UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN RESULTADO DICOTÓMICO EN LA TOPOLOGÍA DE ELLENTUCK

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

JUAN CARLOS MONTERO GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. OSVALDO ALFONSO TÉLLEZ NIETO

CIUDAD DE MÉXICO, 2019

Datos del alumno
Montero
García
Juan Carlos
5545586025
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
310554406

Datos del tutor
Dr. Osvaldo Alfonso
Téllez
Nieto

Datos del sinodal 1
Dr. David
Meza
Alcántara

Datos del sinodal 2
Dr. Fernando
Hernández
Hernández

Datos del sinodal 3
Dr. Rodrigo Jesús
Hernández
Gutiérrez

Datos del sinodal 4
M. en C. Fernando Javier
Nuñez
Rosales

Datos del trabajo escrito
Un resultado dicotómico en la topología de Ellentuck
70p
2019

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Osvaldo Alfonso Téllez Nieto por su dedicación en la dirección de este trabajo, su paciencia y sus enzeñanzas dentro del aula de clase, por mostrarme que la Teoría de los Conjuntos es hermosa.

A mis sinodales por cada una de sus valiosas aportaciones. Particularmente, al Dr. David Meza Alcántara por tomarse el tiempo de guiarme tanto, por darme nuevas perspectivas y disipar un sin fin de dudas, por su paciencia. Muchas gracias.

Al M. en C. Ernesto Alejandro Vázquez Navarro y al Mat. Gasde Augusto Hunedy López por que empezando la licenciatura, estaba dudoso de mi elección y fueron ellos quienes me reafirmaron que no pude haber tomado una mejor desición. Muchas gracias por sus enzeñanzas dentro y fuera del aula de clase.

A la Dra. Patricia Pellicer Covarrubias y al M. en C. Luis Antonio Paredes Rivas que me hicieron amar la topología.

A mis padres, Juan Carlos y Teresa, que siempre estuvierón para mí, que me dierón la gran oportunidad de llegar al punto donde estoy y día con día me impulsan y me apoyan para seguir adelante en mis proyectos. Gracias por hacer de mí la persona que soy, me siento pleno, feliz y todo es gracias a ustedes. Los quiero mucho.

A mi hermana Adriana por compartir tantas cosas conmigo, enseñarme

y ser una guia muy importante en mi vida, gracias.

A Princesa, mi perro, por estar conmigo siempre, en noches enteras de vela y llenarme de alegría aún cuando tenía dias malos.

A las personas con las que he tenido la oportunidad de compartir un poco de lo que soy y me han permitido formar parte de sus vidas; mis amigos de casi toda la vida, Xavier, Rafael, David, Carlos, Alejandro y Cristian, cada momento con ustedes ha sido muy valioso y pese a que ya no nos reunimos con tanta frecuencia la amistad continua por un pasatiempo que nos apasiona, jugar; a mis primeros amigos de la facultad, Ignacio, Lilia, Zilli y principalmente Sergio, con quien estuve la mayor parte de la carrera y también el juego nos unió; a Stefano, por siempre decirme que le echara ganas y dejarse encaminar en los vicios del juego; a Janette por enseñarme tantas cosas nuevas, pensamientos, lugares, películas, por apoyarme, escucharme y darme valiosas opiniones respecto a mis proyectos y compartir conmigo uno de los pasatiempos que más me apasiona; a Samuel por dejarme aprender de lo centrado que eres con tus valiosos consejos y tener partidas muy agradables conmigo; a Violeta por todos los ratos de risas y alegrarme con tu espontaneidad; a Tonal por ayudarme a instruirme en el mundo de la música y todas esas tardes de juego después de clases. A todos, muchas gracias.

Introducción

Este trabajo está dirigido para lectores interesados en la teoría de conjuntos, topología y combinatoria. El primer capítulo está dedicado a conceptos básicos y resultados fundamentales de los mismos, por lo que si el lector los tiene muy presentes puede omitir la lectura de ese capítulo. El objetivo principal de este trabajo es la demostración del teorema de Galvin-Prikry-Silver y un teorema de dicotomía en la topología de Ellentuck. Explicaremos brevemente a continuación de qué van estos teoremas.

En 1930, Frank Plumpton Ramsey, demostró que para cualquier coloración finita de los subconjuntos de cardinalidad n del conjunto de los números naturales, podemos encontrar un subconjunto infinito de ω homogéneo, es decir, que ese subconjunto este coloreado de un solo color. Este teorema es conocido como el teorema de Ramsey y tiene una gran relevancia pues el estudio de algunas de sus variaciones dieron lugar a una importante rama de la combinatoria, la teoría de particiones o también conocida como teoría tipo Ramsey.

La teoría tipo Ramsey se puede clasificar en finita e infinita, nosotros nos enfocaremos en la infinita, particularmente en conjuntos y particiones de tamaño ω, es decir, en elementos de $[\omega]^\omega$.

En el capítulo dos introducimos conceptos básicos de combinatoria, enfocados más hacia la teoría de Ramsey, como coloración, conjuntos homogéneos y conjuntos Ramsey en $[\omega]^\omega$.

El teorema de Galvin-Prikry-Silver enuncia que todo conjunto que es imagen continua del espacio de Baire, un subespacio de ω^ω (el conjunto de las función de ω en ω), es un conjunto Ramsey. Estos conjuntos son llamados conjuntos analíticos y esto nos dará noción de una estrecha relación entre los espacios ω^ω y $[\omega]^\omega$. Dedicaremos los capitulos tres y cuatro para la demostración de este teorema.

Mediante el orden de Mathias, dotaremos a $[\omega]^\omega$ con una topología conocida como la topología de Ellentuck. En esta topología definiremos conjuntos homogéneos, Ramsey y completamente Ramsey y estudiaremos muchas de sus propiedades, mientras que en el capítulo cuatro, enfatizaremos en conjuntos analíticos en y la operación de Suslin en ω^ω, está última, será la conexión entre los conjuntos analíticos y los conjuntos Ramsey.

Finalmente, el segundo resultado importante será presentado en el capítulo cinco, la demostración del teorema de dicotomía. El conjunto de los números reales como lo conocemos tiene la estructura topológica generada por los intervalos abiertos, intervalos de la forma (a, b). Sin embargo, si consideramos los intervalos semiabiertos $(a, b]$, estos también generan una topoogía para los números reales con propiedades bastante interesantes y diferentes a las que conocemos en la topología usual. El conjunto de los números reales con esta topología es llamado recta de Sorgenfrey debido al matemático americano Robert Henry Sorgenfrey.

El teorema de dicotomía enuncia que en la topología de Ellentuck, todo conjunto perfecto, aquél que no tiene puntos aislados, tiene una copia de la recta de Sorgenfrey o una copia de los números racionales. Este teorema no hace uso de los conceptos previos de conjuntos Ramsey y analíticos, es un resultado puramente topológico.

Índice general

Capítulo 1

Conceptos preliminares

A lo largo de este trabajo abordaremos temas de topología, teoría de conjuntos, análisis y combinatoria. Esta sección está dedicada a conceptos básicos y resultados fundamentales de dichas áreas, junto con un poco de historia sobre cómo surgieron y se formalizaron, por lo que si el lector está familiarizado con los mismos, puede omitir la lectura de este capítulo. Los datos históricos fueron obtenidos de [2] y [7].

1.1. Teoría de Conjuntos

Muchas áreas de la matemática a lo largo de la historia han aportado resultados muy importantes dentro del ámbito teórico como en el aplicado. Andréi Kolmogórov (1903-1987) decía que no había matemáticas aplicadas sino aplicaciones de las matemáticas. Varios de estos resultados son propios de cada rama mientras que otros relacionan una con otra. Sin importar el grado en el que se piense que estas ramas sean o no ajenas todas tienen un fundamento y es la teoría de los conjuntos la que se encarga de esta tarea.

La teoría de los conjuntos como la conocemos hoy en día se debe principalmente al matemático Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1919). Entre sus principales aportaciones destaca el cambio en la noción que se tenía de infinito. Cantor demuestra que existen infinitos más grandes que otros infinitos, el ejemplo por excelencia y más conocido de este hecho es que es imposible dar una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales.

Para la demostración de este hecho introduce los conceptos de cardinalidad y equipotencia, en su tarea va introduciendo más conceptos hasta que da una "definición"de lo que es un conjunto:

"Se entiende por conjunto a la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o nuestra mente"

Pese a sus aportaciones y a que su definición no levantó objeciones al momento de su publicación, muy pronto siguieron surgiendo problemas de fundamentación como el hablar del conjunto de todos los conjuntos. Fue esto lo que dió entrada a tratar de axiomatizar la teoría de los conjuntos. La primer axiomatización la dio Ernest Zermelo (1851-1953) en 1908 después de dar una prueba del Teorema del Buen Orden (1904). La demostración no fue muy aceptada debido a que utilizaba el axioma de elección y fue hasta 1922 en el que Adolf Fraenkel perfecciona el sistema axiomatico de Zermelo.

La axiomatica de Zermelo-Fraenkel (ZF) está compuesta por 7 axiomas y 2 esquemas: existencia, extensionalidad, par, potencia, unión, infinito, buena fundación, esquema de separación y esquema de reemplazo.

Kurt Gödel (1906-1978) lográ demostrar que el axioma de elección es logicamente independiente de los otros axiomas, por lo que la axiomatica de Zermelo-Fraenkel es comunmente enunciada como ZFC (La sigla C toma lugar por "Choice"). Los axiomas y esquemas del modelo de ZFC pueden consultarse en [1], [7] y [8].

Dados dos conjuntos X y Y se define el *producto cartesiano* $X \times Y$ como el conjunto de pares ordenados (a, b) tales que $a \in X$ y $y \in Y$. Si $r \subseteq X \times Y$ entonces diremos que r es una *relación*.

Al conjunto de los $x \in X$ para los cuales existe algún $y \in Y$ tal que el par $(x, y) \in r$ lo llamaremos *dominio de* r y lo denotaremos por $Dom(r)$. La *imagen de* r será el conjunto de los $y \in Y$ tales que existe algún $x \in X$ de tal manera que el par $(x, y) \in r$ y la denotaremos por $Im(r)$.

Una *función* f es una relación tal que para todo $x \in Dom(f)$ existe un único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$, escribiremos en este caso la relación de x con y bajo f como $f(x) = y$. Si el dominio de f es el conjunto X y la imagen es el conjunto Y, escribiremos $f : X \to Y$ para denotar que f es función de X en Y. Si la imagen de f es Y diremos que f es *suprayectiva* y si para cualesquiera $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tales que $x_1 \neq x_2$ sucede que $f(x_1) \neq f(x_2)$ entonces diremos que f es *inyectiva*. Si f es inyectiva y suprayectiva entonces diremos que f es *biyectiva*. Dado $U \subseteq Y$, definimos la *imagen inversa de* U como el conjunto de los $x \in X$ tales que $f(x) \in U$ y lo denotaremos por $f^{-1}[U]$. Similarmente, si $W \subseteq X$, definimos la *imagen directa de* W bajo f como el conjunto de los $y \in Y$ tales que existe un $x \in W$ para el cual $f(x) = y$ y lo denotaremos por $f[W]$.

Estaremos interesados en las relaciones binarias de un conjunto en sí mismo, es decir, en relaciones que son subconjuntos de $X \times X$ para algún conjunto X. Estas relaciones estan comunmente asociadas a un orden en el conjunto X.

Definición 1.1. Sea X un conjunto y r una relación sobre X.

- X es un conjunto *parcialmente ordenado* con respecto a r si la relación es *antirreflexiva*, es decir, para todo $x \in X$, (x, x) no pertenece a la relación, y además r es transitiva, esto es, para cualesquiera $x, y, z \in X$, si $(x, y) \in r$ y $(y, z) \in r$, entonces $(x, z) \in r$.

- Si para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple $(x, y) \in r$, $(y, x) \in r$ o $x = y$ y solo una, decimos que X es un conjunto con *tricotomía.*
- X es un conjunto *totalmente ordenado* si es parcialmente ordenado y tiene tricotomía. En este caso $\langle X, r\rangle$ será llamado orden total.
- X es un conjunto *bien ordenado* si es parcialmente ordenado y cualquier $U \subseteq X$ no vacío tiene elemnto mínimo, es decir, existe $x \in U$ tal que para todo $y \in U$ se tiene que $(x, y) \in r$ o $x = y$. En este caso $\langle X, r\rangle$ será llamado buen orden.

Si $\langle X, r\rangle$ es un orden total

- X es un conjunto *sin extremo derecho* si y solamente si para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in r$. Análogamente se define cuando X es un conjunto *sin extremo izquierdo.*
- X es un conjunto *denso* si para cualesquiera $x, y \in X$ con $(x, y) \in r$, existe $z \in X$ tal que $(x, z) \in r$ y $(z, y) \in r$.
- Si $Y \subseteq X$, decimos que Y es *acotado superiormente* si existe $x \in X$ tal que para todo $y \in Y$, $(y, x) \in r$ o $x = y$. Similarmente definimos cuando X es *acotado inferiormente.* Si Y satisface ambas diremos que Y es *acotado.*
- Si $Y \subseteq X$, diremos que Y tiene un *elemento máximo* $u \in Y$ si para todo $y \in Y$, $(y, u) \in r$ o $y = u$ y llamaremos a u el r-*máximo.* Análogamente se puede definir el r-*mínimo.*

Si tenemos $\langle X, r\rangle$ y $\langle Y, s\rangle$ dos ordenes totales, $f : X \to Y$ es in *isomorfismo de órdenes* si f es biyectiva y si para cualesquiera $x, y \in X$, $(x, y) \in r$ si y solamente si $(f(x), f(y)) \in s$. Diremos que $\langle X, r\rangle$ y $\langle Y, s\rangle$ son isomorfos y lo denotaremos por $\langle X, r\rangle \approx \langle Y, r\rangle$.

Un ejemplo de un orden total y de hecho un buen orden es el del conjunto de los números naturales. Definir a los números naturales nace de la nescesidad de establecer un concepto para identificar a los conjuntos de un elemento, a los de dos elementos, etc. Un *número natural* es un conjunto X bien ordenado con la pertenecia, que todo subconjunto de él tenga elemento máximo y además transitivo, esto es, si $y \in X$ entonces $y \subseteq X$. Al conjunto de los números naturales lo denotaremos por ω. Los números naturales identifican a los conjuntos con una cantidad finita de elemntos y es natural preguntarse si se puede hacer esta identificación con conjuntos infinitos sin importar que tan grandes sean. Los ordinales resultan ser la generalización de un número natural y nos ayudaran a ordenar y contar los elementos de un conjunto infinito, esto claro, con ayuda del axioma de elección aunque con un equivalente que es el teorema del buen orden.

Definición 1.2. Un *ordinal* es un conjunto transitivo, bien ordenado por la relación de pertenecia.

Por definición todo número natural es un ordinal. α será un ordinal sucesor si existe β ordinal tal que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$

Dados α y β dos ordinales diremos que $\alpha < \beta$ si y solamente si $\alpha \in \beta$. Cuando α sea el sucesor de β lo denotaremos $\alpha = \beta + 1$. Por otro lado, si α es distinto de vacío y no es un ordinal sucesor diremos que α es un ordinal límite. Se puede demostrar que α es un ordinal límite si y solamente si $\alpha = \bigcup \alpha$.

Dos resultados muy importantes referentes a ordinales son el teorema del mínimo ordinal y el teorema de enumeración. El primero nos dice que cualquier clase de ordinales no vacia tiene un elemento mínimo y el segundo que todo buen orden es isomorfo a un único ordinal. Los enunciados de estos teoremas con sus respectivas demostraciones pueden consultarse en [12].

El teorema del mínimo ordinal y el teorema de enumeración nos ayudan a dar una defición de lo que es un cardinal. Si X y Y son dos conjuntos diremos que X y Y son equipotentes o tienen la misma cardinalidad si existe una función biyectiva $f : X \to Y$. Esta definición nos dice cuando dos conjuntos tienen el mismo número de elementos, sin embargo, no nos dice lo que es un cardinal. Un conjunto X es finito si podemos biyectarlo con algún número natural. Si Y es equipotente a X también podremos biyectarlo con el mismo número natural. El número natural al que es biyectable sería la cardinalidad de esos conjuntos. En cambio si X es infinito, por el teorema del buen orden, X será un buen orden, luego por el teorema de enumeración X será isomorfo a un único ordinal. Si consideramos la clase de todos los ordinales que son biyectables con X el teorema del mínimo ordinal nos garantiza que existe un mínimo ordinal al que X es biyectable y definimos a este como el cardinal de X.

Definición 1.3. Un *cardinal* es un ordinal que no es biyectable con ningún ordinal menor que él.

Para finalizar esta sección daremos la generalizacíın del principio de inducción y el teorema de recursión para ordinales.

- *Principio de inducción ordinal*

  Sea ϕ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con n variables libres. Si para cada ordinal α, el que β satisfaga ϕ para todo $\beta < \alpha$ implica que α satisfaga ϕ, entonces todo ordinal satisface ϕ.

- *Teorema de recursión transfinita*

Sean G y H funcionales del universo y X un conjunto. Entonces podemos definir un único funcional F tal que el dominio de F es la clase de los ordinales, $F(0) = X$, $F(s(\alpha)) = G(F(\alpha))$ y $F(\gamma) = H(F[\gamma])$ con γ ordinal límite.

1.2. Análisis y Topología

La topología tiene sus origenes en la geometría, es comunmente llamada la geometría de la distorción. Estudia propiedades fundamentales que quedan inalteradas cuando estiramos, torcemos o cambiamos el tamaño y forma de un objeto, sin romperlo. Para ilustrar lo dicho, suele decirse que una dona y una taza son topológicamente equivalentes; si pensamos a la dona hecha de plastilina, podemos moldearla y manipularla hasta obtener un objeto similar a una taza sin tener que romper la plastilina en el proceso. A esta deformacón la llamaremos transformación continua, uno de los tantos conceptos que estudia la topología.

Nikolai Lovachevski (1792-1856) decía lo siguiente referente a cuerpos geométricos:

"La adyacencia es una propiedad distintiva de los cuerpos que permite llamarlos geométricos, cuando se retiene esta propiedad y se hace abstracción de todas las demás, sean esenciales o accidentales".

"Dos cuerpos A y B que se tocan entre sí forman un único cuerpo geométrico C. Inversamente, todo cuerpo C se puede dividir mediante una sección arbitraria S en dos partes A y B".

Los conceptos de adyacencia, vecindad y lo infinitamente aproximable son lo que Lovachevski coloca como base de toda estructura geométrica, sin embargo, ya estaba definiendo la esencia y algunos conceptos fundamentales de la topología.

En 1752, el matemático suizo Leonard Paul Euler (1707-1783) demostró un teorema que relaciona los vértices, aristas y caras de un poliedro regular:

$$V - A + C = 2$$

donde V es el número de vértices, A es el número de aristas y C es el número de caras. Este resultado geométrico es puramente topológico ya que las relaciones de adyacencia entre los vértices, aristas y caras que determinan la ecuación, no se ven alteradas si deformamos el poliedro bajo transformaciones continuas y más aún, si el poliedro lo pensamos como una gráfica plana, dependiendo de en donde dibujemos la gráfica, digamos en el plano euclidiano o en una dona, la ecuación puede o no satisfacerse. El enunciado y demostración del teorema de Euler puede consultarse en [3] y [5]

A partir de esto y de algunos conceptos que introduce Cantor como los de conjunto cerrado o conjunto denso se inicia un constante esfuerzo por obtener la definición adecuada que refleje de manera completa la idea de adyacencia en un lenguaje preciso. El primer logro lo da el matemático Maurice René Fréchet (1878-1973) que en 1906 define lo que ahora conocemos como métrica y espacio métrico. Fréchet define la adyacencia, la proximidad y las aproximaciones infinitas a través de los números reales.

Definición 1.4. Una *métrica* en un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ que satisface lo siguiente:

1. $d(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$; y
3. Para todo $x, y, z \in X$, se satisface $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

El conjunto $\langle X, d\rangle$ es llamado espacio métrico.

Fréchet intenta definir espacios topológicos en términos de convergencia de sucesiones, sin embargo, solamente logra definir una clase estrecha de espacios topológicos que contiene a los espacios métricos.

Diremos que sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ en un espacio métrico $< X, d >$ converge a un punto x si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \omega$ tal que si $n > N$ entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$ y lo denotaremos por $x_n \to y$. Una sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ será de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \omega$ tal que, si $n, m > N$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Es fácil demostrar que si una sucesión converge entonces es de Cauchy, sin embargo, la condición de suficiencia no siempre es verdadera. Cuando se satisfaga la suficiencia diremos que el espacio es completo.

Es Felix Hausdorff (1868-1942) quien en 1914 logra sintetizar toda la esencia de lo que significa el estudio de las relaciones invariantes entre los elementos de los cuerpos al ser transformados bajo deformaciones que carecen de desgarres. Usa para ello un lenguaje conjuntista relacionando a cada punto x de un conjunto X con una colección de subconjuntos de X cada uno conteniendo a x y satisfaciendo propiedades bien definidas. La definición que presentaremos a continuación es equivalente a la dada por Hausdorff.

Definición 1.5. Una *topología* τ en un conjunto X es una colección de subconjuntos de X tal que:

1. $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$;

2. Si $A, B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$; y

3. Si $\mathcal{A} \subseteq \tau$ entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Al par (X, τ) lo llamaremos *espacio topológico* y a los elementos de τ *abiertos*. Si τ y τ' son dos topologías para un conjunto X, diremos que τ' es *más fina* que τ si $\tau \subseteq \tau'$. Por otro lado, si $\tau' \subseteq \tau$ entonces τ' será *más gruesa* que τ y si son iguales diremos que son equivalentes.

Una *base* para una topología en X es una colección β de subconjuntos de X, llamados básicos, si cumple que para cada $x \in X$ existe al menos un elemento en $B \in \beta$ tal que $x \in B$ y además, si x pertenece a la intersección de dos básicos B_1 y B_2 entonces existe un básico B_3 tal que $x \in B_3$ y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Se puede demostrar que si β es base para una topología en X, entonces cualquier abierto de X se puede expresar como la unión de algunos elementos de la base. Si γ es una colección de conjuntos abiertos de X tal que para cada abierto U de X y cada $x \in U$, existe un elemento $C \in \gamma$ tal que $x \in C \subseteq U$, entonces γ es una base para la topología que tiene X.

Si $(X, <)$ es un conjunto ordenado, hay una topología estandar para X, definida utilizando el orden de X. Sean $a, b \in X$ y consideremos los siguientes conjuntos:

- $(a, b) = \{x : a < x < b\}$
- $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$

Si β es la colección de todos estos conjuntos con $a, b \in X$, β será una topología para X y la llamaremos *topología de orden*.

Un espacio (X, τ) puede heredar su topología a sus subconjuntos. Si $Y \subseteq X$, la colección $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$ es una topología para Y y es llamada *topología de subespacio*. Con esta topología diremos que Y es un subespacio de X.

Diremos que un subconjunto A de un espacio topológico X es *cerrado*, si su complemento con respecto a X es abierto, es decir, $X \setminus A \in \tau$. Se puede demostrar que $\emptyset$ y X son cerrados, la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada y la unión finita de conjuntos cerrados es cerrado, en virtud de dualizar la definición de un conjunto abierto.

Dado un subconjunto A de X, el *interior* de A será la unión de todos los subconjuntos abiertos contenidos en A, denotado por $int(A)$, y la *cerradura* de A la intersección de todos los conjuntos cerrados contenidos en A y la escribiremos $\overline{A}$. En otras palabras, un punto $x \in X$ pertenece al interior de A si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A$, mientras que x estará en la cerradura de A si para todo abierto U tal que $x \in U$, sucede que $A \cap U$ es distinto de vacío.

Dado $A \subseteq X$ y $x \in X$, x será un *punto de acumulación* o *punto límite* de A si para todo abierto U tal que $x \in U$, el conjunto $A \cap (U \setminus \{x\})$ es distinto de vacío. De la definición se puede inferir que un conjunto A es cerrado si y solamente si contiene a todos sus puntos de acumulación. Diremos que A es un subconjunto *denso* en X si para todo U abierto de X, $A \cap U$ es distinto de vacío, y llamaremos a A *denso en ninguna parte* si $int(\overline{A})$ es vacío.

Existen muchas proposiciones equivalentes a estos conceptos, así como propiedades conjuntistas de los mismos, como por ejemplo que $int(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$ o que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ si A y B son subconjuntos de X. Estos resultados y más, pueden consultarse en [4], [13] y [18].

Si (X, τ_1) y (Y, τ_2) son dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función, diremos que f es *continua* si para todo abierto V de Y, sucede que $f^{-1}[V]$ es un abierto en X. Si ademas f es biyectiva y su inversa f^{-1} también es continua, diremos que f es un *homeomorfismo*. Este es el concepto concreto de poder deformar el espacio X de manera que no existan desgarres en el proceso para llegar a Y y viceversa. A los espacios X y Y los llamaremos *homeomorfos.*

Finalmente, un espacio topológico (X, τ) es *segundo numerable* si tiene una base numerable; es *separable* si existe un subconjunto $D \subseteq X$ denso y numerable. Diremos que (X, τ) es metrizable si eciste una métrica d de tal manera que la topología inducida pr d es τ.

Capítulo 2

Combinatoria

2.1. El Teorema de Ramsey

La teoría de Ramsey es una rama de las matemáticas que se enfoca en problemas de combinatoria finita o infinita, llamada así por Frank Plumpton Ramsey.

Muchos problemas de la teoría de Ramsey surgen a partir de la generalización del principio de los palomares; el cual nos dice lo siguiente: Supongamos que tenemos n palomas y m casilleros, ¿Que relación deben tener m y n para que podamos asegurar que un casillero tiene al menos 2 palomas? Naturalmente, la respuesta es que haya más palomas que casilleros, es decir, que n sea mayor que m.

A excepción de un periodo de 3 años durante la segunda guerra mundial, la competencia matemática William Lowell Putnam se ha llevado acabo desde 1938. Esta competencia, bajo la administración de la Asociación Matemática de América consiste (desde 1962) de 12 desafiantes problemas matemáticos. Esta competencia fue diseñada con el fin de estimular la sana rivalidad entre las universidades de los Estados Unidos y Canadá. El problema número 2 del examen realizado en 1953, un problema de combinatoria, enuncia lo siguiente:

Problema A2: *La gráfica completa con* 6 *vértices y* 15 *aristas ha sido coloreada de azul y rojo. Muestre que se pueden encontrar* 3 *vértices tales que las* 3 *aristas que los conectan sean todas del mismo color.*

Pensemos el problema A2 de una manera más intuitiva. Supongamos que en una reunión hay 6 personas, si tomamos a dos personas estas pueden o no conocerse pero ¿es posible asegurar que si tomamos a 3 personas, las 3 se conocen o las 3 se desconocen?.

En este razonamiento cada persona es representada por un vértice y una arista es de color rojo si las personas se conocen y de color azul si no.

Si tomamos un vértice v, el principio de los palomares nos dice que al menos 3 de las aristas que inciden en él son de algún color, es decir, una persona conoce o desconoce a al menos 3 de las 5 personas. Supongamos que estas aristas son de color rojo. Sean vv_1, vv_2 y vv_3 las aristas. Si alguna arista v_1v_2, v_2v_3 o v_3v_1 es roja entonces el resultado queda probado. Si no, entonces las tres aristas son azules probando el resultado. El Teorema de Ramsey es una generalización de este ejemplo solamente que no se consideran subconjuntos de dos elementos sino de cualquier cardinalidad.

Como mencionamos al principio, la teoría de Ramsey se enfoca en problemas de combinatoria finita e infinita. El principio de los palomares y el problema de las personas son ejemplos de teoría de Ramsey finita. Nosotros nos enfocaremos más en la teoría infinita. Siguiendo con la idea de tener aristas rojas y azules como en el problema A2, introduciremos a continuación el concepto de coloración sobre cualquier conjunto de cualquier cardinalidad y cualquier número de colores.

Si λ es un cardinal y S es un conjunto, una λ-*coloración* será una función suprayectiva que tiene como dominio a S y como imagen a λ. Observemos que esta función induce una partición sobre S, basta tomar las imagenes inversas de cada elemento de λ.

Denotemos por $[S]^k$ al conjunto de todos los subconjuntos de S con cardinalidad k y $[S]^{<\omega}$ al conjunto de todos los subconjuntos de S finitos. Nos centraremos en los subconjuntos de ω de cardinalidad ω, es decir $[\omega]^\omega$. La notación es estandar y sigue a [10].

2.1.1. Conjuntos homogéneos

Definición 2.1. Sean S un conjunto y F una λ-coloración de $[S]^k$, diremos que $H \subseteq S$ es *homogéneo* para F si existe $\alpha \in \lambda$ tal que $F[[H]^k] \subseteq \{\alpha\}$.

Debido a que la notación $F[[H]^\kappa]$ puede ser confusa, utilizaremos $F''[H]^\kappa$.

Para cardinales κ, λ, μ y ν diremos que la relación

$$\kappa \to (\lambda)^\mu_\nu$$

es válida si y solamente si para toda F, μ-coloración de $[A]^\nu$ y A es un conjunto de cardinalidad κ, existen $\alpha \in \mu$ y H subconjunto de cardinalidad λ tales que $F''[H]^\nu = \{\alpha\}$, es decir, existe $H \subseteq A$ de cardinalidad λ homogéneo para F.

En el ejemplo, se tiene una 2-coloración, un conjunto de 6 personas y el cardinal del conjunto homogéneo 3, por lo que la relación sería

$$6 \to (2)^3_3$$

El Teorema de Ramsey finito enuncia lo siguiente:

Teorema 2.2. ***(Ramsey infinito).*** *Para cualesquiera $n, k \in \omega$ se cumple la relación*

$$\omega \to (\omega)^n_k$$

.

La demostración del teorema de Ramsey puede consultarse en [11].

Utilizaremos una definición alternativa de homogeneidad que involucra particiones, con la finalidad de introducir una topología al espacio $[\omega]^\omega$ que es objeto de nuestro estudio, la topología de Ellentuck.

Definición 2.3. Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$, un conjunto infinito $H \subseteq \omega$ es *homogéneo* para S si $[H]^\omega \subseteq S$ ó $[H]^\omega \cap S = \emptyset$.

En términos de coloración, dada $F : [\omega]^\omega \to \{0,1\}$ una 2-coloración y $S \subseteq [\omega]^\omega$ tal que $F''[S]^\omega = \{0\}$, un conjunto $H \subseteq \omega$ es homogéneo para S si $F''[H]^\omega = \{0\}$ o $F''[H]^\omega = \{1\}$ Para finalizar enunciaremos la definición de un conjunto Ramsey.

Definición 2.4. Un conjunto $S \subseteq [\omega]^\omega$ es *Ramsey* si existe un conjunto infinito homogéneo H para S.

Ejemplos triviales de conjuntos Ramsey son $[\omega]^\omega$ y $\emptyset$. Construyamos un ejemplo no trivial de conjunto Ramsey.

Sea $A = \{0, 1, ..., n\}$ y consideremos

$$S = \{X \in [\omega]^\omega : A \subseteq X\}.$$

Sea $H = \omega \setminus A$, entonces H es homogéneo para S pues $[H]^\omega \cap S = \emptyset$. Si $X \in [H]^\omega \cap S$ entonces $A \nsubseteq X$, y $A \subseteq X$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, H es homogéneo para S y así S es Ramsey.

En las siguientes secciones abordaremos los conjuntos borelianos y los conjuntos analíticos. Los conjuntos Ramsey serán de vital importancia para nuestro estudio de conjuntos analíticos. Generalmente, los conjuntos analíticos se definen en el espacio ω^ω (el espacio de funciones con dominio e imagen ω) y es natural intentar buscar una relación entre los espacios ω^ω y $[\omega]^\omega$, pues bien, la topología de Ellentuck será el vínculo para relacionar estos espacios y de igual manera los conjuntos analíticos, borelianos y Ramsey.

Capítulo 3

Topología de Ellentuck

En el capítulo anterior, tuvimos un primer acercamiento a los conjuntos Ramsey. Uno de nuestros objetivos es dar la demostración del teorema de Galvin-Prikry-Silver, el cual enuncia que todo conjunto analítico es Ramsey.

La primera demostración de este teorema fue en 1970, sin embargo, nosotros expondremos la demostración dada por Erick Ellentuck en 1974, la cual, toma como recurso una idea más general de un conjunto Ramsey: los conjuntos completamente Ramsey cuando el espacio $[\omega]^\omega$ tiene una cierta estructura. Las demostraciones de 1970 y 1974 pueden consultarse respectivamente en [16] y [6].

Este capítulo está dedicado unicamente a los conjuntos completamente Ramsey; los conjuntos analíticos los estudiaremos más tarde en el capítulo 4.

Para definir y estudiar a los conjuntos completamente Ramsey nescesitamos dotar a $[\omega]^\omega$ de una topología, se puede dar en términos conjuntistas, sin embargo, utilizaremos una técnica más conocida que involucra el lenguaje de forcing: *El forcing de Mathias.* Solamente nos referiremos a este forcing pues sus condiciones es la herramienta para construir la topología que nos interesa.

En un modelo transitivo de ZFC,digamos M, una *noción de forcing* es un orden parcial no vacío $(P, <)$ en M; a los elementos de P los llamaremos *condiciones de forcing.*. No indagaremos mucho respecto a forcing o el forcing de Mathias, de aquí en adelante trabajaremos únicamente en el orden de sus condiciones al cual nos referiremos como *el orden de Mathias*.

3.1. El Orden de Mathias.

Definición 3.1. (De Mathias). Una condición *de Mathias* es un par (s, A) donde $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^{\omega}$ tales que $\text{máx}\,(s) < \text{mín}\,(A)$.

Diremos que una condición (s, A) es *más fuerte* que una condición (t, B) y lo escribiremos como $(s, A) \leq (t, B)$ si:

1. t es un segmento inicial de s;
2. $A \subseteq B$; y
3. $s \setminus t \subseteq B$.

Para una condición de Mathias (s, A), vamos a definir el siguiente conjunto:

$$[s, A]^{\omega} = \{X \in [\omega]^{\omega} : s \subseteq X,\ X \subseteq s \cup A,\ \text{máx}(s) < \text{mín}(A)\}.$$

De la definición de este conjunto, es sencillo ver que $[\emptyset, A]^{\omega} = [A]^{\omega}$ ya que

$$[\emptyset, A]^{\omega} = \{X \in [\omega]^{\omega} : \emptyset \subseteq X \text{ y } X \setminus \emptyset \subseteq A\} = \{X \in [\omega]^{\omega} : X \subseteq A\} = [A]^{\omega}.$$

Además, se desprende una relación inmediata de contención entre dos condiciones.

Lema 3.2. Sean (s, A) y (t, B) dos condiciones de Mathias. Si $(s, A) \leq (t, B)$, entonces $[s, A]^{\omega} \subseteq [t, B]^{\omega}$.

Demostración: Supongamos que (s, A) es más fuerte que (t, B) y sea $X \in [s, A]^\omega$. Como t es segmento inicial de s es claro que $t \subseteq s \subseteq X$.

Para ver que $X \setminus t \subseteq B$, sea $y \in X \setminus t$. Si $y \in s$, entonces $y \in s \setminus t \subseteq B$. Por otro lado, si $y \in X \setminus s$ entonces $y \in X \setminus s \subseteq A \subseteq B$. En cualquier caso $X \setminus t \subseteq B$ y por lo tanto $[s, A]^\omega \subseteq [t, B]^\omega$. ∎

3.2. La Topología de Ellentuck

Comenzaremos esta sección mostrando que los conjuntos de la forma $[s, A]^\omega$ generan una topología en el espacio $[\omega]^\omega$.

Teorema 3.3. *La familia de conjuntos*

$$\beta = \{[s, A]^\omega : s \in [\omega]^{<\omega}, A \in [\omega]^\omega\}$$

forma una base para alguna topología en $[\omega]^\omega$.

Demostración: Es claro que $\bigcup \beta \subseteq [\omega]^\omega$. Para la otra contención solo basta observar que $[\omega]^\omega = [\emptyset, \omega]^\omega \in \beta$.

Sea $X \in [s, A]^\omega \cap [t, B]^\omega$. Consideremos $[s \cup t, A \cap B]^\omega$, se afirma que $X \in [s \cup t, A \cap B]^\omega \subseteq [s, A]^\omega \cap [t, B]^\omega$. Es claro que $s \cup t \subseteq X$ y $s \cup t \in [\omega]^{<\omega}$. También $X \setminus (s \cup t) = ((X \setminus s) \cap (X \setminus t)) \subseteq A \cap B$ y $A \cap B \in [\omega]^\omega$ ya que $X \in [\omega]^\omega$.

Finalmente $[s \cup t, A \cap B]^\omega \subseteq [s, A]^\omega \cap [t, B]^\omega$ pues $(s \cup t, A \cap B)$ es más fuerte que (s, A) y que (t, B) por el lema 3.2. Por lo tanto

$$\beta = \{[s, A]^\omega : s \in [\omega]^{<\omega} \text{y} A \in [\omega]^\omega\}$$

es una base para alguna topología en $[\omega]^\omega$. ∎

Definición 3.4. La topología generada por

$$\beta = \{[s, A]^\omega : s \in [\omega]^{<\omega} \text{y} A \in [\omega]^\omega\}$$

es conocida como la *topología de Ellentuck*, debido a Erick Ellentuck. Denotaremos por $([\omega]^\omega, \tau_E)$ al espacio topológico $[\omega]^\omega$ con la topología de Ellentuck.

3.3. Conjuntos completamente Ramsey

Definición 3.5. (Galvin-Prikry) Sea S un subconjunto de $[\omega]^\omega$.

- S es un conjunto *completamente Ramsey* si para cualquier condición (s, A) existe un conjunto infinito $H \subseteq A$ tal que $[s, H]^\omega \subseteq S$ o $[s, H]^\omega \cap S = \emptyset$.
- S es un conjunto *Ramsey nulo* si para cualquier condición (s, A) existe un conjunto infinito $H \subseteq A$ tal que $[s, H]^\omega \cap S = \emptyset$

Observemos que por definición, cualquier conjunto Ramsey nulo es completamente Ramsey.

Definición 3.6. Sean $S \subseteq [\omega]^\omega$, $s \in \omega^{<\omega}$ y $A \in \omega^\omega$.

1. A *acepta* a s respecto a S si $[s, A]^\omega \subseteq S$; y
2. A *rechaza* a s respecto a S si no existe $B \subseteq A$ que acepta a s, es decir, para cualquier $B \subseteq A$ infinito, $[s, B]^\omega \nsubseteq S$.
3. A *decide* a s respecto a S si A acepta o rechaza a s respecto a s

Lema 3.7. Sean $s \in [\omega]^{<\omega}$, $A \in [\omega]^\omega$ y $S \subseteq [\omega]^\omega$.

1. Si A acepta a s respecto a S y $B \in [A]^\omega$, entonces B acepta a s respecto a S.
2. Si A rechaza a s respecto a S y $B \in [A]^\omega$, entonces B rechaza a s respecto a S.

3. Existe $B \in [A]^\omega$ que decide a s.

Demostración:

1. Supongamos que A acepta a s. Como $B \subseteq A$, entonces $(s, B) \leq (s, A)$ y en consecuencia $[s, B]^\omega \subseteq [s, A]^\omega \subseteq S$.

2. Supongamos que A rechaza a s. Entonces no existe $B' \in [A]^\omega$ tal que B acepte a s. Por definición, esto implica que para cualquier $B' \in [A]^\omega$, $[s, B']^\omega \nsubseteq S$. En particular, B no puede aceptar a s y tampoco ninguno de sus subconjuntos finitos pueden aceptar a s, pues son subconjuntos de A. Por lo tanto, B rechaza a s.

3. Sea $C \in [A]^\omega$. Si C rechaza a s se sigue el resultado. Si C no rechaza a s, entonces existe $B \subseteq C$ tal que B acepta a s. Luego, como $B \subseteq C \subseteq A$, entonces $B \in [A]^\omega$ y B acepta a s.

■

Teorema 3.8. *Dado $S \subseteq [\omega]^\omega$, existe un $X \in [\omega]^\omega$ que decide cada uno de sus subconjuntos finitos.*

Demostración: Sean $S \subseteq [\omega]^\omega$, $a_0 \in \omega$ y $X_0 = \omega \setminus (a_0 + 1)$. Por el punto 3 del lema 3.7, existe $X_1 \in [X_0]^\omega$ que decide a $\{a_0\}$.

Sea $a_1 = \text{mín}\, X_1$. Usando el mismo argumento podemos hallar $X_2 \subseteq X_1$ que acepte o rechaze a todos los subconjuntos de $\{a_0, a_1\}$: Debido a que existe $X_2''' \in [X_1]^\omega$ que decide a $\{a_0, a_1\}$, entonces $X_2'' = X_2''' \setminus \{a_0, a_1\}$ también decide a $\{a_0, a_1\}$ y ya que $X_2'' \subseteq X_1$, pues $X_2'' \subseteq X_2''' \subseteq X_1$ y a_0, a_1 no pertenecen a X_2'' entonces X_2'' también decide a $\{a_0\}$. También, existe $X_2' \in [X_2'']^\omega$ que decide a $\{a_1\}$, entonces $X_2 = X_2' \setminus \{a_1\}$ decide a $\{a_1\}$ y dado que $X_2 \subseteq X_2''$, pues $X_2 \subseteq X_2' \subseteq X_2'' \cup \{a_1\}$ pero $\{a_1\}$ no pertenece a X_2, X_2 decide $\{a_0\}, \{a_1\}, \{a_0, a_1\}$, por lo que X_2 es el conjunto buscado.

Sea $a_2 = \text{mín}\{X_2\}$. De esta manera podemos construir de manera recursiva una sucesión, $\langle X_i : i \in \omega \rangle$, decreciente de conjuntos infinitos de ω y una sucesión, $\langle a_i : i \in \omega \rangle$, creciente de naturales tales que $a_i \in X_i$ y X_i decide a cualquier subconjunto de $\{a_k : k < i\}$. Afirmamos que $X = \{a_i : i \in \omega\}$ acepta o rechaza a cada uno de sus subconjuntos finitos.

Sea $s \in [X]^{<\omega}$ y $a_k = \text{máx}(s)$, entonces $a_k \in X_k$ y X_r decide a s para todo $m > k$. Sea $B \in [s, X]^\omega$ entonces $B \subseteq X \setminus s$, de modo que existe $a_r \in X$ con $r > k$ tal que $a_r \in B$.

Si X_r acepta a s, entonces $[s, X_r]^\omega \subseteq S$ y ya que $a_r \in X_r$ y $a_r \in B$ entonces $B \setminus s \subseteq X_r$, mostrando que $[s, B]^\omega \subseteq [s, X_r]^\omega \subseteq S$.

Por otro lado, si X_r rechaza a s, entonces X rechaza a s pues si existe $B \in [X]^\omega$ tal que $[s, B]^\omega \subseteq S$, entonces para cada $B' \in [s, B]^\omega$, $B' \subseteq s \cup (B \setminus a_k)$ y $B \setminus a_k$ resulta ser un subconjunto de X_r, contradiciendo que X_r rechaza a s. Por lo tanto X rechaza a s y finalmente obtenemos que X decide a cada uno de sus subconjuntos finitos.

■

Teorema 3.9. Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$, $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $A \in [\omega]^\omega$.

1. Si A acepta a s con respecto a S, entonces $A \setminus \{n\}$ acepta $s \cup \{n\}$ para todo $n > \text{máx}\, s$, con $n \in A$.

2. Si A rechaza a s con respecto a S, entonces hay a lo sumo una cantidad finita de $n \in A$ con $s < \{n\}$ tales que $A \setminus \{n\}$ acepta $s \cup \{n\}$.

Demostración: 1. Sea $n \in A$ tal que $s < \{n\}$. Dado $B \in [s \cup \{n\}, A]^\omega$, se tiene que $s \cup \{n\} \subseteq B$ y $B \setminus (s \cup \{n\}) \subseteq A$. Ya que $s \subseteq s \cup \{n\}$ y $n \in A$, tenemos que $B \in [s, A]^\omega \subseteq S$ pues A acepta a s. Por lo tanto $[s \cup \{n\}, A \setminus \{n\}]^\omega \subseteq S$ y así, $A \setminus \{n\}$ acepta a $s \cup \{n\}$.

2. Supongamos que hay una cantidad infinita de $n \in A$ con $s < \{n\}$, tales que $A \setminus \{n\}$ acepta $s \cup \{n\}$. Llamemos B al conjunto de dichos elementos. Afirmamos que B acepta a s. Sea $B' \in [s, B]^\omega$, entonces $s \subseteq B'$ y $B' \setminus s \subseteq B$. Si $n = \text{mín}(B' \setminus s)$, entonces $s \cup \{n\} \subseteq B'$ y $B' \setminus (s \cup \{n\}) \subseteq B$. Dado que $B \subseteq A$, entonces $B' \in [s \cup \{n\}, A \setminus \{n\}]^\omega$, por lo que $B' \in S$. Por lo tanto $[s, B]^\omega \subseteq S$, contradiciendo que $A \setminus \{n\}$ rechaza a s. Por lo tanto B es finito.

■

Corolario 3.10. *Sea $S \subseteq [\omega]^\omega$, entonces existe $Y \in [\omega]^\omega$ tal que acepta a $\emptyset$ o rechaza cada uno de sus subconjuntos finitos.*

Demostración: Sean $S \subseteq [\omega]^\omega$. Por el teorema 3.8, existe $X \in [\omega]^\omega$ tal que acepta o rechaza a cada uno de sus subconjuntos finitos. Supongamos que X rechaza a $\emptyset$.

Por la propiedad 2 del teorema 3.9, sabemos que existe una cantidad finita de $n \in X$ tales que X acepta a $\{n\}$. Dado que X acepta o rechaza a todos sus subconjuntos finitos podemos escoger $n_0 \in X$ tal que para cualquier $n \in X$ con $n_0 \leq n$, X rechace a $\{n\}$.

Nuevamente por la propiedad 2 del teorema 3.9 y dado que X rechaza a $\{n_0\}$, existe una cantidad finita de $n \in X \setminus \{n_0\}$ tales que X acepta a $\{n_0, n\}$. Además, como X acepta o rechaza a cada uno de sus subconjuntos finitos, podemos hallar $n_1 \in X$ tal que $n_0 < n_1$ y X rechaza a $\{n\}$ y $\{n_0, n\}$ para todo $n \in X$ con $n_1 \leq n$.

De esta forma construimos una sucesión, $\langle n_i : i \in \omega \rangle$, de elementos de X tal que X rechaza $s \cup \{n\}$ para cualquier $s \subseteq \{n_k : k < i\}$ y $n_i \leq n$, con $n \in X$. Afirmamos que $Y = \langle n_i : i \in \omega \rangle$ rechaza a todos sus subconjuntos finitos.

Sea $s \in [Y]^{<\omega}$ y $n_i = \text{máx}(s)$. Así, $s = \{n_k : k < i\} \cup \{n_i\}$. Entonces X rechaza a s y como $Y \subseteq X$, Y rechaza a s. Por lo tanto, Y rechaza a todos sus subconjuntos finitos. ■

Teorema 3.11. *Todo conjunto abierto en la topología de Ellentuck es Ramsey.*

Demostración: Sea S un conjunto abierto. Por el corolario 3.10 existe $X \in [\omega]^\omega$ tal que X acepta a $\emptyset$ o X rechaza a cada uno de sus subconjuntos finitos.

Caso 1: Si X acepta a $\emptyset$ entonces por definición

$$[\emptyset, X]^\omega = [X]^\omega \subseteq S$$

lo que implica que S es Ramsey.

Caso 2: Si X rechaza a cada uno de sus subconjuntos finitos afirmamos que $[X]^\omega \cap S = \emptyset$. De no ser así, existiría $Y \subseteq X$ infinito tal que $Y \in S$. Como S es abierto entonces existe un abierto básico $[s, A]^\omega$ tal que

$$Y \in [s, A]^\omega \subseteq S$$

Como $Y \in [s, A]^\omega$ e $Y \setminus s \subseteq A$, tenemos que

$$Y \in [s, Y \setminus s]^\omega \subseteq [s, A]^\omega \subseteq S$$

lo cual nos dice que Y acepta a s contradiciendo que X rechazaba a todos sus subconjuntos finitos, particularmente a s.

Por lo tanto $[X]^\omega \subseteq S$ o $[X]^\omega \cap S = \emptyset$ lo cual implica que S es Ramsey. ■

Teorema 3.12. *Todo conjunto abierto en la topología de Ellentuck es completamente Ramsey.*

Demostración: Sean S abierto y (s, A) una condición de Mathias arbitrarios. Consideremos $f : \omega \to A$ una enumeración creciente de A. Observemos que $f^{-1}[s] = \emptyset$.

Definamos $F : [\omega]^\omega \to [\omega]^\omega$ como $F(X) = s \cup f[X]$. La función F es continua pues para un abierto básico $[t, B]^\omega$,

$$\begin{aligned} F^{-1}[[t,B]^\omega] &= \{X \in [\omega]^\omega : F(X) \in [t,B]^\omega\} \\ &= \{X \in [\omega]^\omega : t \subseteq F(X), F(X) \setminus t \subseteq B\} \\ &= \{X \in [\omega]^\omega : t \subseteq s \cup f[X], s \cup f[X] \setminus t \subseteq B\} \\ &= \{X \in [\omega]^\omega : f^{-1}[t] \subseteq X, X \setminus f^{-1}[t] \subseteq f^{-1}[B]\} \\ &= [f^{-1}[t], f^{-1}[B]]^\omega \end{aligned}$$

Sea $T = \{X \in [\omega]^\omega : F(X) \in S\}$, T es abierto por ser la imagen inversa de S bajo F y por el teorema 3.11, T es Ramsey. Sea $K \subseteq \omega$ un conjunto homogéneo para T, entonces, $[K]^\omega \subseteq T$ o $[K]^\omega \cap T = \emptyset$. De modo que, $H = f[K] \subseteq A$ satisface que $[s,H]^\omega \subseteq S$ o $[s,H]^\omega \cap S = \emptyset$, pues $F[[s,H]^\omega]^{-1} = [K]^\omega$ y $F^{-1}[S] = T$, mostrando así que S es completamente Ramsey. ∎

3.3.1. Conjuntos Magros

Recordemos que un conjunto A en un espacio topológico es denso en ninguna parte si $int(\overline{A}) = \emptyset$ y que un conjunto M es magro si M es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

Una equivalencia importante de los conjuntos densos en ninguna parte es la siguiente: Un conjunto A es denso en ninguna parte si y solamente si para cualquier abierto V del espacio topológico distinto de $\emptyset$, existe un abierto $U \subseteq V$ distindo de vacío tal que $U \cap A = \emptyset$. Esta equivalencia es también cierta si los abiertos U y V son elementos de la base.

Teorema 3.13. *Todo conjunto Ramsey nulo es denso en ninguna parte con la topología de Ellentuck.*

Demostración: Sean S Ramsey nulo y (s, A) una condición de Mathias. Como S es Ramsey Nulo entonces existe $H \subseteq A$ de tal manera que $[s, H]^\omega \cap S = \emptyset$ y ya que $[s, H]^\omega \subseteq [s, A]^\omega$, tenemos que S es denso en ninguna parte.

■

Teorema 3.14. *Todo conjunto denso en ninguna parte en la topología de Ellentuck es Ramsey nulo.*

Demostración: Sean S denso en ninguna parte y (s, A) una condición de Mathias. Notemos que $\overline{S}$ es también denso en ninguna parte. Como $\overline{S}$ es cerrado entonces $[\omega]^\omega \setminus \overline{S}$ es abierto. Por el teorema 3.12, $[\omega]^\omega \setminus \overline{S}$ es completamente Ramsey, así, existe $H \subseteq A$ de tal manera que $[s, H]^\omega \subseteq [\omega]^\omega \setminus \overline{S}$ o $[s, H]^\omega \cap ([\omega]^\omega \setminus \overline{S}) = \emptyset$. Esto implica que $[s, H]^\omega \subseteq \overline{S}$ o $[s, H]^\omega \cap \overline{S} = \emptyset$.

Pero $[s, H]^\omega \subseteq \overline{S}$ no puede suceder pues $\overline{S}$ es denso en ninguna parte. Así, sucede que $[s, H]^\omega \cap \overline{S} = \emptyset$ y en consecuencia $[s, H]^\omega \cap S = \emptyset$ probando que S es Ramsey nulo. ■

Teorema 3.15. *Si* $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n$ *y* S_n *es Ramsey nulo para toda* $n \in \omega$ *entonces* S *es Ramsey nulo.*

Demostración: Sean $S = \bigcup_{n \in \omega} S_n$ con S_n Ramsey nulo para toda $n \in \omega$ y (s, A) una condición de Mathias.

Como S_0 es Ramsey Nulo entonces existe $X_0 \subseteq A$ tal que $[s, X_0]^\omega \cap S_0 = \emptyset$. Sea $a_0 = \min(X_0)$.

Consideremos la condición $(s \cup \{a_0\}, X_0 \setminus \{a_0\})$, como S_1 es Ramsey Nulo entonces existe $X_1 \subseteq X_0 \setminus \{a_0\}$ tal que $[s \cup \{a_0\}, X_1]^\omega \cap S_1 = \emptyset$.

De manera recursiva, sea $a_n = \min(X_n)$ y consideremos la condición $(s \cup \{a_0, ..., a_n\}, X_n \setminus \{a_0, ..., a_n\})$, como S_{n+1} es Ramsey Nulo entonces existe $X_{n+1} \subseteq X_n \setminus \{a_0, ..., a_n\}$ tal que $[s \cup \{a_0, ..., a_n\}, X_{n+1}]^\omega \cap S_{n+1} = \emptyset$.

Sea $H = \{a_0, a_1, a_2, ...\} \subseteq A$, afirmamos que $[s, H]^\omega \cap S = \emptyset$. Si no, entonces existiría $Y \in [s, H]^\omega \cap S$. Esto implicaría que $Y \in S_k$ para alguna $k \in \omega$ y que $Y \in [s, H]^\omega$, de modo que como $H \subseteq X_k$ tendriamos que $[s, X_k]^\omega \cap S_k \neq \emptyset$, contradiciendo que S_k sea Ramsey nulo. Por lo tanto S es Ramsey nulo. ∎

Teorema 3.16. *Un conjunto N es Ramsey Nulo si y solamente si N es magro.*

Demostración: Si N es Ramsey Nulo entonces, por el teorema 3.13 N es denso en ninguna parte y en consecuencia N es magro.

Si N es magro entonces $N = \bigcup_{i \in \omega} N_i$ con N_i denso en ninguna parte para toda $i \in \omega$, entonces N_i es Ramsey Nulo para toda $i \in \omega$ por el teorema 3.14, entonces N es Ramsey Nulo en virtud del teorema 3.15. ∎

3.3.2. La propiedad de Baire

En un espacio topológico diremos que un conjunto S tiene la *propiedad de Baire* si existe un conjunto abierto G de tal manera que la diferencia simétrica entre S y G, $S \triangle G$, es magro. En otras palabras, que un conjunto S tenga la propiedad de Baire significa que S es casi abierto.

Teorema 3.17. *Si un conjunto tiene la propiedad de Baire entonces es completamente Ramsey .*

Demostración: Sea S un conjunto y supongamos que S tiene la propiedad de Baire, entonces existe un abierto G tal que $S \triangle G$ es magro. Como $S \triangle G$ es magro entonces $S \triangle G$ es Ramsey nulo, esto implica que para una condición (s, A) existe $X \subset A$ tal que

$$[s, X]^\omega \cap (S \triangle G) = \emptyset$$

Como G es abierto entonces, por el teorema 3.12, G es completamente Ramsey. Así, para la condición (s, X) existe $H \subseteq X$ tal que $[s, H]^\omega \cap G = \emptyset$ o $[s, H]^\omega \subseteq G$. Además $[s, H]^\omega \subseteq [s, X]^\omega \subseteq [\omega]^\omega \setminus (S \triangle G)$.

Si sucede que $[s, H]^\omega \cap G = \emptyset$, como $[s, H]^\omega \subseteq [\omega]^\omega \setminus (S \triangle G)$, entonces $[s, H]^\omega \subseteq S$. Analogamente si $[s, H]^\omega \subseteq G$, entonces $[s, H]^\omega \cap S = \emptyset$. Por lo tanto, S es completamente Ramsey. ∎

Para la demostración del Teorema de Galvin-Prikry-Silver y ver que todo conjunto anlítico es copletamente Ramsey, nescesitaremos propiedades del espacio de Baire, las cuales veremos en el capítulo 4.

Capítulo 4

Los conjuntos analíticos

En el capítulo 3 demostramos que si un conjunto tiene la propiedad de Baire entonces es completamente Ramsey.

En este capítulo, definiremos una operación a familias de conjuntos conocida como operación de Suslin, mediante la cual, demostraremos que cualquier conjunto analítico tiene la propiedad de Baire. Esto daría por concluida la demostración del teorema de Galvin-Prikry-Silver.

4.1. El espacio de Baire

Consideremos el conjunto de todas las sucesiones infinitas de números naturales ω^ω. Para cada sucesión finita $s = \langle a_k : k < n \rangle$ definamos el conjunto

$$O(s) = \{f \in \omega^\omega : s \subseteq f\}.$$

Recordemos que, el conjunto de todas las sucesiones finitas lo denotamos con $\omega^{<\omega}$. La familia $\beta = \{O(s) : s \in \omega^{<\omega}\}$ es una base para una topología de ω^ω. El espacio ω^ω con esta topología es llamado *espacio de Baire* y se denota por $\mathcal{N}$.

En el capítulo 1, tratamos los conceptos de separable, metrizable y completo para un espacio topológico (X, τ). Introducimos a continuación una definición que engloba estas caracteristicas.

Definición 4.1. Un espacio topológico (X, τ) es *polaco* si (X, τ) es completamente metrizable y separable.

Teorema 4.2. *El espacio de Baire es metrizable.*

Demostración: Para $f, g \in \mathcal{N}$, la función

$$d(f,g) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = g, \\ \dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{si } f(n) \neq g(n), \end{cases}$$

con n el mínimo natural tal que $f(n) \neq g(n)$, es una métrica.

Por definición de la función d, la distancia de f y g es cero si y solamente si son iguales, además la simetría de d es clara. Para probar desigualdad triangular sean f, g y h tres sucesiones tales que

$$d(f,h) = \frac{1}{2^{k_1+1}}$$

$$d(f,g) = \frac{1}{2^{k_2+1}}$$

$$d(g,h) = \frac{1}{2^{k_3+1}}$$

y veamos que $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$.

Caso 1: k_2 o k_3 son menores o iguales que k_1.

Si $k_3 \leq k_1$ entonces

$$d(f,h) = \frac{1}{2^{k_1+1}} \leq \frac{1}{2^{k_3+1}} = d(g,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$$

Sucede lo mismo con k_2 mediante un razonamiento análogo.

Caso 2: k_2 y k_3 son mayores que k_1.

Por definición de la métrica $f(k_1) \neq h(k_1)$. Como $k_1 < k_2$ entonces $f(k_1) = g(k_1)$. También, como $k_1 < k_3$ entonces $g(k_1) = h(k_1)$. Luego

$$f(k_1) = g(k_1) = h(k_1)$$

lo cual es contradictorio. Esto nos dice que $k_1 = \min\{k_2, k_3\}$ y regresamos al caso anterior. Por lo tanto d satisface la desigualdad del triángulo lo que implica que es métrica.

Finalmente, veamos que la métrica induce la topología.

Sean $s = \langle a_0, a_1, ..., a_k \rangle$ una sucesión finita y $f \in O(s)$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+2}}$. Entonces $f \in B_\varepsilon(f) \subseteq O(s)$: Tomando $g \in B_\varepsilon(f)$ entonces $d(f, g) < \frac{1}{2^{k+2}} < \frac{1}{2^{k+1}}$, esto implica que al menos, $f(m) = g(m)$ para toda $m \leq k$ mostrando que $s \subseteq g$ y así $g \in O(s)$.

Por otro lado, sean f una sucesión y $\varepsilon > 0$. Por propiedad arquimediana existe $k \in \omega$ de tal manera que $\frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$. Supongamos que $f = \langle a_0, a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ... \rangle$, definiendo $s = \langle a_0, a_1, ..., a_k \rangle$ es claro que $f \in O(s) \subseteq B_\varepsilon(f)$. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es metrizable. ■

Dada una sucesión $f \in \mathcal{N}$, diremos que la sucesión es *eventualmente constante* si a partir de un determinado momento la sucesión toma el mismo valor, es decir, existe $k \in \omega$ de tal manera que $f(m) = f(k)$ para todo $m > k$. Por ejemplo, la sucesión $\langle 1, 4, 14, 103, 4, 8, 8, 8, 8..,8, 8, ... \rangle$ es eventualmente constante. Es claro que toda sucesión constante es eventualmente constante.

Teorema 4.3. *El espacio de Baire es separable.*

Demostración: Sea $D = \{f \in \omega^\omega : \exists k \in \omega (\forall m \geq k(f(m) = f(k)))\}$, es decir, D es el conjunto de todas las sucesiones eventualmente constantes. D es numerable pues podemos expresarlo como $\bigcup_{m \in \omega} \bigcup_{k \in \omega} \{f \in \omega^\omega : f(k) = f(m), m \geq k\}$.

Afirmamos que D es denso en $\mathcal{N}$. Sea A un abierto, entonces existe una sucesión $s = \langle a_0, a_1, ..., a_k\rangle$ tal que el básico $O(s)$ se queda contenido en A . Sea $f = \langle a_0, a_1, ...a_k, a_k, ..., a_k, ...\rangle$, entonces $f \in O(s)$ y f es eventualmente constante, de modo que $O(s) \cap D \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathcal{N}$ es separable. ■

Teorema 4.4. *El espacio de Baire es completo.*

Demostración: Sea $\{f_n : n \in \omega\}$ una sucesión de Cauchy. Para $M \in \omega$, sea $\varepsilon_M = \dfrac{1}{2^{M+1}} > 0$, entonces existe $N_M \in \omega$ tal que para todo $n, m > N_M$ implica que $d(f_n, f_m) < \varepsilon_M$. Por cómo está definida la métrica tenemos que para todo $x \leq M$ y para todo $n, m \geq N_M$, $f_n(x) = f_m(x) = f_{N_M}(x)$. Definimos $g(k) = \langle f_{N_k}(k) : k \in \omega\rangle$. Afirmamos que la sucesión converge a g.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $M \in \omega$ tal que $0 < \dfrac{1}{2^{M+1}} = \varepsilon_M < \varepsilon$. Así, existe $N_M \in \omega$ tal que si $n > N_M$, entonces $f_n(x) = f_{N_M}(x) = g(x)$ para todo $x \leq M$, mostrando que $d(f_n, g) < \varepsilon_M < \varepsilon$ y así que la sucesión converge. ■

Como resultado de que $\mathcal{N}$ es metrizable, separable y completo tenemos que el espacio de Baire es polaco.

Un resultado curioso y que nos será de utilidad es que los abiertos básicos en el espacio de Baire también son cerrados. Para mostrarlo, tomemos una sucesión $s = \langle a_0, ..., a_n\rangle$ y el básico asociado a ella y veamos que su complemento también es abierto. Sea $f \in \omega^\omega$ tal que f no pertenece a $O(s)$. Sea $k < n$ el mínimo natural tal que $f(k) \neq a_k$ y definamos $r = \langle a_0, ..., a_{k-1}, a_k + 1\rangle$. Es claro que $f \in O(r)$ y $O(s) \cap O(r) = \emptyset$ mostrando que $\omega^\omega \setminus O(s)$ es abierto.

Teorema 4.5. *Todo subconjunto cerrado de un espacio polaco es polaco.*

Demostración: Sean X un espacio polaco y $A \subseteq X$ cerrado. A es metrizable pues hereda la métrica de X. Como X es separable y metrizable entonces es segundo numerable (Este resultado puede consultarse en [18]). En consecuencia, A es segundo numerable y por lo tanto es separable. Finalmente, si

$\{x_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de Cauchy en A, también es sucesión de Cauchy en X, de modo que $\{x_n : n \in \omega\}$ converge y como A es cerrado entonces el punto de convergencia pertenece a A. Como A es metrizable, separable y completo, entonces A es polaco. ■

Antes de continuar con el siguiente teorema introduciremos una notación estandar para cuando buscamos indexar objetos con sucesiones. La indexación con sucesiones puede resultar bastante útil para cuando se construyen objetos de manera binaria, o en general, de manera n-aria.

Definición 4.6. Sean s una sucesión de n entradas y $m \in \omega$. Definimos la *concatenación de s con m*, o más brevemente, *s concatenado con m* como la sucesión $s \frown m = \langle s(0), ..., s(n-1), m \rangle$.

Teorema 4.7. *Sea X un espacio polaco. Entonces existe una función continua de $\mathcal{N}$ en X.*

Demostración: Para $s \in \omega^{<\omega}$ una sucesión, construiremos por recursión sobre la longitud de s, una familia de conjuntos cerrados $\{C_s : s \in \omega^{<\omega}\}$, que van a ser subconjuntos de bolas cerradas, bajo una métrica acotada por 1, que satisfaga las siguientes condiciones:

1. $diam(C_s) \leq \dfrac{1}{n}$, donde n es la longitud de la sucesión s;
2. Para todo $s \in \omega^{<\omega}$, $C_s \subset \displaystyle\bigcup_{m=0}^{\infty} C_{s\frown m}$; y
3. Si $s \subset t$, entonces el centro de C_t pertenece a C_s, donde el centro de C_t va a ser el centro de una bola cerrada que contiene a C_t.

La construcción es como sigue: Definimos $C_\emptyset = X$ es polaco entonces existe un conjunto denso numerable, digamos $D_\emptyset = \{d_k : k \in \omega\}$. Para cada $d_k \in D$, consideremos B_k la bola cerrada de radio 1 con centro d_k. Sea $C_k = B_k \cap C_\emptyset$.

Así, a cada sucesión de longitud 1, $s = \langle k \rangle$, se le asocia su respectivo C_k. Es claro que $C_\emptyset$ y C_k satisfacen las condiciones 1, 2 y 3.

Por el teorema 4.5, para todo $k \in \omega$, C_k es un espacio polaco. Sea $D_k = \{d_{kr} : r \in \omega\}$ un conjunto denso y numerable de cada C_k. Para cada $k \in \omega$ y para cada $d_{kr} \in C_k$, sea B_{kr} la bola cerrada de radio $\frac{1}{2}$ con centro d_{kr} y sea $C_{kr} = B_{kr} \cap C_k$. Así, a cada sucesión de longitud 2, $s = \langle k, r \rangle$ se le asocia su respectivo C_{kr} y nuevamente, C_k y C_{kr} satisfacen las condiciones 1, 2 y 3.

En general, para $s \in \omega^{<\omega}$ de longitud n, supongamos que hemos contruido los conjuntos cerrados, y en consecuencia polacos, C_s. Sea $D_s = \{d_{s\frown m} : m \in \omega\}$ un conjunto denso y numerable de C_s. (En caso de que C_s sea finito entonces $D_s = C_s$ y en la construcción no importará que se repitan elementos de la enumeración).

Para cada $s \in \omega^{<\omega}$ de longitud n y para cada $d_{s\frown m} \in C_s$, sea $B_{s\frown m}$ la bola cerrada de radio $\frac{1}{n+1}$ con centro $d_{s\frown m}$ y $C_{s\frown m} = B_{s\frown m} \cap C_s$. Así, a cada sucesión de longitud $n+1$, $s' = s \frown m$, se le asocia su respectivo $C_{s\frown m}$ y se siguen las condiciones 1, 2 y 3.

Sea $f : \mathcal{N} \to X$ definida como $f(a) = \bigcap\{C_s : s \in \omega^{<\omega}, s \subsetneq a\}$. La función está bien definida pues $\bigcap\{C_s : s \in \omega^{<\omega}, s \subsetneq a\}$ es distinta de vacío y además es un único punto por ser una intersección de cerrados anidados cuyos diametros tienden a cero. Además, $f[\mathcal{N}] = X$ por la condición 2 de la construcción de las familias. Finalmente, f es continua pues la imagen inversa de $C_s \subseteq X$ es el conjunto cerrado $O(s) \subseteq \mathcal{N}$. ∎

4.2. σ-álgebras

Un concepto muy utilizado en análisis y probabilidad es el de σ-álgebra ya que es fundamental para definir medidas y propiedades caracteristicas de un espacio. Intuitivamente, dado un conjunto X, una σ-álgebra sobre X es una familia no vacía de subconjuntos de X cerrada bajo complementos, uniones e intersecciones numerables.

Las σ-álgebras son objeto de nuestro interés pues con este concepto podemos definir los conjuntos borelianos, los cuales serán fundamentales para estudiar las propiedades de los conjuntos analíticos ya que los conjuntos borelianos se preservan bajo imagenes continuas con determinadas restricciones. Enunciemos entonces la definición de una σ-álgebra.

Definición 4.8. Sea X un conjunto y sea Σ una familia de subconjuntos de X. Decimos que Σ es una *σ-álgebra* sobre X si satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \Sigma$;
2. Si $E \in \Sigma$, entonces $X \setminus E \in \Sigma$; y
3. Si $\{E_i : i \in \omega\}$ es una familia de conjuntos de Σ, entonces $\bigcup_{i\in\omega} E_i$ también pertenece a Σ.

Si un espacio X tiene una topología nos interesa conocer la mínima σ-álgebra que contiene a la topología. Dicha σ-álgebra es conocida como la *σ-álgebra de Borel* y la denotaremos como:

$$Bor(X) = \bigcap\{\Gamma \subseteq \mathcal{P}(X) : \Gamma \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \tau \subseteq \Gamma\}$$

4.2.1. Conjuntos de Borel

Definición 4.9. Sea X un espacio Polaco. Un conjunto $A \subseteq X$ es *de Borel* o *boreliano* si pertenece a la mínima σ-álgebra (respecto a la contención) de X que contiene a la topología de X.

A continuación daremos una descripción más explicita de los conjuntos de Borel.

Definición 4.10. Sea $\langle X, \tau \rangle$ un espacio topológico. Para cada $\alpha \in \omega_1$ se definen las clases Σ^0_α y Π^0_α recursivamente:

- $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0 = \emptyset$;
- $\Sigma^0_1 = \{A \subseteq X : A\,\text{es abierto}\}$;
- $\Pi^0_1 = \{X \setminus A \subseteq X : A \in \Sigma^0_1\}$;
- $\Sigma^0_\alpha = \left\{ \bigcup_{n\in\omega} A_n \subseteq X : (\forall n \in \omega)(\exists \beta_n < \alpha)(A_n \in \Pi^0_{\beta_n}) \right\}$; y
- $\Pi^0_\alpha = \left\{ \bigcap_{n\in\omega} A_n \subseteq X : (\forall n \in \omega)(\exists \beta_n < \alpha)(A_n \in \Sigma^0_{\beta_n}) \right\}$.

Teorema 4.11. Sean X un espacio polaco y $\alpha, \beta \in \omega_1$ tales que $\alpha < \beta$, entonces:

1. Σ^0_α y Π^0_α son cerrados bajo uniones e intersecciones finitas.
2. Σ^0_α es cerrada bajo uniones numerables.
3. Π^0_α es cerrada bajo intersecciones numerables.
4. $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$, $\Sigma^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$, $\Pi^0_\alpha \subseteq \Pi^0_\beta$ y $\Pi^0_\alpha \subseteq \Sigma^0_\beta$.

Demostración: Los enunciados 1,2 y 3 son consecuencias inmediatas de la definición. Para 4, demostraremos las primeras dos contenciones, las otras dos son análogas.

Por inducción sobre α. Si $\alpha = 1$, sea $A \in \Sigma^0_1$, como X es polaco entonces todo abierto es unión numerable de cerrados, es decir, $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ con $A_n \in \Pi^0_1$, así, $A \in \Sigma^0_2$ y por tanto $\Sigma^0_1 \subseteq \Sigma^0_2$.

Por otro lado, como $A \in \Sigma_1^0$, A es la intersección de su unitario, es decir $A \in \Pi_2^0$, mostrando que $\Sigma_1^0 \subseteq \Pi_2^0$.

Los casos cuando $\alpha > 1$ son consecuencia inmediata de la definición. ■

Del teorema 4.11 es inmediato que

$$\Omega = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi_\alpha^0 = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha^0$$

y que esta familia es una σ-álgebra. Naturalmente, Ω resulta ser la σ-álgebra de Borel.

Teorema 4.12. Sea X un espacio polaco, entonces $\Omega = Bor(X)$.

Demostración: Como Ω es una σ-álgebra es claro que $Bor(X) \subseteq \Omega$. Para la otra contención, sea $A \in \Omega$. Entonces existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $A \in \Sigma_\alpha^0$. Notemos que basta probar que para toda $\alpha \in \omega_1$, $\Sigma_\alpha^0 \subseteq Bor(X)$.

Por inducción sobre α. Si $\alpha = 1$, entonces $\Sigma_1^0 = \tau \subseteq Bor(X)$. Supongamos ahora que para $\beta < \alpha$, $\Sigma_\beta^0 \subseteq Bor(X)$ y mostremos que $\Sigma_\alpha^0 \subseteq Bor(X)$.

Sea $A \in \Sigma_\alpha^0$, entonces existen $\beta < \alpha$ y $A_n \in \Pi_\beta^0$ tales que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Como para toda $n \in \omega$, $A_n \in \Pi_\beta^0$, entonces existen $\beta_n < \beta$ y $E_m^n \in \Sigma_{\beta_n}^0$ tales que $A_n = \bigcap_{m\in\omega} E_m^n$.

Por hipótesis de inducción, $\Sigma_{\beta_n}^0 \subseteq Bor(X)$. Así, para todo $m \in \omega$, $E_m^n \in Bor(X)$, Por ser $Bor(X)$ una σ-álgebra tenemos que para todo $n, m \in \omega$, $\bigcap_{m\in\omega} E_m^n = A_n \in Bor(X)$ y en consecuencia $\bigcup_{n\in\omega} A_n = A \in Bor(X)$, mostrando que $\Sigma_\alpha^0 \subseteq Bor(X)$. Por lo tanto $\Omega \subseteq Bor(X)$ y así, $\Omega = Bor(X)$. ■

4.3. Conjuntos analíticos

Dados dos conjuntos X e Y, la función $\pi : X \times Y \to X$ definida como $\pi_1(x, y) = x$ es llamada *proyección canónica*. Es sencillo demostrar que la proyección es una función continua.

A continuación daremos la definición de conjunto analítico y probaremos algunas propiedades de los mismos relacionadas con los conjuntos de Borel.

Definición 4.13. Un subconjunto A de un espacio polaco X es *analítico* si existe $f : \mathcal{N} \to X$ continua tal que $f[\mathcal{N}] = A$

Teorema 4.14. Todo conjunto cerrado en un espacio polaco es analítico.

Demostración: Sean X un espacio polaco y $A \subseteq X$ cerrado. Por el teorema 4.5, A es polaco. Luego, por el teorema 4.7, existe una función f de $\mathcal{N}$ en A tal que f es continua y $f(\mathcal{N}) = A$. Por lo tanto, A es analítico. ■

Teorema 4.15. Sean X un espacio polaco. Entonces, cualquier conjunto de Borel de X es la proyección de un conjunto cerrado en $X \times \mathcal{N}$.

Demostración: Consideremos la familia de conjuntos:

$$P = \{A \subseteq X : (\exists\, B)((B \subseteq X \times \mathcal{N}) \wedge (B = \overline{B}) \wedge (A = \pi_1(B)))\}$$

Basta demostrar por el teorema 4.12, que P contiene a todos los conjuntos abiertos de X, todos los conjuntos cerrados de X y es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables.

Por continuidad de π_1, si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces $\pi_1^{-1}[A]$ es cerrado en $X \times \mathcal{N}$, por lo que $A \in P$. Como X es polaco, entonces cualquier conjunto abierto es unión numerable de cerrados, así, solo basta probar que P es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables.

Sea $\Gamma : \omega \times \omega \to \omega$ cualquier biyección. Con ayuda de esta función Γ, definiremos una función $F : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^\omega$, con $\mathcal{N}^\omega$ equipado con la topología producto, continua.

Para $a \in \mathcal{N}$, $m, r \in \omega$, definimos $F(a)(m)(r) = a(\Gamma(m, r))$. Para comodidad de notación escribiremos $F(a) = a_{(m)}(r)$. La definición de esta función resulta intuitiva si observamos como se está comportando:

Para $a \in \mathcal{N}$ y $m, r \in \omega$

- $F(a)$ es una función de ω en $\mathcal{N}$, es decir, $F(a) : \omega \to \mathcal{N}$,
- $F(a)(m)$ es una función de ω en ω, es decir, $F(a)(m) : \omega \to \omega$, y
- $F(a)(m)(r) \in \omega$.

Veamos que F es continua: Sea $U \subseteq \mathcal{N}^\omega$ un abierto. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que U es básico de la topología producto. Entonces existen $O(s_1), ..., O(s_m)$ abiertos en $\mathcal{N}$, tales que U es de la forma $O(s_1) \times ... \times O(s_m) \times \prod_{i>m} \mathcal{N}$. Sea l_k la longitud de s_k para $1 \leq k \leq m$. Basta demostrar que $F^{-1}[U]$ es abierto en $\mathcal{N}$.

$$\begin{aligned} F^{-1}[U] &= \{a \in \mathcal{N}^\omega : F(a) \in U\} \\ &= \{a \in \mathcal{N}^\omega : F(a) \in O(s_1) \times ... \times O(s_m) \times \prod_{i>m} \mathcal{N}\} \\ &= \{a \in \mathcal{N}^\omega : s_k \subseteq a_{(k)}, k \leq m\} \\ &= \{a \in \mathcal{N}^\omega : s_k(r) = a_{(k)}(r), k \leq m, r \leq l_k\} \\ &= \{a \in \mathcal{N}^\omega : s_k(r) = a(\Gamma(k, r)), k \leq m, r \leq l_k\} \end{aligned}$$

Sean $x \in F^{-1}[U]$. Ordenamos el conjunto $\gamma = \{\Gamma(k, r) : k \leq m, r \leq l_k\}$ y lo renombramos con el conjunto $\{0, 1, ..., n\}$ donde $n = |\gamma|$. Esto es posible pues γ es finito y siempre existe una función biyectiva entre un conjunto finito y su respectivo natural que representa su cardinalidad. Se sigue que si $s = (x(0), x(1), ..., x(n))$, entonces $x \in O(s) \subseteq F^{-1}[U]$, mostrando que F es continua.

Ahora, sea $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq P$ y mostremos que $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in P$ y $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in P$. Para cada $n \in \omega$, sea $F_n \subseteq X \times \mathcal{N}$ un conjunto cerrado tal que

$$A_n = \{x : \exists a\, (x, a) \in F_a\}.$$

Así

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n\in\omega} A_n &\Leftrightarrow \exists n\, \exists a\, (x,a) \in F_n \\ &\Leftrightarrow \exists a\, \exists b\, (x,a) \in F_{b(0)} \\ &\Leftrightarrow \exists c\, (x, c_{(0)}) \in F_{c_{(1)}(0)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n\in\omega} A_n &\Leftrightarrow \forall n\, \exists a\, (x,a) \in F_n \\ &\Leftrightarrow \exists c \forall n\, (x, c_{(n)}) \in F_n \\ &\Leftrightarrow \exists c\, (x,c) \in \bigcap_{n\in\omega} \{(x,c) : (x, c_{(n)}) \in F_n\} \end{aligned}$$

Por lo que $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ es la proyección del conjunto cerrado $\{(x,c) : (x, c_{(0)}) \in F_{c_{(1)}(0)}\} \subseteq X \times \mathcal{N}$ y $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ es la proyección de una intersección de los conjuntos cerrados $\{(x,c) : (x, c_{(n)}) \in F_n\} \subseteq X \times \mathcal{N}$.

Por lo tanto, cualquier conjunto de Borel de X pertenece a P y así, cualquier boreliano es la proyección de algún conjunto cerrado en $X \times \mathcal{N}$. ■

Teorema 4.16. Sea X un espacio polaco. Entonces, cualquier conjunto de Borel en X es analítico.

Demostración: Sea $B \subseteq X$ de Borel. Entonces existe $C \subseteq X \times \mathcal{N}$, cerrado, tal que $\pi_1(C) = B$. Como C es cerrado entonces C es analítico. Sea $g : \mathcal{N} \to X \times \mathcal{N}$ continua tal que $g[\mathcal{N}] = C$. De modo que $\pi_1[g[\mathcal{N}]] = \pi_1[C] = B$, mostrando que B es analítico. ■

Teorema 4.17. *Sean X un espacio polaco y $A \subseteq X$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *A es un conjunto analítico.*

2. A es la imagen continua de un conjunto B, donde B es de Borel en algún espacio polaco Y.

3. A es la proyección de un conjunto de Borel en $X \times Y$, para algún espacio polaco Y.

4. A es la proyección de un conjunto cerrado en $X \times \mathcal{N}$

Demostración: Las implicaciones 4) $\Rightarrow$ 3), 3)$\Rightarrow$ 2) y 2)$\Rightarrow$ 1) son consecuencia inmediata de los teoremas 4.14, 4.15 y 4.16.

1) $\Rightarrow$ 4): Sea $A \subseteq X$, analítico. Entonces existe una función f de $\mathcal{N}$ en X, continua, tal que $f[\mathcal{N}] = A$. Consideremos el conjunto $C = \{(f(x), x) : x \in \mathcal{N}\} \subseteq X \times \mathcal{N}$, es claro que C es cerrado y que $\pi_1[C] = f[\mathcal{N}] = A$. ■

4.4. La operación de Suslin

Definición 4.18. Sean $a \in \omega^\omega$, y $a_{\restriction n}$ la sucesión a restringida a n, es decir, $a_{\restriction n} = \langle a_k : k < n \rangle$ y para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $O(s) = \{a \in \omega^\omega : a_{\restriction n} = s\}$ el abierto en $\mathcal{N}$ asociado a s.

Consideremos una familia de conjuntos $\{A_s : s \in \omega^{<\omega}\}$, definimos la *operación de Suslin* aplicada a la familia como

$$\mathcal{A}\{A_s : s \in \omega^{<\omega}\} = \bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} A_{a_{\restriction n}}$$

De la definición de la operación de Suslin, observemos que si $\{B_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ es una familia arbitraria de conjuntos, entonces

$$\bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} B_{a_{\restriction n}} = \bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} (B_{a_{\restriction 0}} \cap \dots \cap B_{a_{\restriction n}})$$

y por tanto $\mathcal{A}\{A_s : s \in \omega^{<\omega}\} = \mathcal{A}\{B_s : s \in \omega^{<\omega}\}$, donde los conjuntos A_s son intersecciones finitas de conjuntos B_s y satisfacen que si $s \subseteq t$, entonces $A_t \subseteq A_s$, es decir $A_s = \bigcap\{B_t : t \subseteq s\}$.

Teorema 4.19. *Un conjunto A en un espacio Polaco X es analítico si y solamente si es el resultado de una operación de Suslin aplicado a una familia de conjuntos cerrados.*

Demostración: Sea $\{F_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ una familia de conjuntos cerrados en X. Veamos que $A = \mathcal{A}\{F_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ es analítico.

Tenemos que $x \in A$ si y solamente si existe $a \in \omega^\omega$ tal que

$$x \in \bigcap_{n\in\omega} F_{a\restriction n}$$

si y solamente si

$$(x, a) \in \bigcap_{n\in\omega} B_n$$

donde $B_n = \{(x, a) : x \in F_{a\restriction n}\}$. Cada B_n es un conjunto de Borel en $X \times \mathcal{N}$ por ser cerrado, luego por el teorema 4.17, A es analítico.

Por otro lado, si $A \subseteq X$ es analítico entonces existe una función $f : \mathcal{N} \to X$ continua tal que $f[\mathcal{N}] = A$. Para cada $a \in \mathcal{N}$ afirmamos que:

$$\bigcap_{n\in\omega} \overline{f[O(a_{\restriction n})]} = \{f(a)\}.$$

Como para todo $n \in \omega$, $a_{\restriction n} \subseteq a$, entonces para todo $n \in \omega$, $a \in O(a_{\restriction n})$, lo que implica que $f(a) \in \bigcap_{n\in\omega} f[O(a_{\restriction n})] \subseteq \bigcap_{n\in\omega} \overline{f[O(a_{\restriction n})]}$.

Para la otra contención, sea $x \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{f[O(a_{\restriction n})]}$ y veamos que $x = f(a)$. Sea $n \in \omega$ con $n \neq 0$. Entonces $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap f[O(a_{\restriction n})] \neq \emptyset$. Sea $y_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap f[O(a_{\restriction n})]$. Entonces existe $b_n \in O(a_{\restriction n}$ tal que $f(b_n) = y_n$.

Notemos que y_n converge a x pues $y_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ y b_n converge a a pues $b_n \in O(a_{\restriction n}$. Como f es continua, entonces $f(b_n) = y_n$ converge a $f(a)$, lo que implica que $x = f(a)$.

Finalmente,

$$A = f[\mathcal{N}] = \bigcup_{a\in\omega^\omega} \{f(a)\} = \bigcup_{a\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} \overline{f[O(a_{\restriction n})]} = \mathcal{A}\{\overline{f[O(s)]} : s \in \omega^{<\omega}\}.$$

■

En el capítulo 3 hablamos de cuando un conjunto en un espacio topológico tiene la propiedad de Baire. Recordemos que un conjunto A tiene la propiedad de Baire si existe un abierto G de X de tal manera que $A \triangle G$ es magro. Una consecuencia inmediata del siguiente resultado es que cualquier conjunto boreliano tiene la propiedad de Baire.

Teorema 4.20. *Sea X un espacio topológico. La familia de conjuntos que tienen la propiedad de Baire forman una σ-álgebra en X.*

Demostración: Es claro que $\emptyset$ y X tienen la propiedad de Baire. Por otro lado, notemos que si G es un conjunto abierto, entonces $\overline{G} \setminus G$ es denso en ninguna parte. Si $A \subseteq X$ tiene la propiedad de Baire, entonces $A \triangle G$ es magro, de modo que $(A \triangle G) \cup (\overline{G} \setminus G) \supseteq A \triangle \overline{G}$ es magro, pero, $A \triangle \overline{G} = (X \setminus A) \triangle (X \setminus \overline{G})$, mostrando que $X \setminus A$ tiene la propiedad de Baire.

Finalmente, si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia que tiene la propiedad de Baire, entonces, para cada $n \in \omega$ existe G_n conjunto abierto tal que $A_n \triangle G_n$ es magro.

Luego, $\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \triangle \left(\bigcup_{n\in\omega} G_n\right) \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(A_n \triangle G_n)$, mostrando que $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ es magro. ■

Teorema 4.21. *Para cualquier conjunto S de un espacio polaco X, existe un conjunto $A \supseteq S$ que tiene la propiedad de Baire y que cada vez que un conjunto $Z \subseteq A \setminus S$ tenga la propiedad de Baire, entonces Z es magro.*

Demostración: Consideremos $\mathcal{O}$ una base numerable de X (por ser X separable y completamente metrizable, entonces es segundo numerable) y sea $S \subseteq X$. Sea

$$D(S) = \{x \in X : \text{ para todo } U \in \mathcal{O} \text{ tal que } x \in U, U \cap S \text{ no es magro}\}$$

Observemos que $X \setminus D(S) = \bigcup\{U \in \mathcal{O} : U \cap S$ es magro$\}$, por lo que $D(S)$ es cerrado. Además, $S \setminus D(S) = \bigcup\{U \cap S : U \in \mathcal{O}, U \cap S$ es magro$\}$. Como $\mathcal{O}$ es numerable, entonces $S \setminus D(S)$ es magro.

Sea $A = S \cup D(S)$. Notemos que A lo podemos escribir como $A = (S \setminus D(S)) \cup D(S)$. Como A es la unión de un conjunto magro y un conjunto cerrado, entonces A tiene la propiedad de Baire.

Sea $Z \subseteq A \setminus S$ tal que Z tiene la propiedad de Baire. Veamos que Z es magro. Como Z tiene la propiedad de Baire, entonces existe un conjunto abierto U tal que $Z \triangle U$ es magro. En particular $U \setminus Z \subseteq Z \triangle U$ es magro. Como $U \cap S \subseteq U \setminus Z$, entonces $U \cap S$ es magro. Si suponemos que Z no es magro entonces $U \cap Z$ es distinto de vacío. Sea $x \in U \cap Z$. Debido a que $Z \subseteq D(s)$, entonces $x \in D(S)$ y como $x \in U$, entonces $U \cap S$ no es magro, lo cual es contradictorio. Por lo tanto Z es magro. ∎

Teorema 4.22. Todo conjunto analítico en un espacio polaco X tiene la propiedad de Baire.

Demostración: Sean X un espacio polaco y $A \subseteq X$ analítico. Sea $f : \mathcal{N} \to X$ una función continua tal que $f[\mathcal{N}] = A$. Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, sea $A_s = f[O(s)]$. Como A es analítico, por la demostración del teorema 4.19, tenemos que,

$$A = \mathcal{A}\{A_s : s \in \omega^{<\omega}\} = \mathcal{A}\{\overline{A_s} : s \in \omega^{<\omega}\}, \tag{4.1}$$

y para cada $s \in \omega^{<\omega}$,

$$A_s = \bigcup_{n \in \omega} A_{s^\frown n}.$$

Por el teorema 4.21, para cada A_s, existe $B_s \supseteq A_s$ de tal manera que B_s tiene la propiedad de Baire y para todo $Z \subseteq B_s \setminus A_s$ que tenga la propiedad de Baire, Z es magro. Más aún, como $\overline{A_s}$ es boreliano y en consecuencia tiene la propiedad de Baire y debido a la ecuacion (4.1), podemos elegir a B_s tal que $A_s \subseteq B_s \subseteq \overline{A_s}$.

Sea $B = B_\emptyset$, como B tiene la propiedad de Baire, basta probar que $B \setminus A$ es magro para que A tenga la propiedad de Baire.

Ya que $A_s \subseteq B_s \subseteq \overline{A_s}$, y debido a la igualdad (4.1) , entonces

$$A = \mathcal{A}\{B_s : s \in \omega^{<\omega}\}.$$

Por lo que

$$B \setminus A = B \setminus \bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} B_{a \upharpoonright n},$$

por definición de la operación de Suslin. Afirmamos que

$$B \setminus \bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} B_{a \upharpoonright n} \subseteq \bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} \left(B_s \setminus \bigcup_{k \in \omega} B_{s \frown k} \right).$$

Sea $x \in B \setminus \bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} B_{a \upharpoonright n}$ y supongamos que x no pertenece a $\bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} \left(B_s \setminus \bigcup_{k \in \omega} B_{s \frown k} \right)$. Entonces, para cada $s \in \omega^{<\omega}$, x no pertenece a B_s o x pertenece a $\bigcup_{k \in \omega} B_{s \frown k}$.

No puede suceder que x no pertenezca a B_s pues de ser el caso, x no pertenecería a $B_\emptyset = B$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{k \in \omega} B_{s \frown k}$.

Así, existe $k \in \omega$ tal que $x \in B_{s \frown k}$, de modo que existe $k_0 \in \omega$ tal que $x \in B_{\langle k_0 \rangle}$, luego $k_1 \in \omega$ tal que $x \in B_{\langle k_0, k_1 \rangle}$, etc.

Sea $a = \langle k_0, k_1, k_2, ... \rangle$; entonces $x \in \bigcap_{n \in \omega} B_{a \upharpoonright n}$ y en consecuencia $x \in \bigcup_{a \in \omega^\omega} \bigcap_{n \in \omega} B_{a \upharpoonright n}$, contradiciendo que $x \in B \setminus A$.

Por lo tanto, tenemos que

$$B \setminus A \subseteq \bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} \left(B_s \setminus \bigcup_{k \in \omega} B_{s \frown k} \right).$$

Como $\omega^{<\omega}$ es numerable, basta demostrar que para cada $s \in \omega^{<\omega}$, $B_s \setminus \bigcup_{k \in \omega} B_{s \frown k}$ es magro.

Sea $s \in \omega^{<\omega}$ y sea $Z = B_s \setminus \bigcup_{k\in\omega} B_{s\frown k}$, entonces

$$Z = B_s \setminus \bigcup_{k\in\omega} B_{s\frown k} \subseteq B_s \setminus \bigcup_{k\in\omega} A_{s\frown k} = B_s \setminus A_s.$$

Como $Z \subseteq B_s \setminus A_s$ y Z tiene la propiedad de Baire, entonces Z es magro. Entonces

$$\bigcup_{s\in\omega^{<\omega}} \left(B_s \setminus \bigcup_{k\in\omega} B_{s\frown k} \right)$$

es magro. En consecuencia $B \setminus A$ es magro y por tanto A tiene la propiedad de Baire. ■

Teorema 4.23. ***(Galvin-Prikry-Silver)*** Todo conjunto analítico de $[\omega]^\omega$ con la topología de Ellentuck es Ramsey.

Demostración: Sea $A \subseteq [\omega]^\omega$ analítico. Entonces, por el teorema 4.22, A tiene la propiedad de Baire. En virtud del teorema 3.17, A es completamente Ramsey, y en consecuencia A es Ramsey. ■

Capítulo 5

Dicotomía

Ya conocemos un poco el comportamiento de $[\omega]^\omega$ con la topología de Ellentuck, sin embargo, no hemos dado muchas propiedades topológicas que cumple este espacio. Si consideramos dos espacios (X, τ_1), (Y, τ_2), diremos que X contiene una *copia cerrada* de Y si existe $A \subseteq X$ tal que A como subespacio de X es homeomorfo a Y y A es cerrado con la topología de X.

Un resultado de lo más curioso, interesante, y además completamente topológico es que todo conjunto perfecto, aquel que contiene a todos sus puntos de acumulación, en $[\omega]^\omega$ o bien tiene una copia cerrada de la recta de Sorgenfrey o o bien, de los números racionales; la recta de Sorgenfrey es la topología que se le da a la recta real cuya base esta formada por los intervalos semiabiertos.

5.1. La recta de Sorgenfrey

La topología de Sorgenfrey está definida sobre el conjunto de los números reales, sin embargo, haciendo uso de que $\mathbb{R}$ es homeomorfo al intervalo $(0, 1)$, la definiremos en ese conjunto.

Sean $X = (0,1] \subseteq \mathbb{R}$ y $\beta = \{A \subseteq (0,1] : A = (a,b], a,b \in (0,1]\}$. El conjunto β es una base para una topología sobre X. (Puede consultarse en [13]). El espacio topológico generado por esta base es conocido como la *topología de Sorgenfrey* o *recta de Sorgenfrey* y la denotaremos por $\mathcal{S}$.

Es común en muchos textos que la recta de Sorgenfrey esté definida sobre el espacio $[0,1)$ y sea con los intervalos semiabiertos de la forma $[a,b)$. No hay diferencia si usamos los intervalos semiabiertos $(a,b]$ y el espacio $(0,1]$, la construcción de la topología es análoga, sin embargo, seguimos la notación de [14] pues resulta de mayor utilidad en la demostración de varios teoremas que enunciaremos y demostraremos a lo largo de este capítulo.

La topología usual de $\mathbb{R}$ y la topología de Sorgenfrey son distintas pues no tienen las mismas propiedades topológicas, por ejemplo, $\mathcal{S}$ es primero numerable pero no segundo numerable; $\mathbb{R}$ con la topología usual es metrizable pero $\mathcal{S}$ no, entre muchas otras propiedades que pueden consultarse en [13] y [18].

Van Douwen en [17], Popov en [15] e Ismail en [9] demostraron que $([\omega]^\omega, \tau_E)$ contiene una copia lineal cerrada de $\mathcal{S}$. El término *lineal* hace referencia a lineal con respecto a la contención en cadenas. A continuación daremos la demostración de este hecho que dió Ismail en [9], introduciendo una topología auxiliar: la topología de Vietoris.

Definición 5.1. Sea (X,τ) un espacio topológico. Definimos el *hiperespacio de X* como

$$Hip(X.\tau) = \{F \subseteq X : F = \overline{F}\}$$

En muchos textos, al hiperespacio de (X,τ) lo denotan por 2^X, sin embargo, usaremos la notación $Hip(X,\tau)$ para evitar posibles confusiones con el conjunto de funciones cuyo dominio es X e imagen el $\{0,1\}$.

Definición 5.2. Sean (X, τ) un espacio topológico y $U_1, ..., U_n, U \in \tau$. Definimos el conjunto *vietórico* con respecto a estos conjuntos como:

$$\langle U_1, ..., U_n, U\rangle = \{A \in Hip(X, \tau) : \forall i \leq n(A \cap U_i \neq \emptyset) \wedge A \subseteq U\}$$

Lema 5.3. Sea (X, τ) un espacio topológico. El conjunto de vietoricos $\beta = \{\langle U_1, ..., U_n, U\rangle : U_i, U \in \tau\}$ es base para una topología en $Hip(X, \tau)$ a la que llamaremos *topología de Vietoris* y la denotaremos por τ_v.

Demostración: Primero mostremos que $\bigcup \beta = Hip(X, \tau)$. Como $X \in \tau$, podemos considerar $\langle X\rangle \in \beta$. Luego

$$\langle X\rangle = \{A \in Hip(X, \tau) : A \subseteq X\} = Hip(X, \tau).$$

Esto muestra que $Hip(X, \tau) \in \beta$ y en consecuencia $Hip(X, \tau) \subseteq \bigcup \beta$. Por lo tanto $Hip(X\tau) = \bigcup \beta$.

Ahora, sean $A \in Hip(X, \tau), \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta$ tales que $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{U}$ es de la forma $\langle U_1, ..., U_n, U\rangle$ y $\mathcal{V}$ es de la forma $\langle V_1, ..., V_k, V\rangle$, sin perder generalidad, $n \leq k$.

Tomando $\mathcal{W} = \langle U_1, ..., U_n, V_1, ..., V_k, U \cap V\rangle$ se sigue que $\mathcal{W} \in \beta, A \in \mathcal{W}$ y $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Por lo tanto β es base para alguna topología en $Hip(X, \tau)$. ∎

Si consideramos a ω con τ_d la topología discreta, observamos que $[\omega]^\omega \subseteq Hip(\omega, \tau_d)$. Esto nos lleva a buscar una relación entre la topología de Ellentuck y la topología de Vietoris.

Lema 5.4. Sea ω con la topología discreta. Entonces en $[\omega]^\omega$ las topologías de Vietoris y Ellentuck son equivalentes.

Demostración: Sean $A \in [\omega]^\omega$ y $U_1, ...U_n, U$ abiertos de ω tales que $A \in \langle U_1, ..., U_n, U\rangle$. Entonces para todo $i \leq n, A \cap U_i \neq \emptyset$ y $A \subseteq U$. Para cada $i \leq n$, sea $a_i = \min_{(} A \cap U_i)$. Sea $a = \max\{a_i : i \leq n\}$. Tomando $s = \{x \in A : x \leq a\}$, tenemos que $A \in [s, U \setminus s]^\omega$.

Ahora mostremos que $[s, U \setminus s]^\omega \subseteq \langle U_1, ..., U_n, U\rangle$: Sea $Y \in [s, U \setminus s]^\omega$, entonces $s \subseteq Y$ y $Y \setminus s \subseteq U \setminus s$. Esto implica que para todo $i \leq n$, $Y \cap U_i \neq \emptyset$ pues $a_i \in Y \cap U_i$ y $Y \subseteq U$ mostrando que $Y \in \langle U_1, ..., U_n, U\rangle$. En consecuencia, τ_E refina a τ_v.

Ahora, si $s \in [\omega]^{<\omega}$ y $U \in [\omega]^\omega$ tales que $A \in [s, U]^\omega$, entonces $s = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$ y $A \setminus s \subseteq U$. Para todo $i \leq n$, sea $U_i = \{a_i\}$. Cada U_i es abierto al igual que U pues ω es discreto. Así, para todo $i \leq n$, $A \cap U_i \neq \emptyset$ y $A \subseteq U \cup s$ mostrando que $A \in \langle U_1, ..., U_n, U \cup s\rangle$.

Veamos que $\langle U_1, ..., U_n, U \cup s\rangle \subseteq [s, U]^\omega$: Sea $Y \in \langle U_1, ..., U_n, U \cup s\rangle$, entonces, para todo $i \leq n$, $Y \cap U_i \neq \emptyset$ y $Y \subseteq U \cup s$. De modo que, como $\{U_i\} = \{a_i\}$, entonces para todo $i \leq n$, $s \subseteq Y$ y $Y \setminus s \subseteq U$, mostrando que $Y \in [s, U]^\omega$.

En consecuencia, τ_v refina a τ_E y por lo tanto las topologías de Vietoris y Ellentuck en $[\omega]^\omega$ son equivalentes. ∎

Lema 5.5. Sean $\mathbb{Q}$ y ω ambos con la topología discreta. Entonces $[\mathbb{Q}]^\omega$ es homeomorfo a $[\omega]^\omega$, ambos con la topología de Vietoris (respectivamente con la topología de Ellentuck).

Demostración: Sea $h : \omega \to \mathbb{Q}$ una biyección. Como ω y $\mathbb{Q}$ son discretos entonces h es continua y abierta. En consecuencia también es homeomorfismo. Definamos $F : ([\omega]^\omega, \tau_v) \to ([\mathbb{Q}]^\omega], \tau_v)$ como $F(X) = h[X]$. Como h es biyectiva entonces F también lo es.

Para mostrar continuidad, sea $V = \langle U_1, ..., U_n, U\rangle$ un abierto básico de $[\mathbb{Q}]^\omega$ y $Y \in V$. Entonces para todo $i \leq n$, $Y \cap U_i \neq \emptyset$ y $Y \subseteq U$, de manera que para todo $i \leq n$, $h^{-1}[Y] \cap h^{-1}[U_i] \neq \emptyset$ y $h^{-1} \subseteq h^{-1}[U]$ y en consecuencia $h^{-1}[Y] \in \langle h^{-1}[U_1], ..., h^{-1}[U_n], h^{-1}[U]\rangle = F^{-1}[V]$, mostrando que F es continua.

Con un razonamiento análogo, F es abierta y así $[\omega]^\omega$ es homeomorfo a $[\mathbb{Q}]^\omega$ con la topología de Vietoris. Por el lema 5.4, también son homeomorfos con la topología de Ellentuck. ■

Teorema 5.6. *El espacio $[\mathbb{Q}]^\omega$ con la topología de Vietoris contiene una copia lineal cerrada de $\mathcal{S}$.*

Demostración: Diremos que $C \subseteq \mathbb{Q}$ es *corte* de $\mathbb{Q}$ si C no tiene elemento máximo y para cada $p \in C$, $(-\infty, p] \cap \mathbb{Q} \subseteq C$. Si C y D son cortes y C es un subconjunto propio de D lo denotaremos como $C < D$. Además, $(C, D]$ denotará al conjunto de todos los cortes que contiene a C propiamente y estan contenidos en D, es decir, $(C, D] = \{E \subseteq \mathbb{Q} : C \subsetneq E \subseteq D, E \text{ es corte}\}$.

Sea $X = \{C \in [\mathbb{Q}]^\omega, C \text{ es corte}\}$. Como cualesquiera dos cortes (elementos de X) son comparables con respecto a la contención entonces X es lineal.

Recuerdese que $\mathbb{R}$ puede ser definido como cortes de $\mathbb{Q}$ con el orden de la conteción, así, un conjunto $(C, D] \cap X$ tiene la forma de un abierto básico de Sorgenfrey relativo a X, por lo que dado un punto E en algún intervalo de la forma $(C, D]$ basta encontrar un vietorico V tal que $E \in V \cap X \subseteq (C, D] \cap X$ e inversamente si $E \in V \cap X$ es un vietorico relativo a X, entonces basta encontrar $(C, D]$ tal que $E \in (C, D] \cap X \subseteq V \cap X$. Esto mostraría que X es homeomorfo a $\mathcal{S}$.

Sean C y D cortes tales que $C < D$ y sea $E \in (C, D]$. Entonces para cualquier $q \in E \setminus C$, $E \in \langle \{q\}, D\rangle \cap X$. Para mostrar la contención $\langle \{q\}, D\rangle \cap X \subseteq (C, D]$, sea $Y \in \langle \{q\}, D\rangle \cap X$. Entonces Y es corte, $q \in Y$ y $Y \subseteq D$. Como Y es corte, dado que q no pertenece a C y los cortes son comparables, se sigue que $C \subsetneq Y \subseteq D$, mostrando que $Y \in (C, D]$. Por lo tanto, la topología de Vietoris refina a la topología de Sorgenfrey.

Por otra parte, sea $V = \langle U_1, ..., U_n, U\rangle \cap X$ y sea $E \in V$. Entonces para todo $i \leq n$, $E \cap U_i \neq \emptyset$, $E \subseteq U$ y E es corte. Luego, para cada $i \leq n$, sea

$a_i \in E \cap U_i$. Tomemos $F = \{a_1, ..., a_n\}$ y consideremos $a_k = \text{máx}(F)$.

Si definimos $C = \{x \in \mathbb{Q} : x < a_k\}$, entonces C es corte. Además, C está contenido propiamente en E pues $a_k \in E \setminus C$, de modo que $E \in (C, E]$.

Para mostrar que $(C, E] \subseteq V$, sea $A \in (C, E]$. Entonces $C \subsetneq A \subseteq E$. De modo que para todo $i \neq k$ con $i \leq n$, $a_i \in C \subsetneq A$. El elemento a_k también pertenece a A ya que de no ser así, como A es corte, se tendría que $A \subseteq C$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, para todo $i \leq n$, $A \cap U_i \neq \emptyset$ y $A \subseteq E \subseteq U$, mostrando que $(C, E] \subseteq V$ y así, la topología de Sorgenfrey refina a la de Vietoris. Por lo tanto, las topologías de Sorgenfrey y Vietoris son equivalentes en X.

Finalmente, veamos que X es cerrado: Sea $Y \in [\mathbb{Q}]^\omega \setminus X$ y veamos que existe un vietórico V tal que $Y \in V$ y $V \cap X = \emptyset$. Como Y no pertenece a X, entonces Y no es corte. Tenemos dos casos: Y tiene máximo o existe $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $(-\infty, q) \cap \mathbb{Q} \nsubseteq Y$.

Si Y tiene máximo, entonces para $m = \text{máx}(Y)$ y $n = 1$, definamos $U_1 = \{m\}$ y $U = Y$. Así, $Y \in V = \langle U_1, U \rangle$ y si $Z \in V$, entonces Z tiene máximo, a saber m, de modo que Z no es corte y por tanto, no pertenece a X.

Por otro lado, si existe $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $(-\infty, q) \cap \mathbb{Q} \nsubseteq Y$, entonces existe $p \in Y$ tal que $q < p$. Sea $n = 1$, $U_1 = \{p\}$ y $U = Y \setminus \{q\}$. Entonces, $Y \in V = \langle U_1, U \rangle$ y si $Z \in V$, entonces $p \in Z$ y q no pertenece a Z, es decir, Z no es corte y así Z no pertenece a X.

Por lo tanto X es cerrado y así, hemos probado que X es una copia lineal cerrada de $\mathcal{S}$. ■

Por el lema 5.5, $[\mathbb{Q}]^\omega$ es homeomorfo a $[\omega]^\omega$, ambos espacios con la topología de Vietoris y por el lema 5.4 son homeomorfos con la topología de Ellentuck. Podemos entonces concluir que $[\omega]^\omega$ con la topología de Ellentuck tiene una copia lineal cerrada de $\mathcal{S}$.

Definición 5.7. Sean X e Y dos conjuntos, diremos que X e Y son *incomparables* si $X \nsubseteq Y$ y $Y \nsubseteq X$ y lo denotaremos por $X \perp Y$. Diremos que son *comparables* en otro caso y lo denotaremos por $X \sim Y$.

Un subconjunto $A \subseteq [\omega]^\omega$ es un *conjunto incomparable* si cualesquiera dos de sus elementos son incomparables.

Una familia de subconjuntos $\mathcal{D} = \{U_i \subseteq [\omega]^\omega : i \in I \subseteq \omega\}$ es una cadena (finita o infinita) si siempre que $i < j$, $x \in U_i$, y $y \in U_j$ implique que $x \subseteq y$.

Notación: Si $x, y \in [\omega]^{\leq\omega}$, entonces $[x, y] = \{z \in [\omega]^{\leq\omega} : x \subseteq z \subseteq y\}$.

Una observación útil es que dados dos conjuntos $X, Y \in [\omega]^\omega$, el intervalo $[X, Y]$ es cerrado con la topología de Vietoris y equivalentemente con la topología de Ellentuck:

Dado Z que no pertenece a $[X, Y]$, entonces $X \nsubseteq Z$ o $Z \nsubseteq Y$. Si $X \nsubseteq Z$, consideremos $p \in Z$. Para $n = 1$, sea $U_1 = \{p\}$, luego $Z \in V = \langle U_1, Z\rangle$ y $V \cap [X, Y] = \emptyset$. Por otro lado, si $Z \nsubseteq Y$, entonces existe $q \in Z$ tal que q no pertenece a Y. Para $n = 1$, sea $U_1 = \{q\}$, luego $Z \in V = \langle U_1, Z\rangle$ y $V \cap [X, Y] = \emptyset$.

Aprovechando la linealidad de $\mathcal{S}$ con respecto a la contención, podemos dar una caracterización de una copia lineal cerrada de $\mathcal{S}$ en $[\omega]^\omega$ en términos de conjuntos incomparables y cadenas:

Teorema 5.8. *Denotemos por* $\mathbb{Q}_1$ *a los racionales en el intervalo* $(0, 1]$, *y sea* $M \subseteq [\omega]^\omega$ *cerrado con la topología de Ellentuck. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *M contiene una copia lineal cerrada de $\mathcal{S}$.*

2. *M contiene un conjunto no vacío X sin puntos aisaldos y es tal que*

para todo $p \in X$, y para todo $A \subseteq X$ incomparable, p no es punto de acumulación de A.

3. *Hay una función creciente $\phi : \langle \mathbb{Q}_1, \leq \rangle \to \langle M, \subseteq \rangle$.*

Los incisos 1 y 3 son los de mayor interés; el otro inciso, aunque importante, unicamente ayuda a ilustrar la caracterización de $\mathcal{S}$ en $[\omega]^\omega$. Para la demostración de este teorema nescesitaremos tres lemas, uno de ellos es un resultado muy conocido en la topología de Vietoris:

Lema 5.9. Sea M un conjunto cerrado de (X, τ_V). Si $\mathcal{C} \subseteq M$ es una cadena de conjuntos bien ordenada con la contención, entonces $\bigcup \mathcal{C} \in M$.

Demostración: Sea M un conjunto cerrado y $\mathcal{C} \subseteq M$ una cadena de conjuntos bien ordenada con la contención. Basta demostrar que $D = \bigcup \mathcal{C}$ es un punto de acumulación de M, pues al ser M cerrado, contiene a todos sus puntos de acumulación.

Sea $V = \langle U_1, ...U_n, U \rangle$ un abierto tal que $D \in V$. Entonces, para todo $i \in n+1$, $D \cap U_i \neq \emptyset$ y $D \subseteq U$. Para cada $i \in n+1$, sea $x_i \in V \cap D$.

Como cada $x_i \in D$, entonces existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $x_i \in C_i$. Sea $C = \max\{C_i : i \in n+1\}$ con la contención. Entonces, para todo $i \in n+1$, $C \cap U_i \neq \emptyset$. Luego, como $C \in \mathcal{C}$, entonces $C \subseteq \bigcup \mathcal{C} = D \subseteq U$ y también $C \in M$.

Se sigue que $C \in V \cap M$, mostrando que $\bigcup \mathcal{C}$ es punto de acumulación de M y por lo tanto, $\bigcup \mathcal{C} \in M$. ■

Lema 5.10. *Sea $X \subseteq [\omega]^\omega$ un conjunto que no tiene puntos aislados. Si existe $y \in X$ tal que y no es punto de acumulación de ningún $A \subseteq X$ incomparable, entonces existen un punto $z \in X$ y un conjunto U abierto relativo a X tal que y es punto de acumulación de U y $U \subseteq [z, y]$.*

Demostración: Supongamos que $X \subseteq [\omega]^\omega$ no tiene puntos aislados y que existe $y \in X$ que no es punto de acumulación de ningún $A \subseteq X$ incomparable.

Consideremos el abierto $[\emptyset, y]^\omega$. Como y no es un punto aislado de X entonces podemos tomar $z_0 \in (X \cap [\emptyset, y]^\omega) \setminus \{y\}$. El conjunto $[y \cap 1, y \setminus 1]^\omega \cap X$ es un abierto relativo a X. Si sucede que

$$[y \cap 1, y \setminus 1]^\omega \cap X \subseteq [\emptyset, z_0] \cup [z_0, y],$$

podemos tomar $N \geq 1$ de tal manera que $z_0 \cap N \subsetneq y \cap N$, y de esta manera $U_1 = [y \cap N, y \setminus N]^\omega \cap X \subseteq [z_0, y]$, con U_1 abierto relativo a X y que tiene a y como punto de acumulación, que es lo que se quería demostrar.

En caso contrario, si

$$[y \cap 1, y \setminus 1]^\omega \cap X \nsubseteq [\emptyset, z_0] \cup [z_0, y],$$

entonces existe $z_1 \in [y \cap 1, y \setminus 1]^\omega \cap X \setminus ([\emptyset, z_0] \cup [z_0, y])$. Esto implica que $z_0 \nsubseteq z_1$ y $z_1 \nsubseteq z_0$, es decir, $z_0 \perp z_1$ (son incomparables). Si sucede que

$$[y \cap 2, y \setminus 2]^\omega \cap X \subseteq \bigcup_{i<2} [\emptyset, z_i] \cup [z_i, y],$$

entonces podemos tomar $N \geq 2$ de tal manera que para $i < 2$, $z_i \cap N \subsetneq y \cap N$ y así, $U_2 = [y \cap N, y \setminus N]^\omega \cap X \subseteq \bigcup_{i<2} [z_i, y]$. Si tomamos $z = z_0 \cup z_1$, entonces $U_2 \subseteq [z, y]$.

En caso contrario, entonces existe $z_2 \in [y \cap 2, y \setminus 2]^\omega \cap X \setminus \bigcup_{i<2} [\emptyset, z_i] \cup [z_i, y]$, lo cual implicaría que el conjunto $\{z_0, z_1, z_2\}$ es incomparable.

Procediendo de manera recursiva, supongamos que para $k < \omega$, hemos construido el conjunto $\{z_i : i < k\} \subseteq X \cap [\emptyset, y]^\omega$ incomparable.

Si

$$[y \cap k, y \setminus k]^\omega \cap X \nsubseteq \bigcup_{i<k} ([\emptyset, z_i] \cup [z_i, y]),$$

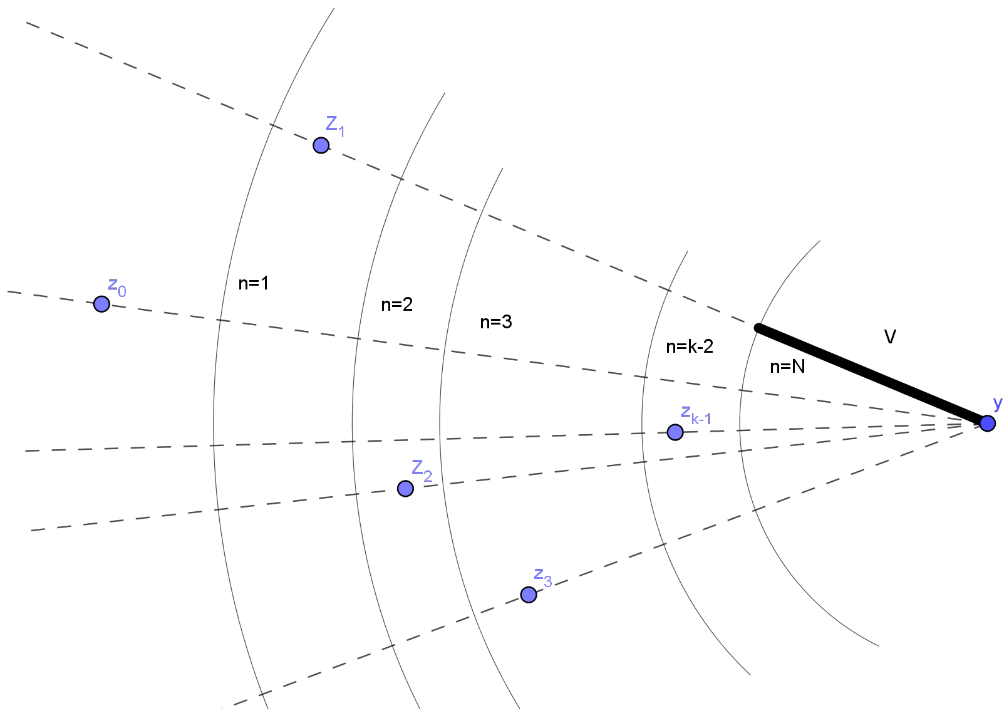

Figura 5.1: *Esquema ilustrativo del lema 5.10. Un rayo de y representa a los subconjuntos infinitos de y que son comparables entre ellos. Los semiarcos representan las vecindades $[y \cap n, y \setminus n]^\omega$ con $n \in \omega$. El segmento V es el abierto deseado. (En este esquema, $V \subseteq [z_1, y]$).*

entonces podriamos tomar $z_k \in ([y \cap 1, y \setminus 1]^\omega \cap X) \setminus \bigcup_{i<k}([\emptyset, z_i] \cup [z_i, y])$, de tal manera que $\{z_i : i < k\}$ vuelve a ser incomparable. Esto demostraría que el conjunto $\{z_i : i < \omega\}$ es incomparable y además tiene como punto de acumulación a y, pues para todo $N \geq k$, $z_N \in [y \cap k, y \setminus k]^\omega$ y $\beta_y = \{[y \cap k, y \setminus k]^\omega : k < \omega\}$ es una base local de y, contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto existe $k \in \omega$ y una sucesión finita $\{z_i : i < k\} \subseteq X \cap [\emptyset, y] \setminus \{y\}$ tal que

$$([y \cap k, y \setminus k]^\omega \cap X) \subseteq \bigcup_{i<k}([\emptyset, z_i] \cup [z_i, y]).$$

Sea $N \geq k$ tal que $z_i \cap N \subsetneq y \cap N$ para toda $i < k$. Entonces $[y \cap N, y \setminus$

$N]^\omega \cap X \subseteq \bigcup_{i<k}[z_i, y]$.

Esto parte a $[y \cap N, y \setminus N]^\omega \cap X$ en una cantidad finita de pedazos de la forma $[z_i, y]$. Nuevamente, tomando $z = \bigcup_{i<k}$, entonces $[y \cap N, y \setminus N]^\omega \cap X \subseteq [z, y]$ y así, el conjunto $[y \cap N, y \setminus N]^\omega \cap X$ satisface ser abierto relativo a X, contenido en $[z, y]$ y que tiene a y como punto de acumulación. ■

El siguiente lema es una generalización del lema 5.10.

Lema 5.11. *Sea $X \subseteq [\omega]^\omega$ un conjunto que no tiene puntos aislados. Si existe $y \in X$ tal que no es punto de acumulación de ningún $A \subseteq X$ incomparable, entonces existen $\{z_i : i \in \omega\} \subseteq X$ y $\{n_i : i \in \omega\} \subseteq \omega$ tales que $\langle([z_i \cap n_i, z_i \setminus n_i]^\omega \cap X) : i < \omega\rangle$ es una cadena de conjuntos no vacíos y el conjunto $\{z_i : i \in \omega\} \subseteq X$ tiene a y como punto de acumulación.*

Demostración: Sea X un conjunto que no tiene puntos aislados y supongamos que existe $y \in X$ tal que y no es punto de acumulación de A, para todo $A \subseteq X$ incomparable. Construiremos la cadena de conjuntos deseada por recursión usando el teorema 5.10.

Por el teorema 5.10, existen $z_0 \in X$ y U_0 abierto relativo a X tales que $U_0 \subseteq [z_0, y]$ y y es punto de acumulación de U_0. Sea $n_0 = 0$ y notemos que $([z_0 \cap n_0, z_0 \setminus n_0]^\omega \cap X) \subseteq [\emptyset, y] \cap X$.

Aplicando el teorema 5.10 a U_0, existen $z_1 \in U_0$ y U_1 abierto relativo a U_0 (y en consecuencia abierto relativo a X) tales que $U_1 \subseteq [z_1, y]$ y y es punto de acumulación de U_1.

Sea $n_1 < \omega$ tal que $([z_1 \cap n_1, z_1 \setminus n_1]^\omega \cap X) \subseteq U_0$. Entonces

$$\langle([z_0 \cap n_0, z_0 \setminus n_0]^\omega \cap X), ([z_1 \cap n_1, z_1 \setminus n_1]^\omega \cap X)\rangle$$

es cadena de conjuntos no vacíos: Sean $a \in ([z_0 \cap n_0, z_0 \setminus n_0]^\omega \cap X)$ y $b \in ([z_1 \cap n_1, z_1 \setminus n_1]^\omega \cap X)$. Como $([z_1 \cap n_1, z_1 \setminus n_1]^\omega \cap X) \subseteq U_0 \subseteq [z_0, y]$, entonces $z_0 \subseteq b \subseteq y$, así $a \subseteq z_0 \subseteq b \subseteq y$, lo que implica que $a \subseteq b$.

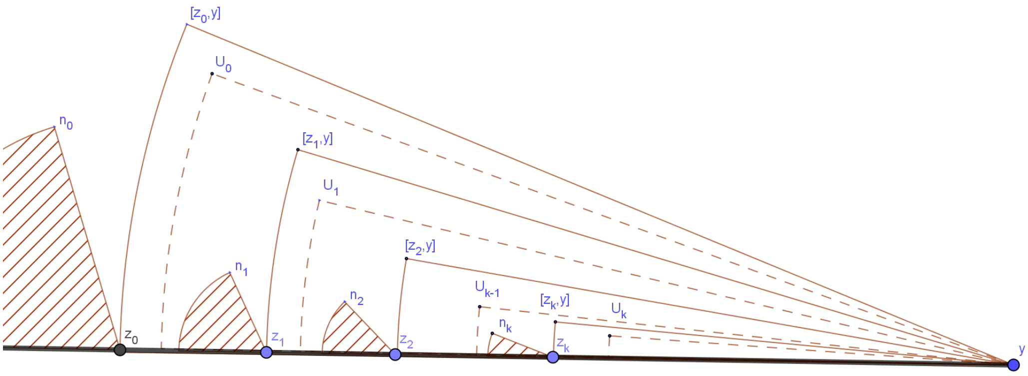

Figura 5.2: *Esquema ilustrativo del lema 5.11. Un dibujo más adecuado se obtendría pensando en estos conjuntos como segmentos lineales, sin embargo, para apresiar las contenciones se les dió grosor. Los semiarcos rellenos representan la cadena de conjuntos* $\langle([z_i \cap n_i, z_i \setminus n_i]^\omega \cap X) : i \in \omega\rangle$.

Procediendo de manera recursiva, supongamos que para $k < \omega$ se han definido las sucesiones $\{z_i \in X : i < k\}$ y $\{n_i \in \omega : i < k\}$, así como el conjunto $U_{k-1} \subseteq [z_{k-1}, y]$ tales que $\langle [z_i \cap n_i, z_i \setminus n_i]^\omega \cap X : i < k\rangle$ es una cadena de conjuntos no vacíos y U_{k-1} es abierto relativo a X con y punto de acumulación de U_{k-1}.

Aplicando nuevamente el teorema 5.10 a U_{k-1}, existen $z_k \in U_{k-1}$ y U_k abierto relativo a X tales que $U_k \subset [z_k, y]$ y y es punto de acumulación de U_k.

Finalmente, tomemos $n_k < \omega$ tal que $([z_k \cap n_k, z_k \setminus n_k]^\omega \cap X) \subseteq U_{k-1}$. La familia $\langle([z_i \cap n_i, z_i \setminus n_i]^\omega \cap X) : i < k+1\rangle$ es una cadena de conjuntos no vacíos, (la prueba es análoga al paso base).

Así, $\langle([z_i \cap n_i, z_i \setminus n_i]^\omega \cap X) : i \in \omega\rangle$ es una cadena de conjuntos no vacíos y por construcción, el conjunto $\{z_i : i < \omega\}$ tiene a y como punto de acumulación. ■

A continuación daremos la demostración del teorema 5.8.

Demostración: (Del teorema 5.8)

Sea $M \subseteq [\omega]^\omega$ cerrado.

(1)$\Rightarrow$ (2): Es inmediato pues $\mathcal{S}$ es no numerable, lineal, sin puntos aislados y ningún punto de $\mathcal{S}$ es punto de acumulación para todo $A \subseteq X$ incomparable. (2)$\Rightarrow$ (3): Sea $X \subseteq M$ un conjunto no numerable, lineal, sin puntos aislados y tal que ningún punto de X es punto de acumulación para todo $A \subseteq X$ incomparable. Mediante el teorema 5.11 construiremos un conjunto denso D en X indexado por $\omega^{<\omega}$ como sigue:

Tomemos $z_\emptyset \in X$ tal que $z_\emptyset$ no es punto de acumulación para todo $A \subseteq X$ incomparable (el cual existe por hipótesis). Consideremos el conjunto $Y = [\emptyset, z_\emptyset]^\omega \cap X$. Aplicando el lema 5.11 a Y, existen z_0, z_1, $z_2, ... \in Y$ y naturales n_0, n_1, $n_2, ... \in \omega$, tales que $\langle ([z_i \cap n, z_i \setminus n_i]^\omega \cap Y) : i < \omega \rangle$ es una cadena de conjuntos no vacíos que tienen a $z_\emptyset$ como punto de acumulación.

Procediendo de manera recursiva, supongamos que para $t \in \omega^{<\omega}$, se han definido para todo $i \in \omega, z_{t^\frown i} \in [z_t \cap n_t, z_t \setminus n_t]^\omega$ y $n_{t^\frown i} \in \omega$ tales que $\langle ([z_{t^\frown i} \cap n_{t^\frown i}, z_{t^\frown i} \setminus n_{t^\frown i}]^\omega \cap X) : i < \omega\rangle$ es una cadena de subconjuntos de $[z_t \cap n_t, z_t \setminus n_t]^\omega$ con z_t como su punto de acumulación.

Para el paso inductivo, tomemos $k \in \omega$ y definamos $s = t^\frown k$. Aplicamos el lema 5.11 al conjunto $Y' = [z_s \cap n_s,\, z_s \setminus n_s]^\omega \cap X$ para obtener puntos $z_{s^\frown 0}, z_{s^\frown 1}, ... \in Y'$ y naturales $n_{s^\frown 0}, n_{s^\frown 1}, ... \in \omega$ tales que $\langle ([z_{s^\frown i} \cap n_{s^\frown i}, z_{s^\frown i} \setminus n_{s^\frown i}]^\omega \cap Y') : i < \omega\rangle$ es una cadena de conjuntos no vacía con z_s como punto de acumulación.

Definamos el conjunto $D' = \{z_s : s \in \omega^{<\omega}\}$. Afirmamos que $D = D' \setminus \{z_\emptyset\}$ es un conjunto lineal, denso, numerable y no tiene máximo. La numerabilidad es clara.

Veamos que D es lineal: Sean z_t, $z_s \in D$. Tenemos tres posibles casos: $t \subseteq s$, $s \subseteq t$ o ($t \nsubseteq s$ y $s \nsubseteq t$):

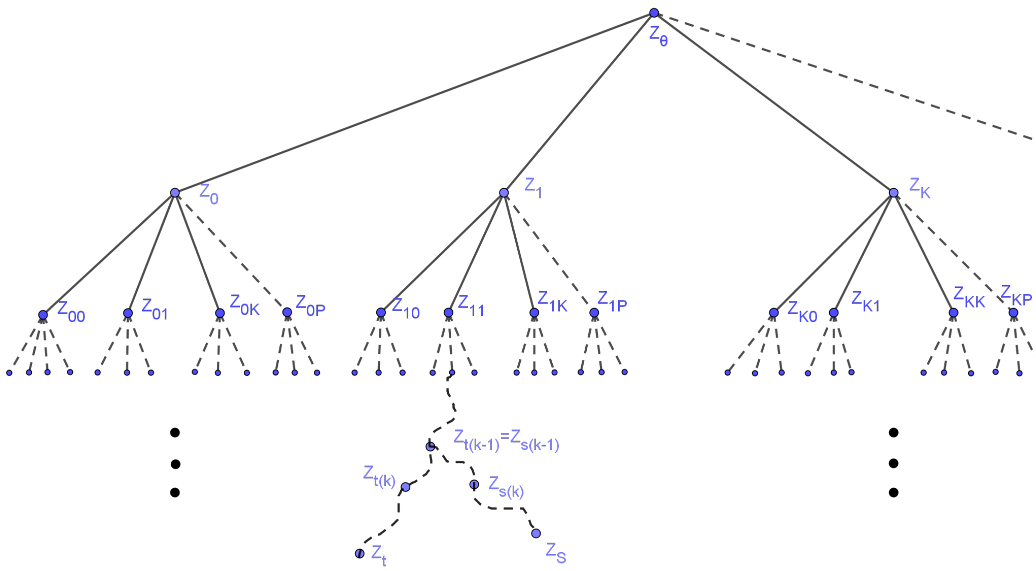

Figura 5.3: *Esquema ilustrativo del lema 5.8. Algunos ejemplos del orden: para todo* $i \in \omega$, $z_0 \subseteq z_i$; *para todo* $i \in \omega$, $z_0 \subseteq z_{1^\frown i}$; $z_{01} \subseteq z_0 \subseteq z_t \subseteq z_s$; $z_s \subseteq z_k$.

Caso 1: Sin perder generalidad supongamos que $t \subseteq s$. Por construcción de D, $\{z_{t^\frown i} : i \in \omega\}$ tiene como punto de acumulación a z_t, lo cual implica que, para todo $i \in \omega$, $z_{t^\frown i} \subseteq z_t$. Como $t \subseteq s$, entonces existe $i \in \omega$ tal que $t^\frown i = t_1 \subseteq s$.

Nuevamente por construcción de D, $\{z_{t_1^\frown i} : i \in \omega\}$ tiene como punto de acumulación a z_{t_1}, lo cual implica que, para todo $i \in \omega$, $z_{t_1^\frown i} \subseteq z_{t_1}$. Como $t_1 \subseteq s$, entonces existe $i \in \omega$ tal que $t_1^\frown i = t_2 \subseteq s$ y $z_{t_1^\frown i} \subseteq z_{t_1} \subseteq z_t$.

Procediendo tantas veces como la diferencia entre la longitud de s con la longitud de t obtenemos que $z_s \subseteq z_t$.

Caso 2: $s \nsubseteq t$ y $t \nsubseteq s$. Sea $k = \min\{n \in \omega : t(n) \neq s(n)\}$. Sin perder generalidad, supongamos que $t(k) < s(k)$ y notemos que $z_{t\restriction k} = z_{s\restriction k}$.

Por el caso 1, $z_t \in [z_{t\restriction k^\frown t(k)} \cap n_k, z_{t\restriction k^\frown t(k)} \setminus n_k]^\omega$ y $z_s \in [z_{t\restriction k^\frown s(k)} \cap$

$n_k, z_{t\restriction k^\frown s(k)} \setminus n_k]^\omega$. Luego, como $\langle [z_{t\restriction k^\frown i} \cap n_i, z_{t\restriction k^\frown i} \setminus n_i]^\omega : i \in \omega\rangle$ es una cadena de conjuntos y $t(k) < s(k)$, se sigue que $z_t \subseteq z_s$. Por los casos 1 y 2, D es un conjunto lineal.

Para mostrar que D no tiene máximo tomemos $z_t \in D$ con $t = \langle t(0), ..., t(k-1), t(k)\rangle$. Sea $n \in \omega$ tal que $t(k) < t(n)$ y definamos $t' = \langle t(0), ..., t(k-1), t(n)\rangle$. Tomando $p \in \omega$ tenemos que $z_{t^\frown p} \subseteq z_t \subseteq z_{t'}$.

Finalmete, para mostrar densidad sean z_t, $z_s \in D$ tales que $z_t \subseteq z_s$. Si $t = \langle t(0), ..., t(k-1), t(k)\rangle$, sea $n \in \omega$ tal que $t(k) < t(n)$ Luego, $t' = \langle t(0), ..., t(k-1), t(n)\rangle$ satisface que $z_t \subseteq z_{t'} \subseteq z_s$.

Como D es un conjunto denso, numerable, lineal y no tiene máximo (ni mínimo), entonces existe un isomorfismo $\phi : \langle \mathbb{Q}_1\rangle \to \langle D, \subseteq\rangle$.

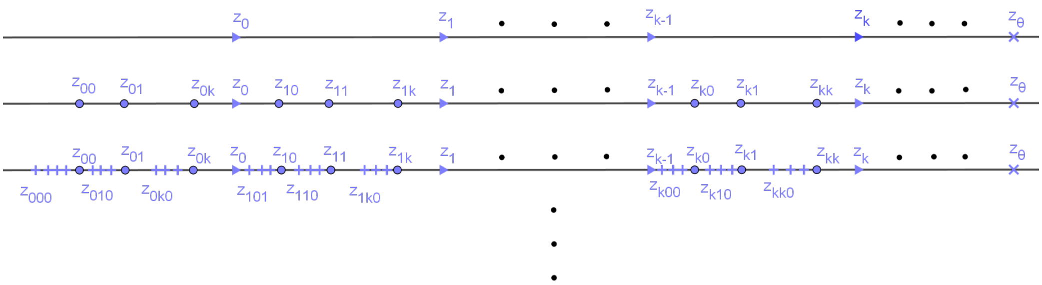

Figura 5.4: *Esquema ilustrativo del lema 5.8. Se muestran los primeros tres pasos de la construcción de D con el orden lineal.*

(3)$\Rightarrow$ (1): Sea $\phi : (\mathbb{Q}_1) \to (M, \subseteq)$ una función creciente. ϕ induce el monomorfismo de orden

$$\psi : ((0, 1], <) \to (M, \subseteq)$$

definido como

$$\psi(x) = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}_1} \{\phi(y) : y < x\}$$

Como M es cerrado entonces, por el lema 5.9, $\psi[(0,1]] \subseteq M$. Sea $X{=}\psi[(0,1]]$. Así, X es un conjunto lineal por ser ϕ creciente y los abiertos en la topología de Sorgenfrey son homeomorfos a los abiertos de la forma $(x,y]$ en la topología de orden en M. Finalmente, basta demostrar que la topología de Sorgenfrey y la topología de Ellentuck son equivalentes en X.

Sea $x \in [\omega]^\omega$ y $n \in \omega$ tales que $x \in [x \cap n, x \setminus n]^\omega \cap X$. Tomemos $z \in [x \cap n, x \setminus n]^\omega \cap X \setminus \{x\}$. Entonces $x \in (z,x] \subseteq [x \cap n, x \setminus n]^\omega \cap X$. Esto muestra que la topología de Sorgenfrey refina a la topología de Ellentuck.

Inversamente, sean $a, b \in X$, tales que $a \subsetneq b$ y sea $x \in (a,b] \cap X$. Entonces $x \in [x \cap (k+1), x \setminus (k+1)]^\omega \cap X \subseteq (a,b] \cap X$ para cualquier $k \in x \setminus a$, así, la topología de Ellentuck refina a la topología de Sorgenfrey. Por lo tanto X es una copia lineal de Sorgenfrey. ∎

En este último teorema hemos demostrado que un conjunto perfecto en la topología de Ellentuck debe tener una copia cerrada y lineal de Sorgenfrey, sin embargo, el teorema de dicotomía nos dice que puede tener una copia cerrada de los racionales, como veremos en la siguiente sección.

5.2. Los números Racionales

En esta sección enunciaremos y demostraremos un par de lemas que relaciona los conjuntos perfectos en la topología de Ellentuck con los racionales para finalmente dar la demostración del teorema de dicotomía.

Lema 5.12. *Sea $P \subseteq [\omega]^\omega$ perfecto y supongase que para cada familia ajena $\{\, [x_i \cap n, x_i \setminus n]^\omega \cap P : i < k \,\}$ existe un conjunto incomparable $\{z_0, z_1, z_2, ..., z_{k-1}\,\}$ con $z_i \in [x_i \cap n, x_i \setminus n]^\omega \cap P \setminus \{x_i\}$ para toda $i < k$. Entonces P contiene una copia cerrada de los Racionales.*

Demostración: Sea P que satisface la hipótesis. Construiremos por recursión un conjunto $D \subseteq P$ que sea cerrado, numerable y sin puntos aislados.

Elijamos $x_0, x_1 \in P$ tales que $x_0 \in [\emptyset, x_1]^\omega \cap P \setminus \{x_1\}$ y $n_1 > 0$ tal que $x_0 \cap n_1 \subsetneq x_1 \cap n_1$. Por hipótesis, existen $x_{00} \in [x_0 \cap n_1, x_0 \setminus n_1]^\omega \cap P \setminus \{x_0\}$ y $x_{10} \in [x_1 \cap n_1, x_1 \setminus n_1]^\omega \cap P \setminus \{x_1\}$ tal que $x_{00} \perp x_{10}$, es decir, son incomparables. Definimos $x_{01} = x_0$ y $x_{11} = x_1$ y elijamos $n_2 > n_1$ tal que $x_{s^\frown 0} \cap n_2 \subsetneq x_{s^\frown 1} \cap n_2$ para $s \in \{0, 1\}$.

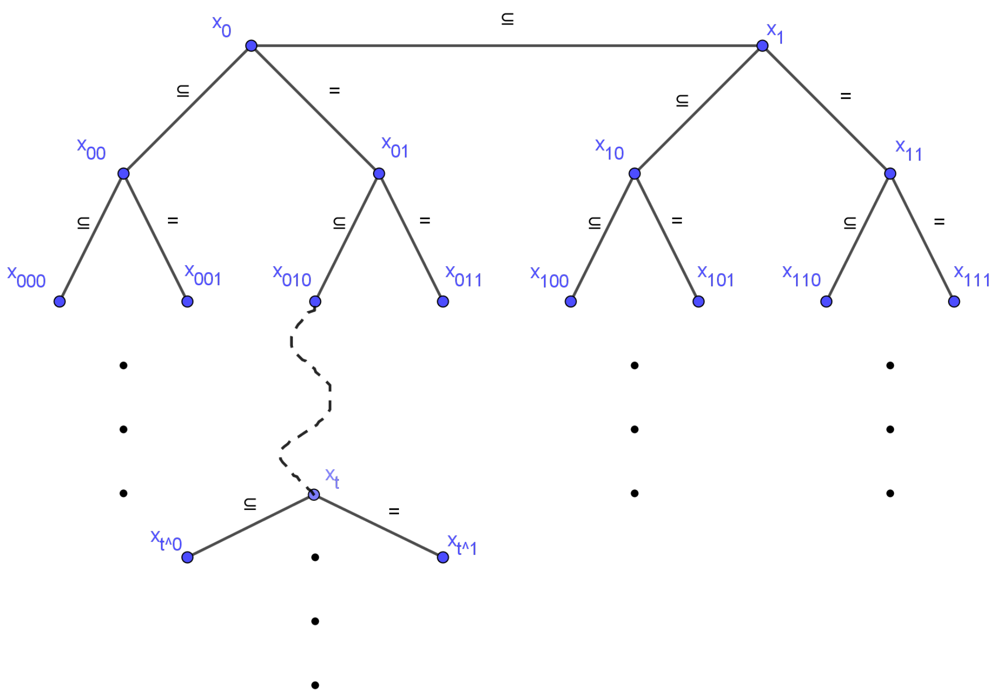

Figura 5.5: *Esquema ilustrativo del lema 5.12. Se muestran los primeros tres pasos y el paso inductivo de la construcción de D.*

Procediendo recursivamente, supongamos que $n_k < \omega$ ha sido definido y el conjunto $\{x_s : s \in 2^{\leq k}\}$ es tal que, para todo $t \in 2^{<k}$, $x_{t^\frown 1} = x_t$ y $x_{t^\frown 0} \cap n_k \subsetneq x_{t^\frown 1} \cap n_k$. Si aplicamos la hipótesis obtenemos un conjunto incomparable $\{x_{s^\frown 0} : s \in 2^k\}$ tal que $x_{s^\frown 0} \in [x_s \cap n_k, x_s \setminus n_k]^\omega \cap P \setminus \{x_s\}$ para todo $s \in 2^k$, y definamos $x_{s^\frown 1} = x_s$.

Finalmente, elijamos $n_{k+1} > n_k$ tal que $x_{s^\frown 0} \cap n_{k+1}$ es un subconjunto propio de $x_{s^\frown 1} \cap n_{k+1}$, esto completa la construcción del conjunto $D = \{x_s : s \in 2^{<\omega}\}$.

Es claro que D es numerable y por construcción no tiene puntos aislados. Veamos que D es cerrado: Sea $B = \bigcap_{n<\omega} \bigcup_{s \in 2^n} [x_s \cap n_{|s|}, x_s \setminus n_{|s|}]^\omega$. B es cerrado por ser intersección numerable de una unión finita de cerrados pues cada $[x_s \cap n_{|s|}, x_s \setminus n_{|s|}]^\omega$ es cerrado; además $D \subseteq B$.

Para ver que $B \subseteq D$ supongamos que existe $y \in B \setminus D$, entonces, para cada $m < \omega$, existe $s \in 2^m$ tal que $y \in [x_s \cap n_{|s|}, x_s \setminus n_{|n_s|}]$. Como los x_s son incomparables, entonces existe una sucesión $c_0 \subseteq c_1 \subseteq ...$ de cadenas binarias (de ceros y unos) tales que $y \in \bigcap_{k<\omega} [x_{c_k} \cap n_{|c_k|}, x_{c_k}]^\omega$. (Visualizando la figura 5.5, estamos diciendo que existe un camino tal que y pertenece a toda la intersección).

Podemos suponer que cada cadena c_k termina en "0" pues $x_{s^\frown 1} = x_s$. (Si apartir de un momento k, todas las cadenas terminan en un 1, entonces todas las cadenas estarian asociadas al mismo x_{c_k}).

Sea x_s un elemento arbitrario de D. Elijamos $h \in \omega$ y $s' \supseteq s$ tales que s' termine en "0", $c_h \neq s'$, $|c_h| = |s'|$ y $|s'| \geq |s| + 2$.

Afirmamos que x_s no pertenece $[\emptyset, y]^\omega$, pues de ser así, entonces $x_s \subseteq y$. Esto implicaría que $x_{s'} \subseteq x_s \subseteq y \subseteq x_{c_h}$. Pero $x_{s'} \perp x_{c_h}$ por construcción de D, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, x_s no pertenece $[\emptyset, y]^\omega$ y se sigue que $D = B$ y por tanto D es cerrado. ■

Lema 5.13. *Si $P \subseteq [\omega]^\omega$ es perfecto y no contiene una copia cerrada de los racionales, entonces existen dos conjuntos X e Y abiertos relativos a P tales que: $a \in X$ y $b \in Y$ implica que $a \subseteq b$.*

Demostración: Supongamos que P es perfecto y no contiene una copia de los racionales. Por el lema 5.12, en contrapositiva, existe una familia ajena $\mathcal{A} = \{ [x_i \cap n, x_i \setminus n]^\omega \cap P : i < k \}$ de abiertos relativos a P tales que si $w_i \in [x_i \cap n, x_i \setminus n]^\omega \cap P \setminus \{x_i\}$ para todo $i < k$ entonces existen indices $i \neq j < k$ tales que $w_i \sim w_j$, es decir, w_i y w_j son comparables. Sin perdida de generalidad, supongamos que $x_0 \subsetneq ... \subsetneq x_{k-1}$ y sea $n < \omega$ tan grande que $(x_q \cap n) \nsubseteq (x_p \cap n)$ para todo $p < q < k$. Si la conclusión del teorema es falsa entonces:

(*) para cualesquiera dos indices $p \neq q < k$ y para cualesquiera abiertos relativos a P, $X \subseteq [x_p \cap n, x_p \setminus n]^\omega \cap P$ y $Y \subseteq [x_q \cap n, x_q \setminus n]^\omega \cap P$, existen puntos $a \in X$ y $b \in Y$ tales que $a \perp b$.

Usaremos esto para construir un conjunto incomparable $\{w_0, ..., w_k\}$. La construcción es por recursión sobre $1 \leq \alpha < k$.

Si $\alpha = 1$ usamos (*) para obtener $z_0 \in [x_0 \cap n, x_0 \setminus n]^\omega \cap P \setminus \{x_0\}$ y $z_1 \in [x_1 \cap n, x_1 \setminus n]^\omega \cap P \setminus \{x_1\}$ tales que $z_0 \perp z_1$. Elijamos $n_1 \geq n$ tal que $(z_0 \cap n_1) \perp (z_1 \cap n_1)$. Esto completa el caso base.

Para el caso general, sea $\alpha < k$ arbitrario. Supongamos que han sido definidos para todo $\beta \neq \gamma \leq \alpha$, $n_\alpha \geq n$, y $z_\beta \in [x_\beta \cap n_\alpha, x_\beta \setminus n_\alpha]^\omega \cap P \setminus \{x_\beta\}$ tales que $(z_\beta \cap n_\alpha) \perp (z_\gamma \cap n_\alpha)$. Usando (*) múltiples veces, completaremos la recursión a continuación:

Por (*), elijamos $v_0 \in [z_0 \cap n_\alpha, z_0 \setminus n_\alpha]^\omega \cap P$ y $v^0_{\alpha+1} \in [x_{\alpha+1} \cap n_\alpha, x_{\alpha+1} \setminus n_\alpha]^\omega \cap P \setminus \{x_{\alpha+1}\}$ tales que $v_0 \perp v^0_{\alpha+1}$. Elijamos también $m_0 \geq n_\alpha$ tal que $(v_0 \cap m_0) \perp (v^0_{\alpha+1} \cap m_0)$. Para el siguiente paso, de nuevo usemos (*) para elegir elementos incomparables $v_1 \in [z_1 \cap m_0, z_1 \setminus m_0]^\omega \cap P$ y $v^1_{\alpha+1} \in [v^0_{\alpha+1} \cap m_0, v^0_{\alpha+1} \setminus m_0]^\omega \cap P$; elijamos $m_1 \geq m_0$ tal que $(v_1 \cap m_1) \perp (v^1_{\alpha+1} \cap m_1)$. Continuando inductivamente para todo $\beta \leq \alpha$, sea $n_{\alpha+1} = m_\alpha$ y $v_{\alpha+1} = v^\alpha_{\alpha+1}$. Así, tenemos el conjunto incomparable $\{v_i : i \leq \alpha + 1\}$, completando el caso general.

Como $\alpha < k$ es arbitrario hay un conjunto incomparable $\{w_i : i < k\}$ tal que $w_i \in [x_i \cap n, x_i] \cap P \setminus \{x_i\}$ para todo $i < k$, pero esto contradice la suposición de que el conjunto debe contener al menos dos elementos comparables.

■

5.3. El teorema de Dicotomía

Teorema 5.14. (Dicotomía) *Todo conujunto perfecto en la topología de Ellentuck tiene una copia cerrada de la recta de Sorgenfrey o una copia cerrada de los Racionales.*

Demostración: Supongamos que P es perfecto y no contiene una copia cerrada de los racionales. Construyamos un esquema de Cantor como sigue: Definamos $X_\emptyset = P$ y de manera recursiva para $n < \omega$ y $t \in 2^n$, por el teorema 5.13, existen abiertos relativos $X_{t^\frown 0}, X_{t^\frown 1}$ a P tales que si $a \in X_{t^\frown 0}$ y $b \in X_{t^\frown 1}$ implica que $a \subseteq b$. Notemos que $X_{t^\frown 0}$ y $X_{t^\frown 1}$ son conjuntos perfectos.

Siguiendo la notación de [14], una cadena, digamos 00111111 (que tiene 6 unos al final) la denotaremos por 001^6, y de igual manera si es con una cadena de ceros.

Procediendo de manera recursiva, para $s \in 2^{<\omega}$ una cadena que no termina en un "1" y para cada $n < \omega$ consideraremos $a_n^s \in P$ de tal manera que a_n^s pertenece al abierto

$$X_{s^\frown 1^n 0} = [a_n^s \cap m_n^s, a_n^s \setminus m_n^s]^\omega \cap P.$$

Por construcción del esquema y por el teorema 5.13, $a_0^s \subseteq a_1^s \subseteq ...$ y se sigue que $\left(\bigcup_{n<\omega} a_n^s\right)$ es un punto de acumulación del conjunto $\{a_n^s : n < \omega\}$ por el lema 5.9.

Para cada $k \in \omega$, la cola $\{a_n^s : k < n\} \subseteq X_{s^\frown 1^k}$ por lo que $\left(\bigcup_{n<\omega} a_n^s\right) \in \bigcap_{n<\omega} X_{s^\frown 1^n}$. Sea $c_s = \left(\bigcup_{n<\omega} a_n^s\right)$. Afirmamos que $\{c_s : s \in 2^{<\omega}\}$ es lineal y no tiene puntos aislados.

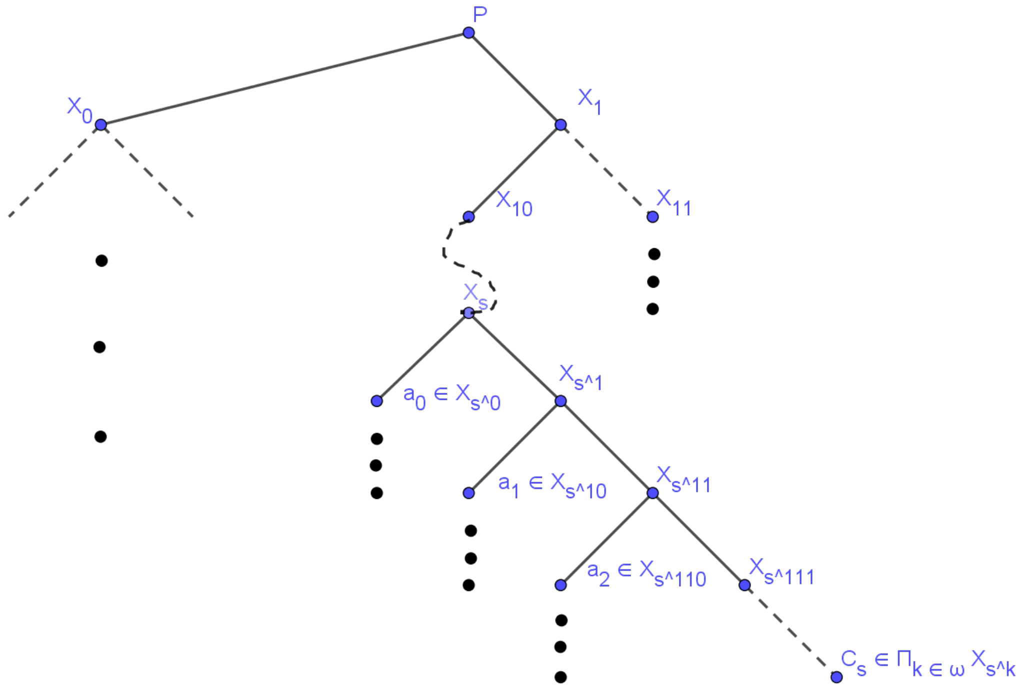

Figura 5.6: *Esquema ilustrativo del lema 5.14.*

Sean $s, t \in 2^{<\omega}$ cadenas que no terminan en "1" tales que $s \neq t$. Sea $l = \max(|s|, |t|)$ y sea $p = s^\frown 1^{l-|s|} \cap t^\frown 1^{l-|t|}$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p^\frown 0 \subseteq s^\frown 1^{l-|s|}$ y $p^\frown 1 \subseteq t^\frown 1^{l-|t|}$. Entonces $c_s \in X_{p^\frown 0}$ y $c_t \in X_{p^\frown 1}$. Esto implica que $c_s \subseteq c_t$ por construcción y del teorema 5.13. Como s y t son arbitrarios, $\{c_s : s \in 2^{<\omega}\}$ es lineal y no tiene puntos aislados. Por lo tanto P contiene una copia cerrada de Sorgenfrey por el teorema 5.8. ■

Bibliografía

[1] Amor Montaño, J. A., Campero Arena, G., and Miranda Perea, F. E. *Teoría de Conjuntos. Curso Intermedio.* Las prensas de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2011.

[2] Angoa, J., and Ibarra, M. *Encuentro de enseñanza e historia de las matemáticas.* Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección de Fomento Editorial, 2008.

[3] Benjamin, A., Chartrand, G., and Zhang, P. *The fascinating world of graph theory.* Princeton University Press, 2015.

[4] Casarrubias, F., and Tamariz, A. Elementos de topología general. *Aportaciones Matemáticas,* (2012).

[5] Chartrand, G. *Introduction to graph theory.* Tata McGraw-Hill Education, 2006.

[6] Ellentuck, E. A new proof that analytic sets are ramsey. *Journal of Symbolic Logic* (1974), 163–165.

[7] Hernández, F. H. *Teoría de Conjuntos: una introducción.* Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[8] Hrbacek, K., and Jech, T. *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded.* Crc Press, 1999.

[9] Ismail, M., Szymanski, A., and Plewik, S. On subspaces of exp (n). *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 49*, 3 (2000), 397–414.

[10] Jech, T. *Set theory.* Springer Science & Business Media, 2013.

[11] Kanamori, A. *The higher infinite: large cardinals in set theory from their beginnings.* Springer Science & Business Media, 2008.

[12] Kunen, K. *Set theory an introduction to independence proofs*, vol. 102. North-Holland Publishing Company, 1980.

[13] Munkres, J. R. *Topology.* Prentice Hall, 2000.

[14] Nowik, A., and Reardon, P. A dichotomy theorem for the ellentuck topology. *Real Analysis Exchange 29*, 2 (2004), 531–542.

[15] Popov, V. On the subspaces of exp x. In *Colloquia Mathematica, Soc. J. B_olyai, Budapest* (1978), vol. 103, pp. 977–984.

[16] Silver, J. Every analytic set is ramsey. *The Journal of Symbolic Logic 35*, 1 (1970), 60–64.

[17] Van Douwen, E. K. The pixley-roy topology on spaces of subsets. In *Set-theoretic topology.* Elsevier, 1977, pp. 111–134.

[18] Willard, S. *General topology.* Courier Corporation, 1970.