



**Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de Posgrado en Ciencias de la Administración**

**Aplicación de Opciones Reales para la Valuación de
Proyectos de Inversión del Sector Minero**

T e s i s

Que para optar por el grado de:

**Maestro en Finanzas
Campo de conocimiento: Bursátiles**

Presenta:

Roberto Carlos Corona García

Tutor:

**Dr. Raúl Arturo Cornejo López
Facultad de Contaduría y Administración**

Ciudad de México, septiembre de 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

***"La sabiduría no es un producto
de la educación, sino del intento
de toda la vida para adquirirla"***

Albert Einstein (1879-1955)

AGRADECIMIENTOS

A mi abuela Emma (q.e.p.d.), quien fue una segunda madre para mí, gracias por haberme criado y cuidado desde pequeño, y seguramente estás en un lugar mejor; a mi abuelo Carlos, quien ha sido como mi padre, gracias por apoyarme incondicionalmente en muchos momentos de mi vida, sobre todo durante la licenciatura y la maestría, además me considero afortunado de compartir mi vida con ustedes.

A mi madre Beatriz, quien siempre ha hecho grandes esfuerzos y sacrificios toda su vida por brindarme lo mejor desde que yo era pequeño, gracias por existir.

A mi novia Jennifer, por su inmenso amor, además, por todos los grandes momentos que hemos vivido juntos, y también por todo el apoyo que nos hemos entregado durante varios años, te amo mucho.

A mi tutor Dr. Raúl Cornejo, por todo el apoyo y conocimiento que me dio durante estos dos años de la maestría, y poder concluir esta tesis; al Dr. Hideo Taniguchi por sus observaciones ejemplares y al Mtro. Agustín Román por brindarme su tiempo para que pudiera realizar las correspondientes correcciones, las cuales, permitieron enriquecer esta tesis, y poder obtener mejores resultados. A todos mis sinodales, gracias por su confianza. También agradezco a todo el personal de la biblioteca del Posgrado de la Facultad de Contaduría y Administración por su amable servicio que siempre tuvieron conmigo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por haberme permitido estudiar la licenciatura en Actuaría en la Facultad de Ciencias y la maestría en Finanzas Bursátiles en el Posgrado de la Facultad de Contaduría y Administración, por lo que, Ciudad Universitaria se convirtió en mi segundo hogar por 7 años, y sin duda fue una gran etapa de mi vida que nunca olvidaré.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por haberme proporcionado la beca de maestría, ya que, gracias a ella pude terminar mis estudios de posgrado en tiempo y forma.

A la Universidad de Santiago de Chile (USACH) por aceptarme como alumno de intercambio, representando a México y a la UNAM con mucho orgullo. En esa etapa de la maestría adquirí grandes conocimientos y otra perspectiva de vida. Fue una gran experiencia vivir en otro país, compartir ese tiempo con personas queridas y viajar por lugares únicos en el mundo.

“Por mi raza hablará el espíritu”

ÍNDICE

Introducción.....	I
Planteamiento del Problema	V
Pregunta de Investigación.....	VII
Preguntas Secundarias de Investigación	VII
Objetivo de la Investigación	VIII
Objetivos Específicos de la Investigación	VIII
Hipótesis	IX
Hipótesis Secundarias.....	IX
Matriz de Congruencia	X
Metodología	XI
Muestra	XII
Resumen.....	XIII
Capítulo 1. Derivados Financieros	1
1.1 Antecedentes de los Derivados en México	1
1.1.1 Bolsa Mexicana de Valores (BMV)	2
1.2 Futuros	3
1.2.1 Valuación.....	5
1.2.2 Riesgos de los Futuros.....	7
1.2.3 Usos de los Futuros.....	7
1.2.4 Cámara de Compensación.....	8
1.2.4.1 Márgenes	8
1.3 Forwards	10
1.4 Opciones.....	10
1.4.1 Liquidación de Opciones	13
1.4.2 Posiciones en las Opciones	14
1.4.2.1 Comprar una Opción de Compra (Long Call)	15
1.4.2.2 Venta de una Opción de Venta (Short Put).....	16
1.4.2.3 Compra de una Opción de Venta (Long Put)	16
1.4.2.4 Venta de una Opción de Compra (Short Call).....	19

1.4.3 Estrategias con Opciones.....	21
1.4.3.1 Call Cubierta (Covered Call)	22
1.4.3.2 Put Protectora (Protective Put).....	22
1.4.3.3 Spreads.....	22
1.4.3.3.1 Bull Spread	23
1.4.3.3.2 Bear Spread.....	24
1.4.3.3.3 Ratio Call Spread Inverso	25
1.4.3.3.4 Ratio Put Spread Inverso	26
1.4.3.4 Straddle.....	28
1.4.3.4.1 Straddle Superior	28
1.4.3.4.2 Straddle Inferior	29
1.4.3.5 Straps.....	30
1.4.3.5.1 Strap Superior.....	30
1.4.3.5.2 Strap Inferior	30
1.4.3.6 Strips	31
1.4.3.6.1 Strip Superior	31
1.4.3.6.2 Strip Inferior	31
1.4.3.7 Strangle.....	32
1.4.3.7.1 Strangle Superior	32
1.4.3.7.2 Strangle Inferior	33
1.4.3.8 Mariposa (Butterfly).....	34
1.4.3.9 Condor	35
1.4.3.10 Túnel (Collar)	36
1.4.3.10.1 Túnel Alcista	37
1.4.3.10.2 Túnel Bajista	38
1.5 Swaps	38
1.5.1 Orígenes de los Swaps	40
1.5.2 Swaps de Interés.....	41
1.5.2.1 Swaps de Interés Genéricos	43
1.5.2.2 Swaps de Interés no Genéricos	43
1.5.2.2.1 Swaps con Principal no Constante	45

1.5.2.2.2 Forward Swaps	45
1.5.2.2.3 Swaps con Tipo Fijo-Variable	45
1.5.2.2.4 Swaps con Pagos de Intereses Irregulares.....	46
1.5.2.2.5 Swaps con Opciones	46
1.5.2.2.6 Otros tipos de Swaps	47
Capítulo 2. Valuación de Opciones Financieras.....	49
2.1 El Valor de una Opción Financiera.....	49
2.1.1 Consideraciones sobre una Opción Call	49
2.1.2 Consideraciones sobre una Opción Put	51
2.2 Paridad Put–Call	52
2.3 Modelo Binomial.....	53
2.3.1 Postulados para la Valuación de Opciones	57
2.3.2 Aplicación del Modelo Binomial.....	59
2.3.3 Extensión del Modelo a n Periodos para Opciones Call.....	63
2.3.4 Extensión del Modelo a n Periodos para Opciones Put.....	67
2.4 Modelo de Black & Scholes.....	68
2.5 Simulación de Montecarlo	69
2.5.1 Simulación de Montecarlo sobre un Movimiento Geométrico.....	71
2.5.2 Simulación de Montecarlo con Reversión a la Media.....	73
Capítulo 3. Opciones Reales.....	76
3.1 Antecedentes de las Opciones Reales.....	76
3.2 Tipos de Opciones Reales	77
3.2.1 Opción de Abandono.....	77
3.2.2 Opción de Contracción	79
3.2.3 Opción de Cierre Temporal	80
3.2.4 Opción de Expansión	82
3.2.5 Opción de Cambio (Switch Option)	83
3.3 Utilización de las Opciones Reales en Proyectos de Inversión.....	83
3.4. El Valor Presente Neto Ampliado	86
3.5 Justificación del Uso de Opciones Reales	87
3.6 Criterios sobre Proyectos de Inversión.....	91

3.6.1 El Criterio de la Tasa Interna de Retorno (TIR)	91
3.6.2 Otros tipos de Criterios	92
Capítulo 4. Valuación y Aplicación de Opciones Reales	97
4.1 Situación Económica de México	97
4.1.1 Situación del Sector Minero en México	98
4.1.1.1 Situación de la Empresa Minera Grupo México	102
4.2 La Beta	106
4.2.1 La Beta de Grupo México	107
4.3 Costo de Capital	108
4.4 La Tasa de Descuento	109
4.4.1 La Tasa de Descuento para Grupo México	110
4.5 Proyección de los Estados de Resultados	110
4.6 El Valor Presente de Grupo México	111
4.7 Simulaciones y Volatilidad	112
4.7.1 La Simulación del Valor Presente Neto	115
4.8 La Opción Real para un Proyecto Minero	116
4.8.1 Los Proyectos Mineros en el Mundo	116
4.8.1.1 Los Proyectos Mineros en México	118
4.8.2 La Producción de Cobre en el Mundo	120
4.8.2.1 La Producción de Cobre en México	121
4.8.3 La Producción de Zinc en el Mundo	124
4.8.3.1 La Producción de Zinc en México	125
4.8.4 La Proyección de los Precios del Cobre y Zinc	127
4.8.5 El Proyecto Minero en Buenavista	128
4.8.5.1 El Beneficio Esperado del Proyecto Minero	129
4.8.6 Características de la Opción Real de Expansión	130
4.8.6.1 El modelo Black & Scholes para la Opción Real de Expansión	131
4.8.6.2 Desarrollo de la Opción Real de Expansión	132
4.8.7 El Valor Presente Neto Básico del Proyecto	132
4.8.8 El Valor Presente Neto Ampliado del Proyecto	133
4.8.9 Resultados y Recomendaciones	134

Conclusiones.....	138
Bibliografía	141
Anexo A.....	148
A.1 La Fórmula de Itô y el Movimiento Browniano	148
A.2 Valuación y Cobertura de Reclamos Contingentes.....	151
A.2.1 Deducción de la Ecuación Diferencial Parcial de Black & Scholes	151
A.2.2 La Solución de la Ecuación Diferencial Parcial de Black & Scholes	153
A.2.3 Teorema.....	156
A.2.4 La Fórmula de Black & Scholes para Opciones Call.....	156
Anexo B.....	159
B.1 Participación Minera por País de Grupo México	159
B.2 Estados de Resultados de Grupo México.....	159
B.3 Flujos de Caja Libres de la Empresa	160
B.4 Tasa de Crecimiento (Growth Rate)	161
B.5 Análisis del Valor Presente de Grupo México	164
B.6 Los Valores Presentes Simulados	166
Anexo C	170
C.1 La Proyección del Precio del Cobre.....	170
C.2 La Proyección del Precio del Zinc.....	174
Anexo D	180
D.1 La Deuda y Capital de las Empresas Comparables	180
D.2 Comportamiento de las Acciones e Índices	181
Anexo E.....	186
E.1 Códigos de Programación	186

ÍNDICE DE GRÁFICAS

Gráfica 1. IED como Porcentaje del PIB	III
Gráfica 2. Composición de la IED Industrial 2018.....	IV
Gráfica 3. Opción Call	14
Gráfica 4. Opción Put.....	15
Gráfica 5. Long Put	19
Gráfica 6. Short Call	21
Gráfica 7. Bull Spread	24
Gráfica 8. Bear Spread.....	25
Gráfica 9. Ratio Call Spread Inverso	26
Gráfica 10. Ratio Put Spread Inverso.....	27
Gráfica 11. Straddle Superior.....	28
Gráfica 12. Straddle Inferior	29
Gráfica 13. Strangle Superior.....	32
Gráfica 14. Strangle Inferior	33
Gráfica 15. Butterfly.....	34
Gráfica 16. Condor.....	36
Gráfica 17. Túnel Alcista	37
Gráfica 18. Túnel Bajista	38
Gráfica 19. Swap de Tasas de Interés	42
Gráfica 20. Modelo Binomial a un Periodo	54
Gráfica 21. Modelo Binomial a dos Periodos	55
Gráfica 22. Producción Nacional Minero-Metalúrgica	100
Gráfica 23. Producción por Metales y Minerales de 2018	101
Gráfica 24. Inversión Nacional Minero-Metalúrgica.....	102
Gráfica 25. Cronología de Problemas Ambientales y Laborales	106
Gráfica 26. Simulación del VPN	115
Gráfica 27. Proyectos Mineros Mundiales por Etapas.....	117
Gráfica 28. Producción Mundial de Cobre 2018.....	120
Gráfica 29. Volumen y Valor de Producción de Cobre en México.....	122
Gráfica 30. Producción de Cobre por Estado 2018.....	123
Gráfica 31. Producción de Cobre por Empresa 2018.....	123
Gráfica 32. Producción Mundial de Zinc 2018.....	124
Gráfica 33. Volumen y Valor de Producción de Zinc en México.....	125
Gráfica 34. Producción de Zinc por Estado 2018	126
Gráfica 35. Producción de Zinc 2018 por Empresa.....	126
Gráfica 36. Precio del Cobre (LME)	127
Gráfica 37. Precio del Zinc (LME)	128
Gráfica 38. Mina Buenavista del Cobre.....	129
Gráfica 39. Análisis de Tornado	164

Gráfica 40. Spider Graph	165
Gráfica 41. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2019	167
Gráfica 42. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2020	167
Gráfica 43. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2021	168
Gráfica 44. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2022	168
Gráfica 45. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2023	169
Gráfica 46. Precio Diferenciado del Cobre	171
Gráfica 47. Precio Diferenciado del Zinc	176
Gráfica 48. Índice FTSE 100	182
Gráfica 49. Acción de Río Tinto	182
Gráfica 50. Acción de Glencore	183
Gráfica 51. Acción de Antofagasta	183
Gráfica 52. Acción de Anglo American	184
Gráfica 53. Índice S&P 500	184
Gráfica 54. Acción de Freeport-McMoran	185

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Matriz de Congruencia	X
Tabla 2. Opción Financiera vs Opción Real	76
Tabla 3. Empresas Mineras de Cobre Comparables	107
Tabla 4. La Beta de Grupo México.....	108
Tabla 5. La WACC de Grupo México	110
Tabla 6. Aproximación Logarítmica del Valor Presente.....	112
Tabla 7. Inversión en Mineras Afiliadas y no Afiliadas	119
Tabla 8. Principales Minas y Empresas de Cobre 2018.....	121
Tabla 9. Proyección del Beneficio del Proyecto Minero	129
Tabla 10. Variables de la Opción Real de Expansión	130
Tabla 11. Escenarios para la Constante Alpha	135
Tabla 12. Escenarios para la Opción Real de Expansión	135
Tabla 13. Ventas por País de Grupo México.....	159
Tabla 14. Estados de Resultados Proyectados de Grupo México	160
Tabla 15. Tasa de Crecimiento de Grupo México	163
Tabla 16. Valor Terminal de Grupo México.....	163
Tabla 17. Variables para Simular el Valor Presente de los FCFF	169
Tabla 18. Correlograma de la Serie no Estacionaria del Cobre.	170
Tabla 19. Pruebas Estadísticas de la Serie Diferenciada del Cobre	171
Tabla 20. Correlograma de la Serie Diferenciada del Cobre.....	172
Tabla 21. El Modelo de la Serie del Cobre.....	173
Tabla 22. Correlograma del Modelo de la Serie del Cobre	174
Tabla 23. Correlograma de la Serie no Estacionaria del Zinc	175
Tabla 24. Pruebas Estadísticas de la Serie Diferenciada del Zinc	176
Tabla 25. Correlograma de la Serie Diferenciada del Zinc.....	177
Tabla 26. El Modelo de la Serie del Zinc.....	178
Tabla 27. Correlograma del Modelo de la Serie del Zinc	179
Tabla 28. Información Financiera de Río Tinto	180
Tabla 29. Información Financiera de Freeport-McMoran	180
Tabla 30. Información Financiera de Glencore	181
Tabla 31. Información Financiera de Anglo American.....	181
Tabla 32. Información Financiera de Antofagasta.....	181

Introducción

Hace algunos años, Calle y Tamayo (2009) mencionaban que “Los modelos desarrollados para la valoración de proyectos de inversión consideraban condiciones suficientemente estables para proyectar, bajo ciertos supuestos, lo que podría suceder durante el tiempo que durara el proyecto. Sin embargo, la realidad ahora es otra. Los avances en tecnología e innovación constante, la necesidad de mejoras en las políticas de investigación y desarrollo, etc., han hecho que el desarrollo de las industrias y el conocimiento en general avanzaran rápidamente, en especial durante las últimas décadas del siglo XX. Estos cambios rápidos, constantes y algunas veces inesperados, han hecho que el entorno se torne inestable, de manera que los modelos tradicionales no se adaptan fácilmente a esta nueva realidad”.

Si nos referimos a los proyectos de inversión, podemos encontrar de diversos tipos en distintos sectores económicos, como la construcción del Nuevo Aeropuerto Internacional de la Ciudad de México (NAICM), el tren interurbano México-Toluca, aunque estos se encuentran postergados por el actual gobierno que inició su cargo en diciembre de 2018, así como la construcción de centros comerciales, corporativos, ampliación de las líneas del metro, plantas de energía renovables, por mencionar algunos ejemplos. Sin embargo, para poder realizarlos se tiene que adquirir o arrendar maquinaria apropiada, equipo de transporte, equipo electrónico, generar nuevas líneas de producción y la contratación de personal adecuado, teniendo como objetivo recuperar la inversión inicial que se hizo sobre todos estos activos mencionados y del giro del negocio al que pertenezca la empresa correspondiente.

Además, se deben tener en cuenta factores que pueden afectar el desarrollo y conclusión de algunos proyectos de inversión en un horizonte de tiempo planeado, como las tasas de interés bancarias, las cuales repercuten directamente en el consumo de la sociedad. El Banco de México ha aumentado la tasa de referencia en los últimos años, llegando a niveles de 8%, de acuerdo con el último ajuste realizado en agosto de 2019, al bajar esta tasa como lo han hecho otros países, además, los niveles de inflación se han mantenido hasta el momento dentro de los niveles deseados, quedando en 3.78% anual a julio de 2019.

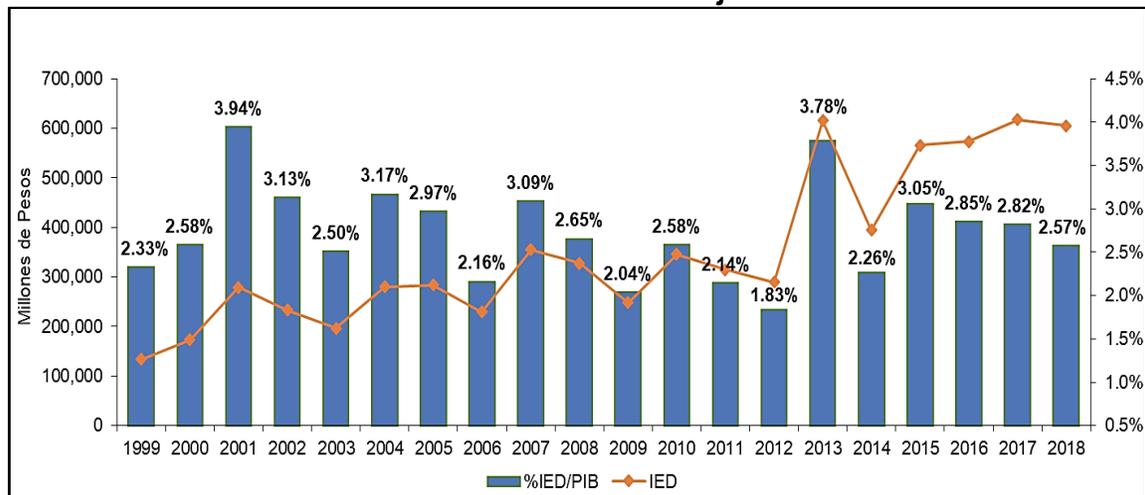
El alza de impuestos arancelarios a diversos países del mundo, como a China, por parte del presidente de los Estados Unidos, Donald Trump, genera presión en la economía mexicana, y llevando a una situación denominada como “*guerra comercial*”. A pesar de que a finales de 2018 se llegó a un nuevo acuerdo comercial entre México, Estados Unidos y Canadá, nombrado T-MEC, éste aún no ha sido firmado oficialmente por los congresos, lo cual, genera especulación si realmente se obtendrá estabilidad y crecimiento económico para el país en el futuro próximo.

Para Morales y Morales (2009), el crecimiento sostenido de la inflación genera un aumento de los insumos o materiales necesarios para producir los bienes y servicios, en consecuencia, el margen de utilidad se ve reducido y también el plazo para recuperar la inversión inicial se extiende, así como se reduce la tasa de recuperación de ésta. Cuando una empresa concede un crédito a sus clientes para adquirir sus productos a través de un banco, el costo de financiamiento para los consumidores se incrementa, por lo tanto, los consumidores se desaniman a comprarlos y el nivel de ventas se ve perjudicado, en consecuencia, las utilidades también disminuyen.

Cabe destacar que el factor tipo de cambio repercute en los rendimientos esperados de las empresas, debido a que una depreciación del peso mexicano encarece el costo de las materias primas e insumos para iniciar los proyectos de inversión planeados, esto eleva los costos financieros de las empresas que tienen pasivos en otras monedas, en este caso en dólares. El tipo de cambio peso/dólar ha presentado mucha volatilidad en los últimos años, recordando que cuando Donald Trump fue electo presidente de los Estados Unidos, y asumió el poder, el dólar alcanzó precios por encima de los 20 y hasta los 22 pesos mexicanos, en noviembre de 2016 y enero de 2017, respectivamente. Así como las repercusiones en las bolsas de valores alrededor del mundo durante su mandato, por medio de declaraciones o nuevas políticas que alteran el comportamiento de los mercados.

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la IED durante los últimos 20 años, en contraste con el porcentaje que esta representa respecto al PIB anual.

Gráfica 1. IED como Porcentaje del PIB



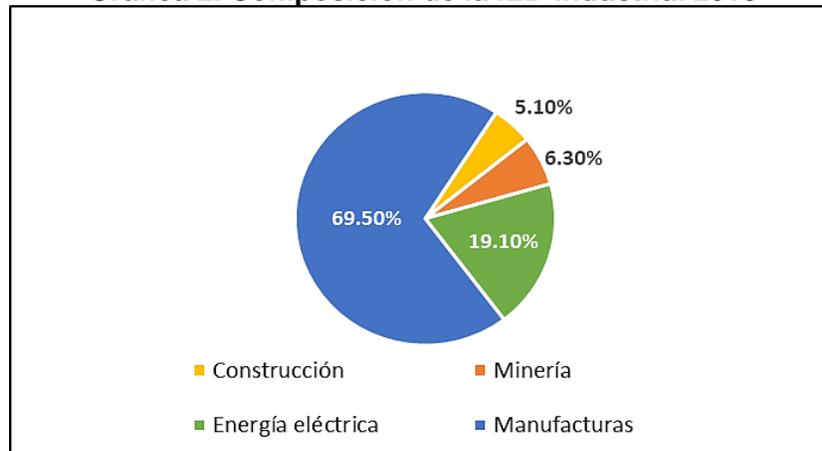
Fuente: Elaboración propia con datos del INEGI (2018).

En 2018, la Inversión Extranjera Directa del sector industrial creció 6.4% respecto a 2017, según la Secretaría de Economía (SE) se tuvieron 31,604 millones de dólares,

donde, el sector manufacturero contribuyó en casi el 70% y el sector minero contribuyó en 6.30%, es decir, 1,991 millones de dólares.

La siguiente gráfica muestra el comportamiento de los demás sectores.

Gráfica 2. Composición de la IED Industrial 2018



Fuente: Elaboración propia con datos de la SE (2018).

En el primer semestre de 2019, México captó 18,102.4 millones de dólares de Inversión Extranjera Directa (IED), según datos preliminares publicados este martes por la Secretaría de Economía. Esta cifra se obtuvo por la diferencia entre 24,063.8 millones de dólares de flujos de entrada y los 5,961.4 millones de dólares de flujos de salida, esto se traduce en un incremento en la entrada de capital extranjero al país de 1.5% en comparación con el mismo periodo de 2018 (Blanco, 2019).

El 75.6% del financiamiento provino de la reinversión de utilidades, un aumento de 17.5%, con respecto al primer semestre de 2018; el 23.9% fue resultado de nuevas inversiones, un incremento de 7% con relación al mismo periodo; y el 0.5%, de cuentas entre compañías, con una disminución del 24.5% para el mismo periodo. Estados Unidos se mantiene como el país que más aporta IED a México, con el 37.9%, le sigue Canadá,

con 15.4%; España, con 11.1%; Alemania, con 6.5%; Bélgica, con 4.1%; y el 25% restante se divide entre otros países (Blanco, 2019).

De acuerdo con lo que comenta Álvarez (2019), México está por detrás de países como Chile, Brasil y Colombia respecto a recepción de IED, la cual, alcanzó su nivel más bajo en 20 años al cierre de 2018, según un análisis del Instituto de Finanzas Internacionales. A su vez, la salida de capitales de los países emergentes se debe a la agudización del conflicto comercial entre Estados Unidos y China, así como al cambio de política monetaria de la Reserva Federal, que en los últimos meses incrementó la tasa de interés referencial, lo que atrajo una mayor cantidad de recursos hacia esa economía.

Planteamiento del Problema

Mientras una empresa tenga suficientes recursos para satisfacer sus necesidades o metas, los excedentes de efectivo se generan cuando los ingresos son mayores a los gastos y se destinan para un propósito en particular que agregue mayor valor a la empresa, a través de proyectos de inversión. Esto debe estar alineado con los propósitos y el giro que tenga la empresa al diversificar los riesgos que puedan tener las inversiones considerando los factores internos propios y el entorno económico donde la empresa se encuentre establecida.

Aunque las empresas pueden no gozar de exceso de recursos, pero dentro de sus planes está expandirse e invertir en nuevas áreas que le permitan generar mayores niveles de ingresos o adaptarse a las tendencias de la competencia, al adquirir nuevas tecnologías, entonces pueden recurrir a solicitar préstamos y financiarse con deuda, por

lo que deberán considerar los riesgos que esto implica y las obligaciones que tendrán que afrontar en el futuro.

Es evidente que, ante el entorno macroeconómico internacional que afecta en cierto grado al país, la minería mexicana es un sector que se ve afectado directamente. Si se considera que las políticas públicas podrían aminorar el impacto que se tiene a causa de políticas exteriores y variables exógenas, proporcionando herramientas de sustento a este y otros sectores, que permitan mejorar ante esta situación y crear bases para un potencial crecimiento económico.

Por lo tanto, se deben proponer alternativas que generen mejores decisiones sobre los proyectos de inversión, en este caso para el sector minero, puestos en marcha o por iniciarse, y conocer el valor real que poseen. En consecuencia, se requieren estudiar y desarrollar técnicas y/o herramientas más elaboradas para poder lograrlo, por lo tanto, se extiende la propuesta de utilizar los productos derivados, en particular las opciones financieras como punto de partida del desarrollo de la teoría de las opciones reales y poder desarrollar una aplicación en dicho sector.

En consecuencia, las opciones reales surgen como un método para valorar proyectos de inversión, es decir, este nuevo enfoque menciona que los proyectos de inversión pueden tratarse bajo la metodología de las opciones financieras de compra o venta (call o put) y no, como una cartera de bonos de bajo riesgo como el Valor Presente Neto, el cual, pierde su efectividad cuando se presentan situaciones en las que no necesariamente el proyecto tiene que realizarse inmediatamente, es decir, ejecutarse posteriormente, expandirse o cancelarse.

En otras palabras, el enfoque de las opciones reales es la extensión de la teoría de opciones financieras a opciones en activos reales (no financieros) que permiten ejecutar y modificar un proyecto con el propósito de incrementar su valor. Las opciones reales permiten generar valor a la empresa cuando se aumentan las ganancias o se reducen las pérdidas. Usualmente no se utiliza el término opción para referirse a estas oportunidades, más bien se hace referencia a ellas como intangibles más que como opciones de compra o de venta, pero cuando se evalúan propuestas de inversión importantes, estas opciones intangibles son a menudo la clave de las decisiones a tomar (Calle y Tamayo, 2009).

Pregunta de Investigación

- ¿Cuál es el beneficio de la aplicación de los productos derivados para la valuación de los proyectos de inversión, en este caso, las opciones financieras?

Preguntas Secundarias de Investigación

- ¿Los métodos tradicionales comúnmente utilizados para aceptar o rechazar un proyecto de inversión, como el Valor Presente Neto, son suficientes para poder tomar decisiones financieras?
- ¿Las Opciones Reales son un método más preciso para obtener el valor real y la flexibilidad de un proyecto de inversión, en comparación con métodos tradicionales comúnmente utilizados?

Objetivo de la Investigación

Encontrar el valor real del proyecto de inversión seleccionado, a través del uso de derivados financieros, es decir, desarrollando diferentes metodologías utilizadas en la valuación de opciones financieras, como la fórmula de *Black & Scholes*, el modelo binomial desarrollado por Cox y Rubinstein o la simulación de Montecarlo. Por lo que, es necesario adaptarse a los cambios que puedan tener las empresas, donde se requieren tomar decisiones financieras respecto a los proyectos de inversión puestos en marcha o incluso los que se planean desarrollar.

Objetivos Específicos de la Investigación

Explicar cómo los métodos convencionales sobre la valuación de proyectos de inversión, como el Valor Presente Neto, no aportan resultados suficientes para obtener el valor real de un proyecto, al no incluir en su metodología la flexibilidad que algún proyecto pueda alcanzar, así como tienen un menor alcance para la generación de distintos escenarios, por medio de los cuales, se pueden tomar mejores decisiones financieras.

Aplicar y valorar un tipo de opción real para un proyecto de inversión minero de Grupo México®, empresa líder en la extracción de cobre del país, con base en la metodología de opciones reales para demostrar que es una alternativa óptima para calcular el valor real de este proyecto de inversión que se planea desarrollar, y realizar las comparaciones de métodos o criterios tradicionales sobre la aceptación o rechazo del proyecto.

Calcular el valor de los beneficios esperados del proyecto, con base en la decisión financiera elegida, y concluir si la aplicación de esta metodología aporta mejores resultados, al ampliar el panorama de análisis, y tomar mejores decisiones financieras dentro de esta empresa.

Hipótesis

La adaptación y aplicación de derivados financieros sobre activos reales contribuye a tomar mejores decisiones financieras dentro de una empresa respecto a sus proyectos de inversión, al generar mayores alternativas de obtener mejores resultados e ingresos para una empresa, además de poder afrontar el riesgo asociado por iniciar, expandir, posponer o cancelar algún proyecto.

Hipótesis Secundarias

Los métodos tradicionales para la aceptación o rechazo de un proyecto de inversión, como el Valor Presente Neto, subestiman el valor real del proyecto minero elegido, debido a que no contemplan el nivel flexibilidad que puede alcanzar éste. Por lo que, son métodos más lineales que no consideran mayores variables que cambien el valor del proyecto.

A partir de la valuación de un proyecto de inversión minero por medio del desarrollo de la metodología y teoría de las Opciones Reales, se obtienen resultados más precisos que integran un mayor nivel de flexibilidad en comparación con métodos tradicionales como el Valor Presente Neto, además, tomando en cuenta el entorno económico-financiero donde se desarrolla, al considerar variables internas y externas significativas, se generan decisiones financieras más objetivas para este proyecto.

Matriz de Congruencia

Tabla 1. Matriz de Congruencia

Preguntas de Investigación	Objetivo de la Investigación	Hipótesis	Variables
¿Cuál es el beneficio de la aplicación de los productos derivados para la valuación de los proyectos de inversión, en este caso, las opciones financieras?	Encontrar el valor real del proyecto de inversión seleccionado, a través del uso de derivados financieros, es decir, desarrollando diferentes metodologías utilizadas en la valuación de opciones financieras, como la fórmula de Black & Scholes, el modelo binomial desarrollado por Cox y Rubinstein o la simulación de Montecarlo. Por lo que, es necesario adaptarse a los cambios que puedan tener las empresas, donde se requieren tomar decisiones financieras respecto a los proyectos de inversión puestos en marcha o incluso los que se planean desarrollar.	La adaptación y aplicación de derivados financieros sobre activos reales contribuye a tomar mejores decisiones para una empresa respecto a sus proyectos de inversión, al generar mayores alternativas de obtener mejores resultados e ingresos para una empresa, además de poder afrontar el riesgo asociado por iniciar, expandir, posponer o cancelar algún proyecto.	Derivados Financieros
Preguntas Secundarias de la Investigación	Objetivos Específicos de la Investigación	Hipótesis Secundarias	Variables
¿Los métodos tradicionales comúnmente utilizados para aceptar o rechazar un proyecto de inversión, como el Valor Presente Neto, son suficientes para poder tomar decisiones financieras?	Explicar cómo los métodos convencionales sobre la valuación de proyectos de inversión, como el Valor Presente Neto, no aportan resultados suficientes para obtener el valor real de un proyecto, al no incluir en su metodología la flexibilidad que algún proyecto pueda alcanzar, así como tienen un menor alcance para la generación de distintos escenarios, por medio de los cuales, se pueden tomar mejores decisiones financieras.	Los métodos tradicionales para la aceptación o rechazo de un proyecto de inversión, como el Valor Presente Neto, subestiman el valor real del proyecto minero elegido, debido a que no contemplan el nivel flexibilidad que puede alcanzar éste. Por lo que, son métodos más lineales que no consideran mayores variables que cambien el valor del proyecto.	Valor Presente Neto
¿Las Opciones Reales son un método más preciso para obtener el valor real y la flexibilidad de un proyecto de inversión, en comparación con métodos tradicionales comúnmente utilizados?	Aplicar y valorar un tipo de opción real para un proyecto de inversión minero de Grupo México®, empresa líder en la extracción de cobre del país, con base en la metodología de opciones reales para demostrar que son una alternativa óptima para calcular el valor real de este proyecto de inversión que se planea desarrollar y realizar las comparaciones de métodos tradicionales sobre la aceptación o rechazo del proyecto. Calcular el valor de los beneficios esperados del proyecto, con base en la decisión financiera elegida, y concluir si la aplicación de esta metodología aporta mejores resultados, al ampliar el panorama de análisis, y se toman mejores decisiones financieras dentro de esta empresa.	A partir de la valuación de un proyecto de inversión minero por medio del desarrollo de la metodología y teoría de las Opciones Reales, se obtienen resultados más precisos que integran un mayor nivel de flexibilidad en comparación con métodos tradicionales como el Valor Presente Neto, además, tomando en cuenta el entorno económico-financiero donde se desarrolla, al considerar variables internas y externas significativas, se generan decisiones financieras más objetivas para este proyecto.	Opciones Reales

Fuente: Elaboración propia

Metodología

La investigación por medio de la cual se desarrolla esta tesis es del tipo cuantitativa, ya que, como comentan Kerlinger y Lee (2002), (citados en Hernández y Collado, 2010), un problema de investigación cuantitativa debe expresar una relación entre dos o más conceptos o variables, se debe formular claramente y tener la posibilidad de realizar una prueba empírica, es decir, que se adapte a condiciones reales. Entonces, se utiliza un plan o estrategia para analizar la certeza de las hipótesis desarrolladas bajo ciertas circunstancias.

Considerando que el objetivo de esta investigación debe contribuir a resolver un problema existente que se adapte a la vida real, entonces se tiene que mencionar y desarrollar de qué forma el tema central de esta tesis puede ayudar a llevarlo a cabo. Basándose en lo que comentan Hernández y Collado (2010) el diseño de esta investigación es de tipo no experimental, ya que, se realiza sin manipular deliberadamente las variables independientes o causas, a través de categorías, variables, acontecimientos o contextos que ya ocurrieron, también se le conoce como *ex post-facto*, a diferencia de los diseños experimentales puros y cuasiexperimentales.

Asimismo, la teoría se desarrolla o construye por medio de la recolección de datos empíricos, analizados y relacionados a cada concepto y/o variable dentro de cada metodología que se aplica con base en diferentes teorías financieras, esto implica que los datos se consideran descriptivos, para así poder sustentar la comprobación de las hipótesis previamente planteadas.

También esta investigación contempla alcances del tipo correlacional-causal, ya que, se explica y desarrolla la relación entre las dos metodologías, comprobando la relación que existe entre éstas, es decir, a través del cálculo del Valor Presente Neto y la aplicación de la metodología de las opciones financieras y reales sobre las características de un proyecto de inversión.

Por lo anterior, se profundiza en un caso específico de un proyecto de inversión minero de extracción de metales que no ha sido analizado a profundidad actualmente, desarrollando la aplicación de la teoría y metodología financiera propuesta, en este caso la valuación de activos reales por medio de opciones reales, contrastando los resultados con los métodos de valuación comúnmente utilizados, para así poder obtener la flexibilidad del proyecto, de tal forma que se relacione con la situación real de dicho proyecto para la empresa seleccionada.

Muestra

Para poder obtener el valor real de un proyecto de inversión a futuro de la empresa minera Grupo México®, se selecciona la información necesaria para el desarrollo del tema central de esta tesis, al consultar fuentes y bases de datos financieras actuales, validadas y confiables, por ejemplo, los estados de resultados anuales de la empresa, el comportamiento de acciones e índices bursátiles, datos históricos de empresas mineras de diferentes países, etc., a través de una muestra no probabilística, ya que el presente trabajo solo se centra en estudiar una aplicación del sector minero por sus particularidades idóneas para poder exponer este caso de la aplicación y valuación de opciones reales, sin la necesidad de profundizar en otros sectores económicos.

Resumen

La presente tesis expone y desarrolla la teoría y metodología de las opciones reales, la cual, se conforma por 4 capítulos, resultados, recomendaciones y conclusiones, además de una sección de varios anexos, donde se desarrollan resultados adicionales que ayudan a complementar y comprender con mayor detalle algunos temas expuestos en esta tesis. Cabe mencionar que del capítulo 1 al 3 se explica el marco teórico de esta investigación, y el capítulo 4 implementa la aplicación del tema central de esta tesis para poder comentar los resultados y las recomendaciones.

En el capítulo 1 titulado “Derivados Financieros” se abordan los orígenes de los derivados en México, en específico dentro del sistema financiero mexicano, los tipos de derivados que existen, las características que los componen y su utilidad, así como las variables necesarias para su valuación. Además, se hace énfasis en las diferentes estrategias que se pueden llevar a cabo con opciones financieras, ya que, a través de este tipo de derivado surge la teoría central que es objeto de análisis y estudio en la presente tesis.

A su vez, se explican los diversos tipos de swaps que existen en el mercado de derivados, por lo que se pretende entender cada tipo y/o subtipo respecto a las características que los conforman.

En el capítulo 2 titulado “Valuación de Opciones Financieras” se explica qué es una opción financiera, las características que la componen, así como los distintos modelos utilizados para poder calcular su valor en el mercado. Esto se puede realizar a

través de la utilización del modelo de *Black & Scholes*, el modelo Binomial, así como las simulaciones aleatorias de ciertas variables con base en el método de Monte Carlo.

A su vez, se requiere desarrollar la explicación y demostración de estos modelos, así como de teoría matemática financiera más compleja, aunque esto no es el tema principal de esta tesis, se considera importante entender de dónde surgen las fórmulas y metodologías usadas actualmente para obtener el valor de una opción financiera, o lo que es equivalente, obtener el precio de la prima de la opción.

La teoría y tipos de opciones reales se explican en el capítulo 3, titulado “Opciones Reales”, donde se detalla cada tipo de opción real y cómo pueden utilizarse en un proyecto de inversión, de acuerdo con las características y situación del mismo proyecto. A su vez se aborda la importancia de tomar en cuenta otros métodos de valuación que aporten resultados sobre algún proyecto de inversión, en comparación de resultados más lineales y convencionales, los cuales, no permiten obtener la flexibilidad implícita en un proyecto de inversión de cualquier sector.

Dado lo anterior, se tienen distintos tipos de opciones reales, los cuales deben aplicarse según las condiciones del proyecto de inversión con base en la mejor expectativa que requiera la empresa sobre las decisiones financieras que implemente. Esto se explica con base en las opiniones de diversos autores que hablan acerca de este tema y cómo su implementación impacta en los proyectos, así como los pros y contras que conlleva esta teoría.

La opción real de expansión se aplica en el capítulo 4, nombrado “Valuación y Aplicación de Opciones Reales”, en este capítulo se utiliza toda la información recabada

de distintas fuentes financieras, se desarrolla cada supuesto explicado detalladamente, para así poder llegar a la valuación de la opción real de expansión sobre el proyecto de inversión minero en Buenavista del Cobre, en Sonora, perteneciente a la empresa Grupo México®, el cual, extraerá en algunos años una cantidad esperada de toneladas de cobre y zinc anualmente, a partir de que sea terminado.

Con la ayuda del software Crystal Ball® se realizan las simulaciones correspondientes sobre ciertas variables de interés y poder obtener resultados más realistas con base en la generación de escenarios sustentados matemáticamente.

Asimismo, se explican las diferencias de los resultados obtenidos por el método tradicional de valuación de proyectos de inversión y el método aplicado de las opciones reales, lo cual, genera resultados importantes que afectan las decisiones financieras de esta empresa.

Al final de la tesis se muestra la bibliografía, la cual, fue base de consulta para el desarrollo del tema de esta tesis, a través de libros especializados, casos prácticos, notas periodísticas, revistas académicas y diversos sitios web. En los anexos se encuentran más detalles de la teoría del modelo de valuación de opciones financieras, estadísticas relevantes de Grupo México® y del sector minero en México y en el mundo, así como la simulación de escenarios de variables que influyen en el valor del proyecto de inversión elegido. También se muestran los resultados de la proyección del precio del cobre y zinc obtenidos por medio del software Eviews®, por medio de la implementación de series de tiempo y el modelo óptimo asociado a cada una.

Capítulo 1. Derivados Financieros

1.1 Antecedentes de los Derivados en México

Los instrumentos o productos derivados se definen como contratos cuyo precio depende del valor de un activo que cotiza en los mercados de contado, el cual comúnmente se le conoce como bien o activo subyacente de dicho contrato. En el mercado de derivados el riesgo asociado a estos contratos se transfiere de un inversionista o agente económico a otro que asumen tales riesgos a cambio de obtener alguna ganancia o rendimiento en el futuro.

Los derivados financieros sirven principalmente para mitigar o eliminar el riesgo, para realizar una cobertura de riesgos, también para especular con los precios y/o para poder realizar estrategias de arbitraje. Estos productos se compran y venden en diferentes mercados organizados o mercados no organizados (*Over the Counter*) alrededor del mundo, el más antiguo de todos es el *Chicago Board of Trade* (CBOT), inició operaciones en 1848 donde se podían contratar futuros sobre distintos granos. En 1919 se creó el *Chicago Mercantile Exchange*, pero hasta 1973 se tuvieron contratos futuros y opciones financieras, también en ese año se inauguró el *Chicago Board of Options Exchange*, donde se podían contratar opciones sobre acciones e índices.

El mercado de derivados mexicano conocido como MexDer, inició operaciones en diciembre de 1998, al principio solo se tenían contratos de futuros, y fue hasta marzo de 2004 que se empezaron a negociar contratos de opciones sobre el IPC, es decir, opciones sobre índices y también sobre algunas acciones, por medio de una alianza con el Mercado Español de Futuros y Opciones Financieros MEFF (De Lara, 2005).

En México se empezaron a cotizar contratos de futuros sobre el peso en el *Chicago Mercantil Exchange* de 1978 a 1982, también de 1983 a 1987 se operaron también futuros sobre acciones y Petrobonos en la BMV. Además, desde 1987 se incursionaron los contratos forward sobre el dólar nombrados como Contratos de Coberturas Cambiarias y desde 1992 se operan en la BMV títulos opcionales o warrants sobre acciones, índices accionarios, así como el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), Certificados de Participación Ordinaria (CPO's) e índices accionarios de mercados extranjeros (Díaz y Hernández, 2003).

1.1.1 Bolsa Mexicana de Valores (BMV)

Las bolsas de valores son instituciones organizadas, autorizadas y transparentes, que propician el financiamiento y la sana competencia, es el lugar predilecto de inversionistas y empresas como una alternativa para poder proteger e incrementar su patrimonio o capital, a su vez, aportan recursos financieros para que tanto empresas como el propio gobierno puedan financiar proyectos que generen empleos y crecimiento en los niveles productivos de diversos sectores de la economía de un país, es por esto que, la Bolsa Mexicana de Valores ha sido parte del desarrollo del mercado en México por varias décadas como pieza fundamental del sistema financiero (Mercado, 2009).

La negociación de contratos de derivados no se podría llevar a cabo sin la existencia de la Bolsa Mexicana de Valores, entidad donde se llevan a cabo las operaciones del mercado de valores organizado en México con el objetivo de facilitar las transacciones con valores y preservar el desarrollo del mercado, respaldar su expansión y competitividad. También debe establecer procesos que faciliten la oferta y demanda de

valores, títulos de crédito inscritos en el Registro Nacional de Valores, además de la emisión, colocación e intercambio de estos títulos (Mercado, 2009).

Los inicios de la BMV se remontan a 1867 cuando se promulgó la Ley Reglamentaria del Corretaje de Valores, después en 1933 se inauguró la Bolsa de Valores de México, bajo la supervisión de la entonces Comisión Nacional de Valores, años más tarde en 1975 entró en vigor la Ley del Mercado de Valores y también lo que se conoce hoy en día como Bolsa Mexicana de Valores incorporando a las bolsas que había en las ciudades de Guadalajara, Monterrey y Ciudad de México (Mercado, 2009).

Desde entonces, el mercado ha evolucionado y la BMV se ha adaptado a las tendencias tecnológicas, introduciendo nuevos sistemas y obteniendo certificaciones internacionales que avalan su calidad en los procesos. El 25 de julio de 2018 se inauguró la Bolsa Institucional de Valores (BIVA) que permitirá que nuevas empresas puedan obtener recursos mediante distintas formas de financiamiento por medio de los mercados de Deuda, Capitales y Derivados, hecho histórico para el futuro financiero del país.

1.2 Futuros

Este derivado financiero se define como un acuerdo para comprar o vender un activo subyacente a un determinado precio en una fecha futura acordada, donde se debe especificar dentro del mismo el tipo de activo financiero que se va a negociar, el tamaño del contrato o cantidad de activo a entregar, fecha y lugar para entregar el activo.

Según Goldenberg (2016), los mercados de futuros son una forma inteligente de resolver los problemas de no liquidez y riesgo de la contraparte de los mercados forward, manteniendo intacta la función económica básica de la contratación a plazo. Lo anterior,

se basa en fijar hoy un precio al que se producen las operaciones diferidas. Los mercados de futuros organizados logran estos objetivos mediante la primera estandarización de contratos de futuros.

De acuerdo con el activo que se tenga en el contrato, los meses de entrega pueden variar, si se refiere a un contrato de futuros sobre divisas tienen como meses de entrega marzo, junio, septiembre y diciembre en el *Chicago Mercantile Exchange*, mientras que para un contrato de futuros del maíz en el *Chicago Board of Trade*, los meses de entrega son enero, marzo, mayo, julio, septiembre, noviembre y diciembre, y así pueden cambiar las entregas respecto al mercado donde se realice el contrato de futuro (Hull, 2014).

En la práctica no es muy común que las partes involucradas en un contrato de futuros se esperen al vencimiento para entregar el activo, ya que también se tienen que considerar los costos de almacenamiento durante la vigencia del futuro, por lo tanto, se puede cancelar la posición, antes del vencimiento, al participar en otro contrato de futuros en una posición distinta, ya sea larga o de corta.

La estandarización en los contratos de futuros negociados corresponde a la misma cantidad, calidad y fecha, estos factores son estándares en este tipo de contratos, lo que no pasa con los contratos forward, ya que estos son hechos a la medida del comprador y/o vendedor.

Hull (2014) comenta que para el activo también se pueden asignar diversas características o estándares de calidad que debe cumplir dentro de los mercados internacionales donde se realice el contrato de futuros, como medidas de peso y

volumen, longitud, origen y transportación, ya sea si se negocien alimentos como carne, semillas, frutas, así como materiales o metales, por ejemplo, madera, algodón, petróleo, oro, cobre, etc. La oferta y demanda de diferentes activos dependerá de la profundidad que tenga cada mercado en diferentes países.

El tamaño del contrato es un factor importante, se refiere a la cantidad de activo que se tiene que entregar a la contraparte por cada contrato. Si se tiene un tamaño de contrato muy grande, los inversionistas no podrán utilizar el mercado regulado para poder realizar coberturas sobre inversiones u operaciones pequeñas con fines especulativos. Pero si el tamaño del contrato es muy pequeño, los costos de negociación se encarecen, por el costo fijo vinculado a cada contrato (Hull, 2014).

Muchas veces los costos para negociar un contrato de futuro son caros e inaccesibles para algunos inversionistas o empresas de diversos sectores, el valor nominal del contrato de futuro del dólar en el MexDer es de 10,000 dólares y el de la TIIE 28 es de 100,000 pesos, por eso se han creado alternativas para pequeños inversionistas que no cuenten con dichas cantidades, creando contratos con menores costos como el Mini S&P, Mini Nasdaq o Mini IPC.

1.2.1 Valuación

Respecto a la valuación de un futuro, Días y Hernández (2003) comentan que el precio del Futuro F_t debe ser tal que mantenga el mercado en equilibrio, entonces éste está determinado por el precio Spot (S_t) del activo subyacente y los costos de acarreo o almacenamiento. Entonces el precio de equilibrio de un futuro se puede expresar de la siguiente forma:

$$F_t = S_t(1+r)$$

Donde r es la tasa de interés libre de riesgo, se puede notar que se está considerando como costo de acarreo solamente la tasa de interés, es decir en este caso se refiere a un bien cuyo costo de mantenimiento y/o almacenamiento es igual a cero.

Además, el precio del futuro es el precio Spot del activo en cuestión, llevado a Valor Futuro por medio de la tasa de interés libre de riesgo existente en el mercado durante el periodo de vigencia del futuro. Además, si se considera una tasa de interés capitalizable continuamente el precio del futuro sería:

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}$$

Si se considera el caso de los bienes para los cuales se requiere realizar ciertos gastos durante el periodo de comercialización, tales como gastos de almacenaje, transporte, seguros, mermas, etc., el precio del futuro está dado por:

$$F_t = (S_t + \phi_t) e^{r(T-t)}$$

Donde ϕ_t , son los costos intermedios de comercialización entre el periodo t y T , medidos en términos de valor presente para el tiempo t . Pero, también se podría considerar que éstos son una proporción del precio subyacente (μ) y entonces, el precio futuro queda determinado por:

$$F_t = S_t e^{(r+\mu)(T-t)}$$

1.2.2 Riesgos de los Futuros

Al negociar con futuros se tiene que tomar en cuenta que conforme se aproxime la fecha de vencimiento, el precio del futuro y el precio del mercado spot deberán coincidir, de lo contrario, se tendrían oportunidades de arbitraje, a esto se le conoce como “*principio de convergencia*”, a su vez, la diferencia entre el precio del futuro y el precio spot se le conoce como “*base*” (Martínez, 1994).

Si se cancela la posición inicial del contrato de futuro antes del vencimiento puede que la convergencia no se cumpla y se tenga lo que se conoce como “riesgo de la base”, factor que afecta de diferente forma si se tiene una posición corta o larga dentro de un contrato de futuros, este tema se abordará a mayor detalle dentro del correspondiente anexo.

1.2.3 Usos de los Futuros

Se puede especular con el comportamiento del precio de los futuros, así como obtener mayores rendimientos por medio del apalancamiento, tomando en cuenta que si se tienen pérdidas estas tienen consecuencias mayores. Algunos inversionistas prefieren utilizar los futuros para cubrirse del riesgo, al mitigar o eliminar totalmente el efecto del cambio en los precios, y se puede elegir una posición contraria a la que se tiene en el contrato (Martínez, 1994).

Otro uso que tienen los futuros es el arbitraje, por medio del cual, se obtienen beneficios sin riesgo al comprar y vender al mismo tiempo, y así tener diferenciales que permiten crear ganancias. Se puede negociar en diferentes mercados para asegurar algún beneficio.

1.2.4 Cámara de Compensación

En el mercado Mexicano de Derivados (MexDer), Asigna, Compensación y Liquidación (ASIGNA) es la entidad donde se realizan todas las transacciones, ya que es la contraparte central que garantiza las obligaciones financieras que se desprenden de la operación de los contratos de derivados que cotizan en Bolsa Mexicana de Valores. Es un fideicomiso donde los socios son también fideicomisos de administración y pago, conformado por BBVA, Banamex, Scotiabank, Santander, Actinver y GBM, a estas instituciones se les conoce como socios liquidadores, a su vez, aportan recursos para constituir los fondos de compensación y aportaciones (De Lara, 2005).

Como cámara de compensación y parte del sistema financiero mexicano, es regida por leyes y normas para establecer una operación adecuada de la compensación y liquidación de los contratos realizados en el MexDer, las instituciones que regulan a ASIGNA son la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores y el Banco de México. ASIGNA tiene la facultad de supervisar y sancionar a los socios liquidadores correspondientes mediante su reglamento interno, así como recibir la información pertinente sobre la suficiencia financiera, transacciones realizadas, tipos de activos y estados financieros por parte de los socios.

1.2.4.1 Márgenes

El margen inicial conocido también como Aportación Inicial Mínima (AIM) se calcula en pesos mexicanos por medio del Value at Risk (VaR), es decir, la pérdida potencial máxima producida por el cambio abrupto en los precios de los activos financieros en un horizonte de tiempo de un día y al 99% de probabilidad, aunque este

parámetro puede variar. Se pueden utilizar distintos modelos para obtener el VaR, como el de simulación histórica, Montecarlo y varianza-covarianza. Este margen inicial puede ser aportado por el inversionista en efectivo, valores de renta fija o variable.

El margen excedente varía hasta 2.5 veces el margen inicial y lo determina el socio liquidador con base en el riesgo de incumplimiento de cada contraparte y se deposita en una cuenta al socio. El margen de mantenimiento o de llamada se da cuando se tienen minusvalías como consecuencia de movimientos adversos en los precios y por medio de los socios liquidadores, ASIGNA realiza estas llamadas de margen si se presenta una afectación importante. Pero si se tienen plusvalías se tendría que hacer una devolución al inversionista (De Lara, 2005).

También existe un fondo de contribución donde están todas las aportaciones de AIMS por los inversionistas, para poder asegurar que existe el suficiente efectivo para poder hacer frente a la posible pérdida de cada día. Mientras que el fondo de compensación es formado por los socios liquidadores mediante el 10% de la aportación del margen inicial de cada operación y asegurar un efectivo adicional por si ocurriera un evento inusual si el margen inicial no pudiera cubrir las pérdidas provocadas por los cambios en los precios del mercado (De Lara, 2005).

El sistema prudencial garantiza el cumplimiento del contrato o, lo que es lo mismo, elimina por completo el riesgo de incumplimiento, esto gracias al manejo de márgenes y su valuación diaria, lo cual reduce las pérdidas potenciales por los cambios a diarios en los precios de los contratos, eliminando prácticamente el riesgo de incumplimiento (Atehortúa, 2012).

1.3 Forwards

De acuerdo con Martínez (1994), un contrato forward se lleva a cabo de forma privada entre ambas partes, quienes determinan las características del contrato como el activo subyacente, fecha, forma de liquidación y precio. Este tipo de contrato no se realiza por medio de un mercado establecido y al vencimiento, ambas partes liquidan el contrato haciendo frente a sus obligaciones respecto al pago y a la entrega.

Se dice que son contratos hechos a la medida o "*tailor made*", a pesar de ello, no se tiene una garantía de cumplimiento, debido a que no se tiene una cámara de compensación que los respalde, por lo tanto, se tienen mayores riesgos de incumplimiento por alguna de las partes y no hay movimientos de flujos hasta la fecha de vencimiento.

1.4 Opciones

Es un contrato que implica un acuerdo entre dos partes, comprador y vendedor, por medio del cual, se adquiere a cambio de cierta contraprestación (prima o precio de mercado de la opción) el derecho, más no la obligación, de comprar o a vender determinado activo financiero conocido como subyacente (S), en una fecha de vencimiento o de maduración (T) a un precio pactado previamente e invariable durante la vigencia del contrato, denominado precio de ejercicio o strike (K o E).

El vendedor asume la obligación de satisfacer tal derecho si el comprador decidiera ejercerlo, porque éste no tiene la obligación de hacerlo. Si el derecho adquirido es de compra sobre el activo subyacente, la opción es denominada call, mientras que, si el derecho es de venta, la opción se denomina put.

En ambos casos existe la posibilidad de que el derecho correspondiente pueda ser ejercido solo en la fecha de vencimiento, a este tipo de opciones se les conoce como europeas. Las opciones que se pueden ejercer durante la vigencia de la opción, es decir, en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento, son conocidas como opciones americanas.

Una característica que distingue a las opciones de los contratos de futuros es que la opción se puede ejercer cuando el tenedor los desee, siempre y cuando esté dentro de la fecha de ejercicio, normalmente el contrato de futuros es definitivo, sin embargo, el costo es prácticamente nulo, mientras que el de la opción tiene cierto precio, el cual se conoce como precio de la opción o prima y se calcula por medio distintos métodos o modelos de valuación (Díaz y Hernández, 2003).

Se puede clasificar a las opciones de acuerdo con el activo financiero que las componen de la siguiente forma:

- 1) Opciones sobre acciones (*stock option*): Fueron las primeras en aparecer en el *Chicago Board Option Exchange* (CBOE) en 1973.
- 2) Opciones sobre índices bursátiles (*index option*): Surgen en 1983 como instrumento para asegurar carteras de renta variable. Han alcanzado un gran desarrollo en los últimos años, siendo uno de los tipos de opciones que más se contratan.
- 3) Opciones sobre tipos de interés (*interest option*): La opción se gira sobre determinados activos de renta fija a un tipo de interés determinado a percibir la expiración. Se usan para coberturas de carteras de renta fija.

4) Opciones sobre divisas (*currency option*): Se usan para cobertura de riesgo de cambio de divisas. Aparecieron por primera vez en la bolsa de Filadelfia y se han extendido a todos los mercados.

5) Opciones sobre futuros (*futures option*): El activo subyacente es un futuro sobre el que se gira la opción. A su vez el futuro puede ser sobre índices bursátiles, *commodities*, tipos de interés, etc.

6) Opciones sobre mercancías (*commodity option*): Opciones sobre diversos productos agrícolas o energéticos.

Una opción de compra call y una opción de venta put tienen fines distintos sobre las expectativas que se espera obtener al financiarse con acciones, índices, divisas, o algún otro activo financiero. Para la opción call, las expectativas son alcistas mientras que para la opción put son bajistas. También se tiene que considerar el factor riesgo, que se tiene como comprador y vendedor de la opción call o put, ya que como vendedor se pueden tener pérdidas ilimitadas, a su vez, el comprador o tenedor limita su pérdida al precio de la prima que paga al propio vendedor (Casanovas, 2013).

Generalmente los contratos de opciones financieras suelen usarse para diseñar carteras de inversión, en las que se combinan posiciones relativas a tales opciones con posiciones de compra al contado o de venta a descubierto de otros activos financieros, como el activo subyacente a dichos contratos como un número determinado de acciones de una misma empresa de la Bolsa de Valores y el activo libre de riesgo, mediante el que sería posible tanto prestar dinero como pedirlo prestado a la tasa de interés libre de riesgo. Esto significa que en el diseño de cualquier estrategia de inversión pueden

combinarse entre sí, en un momento dado, dos o más de las siguientes posiciones elementales:

- Compra al contado de acciones en Bolsa a precio actual.
- Compra al contado del activo libre de riesgo (préstamo acreedor e inversión a la tasa libre de riesgo).
- Venta en corto del activo libre de riesgo (especular sobre una baja en el precio para comprar más barato y después saldar la venta)
- Compra o venta de contratos call o put en el mercado de opciones

1.4.1 Liquidación de Opciones

En el MexDer, las opciones del IPC no se entregan en especie solo en efectivo y con vencimientos trimestrales, mientras que las opciones sobre acciones se entregan físicamente o en especie, también con vencimientos trimestrales, ambos contratos se negocian electrónicamente.

La liquidación de opciones se hace diariamente a través de ASIGNA incluyendo las cantidades correspondientes de las primas pactadas de cada operación, también se considera la liquidación por la asignación anticipada o al vencimiento de los contratos que se entregan en especie o en efectivo.

Si el precio del activo subyacente es mayor al precio de ejercicio pactado para una opción call, entonces se liquida en especie o en efectivo cuando el comprador ejerce su derecho de compra, sin importar que la opción sea europea o americana, pagando el precio de ejercicio. En el caso de que el precio del activo subyacente sea menor al precio

de ejercicio pactado para una opción put, entonces se liquida en especie o en efectivo cuando el comprador ejerce su derecho de venta cobrando el precio de ejercicio.

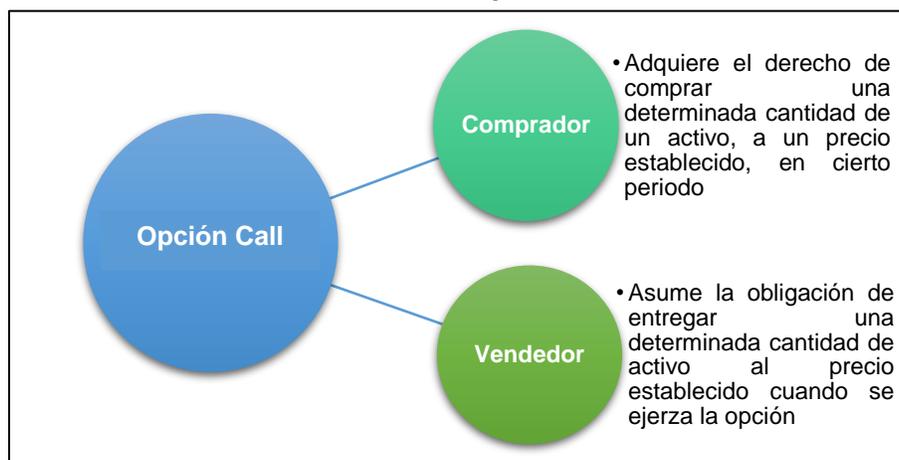
Si el call o el put se liquidan en efectivo, entonces el comprador de la opción de compra o venta recibirá el valor intrínseco de esta, el cual está dado por la diferencia del precio del subyacente y del precio de ejercicio, multiplicado por el tamaño del contrato y por el número de contratos ejercidos, y quien se lo entregará es el vendedor de la opción de compra o venta, según sea el caso.

1.4.2 Posiciones en las Opciones

De acuerdo con los términos del mercado de opciones, quien adquiere el derecho de compra toma una posición de compra-call, a su vez, la contraparte, toma una posición de venta-call, y quien adquiere el derecho de venta toma una posición de compra-put, a su vez, la contraparte toma una posición de venta-put.

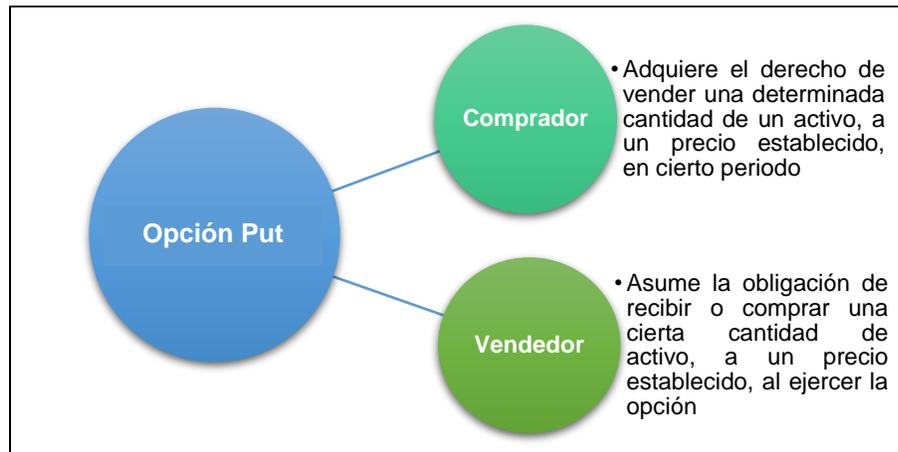
Las siguientes gráficas muestran las posiciones para una opción de compra y una opción de venta:

Gráfica 3. Opción Call



Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 4. Opción Put



Fuente: Elaboración propia.

Por lo tanto, se pueden realizar 4 combinaciones de posiciones dentro de las opciones, las cuales, se describen en las siguientes secciones.

1.4.2.1 Comprar una Opción de Compra (Long Call)

Cuando se prevén comportamientos al alza en los mercados, en particular si las acciones suben su precio, pero en ese momento no se tiene la liquidez requerida para poder realizar la compra se puede llevar a cabo esta opción, con la cual se podrá disminuir el costo de las acciones y contrarrestar los riesgos al importe de la prima.

De manera más clara, al realizar la compra de un call, se puede comprar la acción o cualquier otro activo a un precio fijo o de ejercicio, si el precio de la acción sube en comparación con el precio de ejercicio se tendrá un margen de ganancia, pero si sucede lo contrario, se tendrán pérdidas, las cuales son fijas y serán equivalentes al pago por ejercer la opción, es decir, la prima, previniendo incurrir en mayores riesgos y en este caso la opción no será ejercida. La relación entre inversión y rendimiento es alta, lo que indica un nivel de apalancamiento importante por medio de inversiones menores.

1.4.2.2 Venta de una Opción de Venta (Short Put)

Si se anticipa el comportamiento alcista del mercado, en este caso en el precio de las acciones, se puede llevar a cabo la venta de una acción al descubierto o también si se quiere asegurar un precio de compra de las acciones, es decir, una cobertura de inversión anticipada. En caso de que el comportamiento fuera bajista y por ende los precios de las acciones bajen, al realizar la venta al descubierto se tendrán menores pérdidas debido al importe de la prima cobrada. Sin embargo, si la previsión es correcta y el precio de las acciones suben, los beneficios serán menores, en comparación de los que se tendría con un comportamiento bajista y haber llevado a cabo la venta al descubierto (Casanovas, 2003).

Por lo anterior, si se suscitara un movimiento horizontal o un incremento en el precio de la acción, la operación financiera que mayor rentabilidad obtiene es la venta de una opción put, ya que ofrece al inversionista la posibilidad de comprar más barato y asegurar un precio de compra de las acciones.

1.4.2.3 Compra de una Opción de Venta (Long Put)

Esta opción permite protegerse de una tendencia bajista esperada en los precios de las acciones o de algún otro activo financiero para asegurar un precio de venta mínimo, de tal forma que, si el precio de las acciones es menor que el precio de ejercicio de la opción acordada, entonces se ejercerá la opción, lo que es equivalente a venderla y se obtendrá una ganancia que compensará la pérdida obtenida debido al decrecimiento del precio, ya que la prima tendrá un mayor valor.

Pero si el precio del activo subyacente aumenta, no se ejercerá la opción y esta tendencia alcista compensará la prima pagada anteriormente, a este tipo de opción también se le conoce como “*call sintético*”.

En resumen, si las expectativas como inversionista sobre el mercado son bajistas, una de las posibles estrategias a seguir es comprar opciones put con posibilidad de obtener ganancias por medio de precios a la baja, ya que las ganancias se incrementarán a medida que el precio del subyacente baje su precio en el mercado, también se tiene un riesgo limitado si las previsiones sobre el comportamiento del mercado no son las esperadas y se produce un cambio pronunciado de tendencia. Esto implica que, las posibles pérdidas quedan limitadas al pago de la prima, es decir, el precio que se pagó por comprar la opción put.

Supongamos que se tienen acciones de la empresa ABC, con un valor en el mercado actual de \$50 y un inversionista posee 1,000 acciones de esta empresa, y de acuerdo con su estrategia de inversión y dadas las condiciones del mercado, se realiza una compra de 10 opciones de venta sobre las acciones de esta empresa a un precio de \$51 y con fecha de vencimiento en diciembre de 2019, se paga una prima de \$2, entonces la prima total pagada por el inversionista será de:

$$2 \times 10 \times 100 = 2,000 \text{ pesos}$$

Ahora se supondrá que en la fecha vencimiento las acciones se encuentran en \$45, entonces el inversionista limitará su pérdida al ejercer la opción, con el respectivo precio de ejercicio, por:

$$(51 - 50) \times 1,000 - 2,000 = -1,000 \text{ pesos}$$

Si el inversionista no hubiera comprado las 10 opciones de venta y espera hasta la fecha de vencimiento en diciembre, entonces la pérdida que hubiera tenido sería de:

$$(45 - 50) \times 1,000 = -5,000 \text{ pesos}$$

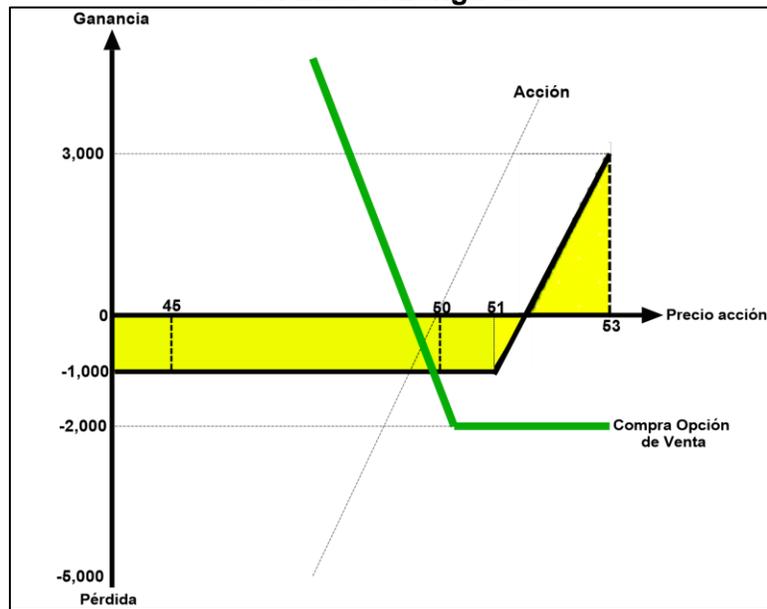
Si el precio de las acciones fuera de \$55, el precio actual sería mayor al que compró la opción de venta, entonces tendría una ganancia al no ejercer la opción de:

$$(55 - 50) \times 1,000 - 2,000 = 3,000 \text{ pesos}$$

Por lo tanto, se puede comprobar que protegerse con esta estrategia es mejor que esperar al comportamiento del mercado si el precio de las acciones baja, ya que se tendría una pérdida más grande al no comprar una opción de venta, y así poder minimizar los riesgos.

La siguiente gráfica muestra el comportamiento del ejemplo anterior para este tipo de estrategia:

Gráfica 5. Long Put



Fuente: Elaboración propia.

1.4.2.4 Venta de una Opción de Compra (Short Call)

Esta opción también es una estrategia contra los comportamientos bajistas de los mercados, la ventaja que se tiene respecto a la compra de una opción de venta (long put), es que la prima se cobra inmediatamente, pero las posibles ganancias son limitadas, a su vez, las pérdidas pueden ser mayores, a este tipo de opción también se le conoce como “put sintético”.

Las características de la venta de un call es que se genera un flujo de efectivo inmediato derivado del ingreso procedente de la venta de opciones, también se retrasa el momento en el que se entra en pérdidas por bajadas en el precio del activo subyacente, y proporciona una mayor rentabilidad si el activo se mantiene estable mientras no se tenga certeza si se tendrá un movimiento horizontal o una caída del precio.

Supongamos que se tienen acciones las mismas 1,000 acciones de la empresa ABC, con un valor en el mercado actual de \$50, de acuerdo con la estrategia de inversión, y se venden 10 opciones de compra a un precio de \$51 y con fecha de vencimiento en diciembre de 2019, pagando una prima de \$2, entonces la prima total cobrada por el inversionista será de:

$$2 \times 10 \times 100 = 2,000 \text{ pesos}$$

Ahora se supondrá que en la fecha de vencimiento las acciones tendrán un precio de \$45, entonces la opción no se ejercería, porque el precio del subyacente es menor al precio de ejercicio, y la pérdida sería de:

$$(45 - 50) \times 1,000 + 2,000 = -3,000 \text{ pesos}$$

Si no se hubiera vendido la opción de compra, la pérdida sería de:

$$(45 - 50) \times 1,000 = -5,000 \text{ pesos}$$

Si el precio de las acciones en la fecha de vencimiento hubiera sido de \$50, entonces la ganancia del inversionista sería de 2,000 pesos, es decir, simplemente la prima que cobró o le pagaron al inversionista. Pero si el precio de las acciones desciende a \$48 en la fecha de vencimiento, no se tendría ni pérdida ni ganancia de la siguiente forma:

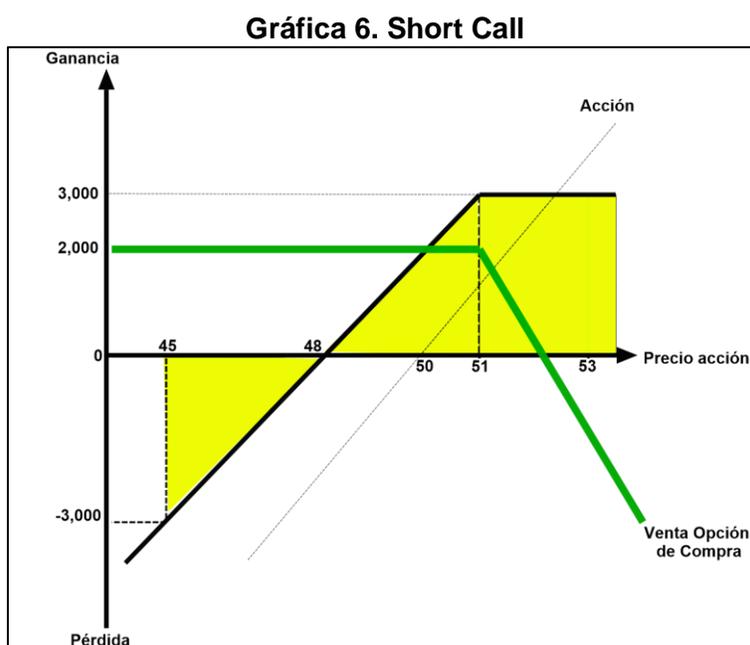
$$(48 - 50) \times 1,000 + 2,000 = 0 \text{ pesos}$$

Finalmente, el caso en el que el precio de las acciones fuera de \$53 al vencimiento, la opción se ejercería, entonces el inversionista tendría una ganancia, al regresar los títulos vendidos, de:

$$(51 - 50) \times 1,000 + 2,000 = 3,000 \text{ pesos}$$

Por lo tanto, se puede comprobar que protegerse con esta estrategia conlleva un riesgo mayor con pérdidas más altas que al comprar una opción de venta, por lo que se tiene que prever el comportamiento del mercado, en este caso para las acciones, y poder decidir qué estrategia es la más conveniente como inversionista.

La siguiente gráfica muestra el comportamiento del ejemplo anterior para este tipo de estrategia:



Fuente: Elaboración Propia.

1.4.3 Estrategias con Opciones

Una vez que se conocen las distintas posiciones que se pueden tener con una opción de compra o venta, se pueden llevar a cabo estrategias con opciones, estas estrategias pueden clasificarse por tendencia, volatilidad y mixtas.

También se deben conocer los riesgos y rendimientos implicados en la evolución del mercado, así como la estrategia que se requiera seguir, ya que el objetivo es protegerse de tener un riesgo de pérdida derivado de un determinado activo financiero por estar en ciertas posiciones con opciones, por lo tanto, las pérdidas de dichas posiciones se deben compensar con las ganancias de otras (Casanovas, 2003).

1.4.3.1 Call Cubierta (Covered Call)

Esta estrategia consiste en comprar una opción de compra cuando se tiene una posición corta en cierto activo subyacente, ya que, si el precio sube, me puedo cubrir ante esta alza al tener una posición larga en la opción. El *covered call* genera un perfil de beneficios moderados, que encuentra su mayor rendimiento cuando el mercado se sitúa por encima del precio de ejercicio de la opción elegida (De Lara, 2005).

1.4.3.2 Put Protectora (Protective Put)

Esta estrategia consiste en comprar una opción de venta cuando se tiene una posición larga en algún activo subyacente, ya que, si el precio baja, me puedo cubrir si se tiene una posición corta por medio de la opción y obtener ganancias. El *protective put* no se debe utilizar como instrumento de especulación en el corto plazo, sino como protección en el largo plazo (De Lara, 2005).

1.4.3.3 Spreads

Este tipo de estrategias tienen un perfil de riesgo-rendimiento basado en las expectativas del activo subyacente, ya sean tendencias alcistas o bajistas. Los *spreads* verticales están compuestos por opciones semejantes sobre el mismo activo subyacente, pero con precios de ejercicio diferentes. A su vez, los *spreads* horizontales se componen

de opciones del mismo tipo, pero con fechas de vencimiento diferentes, finalmente, los spreads diagonales se componen por opciones del mismo tipo, pero con precios de ejercicio y fechas de vencimiento diferentes (Casanovas, 2003).

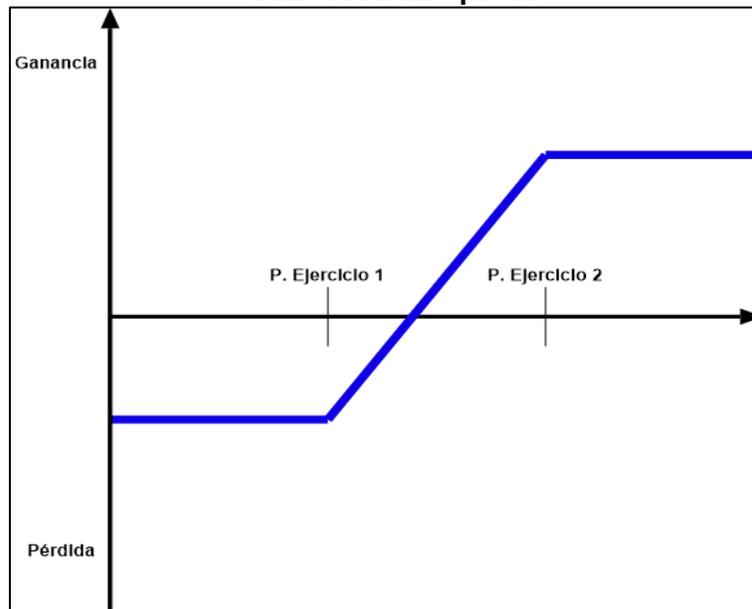
1.4.3.3.1 Bull Spread

Esta estrategia consiste en comprar una opción call y vender una opción call con la misma fecha de vencimiento. Se tiene la opción de compra call a un menor precio de ejercicio que el de la venta de un call. Asimismo, se compra una opción put y se vende una opción put con la misma fecha de vencimiento con un precio menor para la opción de compra del put que para la opción de venta.

El *bull spread* se utiliza cuando la expectativa de los precios del subyacente es alcista, al tener una ganancia limitada y será superior si en la fecha de vencimiento el precio del subyacente es mayor o igual al de ejercicio. Sin embargo, se tendrá una pérdida limitada y será superior si al vencimiento, el precio del subyacente es menor o igual al de ejercicio (De Lara, 2005).

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:

Gráfica 7. Bull Spread



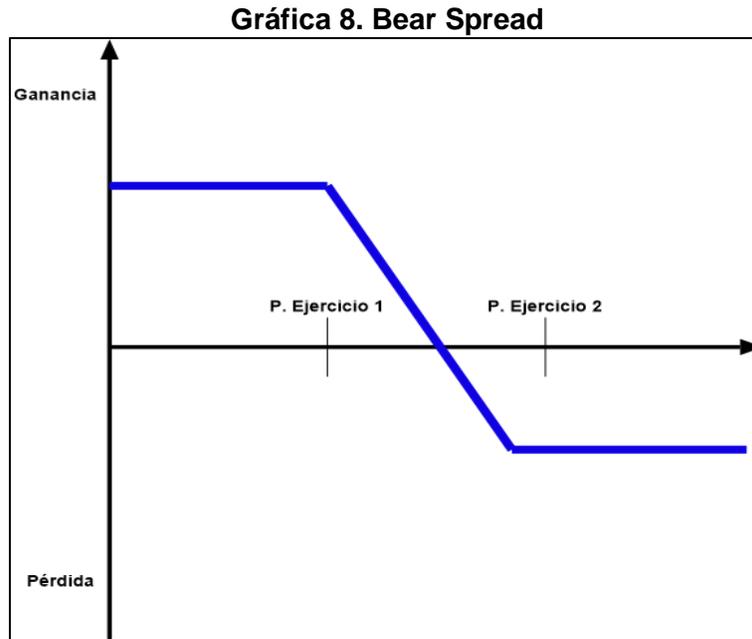
Fuente: Elaboración propia.

1.4.3.3.2 Bear Spread

Para formar esta estrategia, se debe comprar una opción de compra a un precio de ejercicio mayor que el de la venta de una opción de compra con la misma fecha de vencimiento. Asimismo, comprar una opción de venta a un precio de ejercicio mayor que el de la venta de una opción de venta.

El *bear spread* se utiliza cuando la expectativa de los precios del subyacente es bajista, al tener una ganancia limitada y podrá ser superior si en la fecha de vencimiento el precio del subyacente es menor o igual al de ejercicio. Sin embargo, se tendrá una pérdida limitada y será superior si al vencimiento, el precio del subyacente es mayor o igual al de ejercicio (De Lara, 2005).

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:

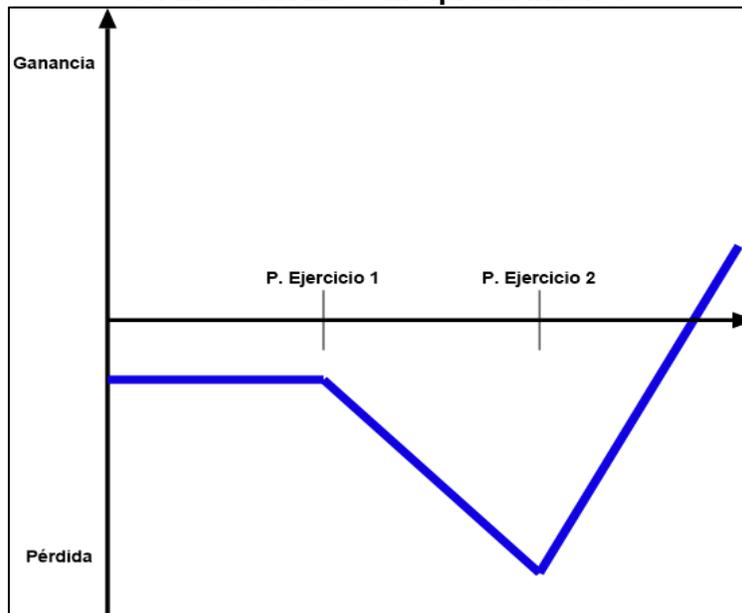


1.4.3.3.3 Ratio Call Spread Inverso

Esta estrategia se forma por medio de la combinación de la venta de menos opciones de compra a precios de ejercicio menores y de la compra de más opciones de compra a precios de ejercicio mayores. Por medio de esta estrategia se pueden tener ganancias significativas al poder llevarla a cabo en mercados con expectativas alcistas en el precio, pero la pérdida será alta cuando el precio del activo subyacente sea igual al del precio de ejercicio de la compra de opciones de compra (Casanovas, 2003).

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:

Gráfica 9. Ratio Call Spread Inverso



También existe otra variante de esta estrategia denominada *ratio call spread*, la cual, consiste en la compra de una opción de compra a un precio de ejercicio menor que el de la venta de dos opciones de compra con precios de ejercicio mayores. Esta estrategia no se ejerce si el precio del activo subyacente es menor al precio de ejercicio, además, la gráfica para esta estrategia es similar a la del *ratio call spread inverso*, solo que está invertida hacia arriba.

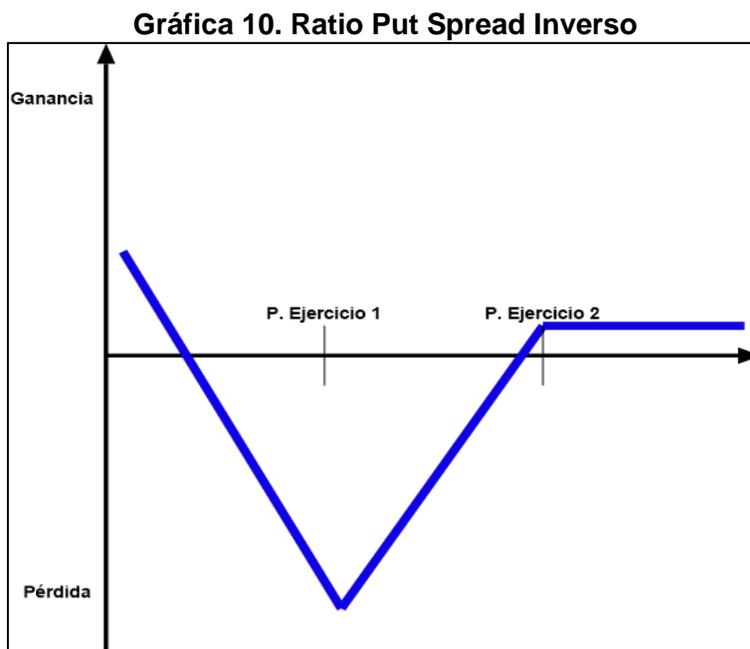
Se debe considerar que, si el precio del activo subyacente tiene un comportamiento alcista, se tendrían pérdidas ilimitadas, pero para un comportamiento bajista las pérdidas son limitadas al precio de la prima pagada (Casanovas, 2003).

1.4.3.3.4 Ratio Put Spread Inverso

Para poder anticipar un comportamiento bajista en el precio del activo subyacente, se puede utilizar esta estrategia. Se forma con la venta de menos opciones de venta con precios de ejercicio mayores y con la compra de mayores opciones de venta con precios

de ejercicios menores. Se tendrán pérdidas cuando el precio del subyacente sea igual al precio de ejercicio de la compra de opciones de venta (Casanovas, 2003).

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:



A su vez, existe otra variante de esta estrategia denominada *ratio put spread*, la cual, consiste en la compra de una opción de venta a un precio de ejercicio mayor que el de la venta de dos opciones de venta con precios de ejercicio menores. Esta estrategia no se ejercería si el precio del activo subyacente es mayor al precio de ejercicio, además, la gráfica para esta estrategia es similar a la del *ratio put spread inverso*, solo que está invertida hacia arriba.

Se debe considerar que, si el precio del activo subyacente tiene un comportamiento bajista, se tendrían pérdidas ilimitadas, pero para un comportamiento alcista las pérdidas son limitadas al precio de la prima pagada (Casanovas, 2003).

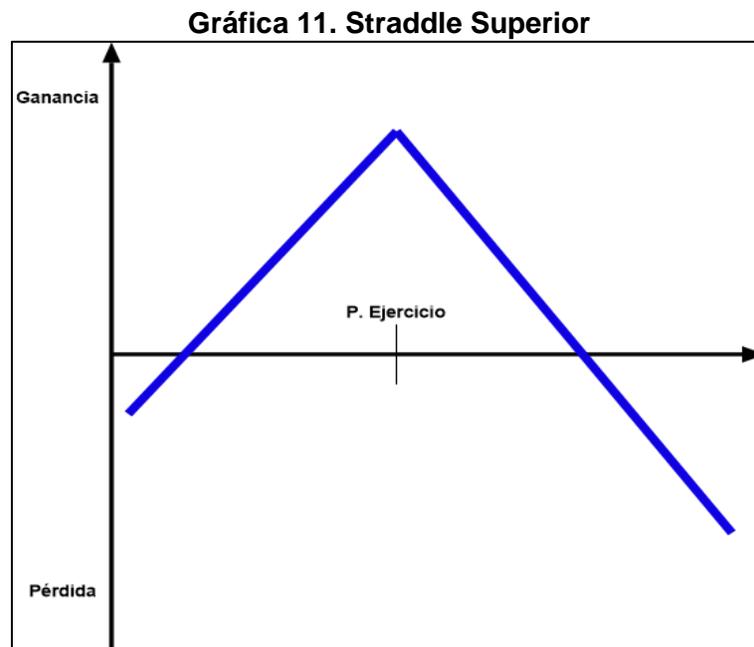
1.4.3.4 Straddle

La estrategia *straddle* se compone de la compra o venta compartida de opciones de compra call y opciones de venta put sobre el mismo activo subyacente bajo condiciones iguales.

1.4.3.4.1 Straddle Superior

Se puede realizar por medio de la combinación de la venta de una opción de compra y la venta de opción de venta sobre el mismo activo subyacente, con un precio de ejercicio y fechas de vencimientos iguales. Si el precio del subyacente es igual al de ejercicio, esta estrategia no podría ejercerse.

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:



Fuente: Elaboración propia.

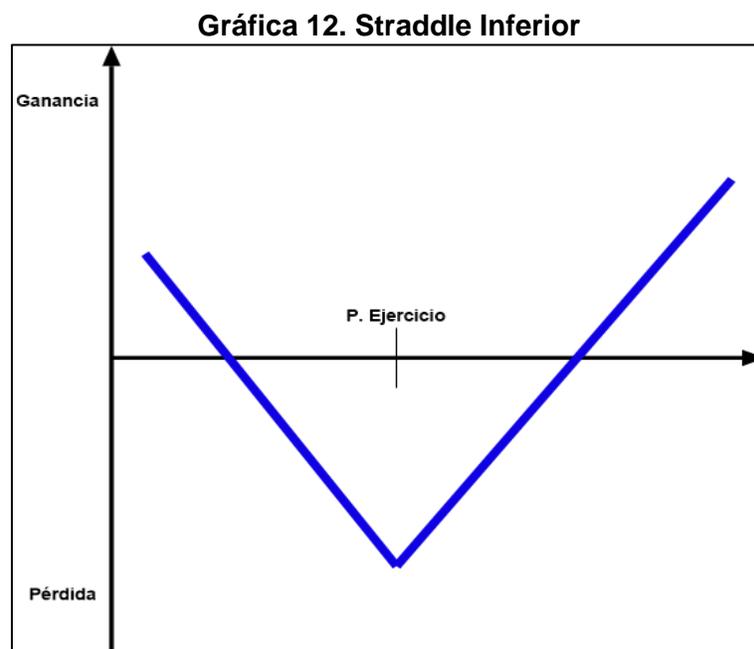
Se puede notar que, al tener solo un precio de ejercicio, si este sube o baja las pérdidas pueden ser ilimitadas, mientras que las ganancias son limitadas, las cuales, se obtienen por medio de las dos primas cobradas de las opciones.

1.4.3.4.2 Straddle Inferior

Al realizar una estrategia straddle superior, se tiene un alto de riesgo de pérdidas respecto al comportamiento del activo subyacente, es por ello, que se tiene una alternativa al realizar una estrategia straddle inferior y disminuir el riesgo.

Se forma por medio de la compra de una opción de compra y la compra de una opción de venta de este activo subyacente, así como mismo precio de ejercicio y fechas de vencimiento iguales.

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:



El riesgo de tener una pérdida se limita al pago de las dos primas de las opciones, además estas opciones no se ejercerán en caso de que el precio del activo subyacente sea igual al de ejercicio.

Además, para el precio del activo subyacente, se observa que se tendrían ganancias de cualquier forma, considerando una variación en el precio mayor al pago de la prima de las dos opciones. Por lo tanto, esta estrategia es recomendable cuando se tiene una volatilidad alta e incertidumbre sobre el movimiento que tendrá el mercado.

1.4.3.5 Straps

Esta estrategia se da por la compra de dos opciones de compra o la venta de dos opciones de compra sobre el mismo activo subyacente.

1.4.3.5.1 Strap Superior

El *strap* superior se forma por la combinación de la venta de dos opciones de compra y una venta de opción de venta con el mismo precio de ejercicio del activo subyacente y fechas de vencimiento iguales, esta estrategia conlleva posibilidades de ganancia limitadas pero mejores con respecto al *straddle* superior por el total de las tres primas cobradas de la venta de opciones. Sin embargo, las pérdidas son mayores respecto al *straddle* superior si el precio del activo sube más de lo que baja.

1.4.3.5.2 Strap Inferior

A su vez, el *strap* inferior se forma por la combinación de dos compras de opciones de compra y una compra de opción de venta con el mismo precio de ejercicio del activo subyacente y fechas de vencimientos iguales, con esta estrategia las pérdidas pueden

limitarse si no se ejercieran las opciones, por medio del pago de las tres primas de la compra de opciones, y serían mayores que las pérdidas obtenidas de un *straddle* inferior.

Además, si el precio del activo subyacente baja o sube más las ganancias serían ilimitadas para esta estrategia, aún mayores que las de un *straddle* superior, cuando se espera una volatilidad al alza sobre los precios del activo.

1.4.3.6 Strips

A diferencia de los *straps*, esta estrategia se puede crear por medio de la compra de una opción de compra o la venta de una opción de compra más la combinación de dos opciones de venta sobre el mismo activo subyacente.

1.4.3.6.1 Strip Superior

El *strip* superior o "*top strip*" se da por la combinación de la venta de una opción de compra y la venta de dos opciones de venta, sobre el mismo activo subyacente y con mismo precio e igual fecha de vencimiento. Para esta estrategia se tendrían pérdidas ilimitadas si el precio del activo sube más de lo que baja, al igual que en el *straddle* superior o *strap* superior.

1.4.3.6.2 Strip Inferior

Asimismo, el *strip* inferior o "*bottom strip*" se conforma por la compra de una opción de compra y la compra de dos opciones de venta, sobre el mismo activo subyacente y con mismo precio e igual fecha de vencimiento. De igual forma que para el *straddle* inferior o *strap* inferior, con esta estrategia se pueden obtener ganancias ilimitadas si el precio baja más de lo que sube, si se tiene una expectativa de volatilidad a la baja sobre el precio del activo subyacente.

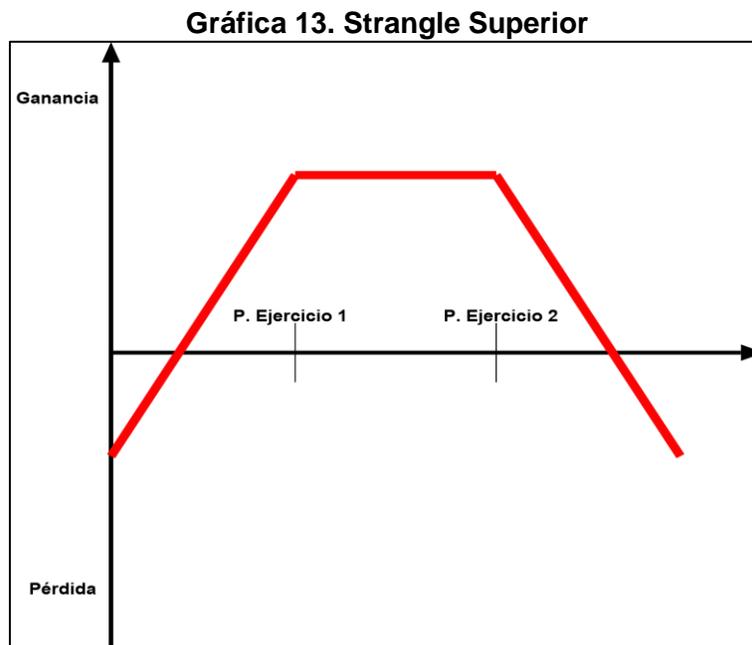
1.4.3.7 Strangle

Este tipo de estrategia tiene dos formas de realizarse, las cuales se explican a continuación.

1.4.3.7.1 Strangle Superior

Esta estrategia busca anticiparse a la estabilidad en el mercado por medio de la venta de una opción de compra y de la venta de una opción de venta con diferentes precios de ejercicio y una fecha de vencimiento igual, donde la venta de la opción de compra se lleva a cabo a un precio de ejercicio mayor que el de la venta de la opción de venta.

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:



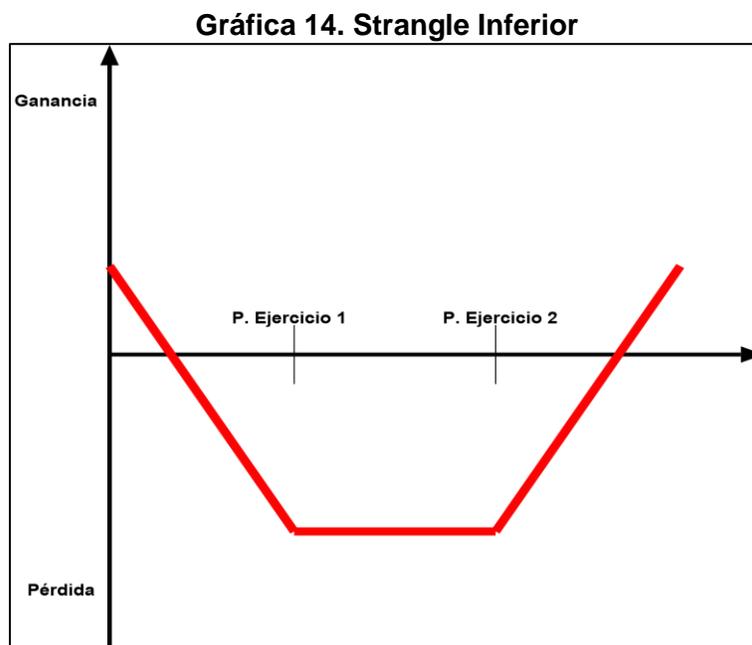
Fuente: Elaboración propia.

Se tendría una ganancia máxima si el precio del activo subyacente se mantiene en los límites respecto a los precios de ejercicios de las dos opciones.

1.4.3.7.2 Strangle Inferior

Asimismo, con el *strangle* inferior se puede anticipar cambios bruscos del mercado, mediante la compra de una opción de compra a un precio de ejercicio alto y la compra de una opción de venta a un precio de ejercicio menor, con precios de ejercicio diferentes, pero con la misma fecha de vencimiento.

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:



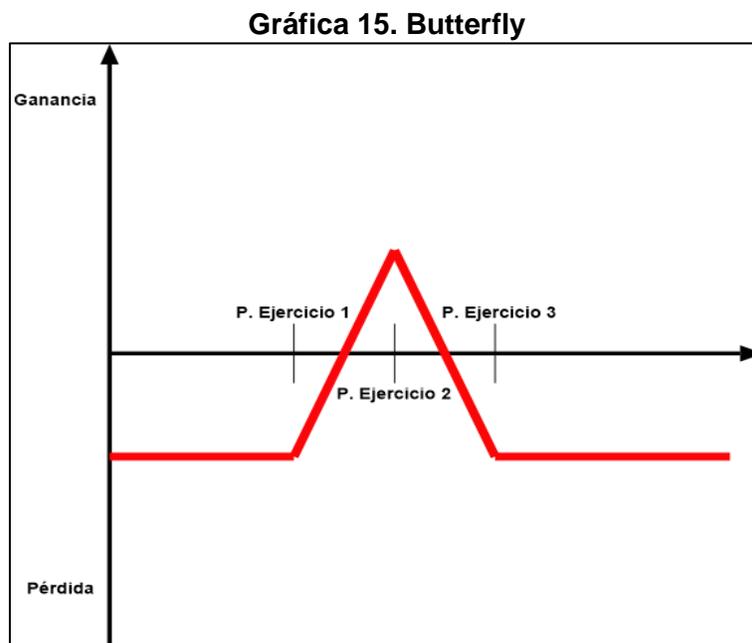
Fuente: Elaboración propia

Las pérdidas serían limitadas si en la fecha de vencimiento el precio del activo subyacente se encuentra en los límites de los precios de ejercicio de la compra de las opciones. A su vez, las ganancias se darían si el precio del subyacente es menor al precio de ejercicio la compra de la opción de venta, y si el precio del subyacente es mayor al de la compra de la opción de compra.

1.4.3.8 Mariposa (Butterfly)

Dicha estrategia trata de anticiparse a cierta estabilidad del precio del activo subyacente, y se puede construir por medio de la compra de dos opciones de compra, con una opción de compra a un precio de ejercicio bajo y otra opción de compra a un precio de ejercicio más alto, así como la venta de dos opciones de compra a un precio de ejercicio medio respecto al precio de las dos opciones de compra anteriores, considerando la misma fecha de vencimiento para estas opciones.

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:



Fuente: Elaboración propia.

Se tiene que considerar que, si el precio del subyacente hasta la fecha de vencimiento se mantiene estable, se tendría el beneficio de haber vendido las dos opciones de compra, además se ganaría cierto beneficio con la opción de compra de menor precio que se compró. Por el contrario, si el precio del activo subyacente baja, se

pagaría el precio de la prima de la opción de compra, que probablemente sea mayor que el de las dos opciones de compra que se vendieron anteriormente.

Pero si el precio del activo subyacente sube, la compra y la venta de las dos opciones de compra se complementarían, sin embargo, el resultado de esta operación sería una pérdida.

1.4.3.9 Condor

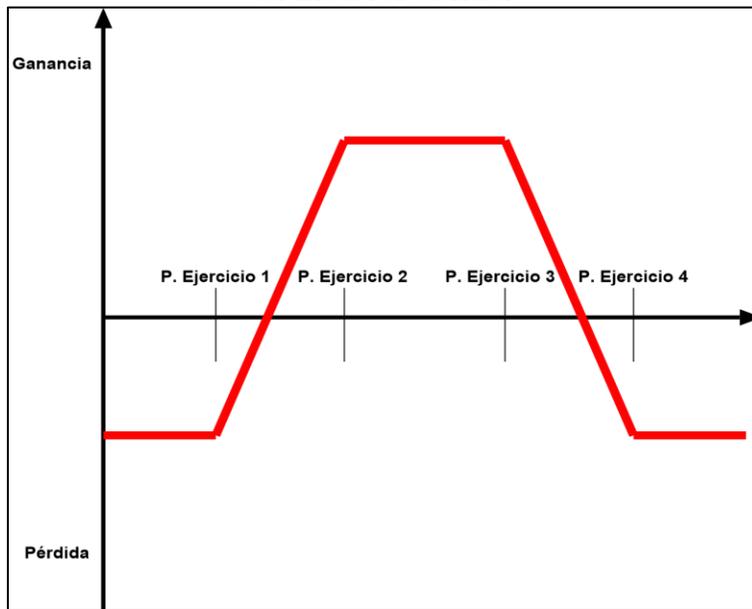
De acuerdo con De Lara (2005), otra estrategia similar a la Mariposa es el Condor, el cual se compone de la siguiente forma:

- Comprar una opción call con precio de ejercicio 1
- Vender una opción call con precio de ejercicio 2
- Vender una opción call con precio de ejercicio 3
- Comprar una opción call con precio de ejercicio 4

La diferencia con la estrategia Mariposa es que los precios de ejercicio de la venta de una opción de compra son diferentes.

La gráfica para esta estrategia es la siguiente:

Gráfica 16. Condor



Fuente: Elaboración propia.

Se observa que cada precio de ejercicio debe ser menor al siguiente para formar el condor, además, se puede replicar esta estrategia para una posición corta o de venta, tan solo cambiando la compra y venta de opciones call por opciones put, y la gráfica se invertiría.

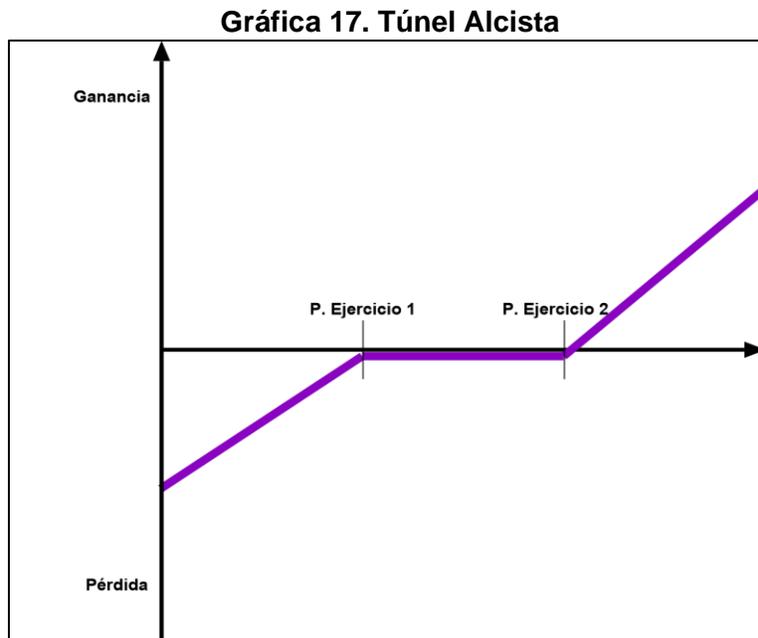
1.4.3.10 Túnel (Collar)

La posición de túnel o *risk reversal* se construye cuando se prevé que el movimiento del activo subyacente va a ser muy fuerte en algún sentido, donde se tienen altas probabilidades de que el comportamiento en el mercado se mueva en sentido opuesto, entonces llevar a cabo esta estrategia, implica que se tendría una exposición respecto al activo subyacente un tanto menor inicialmente, en comparación a la que se tendría actuando directamente sobre el propio activo a cambio de reducir de la misma forma el riesgo de error en la estimación del comportamiento del precio del mismo activo,

en consecuencia, las opciones que conforman al túnel deben estar “*out-the-money*” (Lamothe y Pérez, 2003).

1.4.3.10.1 Túnel Alcista

Esta estrategia se construye por medio de la compra de una opción de compra y la venta de una opción de venta, donde el precio de ejercicio de la call (ejercicio 2) es mayor al precio de ejercicio de la put (ejercicio 1), además, es muy común que esta estrategia se construya como “*prima cero*”, lo que significa que la cantidad desembolsada por comprar la call se compensaría con la venta de la put, esta estrategia se puede visualizar en la siguiente gráfica:



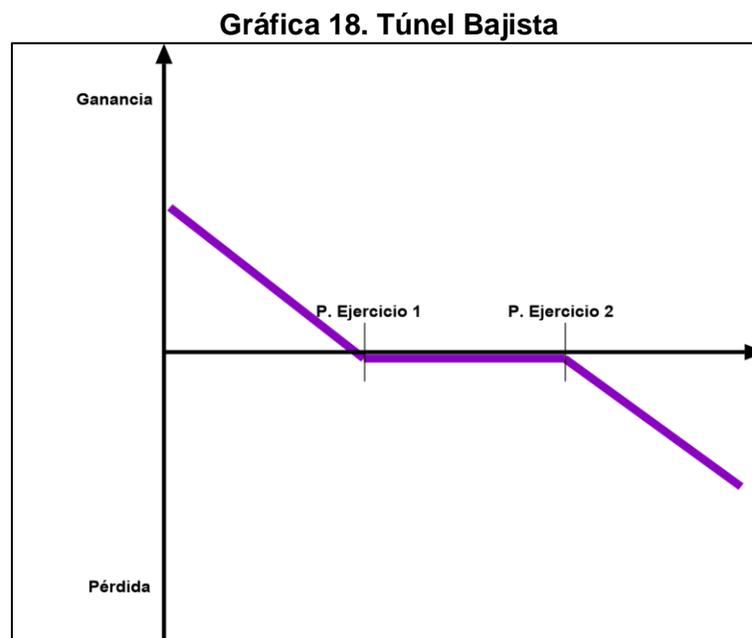
Fuente: Elaboración propia.

Existen otros tipos de estas estrategias como las que conllevan un costo inicial, es decir, la prima de la call es mayor a la de la put, donde la gráfica anterior se desplazaría hacia abajo, el otro tipo es con beneficio inicial, esto implica que la prima de la call es menor a la de la put, donde la gráfica anterior se desplazaría hacia arriba. Se

puede observar que las pérdidas y ganancias obtenidas por medio de esta estrategia son ilimitadas (Lamothe y Pérez, 2003).

1.4.3.10.2 Túnel Bajista

Esta estrategia se construye por medio de la venta de una opción de compra y la compra de una opción de venta, donde el precio de ejercicio de la call (ejercicio 2) es mayor al precio de ejercicio de la put (ejercicio 1), esto se puede visualizar en la siguiente gráfica:



Fuente: Elaboración propia.

Al igual que en el túnel alcista, se puede tener un comportamiento desplazado hacia abajo o hacia arriba cuando se tiene un costo o beneficio inicial respectivamente.

1.5 Swaps

Se puede definir este tipo de derivados como una serie o suma de contratos forward hechos a la medida, los cuales no involucran la entrega de la divisa o del

instrumento con el que se comercializa el swap, como cierta tasa de interés, más bien sobre compensaciones en efectivo.

Muchas empresas industriales y financieras, bancos, organizaciones multinacionales y países soberanos los utilizan para reducir sus costos de financiamiento, crear instrumentos bancarios, pero, sobre todo, cubrirse de posibles riesgos cambiarios y/o tasa de interés. Los swaps también incluyen cláusulas especiales donde se especifican los plazos, forma de pago y garantías que se ofrecen (Carstens, 1992).

El crecimiento que ha tenido el uso de swaps a nivel mundial refleja la eficacia y flexibilidad del instrumento y la forma en que puede ser aplicado a la ingeniería financiera, de acuerdo con su grado de adaptación a distintos entornos económicos que cambian con mayor frecuencia a nivel mundial. Su implementación se ha visto incrementada por la necesidad de administrar los riesgos en las empresas como el tipo de interés, las divisas, el precio de los *commodities* o el precio de las acciones, además de poder realizar coberturas con los mismos (De la Torre, 1996).

Las aplicaciones para los swaps más importantes son la reducción de costos de financiamiento, administración de riesgos financieros, la explotación de economías a escala, el arbitraje entre diferentes mercados o la creación de instrumentos financieros sintéticos. En consecuencia, los swaps han obtenido mayor relevancia y uso por entidades financieras, empresas industriales, bancos, casas de bolsa, aseguradoras, fondos de pensiones, etc. (De la Torre, 1996).

1.5.1 Orígenes de los Swaps

Los inicios de las operaciones con swaps se remontan a la década de los años 70 cuando se realizaron intercambios de divisas más no sobre intereses. Las empresas matrices tenían la necesidad de financiar a sus filiales que se encontraban en otros países, así nacieron los llamados préstamos paralelos y los préstamos *back to back* que darían origen los swaps que conocemos actualmente.

Los préstamos paralelos consistían mediante dos empresas matrices que necesitaban otorgar préstamos a sus filiales establecidas en el país de la otra empresa y se hacía un acuerdo para conceder un préstamo a la filial donde se encontraba en el otro país. Se puede decir que una empresa estadounidense concede un préstamo en dólares a la filial inglesa que se encuentra en territorio americano mientras que la empresa inglesa hace lo mismo a la filial americana dentro de su territorio (De la Torre, 1996).

Estos préstamos tenían plazos de 5 a 10 años con pagos por intereses en intervalos iguales y de forma simultánea por ambas empresas en la mayoría de los casos. Cabe destacar que las operaciones eran independientes entre sí, ya que un impago de una empresa no implicaba un impago de la otra, y eran obligaciones que aparecían en las cuentas contables como préstamos.

Respecto a los préstamos *back to back*, dos empresas se podían prestar diferentes divisas y traspasar el dinero a sus filiales correspondientes, este tipo de préstamos eran compensables por ser parte de una misma operación al existir vínculos entre las empresas matrices, a su vez se tenían dos grupos de derechos y obligaciones

por lo que existían tratamientos legales y contables confusos. Por lo anterior, surgieron los swaps de divisas más simples hasta el momento y tener más liquidez y flexibilidad que el tipo de préstamos mencionados anteriormente (De la Torre, 1996).

Los swaps de divisas era una compraventa de divisas y no resultado de un préstamo, de esta forma era una deuda temporal, en consecuencia, no debía aparecer en los balances contables de las empresas. Aparecieron en la segunda mitad de los años 70, y hasta 1981 se tuvo el auge y crecimiento de este producto, a su vez, se presentaron oportunidades de arbitraje en los mercados de capitales. El swap más conocido en esa época fue el realizado entre el Banco Mundial y la empresa IBM (De la Torre, 1996).

1.5.2 Swaps de Interés

Un swap de tasas de interés es un intercambio de flujo de pagos a tasa fija por pagos a tasa flotante, por medio del cual, se canjean pagos de interés, y una de las contrapartes se ve obligada a pagar a tasa flotante y a recibir una tasa fija, mientras que la otra se compromete a pagar una tasa fija y a recibir una flotante. Los pagos se realizan con una frecuencia predeterminada sobre un nocional denominado en cierta divisa acordada. Entonces, solo los pagos de interés se intercambian no el nocional, si las contrapartes realizan pagos de interés con la misma frecuencia, solo se realiza un pago para compensar la diferencia entre la tasa fija y la flotante. Si la tasa flotante es mayor a la fija, la parte obligada a pagar a la flotante realiza un pago neto a la otra, pero si la tasa fija es mayor a la flotante se realiza el pago equivalente en este caso (Carstens, 1992).

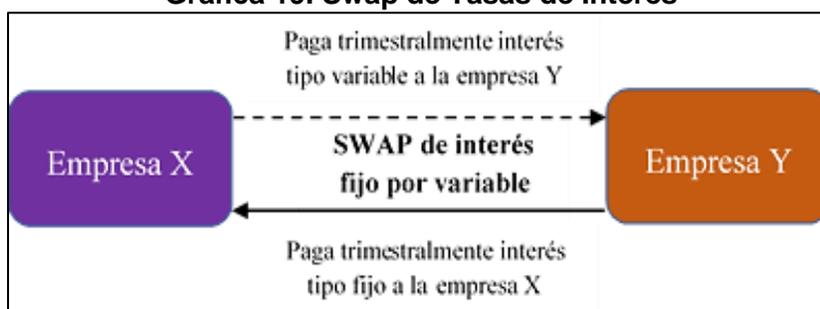
Supongamos que la empresa X ha emitido deuda a un tipo de interés fijo pagadero trimestralmente y con un vencimiento a dos años, pero requiere endeudarse con un tipo

de interés variable, mientras que la empresa Y ha emitido deuda a un tipo de interés variable, pero requiere endeudarse a un tipo de interés fijo. Entonces se realiza un swap entre la empresa X y Y, así la empresa X pagará a la empresa Y trimestralmente los intereses variables de su deuda correspondiente a cambio de recibir de Y los intereses fijos para poder pagar también su deuda. En pocas palabras, X se endeuda al tipo de interés de la deuda de Y, así como Y se endeuda al tipo de interés de la deuda de X, como ambas empresas deseaban inicialmente.

Para este ejemplo será una tasa LIBOR a 3 meses, entonces la revisión será trimestral, en consecuencia, el swap deberá actualizarse 8 veces respecto a la tasa LIBOR durante 2 años hasta el vencimiento. Además, el vencimiento de la emisión de deuda a interés fijo es el mismo para el swap, y el tipo de interés se mantendrá constante hasta el vencimiento.

Al tener una tasa LIBOR a 3 meses, si esta es menor al interés de tipo fijo, entonces la empresa X obtendrá un beneficio, ya que ahora su deuda es sobre interés de tipo variable, pero si la tasa LIBOR es mayor al interés de tipo fijo, se tendrá una pérdida.

Gráfica 19. Swap de Tasas de Interés



Fuente: Elaboración propia.

1.5.2.1 Swaps de Interés Genéricos

Un swap donde se intercambian intereses de tipo fijo por intereses de tipo variable, como pueden ser a tasa LIBOR, se denomina “swap fijo contra variable” o también se le conoce como swap de cupón o “*coupon swap*”, ya que el tipo de interés recibido se puede asemejar al que el tenedor de un bono recibe en la fecha asignada de pago del cupón. Para identificar a las partes involucradas en este tipo de swaps, se menciona al pagador a tipo fijo, digamos la empresa Y del ejemplo anterior, y el pagador a tipo variable, para este caso es la empresa X. Para los swaps de cupón el más sencillo de este tipo de instrumentos es el denominado swap genérico o “*plain vanilla*”.

Este tipo de contratos tiene las siguientes características:

- Un notional fijo
- Interés fijo de tipo constante
- Interés variable sin ningún margen sobre el índice
- Pagos en periodos parecidos, aunque no iguales

1.5.2.2 Swaps de Interés no Genéricos

El estudio de este tipo de swaps es extenso, por lo que, no será el tema principal de interés para esta tesis, solo se mencionarán los tipos más relevantes y sus características.

Lo habitual es que este tipo de swaps no genéricos, también conocidos como exóticos, se conforman de la combinación de 2 o más swaps genéricos o sobre alguna otra estructura financiera, como los futuros u opciones.

En el mercado se negocian cada día nuevas estructuras no genéricas, su estudio y clasificación de todas las que existen puede ser muy complicado, debido al crecimiento y utilización de este instrumento financiero, sobre todo porque las etapas iniciales de estas estructuras provocan diferencias que existen entre el precio de mercado y teórico obtenido por algún método de valuación que se desarrolle y la respuesta de la oferta y demanda.

A su vez, se negocian estructuras para poder obtener posiciones de arbitraje, y poder generar condiciones con mayor liquidez cuando las estructuras sean más conocidas y usadas adecuadamente por los intermediarios e inversionistas del mercado (De la Torre, 1996).

Swaps de bases o "*basis swap*", es aquel en el que se intercambian dos flujos de intereses calculados a tipo variable y se pueden tener diferentes combinaciones como son:

- Distintas fechas de vencimiento sobre el mismo tipo de interés variable como una tasa LIBOR a 6 meses contra una tasa LIBOR a 12 meses
- Fechas de vencimiento iguales pero calculadas con tasas de interés variable distintas
- Una tasa y su promedio, es decir, una tasa LIBOR a 3 meses contra un promedio quincenal de esa tasa para el mismo periodo

Este tipo de swaps genera un riesgo, debido a que se tienen distintos tipos de interés variable calculados a diferentes fechas en el corto plazo, lo cual, producirá pérdidas o ganancias debido a las variaciones y evolución diferente en el mercado.

Los cambios en valores absolutos no tienen impacto, ya que las tasas referenciadas evolucionarían de forma paralela, entonces, se tendría un riesgo de la base, por lo tanto, este instrumento se puede utilizar para eliminar las brechas de financiamiento, pero en los mercados de dinero a corto plazo (De la Torre, 1996).

1.5.2.2.1 Swaps con Principal no Constante

Para este tipo de swaps, se consideran tres tipos: swaps amortizables, swaps con principal creciente y swaps con principal variable bajo un patrón definido.

1.5.2.2.2 Forward Swaps

La fecha en la que inicia este tipo de contrato se puede aplazar días, meses y hasta años, a pesar de que las condiciones para negociar este tipo de swaps queden establecidas con anticipación.

Si se difiere la fecha a un plazo menor a 6 meses se conoce como *delayed start swap*, con el fin de prevenirse si los tipos de interés tendrán un comportamiento adverso antes de que se lleven a cabo las transacciones o intercambios de flujo de efectivo, ya sea si se intercambian tipos fijo por variable o viceversa. Pero si la fecha para iniciar el swap difiere entre seis meses y dos años se conoce como “*forward swap*” (De la Torre, 1996).

1.5.2.2.3 Swaps con Tipo Fijo-Variable

Según De la Torre (1996), este tipo de swaps se considera una estructura de tipo fijo creciente-decreciente conocido como “*step-up-step-down swap*”, para poder cambiar la deuda de los emisores de bonos a un tipo de referencia con base variable. Pero también hay otra estructura dentro de este tipo conocida como “*spread-lock swap*”, al

considerar que el swap cotice como un bono, o lo que es lo mismo, que el interés de tipo fijo se forme a partir de uno de referencia, como los bonos emitidos por el gobierno, agregando un spread al de referencia.

Se intercambiará la deuda de interés fijo por variable cuando el spread sea alto y beneficie a los prestatarios, la fijación del tipo de interés de referencia, si se prevé que va a subir y hacer más atractiva la emisión. Por lo anterior, se posterga el momento para establecer el swap a partir del spread que se fijó anteriormente y del valor actual del tipo de referencia, con base en que los spreads y tipos de interés de referencia a menudo varían inversamente.

Si el tipo de interés sube, entonces habrá mayor demanda en los swaps donde se reciba el interés de tipo fijo y los spreads disminuyan. Pero si los spreads aumentan y los diferenciales bajan, una de las partes que reciba el interés de tipo fijo, obtendrá un interés mayor si se establece el diferencial al inicio del contrato y difiere la determinación del tipo de interés de referencia (De la Torre, 1996).

1.5.2.2.4 Swaps con Pagos de Intereses Irregulares

Dentro de este tipo de swaps existen los nombrados swaps de cupón cero, swaps sobre o bajo par y swaps con flujos diferidos.

1.5.2.2.5 Swaps con Opciones

El contrato que da al comprador el derecho, pero no la obligación, de entrar en un swap diferido, o de extender o terminar un swap existente, a cambio del pago de una prima para el vendedor, se conoce como opción sobre swap, donde el subyacente es el tipo de interés. Como con cualquier tipo de opción financiera, mediante estos swaps se

pretende beneficiarse de la evolución de los tipos de interés, al limitar las pérdidas y obtener ganancias ilimitadas.

Los tipos de swaps con opciones son los siguientes:

- *Swaption*
- *Put Swaption*
- Swap prorrogable o *callable swap*
- Swap cancelable o *putable swap*

Dentro de estos contratos, si el swap subyacente se espera que produzca pérdidas, el comprador de la opción no continuaría o negociaría el swap, en consecuencia, la opción de entrar o de extender el swap no se ejercerá, solo se terminaría este swap. Por el contrario, si se espera obtener ganancias, el comprador sí continuaría o negociaría el swap, entonces la opción de entrar o de extender el swap sí se ejercería (De la Torre, 1996).

1.5.2.2.6 Otros tipos de Swaps

Como menciona De la Torre (1996), a continuación, se enlistan otras estructuras de swaps sin tener el objetivo de desarrollar cada una de estas, dichos swaps pueden contratarse de acuerdo con las necesidades de los inversionistas, así como las condiciones y expectativas que se tengan sobre la evolución de los tipos de interés.

- Swaps reversibles
- Swaps con tipo variable fijado al vencimiento del periodo
- Swaps con tipo variable compuesto

- Swaps amortizables respecto a un índice
- *Yield curve swaps*
- *Double-up swaps*
- Swaps diferidos con tipo fijo limitado entre dos bandas
- Swaps a tipo fijo inferior al de mercado con cobertura limitada
- Swaps con *warrants*
- Swaps contingentes
- Swaps con tope en el tipo variable o *Capped Swaps*

En la práctica existen otros tipos de contratos swaps sobre activos usados por los inversionistas, en vez de los pasivos, usados por los prestamistas, los cuales, surgen para beneficiar a los inversores, ya que, anteriormente quienes solían ser beneficiados eran los que contrataban swaps sobre pasivos al poder realizar operaciones de arbitraje con ellos.

Al evolucionar el mercado mediante la creación de cámaras de compensación y la mejora en la administración de portafolios se tienen swaps que se componen de montos menores a los negociados en el pasado, entonces la competencia es mayor y los costos de transacción disminuyen siendo más accesibles.

Finalmente, la metodología de los contratos swaps se puede extender y adaptar a otros activos financieros, para poder negociar materias primas o metales preciosos (*commodities*), incluso índices bursátiles (De la Torre, 1996).

Capítulo 2. Valuación de Opciones Financieras

2.1 El Valor de una Opción Financiera

De acuerdo con la teoría financiera, el plazo es un factor importante para el valor de una opción, ya que a mayor plazo se tendrá mayor valor en el tiempo para la opción. Se tiene un efecto no lineal sobre el tiempo que va transcurriendo, se acelera mientras la opción se acerca al vencimiento. Este efecto tiene una relación con la raíz cuadrada del tiempo, esta variable se multiplica por el precio de la opción, lo que provoca que el precio aumente a mayor tiempo.

Por lo anterior, los inversionistas que compren opciones deberían interesarse por contratos de plazos mayores, mientras que los vendedores de opciones, por contratos de plazos más cortos. Además, se debe tener en cuenta que para las opciones call, el valor se incrementará cuando sea menor el precio de ejercicio, y para las opciones put, será inversamente proporcional, al tener un mayor valor en la prima de la opción (Lamothe y Pérez, 2003).

2.1.1 Consideraciones sobre una Opción Call

De acuerdo con Lamothe y Pérez (2003), cuando se negocian opciones call se deben tomar en cuenta características propias de este tipo de producto financiero para poder hacer estrategias e incluso operaciones de arbitraje si las condiciones de los mercados lo permiten. Entonces el límite teórico para la prima de una opción call considerando el precio del activo subyacente S , el precio de ejercicio E y la fecha de vencimiento t debe cumplir que el $Call(S, E, t) \geq 0$.

Si esta condición fuera negativa, sería como una ganancia inmediata para el comprador, además se podrían realizar operaciones con arbitraje al comprar opciones que no cumplan esta condición.

Se debe de cumplir que el valor de una opción call sea mayor o igual al valor del activo subyacente menos el valor presente del precio de ejercicio menos el valor presente de los dividendos que se pagan por el activo hasta el vencimiento de la opción, de manera que la condición está dada por:

$$Call \geq S - E * (1 + r)^{-T} - D$$

También se puede expresar con el factor e^{-rT} si se trata de interés continuo, además el call no puede tener un valor superior al precio del activo subyacente, en caso contrario, se venderían opciones y se comprarían acciones o algún otro activo, si se ejercieran, la ganancia estaría dado por el precio del call menos el precio del subyacente, y si no se ejercieran, se ganaría el precio del activo. Por lo anterior, la restricción general para los límites de una opción call es:

$$S \geq Call \geq \text{Max}(S - E * (1 + r)^{-T} - D, 0)$$

El precio de un call no puede ser inferior al de otro call con características similares con precio de ejercicio mayor, además, el valor de un call con mayor fecha de vencimiento será superior al de un call con fecha de vencimiento menor, ya que, a mayor plazo mayor será el valor de la opción.

Lamothe y Pérez (2003) comentan que si se tienen tres opciones call con precios de ejercicio $E_3 > E_2 > E_1$, entonces existe una condición donde el valor de la opción

intermedio no debe ser mayor al valor promedio ponderado de las otras dos opciones, es decir, se tiene una función convexa para el call como sigue:

$$Call(S, E_2, t) \leq ((E_3 - E_2)/(E_3 - E_1)) * Call(S, E_1, t) + ((E_2 - E_1)/(E_3 - E_1)) * Call(S, E_3, T)$$

2.1.2 Consideraciones sobre una Opción Put

De la misma manera que para las opciones call, se tienen que cumplir ciertas condiciones y restricciones para las opciones put. Primero, el valor de este tipo de opciones tiene que ser positivo, también tiene que cumplir que sea mayor o igual al precio de ejercicio traído a valor presente más los dividendos en valor presente menos el precio del activo subyacente, es decir:

$$Put \geq E * (1 + r)^{-T} + D - S$$

Donde el $Put \leq E * (1 + r)^{-T} + D$, entonces por las restricciones anteriores se cumple que:

$$E * (1 + r)^{-T} + D \geq Put \geq \text{Max} (E * (1 + r)^{-T} + D - S, 0)$$

Al contrario de una opción call, si se tienen dos precios de ejercicio con un precio E_2 mayor o igual que E_1 y las demás variables iguales, entonces se cumple que $Put(S, E_2, T) \geq Put(S, E_1, T)$, además, para dos opciones put, si una opción tiene una fecha de vencimiento mayor a la otra, se tendría un mayor valor en comparación con la de menor fecha de vencimiento, por lo tanto, a mayor plazo mayor valor en la opción (Lamothe y Pérez, 2003).

Asimismo, para una opción put, se cumple que el precio de ejercicio intermedio, $E_1 < E_2 < E_3$, de tres opciones con mismo activo subyacente y fecha de vencimiento, es menor o igual que la suma de los precios promedio ponderados de la opción con el mayor

y menor precio de ejercicio, entonces se tiene una función convexa para el put como sigue:

$$Put(S, E_2, t) \leq ((E_3 - E_2)/(E_3 - E_1)) * Put(S, E_1, t) + ((E_2 - E_1)/(E_3 - E_1)) * Put(S, E_3, T)$$

2.2 Paridad Put–Call

Esta paridad es una relación importante para las opciones financieras, ya que se puede calcular el valor de una opción put, a través del valor de una opción call, por lo que, si se tiene un mismo precio de ejercicio E y fecha de vencimiento t, se puede calcular el valor del put o viceversa.

De Lara (2005), define esta relación como:

$$Call + Ke^{-rt} = Put + S \quad (2.1)$$

Lamothe y Pérez (2003) menciona el equilibrio que debe existir entre los precios de compra y venta, expresando esta relación como:

$$Put(S, E, t) = Call(S, E, t) - S + E * (1 + r)^{-T} + D$$

Donde el cálculo de la prima de una opción put, debe ser igual al cálculo de la prima de una opción call con características similares menos el precio del activo subyacente más el precio de ejercicio a valor presente, así como el valor actual del precio del dividendo o renta del activo hasta el vencimiento.

Por lo anterior, al aplicar el concepto de la paridad Put-Call se debería cumplir que una opción que se obtiene en el mercado tendría el mismo precio que una opción construida de forma “*sintética*”, es decir, en términos económicos es como aplicar la ley del “*precio único*” a las opciones financieras (Lamothe y Pérez, 2003).

2.3 Modelo Binomial

Este modelo muestra como descontar correctamente *payoffs* de las opciones en un entorno de decisiones discretas, este modelo funciona en condiciones libres de arbitraje, ya que provee las bases para establecer el precio, negociar y utilizar las opciones financieras. Los precios calculados de las opciones a través de modelos de precios ponen restricciones sobre el proceso de generar un precio spot de los activos subyacentes, este modelo trata de encontrar un precio específico para las opciones en tiempo discreto, en vez de solo encontrar rangos de precios (Goldenberg, 2016).

El objetivo de utilizar este modelo es desarrollar una fórmula de valuación para opciones call europeas sobre un activo subyacente cuyo precio sigue un proceso binomial sin considerar dividendos. Se tiene una fecha actual t y la fecha de vencimiento T , también se le puede nombrar N por ser un modelo en tiempo discreto, entonces el lapso para el vencimiento es $T = N-t$, y se puede dividir T en N subintervalos de longitud T/N (Goldenberg, 2016).

El precio actual S_0 es conocido al comienzo en $t=0$, los precios futuros $S_1, S_2, S_3, \dots, S_N$ son variables aleatorias y desconocidas inicialmente, mientras que la aleatoriedad es generada por un proceso binomial para $N=1$, y en general para $N>1$.

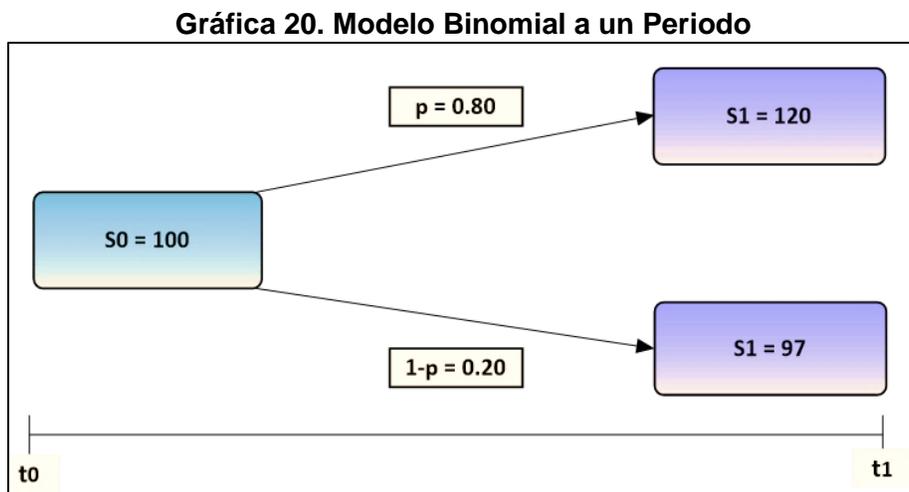
Conociendo el precio actual S_0 , se pueden presentar dos, que el precio pueda subir de la forma $uS_0 = (1 + u') * S_0$ con probabilidad p , o puede bajar como $dS_0 = (1 + d') * S_0$ con probabilidad $1-p$, donde u' es el porcentaje de retorno o cambio si el precio sube durante el primer periodo, y d' es el porcentaje de cambio si el precio baja durante el mismo periodo (Goldenberg, 2016).

Se asumen varios supuestos para valuar opciones con este modelo, como una eficiencia y profundidad de los mercados, no presencia de costos de transacción, compra y venta al descubierto sin restricciones, pedir y prestar al mismo tipo de interés, así como la evolución del precio del subyacente bajo un proceso binomial multiplicativo.

Para ilustrar más estos conceptos se desarrolla a continuación un ejemplo:

Se tiene una opción call con precio del activo subyacente $S_0 = 100$, $u = 1.2$ con $u' = 0.2$, y $d = 0.97$ con $d' = -0.03$.

Entonces para un periodo t_1 se tendría lo siguiente:

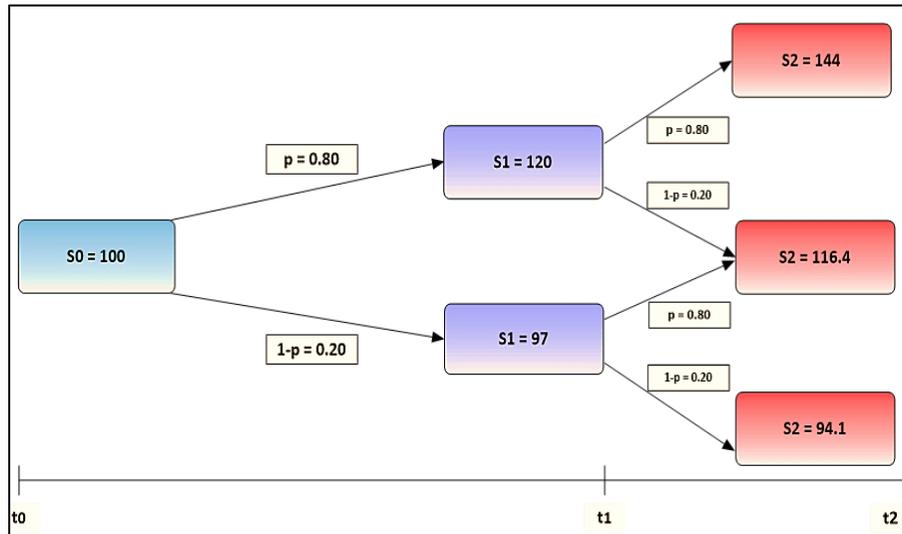


Fuente: Elaboración propia.

Para el precio $S_1 = 120$ se debe multiplicar $u * S_0 = 1.2 * 100$ o con probabilidad p , y para $S_1 = 97$, se obtiene multiplicando $d * S_0 = 0.97 * 100$ o con probabilidad $1 - p$.

Ahora si se replica el modelo binomial para dos periodos, es decir hasta t_2 , entonces se tendrían los siguientes precios para el activo subyacente:

Gráfica 21. Modelo Binomial a dos Periodos



Fuente: Elaboración propia.

Este ejemplo supone las mismas probabilidades de que el precio suba o baje para cada periodo de la gráfica 20, y se puede observar que para obtener el precio $S_2 = 144$ se debe multiplicar $u^2 * S_0 = 1.2^2 * 100$ o $u * S_1 = 1.2 * 120$ con probabilidad p^2 ; $S_2 = 116.4$ al multiplicar $u * d * S_0 = 1.2 * 0.97 * 100$ o $u * S_1 = 1.2 * 97$ con probabilidad $p(1 - p)$; finalmente, se obtiene $S_2 = 94.1$ multiplicando $d^2 * S_0 = 0.97^2 * 100$ o $d * S_1 = 0.97 * 97$ con probabilidad $(1 - p)^2$.

Se puede notar que, si este modelo se replicara para más de 2 periodos, digamos para N periodos, se tendrían k movimientos alcistas para el precio del activo y N-k movimientos bajistas del precio, durante la vigencia de la opción, juntando todos los movimientos posibles se obtiene la siguiente igualdad $S_N = u^k d^{N-k} * S_0$ (Goldenberg, 2016).

Por lo anterior, puede surgir la interrogante si para N periodos solo hay una manera de obtener el precio S_N a partir del precio inicial S_0 , lo cual, puede explicarse por medio de la combinatoria matemática, donde la fórmula para obtener las combinaciones

de k elementos en N pasos o intentos, en este caso periodos sobre el precio del activo subyacente, es la siguiente:

$$C(N, k) = \frac{N!}{(N - k)! * k!}$$

Se puede decir que de todos los N posibles caminos, se hace una proporción entre las k subidas posibles sobre el precio para la variable u, y las restantes N-k bajadas para la variable d, considerando el factorial de un número, de manera que las combinaciones se calculan sin importar el orden dentro de los N periodos y cada cambio dentro de un periodo es independiente del anterior.

A su vez, se deben tener presentes las probabilidades de subida y de bajada del precio, p y 1-p para un periodo respectivamente, pero la probabilidad conjunta de k movimientos alcistas en N periodos está dada por $p * p * \dots * p = p^k$, multiplicando k veces, de forma análoga, para la probabilidad conjunta de N-k movimientos bajistas se tiene $(1 - p)^{N-k}$. Entonces todos los probables movimientos alcistas y bajistas están dados por $p^k * (1 - p)^{N-k}$ para N periodos.

El valor intrínseco ajustado para una opción europea call se define como $VIt = \text{Max} [S_t - e^{-rt} * E, 0]$ considerando una estrategia de pedir prestado a $e^{-rt} * E$ y comprar el activo a precio S_t , sin considerar pago de dividendos. Además, como se había explicado anteriormente, la condición $S \geq \text{Call} \geq \text{Max} (S - E * e^{-rt}, 0)$ debe cumplirse, se puede notar que mientras el tiempo para el vencimiento va creciendo el valor presente $E * e^{-rt}$ se aproxima a cero, entonces el $\text{Max} (S, 0) = S$, entonces $S \geq \text{Call} \geq S$, implica que $S = \text{Call}$ (Goldenberg, 2016).

El valor intrínseco de una opción call europea, con $N > 1$ y S_N como el valor del activo hasta la fecha de vencimiento o expiración del contrato, está dado por:

$$C_N = \text{Max} [0, S_N - E] = \text{Max} [0, u^k d^{N-k} * S_0 - E] = VI_N \quad (2.2)$$

Donde k son los movimientos alcistas sobre el subyacente bajo el proceso de precios Binomial, además k va de 0 a N , ya que se pueden tener de 0 a N movimientos alcistas durante la vigencia total de la opción. Ahora sería interesante conocer cómo se calculan los *payoffs* de la opción call mediante el proceso binomial.

Primero se tiene que obtener el valor esperado mediante el uso de las probabilidades p y $1-p$ para el alza o baja de los movimientos del proceso Binomial, y después descontar este valor como si se tuviera un flujo de caja descontado a una tasa de descuento de riesgo ajustada, debido a que una opción es un activo riesgoso. La finalidad es poder obtener el precio de la opción sin condiciones de arbitraje, y no solo usar una técnica de flujo descontado (Goldenberg, 2016).

Si se tienen las probabilidades, por medio de una distribución de probabilidad para el precio del activo, para el caso de $N=1$, el valor esperado del *payoff* de la opción se calcula como:

$$p * \text{MAX} [u * S_0 - E, 0] + (1 - p) * \text{MAX} [d * S_0 - E, 0]$$

2.3.1 Postulados para la Valuación de Opciones

Goldenberg (2016) indica que el enfoque estándar de flujo de caja descontado o *Discount Cash Flow* no es la única forma de valorar opciones bajo condiciones de no arbitraje ni la manera más precisa de hacerlo, entonces se deben buscar alternativas para poder calcular los precios y no solamente técnicas de descuento establecidas.

Como se ha mencionado anteriormente, uno de los supuestos más importantes para valorar opciones es que se debe asumir que no se admiten oportunidades de arbitraje, ya que no se pueden establecer los precios de los activos financieros adecuadamente si se admitieran dichas oportunidades, dando origen al Primer Teorema Fundamental de la Fijación de Precios de Activos.

Además, es importante saber que un instrumento financiero puede ser replicable si puede ser construido por un número de títulos iniciales como una acción y un bono libre de riesgo, lo importante es entender que todos los mecanismos de fijación de precios sin arbitraje producen el mismo precio, por lo tanto, se tiene un precio único, y, por ende, se puede decir que el mercado está completo, lo que se conoce como el Segundo Teorema Fundamental de la Fijación de Precios de Activos.

Lo anterior da paso a la replicación donde cualquier precio de un call o un put puede ser replicado a través de otros instrumentos financieros que tienen un precio único asociado, así como la cobertura se basa en la totalidad del mercado. Entonces los *payoffs* de las opciones pueden ser replicados por una cartera dinámica o estática, para el modelo Binomial cuando $N=1$ se puede hacer solo una replicación estática, para $N>1$ se utiliza una replicación dinámica (Goldenberg, 2016).

Se tiene que fijar el precio de los valores de este tipo de derivados financieros de manera única pero también se debe añadir la replicación a las condiciones de no permitir el arbitraje, ya que, es la base para poder replicar estática o dinámicamente los valores derivados coherentemente, y esto puede lograrse por la completez del mercado, puesto que una demanda contingente como una opción call o put europea se puede replicar.

De acuerdo con Goldenberg (2016), lo anterior implica que se puede realizar una cobertura, es decir, una cartera de replicación sintética equivalente puede funcionar como medio de cobertura, esto también debido a la completez del mercado, ya que, si se requieren replicar o cubrir los valores, en este caso los de las opciones financieras, se tienen las bases para poder lograrlo. Sin embargo, se debe considerar que si esto no sucede es cuando no existe un mecanismo de fijación de precios lineales y positivos, en ese caso, habría oportunidades de arbitraje, donde estos precios no tendrían sentido.

En resumen, un mercado completo incluye la ausencia de arbitraje cuando simplemente se describe como un mecanismo de fijación de precios lineal y positivo, además es única. Entonces el “*no arbitraje*” da lugar al Primer Teorema Fundamental de Fijación de Precios de Activos y el hecho de que el mercado esté completo con la replicación a través de la cobertura, ya que, brinda la capacidad de determinar realmente el precio único del derivado al sintetizarlo en valores más simples como la acción y un bono en el modelo Binomial, siguiendo al Segundo Teorema Fundamental de Fijación de Precios de Activos, nos da la particularidad del mecanismo de fijación de precios (Goldenberg, 2016).

2.3.2 Aplicación del Modelo Binomial

A continuación, se aplica la teoría explicada anteriormente para replicar los *payoffs* de una opción call europea con instrumentos financieros relativamente más simples, y conforman lo que se conoce como un portafolio o cartera de réplica. Se necesitan dos títulos financieros para cubrir todo el riesgo vinculado con los movimientos que presenta el activo subyacente.

Las variables correspondientes son la tasa libre de riesgo r_f , por lo que, se define $r = (1 + r_f)$, ya que el modelo Binomial al ser un modelo en tiempo discreto se puede usar una tasa de interés compuesto discreto en vez de continuo, lo cual, representa el valor futuro de \$1 pagando la tasa r durante un intervalo de tiempo.

Recordemos a la variable $u = 1 + u'$, que representa el incremento en el tiempo para el valor inicial del subyacente, y a la variable $d = 1 + d'$, que representa el decremento en el tiempo para el valor inicial del subyacente. Además, se debe cumplir la condición $u > r > d$, ya que si se tuviera la condición $u > d > r$, convendría adquirir el activo subyacente en vez del activo libre de riesgo, entonces no sería conveniente hacer “*arbitraje*” si se pudiera. A su vez, si se tiene que $r > u > d$, no se compraría el activo subyacente a precios actuales y se reducirían los precios del subyacente para que se cumpliera la condición original (Lamothe y Pérez, 2003).

Sin embargo, Mascareñas (2005) aclara que aplicando el logaritmo al precio actual sobre el precio anterior para calcular los retornos de los precios del activo subyacente se tendría una simetría con respecto a la alza o bajada de estos, en consecuencia, los precios tendrían una distribución de probabilidad log-normal y los rendimientos obtenidos se distribuirían normal. Lo anterior, se basa en que la varianza de los rendimientos es constante para cada periodo, es decir, para t periodos se tiene una desviación estándar $\sigma * \sqrt{t}$ conocida como la volatilidad del activo.

Además conforme transcurre el tiempo la distribución log-normal de los precios va aumentando, así como también el árbol binomial con más periodos, entonces el precio del subyacente se va incrementando hasta que en un punto es mayor al precio de

ejercicio, si esto sucediera para el caso de una opción call, se estaría en una zona *in the money* y esa área mayor a K de la distribución probabilística, donde se encuentran los flujos de caja de la opción y el valor presente de la opción call, se consideraría como el valor de esta área bajo el modelo de *Black & Scholes* (Mascareñas, 2005).

Por lo tanto, el valor teórico del subyacente que cambiaría el precio de la opción a través de la proporción de incremento o decremento es:

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{t/n}} \text{ y } d = e^{-\sigma \cdot \sqrt{t/n}} = \frac{1}{u}.$$

Según Lamothe y Pérez (2003), si se tiene una opción call europea con vencimiento a un periodo t_1 , entonces los posibles valores que puede tomar son:

$$Cu = \text{MAX} [0, u * S - E] \text{ con probabilidad } p;$$

$$Cd = \text{MAX} [0, d * S - E] \text{ con probabilidad } 1-p;$$

Entonces, se puede llevar a cabo una estrategia como vender una opción de compra y también comprar H cantidad de acciones con un valor inicial $H * S - C$, o la misma estrategia con posición larga y corta para la opción y las acciones, es decir, comprar la opción call y vender las acciones.

Asimismo, con probabilidad p y el *ratio* de la cobertura H, se tiene un resultado para la cartera como $H * u * S - Cu$, y con probabilidad 1-p, un valor de $H * d * S - Cd$, al igualar ambos resultados como sigue:

$$H * u * S - Cu = H * d * S - Cd$$

Despejando H se tiene que:

$$H = \frac{Cu - Cd}{(u - d) * S} \tag{2.3}$$

Para el caso del activo libre de riesgo se tiene que cumplir que:

$$H * S - C = \frac{H * u * S - Cu}{r} = \frac{H * d * S - Cd}{r}$$

Despejando C, se obtiene lo siguiente:

$$C = \frac{r * H * S - H * u * S + Cu}{r} = \frac{H * S * (r - u) + Cu}{r}$$

Sustituyendo el valor H obtenido previamente:

$$C = \frac{1}{r} * \left[\frac{(Cu - Cd) * (r - u)}{u - d} + Cu \right] = \frac{1}{r} * \left[Cu * \frac{r - d}{u - d} + Cd * \frac{u - r}{u - d} \right]$$

Recordando que $p = \frac{r - d}{u - d}$ y $1 - p = \frac{u - r}{u - d}$, al sustituir, finalmente se obtiene:

$$C = \frac{1}{r} * [Cu * p + Cd * (1 - p)] \quad (2.4)$$

Se puede decir que por medio de una estrategia de inversión también se obtiene el equivalente al precio de la opción call europea para un periodo t_1 .

Ahora si se considera un activo libre de riesgo como un bono, el cual, se denomina B, se haría una inversión en dicho activo y también un endeudamiento o posición corta sobre este, entonces se podría construir una cobertura como esta:

$$C = H * S - B$$

Considerando que se debe elegir H y B que repliquen el comportamiento de la opción:

$$Cu = H * uS - rB \text{ y } Cd = H * dS - rB;$$

Entonces $H = \frac{Cu + rB}{uS}$ y $B = \frac{H * dS - Cd}{r}$, sustituyendo B en H, se tiene que:

$$H = \frac{Cu + r * \left(\frac{H * dS - Cd}{r}\right)}{uS} = \frac{Cu - Cd + H * dS}{uS} = \frac{Cu - Cd}{uS} + \frac{H * d}{u}, \text{ despejando se tiene que } H - \frac{H * d}{u} = \frac{Cu - Cd}{uS}, \text{ esto implica que } H * \frac{u - d}{u} = \frac{Cu - Cd}{uS}, \text{ y finalmente:}$$

$$H = \frac{Cu - Cd}{(u - d) * S} \quad (2.5)$$

Ahora se sustituye el valor calculado de H en B como $B = \frac{\left[\frac{Cu - Cd}{(u - d) * S} * dS\right] - Cd}{r}$

$$\text{Desarrollando los términos se sigue que: } B = \frac{\frac{Cu - Cd}{(u - d) * d}}{r} - \frac{\frac{Cd * (u - d)}{(u - d)}}{r} = \frac{dCu - dCd - uCd + dCd}{(u - d) * r},$$

y resulta que:

$$B = \frac{dCu - uCd}{(u - d) * r} \quad (2.6)$$

2.3.3 Extensión del Modelo a n Periodos para Opciones Call

De acuerdo con lo explicado previamente el valor de una opción para n periodos se puede expresar en general como:

$$C_N = \text{Max} [S_N - E, 0] = \text{Max} [u^k d^{N-k} * S_0 - E, 0]$$

En consecuencia, si se tienen dos periodos, los precios de la opción serían:

$$C_{uu} = \text{Max} [u^2 * S - E, 0], C_{ud} = \text{Max} [0, u * d * S - E] \text{ y } C_{dd} = \text{Max} [d^2 * S - E, 0]$$

Respecto al precio del activo subyacente S, los valores teóricos al segundo periodo son: $u^2 * S$ con probabilidad p^2 ; $u * d * S$ con probabilidad $p * (1 - p)$; $d^2 * S$ con probabilidad $(1 - p)^2$.

Asimismo, como comentan Lamothe y Pérez (2003), se puede realizar una estrategia con arbitraje vendiendo una opción call y comprando H cantidad de activo subyacente, o de forma inversa.

Se llama cartera de arbitraje porque si esta genera los mismos flujos de caja que el activo financiero a valorar, y a su vez, tiene un valor diferente al del activo, los arbitrajistas podrían obtener beneficios sin riesgo al comprar el activo más barato y vender el más caro, así como este proceso terminaría por igualar ambos precios (Mascareñas, 2005).

Al igual que para un periodo, se tiene un comportamiento alcista o bajista de la cartera, y a partir del valor $H * u * S - Cu$ se tienen dos posibles valores, en $t=2$, con la ecuación:

$$H * u^2 * S - C_{uu} = H * u * d * S - C_{ud}$$

Para cumplir la igualdad, se despeja el valor de H, y se tiene que $H = \frac{C_{uu}-C_{ud}}{(u-d)*u*S}$, entonces esta estrategia de arbitraje para dos periodos debe asignar un rendimiento equivalente al del activo libre de riesgo al dividir cada igualdad de la ecuación como sigue:

$$H * u * S - Cu = \frac{H*u^2*S-C_{uu}}{r} = \frac{H*u*d*S-C_{ud}}{r} \quad (2.7)$$

Sustituyendo el valor de H en la ecuación, la primera igualdad queda como sigue:

$$\left[\frac{C_{uu}-C_{ud}}{(u-d)*u*S} \right] * u * S - Cu = \frac{\left[\frac{C_{uu}-C_{ud}}{(u-d)*u*S} \right] * u^2 * S - C_{uu}}{r}$$

Desarrollando la ecuación $\left[\frac{C_{uu}-C_{ud}}{(u-d)} \right] - Cu = \frac{\left[\frac{C_{uu}-C_{ud}}{(u-d)} \right] * u - C_{uu}}{r}$, y despejando Cu se obtiene:

$$Cu = \frac{C_{uu}-C_{ud}}{(u-d)} - \frac{\left[\frac{C_{uu}-C_{ud}}{(u-d)} \right] * u - C_{uu}}{r}$$

Realizando las operaciones y distribuyendo términos, resulta que:

$$Cu = \frac{rCu_u - rCu_d - uCu_u + uCu_d + (u-d)Cu_u}{(u-d) * r} = \frac{(r-u)Cu_u + (u-r)Cu_d + (u-d)Cu_u}{(u-d) * r}$$

Se sigue que $Cu = \frac{1}{r} * \left[\frac{(r-u)}{(u-d)} * Cu_u + \frac{(u-r)}{(u-d)} * Cu_d + \frac{(u-d)}{(u-d)} * Cu_u \right]$, agrupando términos se obtiene que $Cu = \frac{1}{r} * \left[\frac{(r-d)}{(u-d)} * Cu_u + \frac{(u-r)}{(u-d)} * Cu_d \right]$, y finalmente:

$$Cu = \frac{1}{r} * [p * Cu_u + (1-p) * Cu_d] \quad (2.8)$$

Por este resultado, también se cumple la segunda igualdad de la ecuación 2.7.

Ahora, desarrollando análogamente el procedimiento para la estrategia $Cd - H * d * S$, se tienen dos posibles valores, en $t=2$, con la siguiente ecuación:

$$Cu_d - H * u * d * S = Cdd - H * d^2 * S$$

Despejando H de esta ecuación, resulta que $H = \frac{Cu_d - Cdd}{(u-d) * d * S}$, asignando un rendimiento equivalente al del activo libre de riesgo, al dividir cada igualdad de la ecuación, se tiene que:

$$Cd - H * d * S = \frac{Cdd - H * d^2 * S}{r} = \frac{Cu_d - H * u * d * S}{r} \quad (2.9)$$

Sustituyendo el valor de H en la ecuación, la primera igualdad queda de esta forma:

$$Cd - \left[\frac{Cu_d - Cdd}{(u-d) * d * S} \right] * d * S = \frac{Cdd - \left[\frac{Cu_d - Cdd}{(u-d) * d * S} \right] * d^2 * S}{r}$$

Desarrollando la ecuación: $Cd - \left[\frac{Cu_d - Cdd}{(u-d)} \right] = \frac{Cdd - \left[\frac{Cu_d - Cdd}{(u-d)} \right] * d}{r}$, y despejando, se tiene que:

$$Cd = \frac{Cu_d - Cdd}{(u-d)} + \frac{Cdd - \left[\frac{Cu_d - Cdd}{(u-d)} \right] * d}{r}$$

Realizando las operaciones y distribuyendo términos:

$$Cd = \frac{rCud - rCdd + uCdd - dCdd - dCud + dCdd}{(u-d)*r} = \frac{(r-d)*Cud + (u-r)*Cdd}{(u-d)*r}$$

Se sigue que $Cd = \frac{1}{r} * \left[\frac{(r-d)}{(u-d)} * Cud + \frac{(u-r)}{(u-d)} * Cdd \right]$, y finalmente:

$$Cd = \frac{1}{r} * [p * Cud + (1-p) * Cdd] \quad (2.10)$$

Por este resultado, también se cumple la segunda igualdad de la ecuación 2.9.

Entonces, se demuestra que, a través de estrategias combinadas, se puede obtener, en $t=2$, el valor de Cu y Cd .

Con los valores calculados para Cu y Cd se pueden sustituir en la fórmula para un periodo como $C = \frac{1}{r^2} * [p^2 * Cuu + 2p(1-p) * Cud + (1-p)^2 * Cdd]$, y se cumple que:

$$C = \frac{1}{r^2} * [p^2 * \text{Max}[0, u^2S - E] + 2p(1-p) * \text{Max}[0, udS - E] + (1-p)^2 * \text{Max}[0, d^2S - E]] \quad (2.11)$$

La ecuación anterior expresa el valor de una opción call europea para dos periodos por medio del modelo binomial, por lo tanto, a partir de una estrategia de arbitraje se puede obtener el valor teórico de una opción.

De acuerdo con Lamothe y Pérez (2003), al extender este modelo a n periodos se puede notar que, al calcular los valores teóricos de las opciones para cada nodo del árbol binomial de precios, se obtiene la expresión $C_{i-1} = \frac{1}{r} [p * C_{iu} + (1-p) * C_{id}]$, a su vez, se debe tener en cuenta que el cálculo es recursivo, es decir, se comienza por el periodo n , y a partir de éste, se calculan los valores previos. Por lo que, extendiendo la ecuación de un periodo a n periodos considerando que $p = \frac{r-d}{u-d}$, $1-p = \frac{u-r}{u-d}$ y $r = 1 + rf$, se obtiene la fórmula general para calcular el valor de la prima de una opción call:

$$C = \frac{1}{r^n} * \left[\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i * (1-p)^{n-i} * \text{Max}(0, u^i d^{n-i} * S - E) \right] \quad (2.12)$$

2.3.4 Extensión del Modelo a n Periodos para Opciones Put

Así como se desarrolló una estrategia con arbitraje para poder replicar el valor teórico de una opción call, también se puede construir una estrategia similar que sea equivalente al valor intrínseco de una opción put.

Lamothe y Pérez (2003), comentan que se tendría una cantidad H de activo subyacente más una opción de venta $H * S + P$, esta cartera tendría un comportamiento alcista como $H * u * S + Pu$ con probabilidad p , así como un comportamiento bajista como $H * d * S + Pd$ con probabilidad $1-p$. Además, se debe cumplir que $H * u * S + Pu = H * d * S + Pd$, y despejando $H = \frac{Pd - Pu}{(u-d)S}$, entonces para calcular el valor teórico del put a través de esta estrategia se tiene que:

$$H * S + P = \frac{HuS + Pu}{r} = \frac{HdS + Pd}{r} \quad (2.13)$$

Desarrollando cada parte de la ecuación, y sustituyendo el valor de H como en el cálculo de la opción call, se obtiene la siguiente igualdad para un periodo:

$$P = \frac{1}{r} * [Pu * \frac{r-d}{u-d} + Pd * \frac{u-r}{u-d}] = \frac{1}{r} [Pu * p + Pd * (1 - p)]$$

A su vez, se pueden construir estrategias que sean equivalentes al precio teórico de una opción de venta para más de un periodo, esto puede hacerse recursivamente y se calcularía el último valor de la opción en el n -ésimo periodo, y a partir de este, se calculan los valores predecesores hasta llegar al primer valor del árbol binomial. Se pueden expresar estos cálculos con la ecuación $P_{i-1} = \frac{1}{r} [p * P_{iu} + (1 - p) * P_{id}]$, entonces, se obtiene la fórmula general para calcular el valor de la prima de una opción put:

$$P = \frac{1}{r^n} * \left[\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i * (1 - p)^{n-i} * \text{Max}(0, E - u^i d^{n-i} * S) \right] \quad (2.14)$$

2.4 Modelo de Black & Scholes

Esta fórmula para valorar opciones financieras contiene implícitamente a la fórmula del método binomial, pero para periodos mucho más pequeños en el tiempo, este modelo se desarrolló primero que el binomial y es el más usado en la actualidad, añadiendo otros supuestos y restricciones matemáticas de mayor complejidad. La fórmula para calcular los precios de opciones europeas que no pagan dividendos es la siguiente:

$$Call = S * N(d_1) - K * e^{-r*(T-t)}N(d_2) \quad (2.15)$$

$$Put = K * e^{-r*(T-t)}N(-d_2) - S * N(-d_1) \quad (2.16)$$

$$\text{Donde } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma * \sqrt{T-t}} \text{ y } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma * \sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma * \sqrt{T-t}$$

Además, la función $N(x)$ es la función de probabilidad acumulada para una variable normal estándar, es decir, la probabilidad de que la variable d_1 o d_2 sea menor a estos valores, S es el precio del subyacente y K el precio de ejercicio, r es la tasa de interés libre de riesgo, T es el plazo de vencimiento y σ es la volatilidad del precio del activo (Hull, 2014).

De acuerdo con García (2001), este modelo para valorar opciones financieras conlleva varias hipótesis para su utilización y desarrollo, las principales son:

- No existen costos de transacción, ni comisiones, y los impuestos afectan al rendimiento de las acciones y de la deuda de igual forma
- La tasa de interés libre de riesgo es conocida y constante en el intervalo $[0, T]$
- La opción de tipo europeo solo se ejerce hasta el vencimiento

- Se permiten “*ventas en corto*” del activo subyacente
- La negociación de los mercados se realiza continuamente
- El rendimiento del activo subyacente sigue una distribución normal y los precios se distribuyen log-normal

Este modelo permite determinar cuáles opciones están subvaloradas o sobrevaloradas, al incluir el precio del activo subyacente para ese momento.

2.5 Simulación de Montecarlo

El método de Monte Carlo conocido también como simulación de Monte Carlo está atribuido a Stanislaw Ulam y a John von Neumann en la década de 1940. Ellos aplicaron los conceptos generales del método en la investigación de la bomba atómica durante la segunda guerra mundial. El nombre “*Monte Carlo*” proviene de Mónaco, conocida como la capital del juego del azar, debido a que el juego de la ruleta era considerado como el primer generador de números aleatorios.

A continuación, se explicarán los modelos para simular los principales procesos estocásticos utilizados en las aplicaciones de opciones reales, como son el Movimiento Browniano Geométrico, el Proceso de Reversión a la Media. Las simulaciones neutrales al riesgo se usan para obtener los precios de los derivados, mientras que las simulaciones reales para el valor en riesgo, coberturas y, para aplicaciones de opciones reales.

Sin embargo, la idea del cálculo de Monte Carlo es mucho más antigua que la aparición de las computadoras y era conocida anteriormente por el nombre de "muestreo estadístico". Inicialmente, este método no fue un método para resolver problemas en

física, sino para evaluar integrales que no podían ser evaluadas de otra manera, por lo que, el cálculo de integrales de funciones complicadas y las integrales en espacios multidimensionales fueron las dos áreas iniciales en las que la simulación de Monte Carlo probó ser de gran utilidad, (González, 2015).

De acuerdo con Smid (citado en González, 2015), se mencionan las ventajas de utilizar este método, ya que cuenta con capacidad para modelar sistemas complejos, a través de cualquier distribución de probabilidad, además es un método fácil de desarrollar y obtención de resultados en poco tiempo. Pero, se tienen algunas diferencias como el hecho de que es una técnica de aproximación y unidireccional.

Según Yauri (citado en González, 2015), para implementar la simulación de Monte Carlo, la cual está basada en generar números aleatorios, se deben seguir los siguientes pasos:

Determinar las variables aleatorias y sus distribuciones.

- Iterar tantas veces como sean necesarias:
 1. Generar un número aleatorio
 2. Distribución Uniforme [0,1]
 3. Determinar el valor para el número aleatorio generado de acuerdo con el rango o clases que se especifiquen
- Calcular media, desviación estándar u otros métodos estadísticos
- Analizar los resultados

Otra alternativa para la simulación sería cuando la variable aleatoria no es directamente el resultado de la simulación o bien cuando se tienen relaciones entre las variables. Entonces, los pasos generales que se deben seguir son los siguientes:

- Diseñar el modelo lógico de decisión
- Especificar distribuciones de probabilidad para las variables aleatorias relevantes
- Incluir posibles dependencias entre variables
- Calcular el resultado del modelo según valores de muestreo y registrar el resultado.
- Repetir el proceso hasta tener una muestra estadísticamente representativa
- Calcular media o desviación estándar
- Analizar los resultados

Teniendo en cuenta estas dos aproximaciones, se puede decir que existen tres conceptos básicos que se deben de considerar en el momento de aplicar la simulación de Monte Carlo: las variables aleatorias, las funciones de densidad de probabilidad y la forma de interpretar estos resultados mediante el uso de iteraciones (González, 2015).

2.5.1 Simulación de Montecarlo sobre un Movimiento Geométrico

Si se considera que el precio de un activo sigue un Movimiento Browniano Geométrico, el cual, está dado por la ecuación:

$$dP = \alpha * P * dt + \sigma * P * dz \quad (2.17)$$

Donde $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$, con ε distribuyéndose normal estándar, α es la deriva o tasa de rendimiento de capital y σ es la volatilidad de P.

Además, utilizando el rendimiento de inversión total dado por $\mu = \alpha + \delta$, donde μ es la tasa de descuento ajustada por riesgo para P y δ es el rendimiento por dividendos, entonces sustituyendo la igualdad en la ecuación 2.16 se tiene que:

$$dP = (\mu - \delta) * P * dt + \sigma * P * dz$$

Esta ecuación puede modificarse si se sustituye la tasa de interés libre de riesgo por la tasa ajustada por riesgo como sigue:

$$dP = (r - \delta) * P * dt + \sigma * P * dz \quad (2.18)$$

Los procesos estocásticos relacionados con el Movimiento Browniano Geométrico implican realizar transformaciones a las ecuaciones, como aplicar la función logaritmo y exponencial, así como basarse en ciertos supuestos matemáticos como el Lema de Itô, por lo tanto, en esta tesis no se pretende desarrollar dichas transformaciones que conllevan cálculos de mayor complejidad, y que no corresponden al tema principal.

La simulación real de un Movimiento Browniano Geométrico usa la deriva real α , donde el precio P_t en el próximo instante t está dado por:

$$P_t = P_0 * \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) * \Delta t + \sigma * N(0,1) * \sqrt{\Delta t} \right]$$

Este tipo de simulación es usada principalmente para el cálculo de la probabilidad de ejercicio de la opción y para el tiempo esperado de ejercicio de esta, así como para la estimación del valor en riesgo o Value at Risk (VaR). Sin embargo, para derivados

financieros en general, es requerida la simulación neutral al riesgo, ya que contempla la deriva $\alpha = r - \delta$, obteniendo lo siguiente:

$$P_t = P_0 * \exp \left[\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) * \Delta t + \sigma * N(0,1) * \sqrt{\Delta t} \right] \quad (2.19)$$

Esta ecuación se utiliza para valuar derivados en mercados completos, para mercados incompletos también puede usarse, solamente que se necesita seleccionar una medida de martingala o estimar la prima de riesgo, o también utilizar la ecuación de la simulación real de un Movimiento Browniano Geométrico con una tasa de descuento ajustada por riesgo exógena.

En la práctica, lo correcto es emplear la simulación real, en vez de simulación neutral al riesgo para estimar la probabilidad de ejercicio de las opciones y su tiempo estimado. Además, estas ecuaciones en tiempo discreto son igual de exactas como utilizar modelos provenientes en tiempo continuo, ya que, el incremento sobre el tiempo de cualquier forma no afecta la valuación de la opción financiera respecto al activo subyacente, al obtener el mismo resultado que con el modelo de *Black & Scholes*.

2.5.2 Simulación de Montecarlo con Reversión a la Media

Para explicar este modelo se define el proceso aritmético de *Ornstein-Uhlenbeck* para una variable estocástica $x(t)$:

$$dx = \eta(\bar{x} - x) * dt + \sigma * dz \quad (2.20)$$

Esta ecuación expresa que x tiende a un nivel de equilibrio respecto a su media, así como una velocidad de reversión dado por η . La solución para esta ecuación diferencial estocástica se puede resolver explícitamente a través de la integral estocástica de Itô como sigue:

$$x(T) = x(0) * e^{-\eta T} + (1 - e^{-\eta T}) * \bar{x} + \sigma * e^{-\eta T} \int_0^T e^{\eta t} dz(t)$$

La variable $x(T)$ sigue una distribución, donde su media y varianza tienen esta forma:

$$E[x(T)] = x(0) * e^{-\eta T} + (1 - e^{-\eta T}) * \bar{x};$$

$$Var[x(T)] = (1 - e^{-2\eta T}) * \frac{\sigma^2}{2\eta};$$

Dado lo anterior, para desarrollar la simulación correspondiente es necesario obtener la ecuación en tiempo discreto para este modelo, esto puede lograrse por medio de un proceso autorregresivo de primer orden AR(1), de esta forma se puede obtener esta ecuación:

$$x_t = x_{t-1} * e^{-\eta \Delta t} + (1 - e^{-\eta \Delta t}) * \bar{x} + \sigma * \sqrt{\frac{(1 - \exp(-2\eta \Delta t))}{2\eta}} * N(0,1) \quad (2.21)$$

Se puede observar que la ecuación para tiempo discreto es semejante a la del modelo en tiempo continuo, solo que se añade el factor aleatorio de la distribución Normal estándar. Sin embargo, como $x(t)$ tiene una distribución Normal, puede tomar valores negativos y como los precios de los activos tienen precios positivos, se asume un nivel de equilibrio de largo plazo con reversión a la media dado por: $\bar{x} = Ln(\bar{P})$, con $\bar{P} = \exp(\bar{x})$ como constante.

Otra consideración importante es que se cumpla la igualdad $E[P(T)] = \exp(E[x(T)])$, la cual, explica la relación entre la variable x y P , obteniendo el valor esperado en el momento T para el precio como $E[P(T)] = \exp(x(0) * e^{-\eta T} + (1 - e^{-\eta T}) * \bar{x})$, pero la condición $P(t) = \exp[x(t)]$ no se cumple, ya que, la exponencial de una distribución Normal añade la mitad de la varianza en la media de la distribución

log-normal, entonces la ecuación queda como: $P(t) = \exp\left(x(t) - \frac{\text{Var}[x(t)]}{2}\right)$, y sustituyendo en la ecuaciones anteriores se obtiene:

$$P(t) = \exp\left\{\ln(P(t-1)) * e^{-\eta\Delta t} + [\ln(\bar{P}) (1 - e^{-\eta\Delta t})] - [(1 - e^{-2\eta\Delta t}) * \frac{\sigma^2}{4\eta}] + \sigma * \sqrt{\frac{(1 - \exp(-2\eta\Delta t))}{2\eta}} * N(0,1)\right\} \quad (2.22)$$

La forma neutral al riesgo permite valorar derivados y utiliza tasa de interés libre de riesgo como la tasa de descuento, es por esto que la deriva α se sustituye por $r - \delta$, donde δ es el rendimiento por dividendos, siguiendo esta condición para el caso con reversión a la media, $\alpha = \eta * (\bar{x} - x)$ y $\delta = \mu - \alpha = \mu - \eta * (\bar{x} - x)$, con μ como la tasa de descuento ajustada por riesgo y el rendimiento total dado por $\mu = \alpha + \delta$.

En consecuencia, la deriva neutral al riesgo para un proceso con reversión a la media es $r - \delta = r - \mu + \eta * (\bar{x} - x) = \eta * (\bar{x} - x) - (\mu - r) = \eta \left(\bar{x} - \frac{\mu - r}{\eta} - x \right)$

Se puede notar que para pasar del proceso real al de riesgo neutral se debe restar la prima de riesgo normalizada $\left(\frac{\mu - r}{\eta}\right)$ del nivel promedio de largo plazo $\ln(\bar{P}) = \bar{x}$, es decir, en el proceso neutral al riesgo, los precios vuelven a un nivel inferior que el de largo plazo, y el factor de sustracción es una especie de prima de riesgo normalizada.

Entonces, la ecuación estocástica neutral al riesgo en tiempo continuo es:

$$dx = \eta \left(\bar{x} - \frac{\mu - r}{\eta} - x \right) * dt + \sigma * dz \quad (2.23)$$

Adaptando la ecuación en tiempo discreto a través de la forma de riesgo neutral se obtiene lo siguiente:

$$x_t = x_{t-1} * e^{-\eta\Delta t} + (1 - e^{-\eta\Delta t}) * \left(\bar{x} - \frac{\mu - r}{\eta} \right) + \sigma * \sqrt{\frac{(1 - \exp(-2\eta\Delta t))}{2\eta}} * N(0,1) \quad (2.24)$$

Capítulo 3. Opciones Reales

3.1 Antecedentes de las Opciones Reales

En 1976 Stewart Myers (citado en Lamothe y Méndez, 2013) menciona el término de opciones reales, para tratar de relacionar una opción financiera con un proyecto de inversión, y se comienza a tener una definición de lo que es una opción real, entonces se dice que es un derecho de realizar, ampliar o abandonar una inversión.

El enfoque que tienen las opciones reales es un modelo de valoración estratégica con una finalidad que rebasa lo estipulado en la teoría financiera convencional y en las propias estrategias a desarrollar, al permitir valorar inversiones con mejores resultados y reinventando la relación dinámica de asignaciones de recursos de empresas, la cual es sensible ante valuaciones cuantitativas (Abreu y Paredes, 2014).

De acuerdo con las características que componen a una opción financiera, se puede hacer una adaptación entre sus variables y las que tendría una opción real. En la siguiente tabla, se muestran las principales diferencias entre las opciones financieras y reales:

Tabla 2. Opción Financiera vs Opción Real

Opción Financiera	Variable	Opción Real
Precio del activo subyacente	S	Valor presente de los flujos de efectivo esperados
Precio de ejercicio o pactado	K	Valor presente de la inversión del proyecto
Tasa de interés libre de riesgo	r	Tasa de interés libre de riesgo
Volatilidad del subyacente	σ	Volatilidad de los flujos de efectivo
Fecha de vencimiento o maduración	T	Tiempo para terminar el proyecto
Dividendos	D	Flujos de efectivo por no realizar el proyecto

Fuente: Elaboración propia.

Una opción financiera obtiene su valor con las variables numéricas que la componen y su negociación en las bolsas de valores alrededor del mundo, con sus

respectivos contratos de compra y venta, ya sea en mercados organizados o no organizados, así como también el precio se ve alterado por la oferta y demanda dentro del mercado de derivados. Mientras que una opción real adquiere su precio por el valor de los activos reales que la componen, como pueden ser los flujos de caja correspondientes a un proyecto de inversión a futuro.

3.2 Tipos de Opciones Reales

Para Morales y Morales (2009), las opciones reales más comunes son:

- Opción de posponer o retrasar la inversión
- Opción de abandonar o desinvertir
- Opción de expansión, ampliación o crecimiento

Una opción de aprendizaje se considera cuando se incurre en cierto costo y se puede obtener información sobre un producto y/o mercado.

3.2.1 Opción de Abandono

Las opciones de abandono proveen de flexibilidad, respecto a la ineficiencia que se tenga en un proyecto sobre cierto sector, como el energético, minero, petrolero, etc.

Esta opción proporciona al propietario el derecho de vender, liquidar o cerrar un proyecto de inversión a cambio de un precio acordado. Su valor aumenta si es mayor la incertidumbre sobre el valor futuro del negocio, también cuando es mayor el tiempo que se dispone para ejercer la opción y cuando la relación entre el valor de abandono del proyecto o valor de liquidación respecto al valor terminal o residual es más grande,

además, se debe tomar en cuenta que abandonar un proyecto implica costos de cierre o liquidación (Mascareñas, 2015).

El valor económico-financiero de una empresa se calcula por medio de los flujos de caja libres traídos a valor presente con una tasa de descuento más un valor terminal o residual, calculado del resto de los flujos que generará la empresa al “infinito”, el cual, es también es traído a valor presente. Este valor de la empresa puede tratarse como una variable aleatoria con media y desviación estándar con una distribución normal, provocando que la empresa valga más o menos, de acuerdo con los posibles valores que puede tomar la distribución de probabilidad.

Por lo anterior, Mascareñas (2015) comenta que se debe añadir un valor presente por opción de abandono al valor total de la empresa, debido a que los flujos de caja libres pueden tener un comportamiento más bajo de lo esperado, e incluso negativo, y se tomaría la decisión de vender la empresa para no perder más valor conforme transcurra el tiempo.

Venegas y Fundia (2006) comentan que si el valor de mercado de una empresa (V_t) es mayor al valor presente de los flujos de efectivo esperados (S_T) en T , se tiene una opción de venta o put, ya que, si $V_T > S_T$ la opción se ejerce, en otro caso no.

Cuando se tiene un proyecto que se va a llevar a cabo en más de una etapa y se invierte cierto capital, se puede llevar a cabo este tipo de opción, al permitir abandonar el proyecto debido a la incertidumbre asociada, considerando siempre lo que le conviene más a la empresa, y en qué situación se encuentra para realizar este tipo de estrategias.

Un riesgo que posee la opción de abandono es duplicar su efecto al sobreponerse a las áreas de ejercicio y los beneficios obtenidos, además proporciona un valor mínimo al proyecto, el cual es independiente del valor del mismo proyecto. Si se añaden los flujos de caja de este tipo de opción, a los valores mínimos obtenidos previamente, no sería lo más correcto, financieramente hablando (Mascareñas, 2015).

Se puede pensar en un proyecto minero donde la explotación se ve afectada por el cambio en los precios de mercado de algún metal o *commodity*, al tener un menor valor que los costos de explotación, sin embargo, se pensaría en cerrar el proyecto, no por este hecho, sino cuando se tenga una pérdida mayor que contrarreste los costos de cerrar la mina temporalmente, así como en volver a abrirla cuando las ganancias superen a los costos por haberla reabierto.

Según García (2001), algunas veces, las decisiones tomadas en una empresa de diversa índole dan la posibilidad de deshacerse de proyectos con un mayor grado de flexibilidad al obtener mayores ingresos en vez de continuar con el proyecto, esto puede realizarse como si se tratara de una opción put americana, o lo que se conoce como opción de abandono. Sin embargo, la venta no es tan sencilla, ya que, el proyecto arroja flujos de efectivo dudosos con un valor residual incierto, por lo que se complica el método de valuación, aunque algunos activos son más fáciles de liquidar que otros, como los tangibles.

3.2.2 Opción de Contracción

La opción de reducir o desinvertir en un proyecto otorga la flexibilidad de contraer la inversión y/o abandonarla por completo en ciertos momentos de la duración del

proyecto, a cambio de un costo bajo de desinversión o abandono (Lamothe y Méndez, 2013).

Si una empresa comienza a invertir en un proyecto por etapas, las decisiones sobre la segunda etapa serían consecuencia de lo obtenido en la primera, si no se tuvieran los resultados deseados, la empresa puede ejercer la opción de contraer los niveles de producción al invertir menos capital en la segunda etapa, y así evitar inversiones a futuro al ser más precavida en su estrategia de negocio.

Según Venegas y Fundia (2006), si se define a M como una cantidad inicial a invertir en la primera etapa, a N como una cantidad menor a invertir en la segunda etapa y a β como una proporción de contracción del valor presente de los flujos esperados del proyecto al llegar a la siguiente etapa, en este caso, S_T , entonces el valor intrínseco de este tipo de opción real está dado por:

$$\begin{aligned} C(S_T, T, \beta, K, N) &= \text{Max}[(1 - \beta) * S_T - N, S_T - K] \\ &= S_T + \text{Max}[-\beta * S_T - N, -K] = S_T - \text{Min}[\beta * S_T + N, K] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Donde $K = e^{r*(T-t)} * M$, es decir, se invierte una cantidad K o se invierte N , en consecuencia, se contraen los flujos esperados del proyecto.

3.2.3 Opción de Cierre Temporal

Según Macareñas (2015), este tipo de opción contempla a las operaciones anuales de una empresa como una opción de compra, la cual, considera a los ingresos anuales (C) de ese año, y un precio de ejercicio vinculado a los costos variables operativos (A_v), este valor se puede calcular de la siguiente forma:

$$\text{Max}[C - A_v, 0] \quad (3.2)$$

García (2001) menciona que existen condiciones en las que es mejor esperar para los proyectos que se planeen llevar cabo, la realización del mismo no debe ser inmediatamente, pero el hecho de esperar puede reducir los primeros flujos de efectivo esperados por el proyecto, así como las ventajas competitivas en el mercado, lo que se traduce a ejercer una opción call americana, ya que, le brinda a la empresa el derecho, más no la obligación de realizar una inversión para el proyecto, lo que puede valer incluso más que no esperarse.

Al concepto anterior, también se le conoce como una opción de diferir o posponer o retrasar la inversión. A su vez, la opción de diferir proporciona a un proyecto la posibilidad de aplazar su realización durante un periodo determinado, provocando que la incertidumbre disminuya.

Asimismo, Venegas y Fundia (2006) consideran a C como el costo de cierre, el cual, es una proporción fija dada por δ , sobre el valor presente de los flujos esperados del proyecto o el subyacente S_T , entonces, $C = S_T * \delta$. Si los flujos previstos son menores a los costos variables, y se considera a la variable α como los costos fijos, entonces el valor intrínseco de esta opción real sería el siguiente:

$$\begin{aligned}
 C(S_T, T, \delta, K) &= \text{Max}[S_T - X - \alpha, S_T - C - \alpha] = \text{Max}[S_T - X - \alpha, (1 - \delta) * S_T - \alpha] \\
 &= S_T + \text{Max}[-X, -\delta * S_T] - \alpha = S_T - \text{Min}[X, \delta * S_T] - \alpha \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Donde $K = X$, es decir, el costo variable anual de la empresa puede ser visto como el precio de ejercicio de la opción de cierre temporal, así como α representa a los costos fijos anuales.

3.2.4 Opción de Expansión

La opción de expansión conlleva la posibilidad de incluir ciertas oportunidades de inversión durante la ejecución del proyecto, ya que se pueden producir nuevos productos o mercancías, así como adquirir otras empresas, es decir, expandir la producción o el alcance de un proyecto dadas las condiciones favorables o disminuirla si no lo son. Lo anterior, es equivalente a tener una opción call americana, debido a que esta opción tiene la posibilidad de realizar inversiones adicionales, como aumentar la producción o invertir continuamente, mientras las condiciones sean óptimas (García, 2001).

Como Venegas y Fundia (2006) comentan, si se expande el valor presente de los flujos de efectivo esperados de un proyecto en una proporción α , es decir, si se incrementa el volumen de ventas, precios, capacidad productiva o número de clientes, y se define una cantidad K' en el momento T , y si $(1 + \alpha)S_T - K'$ es el valor presente neto que aumenta una proporción $\alpha\%$ menos el costo de la inversión adicional K' al momento $T=0$, entonces el valor intrínseco de esta opción real es el siguiente:

$$\begin{aligned} C(S_0, T, \alpha, K') &= \text{Max}[(1 + \alpha) * S_0 - K', S_0] = S_0 + \text{Max}[\alpha * S_0 - K', 0] \\ &= S_0 + \alpha * \text{Max}[S_0 - K, 0] = S_0 + \alpha * C(S_0, T, K) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde $K = \frac{K'}{\alpha}$, y se puede observar que al subyacente se le suma la proporción adicional al valor intrínseco de una opción de compra, la cual, se puede calcular por el método de *Black & Scholes*.

3.2.5 Opción de Cambio (Switch Option)

Este tipo de opciones se da cuando una empresa tiene las condiciones de producir un mismo bien o servicio por medio de diferentes insumos, y no se tendrían problemas por realizar estos cambios dentro de la empresa. Entonces el valor intrínseco de este tipo de opción real es este:

$$C(S_T, T) = \text{Max}[S_{2T} - S_{1T} - K, 0] \quad (3.5)$$

Donde S_{1T} es el valor presente de los flujos de efectivo esperados en tiempo T sobre la primera forma de producción, S_{2T} es el valor presente de los flujos de efectivo esperado en tiempo T de la segunda forma de producción, y K se considera el costo de cambio, en vez del precio de ejercicio habitual en una opción financiera. Si se cumple la condición $S_{2T} > S_{1T} + K$, se ejerce la opción de cambio (Venegas y Fundia, 2006).

La teoría financiera contempla otros tipos de opciones reales más complejas que consideran otras circunstancias en algún proyecto que se requiera evaluar, como intercambiar al pagar costos fijos por parte de los inversionistas, este tipo de opciones es conocido como opciones de intercambio y se valúan como opciones americanas, ya que se puede hacer el intercambio antes del vencimiento del proyecto. A su vez, existen opciones sobre opciones, al tener un proyecto a realizarse por fases, denominadas como opciones compuestas. Finalmente, existen opciones afectadas por diversas causas de incertidumbre, las cuales se conocen como opciones arcoíris (Flores, 2013).

3.3 Utilización de las Opciones Reales en Proyectos de Inversión

De acuerdo con Mun (2002) (citado por De la Fuente, 2005), indica que las opciones reales constituyen un enfoque utilizado a fin de valorar proyectos de inversión

en entornos dinámicos e inciertos, teniendo en cuenta alternativas estratégicas que le proporcionen flexibilidad a la empresa minimizando los niveles de riesgo.

Además, se considera que el activo total de una empresa se compone de las inversiones actuales más las oportunidades futuras de inversión, y que el valor de mercado no se explique solamente a través de los activos fijos de la empresa sino por la existencia de las opciones reales, lo cual afecta directamente este valor, así como el valor de riesgo premiado por distintos agentes (Espitia y Pastor, 2003).

El valor de una asignación de recursos proviene de la capacidad adicional generada, esto implica que el valor está dado por lo que estos activos permiten hacer. Por lo que, las opciones reales son la materialización de los resultados tangibles o intangibles de asignaciones de recursos previos. Es decir, las licencias productivas, el conocimiento de nuevos productos, tecnologías o procesos, la imagen de marca, la fidelidad, entre otros, son el resultado del compromiso de recursos y tienen valor para la empresa en la medida en que permiten hacer algo hasta entonces inaccesible generando nuevas opciones (Abreu y Paredes, 2014).

Entonces, una opción real se puede ejercer en un plazo determinado con vencimiento, por medio de la compra, rescate o venta de un volumen determinado de recursos bajo cierto precio específico. Sin embargo, Espitia y Pastor (2003) destacan la dificultad que existe al valorar opciones reales, así como la importancia de relacionar las distintas opciones que se pueden generar en torno a un proyecto y los diferentes métodos a utilizar en la valuación, tomando en cuenta las características de la información obtenida y las variables inmersas.

Se debe entender que el análisis individual del valor de cada opción permite cuantificar la importancia de éstas dentro de la flexibilidad del proyecto, el mismo no es importante a la hora de analizar en términos prácticos el valor estratégico del proyecto, para así poder llevar a cabo la toma de decisiones, ya que no se evalúa la flexibilidad del proyecto en su conjunto, sino que se determina el valor de posibles alternativas a seguir en forma aislada y particular (Garrido y Andalaft, 2003).

Si se considera un proyecto, se supone que este no se transa en los mercados financieros, lo que dificultaría comprender y asimilar el comportamiento de los flujos de cajas con cierto activo subyacente, entonces los métodos de valuación más comunes como el modelo de *Black & Scholes* y el modelo Binomial, no generan un real aporte en términos prácticos al realizar la evaluación económica de un proyecto de inversión, ni al calcular el valor de la flexibilidad que éste presenta, pues solo permiten calcular el valor de cada opción en forma particular.

Fernández (2017), comenta que algunos de los problemas más frecuentes en la valuación de proyectos mediante opciones reales son la dificultad para comunicar la valuación por su mayor complejidad técnica que el valor actual, la dificultad para definir los parámetros necesarios para valorar las opciones reales, así como definir y cuantificar la volatilidad de las fuentes de incertidumbre, además de calibrar la exclusividad de la opción para poder valorarlas correctamente.

Por su parte, Mascareñas (2007) asocia ciertos problemas de arbitraje con el uso de opciones reales, debido a que la teoría de valoración de opciones se basa en que es posible construir una cartera que replique los flujos de caja generados por la opción a valorar, al adquirir el activo subyacente y prestando o endeudándose al tipo de interés

libre de riesgo, donde el arbitraje se encargaría de igualar los precios de la opción y de la cartera. Entonces, el activo subyacente es negociado en el mercado, lo que no suele ocurrir con los activos reales, por lo que el arbitraje tampoco conseguirá unificar los precios de las opciones reales y su cartera de réplica, provocando diferencias entre el valor de la opción real calculado con el modelo y su precio en el mercado.

3.4. El Valor Presente Neto Ampliado

De acuerdo con lo explicado sobre los tipos de opciones reales, se establece un criterio para utilizar el Valor Presente como parámetro en la toma de decisiones de un proyecto de inversión donde el concepto tradicional de Valor Presente Neto cambia, ya que ahora se tiene que considerar el costo de oportunidad, es decir, si el proyecto de inversión se realiza en este momento o si se pospone o se abandona. En consecuencia, las opciones reales aumentan el valor del proyecto de inversión y la fórmula alternativa bajo dichos supuestos es la siguiente:

$$VPN \text{ Ampliado} = VPN \text{ Básico} + VP (\text{opciones reales implícitas}) \quad (3.6)$$

Por lo tanto, los métodos clásicos de valuación de proyectos son aceptables cuando se evalúan decisiones de inversión que no se ven afectadas por el factor de abandono, además minimizan el proyecto cuando existe el factor de flexibilidad, es decir, el proyecto se puede posponer a cierto tiempo, así como se pueden presentar oportunidades de expansión en las empresas dentro del país o en el extranjero, obteniendo diferentes niveles de riesgo que afecten las decisiones de inversión (Mascareñas, 2007).

Se espera que el Valor Presente Neto Ampliado obtenido por el valor presente generado de las opciones reales, contribuya con un mayor valor para el proyecto, afectando positivamente la toma de decisiones financieras respecto a la continuación, postergación o cancelación de este, dependiendo de la estrategia llevada a cabo por alguna empresa perteneciente al algún sector económico.

Respecto a una opción real de compra, si la decisión de la inversión en el proyecto fuera inmediata sin tomar en cuenta la flexibilidad que se pudiera tener, se tendría la siguiente formula de valuación:

$$VPN = \text{Max}[\text{Valor Presente de Flujos de Caja esperados} - \text{Inversión}, 0]$$

3.5 Justificación del Uso de Opciones Reales

Los métodos tradicionales para la valoración de inversiones con el fin de encontrar proyectos cuya rentabilidad sea superior al costo incurrido para ejecutarlos, tales como el valor actual neto el cual actualiza los flujos futuros de fondos asumiendo una serie de supuestos, que pueden afectar los resultados obtenidos tales como: la autoridad de la organización para modificar los flujos esperados a través del tiempo con el fin de adaptarse a las cambiantes condiciones del mercado durante toda la vida útil del proyecto, de igual forma, el Valor Presente Neto asume una tasa de descuento constante y conocida en función del riesgo del proyecto, pero en realidad dicha tasa está propensa a variar en el tiempo en función del apalancamiento operativo, la rentabilidad del proyecto, así como su vida útil (Mascareñas, 2007).

La fijación de precios mediante el Valor Presente Neto se simplifica al punto de ignorar las múltiples variaciones producidas por un entorno incierto, llevando a la

posibilidad de rechazar un proyecto de inversión que visto desde la perspectiva de métodos alternativos como opciones reales pudiesen generar amplios márgenes de beneficios para la empresa, considerando las variables incluidas en sus cálculos.

Las opciones reales pueden ser valorizadas utilizando distintos métodos o modelos dependiendo del tipo de opción a valorar y del proceso estocástico seleccionado, entre ellos se pueden mencionar los métodos en tiempo discreto, los métodos en tiempo continuo y los métodos numéricos explicados anteriormente.

La metodología de valoración de opciones en tiempo discreto puede ser aplicada luego de determinarse la existencia de un portafolio replicador que posea las mismas características de riesgo que el activo real, para el cual se modela la evolución futura de sus precios mediante un proceso estocástico en tiempo discreto. De esta manera, al aplicar el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje, el valor presente del proyecto se obtendría junto al valor del portafolio replicador, resolviendo iterativamente una red en tiempo discreto con forma de árbol (Abreu y Paredes, 2014).

La metodología de valoración de opciones en tiempo continuo puede ser aplicada describiendo la incertidumbre asociada a los flujos de caja de un proyecto mediante un proceso estocástico en tiempo continuo. Esta relación, queda representada como una ecuación diferencial parcial, la cual podrá ser resuelta obteniendo soluciones analíticas mediante la aplicación de condiciones terminales y bajo ciertos límites, llegando así a obtener el valor del proyecto (Abreu y Paredes, 2014).

Sin embargo, estos modelos analíticos tienen limitaciones en la práctica, debido a que han sido desarrollados para solucionar un problema específico, pudiendo solo

aplicarse en circunstancias iguales a las que existían cuando fueron desarrollados. Asimismo, generalmente consideran escenarios más simples, en los que no se presentan muchas de las restricciones y complejidades presentes en un problema real. Según el grado de prioridad, Mascareñas (2012) clasifica las opciones reales en tres grupos:

1) Opciones con prioridad alta, en las que el valor de la opción es altamente sensible con respecto a las variables sobre las que la directiva puede actuar con facilidad. por ejemplo, la aplicación de técnicas de perforación horizontal con objeto de maximizar las reservas petrolíferas recuperables.

2) Opciones con prioridad media, en las que el valor de la opción es sensible a las variables sobre las que puede actuar, al menos, un competidor, pero no su propietario. el equipo directivo puede vender la opción a su propietario natural, salvo que existan otras consideraciones, por ejemplo, la opción de alargar los permisos de perforación en una zona determinada valdrá más si ya se tiene instalada una infraestructura previa en comparación con otro inversor que parta de cero.

3) Opciones con prioridad baja, en las que el valor de la opción es insensible a la posible actuación que tanto su propietario como la competencia puedan hacer sobre cualquiera de las variables básicas.

Además, existen cuatro formas en las que la aplicación del análisis de las opciones reales a cada posibilidad de inversión mejora las estrategias de una empresa:

1) Resaltando las oportunidades e impulsando a los directivos a comparar cada oportunidad que surja de los proyectos actuales con todo el rango de oportunidades disponible.

- 2) Aumentar el apalancamiento, ya que impulsa hacia un apalancamiento estratégico al animar a los directivos a explotar situaciones donde la inversión incremental puede mantener su compañía en juego.
- 3) Maximizando los derechos, cuando los inversores adquieren el derecho sobre una oportunidad. Como el precio de ejercicio no varía, los directivos hacen lo posible por diferir el ejercicio de la opción, lo que aumenta el valor de la opción.
- 4) Minimizando las obligaciones, debido a que las opciones reales suelen incorporar la característica de no obligar en absoluto a su propietario cuando la opción vence *out-the-money*, lo que reduce las obligaciones de los directivos en situaciones riesgosas.

Como Mauboussin (1999) (citado por Lamothe y Méndez, 2013) explica, los métodos tradicionales subestiman el valor o potencial que pueden alcanzar los activos que poseen las empresas en cuanto a su flexibilidad operativa y estratégica, así como las opciones de crecimiento que se pueden tener.

Entonces las opciones reales conllevan una gran importancia para empresas que cuenten con directivos inteligentes con un grado de comprensión sobre las alternativas existentes y capacidad para negociar y obtener capital, así como poder identificar cuál opción real puede implementarse y el valor que esta pueda aportar al proyecto, más allá de solo preocuparse de maximizar los beneficios de corto plazo con métodos tradicionales. Las empresas del sector tecnológico deben implementar nuevas tecnologías son viables para utilizar opciones reales.

3.6 Criterios sobre Proyectos de Inversión

Como se mencionó anteriormente, el Valor Presente Neto es el primer criterio que se toma en cuenta al decidir si se acepta o no un proyecto de inversión, el cual, representa la suma de la diferencia de los ingresos y egresos ($Y_t - E_t$) traídos a valor presente menos la inversión inicial del proyecto (I_0), se espera es que este indicador sea positivo para continuar con el proyecto, y se tiene la siguiente expresión:

$$VPN = \sum_{t=1}^n \frac{Y_t - E_t}{(1+i)^t} - I_0 = \sum_{t=1}^n \frac{BN_t}{(1+i)^t} - I_0 \quad (3.7)$$

Donde BN representa el beneficio neto del proyecto para cada periodo.

3.6.1 El Criterio de la Tasa Interna de Retorno (TIR)

Otro indicador importante es la Tasa Interna de Retorno (TIR), es la tasa que hace que la suma de los beneficios o flujos menos la inversión sea igual a cero, es decir, el porcentaje de ganancia óptimo para el inversionista que le proporcionaría algún proyecto, y se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{t=1}^n \frac{Y_t - E_t}{(1 + TIR)^t} - I_0 = \sum_{t=1}^n \frac{BN_t}{(1 + TIR)^t} - I_0 = 0$$

Como Bierman y Smidt (citados por Sapag y Sapag, 2008) comentan, la TIR representa la tasa de interés más alta que un inversionista puede ganar sin perder dinero, si los fondos para el financiamiento de la inversión se tomaran prestados y cierto préstamo se pagara con los flujos generados por la inversión.

Se debe tomar en cuenta que el criterio de la tasa interna de retorno supone que los fondos generados por el proyecto serían reinvertidos a la tasa de rentabilidad del

proyecto, mientras que el criterio del Valor Presente Neto supone una reinversión a la tasa de descuento de la empresa.

Suponiendo que la empresa toma en cuenta un criterio de racionalidad económica, ésta invertirá hasta que su beneficio marginal sea cero o que su Valor Presente Neto del último proyecto sea nulo, es decir, hasta el momento en que su tasa de rentabilidad sea igual a su tasa de descuento. Si esto ocurre, un proyecto con alta TIR difícilmente podrá redundar en que la inversión de los excedentes generados por este genere la misma tasa de rendimiento. Sin embargo, según el supuesto de eficiencia económica, la empresa reinvertirá los excedentes a su tasa de descuento, ya que, si tuviera posibilidades de retornos a tasas mayores, ya habría invertido en ellas (Sapag y Sapag, 2008).

3.6.2 Otros tipos de Criterios

En la teoría se puede mencionar el criterio de periodo de recuperación (PR) de la inversión, el cual determina el número de periodos que se necesitan para recuperar la inversión inicial sobre un proyecto. Si se tienen flujos iguales durante cada periodo, se calcula así:

$$PR = \frac{I_0}{BN} = \frac{I_0}{FC} \quad (3.8)$$

Donde I_0 es la inversión inicial del proyecto y BN es el beneficio neto o diferencia entre ingresos menos egresos, así como también se pueden comparar los flujos de caja (FC). Pero si los flujos cambian durante el tiempo, se tiene que hacer una suma acumulada de estos y observar en qué momento se recupera la inversión inicial.

Se debe considerar que una empresa que toma decisiones eficientes llevaría a cabo un proyecto de inversión con un Valor Presente Neto positivo, o lo que es igual, que su tasa de rendimiento sería mayor a su tasa de descuento.

Sin embargo, como mencionan Sapag y Sapag (2008), este criterio no toma en cuenta las ganancias posteriores al periodo de recuperación, justificando la aceptación del proyecto por un factor de liquidez y dejando de lado el factor de rentabilidad, así como no considera el valor del dinero en el tiempo, al tomar en cuenta lo que se generó por flujos desde el primer hasta el último año. Por lo tanto, lo correcto sería traer a valor presente esos flujos a una tasa de descuento para poder acumularlos, y así poder observar cuando se recupera la inversión.

La tasa de retorno contable (TRC) es un criterio inverso al del periodo de recuperación, ya que, la forma de calcularla es la siguiente:

$$TRC = \frac{BN}{I_0} = \frac{FC}{I_0} \quad (3.9)$$

La expresión anterior se puede describir como la proporción de beneficio neto (BN) o flujo de caja (FC) respecto a la inversión inicial del proyecto. Sin embargo, los criterios antes mencionados tienen sus desventajas, ya que, pueden sobrestimar la rentabilidad del proyecto en curso, es decir no son criterios definitivos ni en los que se deben basar todas las decisiones financieras para continuar o abandonar un proyecto de inversión.

Al valorar un proyecto no se debe olvidar a la tasa interna de retorno para poder tomar decisiones adecuadas, por lo que, Sapag y Sapag (2008), desarrollan y expresan a la tasa de retorno contable (TRC) a partir de la TIR como sigue:

$$I_0 = \frac{BN}{1+r} + \frac{BN}{(1+r)^2} + \dots + \frac{BN}{(1+r)^n} = \frac{FC}{1+r} + \frac{FC}{(1+r)^2} + \dots + \frac{FC}{(1+r)^n}$$

Agrupando términos y expresando la serie, se obtiene:

$$I_0 = \frac{FC}{1+r} * \left[1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}} \right]$$

Despejando r como la TIR resulta que:

$$r = \frac{FC}{I_0} - \frac{FC}{I_0} * \left[\frac{1}{1+r} \right]^n = TRC - TRC * \left[\frac{1}{1+r} \right]^n = TRC * \left(1 - \left[\frac{1}{1+r} \right]^n \right)$$

Finalmente, la tasa de recuperación contable está dada por:

$$TRC = \frac{r}{1 - \left[\frac{1}{1+r} \right]^n}$$

En la valuación de los proyectos de inversión existe otro criterio conocido como razón de beneficio-costo (RBC), en general se utiliza con flujos no descontados, pero se tiene el problema de no considerar el valor del dinero en el tiempo, por lo que, se han hecho adecuaciones a la forma de calcular esta razón. La RBC se puede representar de la siguiente forma:

$$RBC = \frac{\sum_{t=0}^n \frac{Y_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=0}^n \frac{E_t}{(1+i)^t}} \quad (3.10)$$

La expresión anterior considera a Y_t como los ingresos en cada momento del proyecto y a E_t como los egresos incluyendo la inversión inicial, ya que se suma desde $t=0$. Además, si el Valor Presente Neto es positivo, la RBC será mayor a 1, es decir, se está expresando una razón donde en teoría los ingresos deberían ser mayores a los egresos traídos a valor presente.

El Valor Presente Neto Equivalente (VPE) es útil cuando se requiere comparar más de un proyecto y analizar que opción conviene más al inversionista, incluso repitiendo el proyecto las veces necesarias en un periodo fijo de años equivalente para cada uno siempre que se pueda comprobar hacerlo de esta forma, y se preferiría el proyecto con un VPE mayor, en vez de un Valor Presente Neto mayor (Sapag y Sapag, 2008).

Por lo anterior, este criterio se puede calcular de esta forma:

$$VPE = \frac{VPN}{\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t}} \quad (3.11)$$

Se puede observar que la expresión del denominador suma hasta n, es decir, hasta el último periodo que se planea realizar el proyecto.

Los efectos inflacionarios no se pueden olvidar al valuar los flujos reales en vez de los flujos nominales de un proyecto, considerando que en el periodo inicial se presentan condiciones económicas donde la inflación es un factor predominante para tener una moneda constante sobre los flujos de efectivo. Por lo que, el valor presente neto se calcula así:

$$VPN = \sum_{t=1}^n \frac{FC_t}{[(1+i)*(1+\phi)]^t} - I_0 \quad (3.12)$$

Esta expresión toma en cuenta que la inversión inicial, la tasa de descuento y los flujos de caja se traídos a valor presente se encuentran en moneda constante y con el mismo poder adquisitivo al periodo inicial del proyecto, donde $(1+\phi)^t$, representa el factor de descuento de los flujos ajustado por la inflación para cada periodo.

Si se considera la TIR para la valuación, se debe considerar que esta tasa no incluye una medida en términos reales sobre la rentabilidad del proyecto, en consecuencia, se debe calcular una tasa real con base en la TIR y la inflación como sigue:

$$Tasa Real = \frac{TIR - \phi}{1 + \phi}$$

Finalmente se genera la expresión adecuada en términos reales, en vez de nominales, para calcular la rentabilidad del proyecto con inflación, sumando todos los periodos que componen al proyecto como sigue:

$$\sum_{t=1}^n \frac{FC_t}{[(1+Tasa Real)*(1+\phi)]^t} = 0 \quad (3.13)$$

Capítulo 4. Valuación y Aplicación de Opciones Reales

4.1 Situación Económica de México

De acuerdo con datos del Fondo Monetario Internacional (FMI), el crecimiento económico a nivel mundial en 2018 fue de 3.6%, a pesar de ello, se ha aumentado la tasa de interés de la Reserva Federal estadounidense y de diferentes bancos centrales. También se debe mencionar la “*guerra comercial*”, basada en aranceles, impuesta por Estados Unidos a otros países, sobre todo a China y en cierta medida para México, esto ha provocado una desaceleración en la economía de China, lo cual, afecta el dinamismo de la economía global por una menor demanda de bienes y servicios del país asiático, así como la posible salida del Reino Unido de la zona europea. Por lo que, el panorama para concluir el 2019 no es muy alentador, ya que, se prevé que a nivel mundial se crezca 0.2% menos que en 2018 (CAMIMEX, 2019).

En 2018 la economía mexicana creció 2%, aun así, no se alcanzó el objetivo de crecimiento establecido, debido a una baja en la producción de petróleo, una desaceleración en el consumo y un bajo nivel de inversión pública y privada. El Fondo Monetario Internacional (FMI), el Banco Mundial (BM) y el Banco de México (BANXICO), estiman que México crecerá, para el 2019, apenas arriba del 1% o incluso menos, situación desfavorable para el país. A su vez, se estima que la economía de Estados Unidos crecerá 2.3% para 2019, 0.6% menos que en 2018, así como China creció 6.6% en 2018, se espera que crezca 6.3% para 2019 (CAMIMEX, 2019).

La revisión de agosto de 2019 del Producto Interno Bruto (PIB) muestra un crecimiento del 0.0%, para el segundo trimestre de 2019, este dato difiere con el 0.1%

presentado en julio de 2019, donde la caída del sector industrial fue la causa de este ajuste a la baja. Recordando que se tuvo una contracción de 0.2% para el primer semestre de 2019, sin embargo, si se compara el segundo trimestre de 2019 y 2018, la economía mexicana tuvo un crecimiento de 0.3%, según cifras desestacionalizadas del INEGI (Cuevas, 2019).

De acuerdo con datos del INEGI, el sector servicios, que aporta más de 60% del PIB, reportó un avance de 0.2% respecto al primer trimestre de 2019, el comercio minorista tuvo una variación de 1.7%, mientras que los servicios de salud y de asistencia social reflejaron un avance de 0.7%, ambas cifras respecto al mismo periodo. Las actividades secundarias, aquellas que aportan más del 30% del PIB, tuvieron un retroceso del 0.2% para el mismo periodo. El sector de la construcción tuvo su mayor caída en tres años y medio, con una contracción de 2.9%, mientras que el sector minero siguió con su racha negativa de tres años de caídas, al registrar una contracción de 1.1% de marzo a junio de 2019. Las actividades primarias, mismas que aportan alrededor de 8% del PIB, tuvieron una caída de 3.4% respecto al primer trimestre de 2019, lo que significó su mayor caída desde el último trimestre de 2011 (Cuevas, 2019).

4.1.1 Situación del Sector Minero en México

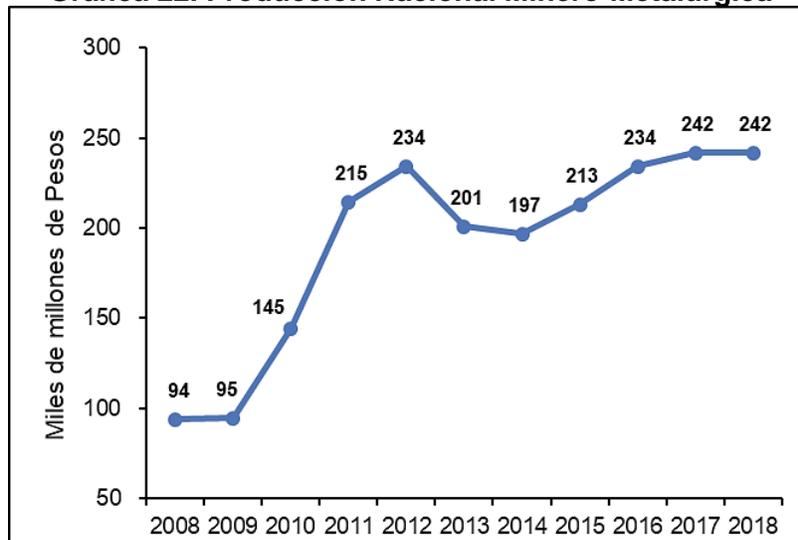
El compromiso del sector minero es continuar trabajando por el desarrollo del país, buscando ser más eficientes en los procesos y reduciendo costos de operación, con el objetivo de conservar empleos, fomentar la seguridad y capacitación de los trabajadores, priorizar el cuidado del medio ambiente y la atención a las comunidades, pero la situación actual dificulta cada vez más la continuidad de las operaciones mineras y la creación de nuevos proyectos como lo era hace 10 años.

Se debe recordar que las inversiones en este sector a nivel mundial tuvieron un comportamiento decreciente después del 2012, al terminar el periodo conocido como el “boom de los commodities”, en consecuencia, el precio internacional de los metales cayó, ya que, a partir del 2013 se tuvieron caídas significativas, causadas, no solo por la baja internacional del precio de los metales mencionada, sino también por la aplicación de nuevas medidas impositivas en el país.

En 2018, el sector minero-metalúrgico representó el 8.2% del PIB industrial y el 2.4% del PIB nacional, donde la actividad metalúrgica aportó el 59% sobre el total del sector y el sector extractivo de minerales metálicos y no metálicos aportó el 41% sobre el total del sector. Además, se generaron 379,020 empleos directos, por lo que, se tuvo un incremento del 2% respecto a 2017 (CAMIMEX, 2019).

Sin embargo, la situación del sector minero se ha ido deteriorando a partir del año 2012, ya que, el crecimiento de las inversiones no ha alcanzado el nivel deseado. El nivel de producción minero-metalúrgica y el flujo de inversiones fueron prácticamente los mismos que los alcanzados en 2017, esto indica que, a pesar de ser uno de los sectores que ha atraído mayor inversión al país, se ha presentado un comportamiento cauteloso debido a factores como una carga tributaria que eleva los costos operativos de las empresas, paros ilegales, anuncios sobre cancelaciones de concesiones y la inseguridad presente en la mayor parte del territorio nacional (CAMIMEX, 2019).

Gráfica 22. Producción Nacional Minero-Metalúrgica



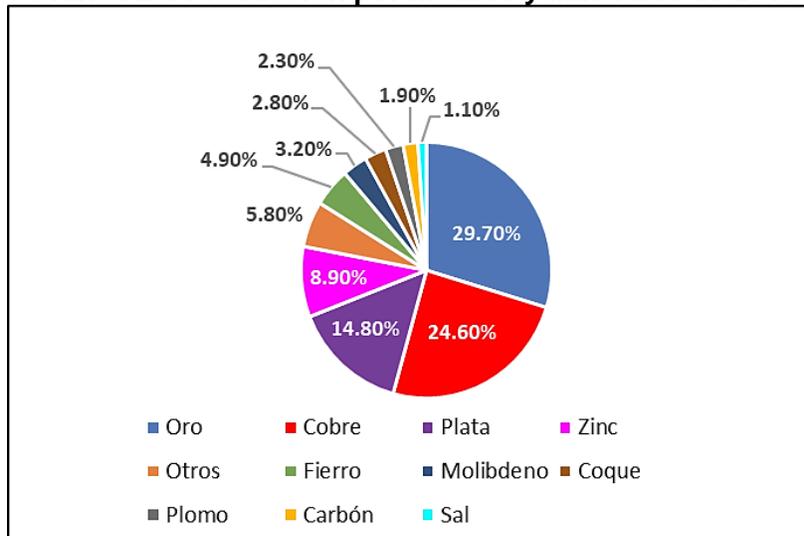
Fuente: Elaboración propia con datos del INEGI (2018).

Por lo anterior, se esperan cumplir nuevos retos con apoyo del gobierno, como una política fiscal minera competitiva a nivel mundial, un sistema ágil y confiable de otorgamiento y administración de concesiones, garantizar la seguridad del personal que labora en empresas mineras y la revisión de la regulación de este sector, etc.

Según las estadísticas de 2018, el precio del cobre creció 6%, el oro y zinc crecieron apenas 1% y el de la plata decreció 8%, por lo tanto, los precios de los principales metales, tanto preciosos como no preciosos, tuvieron crecimientos menores a los de 2017, situación que muestra un estancamiento en este sector, para así poder generar mayores niveles de ventas y mejores porcentajes de rentabilidad. Además, si se toman en cuenta varios años con caídas en los precios internacionales de los metales, minas en operación que alcanzaron su madurez, baja inversión en exploración que ha limitado el desarrollo de nuevos proyectos en el corto y largo plazo, la situación no es favorable, sin embargo, se debe considerar que las empresas mineras se encuentran en una mejor situación financiera, ya que, se han aplicado medidas para reducir costos,

tener menores niveles de deuda y mejores accesos a mercados de deuda y capitales (CAMIMEX, 2019).

Gráfica 23. Producción por Metales y Minerales de 2018

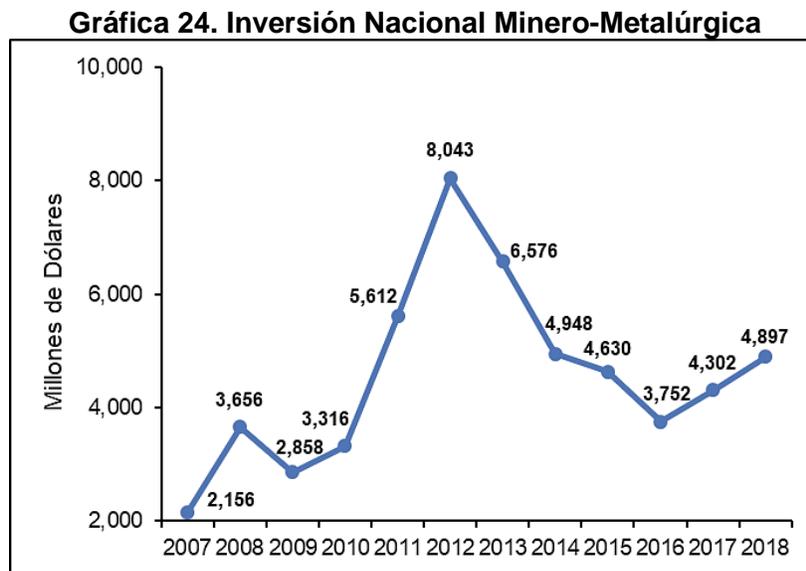


Fuente: Elaboración propia con datos del INEGI (2018).

Se puede observar en la gráfica anterior, que el oro es el metal que más contribuye en la producción minero-metalúrgica con casi el 30%, mientras que el cobre es el segundo metal que contribuye, con alrededor del 25%, y en tercer lugar está la plata con casi el 15%.

Un hecho positivo es que la Cámara Minera de México (CAMIMEX) informó que sus empresas afiliadas tienen el potencial de invertir 26,400 millones de dólares en el país durante el periodo del 2019 a 2024. Ese monto representaría 90.7% del total de las inversiones realizadas por todo el sector, considerando tanto miembros como a no miembros de la Camimex, en el sexenio previo. A su vez, se proyecta que esta industria realizará inversiones por 5,343 millones de dólares en el 2019, un avance de 9.1% (Morales, 2019).

En el 2018, el sector minero invirtió 4,897 millones de dólares, lo que significó un aumento de 13.8% interanual, sin embargo, esta cifra está aún lejos de los 8,043 millones de dólares que se invirtieron en el 2012, cifras que reflejan preocupación y cautela para invertir en el sector minero mexicano. También la inversión en exploración minera tuvo un aumento interanual en México, ya que, el monto por este concepto alcanzó 596 millones de dólares en el 2018, de acuerdo con datos de, es decir, 119 millones de dólares más que en el 2017 (Morales, 2019).



Fuente: Elaboración propia con datos de la SE (2018).

4.1.1.1 Situación de la Empresa Minera Grupo México

En México las empresas líderes en el sector minero son Grupo México® y Peñoles®, la primera es la mayor productora de cobre a nivel nacional, y la segunda es la empresa de mayor producción de zinc a nivel nacional, así como de oro y plata a nivel Latinoamérica, a través de su subsidiaria Fresnillo®.

La división minera de Grupo México ha enfrentado diversos problemas ambientales que generan controversia, sobre si algunos proyectos debieran cancelarse por el daño ambiental que provocan las actividades mineras en ciertas regiones del país o en el extranjero. El más reciente problema surgió por el derrame de 3,000 litros de ácido sulfúrico en el Mar de Cortés, en Sonora, lo que provocó la muerte de algunos animales marinos de esa región, y la discusión sobre el monto de la sanción que debería recibir esta empresa por las autoridades correspondientes.

Analizando la capitalización bursátil, se perdieron 63,136.35 millones de pesos mexicanos en 8 caídas consecutivas de la acción entre 9 y 18 de julio de 2019, lo que se traduce en un valor de 362,158.20 millones de pesos mexicanos al 26 de julio de 2019, en comparación con los 338,958 millones de pesos mexicanos al 19 de julio de 2019, entonces esta ha sido la mayor caída en el valor de la acción derivado de un incidente que implica pérdidas humanas o algún tipo de daño ambiental. A pesar de ello, esta empresa ha recuperado 43.4% del valor perdido, ya que, la cantidad derramada no se consideró tan grande, así como en estos momentos se reportan incrementos en dos de las tres divisiones de Grupo México® con un volumen de ventas del cobre que creció 14.4% en el segundo trimestre, lo que contrarrestó la caída del 10% anual de dicho metal (Tejeda, 2019).

También Grupo México® ha enfrentado problemas laborales como huelgas en diversas minas, debido a que los trabajadores, a través de los sindicatos, exigen mejores condiciones laborales y de seguridad, estas situaciones han repercutido, en diferentes épocas, en el desempeño y valor de mercado de la empresa. El 30 de julio de 2019 se conmemoran 12 años de la huelga iniciada en la mina Buenavista del Cobre, en Sonora.

Según Fuentes (2019), esta empresa minera ha recibido 333 concesiones de diversas secretarías desde el sexenio de Carlos Salinas de Gortari hasta el de Enrique Peña Nieto con vigencia hasta el año 2063, de acuerdo con la revisión del Portal de Transparencia del Instituto Nacional de Acceso a la Información (INAI), por lo que, ha sido objeto de varias denuncias por las irregularidades con las que opera, ya que, como ha causado derrames de sustancias tóxicas en ríos y mares, y provocado daños a la salud en habitantes de esas regiones, no se le han cancelado algunas de esas concesiones.

El artículo 43 de La Ley Minera menciona que el derecho para realizar las obras y trabajos se suspenderá cuando se ponga en peligro la vida o integridad física de los trabajadores o de los miembros de la comunidad, o causen daño a bienes de interés público. A su vez, el presidente, Andrés Manuel López Obrador, en una conferencia matutina, llamó a una mesa de diálogo para buscar acuerdos entre empresas mineras y sindicatos, convocando a los dirigentes sindicales y a los empresarios para poder avanzar en temas laborales y ambientales (Fuentes, 2019).

Esta empresa tiene casi 130 años en el negocio minero, y en menos de 5 años, ha aumentado 26.5% su producción de cobre, esperando que para 2027 se alcancen dos millones de toneladas. Por lo que, se tienen previstos proyectos como el reinicio de la mina San Martín, en Zacatecas, la construcción de una concentradora en Buenavista del Cobre y la construcción de una mina a tajo abierto en Pilares, ambas en Sonora, así como la expansión de Toquepala y la construcción de la mina Tía María, ambas en Perú, etc. (Lara, 2019).

El precio de la acción de Grupo México® ha tenido un crecimiento del 25.57% a julio de 2019, en contraste con otras empresas mineras que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV). Esta empresa se sigue expandiendo con un bajo nivel de apalancamiento, a pesar de una desaceleración en los precios y menor producción en algunos metales. El crecimiento de la acción también se debe a que se ha tenido un mejor desempeño financiero en comparación con las otras empresas mineras del sector, ya que, en 2018 la acción tuvo una caída anual del 29.93%, y cerró con un precio de 40.44 pesos por acción (Tejeda, 2019).

El precio del cobre ha caído casi 20% desde sus máximos presentados en junio de 2018, antes de que el presidente de los Estados Unidos, Donald Trump, iniciara una disputa comercial con China, afectando las expectativas económicas de ambos países. Este acontecimiento es importante, ya que, China es responsable de casi la mitad de la demanda mundial de cobre.

Sin embargo, Grupo México® cuenta con reservas de cobre para los próximos 50 años y es una de las mineras con el costo de extracción más bajo. La división de transportes de esta empresa tiene una estrategia con el actual gobierno del presidente de México, Andrés Manuel López Obrador, para apoyar con el transporte de combustibles por tren. Sin importar la incertidumbre causada por los cambios a la Ley Minera, su salud financiera es sólida, y su diversificación deberá apoyar el crecimiento a futuro (Lara, 2019).

Gráfica 25. Cronología de Problemas Ambientales y Laborales



Fuente: Milenio (2019).

4.2 La Beta

El indicador Beta se interpreta como el riesgo que tiene la empresa asociado con el riesgo del mercado o como la sensibilidad específica al riesgo no diversificable del mercado, es decir, cuánto riesgo tiene asociado la acción de la empresa con respecto al Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), si se tiene una Beta mayor a 1, significa que la acción tiene mayor riesgo que el mercado, pero sí la Beta es menor a 1 indica un menor riesgo, y si fuera igual a 1, se tendría el mismo riesgo.

La Beta ayuda al inversionista a encontrar la tasa de descuento óptima para compensar el riesgo no diversificable y sistemático, al relacionar el activo con la volatilidad del mercado. Este indicador se calcula de la siguiente forma mediante la covarianza y varianza:

$$\beta = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)}$$

De manera alternativa, se puede aplicar una regresión lineal a los datos del activo y del índice seleccionado, teniendo como variable dependiente los rendimientos de los precios de alguna acción y como variable independiente los rendimientos del índice, por lo que el coeficiente Beta de la regresión debe ser casi igual al calculado por la ecuación anterior.

4.2.1 La Beta de Grupo México

Para determinar adecuadamente el cálculo del indicador Beta, se propone hacerlo por medio de empresas comparables del sector minero a nivel mundial, en específico, que basan sus extracciones en el cobre como lo hace Grupo México®. La siguiente tabla ilustra cada uno de los cálculos:

Tabla 3. Empresas Mineras de Cobre Comparables

Información de Compañías Comparables							
Compañías Mineras de Cobre	Beta Apalancada	Valor de Mercado de la Deuda	Valor de Mercado del Capital	Deuda/Capital	Capital/(Deuda +Capital)	Tasa de Impuestos Corporativa	Beta Desapalancada
Río Tinto	1.22	\$17,464.20	\$78,699.47	22.19%	81.84%	27.74%	1.05
Freeport-McMoran	1.66	\$15,156.00	\$19,080.42	79.43%	55.73%	27.87%	1.05
Glencore	1.62	\$29,206.40	\$53,662.21	54.43%	64.76%	34.75%	1.20
Anglo American	1.56	\$12,730.60	\$22,968.41	55.43%	64.34%	27.40%	1.11
Antofagasta	1.30	\$1,959.46	\$10,580.56	18.52%	84.37%	43.30%	1.18
Promedio	1.47	\$15,303.33	\$36,998.21	46.00%	70.21%	32.21%	1.12

Fuente: Elaboración propia

La Beta apalancada de cada compañía se obtuvo con los rendimientos semanales de la acción de cada una y el índice de la bolsa valores del país correspondiente, publicados en el sitio web de Investing®. Para Río Tinto®, Glencore®, Anglo American® y Antofagasta® se utiliza el índice FTSE 100 de Inglaterra, mientras que a Freeport-McMoran® se le asocia el S&P 500 de Estados Unidos, también, se aplica el ajuste de Bloomberg® a cada Beta, es decir, multiplicándola por 2/3 y sumándole 1/3.

Después se extrajeron los datos anuales del nivel de deuda (a largo plazo) y capitalización del mercado de la base de datos financieros S&P Capital IQ® y la tasa de impuestos corporativa de cada compañía para el periodo de 2014 a 2018, y se procede a calcular un promedio de cada indicador y calcular las razones Deuda/Capital y Capital/(Deuda + Capital), para finalmente obtener la beta desapalancada al promediar la de todas las compañías.

Con base en lo anterior, se calcula la beta reapalancada de Grupo México®, la cual resultó ser de 1.31, al apalancarla nuevamente con el nivel de deuda objetivo y tasa de impuestos corporativa objetivo de Grupo México®, esta tasa considera el promedio de las tasas de impuestos de los últimos 5 años.

La siguiente tabla muestra estos resultados:

Tabla 4. La Beta de Grupo México

Cálculo de la Beta				
Grupo México	Beta Desapalancada	Deuda/Capital Objetivo	Tasa de Impuestos Objetivo	Beta Reapalancada
	1.12	46.00%	46.57%	1.39

Fuente: Elaboración propia

4.3 Costo de Capital

La variable K_p es el costo de capital y se calcula por medio del modelo *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), donde este se define como:

$$K_p = r_f + \beta * (r_m - r_f) + CR$$

La variable r_f se asocia con la tasa libre de riesgo de una economía, en este caso la de Estado Unidos, y se considera la tasa del bono a 10 años. Además, si las tasas de

interés fluctúan positivamente, mayor será el costo de capital y menor el valor presente neto de los proyectos de inversión a evaluar.

La variable r_m representa la rentabilidad esperada obtenida por el índice S&P 500 del mercado bursátil estadounidense en un cierto horizonte de tiempo. Finalmente, a la diferencia entre r_m y r_f se le conoce como prima de riesgo o *equity risk premium*, es decir, lo que los inversionistas reciben como bonificación por invertir en activos de otro mercado.

La variable CR se refiere al riesgo país o *country risk*, en este caso, se añade el correspondiente para México del sitio web de Damodaran, ya que, Grupo México® es una empresa mexicana y se está valuando solo la parte del negocio minero en nuestro país.

4.4 La Tasa de Descuento

La tasa de descuento con la que se traen los flujos de caja descontados a valor presente para 5 años se obtiene por medio del cálculo de la WACC o mejor conocida como el Costo de Capital Promedio Ponderado, la cual considera ponderar el volumen de Deuda y Patrimonio que posee la empresa de nuestro interés y utilizando la tasa de impuestos relacionada que paga ésta, lo anterior sigue la teoría desarrollada por Modigliani-Miller, quienes formularon los fundamentos de este modelo. Por lo anterior, el cálculo de la WACC se puede expresar como sigue:

$$WACC = K_d * (1 - t) * \frac{D}{D + E} + K_p * \frac{E}{D + E}$$

Donde Kd es el costo de deuda de la empresa, considerando, en este caso, la tasa del bono con mayor duración en dólares americanos, si la empresa no tiene deuda en instrumentos de renta fija, entonces se calcularía con la tasa de interés que pagaría por préstamos a largo plazo.

La variable t , se refiere a la tasa de impuestos que paga la empresa, la variable D es la deuda a largo plazo y E es el patrimonio o *equity* de la empresa, así como Kp es el costo de capital, el cual, se calcula por medio del modelo CAPM.

4.4.1 La Tasa de Descuento para Grupo México

Al aplicar las variables definidas previamente y el modelo CAPM, se obtiene la tasa de descuento (WACC) para Grupo México® de esta forma:

Tabla 5. La WACC de Grupo México

Variables		Consideraciones
Estructura de Deuda y Capital		
%Deuda	29.79%	1-%Capital
%Capital	70.21%	El objetivo para Grupo México
Costo de Capital - Kp		
Tasa Libre de Riesgo (Rf)	2.69%	Tasa del bono de E.U.A. a 10 años al 31 diciembre de 2018
Retorno del Mercado (Rm)	9.01%	El rendimiento del S&P 500 de 2010 a 2018
Prima de Riesgo	6.32%	Equity Risk Premium (Rm-Rf)
Beta Apalancada	1.39	La Beta calculada para Grupo México
Riesgo País de México	1.67%	Country Risk Premium
Kp	13.16%	
Costo de Deuda - Kd		
Costo de Deuda	5.88%	Tasa del Bono con vencimiento a 2045 de Grupo México en dólares
Tasa de Impuestos Corporativa	46.57%	Tasa de impuestos para Grupo México
Kd	3.14%	
WACC	10.18%	Costo de Capital Promedio Ponderado

Fuente: Elaboración propia.

4.5 Proyección de los Estados de Resultados

La proyección se desarrolla para el periodo 2019 a 2023, es decir, se proyectan 5 años con base en la información histórica de los estados de resultados anuales de 2014

a 2018 de Grupo México®, obtenida de los reportes financieros publicados en su sitio web. Se considera solo la parte del negocio del sector minero que se lleva a cabo en México, excluyendo a los demás países de América, Asia y Europa, donde se tiene destinado otro presupuesto para diversos proyectos mineros.

4.6 El Valor Presente de Grupo México

La proyección del estado de resultados es indispensable para obtener el nivel de ventas, costos fijos y variables, impuestos, así como el margen operativo y neto para poder calcular los flujos de caja y traerlos a valor presente. Esta proyección se encuentra en el correspondiente anexo.

Los flujos de caja libres anuales se traen a valor presente con la tasa de descuento, que, en este caso, se utiliza la WACC. Por lo que, con los flujos de caja libre y el valor terminal descontados se obtiene el Valor Presente de la Empresa como sigue:

$$VPE = \frac{\text{Flujo de Caja 1}}{(1 + WACC)^1} + \frac{\text{Flujo de Caja 2}}{(1 + WACC)^2} + \frac{\text{Flujo de Caja 3}}{(1 + WACC)^3} + \frac{\text{Flujo de Caja 4}}{(1 + WACC)^4} + \frac{\text{Flujo de Caja 5} + \text{Valor Terminal}}{(1 + WACC)^5}$$

Sustituyendo los valores en millones de dólares, se tiene que:

$$VPE = \frac{180.81}{(1 + 10.2\%)^1} + \frac{202.43}{(1 + 10.2\%)^2} + \frac{223.64}{(1 + 10.2\%)^3} + \frac{243.98}{(1 + 10.2\%)^4} + \frac{262.85 + 4,079.28}{(1 + 10.2\%)^5}$$

Realizando los cálculos, se obtiene un valor presente para la división minera en México de Grupo México® de 3,338 millones de dólares, el cual, se establece como valor del subyacente de la opción real, que más adelante se desarrolla.

4.7 Simulaciones y Volatilidad

De acuerdo con Mun (2006), la variable volatilidad es una variable importante y sensible de calcular, así que, se propone una metodología para poder calcularla con base en los flujos de caja descontados de un proyecto. Él propone definir un valor inicial como $X = Ln\left(\frac{VPN_{t+1}}{VPN_t}\right)$, expresión que proviene del cálculo de los log-retornos de una acción, es decir, $r_{t+1} = Ln\left(\frac{Precio_{t+1}}{Precio_t}\right)$, entonces, el valor inicial se puede expresar a través de la variable $X = Ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n VPFC_i}{\sum_{i=0}^n VPFC_i}\right)$, en consecuencia, se tienen que calcular dos valores presentes netos, uno sin desfase y otro desfasado por un tiempo.

Esta idea se resume en la siguiente tabla con cifras expresadas en millones de dólares:

Tabla 6. Aproximación Logarítmica del Valor Presente

Año	t	Flujos de Caja Libres	VP sin desfase	VP con desfase
2018	0	-	-	-
2019	1	\$180.81	\$164.11	\$180.81
2020	2	\$202.43	\$166.76	\$183.73
2021	3	\$223.64	\$167.22	\$184.23
2022	4	\$243.98	\$165.57	\$182.42
2023	5	\$262.85	\$161.90	\$178.37
		Total	\$825.56	\$909.58

Fuente: Elaboración propia.

El desfase implica que el primer flujo de caja de 2019 se descuenta con t=0, para 2020 se descuenta con t=1, y así sucesivamente hasta 2023, descontando con t=4, de esta forma se presenta el valor presente desfasado, al sumar cada flujo descontado.

Sin embargo, no se debe confundir el total de los valores presentes a tiempo 0 y 1 con el valor presente neto, el cual incluye la inversión inicial del proyecto, además este trae los flujos de caja a partir de t=1 sin considerar ningún desfase.

Por lo anterior, la idea de esta metodología no solo es quedarse con el logaritmo de los flujos del valor presente con desfase, sino proponer una modelación matemática más eficaz y precisa al desarrollar una simulación de Monte Carlo.

Sabiendo que el método del flujo de caja descontado es determinista, se pueden ajustar los resultados a una distribución de probabilidad al simular miles de veces los resultados calibrando ciertos parámetros que repercuten en cada flujo de caja por año.

A su vez, el enfoque estático del valor presente neto reacciona ante el aumento de la volatilidad ajustando el tipo de descuento, debido a que una mayor volatilidad se percibe como un mayor riesgo que afecta al proyecto, lo que lleva a un menor resultado estimado, generando conflictos en las expectativas del proyecto. En contraste a esto, el análisis de las opciones reales incorpora la flexibilidad de las interacciones de gestión y, por lo tanto, permite al inversionista poder adaptarse a ambas vertientes posibles del movimiento de la volatilidad (Kircher, 2015).

Asimismo, se debe tener presente que al calcular la volatilidad y el factor en los modelos de opciones se represente por una variable combinada, y existen múltiples factores de riesgo que influyen en la incertidumbre de los flujos de efectivo del activo subyacente, es decir, variables internas y externas que repercuten en éstos.

En consecuencia, Kodukula y Papudesu (2006), (citados en Kircher, 2015), proponen como primera opción para abordar a la volatilidad, retener toda la varianza por separado cuando se asume que las variables no están correlacionadas, y se desarrollan de manera diferente en el horizonte de tiempo visualizado e influyen en el valor del objeto

en direcciones opuestas. Como segunda opción, proponen combinar todos los factores de riesgo individuales en una variable fusionada y representativa.

Adicionalmente, Kodukula y Mun (2006), (citados en Kircher, 2015), proponen distintos métodos para calcular la volatilidad como los Retornos Logarítmicos de Flujo de Caja o método de Retorno Logarítmico de Precios de Acciones, modelos GARCH por medio de series de tiempo, los cuales son más complejos de implementar, ya que, requieren de conocimientos especializados en econometría, y también otro método que se basa en utilizar una aproximación del mercado usando índices o comparables.

Otro método propuesto, es el enfoque Logarítmico del Valor Presente de los Retornos, el cual, fue utilizado en este caso para generar las simulaciones correspondientes, y con mayor precisión la volatilidad.

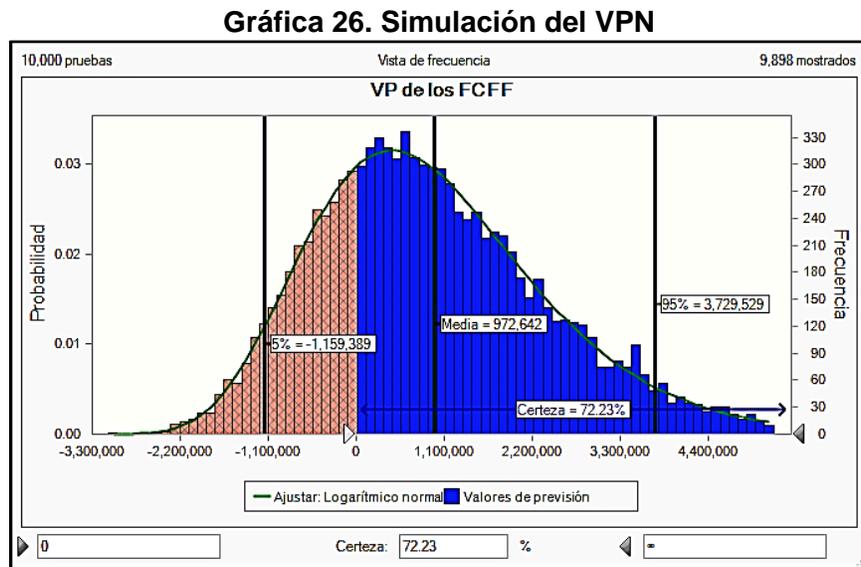
Dado lo anterior, con ayuda del software Crystal Ball® se desarrollan 10,000 simulaciones de los valores presentes de 2019 a 2023 y del valor presente total, el cual, considera la suma de los demás valores presentes, tomando en cuenta las variables que influyen en los flujos de caja libres, como los crecimientos de ingresos por ventas, gastos operativos, capital de trabajo y gastos de capital. Dichos crecimientos se ajustaron a una distribución normal con base en su comportamiento histórico, por medio de este software.

Además, Mun (2006) menciona que las simulaciones se deben realizar sobre el valor presente desfasado y no simular el valor presente sin desfase, es decir, el numerador se simula y el denominador queda fijo, ya que, en la teoría de opciones reales, la variabilidad de los flujos de caja traídos a valor presente es el factor clave para valuar una opción, y no la variabilidad de la tasa descuento calculada anteriormente.

Por lo tanto, no se desarrolla una simulación de Monte Carlo para la tasa de descuento, debido a que se tendrían diferentes valores, entonces la tasa de descuento, en este caso la WACC, queda fija para cada simulación, y por medio de este enfoque, se pueden reducir los riesgos de tener flujos de caja correlacionados entre sí dentro de la simulación, permitiendo obtener resultados más homogéneos y realistas.

4.7.1 La Simulación del Valor Presente Neto

Se obtienen los siguientes resultados al correr las 10,000 simulaciones con este software:



Fuente: Elaboración propia.

La distribución para las simulaciones arroja que con un 72.23% de probabilidad se tiene un Valor Presente Neto positivo, lo cual, indica que con una probabilidad de casi 28% se tendrían pérdidas dentro del proyecto, aun así, se genera mayor certidumbre al analizar miles de escenarios, en vez de quedarse solo con un dato convencional, y mejorar las decisiones que se pueden tomar.

Calculando el logaritmo de cada simulación del valor presente desfasado, y al dividirlo entre el valor presente sin desfase, el cual se fijó, se obtuvieron 10,000 resultados y después se calcula la desviación estándar a esta serie de cocientes, teniendo como resultado una volatilidad del 44.10%, la cual, se utiliza para poder calcular el valor de la opción real elegida para el proyecto de inversión minero de Grupo México®.

4.8 La Opción Real para un Proyecto Minero

En esta sección del capítulo 4 se calcula el precio de la opción real para el proyecto en la mina de Buenavista del Cobre, en Sonora, que planea iniciar Grupo México® en 2018, con la expectativa de terminarlo para el año 2021, y comenzar a tener flujos a partir del año 2022.

4.8.1 Los Proyectos Mineros en el Mundo

Expertos internacionales indican que existen alrededor de 3,546 propiedades que se encuentran en la etapa de exploración avanzada, donde esta etapa es la vía para futuras minas, con base en un registro y análisis de alrededor de 28,000 propiedades en todo el mundo en diversas etapas de desarrollo. La industria aún no cuenta con descubrimientos recientes que sustente futuras demandas, por ejemplo, el cobre enfrenta un crecimiento de déficit de suministro.

El reporte “Tendencias de Exploración Mundial 2019” elaborado por *S&P Global Market Intelligence*, muestra que en 2018 el gasto de la exploración básica en etapa inicial fue del 35%, para etapas avanzadas se tuvo un gasto de 39% y en sitio de mina del 26%, entonces, la exploración se enfoca en proyectos “*brownfield*”, es decir, proyectos que se encuentran dentro de los límites de las minas en operación, ya sea

para reponer reservas o ampliar producción existente, aunque se le debe dar importancia a iniciar proyectos enfocados para localizar nuevas minas como los proyectos “greenfield”.

Además, este reporte indica que, aunque mejoraron las condiciones del mercado en 2017 y 2018 respecto a años anteriores, la proporción de los presupuestos dirigidos a la exploración básica cayó a un mínimo histórico de 26% en 2018. Los metales más favorecidos fueron el oro, con poco más de la mitad de la exploración gastada en su búsqueda, mientras que el cobre fue el metal base de más interés con un 22% de los gastos de exploración, así como los metales para baterías fueron atractivos para 2018, ya que, el litio tuvo un aumento del 58%. La cantidad de perforaciones (49,239) y de proyectos activos (1,261) en todo el mundo aumentaron en 14% y 11%, respectivamente en 2018.

La siguiente gráfica muestra el número de proyectos mineros por etapas:



Fuente: Elaboración propia con datos de S&P Market Intelligence (2019).

Se debe considerar que el sector minero se caracteriza por altas inversiones, periodos de estudio o investigación a largo plazo. Al iniciar operaciones, la mina tiene una vida útil que depende de las reservas minerales que se encuentran dentro de ésta, así como el cierre de una mina requiere tiempo y dinero. La exploración en una concesión minera también requiere de investigación a largo plazo con riesgos altos e inversiones considerables, por lo que, se necesitan incentivos que motiven a las empresas mineras para explorar nuevos yacimientos, entonces se deben iniciar nuevos proyectos de inversión que impulsen el desarrollo del sector minero, generando que los niveles de Inversión Extranjera Directa suban y contribuyan al desarrollo del país.

4.8.1.1 Los Proyectos Mineros en México

De acuerdo con datos de *S&P Global Market Intelligence*, en México, la inversión asignada a la exploración minera fue de 596 millones de dólares, entonces, se tuvieron 119 millones de dólares más que en 2017, así que, el sector minero mantuvo el programa de proyectos que previamente habían sido autorizados, donde la inversión ejercida por las empresas afiliadas a CAMIMEX, en 2018, fue de 446 millones de dólares.

En la siguiente tabla se muestra la inversión, en millones de pesos mexicanos, que se tuvo en 2018 y la estimada para 2019.

Tabla 7. Inversión en Mineras Afiliadas y no Afiliadas

Afiliadas	2018	2019
Exploración	446	382
Expansión de proyectos	846.4	841.7
Nuevos proyectos	324	770
Capacitación y productividad	39.3	34.7
Adquisición de equipo	714	704
Medio ambiente	131.5	153
Seguridad y salud en el trabajo	70	71
Seguridad patrimonial	32.9	40.1
Desarrollo comunitario	25	28
Energías limpias	20	24.2
Investigación y Desarrollo Tecnológico	15	56
Apoyo a comunidades	28.2	22.4
Mantenimiento	483	504
Otros	1,070	935
Subtotal	4,244	4,567
No Afiliadas	2018	2019
Exploración	150	180
Activos	503	596
Subtotal	653	776
Total	4,897	5,343

Fuente: Elaboración propia con datos de CAMIMEX (2019).

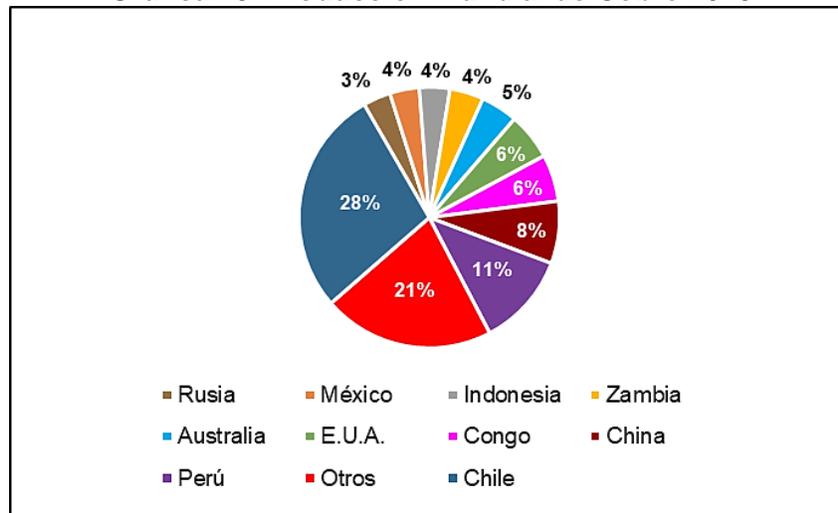
Se observa que la expansión de proyectos tiene la mayor proporción sobre el total de la inversión minera del 17.29% y 15.75% para 2018 y 2019, respectivamente, le siguen la adquisición de equipo, con el 14.57% y 13.18%, y mantenimiento, con el 9.86% y 9.44%, para el mismo periodo.

Actualmente se cuentan con 1,189 proyectos mineros, de los cuales, el estado de Sonora tiene la mayor cantidad de ellos, ya que, cuenta con 268 proyectos, le siguen Chihuahua y Durango con 161 y 123, respectivamente. A pesar de que el sector minero se encuentra activo, se debe promover la inversión en exploración minera en México, ya que, el monto de inversión sigue siendo de acceso limitado (CAMIMEX, 2019).

4.8.2 La Producción de Cobre en el Mundo

El aumento en 2018 en la producción minera mundial, que se estima en alrededor de 440,000 toneladas de cobre, se debió principalmente a la producción limitada alcanzada en 2017, principalmente en Chile, Indonesia y República Democrática del Congo, y, a una tasa baja de interrupciones en los programas anuales de producción minera. Se puede decir que, en cierta medida, el mejor desempeño en la producción de 2018 se debe al mal desempeño en la operación de las minas registrado en 2017. La producción en Chile, el mayor productor de cobre de minas del mundo aumentó su extracción en 6%, principalmente porque la producción en el primer trimestre de 2017 se vio restringida por una huelga en la Escondida, la mina de cobre más grande del mundo (CAMIMEX, 2019).

Gráfica 28. Producción Mundial de Cobre 2018



Fuente: Elaboración propia con datos de la USGS (2019).

Se puede observar que, dentro de los 10 principales países productores de cobre en el mundo, México ocupa el lugar 9, mientras que Chile es el país con mayor producción a nivel mundial.

Las minas y empresas mineras que produjeron los mayores niveles de cobre en 2018 a nivel mundial se pueden ver en la siguiente tabla:

Tabla 8. Principales Minas y Empresas de Cobre 2018

Ranking	Mina	Miles de Toneladas	%	Compañía	Miles de Toneladas	%
1	Escondida	1,246	6	CODELCO	1,736	8.4
2	PT Freeport Indonesia	600	2.9	Freeport-McMoRan	1443	7.0
3	Collahuasi	545	2.6	Glencore	1,391	6.7
4	Cerro Verde	480	2.3	BHP Billiton	1152	5.6
5	Morenci	449	2.2	Southern Copper	895	4.3
6	Buenavista del Cobre	430	2.1	Rio Tinto	657	3.2
7	Chuquicamata	427	2.1	KGHM Polska Miedz	567	2.7
8	Antamina	425	2.0	First Quantum Minerals	559	2.7
9	Norilsk	422	2	Antofagasta PLC	487	2.3
10	El Teniente	415	2.0	Nornickel	452	2.2
11	Las Bambas	385	1.9	Anglo American PLC	450	2.2

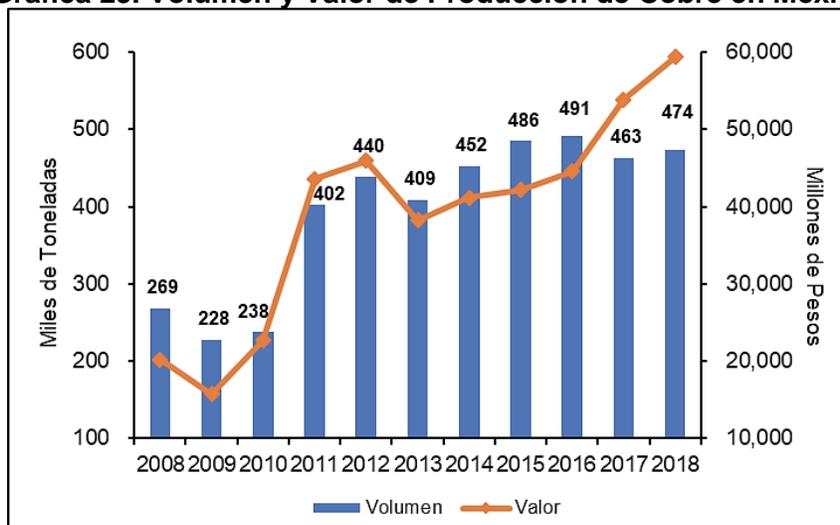
Fuente: Elaboración propia con datos de Wood Mackenzie (2019).

En conjunto, estas 11 minas aportan el 28.1% de la producción mundial de cobre, así como las 11 principales compañías aportan el 47.3% de la producción mundial de cobre. Cabe destacar que la mina Buenavista del Cobre, perteneciente a la empresa Grupo México®, está en el puesto 6 de las principales minas de cobre en el mundo.

4.8.2.1 La Producción de Cobre en México

Con base en estadísticas del INEGI, se muestra información histórica del volumen y a valor de la producción de cobre.

Gráfica 29. Volumen y Valor de Producción de Cobre en México

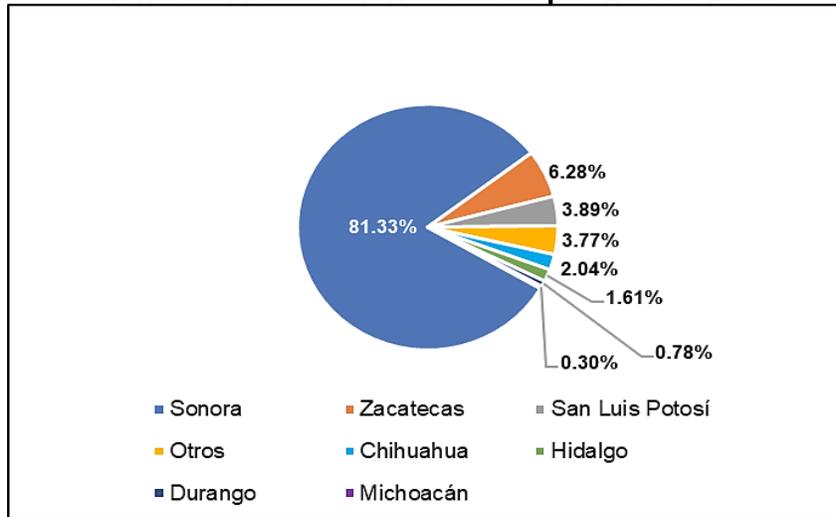


Fuente: Elaboración propia con datos del INEGI (2018).

Para 2018 el volumen fue de 473,612 toneladas de cobre a nivel nacional, las cuales tuvieron un valor de 59,371 millones de pesos, en comparación con 2017, periodo en el que se tuvo un volumen de 463,349 toneladas con un valor de 53,917 millones de pesos, es decir, se tuvo un aumento del 10.12% en toneladas producidas y del 2.21% sobre el valor de producción. Dicho valor ha ido en aumento, ya que, los precios internacionales del cobre se cotizan en dólares, y esta moneda se ha apreciado sobre el peso mexicano, principalmente, a partir de 2013.

En la siguiente gráfica se observan las principales empresas mineras en México con su participación en la producción del cobre a nivel nacional.

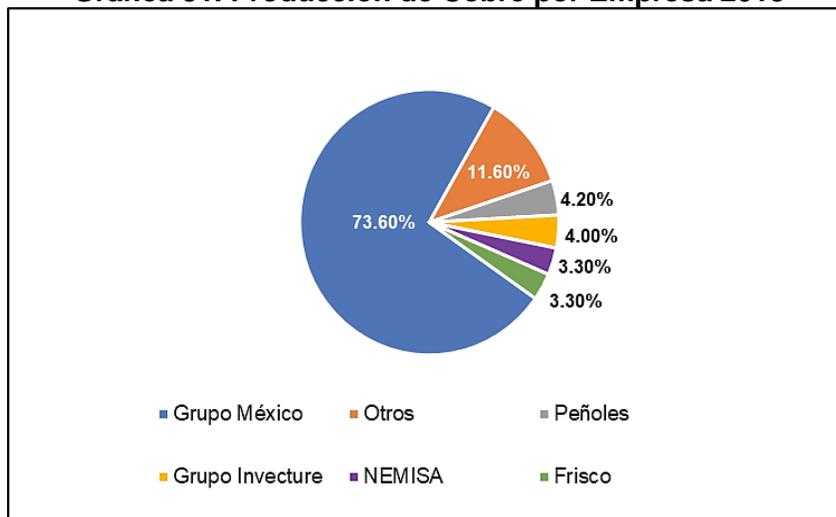
Gráfica 30. Producción de Cobre por Estado 2018



Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI (2018).

El estado donde más se produce cobre es Sonora, con más del 81% de la producción nacional, seguido de Zacatecas, con casi el 6.3%.

Gráfica 31. Producción de Cobre por Empresa 2018



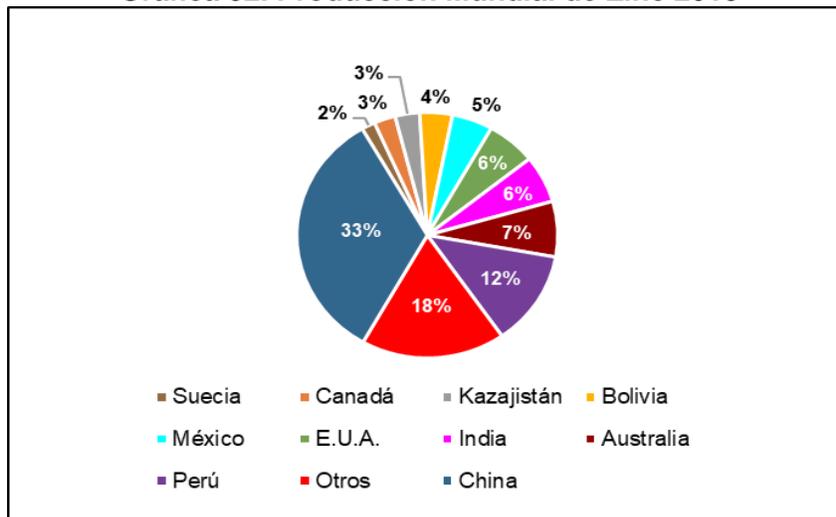
Fuente: Elaboración propia con datos de CAMIMEX (2019).

Durante 2018, Grupo México® fue la empresa líder en producción de cobre, con casi el 74% de la producción nacional.

4.8.3 La Producción de Zinc en el Mundo

De acuerdo con el *International Lead and Zinc Study Group* (ILZSG), el mercado mundial del zinc tuvo un crecimiento del 2% con respecto al año anterior, alcanzando un total de 12.9 millones de toneladas. El ILZSG proyecta un volumen de producción minera de 13.9 millones de toneladas en 2019, esto representaría un crecimiento de 7.7% con respecto a 2018, impulsado por varios proyectos que ya iniciaron operaciones y se encuentran en etapa de alcanzar su nivel de operación comercial, entre éstos sobresalen: New Century (270,000 toneladas anuales) y Gambserg (250,000 toneladas anuales), que iniciaron en 2018, así como Dugald River (170,000 toneladas anuales) que comenzó en 2017 y el proyecto Woodland, cuyo inicio se espera en el primer trimestre de 2019.

Gráfica 32. Producción Mundial de Zinc 2018



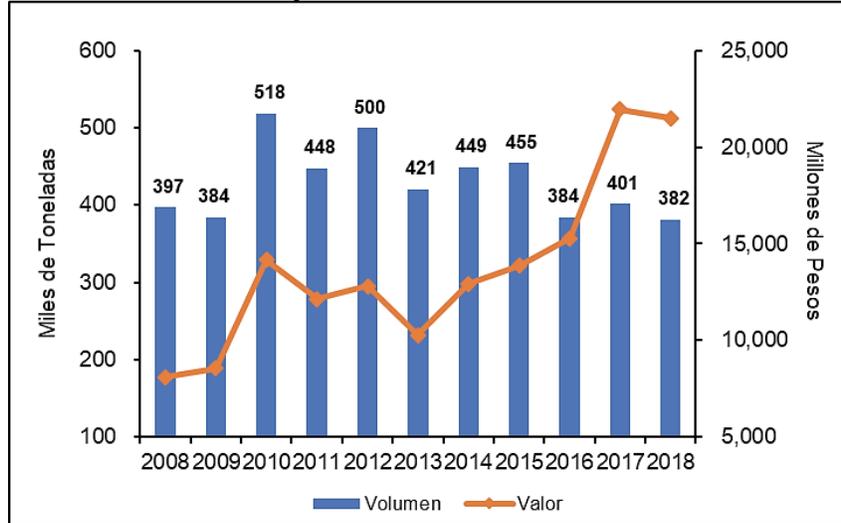
Fuente: Elaboración propia con datos de la USGS (2019).

China sigue siendo el mayor productor de zinc, con el 34% de participación a nivel mundial, mientras que México ocupa el sexto lugar entre los 10 países productores líderes, con el 5% de participación.

4.8.3.1 La Producción de Zinc en México

Con base en estadísticas del INEGI, se obtuvo la siguiente información histórica:

Gráfica 33. Volumen y Valor de Producción de Zinc en México



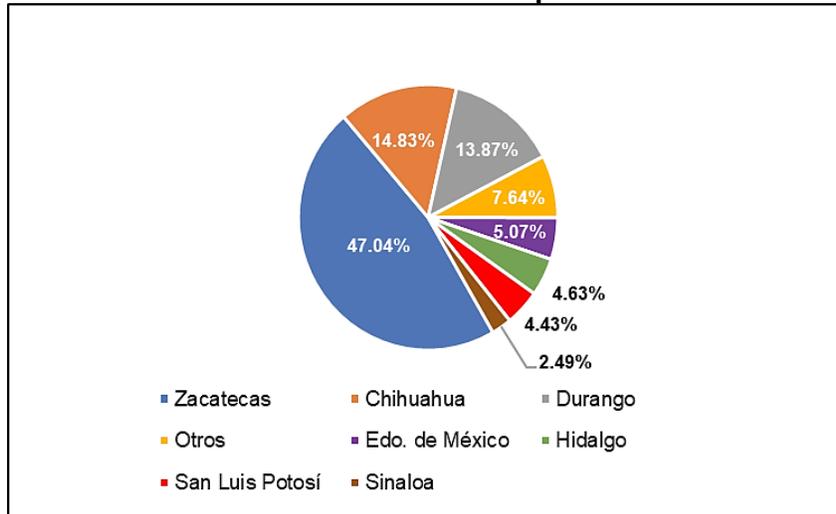
Fuente: Elaboración propia con datos de INEGI (2018).

Durante 2018 el volumen fue de 381,521 toneladas de zinc a nivel nacional, las cuales tuvieron un valor de 21,500 millones de pesos, en comparación con 2017, periodo en el que se tuvo un volumen de 401,479 toneladas con un valor de 21,952 millones de pesos, es decir, se tuvo una contracción del 4.97% en el volumen de producción, así como una caída del 2.06% sobre el valor de producción. Además, se puede observar que el valor de producción ha ido aumentando, ya que, el precio internacional de cotización del zinc se ha recuperado, además, este se compra y vende en dólares, moneda que ha aumentado su valor sobre el peso mexicano, en especial, a partir de 2013.

El estado de Zacatecas tiene la mayor producción de zinc en México, con más del 47%, seguido de Chihuahua, con casi el 15%.

La siguiente gráfica muestra la producción por los principales estados:

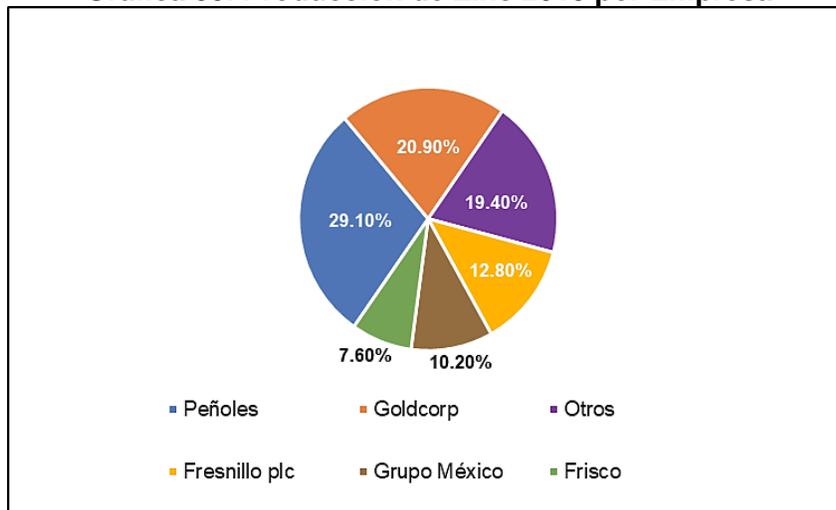
Gráfica 34. Producción de Zinc por Estado 2018



Fuente: Elaboración propia con datos del INEGI (2018).

La siguiente gráfica muestra la producción nacional de zinc en 2018 por empresa:

Gráfica 35. Producción de Zinc 2018 por Empresa



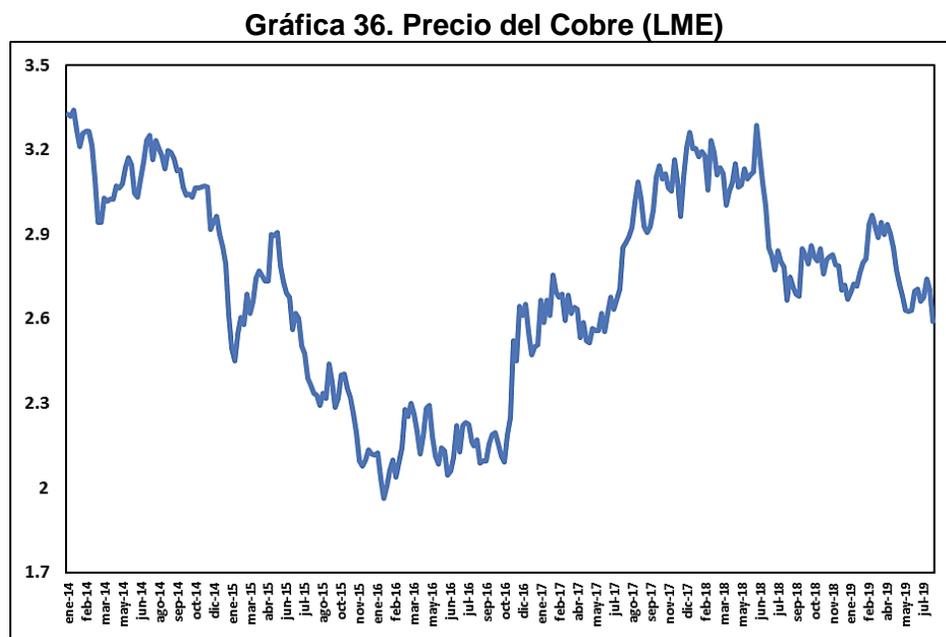
Fuente: Elaboración propia con datos de CAMIMEX (2019).

La empresa minera Peñoles® tiene casi el 30% de participación en el mercado de este metal, mientras que Grupo México® está en cuarto lugar de las 5 empresas líderes de producción, con un 10.2% de participación (CAMIMEX, 2019).

4.8.4 La Proyección de los Precios del Cobre y Zinc

Por medio del software Eviews®, se proyectan los precios (dólar por libra) del cobre y del zinc, los cuales, pertenecen al London Mercantil Exchange (LME) y son publicados en el Sistema Geológico Mexicano (SGM) con frecuencia semanal para el periodo de enero de 2014 a julio de 2019.

La siguiente gráfica muestra el comportamiento que ha tenido el precio del cobre:

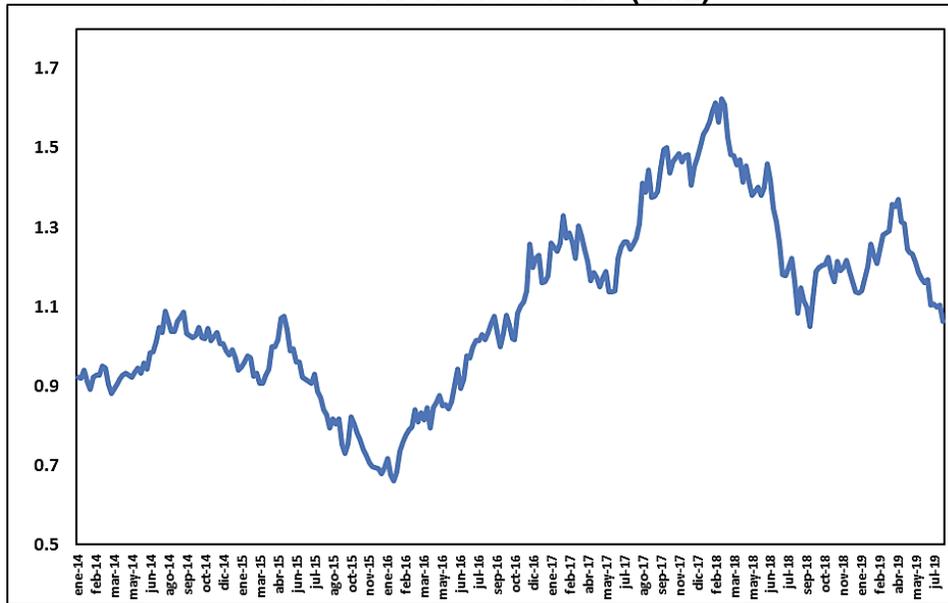


Fuente: Elaboración propia con datos del SGM (2019).

El comportamiento alcista de este metal comenzó a finales de 2016, después de la caída en el precio durante años anteriores debido a la crisis de los metales. Para 2019, se ha presentado una contracción en el precio.

Este es el comportamiento que posee el precio del zinc, basado en los precios del London Mercantil Exchange (LME), publicados por el Sistema Geológico Mexicano (SGM):

Gráfica 37. Precio del Zinc (LME)



Fuente: Elaboración propia con datos del SGM (2019).

A partir de 2016 el precio del zinc ha tenido un comportamiento alcista, el cual, se ha decrecido durante el 2019.

4.8.5 El Proyecto Minero en Buenavista

De acuerdo con el reporte financiero anual 2018 de Grupo México®, el proyecto minero de construir una concentradora en la mina existente Buenavista del Cobre, en Sonora, tiene como objetivo poder elevar la capacidad de producción a 100,000 toneladas de zinc y 20,000 toneladas de cobre adicionales para el primer año de funcionamiento en 2022, es decir, a partir de que sea concluido a finales de 2021, además se tiene una inversión inicial de 413 millones de dólares para comenzar su construcción. La ingeniería básica ha sido concluida y existe un proceso de compra de componentes principales, los estudios ambientales están en proceso y las concesiones de agua han sido aplicadas.

Gráfica 38. Mina Buenavista del Cobre



Fuente: Milenio (2019).

4.8.5.1 El Beneficio Esperado del Proyecto Minero

Se puede resumir en la siguiente tabla los precios proyectados del cobre y zinc para 2022, con base en modelos de series de tiempo y desarrollados con el software Eviews®, así como el valor esperado del desembolso que se tendría al iniciar el proyecto de la concentradora en Buenavista del Cobre, en Sonora, de acuerdo con las expectativas de Grupo México® de producir, a largo plazo, volúmenes adicionales en toneladas métricas (T.M.), las cuales, equivalen a 2,204.62 libras por tonelada.

Tabla 9. Proyección del Beneficio del Proyecto Minero

Metal	Toneladas esperadas	Precio Metal dólar/Lb a 2022	Valor de T.M. en dólares
Zinc	100,000	1.01	\$222,705,000
Cobre	20,000	2.76	\$121,716,000
			\$344,421,000

Fuente: Elaboración propia.

Con base en el beneficio esperado de este proyecto, se generarían más de 344 millones de dólares por ingresos adicionales anuales, al producir 100,000 y 20,000 toneladas de zinc y cobre, respectivamente, a partir de 2022, dentro de la mina Buenavista del Cobre, en Sonora.

Los resultados de las proyecciones, a través los modelos de series de tiempo, así como las pruebas estadísticas para poder validar cada modelo para los precios del cobre y zinc, se pueden consultar en los correspondientes anexos de esta tesis.

4.8.6 Características de la Opción Real de Expansión

Con base en los resultados anteriores y aplicando la teoría de opciones reales, se elige desarrollar una opción real de expansión para el proyecto de la concentradora de Grupo México®, ya que, este proyecto permitiría generar ingresos adicionales importantes, a largo plazo, a la división minera de esta empresa, al construir un yacimiento en la mina que existe actualmente en Buenavista del Cobre, en Sonora.

Entonces, valuando este proyecto minero como una opción real de expansión, se deben seleccionar las variables correspondientes para poder aplicar el método de *Black & Scholes* y obtener el precio de este tipo de opción.

La siguiente tabla detalla cada variable asociada con su respectivo valor:

Tabla 10. Variables de la Opción Real de Expansión

Explicación	Variable	Valor
Valor Presente de la división minera en México de Grupo México	Subyacente (S)	\$3,338,136,291
Inversión inicial del proyecto en Buenavista	Precio de Ejercicio (K)	\$413,000,000
Tiempo para concluir el proyecto	Años (T)	3
Tasa libre de riesgo - Bono a 10 años de E.U.A.	Tasa (rf)	2.69%
Desviación estándar del cociente de los logaritmos del VP	Volatilidad (σ)	40.86%

Fuente: Elaboración propia.

En resumen, el valor presente de los flujos de caja descontados de la división minera en México de Grupo México®, por medio de la WACC, es considerado como el activo subyacente de esta opción de expansión.

El precio de ejercicio es la inversión inicial o desembolso del proyecto minero, y es de 400 millones de dólares, de acuerdo con el reporte financiero anual 2018 de Grupo México®.

Asimismo, se da un plazo de 3 años para concluir el proyecto, de 2018 a 2021, por lo que, $T=3$, y la tasa con la que se valúa esta opción es la tasa libre de riesgo de E.U.A, en este caso, la del bono a 10 años del 31 de diciembre de 2018, obtenida de la base datos financiera S&P Capital IQ®. Sin embargo, con esta tasa anual se debe encontrar una tasa equivalente a una tasa anual compuesta continuamente de la siguiente forma:

$$\ln(1 + i) = r$$

Sustituyendo se tiene que:

$$\ln(1 + 2.69\%) = 2.65\%$$

Como se explicó anteriormente, la variable volatilidad se calcula con base en la desviación estándar del logaritmo natural de la división de las 10,000 simulaciones del valor presente con desfase entre el valor presente sin desfase constante, por lo tanto, se obtiene un resultado de 40.86%.

4.8.6.1 El modelo Black & Scholes para la Opción Real de Expansión

Sustituyendo los valores en la fórmula de *Black & Scholes* para una opción call, explicada en la sección 2.4, se obtiene lo siguiente:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{3,338,136,291}{413,000,000}\right) + \left(0.0265 + \frac{(0.4086)^2}{2}\right) * (3)}{0.4086 * \sqrt{3}} = 3.4193;$$

$$d_2 = 3.4193 - 0.4086 * \sqrt{3} = 2.7116;$$

$$Call = 3,338,136,291 * N(3.4193) - 413,000,000 * e^{-0.0265*(3)} * N(2.7116) = 2,956,978,434$$

4.8.6.2 Desarrollo de la Opción Real de Expansión

De acuerdo con la ecuación 3.4 desarrollada en la sección 3.2.4, y adaptándola al proyecto minero que se está valuando, se tiene la siguiente expresión:

$$Opción\ de\ Expansión = S_0 + \alpha * Call(S_0, T, K) = Valor\ Presente\ de\ la\ Perpetuidad \quad (4.1)$$

Donde se considera al flujo o beneficio esperado por la producción en miles de toneladas métricas de cobre y zinc a 2022, el cual, es de más de 344 millones de dólares, y su valor presente se calcula de la siguiente forma:

$$Valor\ Presente\ de\ la\ Perpetuidad = \left(\frac{1}{(1+WACC)^4} \right) * \left(\frac{FP}{WACC-g} \right) \quad (4.2)$$

Sustituyendo valores en millones de dólares, se tiene que:

$$Valor\ Presente\ de\ la\ Perpetuidad = \left(\frac{1}{(1 + 10.2\%)^4} \right) * \left(\frac{344,421,000}{10.2\% - 3.5\%} \right) = 3,504,488,805$$

La ecuación anterior considera que el flujo del proyecto minero se mantendrá indefinidamente sujeto a una tasa descuento y de crecimiento perpetuo de la empresa, calculada previamente, ya que, los proyectos mineros tienen un vida útil muy prolongada, por lo que, se valúa una perpetuidad a valor presente, es decir, al año donde este proyecto comienza a generar flujos, o sea 2022, y después, se debe descontar este valor presente de 2022 a 2018, en t=0, que es el año donde se está valuando el proyecto minero.

4.8.7 El Valor Presente Neto Básico del Proyecto

Recordando que el valor presente neto, más que un simple cálculo, es un indicador o parámetro para conocer si se debe aceptar o rechazar un proyecto de

inversión. Si este indicador es positivo el proyecto se acepta, en otro caso se rechaza, entonces se debe analizar el Valor Presente Neto asociado al proyecto de Buenavista del Cobre, en Sonora.

El valor presente actual de Grupo México® es de 3,338 millones de dólares, obtenido por medio de la suma los flujos de caja libres descontados y el valor terminal de la empresa. Además, considerando que la inversión inicial es de 413 millones de dólares para el proyecto minero de Buenavista del Cobre, en Sonora, entonces el Valor Presente Neto Básico se calcula por medio de la diferencia del valor presente actual que tiene Grupo México® menos la inversión inicial para el proyecto minero más los flujos esperados a perpetuidad traídos a valor presente.

Por lo tanto, el Valor Presente Neto Básico está dado por:

$$VPN \text{ Básico} = 3,338,136,291 - 413,000,000 + 3,504,488,805 = 6,429,625,096 \quad (4.3)$$

La ecuación 4.3 indica que, el Valor Presente Neto Básico de Grupo México® es de \$6,430 millones de dólares y es positivo, aun así, es posible obtener un valor mayor al aplicar la teoría de opciones reales, lo cual, se comprueba a continuación.

4.8.8 El Valor Presente Neto Ampliado del Proyecto

A la suma del precio de la opción real implícita en el proyecto y el Valor Presente Neto Básico se le conoce como Valor Presente Neto Ampliado, entonces, el Valor Presente Neto Ampliado se calcula sustituyendo en la ecuación 3.6 definida en la sección 3.4 como sigue:

$$VPN \text{ Ampliado} = 3,338,136,291 + 3,504,488,805 = 6,842,625,096 \quad (4.4)$$

La ecuación 4.4 considera solo el valor presente de la división minera en México de Grupo México® más el valor de la opción real de expansión, ya que, si se considera todo el Valor Presente Neto Básico, definido en la ecuación 4.3, se estaría sumando dos veces el valor de la opción real de expansión, es decir, los flujos a perpetuidad traídos a valor presente como se define en la ecuación 4.2, en consecuencia, adaptando la ecuación 4.4 para comparar correctamente los resultados, se pasa de un Valor Presente Neto Básico convencional de 6,430 millones de dólares a un Valor Presente Neto Ampliado de 6,843 millones de dólares, es decir, un crecimiento de **6.42%**, lo cual, genera un mayor beneficio para Grupo México®.

4.8.9 Resultados y Recomendaciones

En la sección 3.2.4 se define la ecuación 3.4 de una opción real de expansión, adaptándola y sustituyendo los valores calculados del proyecto minero, se tiene el siguiente resultado:

$$\text{Opción de Expansión} = 3,338,136,291 + \alpha * 2,956,978,434 = 3,504,488,805$$

Por lo tanto, el valor de la constante α requerido, por medio del cual, Grupo México® debe expandir su valor actual de empresa o subyacente para obtener el beneficio esperado por desarrollar el proyecto minero es de **6%**.

A través de la aplicación de un método alternativo de valuación de proyectos de inversión como las opciones reales, se puede decir que, si se lleva a cabo la expansión del proyecto minero de Grupo México® en la mina Buenavista del Cobre, en Sonora, se obtiene un monto de **\$3,505** millones de dólares, el cual, traería futuros beneficios a la división minera en México de esta empresa, en vez de solo valuar este proyecto con un

método convencional como el Valor Presente Neto, el cual, no contempla la flexibilidad de este proyecto minero.

La flexibilidad que otorga la aplicación de la teoría de opciones reales puede analizarse en la siguiente tabla de sensibilidad, ya que, si la proporción prevista de producción de cobre y zinc se va incrementando, a través de las decisiones financieras que lleve a cabo Grupo México® conforme a sus estimaciones, se obtienen diferentes combinaciones que muestran distintos porcentajes para la constante α .

Tabla 11. Escenarios para la Constante Alpha

		Producción de Zinc				
		Δ	10%	20%	30%	40%
Producción de Cobre	10%	17%	25%	33%	40%	48%
	20%	22%	29%	37%	45%	52%
	30%	26%	34%	41%	49%	57%
	40%	30%	38%	45%	53%	61%
	50%	34%	42%	50%	57%	65%

Fuente: Elaboración propia.

Con base en la tabla anterior, se podría conocer cuál es la proporción a la que se debe incrementar el valor actual de la división minera en México de Grupo México® para poder alcanzar el crecimiento esperado en los niveles de producción de cobre y zinc.

Tabla 12. Escenarios para la Opción Real de Expansión

		Producción de Zinc				
		Δ	10%	20%	30%	40%
Producción de Cobre	10%	3,855	4,082	4,308	4,535	4,761
	20%	3,979	4,205	4,432	4,659	4,885
	30%	4,103	4,329	4,556	4,782	5,009
	40%	4,226	4,453	4,680	4,906	5,133
	50%	4,350	4,577	4,804	5,030	5,257

Fuente: Elaboración propia.

Con base en las tablas 11 y 12, si la producción de zinc y cobre dentro del proyecto se prevé incrementar 20% y 40%, respectivamente, el valor de α debería crecer 38%, y se podría alcanzar un valor para la opción real de expansión de \$4,453 millones de dólares, por medio de la aplicación de la metodología de opciones reales. También se puede analizar cada combinación de forma independiente, de acuerdo con la decisión que se requiera tomar dentro de este proyecto de inversión minero.

Los resultados anteriores muestran que a través del crecimiento de las expectativas de la producción de cobre y zinc, desde 10% hasta 50%, durante el desarrollo del proyecto minero, se obtiene siempre un valor positivo para la opción real de expansión, lo cual, es un factor importante para este proyecto y para los ingresos esperados de la empresa, también se considera el factor α , el cual, provoca que una proporción del subyacente o del valor presente actual de la empresa se incremente, por lo tanto, Grupo México® debería implementar diversas estrategias si se quiere alcanzar dichos niveles de crecimiento o expansión, que se traducen en mayores beneficios.

Debido a esto, el valor de la opción real no es inferior, es decir, el ejercicio de la opción se hace respetando el horizonte de tiempo definido del proyecto, esto implica que, el valor de la opción se encuentre *in-the-money*, es decir, se generan mayores beneficios para la empresa cuando ejerce su derecho de compra.

Al aplicar esta metodología, un factor importante es el modelo o técnica elegida para calcular la volatilidad implícita de los flujos de efectivo del proyecto de inversión, es decir, el riesgo que conllevan los flujos de caja libres en un horizonte de tiempo definido. Por lo que, es importante plantear este cálculo adecuadamente, debido a que repercute

en el valor de expansión del subyacente de la opción real, y poder alcanzar el beneficio esperado del proyecto de inversión.

Es indispensable considerar el manejo de softwares especializados para el cálculo de variables que permiten la implementación de las opciones reales, ya que, a través de éstos se pueden realizar cálculos más complejos y exactos en un menor tiempo posible, debido al procesamiento de mayores volúmenes de datos y la consideración de un mayor número de escenarios.

Se debe tomar en cuenta que no todas las empresas están dispuestas a aceptar nuevos métodos de valuación, ya que, pueden pensar que no los necesitan o que simplemente les resulta innecesario o complicado hacerlo, y no alcanzarían a visualizar, con otra perspectiva, una mayor flexibilidad dentro del proyecto de inversión. Por lo que, para este caso, se decide valuar el proyecto de inversión minero de Grupo México® de esta forma.

En consecuencia, los proyectos de inversión que se planean llevar a cabo se deben valuar de acuerdo con la realidad, y es en este punto donde las opciones reales son un método alternativo para poder hacerlo, llevando el análisis que se realiza comúnmente a otro nivel financiero, al aportar resultados diferentes que permiten tomar decisiones financieras más flexibles.

Conclusiones

Las condiciones económico-financieras actuales que impactan en el desarrollo del país, como la creación de empleos y la Inversión Extranjera Directa serían afectados si un proyecto de magnitudes considerables es rechazado, basándose en resultados convencionales o menos realistas. Por lo tanto, como la metodología de las opciones reales se puede adaptar a diferentes sectores económicos, se tendría una mayor certeza de los resultados que requieren las empresas y los inversionistas, en consecuencia, una cantidad considerables de proyectos se valorarían desde otra perspectiva, provocando que algunos indicadores económicos crecieran para impulsar, en cierta medida, la economía del país.

Asimismo, la iniciativa de valorar este proyecto de inversión minero con opciones reales genera un mayor número de escenarios que repercuten en las decisiones financieras, así como cambia la forma de tratar el riesgo dentro del proyecto, pasando de un nivel de inversión más conservador, dentro de la empresa, a una expansión de la inversión por aplicar esta metodología, pudiendo obtener un mayor valor para la empresa, al expandir su propio valor.

A su vez, la opción real de expansión provee de flexibilidad y adaptabilidad a las áreas financieras, debido a que actualmente, la tendencia que siguen las inversiones dentro del sector minero a nivel mundial se concentra en proyectos “*brownfield*”, es decir, aquellos que ya existen, y sus instalaciones son mejoradas o aumentadas para poder generar mayores volúmenes de producción de metales y/o minerales, en este caso. En consecuencia, como una proporción considerable de la inversión en México se destina a

proyectos mineros de expansión sobre los que están consolidados, entonces para Grupo México®, este tipo de opción real es la que se considera aplicar.

La elección de desarrollar la metodología de una opción real de expansión se basa en la idea de adquirir una opción de compra sobre una parte adicional del proyecto y analizar diversos escenarios a futuro que se justifican por el resultado positivo final, ya que, el modelo de este tipo de opción real se adecua a las condiciones actuales del proyecto planificado en la existente mina Buenavista del Cobre, en Sonora, demostrando que los beneficios recibidos por decidir expandir este proyecto de inversión minero son mayores, en comparación de no hacerlo por este método.

Por lo anterior y de acuerdo con la hipótesis principal, la adaptación de derivados financieros, sobre activos reales en los proyectos de inversión, sí contribuye a tomar mejores decisiones financieras dentro de una empresa del sector minero, en este caso, para la división minera en México de Grupo México®, así como analizar de otra forma el riesgo asociado por expandir el proyecto.

Igualmente, se comprueba una de las hipótesis secundarias, dado que, el método tradicional para valuar un proyecto de inversión como el Valor Presente Neto es un método más lineal respecto al análisis financiero requerido para el proyecto minero, sin embargo, aunque no sea el método más preciso y más adaptado a la realidad, se consideran sus cálculos para obtener resultados más simples sobre la valuación del proyecto, además su aplicación y entendimiento no requiere un grado de complejidad tan elevado.

Con base hipótesis secundaria, los resultados finales demuestran que, por medio del desarrollo de la metodología y teoría de las opciones reales, se obtienen resultados más precisos que integran un mayor nivel de flexibilidad en comparación con métodos tradicionales como el Valor Presente Neto. A su vez, como se consideran las condiciones económico-financieras y las variables internas y externas para el país donde se desarrolla el proyecto, en este caso, las de México, se generan decisiones financieras más realistas que influyen en la existencia y continuidad del proyecto minero y en el cálculo de ingresos esperados para la empresa minera Grupo México®, en consecuencia, para este proyecto del sector minero se demuestra que es más recomendable hacerlo de esta forma.

Al ser un método alternativo, no existe impedimento alguno para atreverse a pensar en aplicarlo a otros sectores que no son comúnmente estudiados por este método, es decir, no existen limitaciones para poder aplicar esta metodología en sectores como el automotriz, energías renovables, sector petrolero, empresas de *retail*, sector inmobiliario, comercio electrónico o *e-commerce*, sector farmacéutico, incluso en el sector Fintech, donde nuevos tipos de empresas están surgiendo en todo el mundo, las cuales, ofrecen diferentes servicios, atendiendo distintos tipos de necesidades de los clientes.

Respecto a una propuesta diferente, si se analiza la planeación de producir una película, esta situación se podría valorar como un proyecto de inversión distinto de algún sector convencional, ya que, si la película se pospone o se cancela seguramente se obtendría un valor más realista ante este tipo de decisiones dentro de alguna compañía productora con la aplicación de la metodología de las opciones reales.

Bibliografía

Abreu Zambrano, Alibeth y Paredes, Dorys (2014). *Utilidad de las opciones reales en la valoración de proyectos de inversión*. Revista del Centro de Investigaciones y Desarrollo Empresarial. Universidad de los Andes, Venezuela.

Álvarez, Mario (2019). *Se desacelera el alza de Inversión Extranjera Directa*. Ciudad de México, México. El Sol de México. Disponible en <https://www.elsoldemexico.com.mx/finanzas/se-desacelera-el-alza-de-inversion-extranjera-directa-3633360.html>

Atehortúa Granados, John Alexánder (2012). *Mercado de capitales y portafolios de inversión* (1ª ed.) Medellín, Colombia: Ediciones de la U.

Blanco, Daniel (2019). *Inversión Extranjera Directa sube en primer semestre a máximos de 6 años*. Ciudad de México, México. El Financiero. Disponible en <https://www.elfinanciero.com.mx/economia/inversion-extranjera-directa-crece-1-5-en-primer-semester-del-ano>

Calle Fernández, Ana María y Tamayo Bustamante, Víctor Manuel (2009). *Decisiones de Inversión a través de Opciones Reales*. Revista Estudios Gerenciales. [Revista en línea], 25 (111), 107-126. Recuperado de [https://doi.org/10.1016/S0123-5923\(09\)70073-7](https://doi.org/10.1016/S0123-5923(09)70073-7)

Cámara Minera Mexicana (CAMIMEX) (2019). *Informe Anual 2019*. Recuperado de <https://camimex.org.mx/index.php/secciones1/publicaciones/informe-anual/>

Carstens, Catherine Mansell (1992). *Las Nuevas Finanzas en México* (1ª ed.) Ciudad de México, México: Milenio.

Casanovas Ramón, Montserrat (2003). *Opciones Financieras* (6ª ed.) Madrid: Pirámide.

Cuevas, Stephanie (2019). *0.0%, el crecimiento de México en el 2T tras revisión a la baja del INEGI*. Ciudad de México, México. El Financiero. Disponible en <https://www.elfinanciero.com.mx/economia/inegi-revisa-a-la-baja-crecimiento-economico-del-2t-queda-en-0-0>

Damodaran, Aswath (1996). *Investment Valuation*. (1ª ed.) Estados Unidos: John Wiley & Sons.

Damodaran, Aswath (2019). *Country Risk Premium*. Recuperado de http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/datafile/ctryprem.html

De la Fuente, G. (2005). *Las opciones reales en la estrategia empresarial*. Revista Economía Industrial. [Revista en línea]. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1393404>

De la Torre Gallegos, Antonio (1996). *Operaciones de Permuta Financiera (Swaps)* (1ª ed.) España: Ariel.

De Lara Haro, Alfonso (2005). *Productos derivados financieros* (1ª ed.) Ciudad de México: Limusa.

Díaz Tinoco, Jaime y Hernández Trillo, Fausto (2003). *Futuros y Opciones Financieras: Una introducción* (3ª ed.) Ciudad de México: Limusa.

- Espen Benth, Fred (2004). *Option Theory with Stochastic Analysis: An Introduction to Mathematical Finance*. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Espitia, M. y Pastor, G. (2003). *Las opciones reales y su influencia en la valoración de empresas*. [Documento en línea]. Documento de trabajo. Universidad de Zaragoza. Recuperado de <http://www.dteconz.unizar.es/DT2003-01.pdf>
- Fernández, Pablo (2017). *Valoración de opciones reales: dificultades, problemas y errores*. [Documento en línea]. IESE Business School, Universidad de Navarra. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1159045>
- Flores Bermudez, Jorge Javier (2013). *Opciones Reales: Inversiones Bajo Incertidumbre en el Sector Eléctrico Mexicano* (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- Fuentes López, Guadalupe (2019). *Mineros: Tráfico de influencias y corrupción de Grupo México con EPN y FCH nos tuvieron oprimidos*. Ciudad de México, México. Sin Embargo. Disponible en <https://www.sinembargo.mx/29-07-2019/3620194>
- García Machado, Juan José (2001). *Opciones reales: Aplicaciones de la teoría de opciones a las finanzas empresariales* (1ª ed.) Madrid: Pirámide.
- Garrido, I. y Andalaft, A. (2003). *Evaluación económica de proyectos de inversión basada en la teoría de opciones reales*. Revista Ingeniería Industrial. [Revista en línea], 1, 83-89. Recuperado de <http://dialnet.unirioja.es/download/articulo/3996606.pdf>
- Goldenberg, David Harold (2016). *Derivatives Markets* (1ª ed.) Nueva York: Routledge.

González Dan, José Roberto (2015). *Introducción del Factor Humano al Análisis de Riesgo* (Tesis Doctoral). Barcelona, España.

Grupo México (2018). *Reportes Financieros e Informe Anual 2018*. Recuperado de <http://www.gmexico.com/site/index.html#>

Hernández Sampieri, Roberto y Collado Fernández, Carlos (2010). *Metodología de la Investigación* (5ª ed.). Ciudad de México: McGraw-Hill.

Hull, John C. (2014). *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones* (8ª ed.) Estados Unidos: Prentice Hall.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) (2019). *Estadística Mensual de la Industria Minero-Metalúrgica*. Recuperado de https://www.inegi.org.mx/programas/indminero/default.html#Datos_abiertos

International Lead and Zinc Study Group (ILZSG) (2019). *Producción minera mundial del zinc 2018*. Recuperado de <http://www.ilzsg.org/static/home.aspx?from=1>

Investing (2019). *Precios de Acciones e Índices Bursátiles*. Recuperado de <https://mx.investing.com/?ref=www>

Kircher, Tom (2015). *Can Real Options improve the results of investment valuations?* (Tesis de Maestría). Aarhus University, Dinamarca.

Lamothe Fernández, Prosper y Méndez Suárez, Mariano (2013). *Opciones reales: Métodos de simulación y valoración* (1ª ed.) Madrid: Editorial del Economista.

Lamothe Fernández, Prosper y Pérez Somalo, Miguel (2003). *Opciones Financieras y Productos Estructurados* (2ª ed.) Madrid: McGraw-Hill.

Lara, Rosalía (2019). *La piedra en el zapato de Grupo México*. Ciudad de México, México. Expansión. Disponible en <https://expansion.mx/empresas/2019/07/03/la-piedra-en-el-zapato-de-grupo-mexico>

Martínez Abascal, Eduardo (1994). *Futuros y Opciones en la Gestión de Carteras* (1ª ed.) Madrid: Mc Graw Hill.

Mascareñas, Juan (2005). *Opciones II: Valoración*. Recuperado de <https://webs.ucm.es/info/jmas/infin/op2.pdf>

Mascareñas, Juan (2007). *Opciones reales en la valoración de proyectos de inversión*. Universidad Complutense de Madrid, España.

Mascareñas, Juan (2012). *Opciones reales: gestión y problemas de su utilización*. Recuperado de <https://www.ucm.es/info/jmas/mon/38.pdf>

Mascareñas, Juan (2015). *Opciones reales de ampliar y reducir un proyecto de inversión*. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2316742>

Mercado H., Salvador (2009). *Sistema Financiero Mexicano* (1ª ed.) Ciudad de México: Grupo Vanchri.

Milenio Digital y Reuters (2019). *Vista de la mina Buenavista del Cobre, de Grupo México, en Sonora*. Ciudad de México, México. Milenio. Disponible en <https://www.milenio.com/estados/semarnat-derrame-grupo-mexico-tendria-efecto-ambiente-victor-toledo>

- Morales Castro, José Antonio y Morales Castro, Arturo (2009). *Proyectos de Inversión: evaluación y formulación* (1ª ed.) Ciudad de México: McGraw-Hill.
- Morales, Roberto (2019). *Camimex prevé inversión de 26,400 millones de dólares en el sexenio*. Ciudad de México, México. El Economista. Disponible en <https://www.eleconomista.com.mx/empresas/Camimex-preve-inversion-de-26400millones-de-dolares-en-el-sexenio-20190710-0004.html>
- Mun, Jonathan (2006). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*. Nueva York: John Wiley & Sons.
- Reza, Abraham y Miranda, Fanny (2019). *Por 22 accidentes en 20 años, SEMARNAT va por Grupo México*. Ciudad de México, México. Milenio. Disponible en <https://www.milenio.com/politica/22-accidentes-20-anos-semarnat-grupo-mexico>
- S&P Capital IQ (2019). *Información financiera de compañías mineras*. Recuperado de <https://www.capitaliq.com/>
- S&P Global Market Intelligence (2019). *Tendencias de Exploración Mundial 2018*. Recuperado de <https://www.spglobal.com/marketintelligence/en/news-insights/research/world-exploration-trends-2018>
- Sapag Chain, Nassir y Sapag Chaig, Reinaldo (2008). *Preparación y evaluación de proyectos* (5ª ed.) Bogotá, Colombia: McGraw-Hill.
- Secretaría de Energía (SE) (2018). *Datos de Inversión Extranjera Directa (IED)*. Recuperado de <https://datos.gob.mx/busca/dataset/informacion-estadistica-de-la-inversion-extranjera-directa>

Secretaría de Energía (SE) (2018). *Inversión Minero-Metalúrgica 2018*. Recuperado de <https://www.gob.mx/se/acciones-y-programas/mineria>

Sistema Geológico Mexicano (SGM) (2019). *Precios del Cobre y Zinc*. Recuperado de https://www.sgm.gob.mx/SINEMGobMx/precio_metales.jsp

Tejeda, Claudia (2019). *Grupo México brilla entre las mineras en Bolsa*. Ciudad de México, México. El Economista. Disponible en <https://www.eleconomista.com.mx/mercados/Grupo-Mexico-brilla-entre-las-mineras-en-Bolsa-20190704-0098.html>

Tejeda, Claudia (2019). *Grupo México se recupera rápidamente*. Ciudad de México, México. El Economista. Disponible en <https://www.eleconomista.com.mx/mercados/Grupo-México-se-recupera-rapidamente-20190728-0047.html>

United States Geological Survey (2019). *Mineral Commodity Summaries 2019*. Recuperado de <https://doi.org/10.3133/70202434>

Venegas Martínez, Francisco y Fundia Aizenstat, Andrés (2006). *Opciones Reales, Valuación Financiera de Proyectos y Estrategias de Negocios*. Revista El Trimestre Económico. [Revista en línea], 73(2), 363-450. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.20430/ete.v73i290.548>

Wood Mackenzie (2019). *Principales Minas y Compañías Productoras de Cobre en el Mundo 2018*. Recuperado de <https://www.woodmac.com/>

Anexo A

A.1 La Fórmula de Itô y el Movimiento Browniano

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones diferenciables y siguiendo la regla de la cadena para derivar funciones compuestas, se calcula la derivada de $f(g(t))$ respecto a t como:

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)) * g'(t)$$

Aplicando la regla de la cadena para integrales sobre ambas partes de respecto al tiempo, el cual va de 0 a t , y estableciendo que $g(0) = x$, se tiene la siguiente ecuación:

$$f(g(t)) = f(x) + \int_0^t f'(g(s)) * g'(s) ds$$

Si la función $g(t)=B(t)$ se obtendría la fórmula de Itô, dada por:

$$f(B(t)) = f(x) + \int_0^t f'(B(s)) * B'(s) ds$$

El término $B'(s)ds$ no se considera significativo, así que, es válido realizar un cambio y modificar la ecuación para obtener la integral de Itô de esta forma:

$$f(B(t)) = f(x) + \int_0^t f'(B(s)) * dB(s) \tag{A.1}$$

Sin embargo, como Espen (2004) menciona, esto no es correcto, ya que se debe notar que $g(0) = x$, lo que indicaría que el movimiento Browniano empieza en x en vez de en cero, con $B(0) = x$. Sea $B(t) - B(s)$ que se distribuye normal con media x y varianza $t-s$, y aplicando la expansión de Taylor sobre $f(g(s_{i+1}))$, donde $\{s_i\}$ es una partición del intervalo $[0,t]$, para todo $i=1, \dots, n$, y dejando que el número de puntos de la

partición tienda a infinito, se puede definir un movimiento Browniano que comienza en x como sigue:

$$B^*(t) = x + B(t), \text{ donde } B(t) \text{ comienza en cero}$$

Sean s_i y s_{i+1} dos puntos arbitrarios en el intervalo $[0, t]$ con $s_i < s_{i+1}$, y una expansión de segundo orden alrededor de $B(s_i)$ para f , la cual es una función doblemente diferenciable, por lo que, resulta una función sobre un movimiento Browniano de esta forma:

$$f(B(s_i)) - f(B(s_{i+1})) = f'(B(s_i)) * (B(s_{i+1}) - B(s_i)) + \left(\frac{1}{2}\right) * f''(B(s_i)) * (B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 + R\{(B(s_{i+1}) - B(s_i))^3\} \quad (\text{A.2})$$

Como la sucesión de puntos tiene la propiedad $0=s_1 < s_2 < s_3 \dots < s_{n-1} < s_n=t$, y por medio de la sumatoria de estos puntos da como resultado:

$$f(B(t)) - f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f'(B(s_i)) * (B(s_{i+1}) - B(s_i)) + \left(\frac{1}{2}\right) * \sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i)) * (B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 + \sum_{i=1}^{n-1} R\{(B(s_{i+1}) - B(s_i))^3\}$$

Se observa que el segundo término de la ecuación converge a la integral de Itô cuando $n \rightarrow \infty$, para el segundo término se puede analizar lo siguiente:

$$E[\sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i)) * (B(s_{i+1}) - B(s_i))^2] = \sum_{i=1}^{n-1} E[f''(B(s_i))] * (s_{i+1} - s_i)$$

Como la función es doblemente diferenciables y está acotada en un intervalo, a través de la sucesión de puntos, se obtiene una integral que converge a un límite cuando $n \rightarrow \infty$, dando lugar a esta ecuación:

$$\int_0^t E[f''(B(s_i))] ds \rightarrow \int_0^t f''(B(s)) ds$$

De acuerdo con Espen (2004), lo anterior se cumple si $n \rightarrow \infty$, al demostrar que:

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i)) * (B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 - \sum_{i=1}^{n-1} f''(B(s_i)) * (s_{i+1} - s_i) \right)^2 \right] \rightarrow 0$$

Efectivamente, sustituyendo los resultados de las ecuaciones anteriores, esta expresión da como resultado $E[0] = 0$.

Para el tercer término de la ecuación 1.2, el residuo de la serie de Taylor aplicada a la función doblemente diferenciable también tiende a cero, sin embargo, demostrar este supuesto, así como demostrar que esta función es continua en un intervalo dado, requiere de teoría matemática fuera del alcance de esta tesis, por lo tanto, se supondrá que esto se cumple.

Aplicando las ecuaciones anteriores para un movimiento Browniano que empieza en cero, a través de una función $f(x)$, la cual es doblemente diferenciable, se tiene que:

$$f(B(t)) = f(x) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + (1/2) * \int_0^t f''(B(s))ds$$

El proceso estocástico $f'(B(s))$ es Itô integrable si se cumple la condición $\int_0^t E[f'(B(s))^2]ds < \infty$, a su vez, el proceso estocástico $f''(B(s))$ es una función continua y acotada en el intervalo $[0,t]$, entonces ds está bien definida, por lo tanto, se cumple que $\int_0^t E[f''(B(s))^2]ds < \infty$. Estas dos condiciones indican que, para una función sobre un movimiento Browniano, $f(B(t))$, se tendría una varianza finita, Espen (2004).

A.2 Valuación y Cobertura de Reclamos Contingentes

Se considera a un reclamo contingente como un sinónimo de una opción financiera, por lo que, a partir de esta sección se tendrá presente que se trata del mismo concepto.

Sea un reclamo contingente con *payoff* al vencimiento en tiempo T dado como una función del activo subyacente, entonces $X = f(S(T))$, además se tendrá un precio $P(t)$ a tiempo t, también como función del activo subyacente $S(t)$. Por lo anterior, se tiene que $P(t) = C(t, S(t))$ para una función $C(t, x)$, entonces el precio al que se tendría que comprar el reclamo hoy, sería $P(0) = C(0, S(0))$.

A su vez, Espen (2004), pretende explicar cómo la función $C(t, x)$ puede ser derivada como solución de una ecuación diferencial parcial, más aún, se demuestra la relación entre el precio del reclamo y una expectativa condicional bajo una probabilidad neutral al riesgo, y como caso particular, se obtiene la fórmula de *Black & Scholes* para valuar opciones call y put.

A.2.1 Deducción de la Ecuación Diferencial Parcial de Black & Scholes

Supóngase que el precio $P(t) = C(t, S(t))$ para una función $C(t, x)$, la cual, es doblemente diferenciable respecto a x y una vez respecto a t, por lo tanto, se obtiene la siguiente ecuación:

$$dP(t) = \left\{ \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial t} + \alpha * \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} \right) * \frac{\partial^2 C(t, S(t))}{\partial x^2} \right\} dt + \sigma * \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial x} S(t) dB(t) \quad (\text{A.3})$$

Asumiendo que el mercado es completo, todos los reclamos pueden ser replicados, por medio de una estrategia de portafolio autofinanciada dada por (a^H, b^H) , tal que, $H(T) = f(S(T))$, y por ausencia de arbitraje $H(t) = P(t)$.

Por lo anterior, se tiene la siguiente expresión:

$$dP(t) = dH(t) = a^H * dS(t) + b^H * dR(t) = (\alpha * a^H * S(t) + r * b^H(t) * R(t))dt + \sigma * a^H(t) * S(t) * dB(t) \quad (A.4)$$

Igualando el segundo término de la ecuación 1.3 y el primer término de la ecuación 1.4, se obtiene esta ecuación:

$$a^H(t) = \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial x} \quad (A.5)$$

A esta ecuación se le conoce como la cobertura delta, si se sustituye $P(t)$ por C y $S(t)$ por x , se calcularía la sensibilidad del precio con respecto al precio del activo subyacente, y esto daría como resultado la letra griega de la opción financiera denominada como delta.

Además, como $C(t, S(t)) = P(t) = H(t) = a^H(t) * S(t) + b^H(t) * R(t)$, implica que:

$$b^H(t) = \frac{1}{R(t)} * (C(t, S(t)) - a^H(t) * S(t)) \quad (A.6)$$

A través de los valores para $a^H(t)$ y $b^H(t)$, se tiene una estrategia de replicación para el reclamo $X = f(S(t))$, siempre y cuando se conozca $C(t, x)$. Comparando el término dt de las ecuaciones A.3 y A.4, y sustituyendo los términos de A.5 y A.6, se obtiene que:

$$\frac{\partial C(t, S(t))}{\partial t} + \alpha * S(t) * \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}\right) * \sigma^2 * S(t)^2 * \frac{\partial^2 C(t, S(t))}{\partial x^2}$$

$$= \alpha * S(t) * \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial x} + r * \left(C(t, S(t)) - S(t) * \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial x} \right)$$

Restando y agrupando términos, se tiene que:

$$r * \left(C(t, S(t)) \right) = \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial t} + r * S(t) * \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} \right) * \sigma^2 * S(t)^2 * \frac{\partial^2 C(t, S(t))}{\partial x^2}$$

La expresión anterior, implica que se puede obtener esta ecuación para $C(t, x)$:

$$r * \left(C(t, x) \right) = \frac{\partial C(t, x)}{\partial t} + r * x * \frac{\partial C(t, x)}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} \right) * \sigma^2 * x^2 * \frac{\partial^2 C(t, x)}{\partial x^2} \quad (\text{A.7})$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación diferencial parcial de *Black & Scholes*, la cual, permitirá calcular la fórmula para poder valorar opciones financieras de compra y venta.

Asimismo, se tiene que $C(T, x) = f(x)$, para todo $x \geq 0$, donde el tiempo varía en el intervalo $[0, T]$, por lo tanto, el precio del reclamo $X = f(S(T))$ es $P(t) = C(t, S(t))$, donde $C(t, x)$ es la solución a esta. Se debe recordar que $P(t)$ es un precio libre de arbitraje, ya que, es el precio único que no permite llevar cabo oportunidades de arbitraje en el mercado, puesto que el mismo mercado se asumió de esta forma, es decir, completo.

A.2.2 La Solución de la Ecuación Diferencial Parcial de Black & Scholes

Sea un movimiento Browniano, $B^x(t) = x + B(t)$, que comienza en x , el cual se distribuye normal con media x y varianza t , y para una función g se tiene que:

$$E[g(B^x(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) * p(t, x - y) dy, \text{ con } p(t, x - y) = p(t, z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}}}{\sqrt{2 * \pi * t}}$$

Donde $p(t, z)$ es la función de densidad de probabilidad para $B^x(t)$, además se puede demostrar que:

$$\frac{\partial p(t, z)}{\partial t} = \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 p(t, z)}{\partial x^2} \quad (\text{A.8})$$

Espen (2004), define la función $u(t, x) = E[g(B^x(t))]$, con una diferenciación respecto a t y x , obtenido la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \quad (\text{A.9})$$

Más aún, para $u(0, x) = E[g(x)] = g(x)$, donde $u(t, x)$ es una solución de la ecuación diferencial parcial con valor inicial en $g(x)$. Con base en esto, se debe mencionar al matemático francés, Bachelier, quien desarrolló la teoría para obtener la ecuación A.9, este resultado es conocido en física como la “ecuación del calor”, es decir, una ecuación diferencial parcial que permite modelar la difusión del calor, o lo que es equivalente, modelar el movimiento de las partículas sólidas suspendidas en los líquidos.

Ahora, si se define la función $v(t, x) = u(T - t, x)$, implica que: $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$, donde $v(t, x)$ es la solución de la ecuación diferencial parcial como sigue:

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Se debe tomar en cuenta la condición final $v(T, x) = u(0, x) = g(x)$, y aplicando esta función al movimiento Browniano que comienza en x , por medio de la función g , se puede formular que $v(t, x) = u(T - t, x) = E[g(B^x(T - t))]$, donde $B^x(T - t)$ se distribuye normal con media x y varianza $T-t$.

A su vez, se puede definir un movimiento Browniano que empieza en x a tiempo t , como $B^{t,x}(s) = x + B(s) - B(t)$, con $s \geq t$, por lo tanto, $v(t, x) = E[g(B^{t,x}(s))]$, es la solución de la ecuación diferencial parcial con condición final $v(T, x) = g(x)$.

Como un paréntesis, se desarrollará la demostración de la ecuación A.8 de la siguiente forma:

Sea $p(t, z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}}}{\sqrt{2 * \pi * t}}$, entonces, la derivada parcial de esta función respecto a t está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, z)}{\partial t} &= \frac{t^{-\frac{1}{2}} * e^{-\frac{z^2}{2t}} * z^2 * t^{-2} - t^{-\frac{3}{2}} * e^{-\frac{z^2}{2t}}}{2 * \sqrt{2 * \pi}} = \frac{t^{-\frac{5}{2}} * e^{-\frac{z^2}{2t}} * z^2 - t^{-\frac{3}{2}} * e^{-\frac{z^2}{2t}}}{2 * \sqrt{2 * \pi}} \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}} * \left(t^{-\frac{5}{2}} * z^2 - t^{-\frac{3}{2}} \right)}{2 * \sqrt{2 * \pi}} = \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}}}{2 * \sqrt{2 * \pi}} * \left(\frac{z^2}{\sqrt{t^5}} - \frac{1}{\sqrt{t^3}} \right) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}}}{2 * \sqrt{2 * \pi}} * \left(\frac{z^2}{t^2 * \sqrt{t}} - \frac{1}{t * \sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

Ahora la derivada parcial de $p(t, z)$ respecto a z , multiplicada por $\frac{1}{2}$, es la siguiente:

$$\frac{1}{2} * \frac{\partial p(t, z)}{\partial z} = \frac{t^{-\frac{1}{2}} * e^{-\frac{z^2}{2t}} * \left(-\frac{z}{t} \right)}{2 * \sqrt{2 * \pi}} = \frac{t^{-\frac{3}{2}} * e^{-\frac{z^2}{2t}} * (-z)}{2 * \sqrt{2 * \pi}};$$

Esto implica que la segunda derivada parcial respecto a z de la expresión anterior es esta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 p(t, z)}{\partial z^2} &= \frac{t^{-\frac{3}{2}} * \left(e^{-\frac{z^2}{2t}} * (-z) * \left(-\frac{z}{t} \right) - e^{-\frac{z^2}{2t}} \right)}{2 * \sqrt{2 * \pi}} = \frac{t^{-\frac{5}{2}} * e^{-\frac{z^2}{2t}} * z^2 - t^{-\frac{3}{2}} * e^{-\frac{z^2}{2t}}}{2 * \sqrt{2 * \pi}} \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}} * \left(t^{-\frac{5}{2}} * z^2 - t^{-\frac{3}{2}} \right)}{2 * \sqrt{2 * \pi}} = \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}}}{2 * \sqrt{2 * \pi}} * \left(\frac{z^2}{\sqrt{t^5}} - \frac{1}{\sqrt{t^3}} \right) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}}}{2 * \sqrt{2 * \pi}} * \left(\frac{z^2}{t^2 * \sqrt{t}} - \frac{1}{t * \sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede observar que, si se aplica la primera derivada parcial respecto a t o $\frac{1}{2}$ de la segunda derivada parcial respecto a z , se obtiene el mismo resultado para la ecuación A.8, explicada anteriormente, demostrando así su validez.

A.2.3 Teorema

Sea $Z^{t,x}(s)$ con $s \geq t$, el proceso estocástico, tal que:

$$Z^{t,x}(s) = x + \int_t^s r * Z^{t,x}(u)du + \int_t^s \sigma * Z^{t,x}(u)dB(u) \quad (\text{A.11})$$

Entonces, la solución de la ecuación diferencial parcial de *Black & Scholes* es esta:

$$C(t, x) = e^{-r*(T-t)} * E[f(Z^{t,x}(T))] \quad (\text{A.12})$$

Esto implica que, $Z^{t,x}(s)$ es un movimiento Browniano geométrico que comienza en x a tiempo t , y este puede definirse como:

$$\begin{aligned} Z^{t,x}(s) &= x * \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (s - t) + \sigma * (B(s) - B(t))\right) \\ &= e^{\ln(x)} * \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (s - t) + \sigma * (B(s) - B(t))\right) \\ &= \exp\left(\ln(x) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (s - t) + \sigma * (B(s) - B(t))\right) \end{aligned}$$

Por lo anterior, el $\ln(Z^{t,x}(T))$ se distribuye normal con media $\ln(x) + (r - \sigma^2/2) * (T - t)$ y varianza $\sigma^2 * (T - t)$, y para $Z^{t,x}(T)$ se tiene una distribución log-normal.

A.2.4 La Fórmula de Black & Scholes para Opciones Call

Sea un reclamo una opción call sobre un activo subyacente con precio de ejercicio K , con una función para el *payoff* dada por $x = \max(0, S(T) - K)$ y vencimiento en T , esto

implica que $f(x) = \max(0, x - K)$, además $\sigma * (B(T) - B(t))$ se distribuye normal con media cero y varianza $\sigma^2 * (T - t)$, esto equivale a $\sigma * \sqrt{T - t} * Y$, con $Y = \frac{(B(T) - B(t))}{\sqrt{T - t}}$, la cual se distribuye normal con media cero y varianza uno, y calculando $E[f(Zt, x(T))]$ se desarrolla lo siguiente:

$$\begin{aligned} E[\max(0, Z^{t,x}(T) - K)] &= E\left[\max\left(0, e^{\ln(Z^{t,x}(T))} - K\right)\right] \\ &= E\left[\max\left(0, \exp\left(\ln(x) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t) + \sigma * \sqrt{T - t} * Y\right) - K\right)\right] \end{aligned}$$

Se puede observar que la variable aleatoria dentro del valor esperado de la función es cero cuando el $\ln(x) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t) + \sigma * \sqrt{T - t} * Y < \ln(K)$, siguiendo con esta desigualdad:

$$\begin{aligned} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t) + \sigma * \sqrt{T - t} * Y &< \ln(K) - \ln(x); \\ Y &< \frac{\ln(K) - \ln(x) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma * \sqrt{T - t}}; \\ Y &> \frac{\ln(x) - \ln(K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma * \sqrt{T - t}} = \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma * \sqrt{T - t}} = d_2; \end{aligned}$$

Esto implica que $Y < -d_2$, y se tiene que:

$$\begin{aligned} E[\max(0, Z^{t,x}(T) - K)] &= \int_{-d_2}^{\infty} \left(\exp\left(\ln(x) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t) + \sigma * \sqrt{T - t} * Y\right) - K\right) N(y) dy \\ &= x * e^{r * (T - t)} * \int_{-d_2}^{\infty} \exp\left(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t) + \sigma * \sqrt{T - t} * Y\right) N(y) dy - K \int_{-d_2}^{\infty} N(y) dy \end{aligned}$$

Sabiendo que por propiedades de la función de densidad de Y, en términos de probabilidades se puede expresar como:

$$P(Y > -d_2) = P(Y < d_2) = \int_{-d_2}^{\infty} N(y) dy; \text{ entonces } -K * \int_{-d_2}^{\infty} N(y) dy = K * N(d_2)$$

Donde $N(d_2)$, es la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar, además, realizando el cambio de variable $z = y - \sigma * \sqrt{T-t}$, los cambios en los límites de integración y completando el cuadrado en el exponente de esta forma:

$$\begin{aligned} -\frac{y^2}{2} + \sigma * \sqrt{T-t} * y - \frac{\sigma^2 * (T-t)}{2} &= -\frac{1}{2} * (y^2 - 2 * \sigma * \sqrt{T-t} * y + \sigma^2 * (T-t)) \\ &= -\frac{1}{2} * (y - \sigma * (T-t))^2 = -\frac{1}{2} * (z)^2; \end{aligned}$$

Se obtiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-d_2}^{\infty} \exp\left(\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t) + \sigma * \sqrt{T-t} * Y\right) N(y) dy &= \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \exp\left((y - \sigma * (T-t))^2\right) dy \\ &= \int_{-d_2 - \sigma * (T-t)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \exp(z^2) dz = N((d_2 + \sigma * (T-t))) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E[\max(0, Z^{t,x}(T) - K)] = x * e^{r*(T-t)} * N((d_2 + \sigma * (T-t))) - K * N(d_2)$

Ahora, si se multiplica por $e^{-r*(T-t)}$, se tiene el siguiente resultado:

$$E[\max(0, Z^{t,x}(T) - K)] = x * N((d_2 + \sigma * (T-t))) - K * e^{-r*(T-t)} * N(d_2);$$

Donde, $d_1 = d_2 + \sigma * \sqrt{T-t} = \frac{\ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) * (T-t)}{\sigma * \sqrt{T-t}} + \sigma * \sqrt{T-t} = \frac{\ln(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2}) * (T-t)}{\sigma * \sqrt{T-t}}$, y como el precio del reclamo $x = f(S(T))$ está dado por $P(t) = C(t, S(t))$, para la función $C(t, x)$, se puede expresar la fórmula de *Black & Scholes* para una opción de compra call de esta forma:

$$Call = S(t) * N(d_1) - K * e^{-r*(T-t)} * N(d_2) \quad (\text{A.13})$$

Anexo B

B.1 Participación Minera por País de Grupo México

Tabla 13. Ventas por País de Grupo México

	%Ventas de la División Minera por País				
	2014	2015	2016	2017	2018
Estados Unidos	28.21%	31.58%	30.87%	29.09%	26.98%
México	31.19%	26.13%	22.11%	19.27%	19.88%
Asia	15.77%	16.72%	20.10%	22.72%	22.51%
Europa	11.07%	12.39%	16.34%	18.73%	17.17%
Latinoamérica sin México y Perú	9.73%	7.78%	5.84%	5.76%	6.01%
Perú	4.03%	5.40%	4.74%	4.43%	7.44%
Total	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

Fuente: Elaboración propia con datos del Informe Anual 2018 de Grupo México.

Se puede observar que Estados Unidos ha mantenido la mayor participación de ventas de la división minera en los últimos años, así como México mantiene el segundo lugar, y en promedio, México ha tenido una participación del 24% durante los últimos 5 años. Este porcentaje se prorratea a los flujos de caja libres calculados por medio de la proyección de los estados de resultados para obtener los flujos efectivos para la división minera en México.

B.2 Estados de Resultados de Grupo México

El siguiente estado de resultados de la División Minera, contempla el periodo de 2014 a 2018, el cual, se construye con base en datos reales publicados en los reportes financieros del sitio web de Grupo México®, mientras que la proyección para el periodo de 2019 a 2022, se hizo con base en crecimientos históricos de los diferentes rubros que lo conforman, para así poder calcular el Flujo de Caja Libre de la Empresa o *Free Cash Flow to the Firm*.

Tabla 14. Estados de Resultados Proyectados de Grupo México

En miles de dólares	Real					Proyección				
	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Ingreso por Ventas	7,033,621	6,008,688	6,209,957	7,554,512	7,883,888	8,396,761	8,942,998	9,524,770	10,144,387	10,804,313
Costo de Ventas	3,924,494	3,832,313	3,801,440	3,991,214	4,202,676	4,418,911	4,646,272	4,885,330	5,136,689	5,400,981
%ventas	55.8%	63.8%	61.2%	52.8%	53.3%	52.6%	52.0%	51.3%	50.6%	50.0%
Utilidad Bruta	3,109,127	2,176,375	2,408,517	3,563,298	3,681,212	4,060,781	4,474,250	4,924,450	5,414,438	5,414,438
%margen	44.2%	36.2%	38.8%	47.2%	46.7%	47.4%	48.0%	48.7%	49.4%	50.0%
Gastos Opetativos (OPEX)	219,277	173,110	120,194	108,158	144,527	141,176	137,903	134,705	131,582	128,531
%ventas	3.1%	2.9%	1.9%	1.4%	1.8%	1.7%	1.5%	1.4%	1.3%	1.2%
EBITDA	2,889,850	2,003,265	2,288,323	3,455,140	3,536,685	3,836,674	4,158,824	4,504,734	4,876,116	5,274,801
%margen	41.1%	33.3%	36.8%	45.7%	44.9%	45.7%	46.5%	47.3%	48.1%	48.8%
Depreciación	570,080	630,426	762,268	779,217	791,213	925,923	986,157	1,050,310	1,118,636	1,191,407
%ventas	8.1%	10.5%	12.3%	10.3%	10.0%	11.0%	11.0%	11.0%	11.0%	11.0%
EBIT	2,319,770	1,372,839	1,526,055	2,675,923	2,745,472	2,910,751	3,172,666	3,454,424	3,757,480	4,083,394
%margen	33.0%	22.8%	24.6%	35.4%	34.8%	34.7%	35.5%	36.3%	37.0%	37.8%
EBT	2,209,911	1,109,039	1,663,235	2,676,613	1,977,777	2,133,660	2,385,849	2,657,546	2,950,207	3,265,392
%margen	31.4%	18.5%	26.8%	35.4%	25.1%	25.4%	26.7%	27.9%	29.1%	30.2%
Impuestos	684,976	629,808	767,498	1,421,783	905,656	993,601	1,111,040	1,237,563	1,373,850	1,520,624
Tasa de Impuestos	31.00%	56.79%	46.14%	53.12%	45.79%	46.57%	46.57%	46.57%	46.57%	46.57%
Utilidad Neta	1,327,838	406,797	835,403	1,193,383	907,942	1,140,059	1,274,809	1,419,983	1,576,358	1,744,767
%margen	18.9%	6.8%	13.5%	15.8%	11.5%	13.6%	14.3%	14.9%	15.5%	16.1%
EBIT*(1-Tasa de Impuestos)	1,600,743	593,223	821,859	1,254,507	1,488,276	1,555,275	1,695,222	1,845,771	2,007,700	2,181,843
Gastos de Capital (CAPEX)	1,661,813	1,222,075	1,215,386	1,186,453	1,264,660	1,291,288	1,318,477	1,346,238	1,374,584	1,403,526
%ventas	23.6%	20.3%	19.6%	15.7%	16.0%	15.4%	14.7%	14.1%	13.6%	13.0%
Capital de Trabajo	1,175,940	1,597,377	1,532,594	2,185,154	2,233,425	2,660,961	3,170,340	3,777,226	4,500,287	5,361,761
%ventas	16.7%	26.6%	24.7%	28.9%	28.3%	31.7%	35.5%	39.7%	44.4%	49.6%
+/- en Capital de Trabajo	1,572,339	-421,437	64,783	-652,560	-48,271	-427,536	-509,378	-606,887	-723,061	-861,474
%ventas	22.4%	-7.0%	1.0%	-8.6%	-0.6%	-5.1%	-5.7%	-6.4%	-7.1%	-8.0%
Free Cash Flow	2,081,349	-419,863	433,524	194,711	966,558	762,374	853,524	942,957	1,028,692	1,108,250
%ventas	29.6%	-7.0%	7.0%	2.6%	12.3%	9.1%	9.5%	9.9%	10.1%	10.3%
Free Cash Flow (%México)	516,778	-104,248	107,640	48,345	239,987	180,815	202,433	223,644	243,978	262,847

Fuente: Elaboración propia con datos del Informe Anual 2018 de Grupo México.

Se debe notar que, para calcular el *Earnings Before Taxes* (EBT) se consideran los rubros de gastos e ingresos por intereses, plusvalía o minusvalía de acciones y otros ingresos o gastos, y la suma de éstos se resta al rubro *Earnings Before Interests and Taxes* (EBIT). También, para calcular la Utilidad Neta, del EBT se restan los impuestos, se suma la participación en subsidiaria no consolidada y en asociada y se resta la utilidad neta atribuida a participación no controladora.

B.3 Flujos de Caja Libres de la Empresa

Los Flujos de Caja Libres de la Empresa o *Free Cash Flow to the Firm* (FCFF) se utilizan cuando la empresa se valúa en su totalidad, al descontar los flujos de caja libres,

por medio del costo capital promedio ponderado (WACC), para todos los acreedores de la empresa, incluyendo accionistas, tenedores de bonos y accionistas preferentes. Existen dos formas de calcular los FCFF, una es agregando los flujos de caja de los acreedores o *claimholders*, y la otra es usar las ganancias antes de intereses e impuestos (EBIT) (Damodaran, 1996).

Esta última es la que se elige para calcular los flujos de caja libres como sigue:

$$FCFF = EBIT * (1 - \text{Tasa de impuestos}) + \text{Depreciación} - \text{Gastos de Capital} - \Delta\text{Capital de Trabajo}$$

Una medida que es usada comúnmente es el EBITDA, la cual, es relacionada con los FCFF, pero estos toman en cuenta la obligación fiscal potencial de las ganancias, así como las exigencias de los gastos de capital y los incrementos o decrementos del capital de trabajo. Otra medida que también es usada como alternativa es el *Net Operative Income* (NOI), el cual, también se calcula como $EBITDA * (1 - \text{Tasa de impuestos})$, y se define como el beneficio de las operaciones antes de impuestos y gastos no operativos. Si los gastos no operativos son deducidos de impuestos y son sumados al NOI, entonces se obtiene el EBIT nuevamente (Damodaran, 1996).

B.4 Tasa de Crecimiento (Growth Rate)

La tasa de crecimiento es una proporción estimada a perpetuidad, respecto a lo que crecerá la empresa que se está valuando a futuro, es decir, se espera que la empresa siga generando ingresos en un tiempo indefinido, y que ésta no deje de existir.

Asimismo, existen diversas formas de calcular esta tasa de crecimiento, como menciona Damodaran (1996), se pueden hacer estimaciones con el promedio

geométrico de las *Earnings per Share* (EPS) de varios años o el promedio aritmético del porcentaje de éstos. Sin embargo, este método puede subestimar o sobreestimar esta tasa si se agregan o eliminan algunos años de la muestra. Otra forma de calcular la tasa de crecimiento es por medio de una regresión lineal o logarítmica sobre las EPS de la empresa o desarrollar un análisis estadístico de series de tiempo con base en las EPS de distintos periodos.

De otra forma, esta tasa de crecimiento se puede obtener con la tasa de pago de dividendos o *dividend payout*, y con esta calcular la tasa de retención (*b*) o *retention rate* como su complemento, y finalmente multiplicar *b* por el retorno sobre activos o *Return on Assets* (ROA).

Damodaran (1996) explica que, la principal razón de la diferencia entre la tasa de crecimiento calculada con los flujos de caja del patrimonio y la calculada con los flujos de toda la empresa, es la existencia del apalancamiento o *leverage*, ya que, este aumenta la tasa de crecimiento de los FCFE, en contraste con la tasa de crecimiento de los FCCF.

Así como el rendimiento sobre los activos (ROA) de una empresa excede a la tasa de interés después de impuestos, entonces si se incrementa el apalancamiento, se incrementara la tasa de crecimiento de las EPS, ya que, estas se utilizan si se valúa a la empresa considerando los FCFE, pero si se valúa a la empresa en su totalidad, como en este caso, la tasa de crecimiento se calcula como $g_{EBIT} = b * ROA$, además, se define al cálculo del retorno sobre activos como sigue:

$$ROA = \frac{EBIT*(1-Tasa\ de\ impuestos)}{Total\ Activos} = \frac{EBIT*(1-Tasa\ de\ impuestos)}{Ventas} * \frac{Ventas}{Total\ Activos} = \frac{\%Beneficio\ antes\ de\ Impuestos}{Rotación\ de\ Activos}$$

Donde en esta fórmula, se puede analizar la relación entre el %Beneficio antes de Impuestos y la Rotación de Activos, ya que, generalmente, si uno se incrementa el otro disminuye.

En la siguiente tabla se puede observar la aplicación de este método con datos reales y proyectados de Grupo México®, y el respectivo cálculo de esta tasa de crecimiento a perpetuidad.

Tabla 15. Tasa de Crecimiento de Grupo México

En miles de dólares	Real					Proyección				
	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Ingreso por Ventas	7,033,621	6,008,688	6,209,957	7,554,512	7,883,888	8,396,761	8,942,998	9,524,770	10,144,387	10,804,313
Total Activos	14,192,666	15,524,300	16,182,657	17,027,269	17,121,169	16,880,110	17,563,277	18,279,131	19,029,467	19,816,184
Utilidad Neta	1,327,838	406,797	835,403	1,193,383	907,942	1,140,059	1,274,809	1,419,983	1,576,358	1,744,767
EBIT*(1-Tasa de Impuestos)	1,600,743	593,223	821,859	1,254,507	1,488,276	1,555,275	1,695,222	1,845,771	2,007,700	2,181,843
ROA (Return on Assets)	11.28%	3.82%	5.08%	7.37%	8.69%	9.21%	9.65%	10.10%	10.55%	11.01%
Dividendos Pagados	531,768	38,006	15,551	220,399	873,725	776,831	868,649	967,569	1,074,122	1,188,876
%Dividend Payout	40.05%	9.34%	1.86%	18.47%	96.23%	68.14%	68.14%	68.14%	68.14%	68.14%
b (retention rate)	59.95%	90.66%	98.14%	81.53%	3.77%	31.86%	31.86%	31.86%	31.86%	31.86%
g (growth rate)	6.76%	3.46%	4.98%	6.01%	0.33%	2.94%	3.08%	3.22%	3.36%	3.51%

Fuente: Elaboración propia con datos del Informe Anual 2018 de Grupo México.

Se puede observar que la tasa de crecimiento obtenida para Grupo México® en 2023, es de 3.51%, ahora con esta tasa se calcula el valor residual o terminal de esta empresa como sigue:

$$Valor\ Terminal = \frac{EBIT_n * (1 + Tasa\ de\ crecimiento)}{WACC - Tasa\ de\ crecimiento} = \frac{EBIT_{n+1}}{WACC - Tasa\ de\ crecimiento}$$

Sustituyendo los valores, en miles de dólares, el valor terminal se obtiene así:

Tabla 16. Valor Terminal de Grupo México

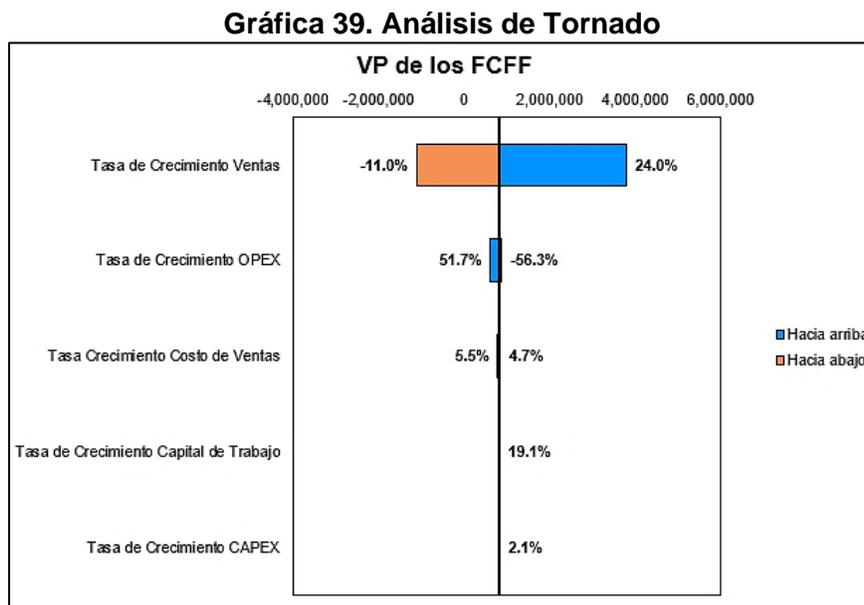
Valor Terminal	
Flujo de Caja Libre del último año (2023)	262,847
Tasa de Crecimiento a Perpetuidad	3.51%
Valor Terminal	4,079,283
Período de Descuento	5.0
Factor de Descuento	0.62
Valor Presente del Valor Terminal	2,512,579

Fuente: Elaboración propia.

El valor terminal es de 4,079 millones de dólares, y su valor presente descontado de 2023 a 2018, es de 2,513 millones de dólares. Este último valor, se debe sumar al valor presente de los flujos de caja libres, de 2019 a 2023, para poder obtener el valor presente de la división minera en México de Grupo México®.

B.5 Análisis del Valor Presente de Grupo México

Las variables que influyen en el Valor Presente de los flujos de caja libres proporcionan resultados interesantes que pueden explicarse a continuación.

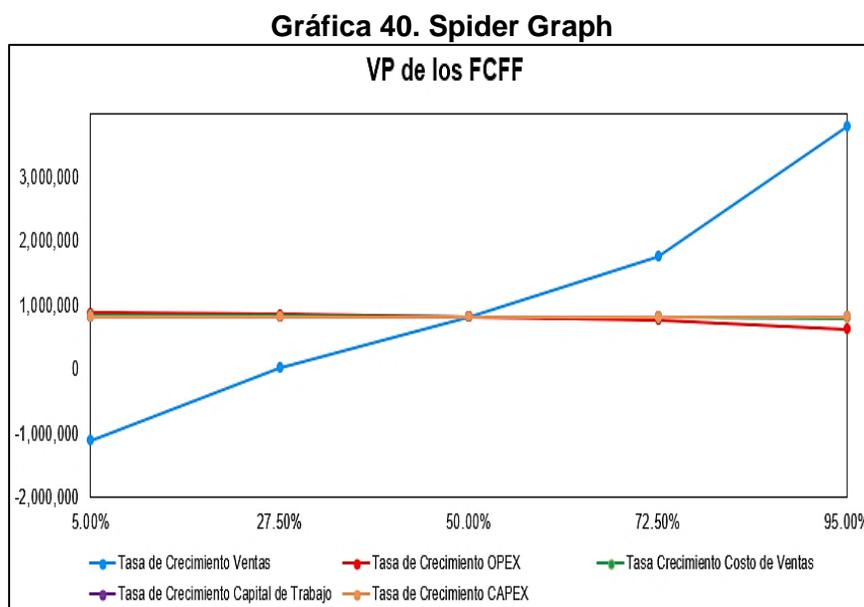


Fuente: Elaboración propia.

Esta gráfica muestra para los percentiles del 5% y 95%, cuáles variables consideradas para simular el valor presente de los flujos de caja libres influyen más, tanto para el incremento como para el decremento de éste. La variable tasa de crecimiento de ventas es la que influye más sobre el valor presente de los flujos de caja libres descontados, ya que, posee el 99.73% de la explicación de la variación, entonces, si el

crecimiento de ventas alcanza el 24%, se obtiene un valor presente de 3,799 millones de dólares, y si decrece 11%, el valor presente se sitúa en -1,107 millones de dólares.

Asimismo, la otra variable que influye en mayor proporción es el crecimiento de gastos operativos u *Operative Expenditure*, ya que, si se añade ésta se tiene el 99.99% de la explicación de variación acumulada, por lo que, hace variar al valor presente a un valor de 629 millones de dólares cuando alcanza el 51.7%, es decir, la relación es inversamente proporcional, y cuando esta variable decrece al -56.3%, el valor presente alcanza los 881 millones de dólares.



Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con los 5 percentiles (5%, 25%, 50%, 75% y 95%), esta gráfica de araña o *spider graph* muestra los posibles valores del valor presente de los flujos de caja libres para cada uno de los percentiles por cada variable, es decir, es como una gráfica de tornado, pero detallada por cada percentil para cada variable que provoca que el valor presente crezca o decrezca.

El valor de 828 millones de dólares se considera como la mediana o el percentil del 50%, y se observa que la variable crecimiento de ventas es la que provoca que el valor presente varíe más para cada percentil.

Asimismo, las variables gasto operativo, costo de ventas, gasto de capital y capital de trabajo se comportan de manera inversa respecto al valor presente, ya que, si una de estas incrementa su valor se tiene un decrecimiento en el valor presente, por lo que, esta relación inversa se observa en la pendiente negativa que tienen estas variables en la gráfica.

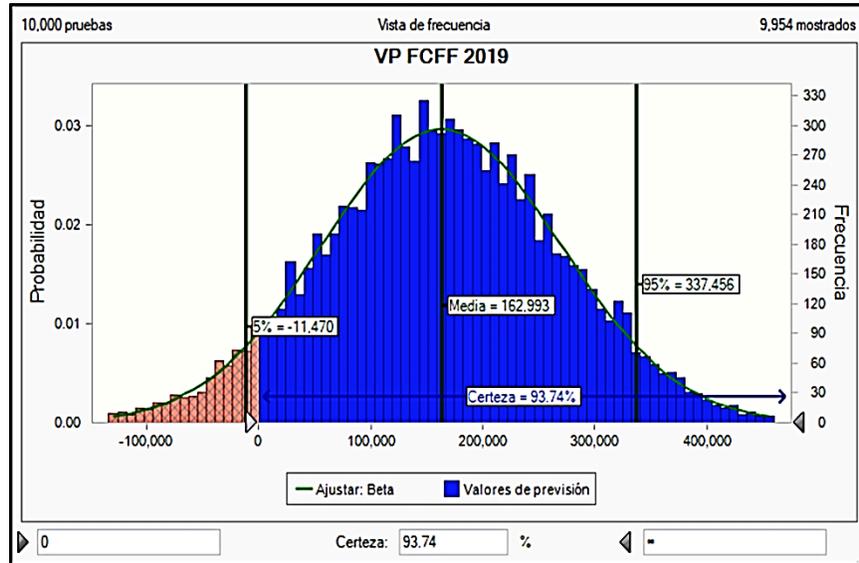
B.6 Los Valores Presentes Simulados

A continuación, se presentan las 10,000 simulaciones realizadas con el software Crystal Ball®, correspondientes para cada valor presente de los Flujos de Caja Libres o *Free Cash Flow to the Firm* (FCFF) de Grupo México®, desde 2019 hasta 2023.

Se puede observar que algunos los valores presentes simulados se distribuyen log-normal, beta o gamma. A su vez, se observa que conforme transcurre el tiempo, existe una menor probabilidad de que el valor presente de los Flujos de Caja Libres sea positivo, esto implica que, los cambios en el crecimiento o decrecimiento de las variables que influyen, en mayor medida, en el comportamiento del valor presente de los flujos de caja libres para cada año.

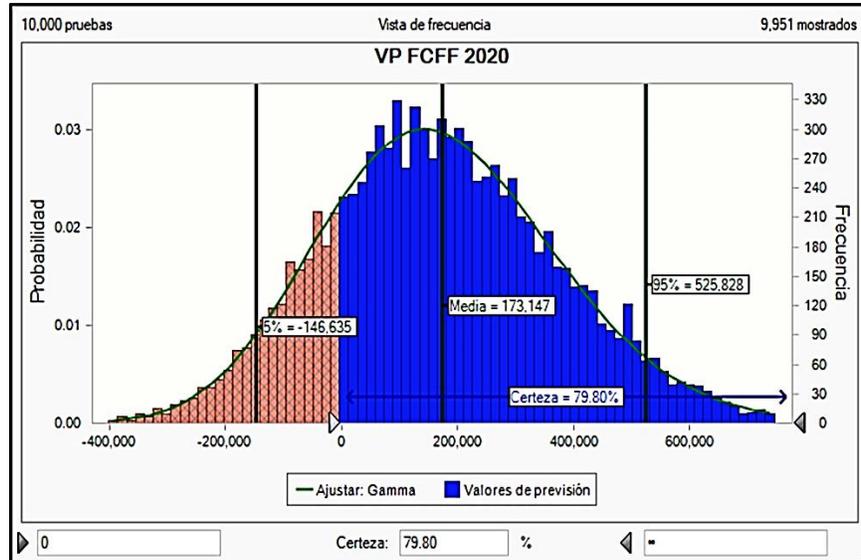
Por medio del software Crystal Ball® se obtuvieron los siguientes resultados:

Gráfica 41. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2019



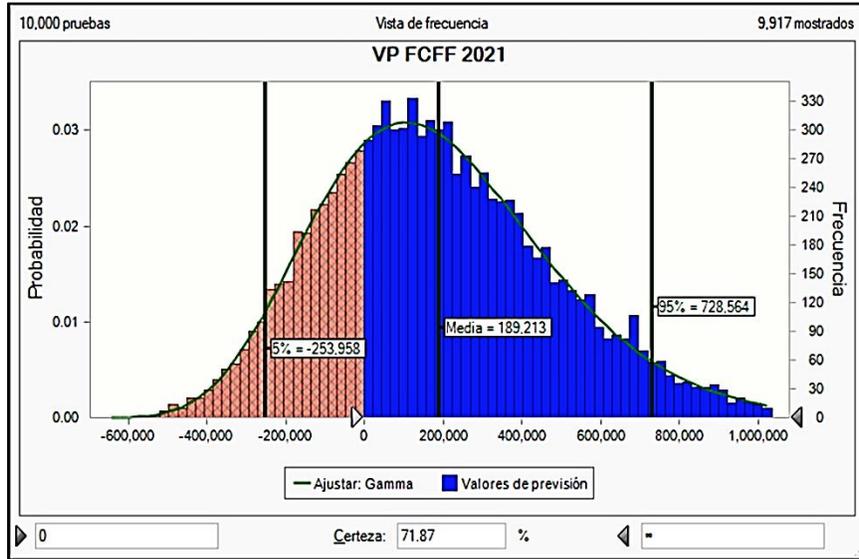
Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 42. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2020



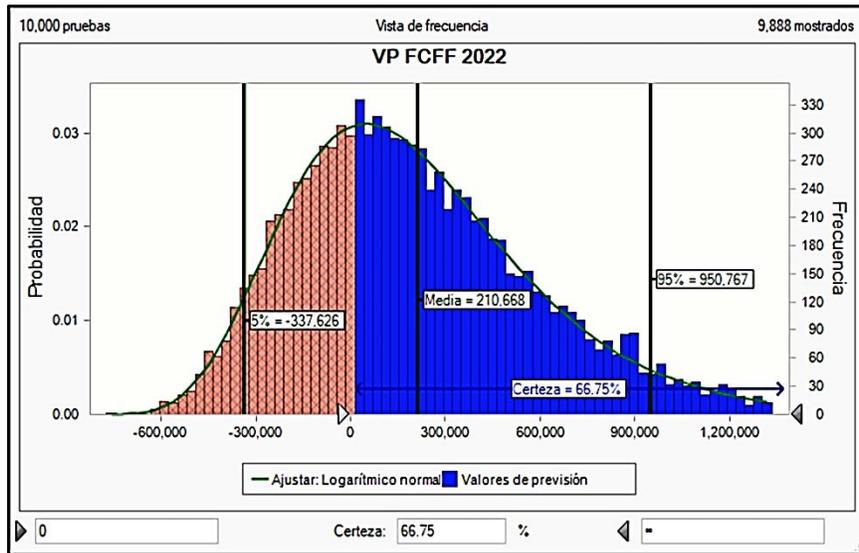
Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 43. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2021



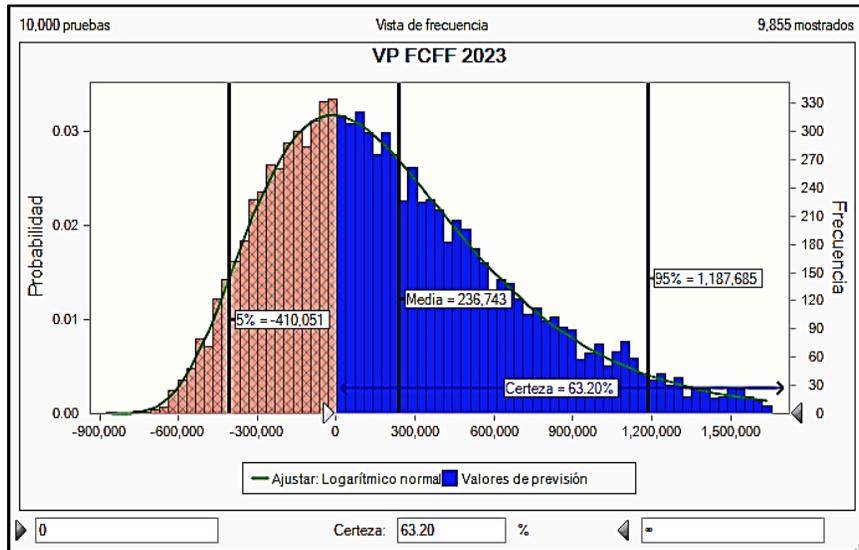
Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 44. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2022



Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 45. Simulación del Valor Presente del FCFF de 2023



Fuente: Elaboración propia.

La siguiente tabla muestra las variables consideradas para simular los distintos valores presentes de los flujos de caja libres de Grupo México® con el software Crystal Ball®, es decir, las variables que influyen para calcular los flujos de caja libres. Se contempla el comportamiento histórico del periodo de 2014 a 2018 para cada variable, y una distribución normal con su respectiva media y desviación estándar, entonces con base en este comportamiento se pueden generar simulaciones que se ajustan a ciertas distribuciones de probabilidad para cada año de la proyección.

Tabla 17. Variables para Simular el Valor Presente de los FCFF

Variable	Media	Desv. Est.
Tasa de Crecimiento Ventas	6.51%	10.66%
Tasa de Crecimiento Costos	5.15%	0.22%
Tasa de Crecimiento OPEX	-2.32%	32.78%
Tasa de Crecimiento CAPEX	2.11%	6.34%
Tasa de Crecimiento Capital de Trabajo	19.14%	23.47%

Fuente: Elaboración propia.

Anexo C

C.1 La Proyección del Precio del Cobre

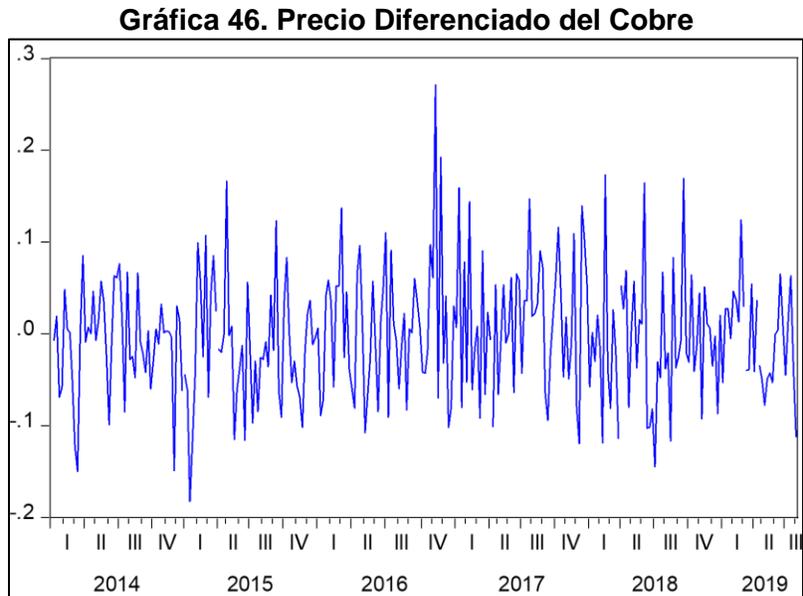
A través del correlograma, se observa que la autocorrelación no tiende a decrecer rápidamente conforme transcurre el tiempo, se puede decir que la serie no es estacionaria por este hecho.

Tabla 18. Correlograma de la Serie no Estacionaria del Cobre.

Sample: 1/03/2014 8/02/2019 Included observations: 286						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.977	0.977	276.11	0.000
		2	0.955	-0.006	540.67	0.000
		3	0.931	-0.045	793.08	0.000
		4	0.911	0.079	1035.7	0.000
		5	0.892	-0.008	1268.8	0.000
		6	0.872	-0.027	1492.3	0.000
		7	0.852	0.015	1706.6	0.000
		8	0.831	-0.044	1911.3	0.000
		9	0.811	0.001	2106.9	0.000
		10	0.791	-0.004	2293.5	0.000
		11	0.777	0.130	2474.4	0.000
		12	0.763	-0.030	2649.2	0.000
		13	0.748	-0.021	2817.9	0.000
		14	0.735	0.063	2981.5	0.000
		15	0.726	0.086	3141.8	0.000
		16	0.718	0.002	3299.2	0.000
		17	0.708	-0.044	3452.9	0.000
		18	0.699	0.006	3602.9	0.000
		19	0.686	-0.064	3748.0	0.000
		20	0.669	-0.111	3886.7	0.000
		21	0.652	0.009	4018.8	0.000
		22	0.634	-0.046	4144.3	0.000
		23	0.617	-0.005	4263.6	0.000
		24	0.599	-0.018	4376.4	0.000
		25	0.580	-0.018	4482.4	0.000
		26	0.560	-0.019	4581.7	0.000
		27	0.539	-0.045	4674.2	0.000
		28	0.517	-0.047	4759.4	0.000
		29	0.496	0.019	4838.1	0.000
		30	0.474	-0.066	4910.3	0.000
		31	0.451	-0.051	4975.9	0.000
		32	0.433	0.098	5036.7	0.000
		33	0.414	-0.057	5092.4	0.000
		34	0.394	-0.086	5143.1	0.000
		35	0.375	0.055	5189.2	0.000
		36	0.360	0.063	5231.9	0.000

Fuente: Elaboración propia.

Ahora se diferencia la serie una vez, y se puede observar el siguiente comportamiento:



Se observa que el precio del cobre tuvo un crecimiento atípico en noviembre de 2016. En general, la serie diferenciada tiene un comportamiento estacionario.

Se comprueba si la serie de la diferencia del cobre es estacionaria por medio de las siguientes pruebas estadísticas:

Tabla 19. Pruebas Estadísticas de la Serie Diferenciada del Cobre

Prueba	Nivel de Confianza	Hipótesis	Valores Críticos	Estadístico de Prueba	Resultado
Phillips-Perron	99%	La serie tiene raíz unitaria	-3.9907	-16.5997	Se rechaza H0
	95%		-3.4257		
	90%		-3.1360		
Dickey-Fuller	99%	La serie tiene raíz unitaria	-3.4684	-16.1422	Se rechaza H0
	95%		-2.9132		
	90%		-2.6106		
Augmented Dickey-Fuller	99%	La serie tiene raíz unitaria	-3.9907	-16.6015	Se rechaza H0
	95%		-3.4257		
	90%		-3.1360		

Fuente: Elaboración propia.

La prueba Phillips-Perron indica que la serie no tiene raíces unitarias y que es estacionaria, al pasar las pruebas con el valor del estadístico y la probabilidad menor al 5%. A su vez, el estadístico de la prueba Dickey-Fuller, indica que la serie es estacionaria al rechazarse la hipótesis nula de que la serie tiene raíces unitarias. La última prueba, Dickey-Fuller aumentada, indica lo mismo que las pruebas anteriores, ya sea con el nivel del estadístico o el valor de la probabilidad.

A su vez, el correlograma de la serie diferenciada tiene el siguiente comportamiento:

Tabla 20. Correlograma de la Serie Diferenciada del Cobre

Sample: 1/03/2014 8/02/2019 Included observations: 285						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.007	0.007	0.0132	0.909
		2	0.037	0.037	0.4125	0.814
		3	-0.093	-0.093	2.9030	0.407
		4	0.025	0.025	3.0803	0.544
		5	-0.007	-0.000	3.0933	0.686
		6	-0.027	-0.038	3.3040	0.770
		7	0.036	0.042	3.6803	0.816
		8	0.001	0.001	3.6806	0.885
		9	0.056	0.048	4.6078	0.867
		10	-0.114	-0.108	8.4536	0.585
		11	0.033	0.032	8.7814	0.642
		12	-0.030	-0.015	9.0595	0.698
		13	-0.045	-0.070	9.6735	0.720
		14	-0.119	-0.107	13.953	0.453
		15	-0.019	-0.016	14.066	0.521
		16	0.035	0.025	14.429	0.567
		17	0.002	-0.008	14.431	0.636
		18	0.071	0.068	15.973	0.594
		19	0.093	0.113	18.631	0.481
		20	-0.004	-0.032	18.636	0.546
		21	0.038	0.064	19.086	0.580
		22	-0.002	0.019	19.087	0.640
		23	0.043	0.032	19.669	0.662
		24	-0.002	-0.013	19.670	0.715
		25	-0.021	-0.029	19.806	0.757
		26	-0.009	-0.009	19.830	0.800
		27	0.041	0.018	20.365	0.815
		28	-0.009	-0.027	20.389	0.850
		29	-0.005	0.015	20.397	0.880
		30	0.040	0.042	20.910	0.891
		31	-0.122	-0.113	25.698	0.736
		32	0.055	0.084	26.667	0.733
		33	0.003	0.060	26.671	0.774
		34	-0.048	-0.090	27.425	0.780
		35	-0.081	-0.064	29.560	0.728
		36	0.002	0.019	29.561	0.767

Fuente: Elaboración propia.

Ahora se observa que la autocorrelación decae conforme transcurre el tiempo, también pasa lo mismo con la correlación parcial.

A través de diferentes pruebas se eligió al mejor modelo de la serie de tiempo, el cual, cumple con tener un menor criterio de Akaike y mejor significancia de las variables, así como un mayor ajuste sobre los datos (R^2).

El modelo elegido se calcula con la ecuación $\ln(\text{preciocobre})_t = c + \text{ar}(1)_t$.

Por lo anterior, se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 21. El Modelo de la Serie del Cobre

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.016277	0.070383	14.43922	0.0000
AR(1)	0.983484	0.010082	97.55276	0.0000
SIGMASQ	0.000639	4.64E-05	13.75584	0.0000
R-squared	0.966166	Mean dependent var		0.990984
Adjusted R-squared	0.965927	S.D. dependent var		0.137654
S.E. of regression	0.025409	Akaike info criterion		-4.485017
Sum squared resid	0.182714	Schwarz criterion		-4.446667
Log likelihood	644.3574	Hannan-Quinn criter.		-4.469645
F-statistic	4040.734	Durbin-Watson stat		1.945485
Prob(F-statistic)	0.000000			
Inverted AR Roots	.98			

Fuente: Elaboración propia.

El correlograma de los residuales del modelo seleccionado es el siguiente:

Tabla 22. Correlograma del Modelo de la Serie del Cobre

Sample: 1/03/2014 8/02/2019 Included observations: 286 Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.017	0.017	0.0845	
		2	0.055	0.055	0.9680	0.325
		3	-0.116	-0.118	4.8816	0.087
		4	0.039	0.041	5.3266	0.149
		5	0.002	0.014	5.3282	0.255
		6	-0.038	-0.057	5.7440	0.332
		7	0.033	0.045	6.0619	0.416
		8	0.008	0.011	6.0793	0.531
		9	0.059	0.043	7.1309	0.523
		10	-0.116	-0.109	11.118	0.268
		11	0.041	0.044	11.629	0.311
		12	-0.018	0.001	11.732	0.384
		13	-0.037	-0.073	12.149	0.434
		14	-0.126	-0.107	16.941	0.202
		15	-0.046	-0.033	17.582	0.227
		16	0.052	0.044	18.408	0.242
		17	0.035	0.023	18.788	0.280
		18	0.052	0.045	19.635	0.293
		19	0.109	0.135	23.294	0.180
		20	-0.001	-0.033	23.294	0.225
		21	0.069	0.084	24.773	0.210
		22	-0.023	0.012	24.934	0.250
		23	0.041	0.023	25.471	0.275
		24	-0.005	-0.010	25.481	0.326
		25	-0.018	-0.034	25.583	0.375
		26	-0.004	0.004	25.587	0.430
		27	0.034	0.019	25.954	0.466
		28	0.024	-0.011	26.133	0.511
		29	0.008	0.033	26.156	0.564
		30	0.030	0.028	26.454	0.601
		31	-0.130	-0.108	31.950	0.370
		32	0.048	0.073	32.685	0.384
		33	0.015	0.078	32.757	0.430
		34	-0.042	-0.088	33.330	0.451
		35	-0.089	-0.082	35.950	0.377
		36	0.003	0.031	35.952	0.424

Fuente: Elaboración propia.

Los *Q-statistics* son mayores al 0.05, por lo tanto, no se rechaza H0, es decir no existe autocorrelación, si se rechazara H0 habría problemas de autocorrelación en la serie de tiempo.

C.2 La Proyección del Precio del Zinc

A través del siguiente correlograma se observa que la autocorrelación no tiende a decrecer rápidamente conforme transcurre el tiempo, entonces, la serie no es estacionaria por esto.

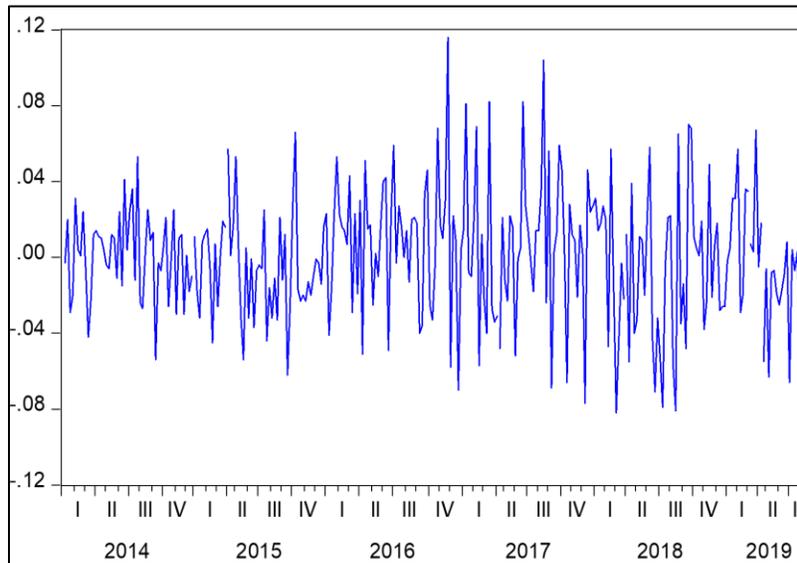
Tabla 23. Correlograma de la Serie no Estacionaria del Zinc

Sample: 1/03/2014 8/02/2019 Included observations: 286						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.987	0.987	281.79	0.000
		2	0.975	-0.006	557.42	0.000
		3	0.963	0.020	827.31	0.000
		4	0.951	-0.000	1091.6	0.000
		5	0.937	-0.097	1349.0	0.000
		6	0.923	-0.008	1599.7	0.000
		7	0.910	0.010	1843.9	0.000
		8	0.895	-0.058	2081.1	0.000
		9	0.877	-0.128	2309.6	0.000
		10	0.860	0.033	2530.3	0.000
		11	0.845	0.043	2743.9	0.000
		12	0.828	-0.038	2950.2	0.000
		13	0.813	0.047	3149.5	0.000
		14	0.798	0.033	3342.5	0.000
		15	0.784	-0.011	3529.5	0.000
		16	0.770	0.004	3710.3	0.000
		17	0.755	-0.034	3884.8	0.000
		18	0.740	-0.032	4053.0	0.000
		19	0.723	-0.103	4214.1	0.000
		20	0.705	-0.019	4368.0	0.000
		21	0.688	-0.002	4515.2	0.000
		22	0.671	-0.017	4655.7	0.000
		23	0.653	-0.044	4789.3	0.000
		24	0.635	-0.005	4915.9	0.000
		25	0.618	0.051	5036.4	0.000
		26	0.602	0.051	5151.2	0.000
		27	0.585	-0.040	5260.0	0.000
		28	0.567	-0.025	5362.8	0.000
		29	0.552	0.057	5460.5	0.000
		30	0.540	0.112	5554.2	0.000
		31	0.526	-0.058	5643.6	0.000
		32	0.514	0.078	5729.4	0.000
		33	0.503	-0.034	5811.9	0.000
		34	0.494	0.046	5891.5	0.000
		35	0.482	-0.071	5967.8	0.000
		36	0.470	-0.038	6040.5	0.000

Fuente: Elaboración propia.

Ahora se diferencia la serie una vez, y se puede observar el siguiente comportamiento:

Gráfica 47. Precio Diferenciado del Zinc



Fuente: Elaboración propia.

Se observa un crecimiento atípico en el precio en noviembre de 2016 y otro en agosto de 2017, y para 2019 se han tenido mayores contracciones en el precio. Se puede apreciar que la serie diferenciada presenta un comportamiento estacionario.

Se comprueba si la serie diferenciada del zinc es estacionaria por medio de las siguientes pruebas estadísticas:

Tabla 24. Pruebas Estadísticas de la Serie Diferenciada del Zinc

Prueba	Nivel de Confianza	Hipótesis	Valores Críticos	Estadístico de Prueba	Resultado
Phillips-Perron	99%	La serie tiene raíz unitaria	-3.9907	-16.6995	Se rechaza H0
	95%		-3.4257		
	90%		-3.1360		
Dickey-Fuller	99%	La serie tiene raíz unitaria	-3.4684	-16.4151	Se rechaza H0
	95%		-2.9132		
	90%		-2.6106		
Augmented Dickey-Fuller	99%	La serie tiene raíz unitaria	-3.9907	-16.6973	Se rechaza H0
	95%		-3.4257		
	90%		-3.1360		

Fuente: Elaboración propia.

El nivel del estadístico de la prueba Phillips-Perron es el menor de todos y su probabilidad es menor a 0.05, esto indica que la serie es estacionaria, al rechazar la hipótesis nula. De acuerdo con el estadístico de la prueba Dickey-Fuller, este indica que la serie es estacionaria al rechazarse la hipótesis nula a distintos niveles de confianza. La prueba Dickey-Fuller Aumentada, también indica que se rechaza la hipótesis nula y que la serie es estacionaria.

El correlograma de la serie diferenciada muestra el siguiente comportamiento:

Tabla 25. Correlograma de la Serie Diferenciada del Zinc

Sample: 1/03/2014 8/02/2019 Included observations: 285						
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.003	0.003	0.0023	0.962
		2	-0.019	-0.019	0.1028	0.950
		3	-0.022	-0.022	0.2415	0.971
		4	0.089	0.089	2.5329	0.639
		5	0.026	0.025	2.7309	0.741
		6	-0.023	-0.020	2.8799	0.824
		7	0.055	0.061	3.7835	0.804
		8	0.154	0.149	10.828	0.212
		9	-0.049	-0.055	11.542	0.240
		10	-0.088	-0.080	13.831	0.181
		11	0.028	0.028	14.072	0.229
		12	-0.026	-0.062	14.281	0.283
		13	-0.038	-0.043	14.709	0.326
		14	-0.003	0.019	14.711	0.398
		15	0.021	0.000	14.849	0.462
		16	0.035	0.018	15.221	0.508
		17	-0.005	0.033	15.229	0.579
		18	0.077	0.104	17.050	0.520
		19	0.024	0.010	17.220	0.575
		20	-0.019	-0.010	17.330	0.631
		21	-0.017	-0.003	17.416	0.686
		22	0.069	0.041	18.879	0.653
		23	-0.003	-0.027	18.882	0.708
		24	-0.037	-0.044	19.301	0.736
		25	-0.056	-0.067	20.301	0.731
		26	0.074	0.041	22.053	0.686
		27	0.031	0.036	22.356	0.719
		28	-0.107	-0.081	25.968	0.575
		29	-0.101	-0.095	29.257	0.452
		30	0.055	0.046	30.243	0.453
		31	-0.114	-0.119	34.420	0.307
		32	-0.006	0.027	34.432	0.352
		33	-0.064	-0.042	35.776	0.339
		34	0.104	0.069	39.320	0.244
		35	0.023	0.035	39.499	0.276
		36	-0.179	-0.143	50.032	0.060

Fuente: Elaboración propia.

Se observa que la autocorrelación y la correlación parcial van decreciendo conforme transcurre el tiempo, lo que indica la estacionariedad de la serie.

A través de diferentes pruebas se eligió al mejor modelo de series de tiempo, el cual, cumple con tener un menor criterio de Akaike y mejor significancia de las variables, así como un mayor ajuste sobre los datos (R^2).

El modelo elegido se calcula con la ecuación $\ln(\text{preciocobre}) \sim \text{ar}(1)$.

Por lo anterior, se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 26. El Modelo de la Serie del Zinc

Sample: 1/03/2014 8/02/2019				
Included observations: 286				
Convergence achieved after 7 iterations				
Coefficient covariance computed using outer product of gradients				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.987953	0.007845	125.9296	0.0000
SIGMASQ	0.000911	7.44E-05	12.24048	0.0000
R-squared	0.978244	Mean dependent var		0.074651
Adjusted R-squared	0.978168	S.D. dependent var		0.204946
S.E. of regression	0.030282	Akaike info criterion		-4.136487
Sum squared resid	0.260434	Schwarz criterion		-4.110921
Log likelihood	593.5176	Hannan-Quinn criter.		-4.126239
Durbin-Watson stat	1.949259			
Inverted AR Roots	.99			

Fuente: Elaboración propia.

El siguiente correlograma de este modelo indica que no se tienen problemas de autocorrelación al tener probabilidades mayores al 0.05 para los *Q-Statistics*.

Tabla 27. Correlograma del Modelo de la Serie del Zinc

Sample: 1/03/2014 8/02/2019 Included observations: 286 Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term						
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.020	0.020	0.1189	
		2	-0.022	-0.022	0.2598	0.610
		3	-0.046	-0.045	0.8721	0.647
		4	0.125	0.127	5.4313	0.143
		5	0.040	0.033	5.9047	0.206
		6	-0.004	-0.002	5.9084	0.315
		7	0.042	0.056	6.4335	0.376
		8	0.140	0.128	12.225	0.093
		9	-0.026	-0.041	12.434	0.133
		10	-0.067	-0.060	13.792	0.130
		11	0.045	0.051	14.406	0.155
		12	0.002	-0.043	14.407	0.211
		13	-0.015	-0.025	14.477	0.271
		14	-0.040	-0.019	14.954	0.310
		15	-0.017	-0.038	15.040	0.375
		16	0.072	0.058	16.636	0.341
		17	0.035	0.052	17.003	0.385
		18	0.067	0.089	18.384	0.365
		19	0.011	0.011	18.423	0.428
		20	-0.044	-0.045	19.011	0.456
		21	0.005	0.014	19.020	0.521
		22	0.099	0.086	22.104	0.394
		23	0.012	-0.009	22.146	0.451
		24	-0.028	-0.046	22.391	0.497
		25	-0.042	-0.048	22.958	0.522
		26	0.039	0.008	23.431	0.552
		27	0.039	0.030	23.910	0.581
		28	-0.084	-0.067	26.137	0.511
		29	-0.062	-0.066	27.383	0.497
		30	0.026	0.007	27.599	0.539
		31	-0.098	-0.100	30.723	0.429
		32	-0.042	-0.006	31.303	0.451
		33	-0.050	-0.033	32.111	0.461
		34	0.090	0.060	34.753	0.384
		35	0.060	0.076	35.947	0.377
		36	-0.186	-0.152	47.400	0.079

Fuente: Elaboración propia.

Anexo D

D.1 La Deuda y Capital de las Empresas Comparables

Por medio de la base de datos financieros S&P Capital IQ®, que se encuentra en la biblioteca del Posgrado de la Facultad de Contaduría y Administración de la U.N.A.M., en Ciudad Universitaria, se extrae información de 5 empresas mineras de cobre comparables para obtener la beta, la tasa de impuestos corporativa, el nivel de deuda y capital objetivo de Grupo México®, y desarrollar el cálculo de la tasa de descuento, que, en este caso, es la WACC.

Las siguientes cifras están expresadas en millones de dólares, excepto el precio por acción.

Tabla 28. Información Financiera de Río Tinto

Río Tinto	31/12/2014	31/12/2015	31/12/2016	31/12/2017	31/12/2018	Promedio
Tasa de Impuestos (Tax Rate)	31.96%	-	24.70%	30.94%	23.35%	24.03%
Deuda Financiera (Long-Term Debt)	22,416.00	21,040.00	16,889.00	14,575.00	12,401.00	17,464.20
Precio de la Acción (Share Price)	43.96	28.51	41.18	51.91	58.88	44.89
Número de Acciones	1,849	1,799	1,799	1,745	1,634	1,765
Patrimonio (Market Capitalization)	81,304.05	51,284.20	74,079.00	90,604.49	96,225.60	78,699.47
Valor de la empresa (Enterprise Value)	103,720.05	72,324.20	90,968.00	105,179.49	108,626.60	96,163.67

Fuente: Elaboración propia con datos de S&P Capital IQ (2019).

Tabla 29. Información Financiera de Freeport-McMoran

Freeport-McMoran	31/12/2014	31/12/2015	31/12/2016	31/12/2017	31/12/2018	Promedio
Tasa de Impuestos (Tax Rate)	-	-	-	30.32%	25.41%	27.87%
Deuda Financiera (Long-Term Debt)	18,371.00	19,675.00	14,795.00	11,815.00	11,124.00	15,156.00
Precio de la Acción (Share Price)	21.63	7.43	13.25	18.43	12.28	14.60
Número de Acciones	1,039	1,252	1,445	1,448	1,449	1,327
Patrimonio (Market Capitalization)	22,471.34	9,301.24	19,151.29	26,683.78	17,794.44	19,080.42
Valor de la empresa (Enterprise Value)	40,842.34	28,976.24	33,946.29	38,498.78	28,918.44	34,236.42

Fuente: Elaboración propia con datos de S&P Capital IQ (2019).

Tabla 30. Información Financiera de Glencore

Glencore	31/12/2014	31/12/2015	31/12/2016	31/12/2017	31/12/2018	Promedio
Tasa de Impuestos (Tax Rate)	-	-	-	25.42%	44.09%	34.75%
Deuda Financiera (Long-Term Debt)	40,263.00	32,556.00	22,862.00	24,204.00	26,147.00	29,206.40
Precio de la Acción (Share Price)	4.14	1.99	4.12	5.02	4.03	3.86
Número de Acciones	13,078	14,220	14,250	14,297	13,765	13,922
Patrimonio (Market Capitalization)	54,080.50	28,266.72	58,757.55	71,793.39	55,412.89	53,662.21
Valor de la empresa (Enterprise Value)	94,343.50	60,822.72	81,619.55	95,997.39	81,559.89	82,868.61

Fuente: Elaboración propia con datos de S&P Capital IQ (2019).

Tabla 31. Información Financiera de Anglo American

Anglo American	31/12/2014	31/12/2015	31/12/2016	31/12/2017	31/12/2018	Promedio
Tasa de Impuestos (Tax Rate)	-	-	26.60%	26.27%	29.34%	27.40%
Deuda Financiera (Long-Term Debt)	16,892.00	16,283.00	11,320.00	10,678.00	8,480.00	12,730.60
Precio de la Acción (Share Price)	17.93	7.83	14.51	23.48	26.43	18.04
Número de Acciones	1,280	1,285	1,278	1,270	1,266	1,276
Patrimonio (Market Capitalization)	22,949.72	10,053.62	18,547.89	29,820.40	33,470.40	22,968.41
Valor de la empresa (Enterprise Value)	39,841.72	26,336.62	29,867.89	40,498.40	41,950.40	35,699.01

Fuente: Elaboración propia con datos de S&P Capital IQ (2019).

Tabla 32. Información Financiera de Antofagasta

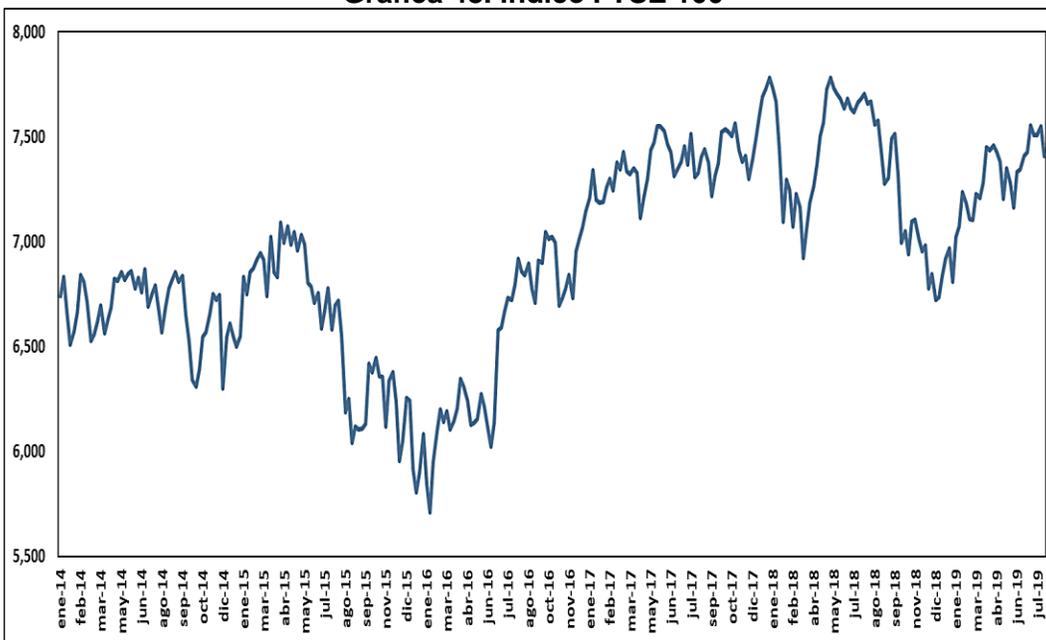
Antofagasta	31/12/2014	31/12/2015	31/12/2016	31/12/2017	31/12/2018	Promedio
Tasa de Impuestos (Tax Rate)	46.34%	63.59%	38.16%	34.61%	33.82%	43.30%
Deuda Financiera (Long-Term Debt)	2,053.50	1,966.30	2,201.00	1,861.60	1,714.90	1,959.46
Precio de la Acción (Share Price)	10.98	6.36	10.59	12.33	13.41	10.73
Número de Acciones	986	986	986	986	986	986
Patrimonio (Market Capitalization)	10,821.51	6,267.09	10,442.67	12,154.47	13,217.06	10,580.56
Valor de la empresa (Enterprise Value)	12,875.01	8,233.39	12,643.67	14,016.07	14,931.96	12,540.02

Fuente: Elaboración propia con datos de S&P Capital IQ (2019).

D.2 Comportamiento de las Acciones e Índices

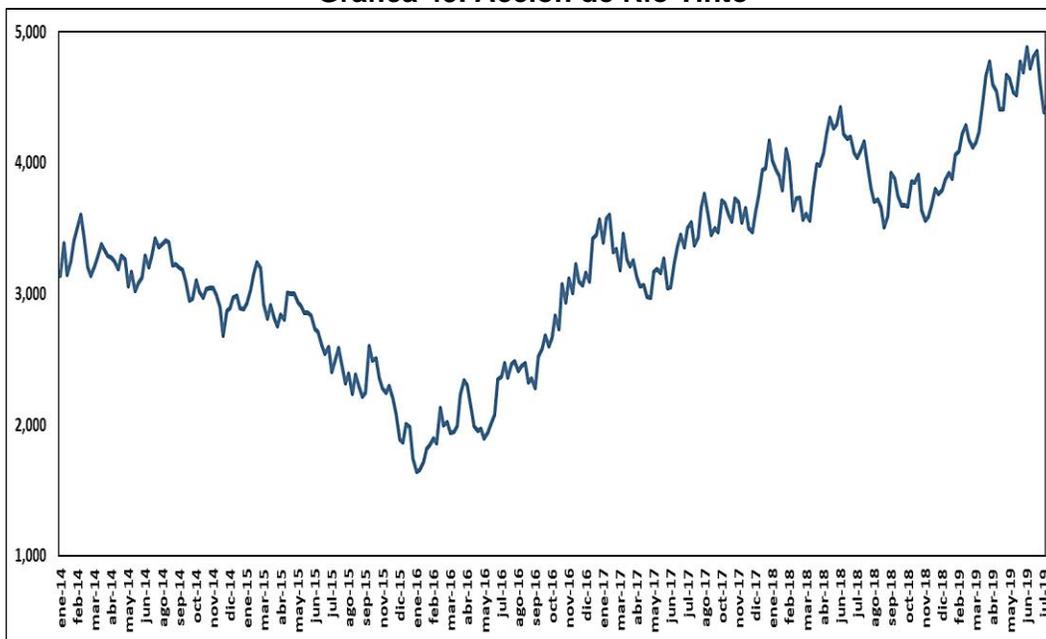
Las siguientes gráficas muestran el comportamiento semanal de la acción de las empresas comparables, así como el índice del país al que pertenecen, para el periodo de enero 2014 a julio 2019.

Gráfica 48. Índice FTSE 100



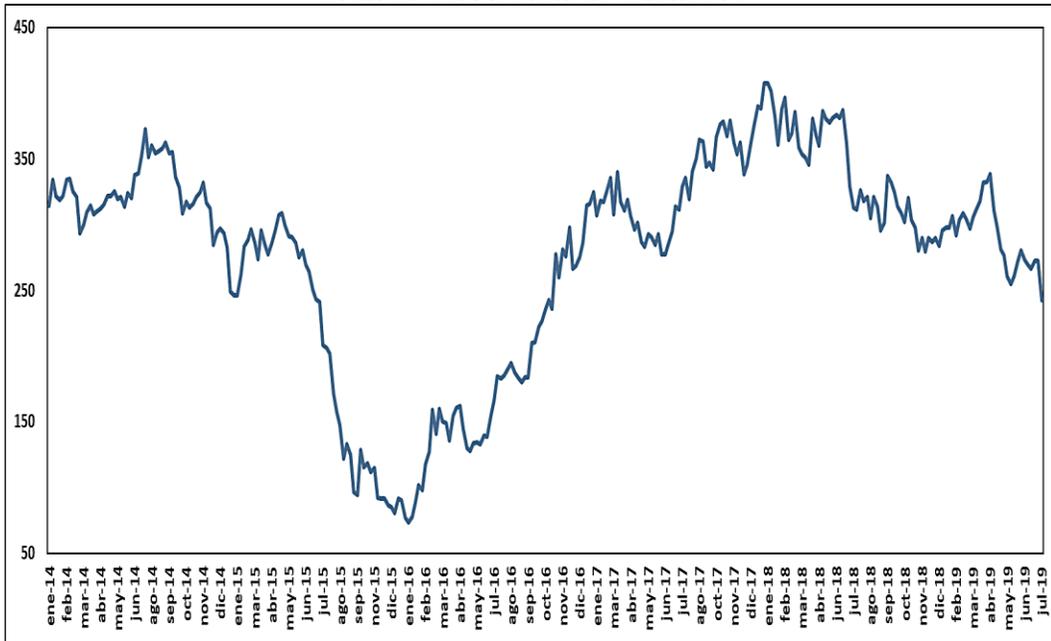
Fuente: Elaboración propia con datos de Investing (2019).

Gráfica 49. Acción de Río Tinto



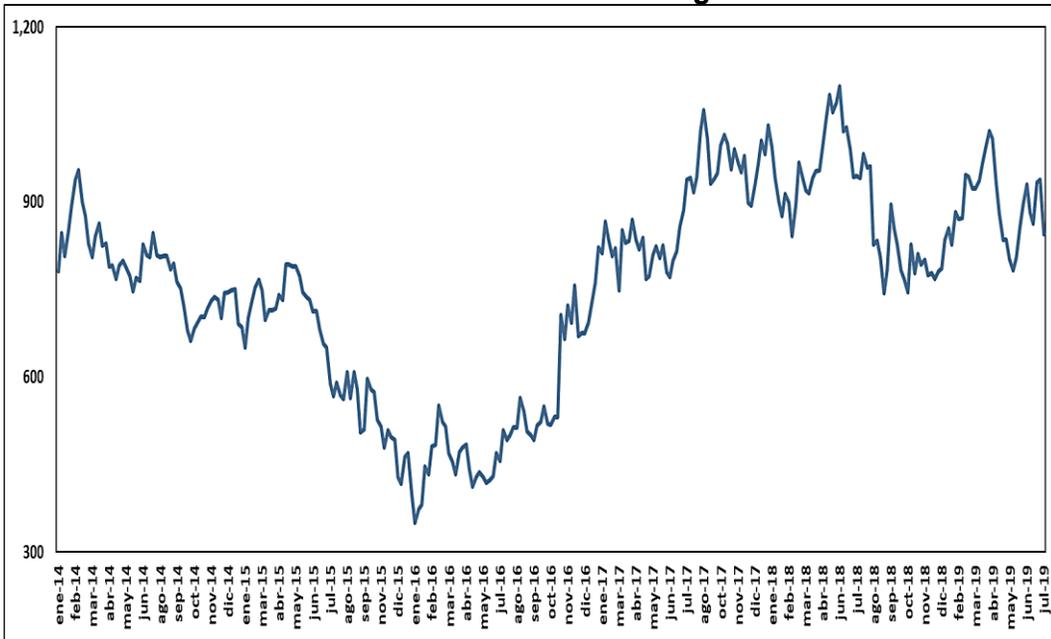
Fuente: Elaboración propia con datos de Investing (2019).

Gráfica 50. Acción de Glencore



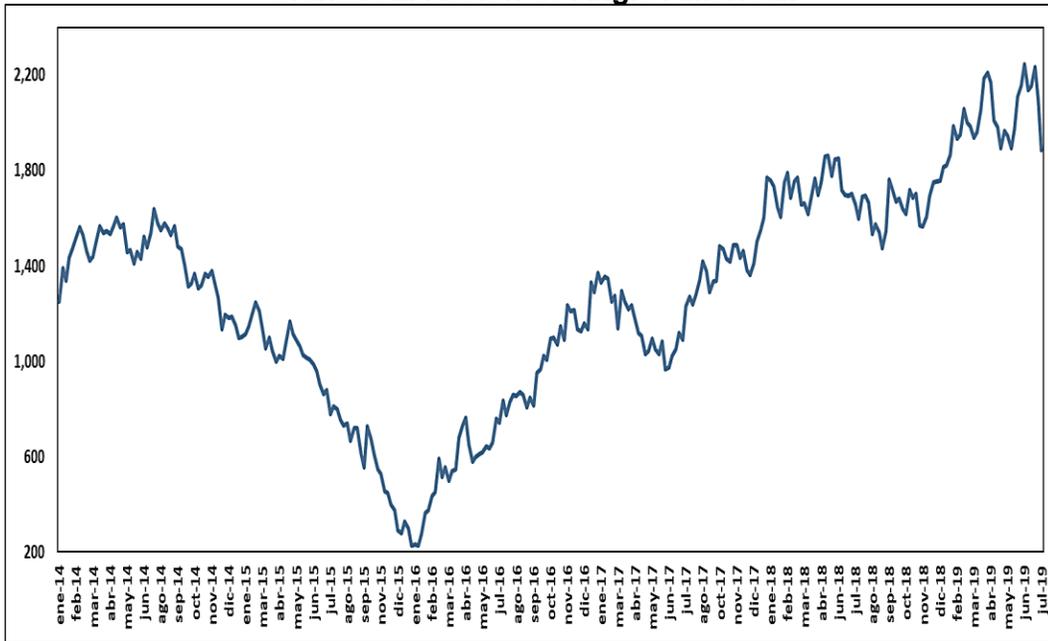
Fuente: Elaboración propia con datos de Investing (2019).

Gráfica 51. Acción de Antofagasta



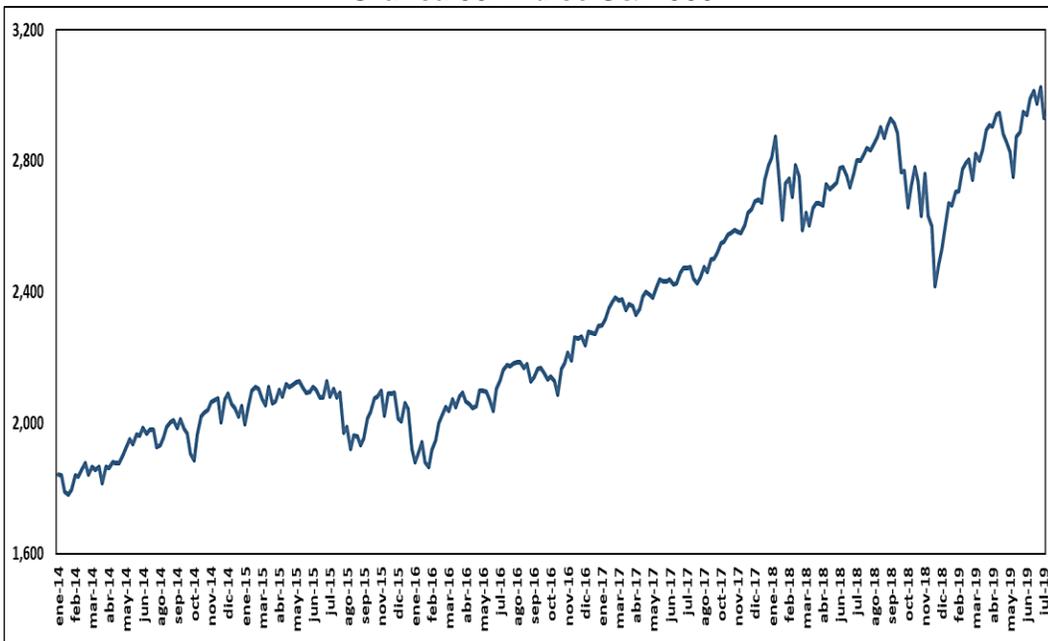
Fuente: Elaboración propia con datos de Investing (2019).

Gráfica 52. Acción de Anglo American



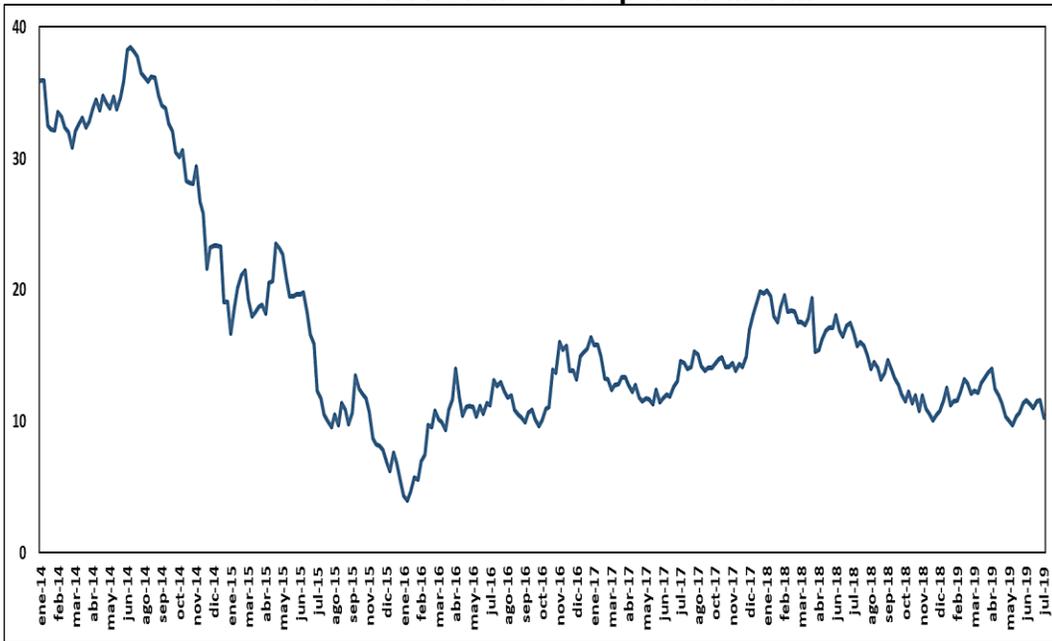
Fuente: Elaboración propia con datos de Investing (2019).

Gráfica 53. Índice S&P 500



Fuente: Elaboración propia con datos de Investing (2019).

Gráfica 54. Acción de Freeport-McMoran



Fuente: Elaboración propia con datos de Investing (2019).

Anexo E

E.1 Códigos de Programación

El siguiente código desarrollado con el software R® muestra la creación de un árbol binomial con las variables calculadas previamente.

```
1. stock_tree = function(S, sigma, delta_t, N) {
2.   tree = matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
3.
4.   u = exp(sigma*sqrt(delta_t))
5.   d = exp(-sigma*sqrt(delta_t))
6.
7.   for (i in 1:(N+1)) {
8.     for (j in 1:i) {
9.       tree[i,j] = S * u^(j-1) * d^((i-1)-(j-1))
10.      }
11.    }
12.    return(tree)
13.  }
14.
15.  #se genera un árbol binomial con frecuencia diaria bursátil
16.  stock_tree(S=3338136290.51378, sigma=0.408575258218714, delta_t=3/75
17.            6, N=756)
18.
19.  p_prob = function(r, delta_t, sigma) {
20.    u = exp(sigma*sqrt(delta_t))
21.    d = exp(-sigma*sqrt(delta_t))
22.
23.    return((exp(r*delta_t) - d)/(u-d))
24.  }
25.
26.  #la probabilidad de que el subyacente suba
27.  p_prob(r=0.0265445552221122, delta_t=3/756, sigma=0.408575258218714)
28.
29.  binomial_option_value = function(tree, sigma, delta_t, r, X,
30.  type) {
31.    p = p_prob(r, delta_t, sigma)
32.
33.    option_tree = matrix(0, nrow=nrow(tree), ncol=ncol(tree))
34.    if(type == 'call') {
35.      option_tree[nrow(option_tree),] = pmax(tree[nrow(tree),] - X,
36.      0)
37.    } else {
38.      option_tree[nrow(option_tree),] = pmax(X - tree[nrow(tree),],
39.      0)
40.    }
41.
42.    for (i in (nrow(tree)-1):1) {
43.      for(j in 1:i) {
```

```

41.         option_tree[i, j] = ((1-
p)*option_tree[i+1,j] + p*option_tree[i+1,j+1])/exp(r*delta_t)
42.     }
43. }
44.     return(option_tree)
45. }
46.
47. #el siguiente código resume todo lo anterior
48. #se define el árbol binomial con los periodos requeridos
49. tree = stock_tree(S=3338136290.51378, sigma=0.408575258218714, delta
_t=3/756, N=756)
50. #el valor de la prima de la opción
51. binomial_option_value(tree, sigma=0.408575258218714,
delta_t=3/756, r=0.0265445552221122, X=413000000, type='call')
52.
53. binomial_option_price = function(type, sigma, T, r, X, S, N) {
54.     p = p_prob(r=r, delta_t=T/N, sigma=sigma)
55.     tree = stock_tree(S=S, sigma=sigma, delta_t=T/N, N=N)
56.     option = binomial_option_value(tree, sigma=sigma, delta_t=T/N,
r=r, X=X, type=type)
57.     return(list(price=option[1,1]))
58. }
59.
60. #el valor de la prima de la opción con frecuencia anual a 3 años
61. binomial_option_price(type='call', sigma=0.408575258218714, T=3,
r=0.0265445552221122, X=413000000, S=3338136290.51378, N=3)
62. #el valor de la prima de la opción con frecuencia mensual a 3 años
63. binomial_option_price(type='call', sigma=0.408575258218714, T=3,
r=0.0265445552221122, X=413000000, S=3338136290.51378, N=36)
64. #el valor de la prima de la opción con frecuencia diaria bursátil
a 3 años
65. binomial_option_price(type='call', sigma=0.408575258218714, T=3,
r=0.0265445552221122, X=413000000, S=3338136290.51378, N=756)
66. #el valor de la prima de la opción con frecuencia diaria a 3 años
67. binomial_option_price(type='call', sigma=0.408575258218714, T=3,
r=0.0265445552221122, X=413000000, S=3338136290.51378, N=1095)

```

Los cálculos anteriores del valor de la prima de la opción call por el método Binomial convergen al valor obtenido con el método de *Black & Scholes* de la sección 4.8.6.1, conforme N va creciendo. Con N=3 años se tiene una diferencia de -228,884; con N=36 meses se tiene una diferencia de -46,577; con N=756 días bursátiles se tiene una diferencia de -1,612 y con N=1,095 días calendario se tiene una diferencia de -1,204.