



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE JUEGOS, UNA APLICACIÓN AL
CRÉDITO A LA VIVIENDA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

CYNTHIA GARCÍA YBARRA

DIRECTORES DE TESIS

ACT. CLAUDIA VILLEGAS AZCORRA

MAE. JUAN CARLOS GUAPILLA
SALAMANCA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

2019





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del Alumno

García
Ybarra
Cynthia
5543554526
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Actuaría
313716102

2. Datos del tutor 1

Act.
Claudia
Villegas
Azcorra

3. Datos de tutor 2

Mtro.
Juan Carlos
Guapilla
Salamanca

4. Datos de sinodal 1

Dra.
Fernanda
Herrera
López

5. Datos de sinodal 2

M. en C.
David Chaffrey
Moreno
Fernández

6. Datos de sinodal 3

M. en C.
Juan Diego
Nieves
Ledesma

7. Datos del trabajo escrito

Teoría de juegos, una aplicación de crédito a la vivienda.
87 p
2019

Agradecimientos

A la **Act. Claudia Villegas Azcorra**, por todo su apoyo, su paciencia, y ayuda para la culminación de este trabajo.

A el **Mto. Juan Carlos Guapilla Salamanca**, por su tiempo, su apoyo, sus consejos invaluable y motivarme en los momentos difíciles de esta investigación.

A la **Dra. Carmen Ybarra Moncada**, por su apoyo en la parte estadística de esta investigación, y sus invaluable observaciones las cuales fueron imprescindible para la culminación de este trabajo.

A la **Dra Fernanda Herrera López, Juan Diego Nieves Ledesma** y a **David Chaffrey Moreno Fernández** por tomar su tiempo en leer mi trabajo, contribuir con su observaciones y por ser mi jurado.

A **Ulises Perez Cendejas**, por ser mi mejor amigo de la carrera, por su apoyo incondicional y su comprensión.

Dedicatoria

En la realización de este trabajo, mi mayor motivación fueron mis padres **Carmen Ybarra Moncada** y **Rodolfo García Nava**, les quiero agradecer por su apoyo, su ejemplo y su amor incondicional. Gracias a ustedes pude culminar mis estudios universitarios. Son el mejor ejemplo tanto como ser humanos y como profesionistas, los admiro y los valoro mucho. Estoy infinitamente agradecida por todas sus enseñanzas y su apoyo incondicional. Los amo mucho.

A **Teresa García Ybarra**, por sus consejos, su amor y comprensión y ser un ejemplo a seguir.

A **Luis David Espinosa Caldera**, por su paciencia y su apoyo ser la persona con la que siempre puedo contar y estar conmigo en los peores momentos, mi compañero de vida.

A **Luis Raúl Juárez Colosio** por sus consejos y las aventuras vividas, ser mi mejor amigo de las pesas.

Esther Moncada , por ser un ejemplo de trabajo y lucha constante.

A Mauro, Pachis, Victor, Juanis por su apoyo y amor brindado durante toda mi vida.

Resumen

La vivienda es un derecho humano y constitucional. Es el sostén de la estructura familiar de una sociedad; por la importancia que ésta representa es necesario realizar estudios del mercado de crédito, con el fin de que la mayoría de la población tenga acceso a una vivienda. Esta investigación se centra en encontrar las mejores estrategias de los bancos que otorgan crédito de vivienda con el propósito de maximizar sus ganancias. Esto permite aumentar la calidad y la oferta de los créditos que se ofrecen.

El objetivo de la presente investigación es analizar el comportamiento del mercado del crédito a la vivienda, con un enfoque de teoría de juegos, para representarlo con distintos escenarios oligopólicos. Se realiza un análisis agregado, considerando información del periodo 2009-2018, y bajo distintas modelos se genera información sobre las principales variables de interés, tal como son: las ganancias por banco, las ganancias en conjunto, la cantidad de producción de cada banco y la cantidad de producción en conjunto.

El estudio permite mostrar las mejores estrategias de los bancos bajo distintas hipótesis. Asimismo, permite explicar cómo la estructura del mercado (cantidad de líderes o seguidores) afecta a la cantidad producida por los bancos que conforman dicho mercado.

El modelo desarrollado utiliza principios de la Teoría de Juegos no cooperativos, con ello se representa el comportamiento estratégico de los participantes del mercado de crédito. Se aplican modelos de oligopolio de Cournot, modelo de oligopolio de Stackelberg y modelos Stackelberg considerando varios líderes.

Mediante las técnicas estadísticas aplicadas se estiman los parámetros necesarios en la aplicación de los modelos de Teoría de Juegos. Se utilizan métodos estadísticos con los cuales se analiza el comportamiento de los bancos que ofrecen crédito de adquisición de vivienda nueva. Además, se realizó un análisis estático simulando las cantidades producidas a través de la modificación de la variable costo marginal.

A través de los métodos estadísticos (Regresión Cuantil) y los modelos de teoría de juegos, fue posible analizar distintas estrategias que los bancos pueden ejercer y las consecuencias de cada una de ellas. Esta investigación muestra que las ganancias en conjunto siempre son menores cuando existe el mismo número de líderes que de seguidores, sin embargo, en este escenario los líderes tienen mayor ganancia que los seguidores.

Índice general

Introducción	1
1. Mercado del crédito a la vivienda en México	4
1.1. Historia del mercado del crédito a la vivienda en México	4
1.2. Estructura del mercado del crédito a la vivienda	5
2. Marco teórico	7
2.1. Economía	7
2.2. Crédito a la vivienda	11
2.3. Modelos de oligopolio	13
2.3.1. Modelo de Cournot	15
2.3.2. Modelo de Stackelberg	19
2.4. Antecedentes	24
2.5. Regresión Cuantil	25
2.5.1. Regresión cuantil (RC)	25
2.5.2. Inferencia de regresión cuantil	29
2.5.3. Acondicionamiento de la variable respuesta y la variable explicativa .	33
2.5.4. Heterocedasticidad	37
3. Metodología	39
4. Resultados y discusión	42
4.1. Análisis de resultados de Regresión Cuantil	42
4.1.1. Análisis exploratorio de la variable respuesta	42
4.1.2. Análisis de regresión cuantil	45
4.1.3. Estimación de parámetros	47
4.1.4. Parámetros en términos de las unidades originales	51
4.2. Análisis de Resultados de Teoría de Juegos	52
4.2.1. Equilibrio del modelo de oligopolio de Cournot	53
4.2.2. Equilibrio del modelo de oligopolio de Stackelberg	53
4.2.3. Análisis estático con diferentes valores de costo marginal	54
4.2.4. Comparación de modelos de Teoría de Juegos con datos del año 2018	58
5. Conclusiones	60
5.0.1. Recomendaciones para trabajos futuros	61
Apéndices	62
A. Estadística	63
B. Anualidad	67
C. Sector de Banca múltiple	68

D. Código Regresión Cuantil (RC)	69
E. Código Recopilación de datos históricos VBA	73
Bibliografía	75

Índice de figuras

2.1. Curva de demanda.	10
2.2. Curva de la oferta.	11
2.3. Equilibrio de Nash en competencia de Cournot.	17
2.4. Equilibrio de Nash en competencia de Stackelberg.	20
2.5. Función de pérdida	26
2.6. Modelos de RC estimados.	29
2.7. Modelos de RC estimados.	29
4.1. Histograma de la variable respuesta, precio del crédito a la vivienda.	43
4.2. Gráfica Q-Q normal para el precio del crédito a la vivienda.	44
4.3. Diagrama de caja del crédito a la vivienda.	44
4.4. Residuales del modelo de regresión cuantil para la mediana.	45
4.5. Valores de los parámetros estimados por regresión cuantil a través de diferentes cuantiles.	47
4.6. Nueve modelos significativos estimados por regresión cuantil que representan la demanda inversa del mercado de crédito a la vivienda.	50

Índice de cuadros

1.1. Crecimiento de Población y Vivienda	4
4.1. Estadísticas descriptivas de la variable respuesta precio del crédito a la vivienda.	43
4.2. Parámetros estimados por regresión cuantil para la mediana $\theta= 0.5$, usando las variables originales y las variables transformada.	46
4.3. Coeficientes estimados	48
4.4. Intervalos de confianza de los parámetros estimados de los modelos RC estadísticamente significativos.	49
4.5. Parámetros estimados por regresión cuantil e intervalos de confianza en términos de las unidades originales para nueve modelos estadísticamente significativos.	51
4.6. Ancho de Banda de los nueve modelos significativos ajustados por regresión cuantil.	52
4.7. Modelos RC seleccionados para su aplicación en Teoría de Juegos.	52
4.8. Estimaciones de costo marginal (c) con base a los dos modelos definitivos de regresión cuantil.	54
4.9. Cantidades y Ganancias de los bancos para los tres escenarios, caso 1 a = 3004.43, b= 0.004, c =300.4 y M + N = 4	56
4.10. Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 2, a = 3004.43 , b= 0.004, c = 600.8 y M + N = 4	56
4.11. Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 3, a = 3004.43 , b= 0.004, c = 1111.64 y M + N = 4	56
4.12. Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 1 con a = 3382.36 , b= 0.003 , c = 338.2 y M + N = 4	57
4.13. Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 2, a = 3382.36, b= 0.003, c = 676.4 y M + N = 4	57
4.14. Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 3, a = 3382.36, b= 0.003, c = 1251.4 y M + N = 4	57
4.15. Cantidad de créditos a la vivienda en el año 2018 de los bancos seleccionados.	59
C.1. Banca Múltiple.	68

Introducción

La vivienda es un elemento fundamental del bienestar familiar, y además es un derecho constitucional. Aquí reside la importancia del buen funcionamiento del mercado de crédito de vivienda en México al igual que su crecimiento. Por lo que, se debe fortalecer las estrategias de los participantes del mercado y de la mano aumentar la oferta de créditos de vivienda.

La vivienda representa la solidez de una estructura familiar, el sostén de la sociedad, donde uno como individuo encuentra seguridad y bienestar. La demanda y escasos recursos orillan a la población a solicitar la ayuda del gobierno, instituciones y entidades financieras para adquirir o mejorar la vivienda (Banxico, 2018).

En México existe una gran disparidad en el acceso que tiene la población a intermediarios financieros, ya que por ejemplo en Estado de México y Tlaxcala, únicamente cada 1.4 de cada 10 mil de adultos tienen accesos a servicios bancarios y en Jalisco, Nuevo León y Querétaro solamente 2.5 habitantes de cada 10 mil adultos (CNVB, 2018). Además, según el indicador de crédito interno de los bancos al sector privado (el cual se refiere a los recursos financieros otorgados al sector privado, ej. crédito), en 2009 llegó al 18% como porcentaje del PIB y en 2017 tenía 35.5% (Banco Mundial, 2018) lo cual no representa un crecimiento significativo. Mientras que para otros casos de países en desarrollo como Bolivia y Perú corresponde a 65.9% y 44% respectivamente.

De acuerdo con datos de INEGI (2016) el 51.7% de la población vive en pobreza a nivel nacional anidando a las razones anteriores de la dificultad de obtener un crédito, la falta de capacidad de pago es muy baja.

La maximización de ganancias es el objetivo principal de los bancos que ofrecen créditos de vivienda. En un ambiente de competencia oligopólica es importante conocer y analizar las estrategias de las empresas que conforman tal ambiente, dado que la ganancia de un banco depende de la cantidad producida de los demás. El cumplimiento de los objetivos fijados por los bancos que conforman el mercado de crédito de vivienda implica el incremento en la calidad de las viviendas ofertadas.

Para cumplir el objetivo de los bancos, es importante conocer los equilibrios de las demás empresas competidoras, es decir, conocer sus niveles de producción donde simultáneamente o bajo las condiciones de competencia, sus ganancias se maximizan. Asimismo, se deben conocer las distintas estrategias que pueden seguir, y las consecuencias de cada una de ellas.

El mercado de crédito de vivienda opera en oligopolio, tal que los bancos influyen en el precio del mercado, y que el precio de los créditos de vivienda está en función de la cantidad de crédito vendido. La hipótesis de este trabajo es que no existen incentivos para favorecer la entrada de competidores.

El objetivo de la presente investigación es analizar el comportamiento del mercado del crédito a la vivienda, mediante un enfoque de teoría de juegos, representándolos a través de distintos escenarios oligopólicos, para determinar las ventajas y desventajas de los modelos utilizados.

De los 51 bancos que conforman la Banca Múltiple, 29 ofrecen crédito de vivienda y de éstos, 18 bancos ofrecen adquisición de vivienda nueva. Se decide trabajar con el destino de adquisición de vivienda nueva, ya que representa la mayor cantidad de créditos otorgados respecto a los demás destinos de crédito de vivienda (2009-2018) sin considerar créditos hipotecarios.

El mercado de crédito de vivienda ha tenido una competencia agresiva, sin embargo, de los 18 bancos únicamente cuatro de ellos representan una producción mayor al 8% (CNBV, 2019). Los bancos involucrados son: Banamex, Banorte, BBVA Bancomer y Santander para el periodo 2009-2018. A partir de 2015 Scotiabank se integró a este grupo. La barrera de entrada de nuevos competidores ha ocasionado que únicamente cinco bancos de la Banca Múltiple tengan alto impacto en el mercado del crédito a la adquisición de vivienda nueva.

Por lo que surge la siguiente pregunta de investigación:

En el caso hipotético donde la concentración de estos bancos se disolviera, si la cantidad de créditos producidos fuera idéntica, ¿Cuál sería el beneficio para los participantes del mercado? Si el número de líderes aumenta o iguala el número de seguidores, ¿Cuáles serían los resultados de estos escenarios? El analizar estos casos es importante para los bancos para poder estar prevenidos ante cualquier situación.

En el capítulo 1 se establece un entorno histórico del problema de crédito a la vivienda en México. Se describen las leyes, sus modificaciones y renovaciones para entender el comportamiento del mercado.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico en el cual se desarrollan los modelos aplicados de teoría de juegos y se explican conceptos útiles para la comprensión de los modelos. Inicialmente se trabaja con el modelo de oligopolio de Cournot (1930). Posteriormente se implementa el modelo de oligopolio de Stackelberg (1934) y finalmente se analiza el modelo Stackelberg con múltiples líderes (1984).

Se explican los principales conceptos económicos y se desarrolla el concepto de mercado oligopólico. Se desarrollan los conceptos necesarios para la aplicación de una Regresión Cuantil (RC) a la base de datos, con el objetivo de obtener los parámetros de la recta de demanda inversa.

El capítulo 3 describe la metodología utilizada para la aplicación de los modelos de Teoría de Juegos a partir de la base de datos que corresponde a un periodo de diez años y 18 instituciones de la banca múltiple. Además se encuentran las ganancias en niveles de equilibrio correspondientes a cada institución.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos. El precio que se utilizó en la investigación fue una estimación, debido a la falta de acceso a series de datos para obtener el precio real, el cual incluye seguro de vida y daños, comisión por apertura y otros gastos adicionales. En este capítulo se trabaja con Regresión Cuantil (RC), se analizan la variable respuesta y la variable explicativa y se acondicionan ambas variables para aplicar RC. En este capítulo se analizan los resultados y se comparan los resultados obtenidos de los modelos de teoría de juegos.

Finalmente, en el capítulo 5 se exponen las conclusiones. Se analizan las estrategias de los bancos mediante un análisis comparativo de los modelos de Teoría de Juegos. Se sugieren recomendaciones para trabajos futuros aplicando los modelos de Cournot y Stackelberg al mercado del crédito a la vivienda.

Capítulo 1

Mercado del crédito a la vivienda en México

En el presente Capítulo, se establece un entorno histórico del crédito a la vivienda en México, con el fin de dar un escenario completo en el cual se basa esta investigación. Con el mismo fin, se describe la estructura actual del mercado del crédito a la vivienda.

1.1. Historia del mercado del crédito a la vivienda en México

Un factor primordial del aumento de la demanda de vivienda en México fue el crecimiento desmedido de la población y la migración a las grandes ciudades de 1950 a 2010 (INEGI, 2018). En estos años la población tuvo un crecimiento anual de 336 % y en el caso de vivienda se tiene un incremento anual de 444 % (cuadro 1.1).

Cuadro 1.1: Crecimiento de Población y Vivienda

Año	Población	Número de viviendas
1950	25,791,017	5,259,208
1960	34,923,129	6,409,096
1970	48,225,238	8,286,396
1980	66,846,833	12,074,609
1990	81,249,645	16,197,802
2000	97,483,412	21,513,235
2010	112,336,538	28,614,991

Elaboración propia con datos obtenidos de INEGI Censo Generales de Población y Vivienda (1950-2010).

A inicios del siglo XXI el gobierno impulsó la construcción de vivienda social. Sin embargo, a pesar de que ha ayudado a reducir el déficit de vivienda, no llegó a proporcionar condiciones habitables para la mayoría de la población (FUNDEF, 2017). La evidencia es que las cifras del cuadro anterior muestran que únicamente del 17-25 % de la población es dueña de una vivienda.

En 2002 se da origen a la Ley Orgánica de Sociedad Hipotecaria Federal (SHF), 2018 con la cual el Consejo Directivo de Sociedad Hipotecaria Federal sustituyó como fiduciaria en el Fondo de Operación y Financiamiento a la Vivienda (FOVI¹), al Banco de México. Esta Ley también establece el objetivo de SHF: impulsar el desarrollo del mercado primario y secundario de crédito a la vivienda. El mercado primario es el conjunto de negociaciones que se tiene por valores de nueva emisión y el mercado secundario, obtiene valores de emisiones que no son de nueva circulación (Banxico, 2018).

La Ley Federal de Vivienda se reformó en el 2006, donde el precepto más importante establece que el Estado impulsará, organizará y coordinará el desarrollo y promoción de los trabajos en materia de vivienda en los tres órdenes de gobierno y propiciará la participación de otros sectores (FUNDEF, 2017). Estas medidas antes mencionadas han ayudado aumentar el número de créditos otorgados por intermediarios financieros, a pesar de esto no han sido suficientes para mitigar el déficit de vivienda en México, esto lo muestra las cifras de SHF, en el caso la demanda de vivienda en México ha tenido un crecimiento anual del 4% en el periodo 2009 a 2018.

En el caso de cómo se distribuye el crédito de la banca comercial en el país, el crédito de vivienda ha disminuido desde 1995 de 21% a 16% en 2018. En el caso de créditos de consumo aumentó de 5.3% (1995) a 20% en 2018 (CNBV , 2018). Esto fue debido a que después de la crisis financiera de 1994-1995, la reestructuración de los bancos se orientó a sectores más rentables como consumo, y esto ocasionó un deterioro en la posición financiera de las familias.

Las estadísticas del Consejo Nacional de la Población (CONAPO) señalan que la demanda de vivienda seguirá aumentando. En el año 2030 se estima una demanda de 30 millones de viviendas.

El crédito, y el crecimiento económico están estrechamente relacionados, ya que las instituciones bancarias canalizan el ahorro de la sociedad a través de crédito, en proyectos rentables los cuales promueven el crecimiento económico. Con el escenario predicho alta demanda y acceso a créditos restringido, da como resultado un enorme requerimiento de fortalecimiento de la estructura del mercado de crédito de vivienda, aquí reside la importancia del estudio de las estrategias de los bancos.

Desde un punto de vista económico, para ayudar a solucionar este problema, se debe investigar la estructura económica del crédito a la vivienda.

1.2. Estructura del mercado del crédito a la vivienda

El sistema financiero mexicano está integrado por Bancos y Fideicomisos del Gobierno Federal para el fomento económico e intermediarios financieros no bancarios. Los integrantes que conforman el sistema financiero buscan un rendimiento económico. Los bancos, casas de bolsa, buscan una comisión o beneficio por las operaciones que realizan (Juárez, 2003).

¹Tiene como objetivo otorgar apoyos financieros a las instituciones de crédito con cargo al patrimonio del Fondo, mediante aperturas de crédito destinadas al financiamiento de la construcción, adquisición y mejora de vivienda.

Las instituciones de crédito son bancos privados y de desarrollo que, de acuerdo con la Ley de Instituciones pueden ser instituciones de Banca Múltiple, Banca de Desarrollo y Fondos de Desarrollo del Estado Mexicano. Actualmente la Banca Múltiple está conformada por 51 instituciones (Juárez, 2003).

El crédito se divide en distintos segmentos. La primera gran segmentación es crédito al sector público y al sector privado. El crédito del sector público se divide en crédito al Gobierno Federal, a Estados y Municipios. El crédito privado se divide en crédito a empresas y a familias (Banxico, 2018).

En el caso de la composición de la cartera del Banco Múltiple el 26 % corresponde a BBVA -Bancomer, el 17 % corresponde a Banamex, el 13 % a Banorte, el 9 % a Santander, 6 % a Scotiabank y 6 % a Banca Mifel y el 23 % restante corresponde a las demás instituciones (CNBV, 2018).

Respecto a la composición del crédito en el sector privado, el 64 % corresponde al crédito comercial, el 20 % corresponde a crédito de consumo, y 16 % constituye el crédito de vivienda respecto a la cartera de crédito total en México (CNBV, 2018).

Capítulo 2

Marco teórico

En el presente capítulo se enuncian conceptos fundamentales requeridos en la comprensión de esta contribución. El contenido se expone con la estructura siguiente:

En la sección 2.1 se exponen los conceptos fundamentales de economía, se detalla el concepto de mercado, se explica su funcionamiento y su clasificación. Se define el oligopolio, y el mercado oligopólico para poder entender la estructura del mercado de crédito de vivienda. Se señalan ventajas y desventajas de un ambiente oligopólico en el mercado de crédito de vivienda.

En la sección 2.2 se introducen los conceptos fundamentales del crédito de vivienda, principalmente se presentan las variables para el cálculo del crédito a la vivienda.

En la primera parte de la sección 2.3 se describen conceptos importantes de teoría de juegos, tal como el Algoritmo de Zermelo ya que es utilizado en el juego de Stackelberg. Posteriormente se expone el modelo de Cournot, primero como duopolio y después se describe como oligopolio; de la misma manera se hace para el modelo de Stackelberg. Finalmente se describe el Modelo de Stackelberg con múltiple líder, se desarrolla el modelo para M líderes y N seguidores. Por último, se resuelve el equilibrio Generalizado-Stackelberg-Nash-Cournot.

En la sección 2.4 se reportan hallazgos de investigadores que utilizaron Teoría de Juegos para el análisis de modelos de oligopolio. También se reportan publicaciones científicas que contribuyeron a fortalecer el marco de referencia de la presente tesis.

En la sección 2.5 se presenta la regresión cuantil, la cual se utilizó en la presente investigación para obtener la curva de demanda del mercado estudiado. Se explican las razones por las cuales se utilizó regresión cuantil. Se introduce programación lineal para resolver el problema de regresión cuantil.

2.1. Economía

El mercado es un mecanismo de asignación donde se brinda información sobre los valores relativos de los satisfactores y los recursos productivos, en el que oferente y demandante realizan sus operaciones comerciales. El valor relativo es la comparación del valor de una cosa en relación de otra. De igual modo, un mercado es un grupo de compradores y vendedores de un determinado bien o servicio. Los compradores como grupo determinan conjuntamente la demanda del producto y los vendedores la oferta.

El mercado en el que se centra esta investigación corresponde a la adquisición de vivienda nueva y pertenece al mercado del crédito a la vivienda. Se decide centrarse en este mercado ya que después de Créditos Hipotecarios el cual incluye los siguientes destinos de crédito de vivienda, crédito reestructurado, construcción y adquisición de vivienda nueva y usada, es el que tiene mayor participación en el mercado de crédito a la vivienda actualmente de acuerdo con las estadísticas de CNBV. Las funciones del mercado son:

- *Guía*. Los recursos limitados de la sociedad se canalizan hacia los usos que los demandantes prefieren. Los ajustes en los precios señalan a las empresas que deben aumentar o disminuir su producción.

- *Raciona*. Los ajustes en los precios pueden eliminar abundancia o escaseces.

- *Informa*. Los oferentes utilizan los precios para determinar el interés de los demandantes por sus productos. Los demandantes deciden la cantidad y la variedad de satisfactores o de recursos productivos a comprar con base en los precios relativos.

- *Impersonaliza*. El sistema de precios opera sobre las transacciones monetarias, cualquier demandante con poder de compra puede adquirir un satisfactor o recurso productivo a distintas empresas.

- *Asigna actividades*. El demandante puede optar por comprar un satisfactor o recurso productivo a distintas empresas. Las empresas pueden optar por producirlo. El mercado satisface demandas no necesidades, responde estrictamente al nivel de compra.

- *Libertad de elección*. El sistema de mercado concede libertad a sus participantes para tomar decisiones de compra y venta basadas en los precios relativos de los satisfactores o de los recursos productivos.

Clasificación de mercado

- *Competencia perfecta*. Es una forma utópica de competencia donde existen compradores y vendedores quienes poseen la libertad total de establecimiento. Los productos son homogéneos. Las empresas no pueden influir en los precios de los bienes y se enfrentan a curvas de demanda horizontales. Respecto al comprador y vendedor, ambos tienen un conocimiento perfecto de todos los elementos del mercado (Case, 2008).

A continuación se presentan las estructuras del mercado:

- *Monopolio*: es cuando una sola empresa produce un producto para el que no existen sustitutos¹ (Case, 1992).

- *Oligopolio*: una forma de estructura que se caracteriza por un cierto número de empresas y cada una puede influir en el precio del mercado. Los productos pueden ser homogéneos o diferenciados. Existen formas de competencia diferentes tales como publicidad o modificación del producto (Call, 1983).

- *Competencia monopolista*: las características de un mercado de competencia monopolista son las siguientes:

- Diferenciación de producto: es la variación de producto a otro.

- Promoción de ventas: es la publicidad realizada al producto en diferentes medios de comunicación.

¹Producto sustituto es aquel que se usa en el remplazo de otro. Son alternativas a los bienes ya existentes.

La curva de demanda es la relación entre el precio y la cantidad demandada de un bien. La cantidad demandada es la cantidad que los compradores compran de ese bien a los diferentes precios.

Ley de la demanda cuando sube el precio de un bien, la cantidad demandada disminuye y cuando baja, la cantidad demandada aumenta.

Demanda individual es la relación entre el precio de un bien y la cantidad demandada considerando un consumidor.

Demanda del mercado es la suma de todas las demandas individuales de un bien o de un servicio.

La curva de demanda del mercado muestra cómo varía la cantidad total demandada.

En los mercados oligopólicos, casi siempre unas cuantas empresas producen la mayor parte o el total de producción. Cada una de ellas debe considerar y analizar las reacciones de sus rivales por sus actos, y las estrategias de las demás empresas que conforman el mercado.

Ventajas y desventajas del oligopolio del crédito a la vivienda desde el punto de vista del consumidor y vendedor.

Ventajas:

Los bancos no deben preocuparse a corto y mediano plazo por la competencia que podría afectarles. La razón de esto es la dificultad de que nuevos competidores entren al mercado debido a las barreras de entrada.

Existen varios productos para que los consumidores adquieran un crédito de vivienda según sus necesidades. Esto ocurre en el caso del oligopolio ya que los productos que ofrecen deben ser diferenciados, con el fin de obtener mayor poder de mercado, respecto a sus demás competidores.

Desventajas:

Pocos bancos tienen ganancias considerables (esto se muestra en el estado de resultados que cada banco estudiado publica anualmente) como consecuencia directa de ejercer poder absoluto dentro del mercado de crédito de vivienda.

El reducido número de instituciones bancarias que tiene poder de mercado gozan de posición privilegiada en el mercado, tal como la fijación de tasas de interés y comisiones.

El crecimiento de los integrantes de mercado de crédito de vivienda queda reducido debido a las barreras de entrada impuestas.

Existe poca oportunidad para los pequeños bancos y para los inversionistas debido a las barreras de entrada. Estas barreras de entrada, son descritas a continuación:

Capital: el monto necesario para construir una empresa de tamaño eficiente en el oligopolio es enorme y a las grandes empresas no les conviene tener más competidores ya que esto significa mayor riesgo de perder poder del mercado y esto imposibilita a pequeñas empresas de entrar al mercado.

Marca: la marca y publicidad masiva obstaculizan la entrada de nuevos participantes a la empresa.

Economías de escala: cuando el banco alcanza un nivel óptimo de producción tiene la posibilidad de producir más a menor coste. Entre más producción tenga un banco, el costo por crédito se reduce.

Definiciones de economía

Las siguientes definiciones de economía son indispensables para la comprensión de los modelos basados en teoría de juegos.

Función de reacción: las funciones de reacción reflejan la interdependencia estratégica entre empresas y otros agentes económicos, que se encuentran ante situaciones en las que sus decisiones dependen de las estrategias tomadas por los demás. Un ejemplo es cuando en un mercado, una empresa baja su precio del producto, esto afecta a los demás competidores ya que una gran parte de sus consumidores escogerán pagar un menor precio por el mismo producto esto representa una pérdida para los demás competidores.

Costos fijos: son los costos asociados con los factores de producción y que no varían a corto plazo.

Costos variables: Son los costos asociados a los factores de producción y que varían a través del tiempo.

Costo total: Es la suma de los costos fijos y los variables.

Costo marginal: costo extra que se genera al producir una unidad extra de producto. De forma matemática, es la derivada del costo total con respecto a la cantidad del producto; como la derivada del costo fijo, que es una constante, es igual a cero, el costo marginal viene dado por la derivada del costo total variable con respecto a la cantidad del producto.

$$\text{Costo marginal} = \frac{\partial CT}{\partial Q}$$

CT = Costo total Q = Cantidad de producción

Curva de demanda: es la representación gráfica de la función demanda (Figura 2.1). Relaciona cantidad demandada y precio de un bien (Call, 1983).

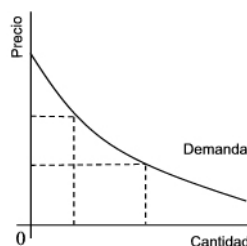


Figura 2.1: Curva de demanda.

Elaboración propia.

Curva de la oferta: es la representación gráfica de la función de oferta (Figura 2.2). Reporta cuánto producto venderá una empresa a diferentes precios.



Figura 2.2: Curva de la oferta.

Utilidad marginal: es la utilidad que se obtiene por el consumo de una unidad adicional de un bien o servicio.

Equilibrio competitivo: es el equilibrio de mercado cuando la oferta se iguala a la demanda. Esto sucede normalmente en mercados de competencia donde los precios se establecen en el punto donde el costo marginal es igual a la utilidad marginal.

2.2. Crédito a la vivienda

A continuación se presentan algunos conceptos relevantes del crédito a la vivienda, tomadas de Banxico (Banxico, 2018).

Sistema financiero: desempeña un papel central en el funcionamiento y desarrollo de la economía. Está integrado principalmente por diferentes intermediarios y mercados financieros. Un sistema estable eficiente, competitivo e innovador contribuye a elevar el crecimiento económico sostenido y bienestar de la población.

Sistema bancario mexicano: su función consiste en contactar a oferentes y demandantes de recursos financieros para que, a través de esta función de intermediación financiera, se apoye el funcionamiento eficiente de la economía, la producción y consumo de bienes y servicios.

Banca Múltiple: Un banco múltiple es aquella entidad que se dedica principalmente a captar recursos del público a través de productos, tales como cuentas de cheques, cuentas de ahorro, depósitos a plazo fijo, entre otros, para posteriormente colocarlos en operaciones crediticias como préstamos comerciales, préstamos hipotecarios, préstamos personales, crédito de vivienda y tarjeta de crédito, entre otros productos.

Instituciones de crédito: Banca Múltiple y Banca de Desarrollo (Artículo 2, Ley de Instituciones de Crédito).

Vivienda: se refiere a cualquiera de las etapas comprendidas, desde el terreno hasta su terminación integral, como es el caso de lotes con servicios y bases de vivienda.

Destino de crédito: crédito antiguo y/o reestructurado, construcción, adquisición de vivienda nueva, adquisición de vivienda usada, mejoras ampliaciones, pagos de pasivos hipotecarios, crédito para liquidez, créditos a exempleados del Grupo Financiero, créditos hipotecarios y otros.

Acreditado: persona física que obtiene recursos de una institución bajo el compromiso de devolver el capital más los intereses y comisiones en un plazo determinado.

Crédito a la vivienda: tiene la propiedad de destino de crédito. Un crédito de vivienda es otorgado a personas naturales con el fin de financiar, el destino de crédito.

Monto: es la proporción del valor del inmueble que será financiada por la institución bancaria o Sofol seleccionada.

Comisión por apertura: pago que se debe efectuar por el hecho de contratar un crédito. Es determinado como un porcentaje del monto del crédito. Generalmente se trata de un pago único.

Tasa de interés: es aquella que se considera para la liquidación del crédito, la cual puede ser fija, variable o mixta.

Gastos avalúo: desembolso previo que debe efectuar el interesado en adquirir un bien inmueble, por concepto de honorarios de un perito valuador, quien determinará el valor físico, rentable y comercial de inmueble.

Gastos de investigación: importe correspondiente al costo de la investigación de datos generales y de antecedentes crediticios del solicitante.

Gastos notariales: importe que se cubre al momento de la firma de la compraventa del inmueble. Incluye los honorarios de notario público que elabora la estructura impuestos de adquisición, gestoría de certificados y gastos en el Registro Público de la Propiedad. Este importe depende del valor y el lugar donde se localiza el inmueble.

Otros Gastos: abarcan fundamentalmente la contratación del seguro de vida y del seguro de daños durante la vigencia del crédito, lo cual siempre es obligatorio en beneficio suyo y de sus familiares.

2.3. Modelos de oligopolio

La teoría de juegos se divide en dos ramas de estudio, teoría de juegos cooperativos y teoría de juegos no cooperativos. La primera rama es cuando los agentes involucrados tienen la posibilidad de discutir la situación y acordar un plan de acción y este plan de acción es obligatorio. En la teoría de juegos no cooperativa, los jugadores pueden decidir acciones conjuntas, pero nadie es obligado a cumplir lo acordado. De esta rama existen dos modelos: juegos estratégicos o rectangulares y los extensivos (Davino, 2013).

Los juegos extensivos proporcionan más elementos, los cuales pueden dar información de la situación que se encuentran los jugadores. Estos modelos suponen que los jugadores se turnan para tomar decisiones.

Los juegos estratégicos se utilizan para definir los conceptos de solución. Se especifican tres elementos en el juego: los jugadores que participan en el juego, las estrategias disponibles de cada jugador y la utilidad que cada jugador obtendrá dada la estrategia de cada jugador.

Definición: Un juego rectangular consta de un conjunto \mathbf{N} , de una colección de conjuntos D_j , uno para cada j en \mathbf{N} y de una colección de funciones φ_j una para cada j en \mathbf{N} , donde

$$\varphi_j: \prod_{j \in \mathbf{N}} D_j \longrightarrow \mathbb{R}$$

- \mathbf{N} es el conjunto de jugadores
- D_j es el conjunto de estrategias puras del jugador j
- φ_j es la función de pago del jugador j

Así el juego está denotado por $(\mathbf{N}, \{D_j\}_{j \in \mathbf{N}}, \{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{N}})$

Se puede definir:

$$D = \prod_{j \in \mathbf{N}} D_j = \times_{j \in \mathbf{N}} D_j = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$$

el producto cartesiano de los conjuntos de decisiones o estrategias. A cada elemento σ del conjunto D se llama **perfil de estrategias puras**.

Definición: Se dice que σ^* en D es un equilibrio de Nash en estrategias puras (ep) si para cada jugador j en \mathbf{N} se cumple:

$$\varphi_j(\sigma^*) \geq \varphi_j(\hat{\sigma}^* | \sigma^j) \text{ para toda } \sigma^j \text{ en } D_j.$$

Si la desigualdad es estricta se dice que σ^* es un equilibrio estricto.

Se dice que $\bar{\sigma}^j$ son dos estrategias puras tales que

$$\varphi_j(\sigma | \hat{\sigma}^j) \geq \varphi_j(\sigma | \bar{\sigma}^j) \text{ para toda } \sigma \text{ en } D.$$

Definición: Un juego en forma extensiva con información perfecta, denotado por:

$\Gamma^{ex} = (\mathbf{N}, H, P, \{\varphi_j\}_{j \in \mathbf{N}})$, consiste en:

- Un conjunto de jugadores, \mathbf{N} .
- Un conjunto H (finito o infinito) de sucesiones con las siguientes propiedades:

a) $\emptyset \in H$

b) Si $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$, (K puede ser infinito) y $L < K$, entonces $(a^k)_{k=1,\dots,L} \in H$.

c) Si $(a^k)_{k \in \mathbb{N}} \in H$, entonces $(a^k)_{k=1,2,\dots,K} \in H$ para todo valor L entero positivo.

Cada elemento del conjunto H es llamado Historia, cada componente de una Historia se llama acción, tomada por un jugador. Una historia $(a^k)_{k=1,\dots,K} \in H$ se dice terminal si es infinita o no existe a^{K+1} tal que $(a^k)_{k=1,\dots,K+1} \in H$. Al conjunto de historias terminales se le denota por Z , por lo que el conjunto de historias no terminales se denota por $H \setminus Z$.

• Una función P que asigna a cada historia no terminal un elemento de N . P es la función de jugador, $P: H \setminus Z \rightarrow N$. $P(h)$ indica al jugador (que tiene el turno) después de la historia h .

• La función de pagos $\varphi_j : Z \rightarrow \mathbb{R}$ para cada jugador $j \in N$.

Si el conjunto H es finito, se dice que el juego es finito. Si el tamaño de cada elemento de H es finito; entonces se dice que el juego tiene horizonte finito. Después de cualquier historia no terminal h el jugador $P(h)$ elige una acción del conjunto $A(h) = \{a \mid (h, a) \in H\}$.

En un juego en forma extensiva, la secuencia de acciones que sigue un jugador define la táctica que emplea con sus contrincantes. Las combinaciones de las distintas secuencias seguidas por todos los jugadores determinan la historia y resultado del juego. De ahí la importancia de definir la estrategia de un jugador, la cual indica las acciones de manera secuencial que toma y que depende a su vez de las secuencias de acciones del resto de los jugadores.

Definición: Sea $\Gamma^{ex} = (N, H, P, \{\varphi_j\}_{j \in N})$ un juego en f_{ex} . Un equilibrio de Nash para Γ^{ex} es una combinación de estrategias $s \in \times_{j \in N} S_j$, el cual es un equilibrio de Nash para el juego en forma estratégica asociado a Γ^{ex} .

Inducción hacia atrás (Algoritmo de Zermelo)

El matemático Zermelo (1913) analizó juegos finitos con información perfecta con la estructura de un juego de ajedrez (desde el final hacia el inicio) y este método lo denominó inducción hacia atrás. También se llama algoritmo de Zermelo.

El algoritmo establece que la estrategia conjunta $\hat{s} = (\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_N)$ es una estrategia de inducción hacia atrás en un juego de información perfecta si puede obtenerse de la siguiente forma:

1. Para cada nodo k , si se cumple que todo nodo sucesor de k sea terminal, si $k \in K_i$ entonces $\hat{s}_i(k)$ maximiza el pago del agente i entre las posibilidades que tiene ese nodo.

2. Convertir el nodo k en un nodo terminal, donde los pagos son los que determina la estrategia $\hat{s}_i(k)$.

3. Repetir los pasos anteriores hasta llegar a la raíz del árbol.

La definición anterior se extiende de forma natural al caso de estrategias mixtas. Las estrategias mixtas es la posibilidad de combinar estrategias en determinadas proporciones.

Teorema (Zermelo)

Todo juego de información perfecta tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras y se puede construir mediante inducción hacia atrás. Más aún, si ningún jugador es indiferente entre dos nodos terminales (a lo largo del proceso de inducción hacia atrás), solo hay un equilibrio de Nash que es una estrategia de inducción hacia atrás² (Villegas, 2000).

2.3.1. Modelo de Cournot

Antoine Augustin Cournot, fue economista, filósofo y matemático. Nació en Gray Francia en 1801. Fue profesor de Análisis y de Mecánica en la Facultad de Ciencias de Lyon, Rector de la Academia de Grenoble y de la Universidad de Dijon.

Cournot fue un científico que se convirtió en filósofo, tuvo influencias a su pensamiento de Foutenelle, Lapable, a la Lógica de Port Royal y a Leibniz. En esta investigación lo que interesa es su obra, entre ellas sus investigaciones sobre los principios matemáticos de la teoría de las riquezas (1838), Principios de la teoría de las riquezas (1863), y Revista sumaria de las doctrinas económicas (1877) (Evista, 1942).

Cournot no estaba completamente de acuerdo con la ley de oferta y demanda, según la cual el precio está en razón directa de la demanda e inversa de la oferta.

Cournot hace algunas observaciones respecto a ley de la demanda:

1) Hay algunos artículos para los cuales la ley es totalmente falsa. Es el caso excepcional de ciertos artículos de gran lujo que presentan el atractivo, entre otros de su alto precio. Si el precio baja, la demanda, en lugar de aumentar disminuye (Evista, 1942).

2) Las reacciones de la demanda frente a los precios no ocurren en la misma intensidad para todos los artículos. Hay unos en que una débil variación del precio determina variaciones más fuertes, en sentido contrario, de la demanda (objetos manufacturados en general). En otros, una modificación sensible de los precios no produce alteraciones importantes de la demanda.

3) Considerada la sociedad en su conjunto, la función de la demanda es continua, es decir, a variaciones pequeñísimas de los precios, corresponden a variaciones también pequeñísimas de la demanda. No hay saltos bruscos de una posición a otra.

4) La demanda no es infinita, de manera que llega un momento, suponiendo una baja continua de precio, en que la demanda no incrementa (Evista, 1942).

Supuesto del modelo de Cournot

El modelo de Cournot para el caso de oligopolio y duopolio, se tomaron en cuenta los siguientes supuestos:

1. **N** empresas con costo marginal constante **c**.
2. Productos homogéneos.

²Este es el teorema que Mas Colell et al. llaman teorema de Zermelo. Sin embargo, este históricamente no es el teorema Zermelo (1913).

3. El equilibrio de mercado viene dado por el equilibrio de Nash (Cournot).

4. Demanda inversa

$$P(Q) = a - b(Q),$$

donde

$$Q = q_1 + \dots + q_N,$$

donde

q_i es la cantidad producida de la empresa i .

Donde **a** y **b** son parámetros los cuales determinan la curva de demanda.

En el modelo de Cournot, el volumen que maximiza el beneficio económico de una empresa se estima, manteniendo constante el volumen de otras empresas.

Hipótesis del Modelo Cournot

Las empresas determinan simultáneamente la cantidad a producir, esto significa que al momento que cada empresa tome su decisión no tiene conocimiento de las decisiones tomadas por otros competidores. El precio único del mercado del producto resulta de la oferta agregada de las empresas.

Duopolio de Cournot

A continuación, se explica el modelo duopolio de Cournot y después se generaliza para el oligopolio (Guapilla, 2013).

Estrategia: q_i de la empresa i

Ganancia

$$\Pi_i = [a - b(q_1 + q_2) - c]q_i.$$

Con el fin de encontrar el equilibrio de Nash-Cournot (q_1^*, q_2^*) cada jugador debe de resolver la siguiente función de maximización:

$$\text{Max}(\Pi_i(q_i \geq 0)) = [a - b(q_i + q_j) - c]q_i$$

con $i \neq j$.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = a - b(q_i + q_j) - b(q_i) - c = 0$$

Función de reacción de la empresa i

$$q_i^R = \frac{a - c - bq_j^*}{2b}$$

con $i = 1, 2$ e $i \neq j$.

La función de beneficios es la misma para todos, ya que todos escogen su cantidad de producción simultáneamente, entonces las curvas de reacción son las siguientes:

$$q_1^* = \frac{a - bq_2^* - c}{2b} \quad (1),$$

$$q_2^* = \frac{a - bq_1^* - c}{2b} \quad (2).$$

Resolviendo (1) y (2) para (q_1^*, q_2^*) se obtiene el Equilibrio de Cournot:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3b}.$$

La Figura 2.3 muestra el punto de intersección el cual representa el equilibrio de Nash (Guapilla, 2013).

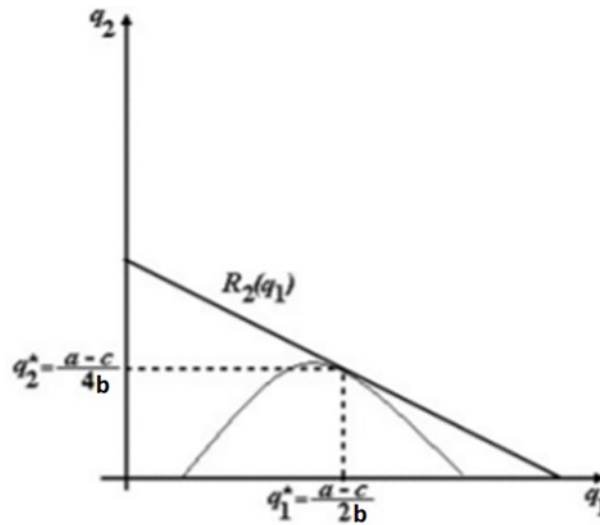


Figura 2.3: Equilibrio de Nash en competencia de Cournot.

Oligopolio de Cournot

Estrategia: Q_i de la empresa i

Ganancia

$$\Pi_i = [a - b(q_1 + \dots + q_N) - c]q_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N.$$

Se encuentra el equilibrio de Cournot, maximizando las ganancias, de la siguiente manera:

$$\text{Max}(\Pi_i(Q)) = [a - b(q_1 + \dots + q_N) - c]q_i$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_1} = a - b(q_1 + \dots + q_N) - b(q_1) - c = 0.$$

Función de reacción de la empresa i

$$q_i^R = \frac{a - c - b \sum_{j \neq i} q_j}{2b}.$$

suponiendo una solución simétrica existe:

$$q_1 = q_2 = \dots = q_N$$

Así se encuentra el equilibrio de Cournot

$$q_i^* = \frac{a - c}{b(N + 1)}$$

entonces:

$$Q = \frac{a-c}{b} * \frac{N}{N+1}$$

$$P = \frac{a+Nc}{N+1}$$

cuando $N \rightarrow \infty$, $P \rightarrow c$, converge a un equilibrio competitivo.

2.3.2. Modelo de Stackelberg

Heinrich Freiherr Von Stackelberg nació el 31 de octubre de 1905 en Kundinowo, Rusia. En 1930 alcanzó el grado de Doctor en la Universidad de Colonia con el trabajo Fundamento de una teoría pura de costos. En esta obra su objetivo era presentar por primera vez una elaboración sistemática de todas las leyes formales que determinan la relación entre los costos de producción de una empresa y la cantidad producida.

Oligopolio de Stackelberg

En esta investigación se utiliza la extensión del modelo de Stackelberg que consiste en un Líder Múltiple el cual es presentado por D.Sherali (1983).

Este modelo supone la existencia de uno o más líderes, y cada líder supone que sus acciones no generan respuestas precipitadas de demás líderes, pero sí considera explícitamente la función de reacción de las empresas seguidoras.

Todas las empresas saben quiénes son, líderes y seguidores. En una solución de equilibrio, las empresas seguidoras maximizarán sus beneficios sujetos al supuesto de Cournot y cada líder maximizará su beneficio bajo el supuesto de que no existe respuesta de las otras empresas líderes.

Supuestos del modelo de Stackelberg

1. Los bienes son idénticos.
2. Un jugador decide en la primera etapa (líder) y el segundo decide en la segunda etapa (seguidor).
3. Se supone una demanda inversa.

$$P(Q) = a - b(Q)$$

$$Q = q_1 + q_2 \text{ la producción total del mercado.}$$

Duopolio de Stackelberg

Con el fin de resolver el equilibrio de Nash, se utiliza inducción hacia atrás. Se resuelve primero para el jugador 2, quien representa al seguidor.

Se resuelve:

$$\text{Max}(\pi_2(Q)) = [a - b(q_1 + q_2) - c]q_2,$$

$$\frac{\delta \pi_2}{\delta q_2} = a - b(q_1 + q_2) - b(q_2) - c = 0.$$

Función Reacción:

$$q_2^*(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b} \quad (1).$$

La función de reacción es la mejor respuesta para el jugador 2.

En el caso del jugador 1, se resuelve:

$$Max(\pi_1(Q)) = [a - b(q_1 + q_2) - c]q_1$$

$$\text{sujeto a } q_2 = \frac{a - bq_1 - c}{2b}.$$

Entonces:

$$Max(\pi_1(Q)) = [a - b(q_1 + q_2) - c]q_1 = Max(\pi_1(Q)) \left\{ \frac{(a - c)q_1 - bq_1^2}{2} \right\},$$

$$\frac{\delta \pi_1}{\delta q_1} = \frac{(a - c) - 2bq_1}{2} = 0$$

$$q_1^* = \frac{a - c}{2b}. \quad (2).$$

Lo que implica que se utiliza (2) para resolver (1),

$$q_2^* = \frac{a - c}{4b}.$$

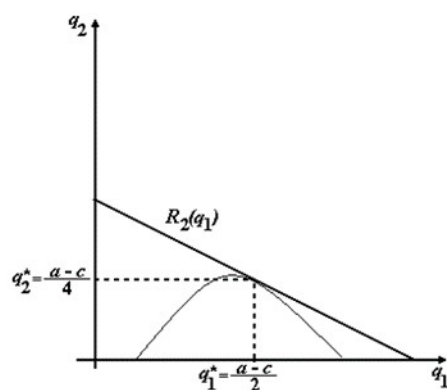


Figura 2.4: Equilibrio de Nash en competencia de Stackelberg.

Supuestos de Modelo de Stackelberg con Múltiple Líder

- 1) X representa la cantidad de cada empresa líder.
- 2) Q representa la cantidad de las empresas seguidoras.
- 3) p(Q) representa la demanda inversa del mercado.

Un ejemplo de demanda inversa es

$$p(Q) = a - bQ \text{ con } a, b, Q > 0$$

- 4) q para $x \geq 0$, $[q_1(x), \dots, q_N(x)]$ son las curvas de reacción de las empresas seguidoras.

$$Q(x) = \sum_{i=1}^N (q_i(x)) \text{ es la curva de reacción agregada.}$$

- 5) M es la cantidad de empresas líderes y N es la cantidad de empresas seguidoras.
- 6) Las empresas tienen costos marginales iguales a c.

Es de gran importancia mencionar que este modelo cuando $M = 1$ se reduce a un equilibrio de Stackelberg y cuando $M = 0$ se reduce a un equilibrio de Cournot (Sherali, 1983).

Modelo de Stackelberg con múltiple líder.

Se definen las cantidades $(x_1^*, \dots, x_M^*, q_1^*, \dots, q_N^*)$ para los M líderes y N seguidores, a continuación se resuelve el equilibrio Generalizado-Stackelberg-Nash-Cournot (GSNC).

Con el fin de encontrar el equilibrio, se hace inducción hacia atrás, así los N seguidores resolverán primero el juego de Cournot con N jugadores y se resolverá:

$$\text{Max}_{q_i \geq 0} \{ q_i p [q_i + \sum_{i=1}^M x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N q_j^*(x)] - q_i c \}. \quad (2.1)$$

La función de demanda inversa está dada por:

$$P(Q) = a - bQ,$$

entonces:

$$\text{Max}_{q_i \geq 0} \{ a q_i - b q_i^2 - b q_i \sum_{i=1}^M x_i - b q_i \sum_{j=1, j \neq i}^N q_j^*(x) - q_i c \}.$$

La curva de reacción es

$$a - b \sum_{i=1}^M x_i^* - 2b q_i^* - b \sum_{i=1, j \neq i}^N q_j^* - c = 0.$$

Dado que en Cournot todos los jugadores eligen simultáneamente, se espera que todos tengan el mismo nivel de producción y la misma función de pago.

Se supone que

$$q_j^* = q_i^* \quad \forall j = 1, 2, \dots, N \quad y \quad i \neq j$$

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^N q_j^* = (N-1)q_i^*.$$

Así,

$$\begin{aligned} a - b \sum_{i=1}^M x_i^* - 2bq_i^* - b(N-1)q_i^* - c &= 0 \\ \Rightarrow a - c - b \sum_{i=1}^M x_i &= (2+N-1)bq_i \\ \Rightarrow q_i^*(x) &= \frac{a - c - b \sum_{i=1}^M x_i}{b(N+1)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se encuentra el equilibrio para los líderes:

Para x_i^* se resuelve:

$$Max_{x_i \geq 0} \left\{ x_i p \left[\sum_{i=1}^M x_i + \sum_{i=1}^N q_i \right] - x_i c \right\} \quad (2.3)$$

sujeto a

$$q_i^*(x) = \frac{a - c - b \sum_{i=1}^M x_i}{b(N+1)} \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N q_i = \frac{N}{N+1} \frac{a - c - b \sum_{i=1}^M x_i}{b}$$

Se utiliza ecuación (2.4) para resolver ecuación (2.3).

$$Max_{x_i \geq 0} \left\{ x_i p \left[x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^* + N \left(\frac{a - c - b(x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^*)}{b(N+1)} \right) \right] - x_i c \right\}$$

$$\Rightarrow Max_{x_i \geq 0} \left\{ x_i \left[a - b \left(x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^* + \frac{N}{N+1} \frac{a - c - b(x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^*)}{b} \right) \right] - x_i c \right\}$$

$$\Rightarrow Max_{x_i \geq 0} \left\{ ax_i - bx_i^2 - bx_i \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^* - \frac{N}{N+1} x_i (a - c) + \frac{N}{N+1} bx_i^2 + \frac{N}{N+1} bx_i \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^* - x_i c \right\}$$

$$\Rightarrow Max_{x_i \geq 0} \left\{ \left[(a - c) - \frac{N}{N+1} (a - c) \right] x_i + \left[\frac{N}{N+1} - 1 \right] bx_i^2 + \left[\frac{N}{N-1} - 1 \right] bx_i \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^* \right\}$$

$$\Rightarrow Max_{x_i \geq 0} \left\{ \frac{a - c}{N+1} x_i - \frac{b}{N+1} x_i^2 - \frac{b}{N+1} x_i \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^* \right\}$$

Así la curva de reacción esta dada por:

$$\frac{a-c}{N+1} - \frac{2b}{N+1}x_i^* - \frac{b}{N+1} \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^* = 0,$$

$$a - c - 2bx_i^* - b \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^* = 0.$$

En el caso de los líderes, ellos eligen su cantidad de producción simultáneamente y se espera que todos tengan el mismo nivel de producción y tienen la misma función de pago.

Se supone que $x_i^* = x_j^* \forall j = 1, \dots, M$

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^M x_j^* = (M-1)x_i^*$$

$$\Rightarrow a - c - 2bx_i^* - b(M-1)x_i^* = 0$$

$$a - c = [2b + b(M-1)]x_i^*,$$

por lo tanto

$$x_i^* = \frac{a-c}{b(M+1)},$$

$\forall i = 1, 2, \dots, M$ los cuales son los niveles de producción en el equilibrio de Stackelberg para los M líderes.

Se sustituye x_i^* en la ecuación 2.5, con lo que se obtienen los niveles de producción para los N seguidores.

$$q_i^*(x) = \frac{a-c-b \sum_{i=1}^M x_i^*}{b(N+1)} \quad (2.5)$$

$$q_i^*(x) = \frac{a-c-bMx_i^*}{b(N+1)}$$

$$q_i^* = \frac{a-c-b \frac{M}{M+1} \frac{a-c}{b}}{b(N+1)}$$

$$q_i^* = \frac{a-c - \frac{M}{M+1}(a-c)}{b(N+1)}$$

$$q_i^* = \frac{(1 - \frac{M}{M+1})(a-c)}{b(N+1)},$$

por lo tanto

$$q_i^* = \frac{(a-c)}{b(N+1)(M+1)}$$

$\forall i = 1, 2, \dots, N$.

2.4. Antecedentes

El análisis de modelos de oligopolio ha sido bastante popular en diversos temas. Algunos trabajos de relevancia para esta investigación son: Simulador de un mercado hidrotérmico utilizando teoría de juegos (Villar, 2002), donde simula un mercado hidrotérmico con el modelo de Cournot. Gómez (2007), utilizó una modelación de competencia en sistemas aplicando teoría de juegos no cooperativos y un modelo estático en las estrategias de un mercado hidrotérmico. En esta tesis también se utiliza estos modelos. El modelo del Múltiple Líder (Hanif, 1983), donde se tiene más de un líder con más de un seguidor.

Un ejemplo el cual es muy parecido al análisis de esta tesis, el cual fue de utilidad para desarrollar el tema del mercado de crédito de vivienda, es el caso es la investigación de Miguel y Xu (2009) implementaron un modelo estocástico de múltiple líder de Stackelberg aplicado a la industria de telecomunicación.

Ortiz, H, B. Hernández, D, G. Hirsch, J (2017) analizaron la realidad del sistema de pensión en México, mediante dos modelos de teoría de juegos aplicados a las administradoras de fondo para el retiro (AFORES).

Respecto al crédito a la vivienda, aplicando Teoría de juegos, se encontró muy poco material relacionado (considerando únicamente autores mexicanos), y de estos se puede mencionar a El Mercado Mexicano de Crédito Hipotecarios como Modelo de Oligopolio Mixto (Saucedo, 2012). Saucedo reporta el uso de esta metodología al crédito hipotecario mexicano, considerándolo como un modelo oligopólico mixto.

En un mercado globalizado existe un elevado interés en el estudio de oligopolios ya que en la actualidad la mayoría de las empresas coexisten en una competencia de este tipo. Por ello, es fundamental el estudio de tal situación del mercado. Esta teoría cobra especial relevancia en mercados en los que existen competidores que luchan por tener mayor poder de mercado, por ejemplo en los oligopolios o en determinados sectores de gran consumo donde la competencia es fuerte.

2.5. Regresión Cuantil

En esta sección se describe el método de Regresión Cuantil (RC), el cual se utiliza para obtener los parámetros de la recta de demanda inversa. Se considera que la RC es la herramienta estadística más adecuada. La heterocedasticidad se refiere a que la varianza de las observaciones no es homogénea, y en el caso de mínimos cuadrados es un requisito, ya que de lo contrario el estimador que se obtiene no es un estimador de mínima varianza y el modelo otorga mayor importancia a las observaciones con mayor varianza. La razón de que la regresión cuantil es un modelo más adecuado es por la naturaleza de los datos de este trabajo, tal como la presencia de heterocedasticidad y cambio estructural. Asimismo, los estimadores de RC son más robustos en presencia de los valores extremos. Otra ventaja de esta herramienta de regresión es que es posible describir toda la función a través de la selección de cuantiles particulares y en el caso de nuestros datos es una ventaja, ya que los cuantiles describen completamente la relación cantidad-precio.

La RC es de utilidad, ya que mientras la regresión clásica (mínimos cuadrados donde la variable Y es la variable dependiente, la variable X es la variable independiente que son el conjunto de observaciones del fenómeno observado) se enfoca en la esperanza $E(Y | X)$ de una variable Y condicionada a los valores de un conjunto de variables X , la RC amplía el punto de vista en una distribución condicional de la variable respuesta, proporciona información sobre la ubicación, escala y cambio de forma de la distribución condicional de la variable respuesta.

Cuantil

La regresión cuantil, se basa en el concepto de cuantil.

El cuantil θ de la muestra, con $0 < \theta < 1$, corresponde al valor que de una proporción θ por debajo de los datos y $(1 - \theta)$ por encima. Un ejemplo es el caso de la mediana $\theta=0.5$ donde el 50 % de los datos están por debajo θ y el otro 50 % queda por arriba. Los cuantiles dividen la muestra en partes iguales: la mediana, los cuartiles ($\theta = 0.25, 0.50, 0.75$) y deciles ($\theta=.1, .2, \dots, .9$) son casos particulares.

2.5.1. Regresión cuantil (RC)

El objetivo de RC es modelar la relación entre las variables (Y y X). La RC crea distintas rectas de regresión para distintos cuantiles de la variable. Un ejemplo, es en el caso de una muestra en la cual exista demasiada dispersión en los datos, se tiene la posibilidad de describir todos los datos con distintas rectas de la regresión cuantil.

La regresión clásica se enfoca en la esperanza de una variable, con Y condicionado a los valores de X , $E(Y | X)$. Esta función restringe exclusivamente a una ubicación específica de la distribución de Y . La regresión cuantil extiende este enfoque a la distribución condicional de Y dada en X en diferentes ubicaciones, de esta manera ofrece un panorama global en las interrelaciones entre las variables aleatoria X y Y .

En la RC se generalizan cuantiles univariados para la distribución condicional. La comparación de la media y la mediana como centro de una distribución univariada es casi estándar y generalmente se usa para definir la asimetría (un ejemplo de esto es cuando la media es igual a la mediana de la muestra, entonces se concluye que la distribución es simétrica. En el caso que la media sea mayor que la mediana, entonces se dice que la muestra es

asimétrica positivamente, en el caso que la mediana sea más grande que la media se dice que la muestra es asimétrica negativamente). Si \mathbf{Y} es la variable aleatoria, su media³ es definida como el centro \mathbf{c} de una distribución, la cual minimiza la suma cuadrada de desviaciones (Davino, Furno, Vistocco, 2013).

Considerando la variable X , la cual está caracterizada por su función de distribución

$$F(x) = P(X \leq x),$$

tenemos que para cualquier $0 < \theta < 1$,

$$F^{-1}(\theta) = \inf\{x : F(x) \geq \theta\}$$

es llamada el cuantil θ -ésimo de X . Los cuantiles surgen de un problema de optimización, el cual es descrito a continuación. Considera un problema teórico de decisión: un punto de estimación es requerido para una variable aleatoria con una función (a posteriori) de distribución F . La función de pérdida es descrita de la manera siguiente:

$$p_{\theta}(u) = [\theta - I(u < 0)]u.$$

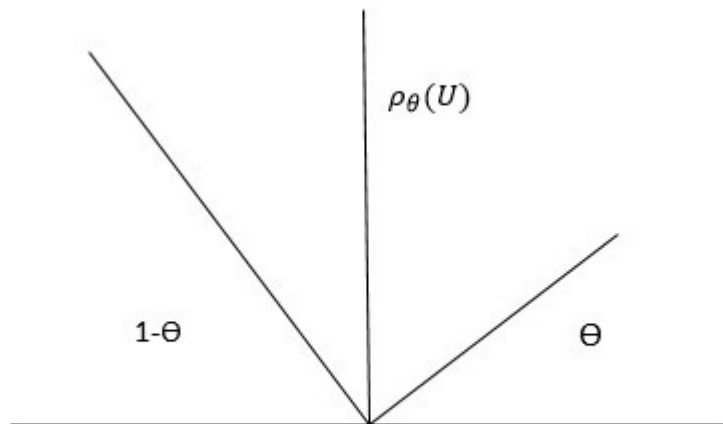


Figura 2.5: Función de pérdida

Para algún $\theta \in (0, 1)$, encontrar \hat{x} que minimice la pérdida esperada. Se busca minimizar:

$$E_{\rho_{\theta}}(X - \hat{x}) = (\theta - 1) \int_{-\infty}^{\hat{x}} (x - \hat{x})dF(x) + \theta \int_{\hat{x}}^{\infty} (x - \hat{x})dF(x).$$

Derivando respecto a \hat{x} , se tiene:

$$0 = (1 - \theta) \int_{-\infty}^{\hat{x}} dF(x) - \theta \int_{\hat{x}}^{\infty} dF(x)$$

$$0 = (1 - \theta)[F(\hat{x}) - F(-\infty)] - \theta[F(\infty) - F(\hat{x})]$$

³La media es un dato estadístico sensible a valores extremos, basta que dentro de la muestra un dato sea muy alto o muy bajo y el promedio se verá afectado.

$$0 = (1 - \theta)[F(\hat{x}) - 0] - \theta[1 - F(\hat{x})] = F(\hat{x}) - \theta$$

Como F es monótona, cualquier elemento de $x : F(x) = \theta$ minimiza la pérdida esperada. Cuando la solución es única $\hat{x} = F^{-1}(\theta)$, de otra manera, tenemos un intervalo de θ -ésimo cuantil del cual podemos escoger el elemento más pequeño para mostrar que la función empírica cuantil es continua por la derecha.

Es natural que nuestro estimador de puntos óptimos para pérdida lineal asimétrica nos guiara al cuantil. En el caso del valor simétrico de pérdida nos guía a la mediana. Cuando la pérdida es lineal y asimétrica preferimos un punto estimado que nos deje en el lado más plano de la pérdida marginal. Por ejemplo, si un subestimado es marginalmente tres veces más costoso que un sobrestimado, entonces escogemos \hat{x} para que $P(X \leq x)$ sea tres veces más grande que $P(x > x)$ para compensar. Se escoge \hat{x} como el 75-ésimo percentil a F . Cuando F es remplazando por una distribución empírica.

$$F_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x).$$

Podemos escoger a \hat{x} para minimizar la pérdida esperada,

$$\int p_\theta(x - \hat{x}) dF_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n p_\theta(x_i - \hat{x}) = \min!$$

Y con esto acotan la θ -ésima muestra cuantil. La muestra del θ -ésimo cuantil, es inherente a la solución a un problema de optimización.

Programación lineal para el problema de regresión cuantil.

Sean dos variables aleatorias \mathbf{x} y \mathbf{y} . Se busca la mejor línea de aproximación para los datos de acuerdo con el criterio⁴ L_1 corresponde a la solución del siguiente problema de minimización:

$$\text{minimizar}_{\beta_0, \beta_1} \sum_{i=1}^n | \beta_0 + \beta_1 x_i - y_i |. \quad (2.6)$$

Aunque esta función de costo no es lineal, se linealiza introduciendo nuevas variables e_i las cuales son variables auxiliares que representan el error en el punto i -ésimo. Las restricciones garantizan que:

$$e_i \geq | \beta_0 + \beta_1 x_i - y_i |$$

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^n e_i$$

sujeto a

$$e_i \geq \beta_0 + \beta_1 x_i - y_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

$$e_i \geq -(\beta_0 + \beta_1 x_i - y_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

En una solución óptima, cada desigualdad se debe satisfacer con igualdad, de otro modo es posible disminuir el e_i correspondiente. Así, la solución óptima arroja una línea de

⁴Es conocida como la regresión mediana y es una extensión natural de la mediana de la muestra cuando la respuesta es condicionada en las covariables.

minimización de la expresión 2.6. Con el fin de resolver el problema de regresión L_1 , es suficiente resolver un problema de programación lineal.

La RC no considera restricciones sobre la distribución del error, es decir, los errores no están sujetos a las hipótesis como normalidad, simetría o homocedasticidad. La desventaja es que no es posible analizar las propiedades de los estimadores. La RC tolera valores atípicos ya que "penaliza" los errores de forma lineal, en cambio mínimos cuadrados al elevar los errores al cuadrado, les asigna mayor magnitud.

Método simplex para regresión cuantil

Dantzing (1963) propuso el método simplex para resolver el problema de programación lineal. El método simplex es un método iterativo, empezando en una solución que satisface las restricciones y la no negatividad de las variables de decisión. Busca una solución vecina que mejore el valor de la función objetivo. El proceso itera hasta que la solución ya no puede ser mejorada.

Para el problema de RC, la versión eficiente del algoritmo simplex fue propuesta por Barrodale y Roberts (1974), adaptada por Koenker y D'Orey (1987), se considera típico en problemas con tamaño moderado. Esta opción es la que se utiliza en la presente investigación para obtener los parámetros de la recta de demanda inversa con regresión cuantil.

2.5.2. Inferencia de regresión cuantil

La etapa de inferencia de RC se distingue por la ausencia de supuestos o hipótesis previos a la estimación.

Los cuantiles son de gran utilidad en casos de distribuciones asimétricas, ya que aportan medidas de proporcionalidad en diferentes valores (cuantiles) de la variable respuesta.

La Figura 2.6 reporta líneas paralelas ajustadas mediante la regresión cuantil. Esto indica que las distribuciones condicionales son independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). Las líneas ajustadas por RC de la misma función reflejan que las pendientes se mantuvieron constantes. A este modelo se llama cambio ubicación. Esto muestra que la intersección (β_0) fue el parámetro sujeto a cambios a través de los modelos de RC ajustados.

El paralelismo en el desplazamiento de las líneas ajustadas por RC confirma que los errores son i.i.d. (Davino, Furno, Vistocco, 2013).

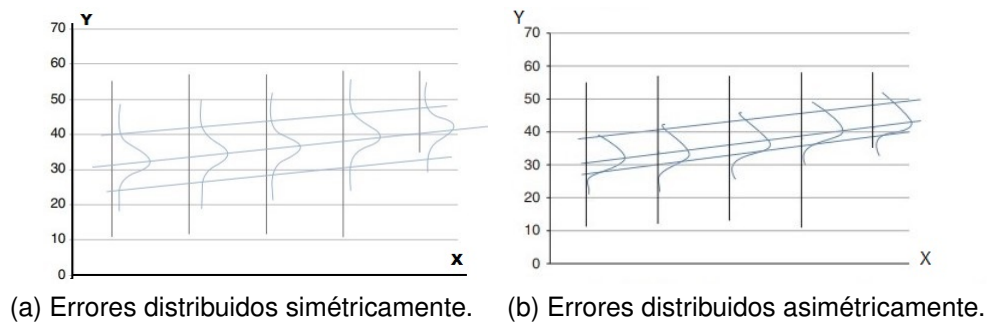


Figura 2.6: Modelos de RC estimados.

La Figura 2.7 muestra casos caracterizados por falta de paralelismo por líneas ajustadas por el RC. Este caso particular, se caracteriza por densidades de errores no idénticos, es decir tienen la misma forma, pero se diferencian en su dispersión.

El modelo ubicación y cambio de escala se caracteriza por que las rectas de regresión cuantil cambian en la intersección y en la pendiente. En la Figura 2.7 a) se muestran errores simétricos, mientras que los errores mostrados en la Figura 2.7 b) son asimétricos (Davino, Furno, Vistocco, 2013).

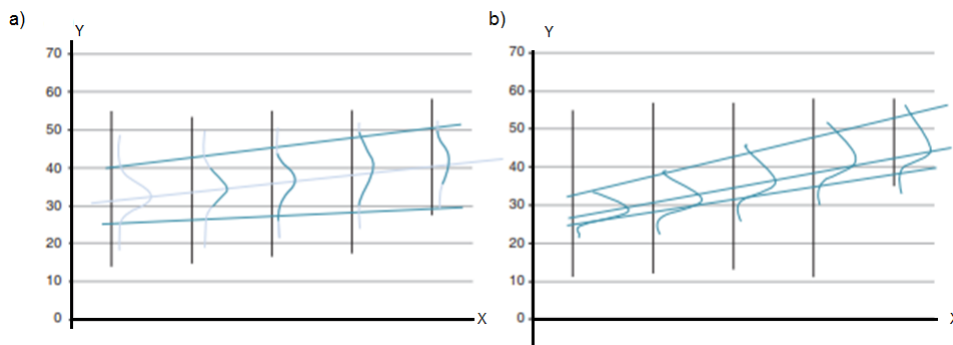


Figura 2.7: Modelos de RC estimados.

Distribución idénticamente e independientemente de los errores

En el modelo de regresión lineal $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$ con errores i.i.d teniendo en común la densidad f , la cual es estrictamente positiva $f(F^{-1}(\theta)) > 0$, donde $F^{-1}(\theta) = Q(\theta)$, el estimador de regresión cuantil $\hat{\beta}(\theta)$ es asintóticamente distribuido como:

$$\sqrt{n} [\hat{\beta}(\theta) - \beta(\theta)] \rightarrow N(0, w^2(\theta)D^{-1}), \quad (2.7)$$

con un parámetro de escala $w^2(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{f(F^{-1}(\theta))^2}$ (*),

siendo $s(\theta) = \frac{1}{f(F^{-1}(\theta))}$. La función de dispersión $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_i X_i^T X_i$ es una matriz positiva.

La ecuación de $w^2(\theta)$ declara que la precisión de los coeficientes estimados es inversamente relacionada con la densidad de los cuantiles seleccionados, $f(F^{-1}(\theta))$.

La expresión (2.7) tiene justificación en el Teorema Central (fundamental) del Límite (Infante, 2008):

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una función de probabilidades f_X con media μ_X y varianza σ_X^2 . Sea $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ la media aritmética de las variables aleatorias que integran la muestra. Para un tamaño de muestra (n), la distribución de la variable aleatoria \bar{X} es aproximadamente normal con media μ_X y varianza σ_X^2/n . Esto es:

$$\bar{X} \sim N(\mu_X, \sigma_X^2/n)$$

De acuerdo con el resultado anterior, y estandarizando la variable aleatoria \bar{X} , la expresión anterior puede escribirse (Infante, 2008):

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_X)}{\sigma_X} \sim N(0, 1)$$

Función de dispersión

La RC depende del recíproco de la función de densidad evaluada en el cuantil de interés, Tukey la llamó función de dispersión (1962). La precisión de las estimaciones de RC dependen de esta cantidad, ya que reflejan la densidad de observaciones cerca de los cuantiles de interés. Si los datos son muy dispersos en el cuantil de interés, será muy difícil estimar. Cuando la dispersión es baja (ya que las observaciones son muy densas), entonces la RC será estimada con mayor precisión.

La ecuación 2.8 permite estimar la precisión del modelo de RC en el cuantil i-ésimo de interés:

$$s(\theta) = \frac{1}{f(F^{-1}(\theta))}. \quad (2.8)$$

El término $f(F^{-1}(\theta))$ es desconocido y debe ser estimado. El siguiente estimador fue propuesto por Sindique(1960):

$$s(t, h) = \frac{F^{-1}(t+h) - F^{-1}(t-h)}{2h}.$$

El ancho de banda h y la función F deben ser definidos. Refiriendo a la distribución normal estándar ϕ , Koenker (1964) sugiere el ancho de banda como:

$$h = n^{\frac{-1}{5}} \left[\frac{4.5\phi^4(\phi^{-1}(t))}{(2\phi^{-1}(t)^2 + 1)^2} \right]^{\frac{1}{5}}.$$

En la Ecuación 2.8, la función de cuantil $F^{-1}(t \pm h)$ debe ser estimada. La función cuantil empírica puede ser usada para este propósito, y un estimador de $F^{-1}(t)$ es dado por los residuos de RC, $y_i - \hat{\beta}_0(t) - \hat{\beta}_1 x_i = u_i$, donde $\hat{\beta}^\top = [\hat{\beta}_0(t) \ \hat{\beta}_1]$ son los estimadores de RC de los parámetros $\beta(\theta)$ en el cuantil θ .

Intervalos de confianza y prueba de hipótesis en los coeficientes estimados

Una vez que la función de dispersión ha sido calculada, la ecuación (*) define los parámetros de RC; mientras el estimador de la matriz de varianza y covarianza de los coeficientes es:

$$E \left[\hat{\beta}(\theta) - \beta(\theta) \right] \left[\hat{\beta}(\theta) - \beta(\theta) \right]^\top = w^2(\theta) D^{-1}. \quad (2.9)$$

La raíz cuadrada de los elementos de la diagonal de la matriz estimada en 2.9 proporciona los errores estándar de los coeficientes estimados de regresión, es $(\hat{\beta}_\rho(\theta))$, $\rho = 1, \dots, p$. Los errores estándar permiten estimar intervalos de confianza con la prueba de hipótesis $H_0 : \beta_p(\theta) = 0$. En particular el intervalo de confianza:

$$P(\hat{\beta}_\rho(\theta) - es(\hat{\beta}_\rho(\theta)) * z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \beta_\rho(\theta) \leq \hat{\beta}_\rho(\theta) + es(\hat{\beta}_\rho(\theta)) * z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha,$$

y la prueba t-Student con **n-p** grados de libertad para verificar la hipótesis nula se usa la estadística de prueba $t = \hat{\beta}_\rho / es(\hat{\beta}_\rho)$, con un nivel de significancia teórico (Tarr, 2012).

Método de inversión de rangos.

El método de inversión de rangos evita una estimación directa de la matriz de covarianza asintótica de los coeficientes estimados y resulta naturalmente de las técnicas de programación lineal usadas para encontrar estimadores para los coeficientes de regresión cuantil. Koenker describe el acercamiento de errores i.i.d. para las pruebas de método de inversión de rangos, extendiendo el trabajo de la inferencia de rangos para modelo de regresión lineal de Gutenbrunner et al.

Koenker y Machado suavizan el supuesto de que el error sea idénticamente distribuido y consideran el modelo de cambio de escala usado por Gutenbrunner y Jurcková.

Considerando observaciones pares (x_i, y_i) donde $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,k})^T$ es un vector de $k \times 1$ de covariables y y_i es la variable respuesta para $i = 1, \dots, n$. La relación entre y_i y x_i es modelada por la relación lineal:

$$y_i^T = x_i^T \beta_\theta + \sigma_i.$$

El término de error, u_i , se supone independiente de una distribución de error desconocida F . La función cuantil del θ -ésimo es $Q_\theta(y_i | x)$. Estimamos:

$$F_{y_i|x_i}^{-1}(\theta) = Q_\theta(y_i | x_i) = x_i^T \beta_\theta.$$

Koenker y Baset introducen la función de pérdida

$$p_\theta(u) = u(\theta - I(u < 0)), \quad \theta \in (0, 1),$$

y estiman el parámetro $\hat{\beta}_\theta$ resolviendo el problema,

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^n p_{\theta}(y_i - x_i^T \beta).$$

Intervalos de confianza

Los intervalos del método de inversión de rango generalmente son más estrechos que otros métodos, excepto en el caso de diseño de Cauchy. Este método es consistente en algunas condiciones de heterocedasticidad. Donde:

$$y_i^T = x_i^T \beta_{\theta} + \sigma_i u_i$$

y $\sigma_i = x_i^T \gamma$ y el u_i se supone i.i.d. con función de distribución F.

Bajo el método de inversión de rangos, los intervalos de confianza se estiman para un solo parámetro y es encontrado por el proceso de 'invertir' la estadística de prueba apropiada; moviéndose de un pivote de simplex al siguiente para obtener un intervalo en el cual la prueba estadística es tal que la hipótesis nula,

$$H_0 : \beta_{j,\theta} = b$$

no se rechaza. El j-ésimo componente de $\beta_{j,\theta}$, es el vector de la regresión cuantil del vector β_{θ} . El intervalo no necesariamente resulta ser simétrico (Tarr, G. 2012).

Errores independientes y no idénticamente distribuidos

En este caso, los errores se caracterizan por cambiar su varianza a través de la muestra, que implica un error de densidad f_i cambiando en la muestra. La distribución asintótica del estimador de la regresión cuantil es:

$$\sqrt{n} [\hat{\beta}(\theta) - \beta(\theta)] \rightarrow N(0, \theta(1-\theta) D_1(\theta)^{-1} D D_1(\theta)^{-1}),$$

donde $D_i(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_i f_i(F^{-1}(\theta)) X_i^T X_i$ es una matriz positiva.

Errores distribuidos idénticamente y no independientes

El caso de distribución de errores dependientes ocurre en datos de series de tiempo, donde la dependencia implica errores influenciados por sus propios valores. La función de densidad es la misma a través de toda la muestra, pero no es independiente de sus valores pasados.

El caso más simple son los errores del modelo regresión lineal simple, $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$ (*) con $e_i = a_{i-1} + a_i$ donde a_i es un error i.i.d, $|a| < 1$, e_i tienen función de densidad positiva f y $f(F^{-1}(\theta)) > 0$. En este modelo la observación i-ésima de la variable dependiente es influenciada por el valor previo de error, e_{i-1} . Esto es un modelo autorregresivo de primer orden AR(1), pero puede incluir más en la definición de e_i . La distribución asintótica del estimador de la regresión en el caso de los errores AR(1):

$$\sqrt{n} [\hat{\beta}(\theta) - \beta(\theta)] \rightarrow N(0, w^2(\theta) D^{-1} A D^{-1}),$$

donde $A = \lim_{n \rightarrow \infty} D + \frac{1}{n} \sum_i \psi(e_i) \psi(e_{i-1}) (x_i^T x_{i-1} + x_{i-1}^T x_i)$ es una matriz positiva,

$\sum_i \psi(e_i)x_i^T = \sum_i \text{sgn}(e_i)x_i^T$ es el gradiente de RC con $\psi(\cdot)$ siendo la derivada de la función objetivo RC y es igual a la función signo⁵ (Weiss,1990).

De la ecuación (*) se tiene que $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \alpha e_{i-1} + a_i$, reemplazándola con la definición de AR(1), $e_{i-1} = \alpha e_{i-2} + a_{i-1}$ se tiene:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \alpha^2 e_{i-2} + \alpha a_{i-1} + a_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \alpha^2 e_{i-2} + \lambda_i$$

donde en este caso $\lambda_i = \alpha a_{i-1} + a_i$. Si se reemplaza repetidamente el error retrasado con la definición AR(1), regresando h periodos se obtiene :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \alpha^h e_{i-h} + \alpha^{h-1} a_{i-h+1} + \dots + \alpha^2 a_{i-2} + \alpha a_{i-1} + a_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \alpha^h e_{i-h} + \lambda_i$$

donde en este caso

$$\lambda_i = \alpha^{h-1} a_{i-h+1} + \dots + \alpha^2 a_{i-2} + \alpha a_{i-1} + a_i$$

reúne a todos los valores actuales y pasados de a_i . En la ecuación anterior el error $\alpha^h e_{i-h}$ tiene muy poca influencia en el y_i actual, mientras $|a| < 1$. Esta condición es necesaria para asegurar la posibilidad de estimar el modelo. El término

$$\lambda_i = \alpha^{h-1} a_{i-h+1} + \dots + \alpha^2 a_{i-2} + \alpha a_{i-1} + a_i$$

es la suma de los errores i.i.d. de acuerdo del ajuste de Weiss (1990).

2.5.3. Acondicionamiento de la variable respuesta y la variable explicativa

En datos reales la transformación de la variable respuesta y explicativa puede ofrecer la corrección de asimetría y autocorrelación, así como mejorar la estimación y autocorrección, así como mejorar la estimación y simplificar la interpretación del modelo.

Una de las principales ventajas de los estimadores de RC es el comportamiento de las transformaciones monótonas de la variable respuesta. Este comportamiento equivariante representa una fortaleza en la RC. En seguida se describen propiedades de equivarianza así como sus implicaciones prácticas. Considerando el modelo RC con una variable explicativa para un cuantil dado:

$$Q_\theta(\hat{y} | x) = \hat{\beta}_0(\theta) + \hat{\beta}_1(\theta)x$$

1) Al multiplicar por la constante **c** la propiedad de equivarianza de escala implica que si **c** es una constante positiva entonces :

$$Q_\theta(c\hat{y} | x) = c\hat{\beta}_0(\theta) + c\hat{\beta}_1(\theta)x$$

2) En el caso que sea multiplicarlo por una constante negativa **d**, los coeficientes del nuevo modelo son el complemento del modelo original por el cambio de errores negativos y positivos:

$$Q_\theta(d\hat{y} | x) = d\hat{\beta}_0(1 - \theta) + d\hat{\beta}_1(1 - \theta)x$$

⁵la función extrae el signo del número real.

Para $\theta = 0.5$ los estimadores son equivalentes de escala, independientemente que la constante sea positiva o negativa.

3) La propiedad de cambio de equivarianza es también referida a equivarianza de regresión, ya que denota los efectos de la variable explicativa obtenida como combinación lineal, a través del coeficiente γ de la variable explicativa. Este efecto sucede cuando y es sujeto a un cambio de ubicación :

$$y^* = y + x\gamma$$

El estimador de RC de y^* en x resulta:

$$Q_\theta(\hat{y}^* | x) = \hat{\beta}_0 + [\hat{\beta}_1(\theta) + \gamma] x$$

4) La equivarianza a la reparametrización del diseño⁶ es derivado del efecto de una matriz no singular $(A_{ij})_{p \times p}$ introducida en un modelo:

$$Q_\theta(\hat{y} | XA) = A^{-1}X\hat{\beta}(\theta)$$

donde X es una matriz de p variables explicativas.

5) La equivarianza a transformaciones monótonas implica que si una función no decreciente $h(\bullet)$ es aplicada a la variable respuesta, los cuantiles de la variable transformada son cuantiles transformados de los originales:

$$Q_\theta [h(\hat{y}) | x] = h [\hat{\beta}_0(\theta)] + h [\hat{\beta}_1(\theta)] x.$$

Es muy importante en datos reales ya que una selección correcta de función $h(\bullet)$ monótona es necesaria para manejar y corregir diferentes tipos de asimetría.

Correlación (Weiss, 1991)

Weiss (1991) consideraba la regresión mediana, para estimar la prueba de correlación. Si el modelo es estimado ignorando la correlación existente, sus estimadores serán imparciales, pero la inferencia es incorrecta. El parámetro estimado sobrestima o subestima el valor verdadero dependiendo del signo de la correlación presente. La función objetivo de RC es $V(\theta)$:

$$V(\theta) = \sum_{i=1, \dots, n} p(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = \sum_{i=1, \dots, n} p(e_i);$$

y el gradiente es $V'(\theta)$

$$V'(\theta) = \sum_{i=1, \dots, n} \psi(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = \sum_{i=1, \dots, n} \psi(e_i) = 0$$

$$\sum_{i=1, \dots, n} \psi(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i = \sum_{i=1, \dots, n} \psi(e_i) x_i = 0$$

⁶La transformación de $\hat{\beta}_\tau$ está dado por la inversa de la matriz de transformación de X .

En la mediana se tiene que $\psi(e_i) = \text{sgn}(e_i)$ y la forma cuadrática del gradiente converge a la matriz definida positiva dada por:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_i \sum_j \psi(e_i) \psi(e_j) x_i x_j^\top.$$

donde $x_i = \begin{bmatrix} 1 \\ z_i \end{bmatrix}$ es un vector $(p,1)$ coleccionando la observación i -ésima de todas las variables explicativas de la ecuación. Suponiendo que la variable explicativa tiene una forma cuadrática con la convergencia de la matriz positiva definida $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_i x_i x_i^\top$, el estimador minimizando la función objetivo $V(\theta)$ de la RC, es asintóticamente distribuido:

$$\sqrt{n} | \hat{\beta}(\theta) - \beta(\theta) | \rightarrow N(0, w^2(\theta) D^{-1} A D^{-1})$$

Ignorar la correlación significa estimar incorrectamente el termino $w^2(\theta) D^{-1} A D^{-1}$ por el termino $w^2(\theta) D^{-1}$. Con el fin de corregir esto, la ecuación $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \alpha e_{i-1} + a_i$ es transformada reemplazando por el error retrasado e_{i-1} con su definición $y_{i-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{i-1}$. Tal que el modelo se convierte en:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \alpha(y_{i-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{i-1}) + a_i$$

$$y_i = (1 - \alpha)\beta_0 + \alpha y_{i-1} + \beta_1(x_i - \alpha x_{i-1}) + a_i$$

$$y_i = b_0 + \alpha y_{i-1} + \beta_1 x_i - b_1 x_{i-1} + a_i \quad (**)$$

$$y_i - \alpha y_{i-1} = b_0 + \beta_1(x_i - \alpha x_{i-1}) + a_i$$

$$y_i^* = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + a_i \quad (***)$$

En la ecuación (**) $b_i = \alpha\beta_1$ y $b_0 = (1 - \alpha)\beta_0$ mientras en ecuación (***) y_i^* y x_i^* son definidas como $y_i^* = y_i - \alpha y_{i-1}$ y $x_i^* = (x_i - \alpha x_{i-1})$. La ecuación (**) y la ecuación (***) permiten estimar el modelo con errores i.i.d., ya que las variables han sido transformadas a variables con retraso han sido introducidas. Ello, con el fin de obtener un a_i como error de la ecuación el cual es distribuidas idénticamente independiente por definición.

Con respecto a la primera ecuación que ignora la presencia de correlación en serie,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i,$$

el modelo (**) involucra la introducción de variables rezagadas dependiente e independientes. El vector de coeficientes de regresión ahora incluye coeficientes de correlación α individualmente, en el coeficiente de la variable respuesta rezagado αy_{i-1} , y de una forma multiplicativa en ambas constantes,

$$b_0 = (1 - \alpha)\beta_0,$$

y en el coeficiente de la variable respuesta rezagado,

$$b_1 x_{i-1} = \alpha \beta_1 x_{i-1}.$$

El vector de coeficiente de regresión es ahora

$$\beta^\top(\theta) = [b_0(\theta) \alpha(\theta) \beta_1(\theta) b_1(\theta)].$$

La Ecuación (**) proporciona una manera rápida de verificar la presencia de correlación en serie de los errores. La prueba t de Student aplicada a los coeficientes estimados del modelo usando la variable respuesta rezagada $\alpha(\theta)$, permite rechazar la hipótesis nula $H_0 = a = 0$, lo cual implica la ausencia de correlación.

El modelo (***) es un estimado de dos pasos. En el primer paso el coeficiente de correlación $\alpha = \frac{cov(e_i e_{i-1})}{var(e_i)}$, donde e_i son los errores (residuos) de la ecuación inicial $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$. En el segundo paso las variables originales son transformadas de la siguiente manera

$$y_i^* = y_i - \alpha y_{i-1} \quad y \quad x_i^* = (x_i - \alpha x_{i-1}),$$

con el fin de purgar la correlación. El vector de coeficientes del modelo (***) es $\beta^T(\theta) = [\beta_0(\theta) \beta_1(\theta)]^T$.

Después de eliminar la correlación serial, la distribución asintótica de estimador RC está dada por

$$\sqrt{n}[\hat{\beta}(\theta) - \beta(\theta)] \rightarrow N(0, w^2(\theta)A^{-1}).$$

La eficiencia del modelo (***) fue encontrada por Weiss en 1990 . (Davino, Furno, Vistocco, 2013).

Prueba de Spearman

Esta prueba es no paramétrica y permite evaluar el grado de asociación o correlación entre dos variables. La diferencia de esta prueba y la de Pearson es que opera en clasificaciones de los datos en lugar de los datos crudos. Por ser no paramétrica, es una técnica que no es afectada por la distribución de los errores de las variables. Puesto que la prueba de Spearman opera en clasificaciones de rangos de los datos, no es sensible a datos atípicos y no tiene el requerimiento de que los datos sean obtenidos en intervalos espaciados regulares. Puede ser utilizados en una muestra pequeña de datos. La desventaja es que hay pérdida de información cuando los datos son convertidos en rangos.

El fundamento de esta prueba consiste en un ordenamiento ascendente de los datos para generar rangos por cada variable. Se registra la diferencia de rangos en pares. Si los datos están correlacionados, la suma de los cuadrados de las diferencias de los rangos será pequeña. El coeficiente de Spearman (ρ) se calcula de la siguiente manera:

$$r_s = \frac{1 - 6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n},$$

donde d_i es la diferencia de los rangos para cada x_i, y_i par de rangos y n como el número de pares (Gauthier).

⁷En el caso de que $e_i = AR(2)$, $y_i^* = y_i - \alpha_1 y_{i-1} - \alpha_2 y_{i-2}$ y $x_i^* = x_i - \alpha_1 x_{i-1} - \alpha_2 x_{i-2}$. En caso de que $e_i = AR(q)$, q coeficientes autorregresivos tiene que ser estimados y q retrasos tienen que ser introducidos para encontrar la variables transformadas y_i^* y x_i^* .

2.5.4. Heterocedasticidad

La heterocedasticidad generalmente ocurre en datos de corte transversal, sin embargo puede ocurrir en series de tiempo y datos de todo tipo. El modelo de heterocedasticidad puede ser escrito como $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \sigma_i e_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ con e_i distribuidos independiente e idénticamente y con la presencia de la heterocedasticidad se modifica la matriz de varianza y covarianza de los coeficientes de RC de la siguiente manera:

$$E\left[\hat{\beta}(\theta) - \beta(\theta)\right] \left[\hat{\beta}(\theta) - \beta(\theta)\right]^T = D_1(\theta)^{-1} D D_1(\theta)^{-1}$$

donde las matrices D y $D_1(\theta)$ son definidas como

$$D = \lim X^T X, D_1(\theta) = \lim X^T \gamma^{-1} X \quad y$$

$$\gamma = \text{diag}(w_i^2(\theta)) \quad \text{donde} \quad w_i^2(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{f_i(F^{-1}(\theta))^2}.$$

La densidad cambiante de u_i en la matriz $\Gamma, [f_i(F^{-1}(\theta))]$, puede transformarse en una parte constante dado por la densidad de $e_i, [f(F^{-1}(\theta))]$, multiplicada por la $\sigma_i = h(x_i)$, estadísticamente cambiante. En el caso de i.i.d la matriz $D_1(\theta)$ simplifica con D y la ecuación anterior coincide con la ecuación (2.5).

Una prueba para heterocedasticidad en RC es comparar los coeficientes estimados en diferente cuantiles. El σ_i cambiante tiene un impacto en los coeficientes estimados de RC, y causa que $\beta(\theta)$ cambie a través de los cuantiles.

En muestras con el caso de i.i.d, las regresiones estimadas son líneas paralelas, diferenciadas en el origen (pendiente igual). Con heterocedasticidad ambos cambian, los coeficientes del intercepto (origen) y la pendiente.

Por esta razón, una prueba de heteroscedasticidad verifica si las diferencias en las pendientes estimadas a través de los cuantiles son estadísticamente significativas o si estas diferencias son irrelevantes dado la variación de la muestra. La prueba considera la comparación de las pendientes estimadas en el i-ésimo y en el j-ésimo cuantil.

La prueba de Koenker y Basset para heterocedasticidad

La prueba de Wald (W), los multiplicadores de Lagrange (LM) y el índice de probabilidad (LR) son pruebas que excluyen dos o más variables conjuntamente y no secuencialmente. Estas pruebas son asintóticamente equivalente y asintóticamente distribuidas con χ^2 . Permiten verificar la exclusión de uno o más coeficientes a un mismo tiempo. Los grados de libertad de χ^2 son igual al número de coeficientes bajo la prueba (Davino, Furno, Vistocco, 2013).

La prueba de Wald analiza los estimadores del modelo incluyendo las variables bajo prueba (Koenker y Basset 1982). Si su función cuadrática es cercana a cero, las variables de la prueba pueden ser excluidas con seguridad. La función de la prueba es:

$$W = \left(H\hat{B} - h\right)^T \left[H\{\Omega \otimes (X^T X)^{-1}\}H^T\right]^{-1} \left(H\hat{B} - h\right).$$

Prueba de hipótesis:

Sea $B = (\beta(\tau_1)^T, \dots, \beta(\tau_m)^T)^T$

$H_0 : HB = h.$

$H_1 : HB \neq h.$

Donde B es el vector de parámetros, H es una matriz con dimensiones $J \times mp$, m es el número de cuantiles, p es el número de estimadores, h un vector de tamaño J , y J son los grados libertad de la distribución χ_J^2 bajo la hipótesis nula.

Capítulo 3

Metodología

En una primera etapa, se investigaron y sistematizaron series históricas de datos de las variables usadas para estimar el precio de crédito de vivienda correspondiente a 18 bancos nacionales durante el periodo de 2009-2018. En el año 2018 solo se dispuso de tal información para el segundo bimestre. La información se obtuvo de las estadísticas de datos históricos de la Comisión Nacional Bancaria de Valores (CNBV) de portafolio total. Los precios se estimaron tomando en cuenta 18 bancos de la Banca Múltiple.

En la estimación del precio no se incluyen los Gastos de Originación de un crédito, los que comprenden: gastos notariales, honorario por avalúo, gasto de investigación, comisión por apertura, total de Gastos, y enganche. Asimismo, no se toma en cuenta el seguro de vida y seguro de daños, los cuales se pagan mensualmente. El valor del precio que se toma en cuenta es el capital más el interés. El precio se calcula dividiendo el saldo del capital, que se refiere al monto del préstamo entre una anualidad inmediata.

$$\text{Precio de crédito} = \frac{\text{Monto}}{a_{\bar{n}|}} \quad (*)$$

donde

$$a_{\bar{n}|} = \frac{1 - v_n}{i} \quad y \quad v_n = \frac{1}{1 + i}$$

Las variables consideradas en la estimación del precio son las siguientes: monto de crédito de vivienda, interés, plazo y cantidad de créditos (q_i , producción de cada banco). Todas estas variables corresponden a un promedio anual de cada banco.

El mercado que se considera es el destino de crédito para adquisición de vivienda nueva. Se utilizó la función **PAGO()** de Excel-2013 el cual calcula el precio como la Ecuación (*).

Se obtuvo el precio estimado para los 18 bancos, y sus respectivas cantidades en una década con el fin de analizar el comportamiento del mercado de crédito a la vivienda, específicamente el destino de crédito para adquisición de vivienda nueva.

Se compararon las estimaciones obtenidas del año 2018 con los precios de cada una de las páginas del simulador hipotecario. Esto, con la finalidad de valorar la precisión de las estimaciones obtenidas con respecto a los simuladores de hipotecas en el año 2018, logrando una precisión adecuada.

Mediante el uso de la RC se estimaron los parámetros de la recta de demanda inversa, con el fin encontrar la aproximación del equilibrio de Cournot y Stackelberg. En la estimación de la demanda inversa se supone que la cantidad demandada es la misma que la cantidad de créditos vendidos. La variable respuesta **P** corresponde al precio estimado y en el caso de la variable explicativa **Q** corresponde a la cantidad de créditos vendidos.

La complejidad de esta investigación es el manejo y el tratamiento de datos, ya que en el modelo de Cournot se tiene el supuesto de que el mercado sigue una demanda inversa.

$$P(Q) = a - bQ.$$

En la segunda etapa de esta investigación se realizó el análisis de datos como un agregado, tomando en cuenta todos los precios y cantidades del 2009-2018 con el objetivo de encontrar los parámetros **a** y **b**. Se usó regresión cuantil con el objetivo de estimar la recta de demanda inversa.

Para lograr este objetivo, se eliminaron aquellas cantidades iguales a 0, porque no nos interesa analizar bancos con producción nula. Después se analizó la variable respuesta, que corresponde al precio y está en función de la variable explicativa la cual representa la cantidad de créditos a la vivienda. Con el modelo RC se obtienen los estimadores $\hat{\beta}_0$ (representa el intercepto de la recta de demanda inversa) y $\hat{\beta}_1$ (representa la pendiente de la recta de demanda inversa).

Asimismo, se calcularon estadísticas descriptivas de dispersión y tendencia central para la variable respuesta (**Y**) que corresponde al precio del crédito. Lo anterior con la finalidad de tener una aproximación del comportamiento de datos mediante las estadísticas:

- Mínimo, Máximo
- 1er cuantil, 3er cuantil
- Mediana
- Media
- Asimetría
- Curtosis.

Se realizan pruebas de hipótesis para verificar si sigue una distribución normal y se analizan datos atípicos.

Se construye el modelo RC. Inicialmente se trabaja con la mediana para el análisis de los residuales.

Se realizan transformaciones de las variables con el fin de obtener residuales independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d).

Se opta seguir el método de Weiss (1991) con el fin de transformar los residuales a i.i.d.

La varianza homogénea se examina con la prueba de Koenker y Basset (1982), que se basa en la prueba de Wald, y la hipótesis de interés es la igualdad de pendientes.

A continuación, se selecciona el método de estimación de los parámetros con base en el comportamiento de los residuos y al tamaño de la muestra (en el Capítulo 2 se describen los distintos métodos).

Se obtienen intervalos de confianza para cada modelo de la RC, también se obtiene el nivel de significancia estadística de los parámetros obtenidos.

Se hace una selección de modelos de acuerdo a la significancia estadística de los parámetros.

Se realiza una segunda selección de modelos RC de acuerdo con la función de dispersión. Los últimos modelos seleccionados se ocupan para obtener el intervalo de los posibles valores que pueden tomar los parámetros de la recta de demanda inversa.

Finalmente, se obtienen los parámetros en términos de las variables originales. En la tercera etapa se usan las rectas seleccionadas de RC para obtener $P(q_i) = a - b(q_i)$, para $i = 1, 2, \dots, n$ con la función de pago de Cournot:

$$\Pi_i = [a - b(\sum_{i=1}^n q_i) - c]q_i = [P(q_i) - c]q_i \quad \text{para } q_i = 1, 2, \dots, n.$$

De esta manera, se obtiene el posible intervalo en el cual se encuentran los parámetros.

En la cuarta etapa se utilizan los mismos parámetros obtenidos en la RC, para la aplicación del modelo de Líder Múltiple de Stackelberg, en este caso se considera los bancos Banamex, Banorte, BBVA Bancomer, como los bancos que representan todo el mercado, ya que son los que reúnen más del 60 % del mercado de adquisición de vivienda durante la década de estudio.

En el caso de los líderes, la siguiente función se resuelve para la cantidad x_i :

$$Max_{x_i \geq 0} \{x_i p[x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^* + Q(x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^M x_j^*)] - x_i c\}.$$

En el caso de los seguidores se resuelve para la cantidad q_i :

$$Max_{q_i \geq 0} \{q_i p[q_i + x + \sum_{j=1, j \neq i}^N q_j^*(x)] - q_i c\}.$$

La quinta etapa se enfoca al análisis de resultados para teoría de juegos, esta se divide en 3 partes:

Análisis de resultado para el modelo los siguientes modelos de teoría de juegos:

- a) Escenario 1: Cournot.
- b) Escenario 2: Stackelberg con un Líder.
- c) Escenario 3: Stackelberg con Múltiple Líder con los 4 bancos.

Cada modelo considera los dos modelos estimados por RC, se realiza un análisis estático para ellos, en donde se consideran tres valores propuestos para el costo marginal c .

Análisis comparativo entre los tres modelos de Teoría de Juegos.

Comparación de los modelos de Teoría de Juegos con datos históricos.

Finalmente se presentan como apéndices los códigos del programa R utilizados para el análisis estadístico: el código del programa en Visual Basic el cual se utilizó para obtener la información de una manera automatizada y algunas definiciones de estadística que complementan el Marco Teórico.

Los programas utilizados fueron los siguientes: R-Studio y Excel-VBA.

Capítulo 4

Resultados y discusión

4.1. Análisis de resultados de Regresión Cuantil

En la presente investigación se aplica la regresión cuantil (RC), con el objetivo de estimar el intervalo de posibles valores que pueden tomar los parámetros de la demanda inversa. Se elige la RC, ya que los percentiles describen completamente la relación cantidad-precio. Asimismo, la RC corresponde a un método estadístico no paramétrico y con ello, la ventaja que los supuestos del modelo permiten una distribución libre de las variables, es decir, para el presente trabajo el método RC presenta mayores ventajas que aquel de mínimos cuadrados.

La aplicación de la metodología RC inicia con el análisis de la variable respuesta (dependiente), la cual corresponde al precio (miles de pesos) y que está en función de la variable explicativa (independiente) representando a la cantidad de créditos a la vivienda (créditos), ambas variables permiten construir el modelo de RC a través de la estimación de sus parámetros (β_0, β_1) . A continuación, se evalúa la significancia estadística de los parámetros estimados mediante las pruebas de hipótesis correspondientes, con el fin de validar el modelo.

A continuación, se prueban los supuestos del modelo RC mediante procedimientos gráficos y pruebas de hipótesis con el uso de los residuales del modelo. Si los residuales se distribuyen **i.i.d.** o no idénticamente **n.i.d.** más el tamaño de la muestra, se selecciona el método de estimación de los parámetros.

En seguida se vuelve a realizar la RC con el método de estimación seleccionado para obtener los estimadores de los parámetros, su significancia estadística y los intervalos de confianza para cada recta de regresión cuantil.

4.1.1. Análisis exploratorio de la variable respuesta

Se analiza la variable respuesta como primer acercamiento al comportamiento descriptivo del precio. El Cuadro 4.1 reporta las estadísticas descriptivas de la respuesta. Se observa que la mediana es menor a la media. Esto se debe al sesgo positivo y a la susceptibilidad de la media a valores extremos. La medida de asimetría indica un grado de distorsión 0.4, cuyo valor positivo indica una asimetría hacia la derecha. En el caso de la curtosis o apuntamiento con valor de 0.78, refiere una distribución leptocúrtica, es decir, con un valor del punto máximo inferior a aquel de la normal estándar.

Cuadro 4.1: Estadísticas descriptivas de la variable respuesta precio del crédito a la vivienda.

Estadísticas descriptivas	
Min.	1,121
1er Cuartil.	2,767
Mediana	3,144
Media	3,172
3er Cuartil.	3,445
Max.	5,532
Asimetría	0.4
Curtosis	0.78

Elaboración propia con datos de CNBV.

Análisis gráfico de la variable respuesta. En la figura 4.1 se muestra el histograma de la respuesta. La línea punteada corresponde a una distribución normal y la línea continua es la densidad estimada. Se aprecia que la variable respuesta es asimétrica con sesgo positiva y curtosis menor a cero que corresponden a una distribución más apuntada y con colas más largas que la distribución normal.

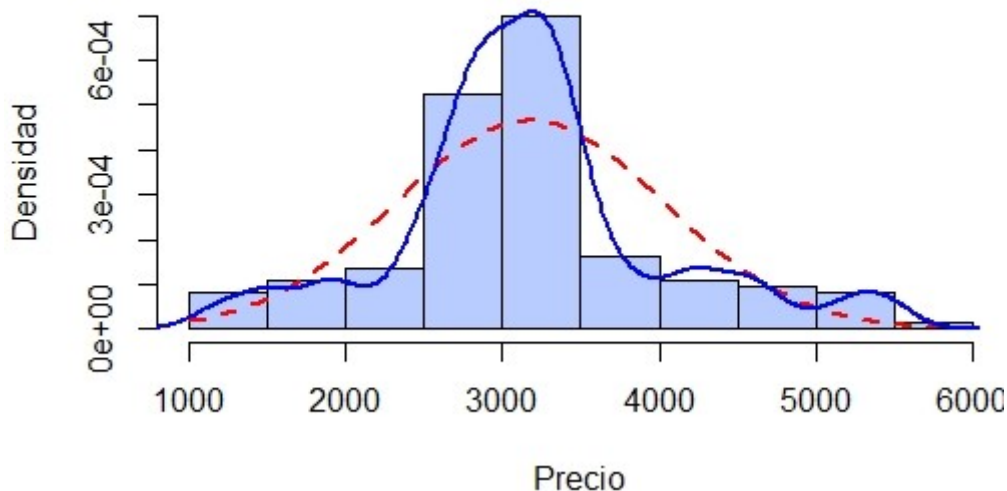


Figura 4.1: Histograma de la variable respuesta, precio del crédito a la vivienda.

La Figura 4.2 Gráfica Quantil-Quantil muestra que las observaciones de los extremos se alejan demasiado de la recta diagonal, donde los puntos inician por abajo de ésta con un giro para alcanzarla y terminan por encima de la diagonal. Esto corresponde a una distribución de colas largas, lo cual indica que los datos no siguen una distribución normal y presentan un sesgo.

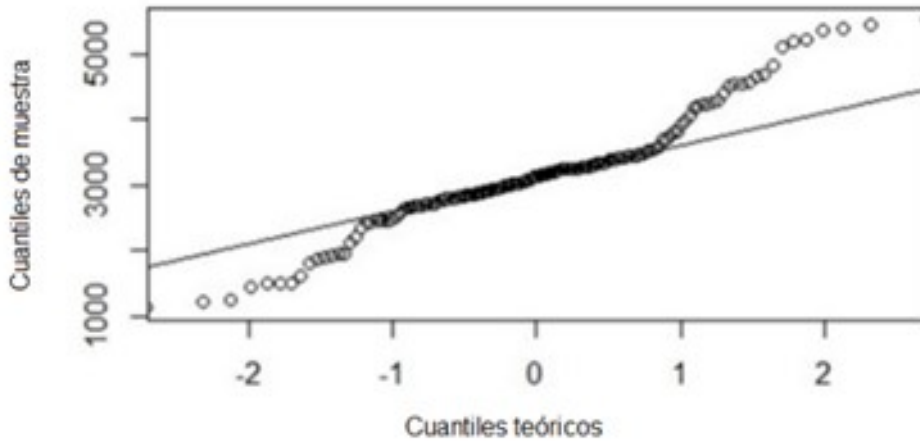


Figura 4.2: Gráfica Q-Q normal para el precio del crédito a la vivienda.

El histograma (Figura 4.1) y la gráfica de probabilidad normal (Figura 4.2) indican que la variable respuesta no se distribuye normal. Para mayor certeza, se prueba las siguientes hipótesis:

H_0 : Los datos siguen una distribución normal

H_1 : Los datos no siguen una distribución normal

Mediante el método de Anderson-Darling (1954) se obtuvo un nivel de significancia observado de $p\text{-valor} = 3.137e-07$. Ello conduce a rechazar la hipótesis nula, por lo tanto el precio no se distribuye normal.

La Figura 4.3 reporta numerosos valores atípicos, esta es una de las razones por la cual se decide utilizar RC, ya que es un método robusto, en comparación con mínimos cuadrados ordinarios, que se centra en la media la cual es susceptible a valores extremos. En tanto que RC, se basa en la minimización de las desviaciones absolutas ponderadas con pesos asimétricos que son robustas a datos extremos (valores atípicos).

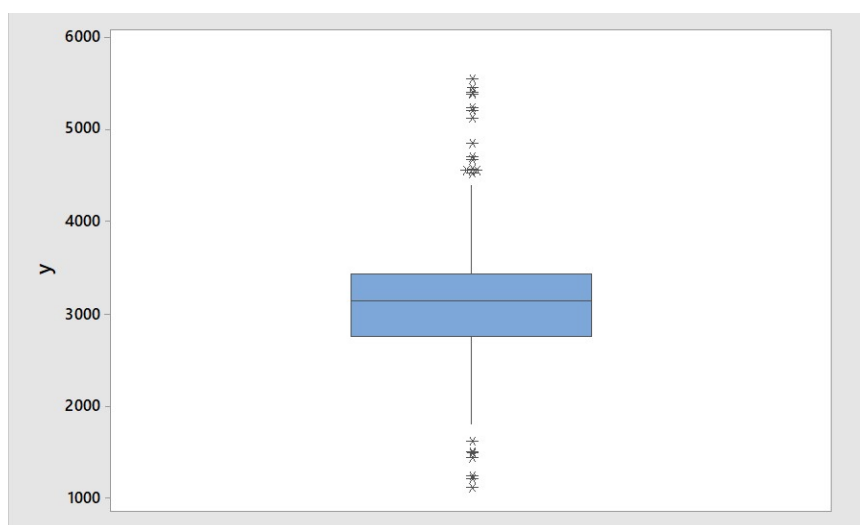


Figura 4.3: Diagrama de caja del crédito a la vivienda.

4.1.2. Análisis de regresión cuantil

En esta sección se analiza la distribución de los residuos del modelo de RC ($\theta = 0.5$), con el fin de elegir el método más adecuado para la estimación de los parámetros.

Análisis de Residuales. La Figura 4.4 muestra los residuales en función al orden de aparición. Se observa que los residuales carecen de un patrón aleatorio, por lo que se presume la presencia de autocorrelación de primer orden, y con ello que los residuales carecen de independencia.

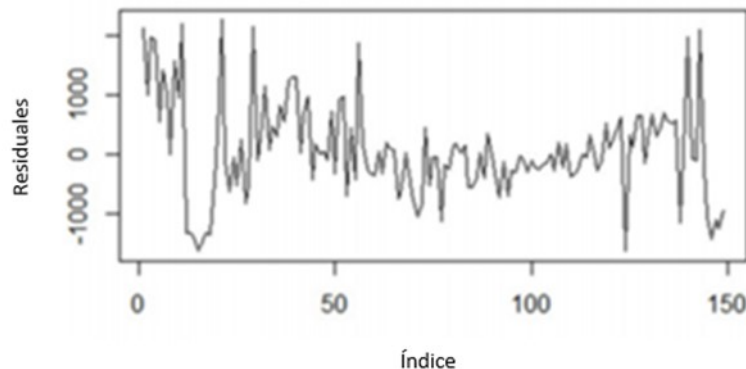


Figura 4.4: Residuales del modelo de regresión cuantil para la mediana.

Se utiliza el método de Weiss (1991) para confirmar la independencia de los residuales. Para ello, el autor modela la RC en la mediana ($\theta = 0.5$). Asimismo, calcula la correlación de los residuales de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\alpha = \frac{cov(e_i, e_{i-1})}{var(e_i)}$$

tal que para el modelo RC ($\theta = 0.5$) se obtiene:

$$\alpha = 0.38.$$

Puesto que los residuales no se ajustan a una distribución normal, es viable la aplicación de métodos estadísticos no paramétricos, tales como la prueba de Spearman, la cual permitirá evaluar la significancia de la correlación entre los residuales, mediante la siguiente prueba de hipótesis:

$$H_0 : \alpha = 0$$

$$H_1 : \alpha \neq 0$$

Con base en la muestra, la prueba de Spearman se obtienen los siguientes resultados:

$$\alpha = 0.38 \quad p - \text{valor} = 9.838e - 07$$

La regla de decisión indica que: Si $[p - \text{valor} = 9.838e - 07] \leq [0.05]$, se rechaza con un nivel de confianza de .95, los residuales no son independientes.

Por lo tanto, la correlación que existe es significativa.

Acondicionamiento de la variable respuesta y la variable explicativa

Dado que el modelo de RC supone independencia de los residuales, se realiza un acondicionamiento de la variable respuesta y explicativa de acuerdo a las siguientes expresiones (Weiss, 1991):

$$y_i^* = y_i - \alpha y_{i-1}$$

$$x_i^* = x_i - ax_{i-1}$$

Estas transformaciones permitirán corregir la presencia de autocorrelación de primer orden que presentan los residuales.

Para verificar la ausencia de autocorrelación entre residuales del modelo RC con las variables transformadas se vuelve a aplicar la prueba de Spearman, obteniendo las siguientes estadísticas:

$$\alpha = -0.019$$

$$p - \text{valor} = 0.816$$

Con base en la regla de decisión: Dado que $[\hat{\alpha} = 0.816] \geq [\alpha = 0.05]$, no rechazar la $H_0 : \alpha = 0$, al nivel de confianza de .95.

Por lo tanto, los residuales son independientes, cumpliendo el supuesto del modelo RC.

Es importante recordar que en la transformación aplicada se permite obtener el término a_i como término de error, el cual es i.i.d, por supuesto del modelo de RC:

$$y_i - \alpha y_{i-1} = b_0 + \beta_1(x_i - ax_{i-1}) + a_i$$

$$y_i^* = \beta_0 + \beta_1 x_i^* + a_i$$

El Cuadro 4.2 muestra los estimadores por regresión cuantil para la mediana ($\theta = 0.5$), usando las variables originales y transformadas.

Cuadro 4.2: Parámetros estimados por regresión cuantil para la mediana $\theta = 0.5$, usando las variables originales y las variables transformada.

	Variables originales		Variable transformadas	
	$\theta=0.5$		$\theta=0.5$	
	Intercepto	Pendiente	Intercepto	Pendiente
Coefficientes	3,250.23	-0.0050	1,968.53	-0.0029
Límite inferior	3,091.03	-0.0070	1,820.50	-0.0086
Límite superior	3,311.87	0.0000	2,086.74	0.0002

Prueba de Koenker y Basset

Esta prueba explora la homogeneidad de la varianza (homocedasticidad) en RC, mediante el análisis de los coeficientes estimados de modelos en diferente cuantil. La razón es que una varianza cambiante tiene impacto en los valores de los coeficientes de RC, y esto ocasiona que la pendiente cambie en modelos de diferente cuantil.

La prueba formal de homocedasticidad verifica si las pendientes de los modelos RC son estadísticamente significativas. En este caso, se usó la prueba de Koenker y Basset (1982) la cual es explicada en el capítulo 2. Esta prueba verifica la igualdad de pendientes y funciona como prueba conjunta para todos los parámetros de los modelos ajustados en diferentes cuantiles.

Prueba de hipótesis de Koenker y Basset (1982):

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$H_1 : \beta_i \neq 0$$

$\forall i= 1,2,\dots,m$ donde m es el número de cuantiles. En esta investigación se utilizó $m = 19$ cuantiles.

La prueba genera un nivel de significancia observado de $p\text{-valor}=0.2071$, con el cual no se rechaza con un nivel de significancia .95. Por lo tanto, las pendientes de los modelos RC son estadísticamente iguales. Se concluye que los datos tienen varianza homogénea.

La Figura 4.5 reporta los cambios de los coeficientes a través de los diferentes cuantiles. En ambas gráficas se observan los parámetros estimados por mínimos cuadrados y su respectivo intervalo de confianza (líneas punteadas rojas). En contraste, los parámetros estimados por RC muestran un desempeño variable en función del cuantil respectivo.

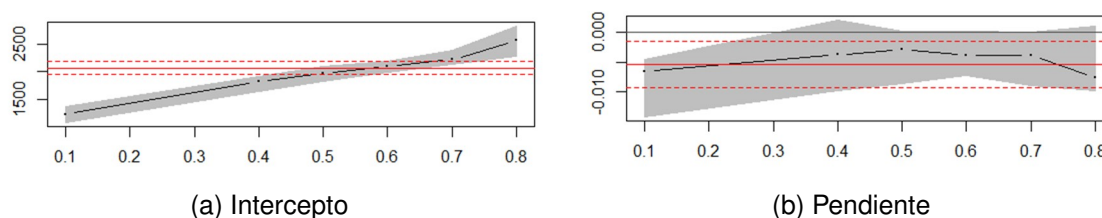


Figura 4.5: Valores de los parámetros estimados por regresión cuantil a través de diferentes cuantiles.

4.1.3. Estimación de parámetros

Con el fin de estimar los parámetros se utiliza el algoritmo simplex descrito por Koenker y d'Orey (1987), el cual se explica en el capítulo 2 Marco Teórico.

El Cuadro 4.3 reporta los parámetros estimados de 19 modelos y su correspondiente nivel de significancia observado ($p\text{-valor}$). Cada modelo corresponde a un cuantil específico en el intervalo $[0.05, 0.95]$. Se observa que en todos los modelos RC el intercepto es positivo y la pendiente es negativa, lo que es congruente con la curva de la demanda inversa.

Cuadro 4.3: Coeficientes estimados

θ	Coeficientes	Valor	Error Estándar	t-valor	p-valor
0.05	Intercepto	1,014.93	147.52	6.88	0.0
	Pendiente	-0.005	0.005	-1.082	0.281
0.1	Intercepto	1,230.34	108.82	11.31	0.0
	Pendiente	-0.007	0.003	-1.908	0.058
0.15	Intercepto	1,394.67	84.31	16.54	0.0
	Pendiente	-0.008	0.003	-3.048	0.003
0.2	Intercepto	1,470.03	89.13	16.49	0.0
	Pendiente	-0.005	0.003	-1.702	0.091
0.25	Intercepto	1,613.95	67.18	24.03	0.0
	Pendiente	-0.003	0.002	-1.611	0.109
0.3	Intercepto	1,650.57	66.05	24.99	0.0
	Pendiente	-0.002	0.002	-1.022	0.309
0.35	Intercepto	1,722.04	73.51	23.43	0.0
	Pendiente	-0.003	0.002	-1.319	0.189
0.4	Intercepto	1,821.10	70.07	25.99	0.0
	Pendiente	-0.004	0.002	-1.698	0.092
0.45	Intercepto	1,893.93	76.79	24.66	0.0
	Pendiente	-0.004	0.002	-1.626	0.106
0.5	Intercepto	1,968.53	77.66	25.35	0.00
	Pendiente	-0.003	0.002	-1.196	0.234
0.55	Intercepto	2,010.04	70.63	28.46	0.00
	Pendiente	-0.003	0.002	-1.261	0.209
0.6	Intercepto	2,102.19	64.22	32.74	0.00
	Pendiente	-0.004	0.002	-1.877	0.062
0.65	Intercepto	2,165.23	60.56	35.75	0.00
	Pendiente	-0.004	0.002	-2.128	0.035
0.7	Intercepto	2,216.08	63.42	34.94	0.00
	Pendiente	-0.004	0.002	-1.960	0.052
0.75	Intercepto	2,366.04	79.95	29.59	0.00
	Pendiente	-0.006	0.003	-2.237	0.027
0.8	Intercepto	2,558.70	137.61	18.59	0.00
	Pendiente	-0.008	0.004	-1.769	0.079
0.85	Intercepto	2,766.57	175.50	15.76	0.00
	Pendiente	-0.008	0.006	-1.515	0.132
0.9	Intercepto	3,123.76	238.92	13.07	0.00
	Pendiente	-0.007	0.008	-0.880	0.380
0.95	Intercepto	3,727.77	578.87	6.44	0.00
	Pendiente	-0.002	0.018	-0.088	0.930

Intervalos de confianza

De los modelos reportados en el Cuadro 4.3 se seleccionaron aquellos cuyos parámetros (intercepto y pendiente) resultaron estadísticamente significativos a un nivel 0.1. Tal que, de los 19 modelos de RC, en nueve de ellos, ambos parámetros resultaron significativos.

El Cuadro 4.4 reporta intervalos de confianza los parámetros estimados de los nueve

modelos seleccionados. Para ello, se usó el método de inversión de rangos (Koenker, 1994), el algoritmo es descrito en el capítulo de Marco Teórico.

Cuadro 4.4: Intervalos de confianza de los parámetros estimados de los modelos RC estadísticamente significativos.

θ	Coefficientes	Valor	Límite inferior	Límite superior
0.1	Intercepto	1,230.34	1,076.98	1,374.41
	Pendiente	-0.007	-0.014	-0.005
0.15	Intercepto	1,394.67	1,237.29	1,475.86
	Pendiente	-0.008	-0.009	0.001
0.2	Intercepto	1,470.03	1,390.08	1,622.65
	Pendiente	-0.005	-0.010	0.001
0.4	Intercepto	1,821.10	1,651.18	1,915.37
	Pendiente	-0.004	-0.010	0.002
0.6	Intercepto	2,102.19	1,991.38	2,184.32
	Pendiente	-0.004	-0.007	0.000
0.65	Intercepto	2,165.23	2,075.79	2,297.18
	Pendiente	-0.004	-0.007	-0.001
0.7	Intercepto	2,216.08	2,138.98	2,376.20
	Pendiente	-0.004	-0.009	0.000
0.75	Intercepto	2,366.04	2,192.76	2,600.11
	Pendiente	-0.006	-0.008	0.001
0.8	Intercepto	2,558.70	2,276.45	2,812.36
	Pendiente	-0.008	-0.010	0.001

la Figura 4.6 se ilustran los nueve modelos seleccionados, cuyos parámetros estimados son estadísticamente significativos. Asimismo, se reporta el modelo RC para la mediana y el modelo estimado por mínimos cuadrados (MC). La línea roja punteada corresponde al modelo estimado por MC, las líneas en azul tenue corresponden a los nueve modelos significativos estimados por RC y la línea azul sólida corresponde al modelo estimado por RC para la mediana, cuya pendiente no fue significativa.

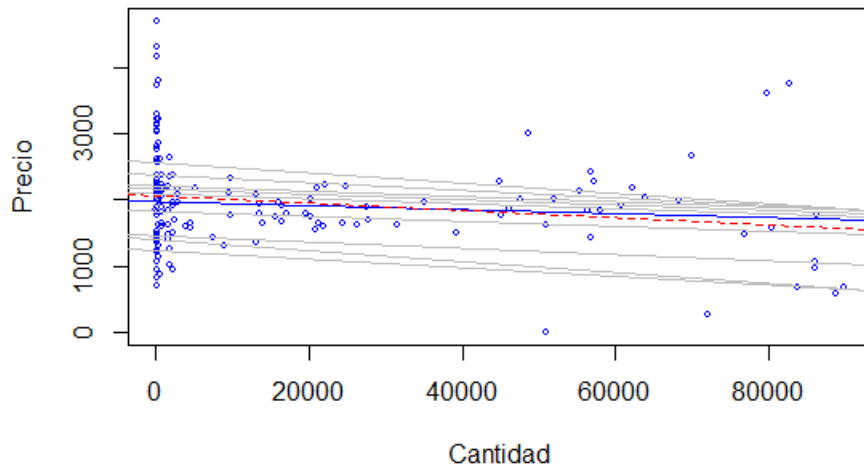


Figura 4.6: Nueve modelos significativos estimados por regresión cuantil que representan la demanda inversa del mercado de crédito a la vivienda.

4.1.4. Parámetros en términos de las unidades originales

Con el fin de utilizar los parámetros estimados por RC en el modelo de Teoría de Juegos, es necesario destransformar las observaciones ajustadas $\hat{y}_i^* = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i^*$ y x_i^* , con las cuales se estiman nuevamente los parámetros por RC. Para realizar la transformación se aplica el proceso inverso al definido en el capítulo 2 correspondiente al acondicionamiento de las variables.

El Cuadro 4.5 reporta los estimadores de RC en términos de las unidades originales con el intervalo de confianza correspondiente.

Cuadro 4.5: Parámetros estimados por regresión cuantil e intervalos de confianza en términos de las unidades originales para nueve modelos estadísticamente significativos.

θ	Coefficientes	Valor	Límite inferior	Límite superior
0.1	Intercepto	2,185.86	1,993.15	2,243.26
	Pendiente	-0.007	-0.008	-0.007
0.15	Intercepto	2,425.13	2,350.41	2,464.22
	Pendiente	-0.008	-0.009	-0.007
0.2	Intercepto	2,547.10	2,490.59	2,592.95
	Pendiente	-0.006	-0.007	-0.004
0.4	Intercepto	3,004.44	2,952.45	3,055.20
	Pendiente	-0.004	-0.006	-0.002
0.6	Intercepto	3,382.37	3,347.21	3,419.50
	Pendiente	-0.003	-0.005	-0.002
0.65	Intercepto	3,468.80	3,424.42	3,529.57
	Pendiente	-0.003	-0.005	-0.003
0.7	Intercepto	3,540.95	3,499.31	3,646.19
	Pendiente	-0.003	-0.005	-0.003
0.75	Intercepto	3,747.76	3,684.10	3,890.81
	Pendiente	-0.005	-0.006	-0.004
0.8	Intercepto	4,022.93	3,935.37	4,183.37
	Pendiente	-0.007	-0.008	-0.006

Estimación de la dispersión

Para seleccionar aquellos modelos estimados por RC con mayor precisión en los parámetros, que permitan garantizar la confiabilidad de los modelos, se usa la función de dispersión, expresada como:

$$s(t) = \frac{1}{f(F^{-1}(\theta))} = \frac{F^{-1}(t+h) - F^{-1}(t-h)}{2h} \quad (4.1)$$

donde el ancho de banda h y la función F deben ser definidas.

Se calcula el ancho de banda, el cual, a mayor valor, menor valor tiene la función de dispersión. Cuando la dispersión es baja, significa que las observaciones son muy densas, entonces el modelo RC será estimado con mayor precisión.

Mediante el procedimiento antes descrito, se seleccionan los modelos estimados por RC, cuyos parámetros serán usados en el modelo de Teoría de Juegos. El Cuadro 4.6 muestra el ancho de banda de los modelos RC de donde se tomaron los dos modelos de ancho de banda con un valor de 0.172 para garantizar los modelos de mayor precisión.

Cuadro 4.6: Ancho de Banda de los nueve modelos significativos ajustados por regresión cuantil.

Cuantil	0.1	0.15	0.2	0.4	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8
Ancho de Banda	0.065	0.087	0.108	0.172	0.172	0.160	0.144	0.127	0.108

En el Cuadro 4.7 se muestran los modelos seleccionados en función al ancho de banda, tal que dos modelos RC serán incluidos en la aplicación de los modelos de Teoría de Juegos.

Cuadro 4.7: Modelos RC seleccionados para su aplicación en Teoría de Juegos.

theta	Coeficientes	Valor	Límite inferior	Límite superior
0.4	Intercepto	3,004.44	2,952.45	3,055.20
	Pendiente	-0.004	-0.006	-0.002
0.6	Intercepto	3,382.37	3,347.21	3,419.50
	Pendiente	-0.003	-0.005	-0.002

4.2. Análisis de Resultados de Teoría de Juegos

En la sección anterior se consideran 18 bancos, los cuales conforman el mercado adquisición de crédito a la vivienda nueva (destino de crédito), cuya información permitirá obtener el comportamiento de la demanda inversa. En esta sección, se consideran cuatro bancos para el análisis de los escenarios microeconómicos de teoría de juegos: Banamex, BBVA Bancomer, Banorte y Santander. Estos constituyen el 79% del mercado total de adquisición de vivienda nueva en el año 2018.

Los modelos desarrollados de teoría de juegos son:

Escenario 1) Modelo de Cournot

Escenario 2) Modelo de Stackelberg, cuando $M=1$

Escenario 3) Modelo de Múltiple Líder de Stackelberg con los 4 bancos.

En la sección anterior se eligieron dos modelos RC (Cuadro 4.7), cuyos parámetros estimados se consideran en la estimación de los equilibrios obtenidos mediante la aplicación de los tres escenarios antes citados.

Estos modelos se ciñen a supuestos con alto grado de restricción, tales como: productos homogéneos, costos marginales constantes e iguales en todos los casos y los bancos eligen simultáneamente su equilibrio. Asimismo, ningún modelo es completamente realista, en el sentido que describa cada interrelación presente en un proceso real multivariado. El objetivo de la modelación es en general, captar las relaciones esenciales que son suficientes para analizar o responder a aquellas interrogantes particulares (Le Roy Miller, 1988)

Roger (1988) establece que: *"No se puede culpar a un modelo microeconómico aduciendo simplemente que es irreal al explicar fenómenos de la vida real, pues ese mismo modelo puede ser bastante realista para explicar las fuerzas que operan en el problema que se desea dilucidar"*.

4.2.1. Equilibrio del modelo de oligopolio de Cournot

Los parámetros estimados mediante el modelo RC los cuales representa las dos condiciones de la recta de demanda inversa. Se muestran en seguida:

Modelo RC 1:

$$p = 3,004.44 - 0.004q$$

Modelo RC 2 :

$$p = 3,382.37 - 0.003q$$

En el Capítulo 2 , se reporta el equilibrio de Cournot para 4 bancos. En este caso los resultados obtenidos corresponden a dos posibles equilibrios, uno para cada modelo RC.

A. Oligopolio de Cournot (Niveles de producción cuando N=4)

Equilibrio 1 (bajo el modelo RC 1):

$$q_i^* = \frac{3,004.44 - c}{(0.004)(N + 1)}$$

Equilibrio 2 (bajo el modelo RC 2):

$$q_i^* = \frac{3,382.37 - c}{(0.003)(N + 1)}$$

donde **c** es costo marginal constante en todos los escenarios y $q_i^* = [q_1, q_2, \dots, q_4]$.

4.2.2. Equilibrio del modelo de oligopolio de Stackelberg

En el caso de Stackelberg se toman en cuenta dos escenarios, con las diferentes combinaciones de líderes (M) y seguidores (N) tal que M+N=4, bancos los cuales conforman el mercado de crédito, cuyo destino es la adquisición de vivienda nueva.

Equilibrios de acuerdo a cada modelo RC:

B. Oligopolio de Stackelberg con un líder (Niveles de producción (M=1, N=3))

Equilibrio 1 para el líder (bajo el modelo RC 1):

$$x_i^* = \frac{3,004.44 - c}{0.004(1 + M)}$$

Equilibrio 1 para los seguidores (bajo el modelo RC 2):

$$q_i^* = \frac{3,004.44 - c}{0.004(N + 1)(M + 1)}$$

Equilibrio 2 para líder (bajo el modelo RC 2):

$$x_i^* = \frac{3,382.37 - c}{0.003(1 + M)}$$

Equilibrio 2 de los seguidores (bajo el modelo RC 2):

$$q_i^* = \frac{3,382.37 - c}{0.003(N + 1)(M + 1)}.$$

B. Oligopolio de Stackelberg con múltiple líder (Niveles de producción (M=2, N=2) o (M=3, N= 1))

Equilibrio 1 para el líder (bajo el modelo RC 1):

$$x_i^* = \frac{3,004.44 - c}{0.004(1 + M_i)}.$$

Equilibrio 1 para los seguidores (bajo el modelo RC 1) :

$$q_i^* = \frac{3,004.44 - c}{0.004(N_{4-i} + 1)(M_i + 1)}.$$

Equilibrio 2 para el líder (bajo el modelo RC 2):

$$x_i^* = \frac{3,382.37 - c}{0.003(1 + M_i)}.$$

Equilibrio 2 para los seguidores (bajo el modelo RC 2):

$$q_i^* = \frac{3,382.37 - c}{0.003(N_{4-i} + 1)(M_i + 1)},$$

para $i = 2$ o 3

4.2.3. Análisis estático con diferentes valores de costo marginal

En la siguiente sección se realizan dos análisis estáticos (uno por cada modelo RC), considerando tres diferentes valores de costo marginal (c) propuestos, con el fin de analizar el comportamiento de las estrategias con base en los modelos de Teoría de Juegos ajustadas en la sección previa.

Lo anterior debido a que los costos marginales de los bancos no se encuentran disponibles en las bases de datos consultadas, asimismo, los bancos no facilitaron la información cuando se les fue solicitada personalmente. Por ello se supone el costo marginal constante en todos los escenarios para los tres casos de c propuestos de acuerdo con lo reportado en el cuadro 4.8.

Cuadro 4.8: Estimaciones de costo marginal (c) con base a los dos modelos definitivos de regresión cuantil.

c	Forma de obtención	Valor del parámetro a		Valores en c en el	
		AE 1	AE 2	AE 1	AE 2
1	10 % del parámetro a	3,004.44	3,382.37	300.44	338.24
2	20 % del parámetro a	3,004.44	3,382.37	600.89	676.47
3	37 % del parámetro a	3,004.44	3,382.37	1,111.64	1,251.48

c = costo marginal, AE = Análisis estático

En la extensión del modelo de Stackelberg con múltiple líder cada banco líder actúa suponiendo que sus acciones no precipitan respuestas de otros bancos líderes. Cada banco conoce quién es un seguidor y quién es un líder.

En una solución de equilibrio, bajo el modelo de Cournot cada banco seguidor habrá maximizado sus ganancias, tomando en cuenta los demás bancos, y cada banco líder habrá maximizado sus ganancias con la suposición de que no existe reacción de los demás bancos líderes, sin embargo, se considera explícitamente la curva de reacción de los bancos seguidores (Sherif, 1984).

Análisis estático 1 (con base a los estimadores del Modelo RC 1)

Los cuadros 4.9 - 4.14 muestran las cantidades que representan los equilibrios donde se maximizan las ganancias para los seguidores (q^*) y líderes (x^*) con respecto a cada escenario considerado. También se indican las ganancias de ambos y la cantidad total de créditos, definida como:

$$Q^* = N(q^*) + M(x^*)$$

donde:

N: número de líderes

M: número de seguidores

q^* : nivel de producción de seguidores

x^* : cantidad de equilibrio de líderes

Q^* : producción total del mercado en un año.

Se considera que los equilibrios obtenidos representan las cantidades producidas en un año, esto se sustenta en que los modelos RC ajustados se construyen con base en una muestra de datos (cantidad, precio), donde cada pareja de datos representa el valor respectivo de un año en el periodo 2009 a 2018.

Los escenarios considerados son los:

Escenario 1. Cuando $M = 0$, $N = 4$ o $M = 4$, $N = 0$ y se utilizó el modelo de Cournot

Escenario 2. Cuando $M = 1$, $N = 3$ igual al modelo Stackelberg

Escenario 3. Cuando $M > 1$, $N = 4 - M$ igual al modelo de Múltiple Líder Stackelberg

Los tres escenarios usan los estimadores obtenidos en el Modelo RC 1, este reporta el menor valor en el parámetro a (de la recta de demanda inversa) comparada con el Modelo uno RC 2.

En consecuencia, los casos del análisis estático uno, tienen menor cantidad de equilibrio de producción x^* y q^* por lo tanto también en la producción total Q^* comparados con aquellos del Análisis estático dos.

En los siguientes casos, lo que varía es el costo marginal. En el caso de las ganancias se calcula mediante las ecuaciones (2.8 y 2.10), la cual se maximiza en el capítulo 2 (Marco Teórico) con el objetivo de encontrar el nivel de producción de los líderes y seguidores.

En el siguiente caso del primer análisis estático se considera $c = 300.4$, el cual es el menor valor de c que se considera.

El cuadro 4.9 muestra los equilibrios que maximizan las ganancias de seguidores y líderes con base los modelos de Teoría de Juegos, correspondiente al caso 1 del análisis estático 1 ensayado, donde se considera $c = 300.4$ el cual es el menor valor aplicado.

Cuadro 4.9: Cantidades y Ganancias de los bancos para los tres escenarios, caso 1 $a = 3004.43$, $b = 0.004$, $c = 300.4$ y $M + N = 4$

Seguidor	Líder	Cantidad		Ganancia		Cantidad Total
		N	M	Líder	Seguidor	
4	0	0	134,193	0	72,571,546	536,773
3	1	335,483	83,871	113,393,041	28,348,260	587,095
2	2	223,655	74,552	67,195,876	22,398,625	596,414
1	3	167,742	83,871	56,696,520	28,348,260	587,095
0	4	134,193	0	72,571,546	0	536,773

(miles de pesos)

El cuadro 4.10 muestra los equilibrios que maximizan las ganancias de seguidores y líderes según los modelos de Teoría de Juegos, correspondiente al caso dos del Análisis estático uno, donde se considera $c = 600.8$.

Cuadro 4.10: Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 2, $a = 3004.43$, $b = 0.004$, $c = 600.8$ y $M + N = 4$

Seguidor	Líder	Cantidad		Ganancia		Cantidad Total
		N	M	Líder	Seguidor	
4	0	0	119,283	0	57,340,481	477,132
3	1	298,207	74,552	89,594,501	22,398,625	521,863
2	2	198,805	66,268	53,093,038	17,697,679	530,146
1	3	149,104	74,552	44,797,251	22,398,625	521,863
0	4	119,283	0	57,340,481	0	477,132

(miles de pesos)

El Cuadro 4.11 reporta los equilibrios que maximizan las ganancias de seguidores y líderes según los modelos de Teoría de Juegos, correspondiente al caso tres del Análisis estático uno, se considera $c = 1111.64$, de los tres casos explicados anteriormente (con diferentes valores de c) este es el que tiene menor cantidad para ambos x^* y q^* . Por lo tanto, se tiene la menor producción total Q^* considerando ambos análisis estáticos con un valor de 375,741, en el caso modelo de Cournot cuando $(M = 0, N = 4)$ o $(N = 0, M = 4)$.

Cuadro 4.11: Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 3, $a = 3004.43$, $b = 0.004$, $c = 1111.64$ y $M + N = 4$

Seguidor	Líder	Cantidad		Ganancia		Cantidad Total
		N	M	Líder	Seguidor	
4	0	0	93,935	0	35,560,058	375,741
3	1	234,838	58,710	55,562,590	13,890,647	410,967
2	2	156,559	52,186	32,925,979	10,975,326	417,490
1	3	117,419	58,710	27,781,295	13,890,647	410,967
0	4	93,935	0	35,560,058	0	375,741

(miles de pesos)

Análisis estático 2 (Modelo RC 2)

El cuadro 4.12 muestra los equilibrios que maximizan las ganancias de seguidores y líderes según los modelos de Teoría de Juegos, el primer caso del Análisis estático es con los valores del modelo RC 2. En este caso se considera el costo marginal $c = 338.2$.

Cuadro 4.12: Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 1 con $a = 3382.36$, $b = 0.003$, $c = 338.2$ y $M + N = 4$

Seguidor	Líder	Cantidad		Ganancia		Cantidad Total
		N	M	Líder	Seguidor	
4	0	0	185,618	0	113,008,847	742,471
3	1	464,044	116,011	176,576,323	44,144,081	812,077
2	2	309,363	103,121	104,637,821	34,879,274	824,967
1	3	232,022	116,011	88,288,162	44,144,081	812,077
0	4	185,618	0	113,008,847	0	742,471

(miles de pesos)

El Cuadro 4.13 muestra los equilibrios que maximizan las ganancias de seguidores y líderes según los modelos de Teoría de Juegos, representa el caso dos del Análisis estático 2 se considera el costo marginal $c = 676.4$.

Cuadro 4.13: Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 2, $a = 3382.36$, $b = 0.003$, $c = 676.4$ y $M + N = 4$

Seguidor	Líder	Cantidad		Ganancia		Cantidad Total
		N	M	Líder	Seguidor	
4	0	0	164,993	0	89,290,941	659,974
3	1	412,484	103,121	139,517,095	34,879,274	721,846
2	2	274,989	91,663	82,676,797	27,558,932	733,304
1	3	206,242	103,121	69,758,547	34,879,274	721,846
0	4	164,993	0	89,290,941	0	659,974

(miles de pesos)

El Cuadro 4.14 se muestra el caso 3 del Análisis estático 2 con un valor de costo marginal $= 1251.4$.

Cuadro 4.14: Cantidades y Ganancias de los bancos para el caso 3, $a = 3382.36$, $b = 0.003$, $c = 1251.4$ y $M + N = 4$

Seguidor	Líder	Cantidad		Ganancia		Cantidad Total
		N	M	Líder	Seguidor	
4	0	0	129,932	0	55,374,335	519,729
3	1	324,831	81,208	86,522,398	21,630,600	568,454
2	2	216,554	72,185	51,272,532	17,090,844	577,477
1	3	162,415	81,208	43,261,199	21,630,600	568,454
0	4	129,932	0	55,374,335	0	519,729

(miles de pesos)

Los resultados anteriores muestran el mismo patrón en diferentes escalas ya que se consideraron 3, valores diferentes de costo marginal (c).

Los equilibrios que se encuentran en el análisis estático de ambos modelos RC representan las estrategias de los jugadores los cuales actúan racionalmente, es importante resaltar que esto no significa obtener las mayores ganancias, si no que los equilibrios representan ganancias en niveles de equilibrio.

En ambos en análisis estáticos se obtuvo una mayor ganancia en conjunto con el modelo de Cournot ($M = 0, N = 4$) o ($N = 0, M = 4$), la cual corresponde a la mejor situación para los seguidores (tomando en cuenta las ganancias en conjunto).

Asimismo, en ambos análisis estáticos la mayor ganancia para el Líder se tiene con el modelo de Stackelberg ($M=1, N =3$).

En el Escenario tres de múltiple líderes, los seguidores obtienen las mismas ganancias en los casos que ($N = 3, M = 1$) y ($N = 1, M = 3$), sin embargo, el líder tiene menor ganancias cuando existe un mayor número de líderes ($N = 1, M = 3$).

En el caso ($N = 3, M = 1$) y ($N = 1, M = 3$) se obtiene la misma producción total del mercado Q^* , ya que q^* no cambia porque los seguidores se ajustan al modelo de Cournot y además x^* porque es un equilibrio simétrico, donde el cambio de x^* es proporcional al número de líderes existentes.

La Q^* de menor valor se encuentra en el Modelo de Cournot, donde existen las mayores ganancias, con lo que se puede decir que el precio es mayor de cada crédito que en los demás escenarios, Stackelberg y Stackelberg con múltiple líder.

La Q^* de mayor valor se encuentra cuando ($N=2, M=2$), sin embargo existen menores ganancias para el seguidor y mayores ganancias para el líder que en el caso ($N=1, M = 3$). Sin embargo, las ganancias del líder son menores que cuando ($M = 1, N = 3$). En este caso, se puede decir que el precio es menor, debido a que las ganancias sumadas de los líderes y seguidores son menores. Cuando Q^* es mayor el precio es menor, esto sucede porque se sigue la ley de la demanda inversa.

Desde que $M = 1$, las ganancias conjuntas (ganancias de seguidores y líderes) empiezan a disminuir, ya que el líder produce más que en el caso del Modelo de Cournot ($M = 4, N = 0$) o ($M= 0, N = 4$). en consecuencia, los precios bajan y las ganancias se reducen.

En los escenarios 2 y 3 se observa que si los participantes del mercado (líder o un seguidor) aumentan su ganancia se reduce. En contraste para el escenario 1 si $M + N$ aumenta con un participante más entonces sus ganancias en conjunto incrementan.

4.2.4. Comparación de modelos de Teoría de Juegos con datos del año 2018

En esta sección se comparan los tres modelos aplicados de Teoría de juegos con los datos históricos. Los modelos estimados en la presente investigación corresponden a un agregado de 10 años, por lo tanto las cantidades obtenidas de cada modelo representan la producción anual.

En el cuadro 4.15 se presenta información de créditos otorgados en el año 2018, correspondiente a los cuatro bancos considerados para analizar los distintos escenarios.

Se decide usar el total de créditos otorgados en el último año para comparar con los equilibrios obtenidos de los modelos de Teoría de Juegos, porque son los datos más apegados a la realidad inmediata considerando (2009-2018).

La naturaleza del análisis estático es análoga a una fotografía y describe el momento exacto de la toma. Con base en ello, hay que considerar que todo análisis estático describe la realidad en el momento presente, lo cual implica que los equilibrios encontrados representan las condiciones presentes de producción para maximizar las ganancias de los bancos.

El Cuadro 4.15 muestra que la producción total Q del mercado es de 384,857 créditos en el año 2018. En nuestros modelos, considerando únicamente la cantidad de producción total, el escenario que se asemeja más a la realidad en 2018 en oligopolio (M + N = 4) corresponde al modelo de Cournot con las siguientes características:

* Modelo RC 1 : $p_1 = 3004.44 - 0.004q_i$

con $q_i = 1, \dots, 4$

*Costo marginal = 1111.6428

* Q = 375,741

En el cuadro 4.15 se puede observar que durante el año 2018 el 36 % de la producción corresponde a Banorte, el 35 % a Banamex, el 20 % a Bancomer y el 9 % a Santander. Esto muestra la existencia de un líder o hasta dos líderes para el año 2018, los cuales se presume que son Banorte y Banamex.

Cuadro 4.15: Cantidad de créditos a la vivienda en el año 2018 de los bancos seleccionados.

Banco	Banamex	Santader	Bancomer	Banorte	Producción total Q*
Producción	132,838	36,385	78,700	136,934	384,857
%	35 %	9 %	20 %	36 %	100 %

Capítulo 5

Conclusiones

Esta tesis es una contribución al estudio de los mercados de crédito a la vivienda. La razón de esto es que modela los equilibrios que representan las estrategias que maximizan las ganancias dentro de un ambiente de oligopolio para los bancos considerando 3 modelos de Teoría de Juegos.

Recordando que el objetivo de la presente investigación es analizar el crédito a la vivienda, con un enfoque de teoría de juegos, para representar distintos escenarios en un mercado oligopólico, lo cual tiene como fin descriptivo el modelo de oligopolio, frente a distintas hipótesis.

Analizando los porcentajes se puede intuir que en el destino de crédito a la vivienda en el rubro de adquisición de vivienda nueva, el 79% de la cantidad de créditos vendidos es representado por cuatro banco de 18 que brindan estos créditos, este comportamiento se asemeja al escenario de Stackelberg con Múltiple Líder.

En la teoría no existe un criterio, de cómo definir a un líder o a un seguidor, en este trabajo se considera líder aquel que produzca una mayor cantidad créditos.

En los modelos de Teoría de Juegos, se toman en cuenta 4 bancos de los 18 (cuya información se utilizó para este análisis) debido a que son los bancos que venden mayor cantidad de créditos. En este caso los datos históricos del año 2018 indican que existen dos líderes, ya que de la producción total el 36% corresponde a Banamex y el 35% corresponde a Banorte. Esto nos lleva a que el ultimo escenario ($N=2$, $M=2$), es el que se más se amolda a la realidad, al menos en el último año, Banamex y Banorte han dominado el oligopolio de los cuatro bancos que domina el mercado de crédito a la vivienda. En los resultados del modelo de Teoría de Juegos cuando ($N=2$, $M=2$) representa la mayor producción total, sin embargo tienen las menores ganancias en conjunto. Lo cual nos indica que no es una situación óptima.

Considerando los 10 años del 2009-2018, los 4 bancos anteriores siguen siendo lideres con respecto a los demás bancos ya que considerando la producción total del crédito el 36% corresponde a Banamex, el 29% corresponde a Banorte, el 25% Bancomer y el 11% corresponde a Santander.

Del capítulo 4 se concluye que cuando los banco actúan de acuerdo al modelo de Cournot se tiene una menor producción total Q^* y mayores ganancias en conjunto. Con esto se puede afirmar que en este mercado de adquisición de vivienda nueva tendría mayores ganancias conjuntas si el comportamiento de dicho mercado fuera un Cournot, es decir que no hubiese líderes. Sin embargo, la realidad es muy distinta, ya que los bancos no buscan maximizar ganancias en conjunto, si no maximizar sus propias ganancias y siempre se prefiere ser líder porque este siempre obtiene mayor ganancia que un seguidor.

Los resultados obtenidos deben ser tomados como una medida indicativa de cómo afecta la producción total, las ganancias y la estructura del mercado. En los tres escenarios se observa que al aumentar la producción total Q^* se tiene un precio menor y cuando la producción total Q^* es menor se tiene mayor precio. Se deduce esto ya que las ganancias en conjunto son menores y se considera el mismo costo marginal y mismo precio para todos los bancos. Esto sucede porque se sigue la ley de la demanda, y al tener menor producción existente se tiene mayor cantidad demanda a satisfacer y se tiene la posibilidad de aumentar los precios.

En los 3 modelos de Teoría de Juegos analizados los bancos compiten en las cantidades que van a producir. Se seleccionó la variable cantidad porque la variación del promedio de cada banco del (2009-2010) es mayor en cantidad que en precio.

Los escenarios observados se analizan bajo el enfoque de teoría de juegos no cooperativos. La evidencia encontrada en este trabajo indica que las ganancias en conjunto siempre son menores cuando existe el mismo número de líderes que de seguidores, sin embargo los líderes tienen mayor ganancias en esta situación que los seguidores, este escenario se asemeja a la realidad por esta razón, si un banco tiene la opción de elegir ser líder o seguidor siempre elegirá ser líder, como lo muestran nuestros datos históricos.

Cabe resaltar que en los casos donde se considera el modelo de Stackelberg ($M=1, N=3$) y el modelo de Stackelberg con Múltiple Líder ($N=1, M=3$) se tiene la misma producción total y las mismas ganancias conjuntas. Esto se debe a que se considera costo marginal constante y no una función de costo total como en el modelo de Stackelberg Múltiple descrito por Sherif Hanif (1983). Por esta razón la cantidad para seguidores q^* es la misma en los dos modelos y en el caso de x^* cambia proporcionalmente, de acuerdo al número de líderes esto se debe a la forma de como x^* es construida.

En todos los modelos con los que se trabajó, la cantidad de producción total Q^* es considerablemente mayor que la Q^* promedio de nuestros datos históricos, esto es porque en los modelos el precio se supone el mismo para todos los bancos con lo que el precio se sitúa por debajo del precio promedio de los datos históricos.

Cabe mencionar que los resultados obtenidos dependen del valor de costo marginal (c) considerado. Aunque no se tiene un buen estimador para obtener el costo marginal, los resultados obtenidos tienen validez en términos comparativos, ya que se toman en cuenta distintos escenarios.

Obteniendo el equilibrio de cada empresa donde maximizan sus ganancias en cada escenario, bajo la recta de demanda inversa se conocen las posibles estrategias de cada empresa.

5.0.1. Recomendaciones para trabajos futuros

Los resultados aquí señalados llaman a investigar los demás mercados los cuales conforman el crédito a la vivienda (destinos de créditos a la vivienda). Con el fin de comparar entre sí y de analizar el comportamiento de cada mercado con modelos de Teoría de Juegos.

Si se quieren obtener resultados con mayor precisión y no solo simular un valor de costo marginal constante c , se puede obtener un precio c más realista con el estimador de Boone, pero si este fuera el caso se tendría que considerar Cournot con costos marginales no constantes. Para obtener resultados de mayor confiabilidad se propone que en trabajos futuros se obtenga la información de los gastos extras (gastos notariales honorarios por avalúo, comisión por abertura etc.) del precio de crédito que no se incluyó para esta tesis.

Esta tesis se analizó como un modelo estático, se puede realizar con el enfoque de un análisis dinámico para extensiones de trabajo futuras.

Apéndice A

Estadística

Método de Mínimos Cuadrados Se utiliza para encontrar una función $y = f(x, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ en la que se busca calcular los parámetros a_1, a_2, \dots, a_m . Esta función debe ser la que se ajuste lo mejor posible a una tabla de valores que relaciona las dos variables x e y obtenidas experimentalmente:

x	x_1	$x_2..$	$..x_n$
y	y_1	$x_2..$	$..y_n$

Para calcular los parámetros se impone la condición de que sea mínima la función

$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n [f(x_i, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) - y_i]^2$$

Como $S(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ es una función de m variables, una condición necesaria para que tenga un valor extremo en un punto es que sus derivadas parciales en este punto sean nulas. De aquí obtenemos un sistema de m ecuaciones con m incógnitas:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = 0, \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial \alpha_m} = 0$$

Cuya solución nos proporciona los parámetros $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ que nos indican como es la función que mejor se ajusta a los datos es decir, $f(x, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

Histograma

La siguiente información es un extracto del libro *Estadística descriptiva e inferencial* (Sabadías, 1995).

Cuando la variable estadística es continua, el diagrama diferencial que se utiliza es el histograma, cuya representación es fundamentada en la proporcionalidad de las áreas de rectángulos a las frecuencias correspondientes a dicho intervalo. Si se trata de un intervalo de la misma amplitud, las alturas de cada uno de ellos se toman iguales a las frecuencias correspondientes. Cuando las amplitudes son diferentes, las alturas (b_i) de cada rectángulo deben de ser iguales a las frecuencias absolutas (n_i) divididas por la amplitud (a_i) correspondiente:

$$b_i = \frac{n_i}{a_i}$$

Se conoce este valor como densidad de frecuencia. El área del rectángulo correspondiente a la clase i -ésima es por lo tanto:

$$s_i = \frac{n_i}{a_i} a_i = n_i$$

y la suma de las áreas de todos los rectángulos es:

$$S = \sum_{i=1}^n n_i = N$$

Si se toman frecuencias relativas, la suma de las áreas es igual a 1.

Estadísticas Descriptivas

A continuación se describen tipos de medidas descriptivas con estas se pretende sintetizar toda la información.

a) Medidas de Tendencia Central o Posición, señalan la localización o posición de los valores alrededor de los cuales fluctúan los demás.

b) Medidas de Dispersión o de Variación, que expresan el grado de desviación de los datos respecto de las medidas de tendencia central.

c) Las medidas de simetría de la distribución de los datos respecto del punto de máxima concentración.

Medidas de Tendencia Central o de Posición

Las medidas de tendencias central describen las características básicas de un conjunto de datos. Son medidas representativas del conjunto.

Las medidas de tendencia central son:

1) Moda (M_o)

2) Mediana (M_e)

3) Media (\bar{X})

La moda de un conjunto de valores es el valor de la variable aleatoria que aparece con mayor frecuencia. Es el valor de la variable estadística que corresponde al máximo del diagrama diferencial.

La mediana ($\theta=0.5$) es el valor de la variable aleatoria que se encuentra en el centro de un conjunto ordenado de datos.

La media aritmética es el valor de tendencia central de mayor interés y se representa por \bar{x} .

Medidas de Dispersión o de Variación

- 1) Rango
- 2) La desviación media
- 3) La desviación típica
- 4) La varianza

1) El rango es la diferencia entre el valor más alto y el más bajo de la variable estadística. La desviación (d_i) que hay de cada observaciones (X_i) con respecto a la media (\bar{X}) se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$d_i = X_i - \bar{X}$$

d_i = Desviación de cada observación con respecto a la media.

2) La desviación media (es la suma de los valores absolutos de todas las desviaciones dividido entre el número de datos u observaciones.

Para una muestra:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|}{n}$$

Para una población:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^N |X_i - \mu|}{N}$$

DM= desviación media

X_i = i-ésimo datos

μ =media población

\bar{X} = media muestral

N = número de datos de la población

n = número de datos de la muestra

Otras

desviación típica S o σ

Varianza S^2 o σ^2

Donde S es la desviación típica de la muestra y σ es la desviación estándar de la población.

3) La desviación típica se denota por:

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}$$

4) La varianza de una distribución se define como el promedio de los cuadrados de las desviaciones a la media:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

La desviación estándar es la medida más útil de la variación de los datos,

Las medidas de simetría de la distribución

Cuando los datos estadísticos se adaptan a la distribución normal o, cuando menos, la distribución es simétrica, la media coincide con la mediana.

1) La simetría es cuando una distribución posee el mismo número de valor a la izquierda y a la derecha de modo que cumplen:

i) dos a dos son equidistantes de la media.

ii) cada uno de los pares de valores que equidistan de la media tienen la misma frecuencia.

Si una distribución es simétrica, el tercer momento central:

$$m_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x})^3 n_i$$

será nulo, ya que se anularán entre si los cubos de las diferencias positivas con los de las negativas. Si la distribución es asimétrica el tercer momento central es mayor en valor absoluto cuanto más acentuada sea la asimetría de la curva.

2) Medidas de curtosis, señalan el grado de concentración respecto de la tendencia central. Si dos distribuciones tienen la misma varianza, aquella que tenga mayores frecuencias en los valores próximos a la media, tendrá también mayores frecuencias de los valores extremos y, en cambio, tendrá menores frecuencias en los valores intermedios. El momento central de orden 4 es por tanto mayor en la distribución que tenga un mayor apuntamiento.

Prueba t-Student

La siguiente información es un extracto del artículo, t-Student del libro Métodos estadísticos: un enfoque interdisciplinario (Infante, S. 1984) .

Con el seudónimo de estudiante (Student), William Sealy Gosset desarrolló la prueba t y la distribución t. La primera presunción es formular la hipótesis nula y la hipótesis alterna, que establece que no hay diferencias en la media de las dos muestras independientes y que de existir esta diferencia, solo se debe al azar. Si la t calculada que se origina de las dos muestras es desmesurada (valor de p que se encuentra en las tablas respectivas), entonces se rechazaría la hipótesis nula. Es importante mencionar que este valor depende del valor de significancia establecido con anterioridad de lo que se quiere probar, para la diferencia entre las medias de las dos muestras. Este valor de significancia es la probabilidad de rechazar erróneamente la hipótesis nula.

Apéndice B

Anualidad

La siguiente información es un extracto del libro *The Theory of Interest* de Kellison, S. G.

Anualidad básica

- serie de pagos hechos en un intervalo de tiempo igual
- el pago de frecuencia y el interés tienen periodos de conversión iguales
- los pagos son nivelados

Anualidad-inmediata

- los pagos son hechos al final de cada mes o año (n)
- el valor presenta (t = 0) de una anualidad inmediata, donde el pago anual de interés es i , es denotada como $a_{\overline{n}|i}$ y es calculada como sigue:

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|i} &= (1)v + (1)v^2 + \dots + (1)v^{n-1} + (1)v^n \\ &= v(1 + v + v^2 + \dots + v^{n-2} + v_{n-1}) \\ &= \left(\frac{1}{1+i} \right) \left(\frac{1-v^n}{1-v} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1+i} \right) \left(\frac{1-v^n}{d} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1+i} \right) \left(\frac{1-v^n}{\frac{i}{1+i}} \right) \\ &= \frac{1-v^n}{i} \end{aligned}$$

Apéndice C

Sector de Banca múltiple

El Sistema Bancario Mexicano está integrado por 51 bancos autorizados y en operación. Actualmente, el sistema Bancario compuesto por las siguientes instituciones:

Cuadro C.1: Banca Múltiple.

Banca Múltiple			
1	ABC Capital	27	Deutsche Bank
2	Accendo Banco	28	Famsa
3	Actinver	29	Finterra
4	Afirme	30	Forjadores
5	American Express	31	Fundación Dondé
6	Autofin	32	HSCB
7	Azteca	33	ICBC
8	Bajío	34	Inbursa
9	Banco S3	35	Inmobiliario Mexicano
10	Bancoppel	36	Intercam
11	Bancrea	37	Invex
12	Bank of America	38	JP Morgan
13	Bank of China	39	Mifel
14	Bankaool	40	Mizuho Bank
15	Banorte	41	Monex
16	Banregio	42	MUFG
17	Bansi	43	Multiva
18	Barclays	44	Pagatodo
19	Base	45	Sabadell
20	BBVA Bancomer	46	Santander
21	BIAfirme	47	Scotiabank
22	CL Banco	48	Shinhan
23	Citibanamex	49	Ve por Mas
24	Compartamos	50	VW bank
25	Consubanco	51	KEB Hana México
26	Credit Suisse		

Apéndice D

Código Regresión Cuantil (RC)

```
data <-read.csv("C:/Users/RODRIGO/Desktop/Stackelberg2/Opcion22.csv",header=T)
attach(data)
y<-data[,1]
x<-data[,2]
library(quantreg)
library(het.test)
library(e1071)

# es asimétrica la derecha
skewness(y)
mean(y)
curtosis(y)

# prueba de normalidad
ad.test(y)

# moda
getmode <- function(y)
uniquv <- unique(y)
uniquv[which.max(tabulate(match(y, uniquv)))]
result <- getmode(y)
print(result)

# regresión lineal
library(modeest)
fit=lm(y ~ x)
library(lmtest)
summary(fit)
library(ggplot2)
summary(x)
```

```

# histogram and plot
par(mfrow=c(1,1))
par(mar=c(4,4,4,4))
hist(y,col=rgb(0.3,0.5,1,0.4) , main = , xlab="Precio", ylab="Densidad", freq=F)
curve(dnorm(x, mean(y), sd(y)), col = 2, lty = 2, lwd = 2, add=T)
lines(density(y),col="blue", lwd=2)
boxplot(y)
summary(y)
# Regresión cuantil: mediana

medianReg= rq((y x), tau = .5)
summary(medianReg)
qrResid=residuals(medianReg)
corResid=cor(head(qrResid, -1),tail(qrResid, -1))
cor.test(head(qrResid, -1),tail(qrResid, -1), method = "spearman")
# Grafica de correlación de residuos
n<-length(qrResid)
plot(qrResid[2:n],qrResid[1:(n-1)],xlab=expression(qrResid[i-1]),ylab=expression(qrResid[i]))

plot(qrResid,type="l",ylab=residuals")
#Grafico de normalidad

qqnorm(y, xlim=c(-2.5,2.5))

qqline(y)
# transformación de variables lagY=tail(y,-1)

lagX=tail(x, -1)


$$YStar = y - corResid * lagY$$


$$XStar = x - corResid * lagX$$

# simetria
hist(y)
hist(YStar)
skewness(YStar)
# modelo aplicando la transformación
medianReg1 = rq(YStar XStar,tau=c( .5))
r=residuals(medianReg1)

```



```

# Se aplica la prueba Spearman, ya no existe correlación
cor.test(head(r, -1),tail(r, -1), method = "spearman")
summary(medianReg1)
taus=c(.1,.4,.5,.6,.7,.8)
#Koenker and Basset test Joint Test of Equality of Slopes:

out = anova(rq(Y Star X Star, tau = taus), test = "Wald")
out
anova.rqTest(rq(Y Star X Star), data = data, taus = -1, nullH = "location", trim = c(0.05,
0.95))
# intervalos de confianza por método de inversión de rangos
fit11 =rq(Y Star X Star, tau = taus)
summary(fit11)

plot(fit11)
fm2.pfn <- rq(fit11,tau=taus,method="pfn")

summary(fm2.pfn)
plot(fm2.pfn)

taus1=c(.05,.1,.15,.2,.25,.3,.35,.4,.45,.5,.55,.6,.65,.7,.75,.8,.85,.9,.95)
taus11=c(.1,.15,.2,.4,.6,.65,.7,.75,.8)
# Regresión cuantil con el método simplex

qrModel <- rq(Y Star X Star, tau=taus11, method="br") qrModel

# Destranformarlos

qrModelm <- rq( Y Star X Star, tau=.4, method="br")
ydt=fitted.values(qrModelm)+corResid*lagY
medianRegdt = rq(ydt x,tau=.4 )
summary(medianRegdt)
#Ancho de banda
j=bandwidth.rq( c(.1,.15,.2,.4,.6,.65,.7,.75,.8), 150, hs=TRUE, alpha=0.05)
j
#Graficar
plot(X Star, Y Star, cex = .25, type = "n", xlab = "Cantidad", ylab = "Precio")
points(X Star, Y Star, cex = .5, col = "blue")

```

```
abline(rq(YStar XStar, tau = .5), col = "blue")
```

```
abline(lm(YStar XStar), lty = 2, col = "red")
```

```
taus = taus11
```

```
for(iin1 : length(taus))abline(rq(YStar XStar, tau = taus[i]), col = "gray")
```

Nota: la variable x es el vector con cantidad de créditos, y la variable y es el vector con precio de créditos

Apéndice E

Código Recopilación de datos históricos VBA

El siguiente código se utilizó para obtener el número de créditos y los datos con los que se calculó el precio de manera automatizada.

```
Sub promedio()  
Workbooks("m").Activate  
Dim r(4) As Long  
Dim m As Integer  
Dim i As Integer  
Dim n As Integer  
m = 0  
For m = 0 To 9  
n = 3 + m * 13  
r(1) = Cells(13, n)  
r(2) = Cells(17, n)  
r(3) = Cells(18, n)  
r(4) = Cells(19, n)  
Worksheets("MINFO").Activate  
Cells(22, n) = Application.WorksheetFunction.Sum(Cells(13, n), Cells(17, n), Cells(18,  
n), Cells(19, n))  
Next  
For m = 0 To 9  
n = 7 + m * 13  
If Cells(13, n) = And Cells(17, n) = And Cells(18, n) = And Cells(19, n) = Then  
Cells(22, n) = 0  
Else  
  
Cells(22, n) = Application.WorksheetFunction.Average(Cells(13, n), Cells(17, n), Cells(18,  
n), Cells(19, n))
```

```

End If
Next
For m = 0 To 9
n = 12 + m * 13
If Cells(13, n) = And Cells(17, n) = And Cells(18, n) = And Cells(19, n) = Then
Cells(22, n) = 0
Else
Cells(22, n) = Application.WorksheetFunction.Average(Cells(13, n), Cells(17, n), Cells(18,
n), Cells(19, n))
End If
Next
End Sub
Sub copiar()
Dim columna As Long
Dim max As Long
Dim i As Integer

Dim celda
Workbooks("m").Activate
Worksheets("MINFO").Activate
Worksheets("MINFO").Range("22:22").Copy
Workbooks("n").Activate
ActiveSheet.Range("23:23").Select
ActiveSheet.Paste
columna = 2 max = 200

Do While columna <= max
If Cells(23, columna) = Then
Cells(23, columna).Delete
max = max - 1
Else
columna = columna + 1
End If
Loop
End Sub

```

Bibliografía

- [1] BANCO MUNDIAL. (2019). *Crédito Interno al Sector Privado*. Recuperado de: <https://datos.bancomundial.org/indicador/fs.ast.prvt.gd.zs> (Consulta: mayo 2009)
- [2] BANXICO. (2018). *Banxico Educa*. Recuperado de : <http://educa.banxico.org.mx> (Consulta: Noviembre 2018)
- [3] BANXICO. (2017). *Reporte sobre el sistema financiero*. Recuperado de : www.anterior.banxico.org.mx (Consulta: Diciembre 2018)
- [4] BANXICO. (2018). *Financiamiento al sector privado del país a través del crédito bancario*. Recuperado de: <http://www.banxico.org.mx> (Consulta: Enero 2019).
- [5] BANXICO(3). (2018). *Glosario*. Recuperado de: <http://www.anterior.banxico.org.mx/divulgacion/glosario> (Consulta: Enero 2019).
- [6] BARRODALE, I. ROBERTS, F. D. K. (1978). *An Efficient Algorithm for Discrete Linear Approximation with Linear Constraints*.
- [7] BÚ, C. (1996). *Simulación: un enfoque práctico*. Editorial Limusa.
- [8] BUCHINSKY, M. (1998). *Recent advances in quantile regression models: a practical guideline for empirical research*. Journal of human resources, 88-126.
- [9] CALL, T. (1983). *Microeconomía*. California: Iberoamericana.
- [10] CASE E, K. FAIR R, C. (2008). *Principios de Microeconomía*. Ciudad de México. Pearson Education.
- [11] CASE, K. FAIR R, C. (1992). *Fundamentos de economía*. Ciudad de México. Prentice Hall.
- [12] CNBV. (2018). *Información estadística, Crédito a la vivienda*. <https://www.cnbv.gob.mx/SECTORES-SUPERVISADOS/BANCA-MULTIPLE> (Consulta: junio-diciembre 2018).
- [13] CNBV 2. (2018). *Información estadística, Crédito a la vivienda*. Recuperado de : <https://www.cnbv.gob.mx/SECTORES-SUPERVISADOS/BANCA-MULTIPLE> (Consulta: junio-diciembre 2018).
- [14] CNBV 3. (2019). *Base de datos*. Recuperado de: <https://www.cnbv.gob.mx/Inclusi>
- [15] DAVINO, C. FURNO, M. VISTOCCO, D. (2013). *Quantile regression: theory and applications (Vol. 988)*. John Wiley and Sons.
- [16] EVISTA, R. (1942). *Los Grandes Economistas. Antoine Auguste Cournot*. <https://revistas.unc.edu.ar/index>. (Consulta: Enero 2019).

- [17] GAUTHIER, D. (2001). *Detecting trends using Spearman's rank correlation coefficient*. Environmental forensics.
- [18] LE ROY MILLER, R. MEINERS, E. (1988). *Microeconomía*. Bogota. McGraw-Hill.
- [19] FUNDEF. (2017). *Estructura del sistema de crédito en México*. Recuperado de :<http://fundef.org.mx> (Consulta: Diciembre 2018)
- [20] GARCÍA FONSECA, C. (2007). *Microeconomía: para su aplicación a la empresa*. Ciudad de México. Editorial Trillas.
- [21] GIBBONS, R. (1992). *Un primer curso de teoría de juegos*. Madrid: Antoni Bosch.
- [22] GÓMEZ, J. (2007). *Modelación de competencia en sistemas hidrotérmicos aplicando teoría de juegos*. (Tesis de maestría). <https://tesis.ipn.mx/> (Consulta: junio 2018).
- [23] GUZMÁN, S. (2010). *Teoría de juegos una aplicación a la cervecera en México* (Tesis de maestría). <http://oreon.dgbiblio.unam.mx> (Consulta: septiembre 2018).
- [24] GUAPILLA, C. (2013). *Existencia del equilibrio de Nash que da ventaja al jugador con el primer turno*. (Tesis de maestría).
- [25] INEGI CENSO GENERALES DE POBLACIÓN Y VIVIENDA (1950-2010). <https://www.inegi.org.mx/programas/ccpv/1950/default.html> Tabulados (Consulta: junio 2018).
- [26] INFANTE GIL, S. (2008). *Métodos estadísticos, un enfoque interdisciplinario México*. Colegio de Posgraduados.
- [27] JUÁREZ, C. (2003) *Marco Jurídico del Sistema Bancario Mexicano*. Ciudad de México. Trillas.
- [28] KELLISON, S. (2006). *The theory of interest*.
- [29] KOENKER, R. (2012). *Quantile regression in R: A vignette*. Retrieved November.
- [30] KOENKER, R. (2005). *Quantile regression*. Volume 38 of. Econometric Society Monographs.
- [31] LILLO, P. (2006). *Economía Política y otros juegos. Una introducción a los juegos no cooperativos*. Ciudad de México: Las prensas de ciencias.
- [32] MAZALOV, V. (2014). *Mathematical Game Theory and Applications*. New Delhi: Vivar Printing Snd Bhd.
- [33] ORTIZ, H. B., HERNÁNDEZ, D. G., HIRSCH, J. (2017). *Dos modelos de Teoría de juegos aplicados a las administradoras de fondos para el retiro (Afores) en México*.
- [34] OTERO, J. REYES, B. (2012). *Regresión cuantílica: estimación y contrastes*. Instituto LR Klein-Centro Gauss.
- [35] PINDYCK, R. RUBINFELD, D. (1995). *Microeconomía*. Madrid. Juan Stumpf.
- [36] RODRÍGUEZ, M. (2016). LA ESCUELA DE FRIDBURGO Y LOS ECONOMISTAS ESPAÑOLES (1939-1964). Recuperado de : <http://www3.uah.es/iaes> (Consulta: Noviembre 2018)

- [37] ROSSETTI, J. ROJAS, M. ORDOÑEZ, M. (1994). *Introducción a la Economía* (Vol. 7). Harla.
- [38] SABADÍAS, A. (1995). *Estadística descriptiva e inferencial* (Vol. 8). Univ de Castilla La Mancha.
- [39] SAUCEDO, C. (2012) *El Mercado Mexicano de Créditos Hipotecarios como Modelo de Oligopolio Mixto*. Recuperado de :<http://eprints.uanl.mx> (Consulta: Septiembre 2018)
- [40] SHERALI, H. (1984). *A multiple leader Stackelberg model and analysis*. Estados Unidos. Operations Research.
- [41] SHERALI, H. ALLEN, L. SOYSTER, F. (1983). *Stackelber-Nash-Cournot Equilibrium-Characterization and Computations*. Estados Unidos. Operations Research.
- [42] SOCIEDAD HIPOTECARIA FEDERAL. *Historia*. Recuperado de: <http://doc.shf.gob.mx/Mobile/SobreSHF/Descripci>
- [43] TARR, G. (2012). *Small sample performance of quantile regression confidence intervals*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 82(1), 81-94.
- [44] TIROLE, J. (1990). *The theory of industrial organization*. Cambridge: The MIT Press
- [45] TURRENT, E. (2007). *Historia Sintética de la Banca en México*. Recuperado de: <http://www.banxico.org.mx> (Consulta: Enero 2019)
- [46] VILLAR SUÁREZ, J. A. (2002). *Simulador de un mercado hidrotérmico utilizando teoría de juegos*. Santiago de Chile.
- [47] VILLEGAS, V. (2000). *Juegos y dinámicas*. Ciudad de México. Editorial Paulinas.