la métrica. Adicionalmente estas soluciones no son físicamente realistas por varias razones, la primera es que la elección de $f(r)$ o $h(r)$ en la ecuación (3.27) es totalmente arbitraria si λ está dado por (3.28) la segunda es que es una solución inestable; es decir, ante cualquier perturbación las componentes de la métrica dependerán de todas las demás coordenadas, y la tercera es que no se tiene una situación física que permita escoger $h(r)$ o $f(r)$. No obstante son una solución a las ecuaciones de Einstein, en la teoría de Relatividad General con constante cosmológica negativa, escalar de Ricci constante y negativo que no es maximalmente simétrico como el espacio-tiempo de anti-de Sitter.

Otra razón por la que estas soluciones se estudian, es que a pesar de que los campos de materia se extienden en todo el espacio y tienen simetrías inusuales descritas anteriormente, la densidad de energía es finita como lo expresa (3.65). Además es positiva a diferencia de soluciones exóticas como los agujeros de gusano, que son soluciones a las ecuaciones de Einstein en vacío y con densidad de energía negativa [31]. Más aún los campos escalares son una fuente de materia sensata al cumplir con todas las condiciones de energía, en particular, para un observador en una curva temporaloide observará que la corriente de energía se conserva, y por lo tanto la energía no fluye más rápido que la luz, adicionalmente no existen presiones mas grandes en magnitud que la densidad de energía.

A. CÁLCULO DE TENSORES DE CURVATURA

El tensor de Riemann es

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = -\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\rho\mu}^{\alpha}\Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma}. \quad (\text{A.1})$$

Se usa la métrica (3.35) y se supone de inicio que $f(r) = h(r)$ en la métrica (3.10). Los los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{\mu\nu}^t = \frac{1}{2} \frac{d \ln f}{dr} (\delta_{\mu}^r \delta_{\nu}^t + \delta_{\nu}^r \delta_{\mu}^t) \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^r = \frac{1}{2} \frac{d \ln f}{dr} (\delta_{\mu}^r \delta_{\nu}^r + \delta_{\nu}^t \delta_{\mu}^t). \quad (\text{A.3})$$

Por lo tanto, la componente $\sigma = t$, $\mu = r$ del tensor de Riemann es

$$R_{r\nu\rho}{}^t = -\partial_r \Gamma_{\nu\rho}^t + \partial_{\nu} \Gamma_{r\rho}^t + \Gamma_{\rho r}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^t - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} \Gamma_{r\alpha}^t, \quad (\text{A.4})$$

Desarrollando se obtiene

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} (\delta_{\nu}^t \delta_{\rho}^r + \delta_{\nu}^r \delta_{\rho}^t) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} (\delta_{\nu}^r \delta_{\rho}^t) + \Gamma_{rr}^r \delta_{\rho}^r \Gamma_{tr}^t \delta_{\nu}^t + \Gamma_{tr}^t \delta_{\rho}^t \Gamma_{rt}^r \delta_{\nu}^r - \Gamma_{tr}^t \Gamma_{rt}^t (\delta_{\rho}^t \delta_{\nu}^r + \delta_{\rho}^r \delta_{\nu}^t). \quad (\text{A.5})$$

Finalmente se llega a la forma

$$R_{r\nu\rho}{}^t = \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} - \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} \right) \delta_{\nu}^t \delta_{\rho}^r = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} \delta_{\nu}^t \delta_{\rho}^r, \quad (\text{A.6})$$

Ahora se calcula la componente $\sigma = t$, $\mu = t$

$$R_{t\nu\rho}{}^t = \delta_{\nu}^r \delta_{\rho}^r \partial_r \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{tr}^t \delta_{\rho}^t \delta_{\nu}^t + \Gamma_{rt}^t \Gamma_{rt}^r \delta_{\rho}^r \delta_{\nu}^r - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{tr}^t \delta_{\rho}^t \delta_{\nu}^t - \Gamma_{rr}^r \Gamma_{tr}^t \delta_{\rho}^r \delta_{\nu}^r. \quad (\text{A.7})$$

$$= \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} - \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} \right) \delta_{\rho}^r \delta_{\nu}^r = \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} \delta_{\rho}^r \delta_{\nu}^r. \quad (\text{A.8})$$

Con las componentes $\sigma = r$, $\mu = r$, con los símbolos de Christoffel (3.12)

$$R_{r\nu\rho}{}^r = -\partial_r \Gamma_{\nu\rho}^r + \partial_{\nu} \Gamma_{r\rho}^r + \Gamma_{\rho r}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^r - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} \Gamma_{r\alpha}^r - \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} \delta_{\nu}^r \delta_{\rho}^r + \Gamma_{\nu\rho}^r, \quad (\text{A.9})$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} \delta_{\nu}^r \delta_{\rho}^r + \frac{d^2 \ln f}{dr^2} \delta_{\nu}^t \delta_{\rho}^t + \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r \delta_{\rho}^r \delta_{\nu}^r + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^t \delta_{\rho}^t \delta_{\nu}^t - \Gamma_{rr}^r \Gamma_{rr}^r \delta_{\rho}^r \delta_{\nu}^r - \Gamma_{tt}^t \Gamma_{rr}^r \delta_{\rho}^t \delta_{\nu}^t. \quad (\text{A.10})$$

Simplificando los términos se obtiene

$$R_{r\nu\rho}{}^r = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} - \frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} \delta_{\rho}^t \delta_{\nu}^t = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} \delta_{\nu}^t \delta_{\rho}^t. \quad (\text{A.11})$$

Para las componentes $\mu = x$

$$R_{x\nu\rho}{}^{\sigma} = -\partial_x \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \partial_{\nu} \Gamma_{x\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\rho x}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} \Gamma_{x\alpha}^{\sigma} = 0, \quad (\text{A.12})$$

Similarmente para $\mu = y$

$$R_{y\nu\rho}{}^{\sigma} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Contrayendo los índices se calculan las componentes del tensor de curvatura de Ricci

$$R_{tt} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2}. \quad (\text{A.14})$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \ln f}{dr^2}. \quad (\text{A.15})$$

Y el escalar de Ricci:

$$R = -\frac{1}{f} \frac{d^2 \ln f}{dr^2}. \quad (\text{A.16})$$

B. SOLUCIÓN A $f(r)$

Del tensor (3.27) para las componentes $\mu = x, \nu = x$. Se obtiene la ecuación diferencial para $f(r)$

$$\Lambda + \frac{1}{2f(r)} \frac{d^2 \ln f}{dr^2} = 0. \quad (\text{B.1})$$

Se desarrolla, para obtener

$$\frac{-f'^2(r) + f(r)f''(r)}{2f(r)^3} + \Lambda = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{2\Lambda f^3(r) - f'^2(r) + f(r)f''(r)}{2f(r)^3} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Si se supone que $f(r)$ no es cero para todos los valores de r

$$2\Lambda f^3(r) - f'^2(r) + f(r)f''(r) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Si se toma a f como una variable independiente

$$v(f) = \frac{df}{dr}. \quad (\text{B.5})$$

Notamos que se puede escribir

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{df(r)}{dr} \right) = \frac{dv(f)}{dr} = \frac{dv(f)}{df} \frac{df}{dr} = v(f) \frac{dv(f)}{df}. \quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo (B.5), (B.6) en (B.4):

$$2\Lambda f^3 - v(f)^2 + f \frac{dv(f)}{df} v(f) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Restando $2\Lambda f^3$ y dividiendo por $\frac{f}{2}$ en (B.7).

$$2 \frac{dv(f)}{df} v(f) - 2 \frac{v(f)^2}{f} = -4\Lambda f^2. \quad (\text{B.8})$$

Mediante otro cambio de variable $u(f) = v(f)^2$ se obtiene

$$\frac{du(f)}{df} = 2v(f) \frac{dv(f)}{df}, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{du(f)}{df} - \frac{2u(f)}{f} = -4\Lambda f^2. \quad (\text{B.10})$$

Con el factor integrante:

$$\mu(f) = e^{\int \frac{-2}{f} df} = \frac{1}{f^2}. \quad (\text{B.11})$$

Multiplicando a ambos lados por μ en (B.10)

$$\frac{du(f)}{df} \frac{1}{f^2} - \frac{2u(f)}{f^3} = -4\Lambda. \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{-2}{f^3} = \frac{d}{df} \left(\frac{1}{f^2} \right). \quad (\text{B.13})$$

Sustituyendo (B.13) en (B.12) obtiene y ya que $|\Lambda| = -\Lambda$ se sigue

$$\frac{du(f)}{df} \frac{1}{f^2} + \frac{d}{df} \left(\frac{1}{f^2} \right) u(f) = 4|\Lambda|, \quad (\text{B.14})$$

Usando regla de Leibniz

$$\frac{d}{df} \left(\frac{u(f)}{f^2} \right) = 4|\Lambda|. \quad (\text{B.15})$$

Se integra

$$\int \frac{d}{df} \left(\frac{u(f)}{f^2} \right) df = \int 4|\Lambda| df. \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{u(f)}{f^2} = 4|\Lambda|f + C_1. \quad (\text{B.17})$$

Por lo tanto

$$u(f) = f^2 (4|\Lambda|f + C_1). \quad (\text{B.18})$$

Ya que $u(f) = v(f)^2$

$$v(f) = \sqrt{f^2 (4|\Lambda|f + C_1)}. \quad (\text{B.19})$$

Se regresa a las variables originales $\frac{df(x)}{dx} = v(f)$

$$\frac{df(r)}{dr} = \sqrt{f^2(r) (4|\Lambda|f(r) + C_1)}. \quad (\text{B.20})$$

Se integra nuevamente

$$\int \frac{\frac{df(r)}{dr}}{f(r)\sqrt{4|\Lambda|f(r) + C_1}} dr = \int -dr. \quad (\text{B.21})$$

Por consiguiente se puede simplificar a

$$-2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{4|\Lambda|f(r) + C_1}}{\sqrt{C_1}} \right) \sqrt{C_1} = -r - C_2. \quad (\text{B.22})$$

Se despeja para $f(r)$, para obtener

$$f(r) = \frac{C_1}{4|\Lambda|} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{C_1} (r + C_2) \right) \right]. \quad (\text{B.23})$$

Se obtiene la forma funcional de f mas general. Con C_1, C_2 constantes $\in \mathbb{R}$

$$f(r) = \frac{C_1}{4|\Lambda|} \left[\operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{C_1} (r + C_2) \right) \right]. \quad (\text{B.24})$$

Ya que en este trabajo específicamente se usa una variedad real, y la función $f(r)$ tiene periodo $i\pi$

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}^2(r + i\pi) &= \frac{4}{(e^{-r+i\pi} + e^{r+i\pi})^2} \\ &= \frac{4}{(-1)^2 (e^{-r} + e^r)^2} \\ &= \operatorname{sech}^2(r), \end{aligned}$$

es decir, es en realidad una función secante con variable imaginaria, $\operatorname{sech}^2(r) = \sec^2(ir)$. Se debe trabajar con $\sec^2(r)$ una función de variable en \mathbb{R} . Finalmente se obtiene la forma funcional de $f(r)$ más general es

$$f(r) = \frac{C_1}{4|\Lambda|} \left[\sec^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{C_1} (r + C_2) \right) \right], \quad (\text{B.25})$$

con C_1, C_2 constantes de integración cuyo valor se escoge en el capítulo 3.

C. ALGORITMO PARA ENCONTRAR TODOS LOS VECTORES DE KILLING

En general se pueden estudiar si los Killings anteriormente encontrados son todos. Si partimos de una expresión general para un vector de Killing como:

$$\mathcal{E}_\nu = \{T(t, r, x, y), R(t, r, x, y), X(r, x, y, t), Y(t, r, x, y)\}. \quad (\text{C.1})$$

Se inserta (C.1) en la definición de vector de Killing (2.120) y se usa la métrica (3.35). Al aplicarlo una de las muchas entradas obtiene que $(\dots, 2\partial_x(X[r, x, y, t]), \dots, 2\partial_y(Y[r, x, y, t]), \dots) = \vec{0}$ Por lo tanto se debe exigir que

$$\frac{\partial X[t, r, x, y]}{\partial x} = 0, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial Y[t, r, x, y]}{\partial y} = 0. \quad (\text{C.3})$$

Por lo tanto X es solo función de t, r, y y Y solo depende de t, r, x . Pero no se obtiene una condición sobre R y T . Por lo tanto, el nuevo vector de Killing es.

$$\mathcal{E}_\nu = \{T(t, r, x, y), R(t, r, x, y), X(r, y, t), Y(r, x, t)\}. \quad (\text{C.4})$$

Se inserta de nuevo este último en la definición (2.120). Es decir, en una segunda iteración se debe exigir que

$$\frac{\partial X[t, r, y]}{\partial y} + \frac{\partial Y[t, r, x]}{\partial x} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Entonces la forma funcional de X y Y es

$$X = X[t, r] + Ay. \quad (\text{C.6})$$

$$Y = Y[t, r] - Ax. \quad (\text{C.7})$$

Y por lo tanto el nuevo Killing es.

$$\mathcal{E}_\nu = \{T[t, r, x, y], R[t, r, x, y], X[t, r] + Ay, Y[t, r] - Ax\}. \quad (\text{C.8})$$

De nuevo se hace otra iteración insertando en (2.120) se obtiene la condición

$$\frac{\partial R[t, r, x, y]}{\partial t} - \frac{\partial T[t, r, x, y]}{\partial r} = 0. \quad (\text{C.9})$$

De la ecuación anterior C.9

$$R = R[r, x, y] + Bt \quad (\text{C.10})$$

$$T = T[x, y, t] + Br \quad (\text{C.11})$$

Nuevamente el Killing es

$$\mathcal{E}_\nu = \{T[x, y, t] + Br, R[r, x, y] + Bt, X[t, r] + Ay, Y[t, r] - Ax\}. \quad (\text{C.12})$$

Se usa el algoritmo de insertar nuevamente en (2.120) e imponer nuevas condiciones para encontrar la dependencia en las entradas del vector de Killing. Obteniéndose así en otra iteración que se debe exigir que

$$B = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$T = T[x, y] \quad (\text{C.14})$$

$$R = 0 \quad (\text{C.15})$$

En otra iteración:

$$X = D[t] - Ay \quad (\text{C.16})$$

$$Y = E[t] + Ax \quad (\text{C.17})$$

Finalmente se puede obtener que:

$$X = D - Ay \quad (\text{C.18})$$

$$Y = E + Ax \tag{C.19}$$

$$T = C \tag{C.20}$$

Por lo tanto, la forma más general de los vectores de Killing es:

$$\mathcal{E}_\nu = \{C, 0, D - Ay, E + Ax\} \tag{C.21}$$

Lo anterior corresponde a una combinación lineal de los vectores de Killing, es decir $\mathcal{E}_\nu = CT + DX + EY + AL$.

REFERENCIAS

- [1] James Burkett Hartle. Gravity: An introduction to einstein's general relativity, 2003.
- [2] Yuri Bonder y Elías Okon. Los principios de la relatividad: una introducción pedagógica. *Revista mexicana de física E*, 64(1):pp.87–91, 2018.
- [3] James Clerk Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (155):pp.459–512, 1865.
- [4] Albert Michelson and Edward Morley. On the relative motion of the earth and of the luminiferous ether. *Sidereal Messenger*, 6:pp.306–310, 1887.
- [5] Albert Einstein. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der Physik*, 17(891):50, 1905.
- [6] Sascha Reinhardt, Guido Saathoff, Henrik Buhr, Lars A Carlson, Andreas Wolf, Dirk Schwalm, Sergei Karpuk, Christian Novotny, Gerhard Huber, Marcus Zimmermann, et al. Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities. *Nature Physics*, 3(12):861, 2007.
- [7] Sebastien Bize Peter Wolf, Frederic Chapelet. Cold atom clock test of lorentz invariance in the matter sector. *Physical review letters*, vol 96(num. 6):pp. 80, 2006.
- [8] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 2004.
- [9] Yu N Avsyuk. On the tidal force. *Soviet Astronomy Letters*, 3:96–99, 1977.
- [10] John A Wheeler. A journey into gravity and spacetime. *Scientific American Library, New York: WH Freeman, 1990*, 1990.
- [11] Holger Müller, Achim Peters, and Steven Chu. A precision measurement of the gravitational redshift by the interference of matter waves. *Nature*, 463(7283):926, 2010.
- [12] Frank Watson Dyson, Arthur Stanley Eddington, and C Davidson. Ix. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333, 1920.
- [13] BP Abbott, S Jawahar, NA Lockerbie, and KV Tokmakov. Ligo scientific collaboration and virgo collaboration (2016) GW150914: first results from the search for binary black hole coalescence with advanced ligo. physical review d, 93 (12). issn 1550-2368. *Physical Review D*, 93:122003, 2016.
- [14] Kazunori Akiyama, Antxon Alberdi, Walter Alef, Keiichi Asada, Rebecca Azulay, Anne-Kathrin Baczko, David Ball, Mislav Baloković, John Barrett, Dan Bintley, et al. First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L4, 2019.
- [15] George Gamow. My world line: An informal autobiography. *My world line: An informal autobiography., by Gamow, G.. New York, NY (USA): Viking Press, 178 p.*, 1970.
- [16] Alexei V Filippenko. Einstein's biggest blunder? high-redshift supernovae and the accelerating universe. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 113(790):1441, 2001.
- [17] Ralph A Alpher and Robert Herman. Evolution of the universe. *Nature*, 162(4124):774, 1948.
- [18] Edward W Kolb and Michael S Turner. The pocket cosmology. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 15(1-4):125–132, 2000.
- [19] Luis De la Peña and Ana María Cetto. *The quantum dice: an introduction to stochastic electrodynamics*, volume 75. Springer Science & Business Media, 2013.
- [20] Kayll Lake and Majd Abdelqader. More on mcvittie's legacy: A schwarzschild–de sitter black and white hole embedded in an asymptotically $\Lambda - CDM$ cosmology. *Physical Review D*, 84(4):044045, 2011.
- [21] Robert M Wald. General relativity(book). *Chicago, University of Chicago Press, 1984, 504 p*, 1984.

- [22] Adolfo Cisterna and Julio Oliva. Exact black strings and p-branes in general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 35(3):035012, 2018.
- [23] Barrett O’neill. *Elementary differential geometry*. Elsevier, 2006.
- [24] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [25] Andrew H Wallace. *Differential topology: First steps*. Courier Corporation, 2006.
- [26] Juan Nieto and Rodríguez-López. Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations. *Springer: Acta Mathematica Sinica, English Series, vol 23, num. 12, pp. 2205–2212, 2007*, 23(12):2205–2212, 2007.
- [27] Cesar Lopez. *MATLAB Differential Equations*. Apress, 2014.
- [28] Rickard M Jonsson. Visualizing curved spacetime. *American journal of physics*, 73(3):248–260, 2005.
- [29] Lawrence F Shampine, Jacek Kierzenka, and Mark W Reichelt. Solving boundary value problems for ordinary differential equations in matlab with bvp4c. *Tutorial notes*, 2000:1–27, 2000.
- [30] Jerry B Griffiths and Jiří Podolský. *Exact space-times in Einstein’s general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [31] Sergey Sushkov. Wormholes supported by a phantom energy. *Physical Review D*, 71(4):043520, 2005.
- [32] Matt Visser and Carlos Barcelo. Energy conditions and their cosmological implications. In *Cosmo-99*, pages pp.98–112. World Scientific, 2000.