



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
(MECÁNICA) – (TERMOFLUIDOS)

MODELO DE DRENADO DE UNA ESPUMA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
LUIS MANUEL VENTURA RUIZ

TUTOR PRINCIPAL  
DR. FEDERICO MENDEZ LAVIELLE  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
(MECÁNICA) – (TERMOFLUIDOS)

CIUDAD DE MÉXICO SEPTIEMBRE 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

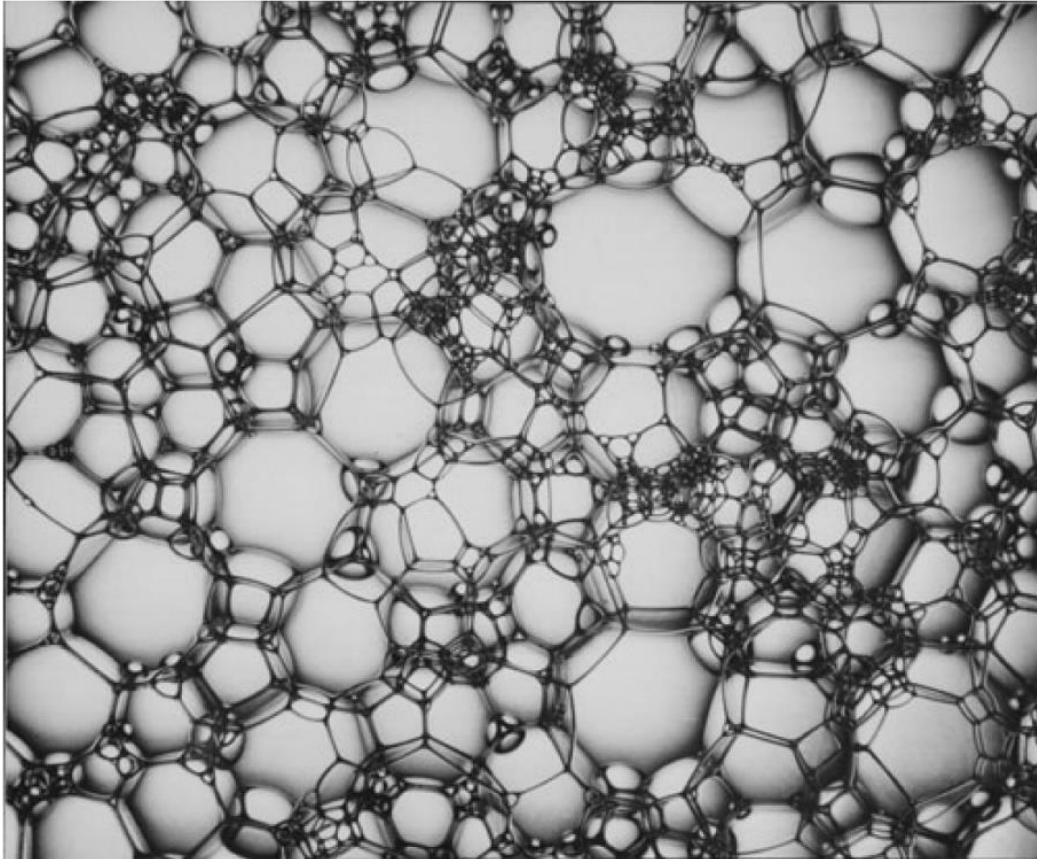
Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPITULO I: GENERALIDADES .....	3
DEFINICIONES Y CARACTERÍSTICAS DE LAS ESPUMAS .....	3
ESTRUCTURA DE LAS ESPUMAS .....	5
DETERIORO DE UNA ESPUMA .....	7
DRENADO DE UNA ESPUMA .....	9
CAPITULO II: MODELO DE DRENADO DE UNA ESPUMA CON FASE LÍQUIDA NO NEWTONIANA .....	12
FORMULACIÓN MATEMÁTICA .....	12
PERMEABILIDAD DE UNA ESPUMA .....	15
ECUACIÓN ADIMENSIONAL DE DRENADO GENERALIZADA Y MODELO DE LEY DE POTENCIA.....	19
CAPITULO 3: SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO PROPUESTO .....	22
ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES .....	22
SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DE DRENADO GENERALIZADA Y MODELO DE LEY DE POTENCIA.....	27
SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN DE DRENADO GENERALIZADA Y MODELO DE LEY DE POTENCIA.....	28
CONCLUSIONES .....	45
BIBLIOGRAFÍA.....	50

# INTRODUCCIÓN



*Figura 1 Fotografía de una espuma por Michael Boran.*

Como muchas otras cosas que podemos encontrar a nuestro alrededor, las espumas al poseer características muy particulares se han hecho de la atención y de la curiosidad de los hombres. Una pintura muy famosa es aquella que nos regala Botticelli del nacimiento de Venus, quien para los griegos antiguos fuera Afrodita Urania cuyo nombre deriva de *aphrós-ἀφρός* que significa espuma, originando aquel mito que describe el nacimiento de la última hija de Urano y la espuma del mar, misma que pudo viajar en una concha hacia tierra firme donde de una manera o de otra crea las rosas cuya belleza era apenas comparable a la de ella.

Las espumas además de estar presentes en diferentes mitos importantes para la cosmovisión del hombre o en diferentes fenómenos naturales, se encuentran en diferentes procesos industriales en los que su presencia puede ser deseada o indeseada, pero en ambas situaciones, siempre es necesario poder entenderlas si es que se espera poder lidiar con ellas. Desde hace ya unos años empezaron a aparecer diferentes estudios sobre las espumas en un principio por ejemplo los realizados por Plateau, el trabajo de Bickerman entre otros, estos han ido evolucionando a tal grado que hoy se cuenta con diferentes modelos matemáticos para describir el comportamiento de las espumas.

Este trabajo tiene como objetivo principal desarrollar un modelo matemático que describa el comportamiento de drenado de una espuma acoplado el modelo de ley de potencia; razón por la que recibe el nombre de Modelo de Drenado con Ley de Potencia, como objetivo secundario se incluye encontrar una solución analítica de dicho modelo. Es importante mencionar que, para la solución de este modelo, se hace un enfoque únicamente hacia el drenado libre.

La justificación de este trabajo radica en la naturaleza no newtoniana de las espumas, es decir, las espumas pueden estar formadas principalmente por dos fluidos que por si mismos, sus viscosidades obedescan la Ley de Newton (agua y aire); sin embargo, al formar una espuma se observa que está no se comporta de acuerdo a dicha ley. Entonces porque no incluir un modelo reológico para un fluido No Newtoniano y observar su comportamiento.

Es importante mencionar que el alcance del presente trabajo se encuentra limitado en diferentes ámbitos, el primer de ellos hablando del comportamiento de la espuma; aun cuando existen diferentes fenómenos ocurriendo al mismo tiempo en una espuma, el modelo matemático únicamente se enfoca al drenado de la espuma. Por otro lado, hablando del drenado de una espuma, los resultados del Modelo de Drenado con Ley de Potencia se presentan únicamente para el drenado libre, dejando fuera el drenado pulsado y el drenado forzado. De igual manera se presenta un límite en cuanto a la solución pues para llegar a una solución analítica es necesario implementar restricciones que permitan linealizar dicho modelo.

El texto se presenta en tres capítulos: El primer capítulo tiene la intención de proporcionar información de utilidad para la lectura; en el segundo capítulo se muestra un desarrollo detallado del modelo matemático propuesto mismo que encuentra sus bases en el trabajo desarrollado por Stephan A. Koehler; durante el tercer capítulo se soluciona el modelo propuesto a partir de diferentes consideraciones, usando el método de las características y al final una serie de conclusiones.

# CAPITULO I: GENERALIDADES

## DEFINICIONES Y CARACTERÍSTICAS DE LAS ESPUMAS

En el presente capítulo se analizan algunos aspectos generales de las espumas que permitan una mayor comprensión durante la lectura de esta tesis; en principio conviene definir y analizar algunas definiciones de las espumas seguidas de propiedades que se mencionarán a lo largo de todo este trabajo.

Espuma: Son aglomeraciones de burbujas de gas separadas entre sí por películas líquidas delgadas. Las espumas son sistemas coloidales (Bikerman, 1973). Alternativamente también se puede definir como aquellas dispersiones de gas (fase dispersa) altamente concentradas en un líquido (fase continua) (Ashok Bhakta, 1997).

Fracción Líquida Volumétrica ( $\epsilon$ ): Es la cantidad de líquido contenida en una espuma,  $\epsilon = \frac{V_{liquido}}{V_{total}}$ , la relación de volumen de líquido al volumen total de la espuma (Ashok Bhakta, 1997).

Fracción Líquida Volumétrica Crítica ( $\epsilon^*$ ): Es el valor que marca el límite superior de fracción líquida para el cual una espuma pierde su estructura para convertirse en una solución burbujeante; según la literatura el valor ronda 0.3 (I. Cantat, 2013).

Espuma Húmeda: Se habla de una espuma húmeda cuando se satisface la relación de desigualdad  $0.05 \leq \epsilon \leq \epsilon^*$  y las burbujas en su interior comienzan a modificar su forma esférica pues tienden a escuadrarse. Véase Figura 4

Espuma Seca: Se habla de una espuma seca cuando la presencia de líquido no juega un rol muy importante en algún fenómeno observado, usualmente la fracción líquida es menor a 0.05 y la geometría de sus burbujas ha dejado de ser esférica. Véase Figura 4

Espuma Ideal: Se define una espuma ideal a partir de las siguientes simplificaciones:

- a) La espuma es muy seca.
- b) La espuma está en equilibrio mecánico y por lo tanto es estática.
- c) Su energía es proporcional al área superficial de sus burbujas.
- d) La espuma es incompresible (I. Cantat, 2013).

Espuma Monodispersa: En una espuma inicialmente mono dispersa, el tamaño de la burbuja es uniforme dentro de un elemento, es decir, todas las burbujas dentro del elemento tienen el mismo radio (Ashok Bhakta, 1997).

Espuma Inestable (Transitoria): Su tiempo de vida es de segundos. Estas son generalmente producidas utilizando surfactantes "suaves", como alcoholes de cadena

corta, anilina, fenol, aceite de pino. La mayoría de estos compuestos son escasamente solubles y pueden producir un bajo grado de elasticidad (Tadros, 2005).

Espuma Metaestable (Permanente): Su tiempo de vida es de horas o días. Estas espumas pueden resistir disturbios ordinarios (fluctuaciones térmicas). Pueden colapsar por perturbaciones anormales (evaporación, gradientes de temperatura, etc.) (Tadros, 2005).

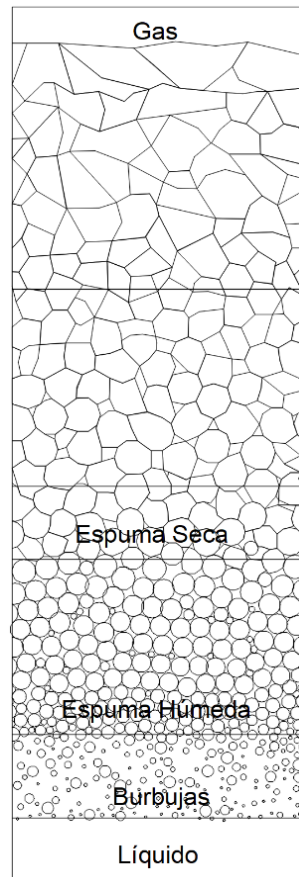


Figura 2 Bosquejo de una espuma 2D completa desarrollándose desde burbujas hasta espuma seca (obsérvese sobre todo los cambios en sus estructuras).

Tensión Superficial ( $\gamma$ ): Energía necesaria para crear una interfase. La energía por unidad de área de la interfase, multiplicada por el área de la interfase creada (I. Cantat, 2013).

Reología: Es el estudio de la deformación y el flujo de la materia (Morrison, 2001). Se enfoca en aquellos materiales que difieren en la relación de esfuerzo-deformación con respecto a la Ley de Newton (referente a la viscosidad) y a la ley de Hooke (de elasticidad)

Fluido Dilatante: Es aquel en el que la viscosidad aumenta al incrementar la rapidez de deformación (Morrison, 2001) (también se llama fluido espesante al corte).

Fluido Pseudoplástico: Es aquel en el que la viscosidad decae al incrementar la rapidez de deformación (Morrison, 2001) (también se llama fluido adelgazante al corte).

Conviene comentar que existen además espumas sólidas y para el caso en el que las burbujas están interconectadas a través de canales llenos de gas con burbujas vecinas, se habla de una esponja y de lo anterior se puede concluir que mientras para una esponja ambas fases son continuas, en una espuma existe una fase discontinua o dispersa.

Es importante mencionar que ningún líquido puro es capaz de formar una espuma, a menos que cuenten con la presencia de algún aditivo, estos aditivos consisten en moléculas formadas por una cabeza polar que puede tomar carga positiva, negativa o neutra y por una cola formada por una cadena de carbono. Este tipo de moléculas son llamadas anfifílicas pues poseen una cabeza hidrofílica y una cola hidrofóbica, dicho en palabras simples sufren una atracción y una repulsión respecto al agua.

## ESTRUCTURA DE LAS ESPUMAS

### Espuma de Kugel Schaum y Espuma Poliédrica

Según el valor de la fracción líquida en una espuma, las burbujas en su interior pueden tener forma esférica, esta espuma es de tipo "Kugel Schaum" y conforme varía el valor de la fracción líquida se alejará de la geometría esférica a una geometría en forma poliédrica con formas especiales en sus intersticios.

Los espacios intersticiales de una espuma pueden ser divididos en:

- Películas.- Son las responsables de permitir a dos burbujas permanecer adyacentes.
- Canales.- Generalmente nombrados como bordes de Plateau, son aquellos formados por la reunión de las películas a lo largo de un eje.
- Uniones.- También conocidos como nodos o vértices y permiten a los canales conectarse para formar una compleja red en el interior de una espuma.

### Reglas de Plateau

Ahora que se tiene una idea general de lo que es una espuma vale la pena recordar a Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883) quien fue pionero en el estudio de las espumas y estando ciego formuló las leyes que llevan su nombre y que se resumen a continuación:

- Primera Ley de Plateau (equilibrio de las caras): Las películas son superficies con curvatura media constante. Las películas son lisas y tienen una curvatura media constante que es determinada por la ley de Young-Laplace.
- Segunda Ley de Plateau (equilibrio de los ejes): Las películas siempre se encuentran en arreglos de tres a lo largo de sus ejes, formando ángulo de  $120^\circ = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ .



- Tercera Ley de Plateau (equilibrio de los vértices): Los ejes siempre se encuentran en arreglos de cuatro conectándose en los vértices formando ángulos de  $\theta_a = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109.5^\circ \approx 1.91 \text{ rad}$  (I. Cantat, 2013). En la Figura 3 se puede apreciar cualitativamente los enunciados anteriores.

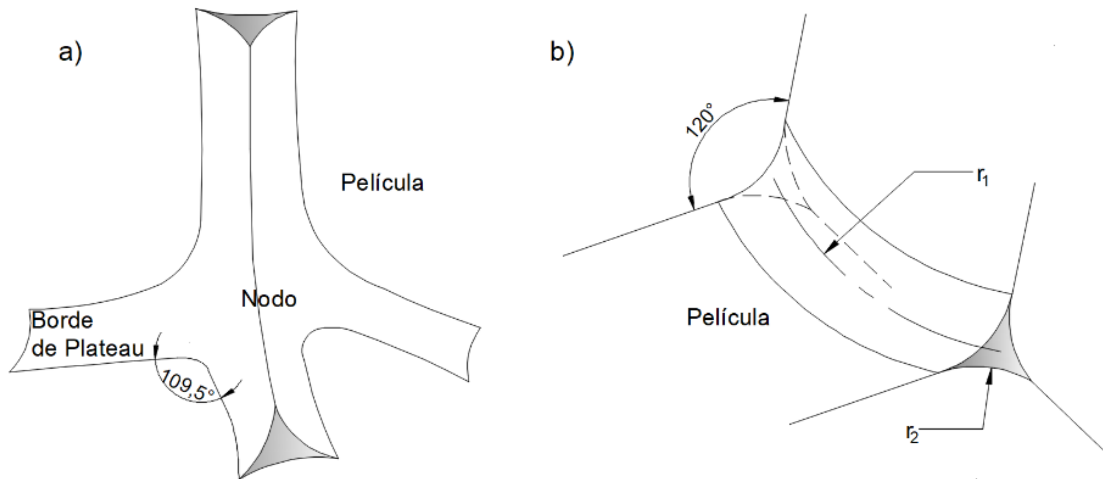


Figura 3 a) ilustra el arreglo entre los bordes de Plateau que generan la estructura de la espuma y b) ilustra el detalle de un borde de Plateau.

## Geometría de la Espuma

La elección de la geometría en el modelado de una espuma es esencial para poder establecer un enlace entre la microestructura de dicha espuma y sus propiedades a nivel macro a través de una celda de repetición. La mayoría de las ecuaciones con las que se cuentan para describir a las espumas se han obtenido a partir de un análisis bidimensional de la espuma donde suele elegirse el hexágono como celda de repetición, similar a un panal de abejas; sin embargo, se cuentan también con diferentes análisis tridimensionales donde una geometría recurrente es el Tetradecadro (con caras ligeramente curvadas, véase Figura 4).

A la celda de repetición de una espuma formada por un tetradecadro (6 cuadriláteros y 8 hexágonos) se le conoce comúnmente como estructura de Kelvin, pues fue Lord Kelvin quien identificó dicha estructura como un polígono capaz de empaquetarse acorde a los experimentos de Plateau. Es importante mencionar también que se han tomado en cuenta variaciones de dicha celda, por ejemplo, tetradecaedros alargados (Sullivan, 2007) demostrando que esta estructura pese a su antigüedad y a otras estructuras posteriores como la estructura Weaire-Phelan (Krinsky, 1999), sigue siendo válida y muy importante en el estudio de las espumas.

Para este trabajo se ha elegido también la estructura de Kelvin como celda de repetición porque además de los aspectos positivos expuestos anteriormente, se busca conseguir un modelo al que se le pueda dar una solución analítica; es decir, que no se requiera exclusivamente de algún método numérico para solucionarlo.

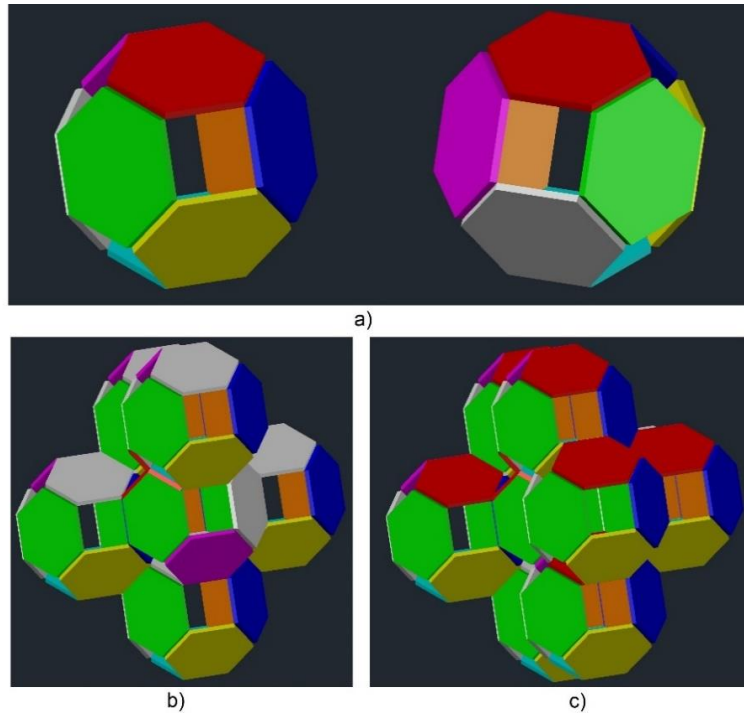


Figura 4 a) Vistas de un tetradecaedro, b) se ilustra sobre el tetradecaedro central la orientación de los canales (en color rojo) acordes a las leyes de Plateau, c) se muestra el empaquetamiento del tetradecaedro.

## DETERIORO DE UNA ESPUMA

Es importante mencionar que, aunque las espumas varían en cuanto a su tiempo de vida, en general son sistemas inestables que tienden a deteriorarse en tiempos que van desde algunos segundos hasta días; sin embargo, se han identificado procesos comunes que modifican su deterioro. Se habla de la coalescencia, el drenado y la maduración que, aunque son procesos íntimamente ligados, se han debido separar para su estudio y sobre todo para poder analizar y predecir su comportamiento.

Con la finalidad de enriquecer la lectura se describirán los procesos que deterioran una espuma, pero se hace hincapié en que el alcance de este trabajo se enfoca solo en el proceso de drenado.

### Coalescencia

Este fenómeno ocurre cuando dos burbujas entran en contacto formando una película que después se rompe causando la fusión de dichas burbujas, lo que a simple vista puede llevar a pensar que la espuma tiende a formar burbujas de radios iguales; por lo tanto, la causa de este efecto parece ser en principio la diferencia de los radios, que a su vez desatan diferentes velocidades de drenado (las películas más delgadas drenan más

rápido formando burbujas más grandes) que provocan inestabilidades hidrodinámicas responsables de los rompimientos de película.

Si se observa más a fondo el comportamiento entre dos burbujas que entran en contacto aparecerán una fuerza especial (disjoining force) responsable de mantener la distancia entre estas dos, donde para un sistema de fuerzas en equilibrio deberá existir otra fuerza igual, pero en sentido contrario que tiende a acercar dichas burbujas. En el punto donde el aumento de las fuerzas de atracción se vuelve insostenible para las fuerzas de repulsión, las burbujas perderán el equilibrio, entrarán en contacto y se fusionarán. Las fuerzas responsables de la repulsión están íntimamente ligadas a la naturaleza química de la fase líquida en la espuma y no son tomadas en cuenta para el análisis del proceso de drenado, pero expresan una relación que permite concluir que efectivamente los procesos de deterioro de las espumas están íntimamente ligados.

## Maduración

Para entender este proceso es importante mencionar que las películas de líquido existentes entre las burbujas de una espuma no son una barrera absoluta al gas contenido en la burbuja, es decir, el gas se puede difundir a través de la fase líquida entre una burbuja de mayor presión a una con menor presión o directamente entre burbujas y en consecuencia modificar tanto el tamaño promedio como el número de burbujas. Se dice que este fenómeno ocurre lentamente de manera que se encuentra en equilibrio mecánico en cada instante, además para burbujas esféricas, su presión es directamente proporcional a su curvatura, en otras palabras, es inversamente proporcional al radio, pero en el caso de espumas secas, aunque la presión sigue siendo proporcional a su curvatura, la curvatura depende de la forma de la burbuja y el número de burbujas vecinas que tenga.

### *Maduración de Ostwald*

La difusión del gas se produce entre las burbujas y la solución, que actúa como un depósito de gas, dado que la presión de una burbuja es proporcional a su curvatura, la presión de una burbuja esférica es inversamente proporcional a su radio, de modo que las burbujas más pequeñas tienen una mayor sobrepresión en relación con el líquido y pierden más gas de lo que reciben de él. Por otro lado, las burbujas más grandes reciben más gas del líquido que lo que lo pierden, por lo que las burbujas pequeñas se contraen y las más grandes continúan creciendo. Las pequeñas burbujas eventualmente desaparecen, y dado que no se crean nuevas burbujas, el número total de burbujas disminuye, por lo que el tamaño promedio aumenta.

### *Maduración de Neumann-Mullins*

Este es un proceso de maduración para espumas secas, donde el intercambio de gases se produce directamente, de burbuja a burbuja. Aquí también, la presión de una burbuja es proporcional a su curvatura, pero ahora la curvatura depende de la forma de la burbuja.

## Drenado

El drenado es en general el flujo de la fase líquida a través de los canales de la espuma en dirección de una fuerza actuadora que comúnmente es causada por el campo gravitacional; es este flujo el que transporta la fase líquida fuera de la espuma influyendo directamente en el valor de la fracción líquida. El tratamiento que se le da a la espuma para estudiar el drenado es el de un medio poroso, es decir, se trata como un medio continuo con una permeabilidad efectiva, sin embargo, hay aspectos de la espuma que la hacen especial tal como es el tamaño de poro y el corte transversal de este. Existen diferentes tipos de drenado que son: el drenado libre, el drenado forzado y el drenado pulsado. Este proceso será descrito de manera más profunda en la siguiente sección.

## DRENADO DE UNA ESPUMA

### Antecedentes

Ya se ha hecho una breve mención acerca del proceso de drenado, se ha recalcado además el papel que tiene este proceso en el deterioro de una espuma y el hecho de estar ligado a los demás procesos que deterioran una espuma. Con la intención de entender este proceso de manera efectiva, se recomienda pensar en algún ejemplo de la vida cotidiana; puede ser al final de lavar los platos, cuando se acumula una gran cantidad de espuma cerca de la trampa en la boca del desagüe, si esta espuma se deja tal cual, se puede ver que después de un lapso de tiempo la espuma disminuye su volumen. Lo anterior ocurre principalmente como consecuencia de un proceso de drenado que sufrió dicha espuma a causa de la fuerza de gravedad.

En general se entiende como drenado al proceso en el que la fase líquida fluye a través de la espuma y le abandona (se dice que se drena la fase líquida). Se sabe además de la mecánica clásica que una propiedad de la materia es la inercia así se acepta que los cuerpos son incapaces a cambiar su estado por sí solos, entonces, una pregunta coherente sería: ¿qué hace fluir a la fase líquida en la espuma? y como primera respuesta viene a la mente el campo gravitacional de la tierra, que es en efecto una de las causas usuales de este flujo, junto con la presión capilar.

Como se dijo anteriormente para el análisis del drenado la espuma se asume como un medio continuo con una permeabilidad efectiva, de manera semejante al análisis en un medio poroso. Se debe tener en cuenta que en una espuma el tamaño de poro depende del flujo, las burbujas se pueden alejar para permitir el paso del flujo y después acercarse; además la interfase es un fluido y por lo tanto es parcialmente arrastrada por el flujo.

### Drenado Libre

Es la evolución de la fracción líquida de una espuma inicialmente uniforme de altura finita (Stephan A. Koehler S. H., 2000). Una idea amplia de lo que es el drenado

libre podría hablar de la evolución de la fracción líquida hacia un perfil de equilibrio de una espuma sometida a la acción de la gravedad como única fuerza externa actuadora en el flujo (véase Figura 5).

Si se piensa en una espuma "recién nacida" contenida en algún recipiente con un valor inicial de la fracción líquida, cuya única influencia es el campo gravitacional, se observará fluir a la fase líquida a través de los intersticios de la espuma de tal forma que esta fase líquida se acumulará en el fondo hasta que la acción de la gravedad se equilibre. Dentro de las observaciones consecuentes se descubre que la espuma deja de ser homogénea; se distinguen con claridad dos zonas, una hacia la parte inferior y otra hacia la parte superior, en la parte inferior que además es la parte que está en contacto con el líquido drenado se presenta una espuma húmeda que tiene una estructura esférica con un valor de la fracción líquida mayor que en el resto de la espuma mientras que la parte superior es una espuma seca con una estructura poliédrica además de un valor bajo de la fracción líquida, se dice entonces que la espuma ha drenado libremente.

Este proceso se puede dividir en dos etapas; en la primera etapa la fracción líquida solo varía de manera lineal en la parte superior de la espuma (I. Cantat, 2013) durante tiempos menores a cierto tiempo característico y su valor se mantiene cercano al valor inicial, el frente de drenado aumenta su ancho mientras la velocidad de drenado al final de la espuma se mantiene constante (Stephan A. Koehler S. H., 2000). La segunda etapa sucede durante tiempos mayores a ese cierto tiempo característico mencionado anteriormente y es cuando los radios de curvatura comienzan a cambiar de manera que la presión capilar se convierte en un factor determinante en este proceso originando un gradiente de presión que aumenta de la parte inferior hacia la parte superior de la espuma, dicho gradiente contrarresta al gradiente de la fracción líquida hasta alcanzar un equilibrio estático. Aunque conceptualmente el drenado libre es el más sencillo, su descripción teórica no lo es.

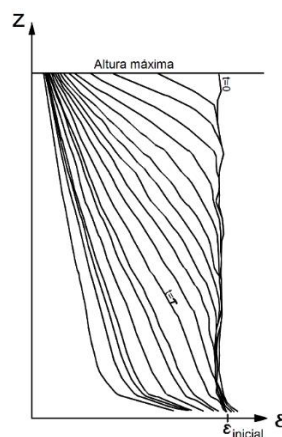


Figura 5 Bosquejo de la evolución del perfil de drenado libre

## Drenado Forzado

Este proceso de drenado es caracterizado por la adición de un flujo generalmente desde la parte superior de la espuma, produciendo un drenado hacia la parte inferior en dirección del campo gravitacional, la evolución de la fracción líquida manifiesta un frente distintivo que no varía en su forma y se mueve a velocidad constante. En la onda de drenado se pueden distinguir tres zonas, siendo la primera una zona que precede a la onda, caracterizada por un bajo contenido de líquido (zona drenada, véase Figura 6), seguido de la zona de transición con un tamaño característico y finalmente el cuerpo principal donde el valor de la fracción líquida se mantiene constante (Stephan A. Koehler S. H., 2000).

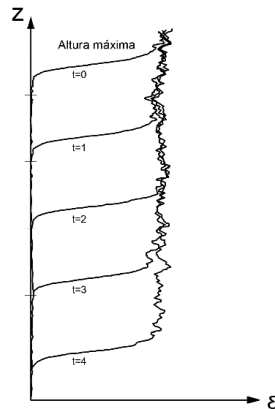


Figura 6 Bosquejo de la evolución del perfil de drenado forzado.

## Drenado Pulsado

El drenado pulsado es la evolución de un pequeño volumen inicial de líquido (pulso) que se agrega a una espuma con bajo contenido de líquido, con la intención de que la espuma funcione como un tipo de amortiguador, absorbiendo inmediatamente el pulso de manera que la capilaridad extienda dicho pulso en todas direcciones (véase Figura 7). Experimentos realizados por Koehler identifican tres regiones en el perfil de este drenado: la retaguardia, que es muy parecida a la región posterior del drenado libre; una región media donde crece significativamente el valor de la fracción líquida y la región del frente que es similar a la que se manifiesta en el drenado forzado.

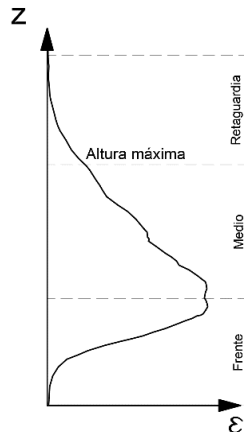


Figura 7 Bosquejo de la evolución del perfil de drenado pulsado.

# CAPITULO II: MODELO DE DRENADO DE UNA ESPUMA CON FASE LÍQUIDA NO NEWTONIANA

## FORMULACIÓN MATEMÁTICA

En principio y como es usual en los problemas de la mecánica de los fluidos se acude a la ecuación de continuidad, pero por tratarse de una espuma la densidad se puede aproximar de la siguiente manera  $\rho = \rho_l \epsilon + \rho_{gas}(1 - \epsilon) \approx \rho_l \epsilon$ , finalmente para una espuma cuya fase líquida es incompresible la ecuación de continuidad es:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot (\epsilon \bar{v}) = 0. \quad (2.1)$$

Ahora se puede establecer una conexión entre la velocidad y la fracción líquida con la intención de encontrar un modelo que describe la permeabilidad como función de la posición y el tiempo; para esto recurriremos a una analogía entre la espuma y un medio poroso remarcando que para una espuma, la permeabilidad varía y esta acoplada a la dinámica del fluido en la espuma. Entre los primeros trabajos con medios porosos se encuentran los realizados por Darcy quien experimentalmente determinó la siguiente relación:

$$Q = -KA \frac{h_2 - h_1}{L}. \quad (2.2)$$

En la Ec. (2.2)  $K$  es el factor a destacar y originalmente se le llamó conductividad hidráulica reconociendo una dependencia con la geometría del poro y la dinámica del fluido (Julia C. Muccino, 1998), concepto mismo que evolucionó al de permeabilidad y que está presente en la que ahora se conoce como Ley de Darcy, de la que podemos escribir a la velocidad según la Ec. (2.3) donde el signo del segundo término es positivo si el flujo es en dirección del campo gravitacional y negativo si el flujo va en contra

$$v = \frac{k}{\mu} (-\bar{\nabla}P \pm \rho \bar{g}). \quad (2.3)$$

En el caso en que la viscosidad depende de la rapidez de deformación se define una viscosidad no newtoniana  $\eta(\dot{\gamma})$  y posteriormente con la ayuda de la ecuación constitutiva newtoniana generalizada  $\bar{\tau} = -\eta(\dot{\gamma})\bar{\dot{\gamma}}$  y el modelo de ley de potencia que describe a la viscosidad como una función que es proporcional al tensor rapidez de

deformación y con  $\mu_e$  (índice de consistencia), se puede escribir como  $\eta(\dot{\gamma}) = \mu_e \dot{\gamma}^{n-1}$  (Morrison, 2001). Del procedimiento descrito anteriormente podemos escribir al tensor rapidez como se muestra en la Ec. (2.4) y de la ecuación de movimiento llegar a la ecuación adimensional (2.5) (Larson, 1981) y (Wang Chaoyang, 1990)

$$\bar{\tau} = -\mu_e (\dot{\gamma}^{n-1}) \bar{\dot{\gamma}} \quad (2.4)$$

$$\hat{N}_k G' + \bar{V}' \cdot \bar{\tau}' = 0, \quad (2.5)$$

donde  $\hat{N}_k$  denota el número de permeabilidad y se define como,

$$\hat{N}_k \equiv \left(\frac{L_c}{v}\right)^n \left(\frac{\Delta P}{\mu_e}\right) = cte. \quad (2.6)$$

Por otro lado, a partir del modelo de la ley de potencia se puede obtener una expresión para la velocidad de Darcy generalizada (2.7) que es esencial para el modelo propuesto y con  $n = 1$ ,  $\mu_e = \mu$ , se tendrá como caso especial la Ley de Darcy convencional. En consecuencia, para el caso de un fluido no-newtoniano que obedece la ley anterior tenemos que,

$$v^n = \frac{k_\epsilon}{\mu_e} (-\bar{V}P \pm \rho \bar{g}). \quad (2.7)$$

De la Ec. (2.6) combinándola con la Ec. (2.7) se puede obtener que  $k_\epsilon \propto L_c^{n+1}$  siendo  $L_c$  una longitud característica definida más adelante. Además con la ecuación anterior, se obtiene una expresión para la velocidad en el medio poroso haciendo evidente la dependencia que esta tiene con las características físicas y geométricas del medio poroso; de tal manera que resulta imperioso definir una geometría para poder continuar con el desarrollo del modelo. Por lo tanto y en concordancia con las Leyes de Plateau, mismas que aplican para una espuma ideal y que describen a una espuma muy seca, se elige una celda de Kelvin (explicada en el CAPITULO I) y además se hace uso de la Ec. (2.8) conocida como la ley de Young-Laplace (I. Cantat, 2013):

$$P_{gas} - P_{liq} = \gamma H = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \quad (2.8)$$

El subíndice “gas” se refiere al fluido confinado en el interior de una burbuja y que resiste los efectos del agente exterior “liq”, donde el subíndice “liq” denota la fase líquida y a la diferencia de presiones entre ambas fases se le conoce como presión capilar. En el caso de una espuma que cumple con una estructura poliédrica veremos que  $R_1 \ll R_2$  donde  $R_1$  es el radio de curvatura medido sobre la sección transversal y  $R_2$  es el radio



que se mide sobre todo el canal (figura 3). La expresión 2.8 se puede reescribir bajo las condiciones descritas anteriormente, con  $R_1 = r$  tenemos que,

$$P_{liq} = P_{gas} - \frac{\gamma}{r}. \quad (2.9)$$

El siguiente paso es determinar la magnitud de  $r$  y para ello acudiremos a una función desarrollada por Kohler a partir de métodos numéricos donde describe la permeabilidad como función de la geometría de la espuma, esto es:  $\epsilon = \delta_\epsilon \left(\frac{r}{L}\right)^2 + \delta' \left(\frac{r}{L}\right)^3$  donde el segundo término corresponde a la aportación de líquido por las películas y nodos mientras que el primer término corresponde al volumen de líquido en los canales siendo  $\delta_\epsilon$  un valor es muy cercano a 0.071, por esta razón se conserva el primer término para realizar la aproximación (2.10). y que solamente es donde se ve reflejado el efecto de la geometría de la espuma,

$$r \approx \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} L}{\delta_\epsilon^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.10)$$

Combinando las Ecs. (2.7), (2.9) y (2.10) y suponiendo además una espuma monodispersa, donde la presión del gas es uniforme y constante, se puede escribir una nueva expresión para la velocidad, dada como:

$$v^n = \frac{k_\epsilon}{\mu_e} (-\bar{\nabla}P \pm \rho\bar{g}) = \frac{k_\epsilon}{m} \left( \frac{\gamma}{r} \pm \rho\bar{g} \right) = \frac{k_\epsilon}{m} \left( \frac{\gamma \delta_\epsilon^{\frac{1}{2}}}{L} \bar{\nabla} \left( \epsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \pm \rho\bar{g} \right). \quad (2.11)$$

Sustituyendo la Ec. (2.11) en la ecuación (2.1) se obtiene un modelo de drenado generalizado, tomando en cuenta el campo gravitacional en sentido del flujo

$$\mu_e^{\frac{1}{n}} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{1}{n} \left[ -\frac{\gamma \delta_\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2L} \frac{\partial \epsilon^{\frac{2n-1}{2}}}{\partial x_i} + \rho g_i k_\epsilon \epsilon^n \right]^{\frac{1-n}{n}} \left[ \rho\bar{g} \cdot \bar{\nabla} (k_\epsilon \epsilon^n) - \frac{\gamma \delta_\epsilon^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)L} \bar{\nabla} \cdot \left( k_\epsilon \bar{\nabla} \epsilon^{\frac{2n-1}{2}} \right) \right] = 0. \quad (2.12)$$

En la ecuación anterior se puede apreciar claramente que para cuando  $n=1$  recuperamos la ecuación de drenado generalizada (Stephan A. Koehler S. H., 2000) y que se puede escribir mediante la expresión siguiente:

$$\mu_e \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \bar{g} \cdot \bar{\nabla} (k_\epsilon \epsilon) - \frac{\gamma \delta_\epsilon^{\frac{1}{2}}}{L} \bar{\nabla} \cdot \left( k_\epsilon \bar{\nabla} \epsilon^{-\frac{1}{2}} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Para completar el modelo matemático, ahora es indispensable analizar cómo se comporta la permeabilidad en función de la fracción líquida, ya que como se puede apreciar de la ecuación anterior se tienen dos incógnitas: la permeabilidad y la fracción líquida y para poder resolver la ecuación anterior es indispensable que solo se tenga una sola incógnita. Para ello se ha incluido la siguiente sección.

## PERMEABILIDAD DE UNA ESPUMA

Para encontrar una ecuación de la permeabilidad, seguiremos el modelo de Koehler, quien compara dos ecuaciones: la primera aquella que soporta la teoría de que la disipación de la energía es dominada por el canal; es decir, propone que la disipación de energía se lleva a cabo mayoritariamente en el canal, mientras la segunda da pie a la teoría dominada por los nodos donde como es fácil intuir, la mayor disipación de energía se lleva a cabo en los nodos. De lo anterior nos enfocaremos en explicar el argumento para la teoría dominada por los nodos pues se ha demostrado que describe de mejor manera los resultados experimentales.

Para llevar a cabo lo anterior, podemos partir de un análisis energético entre el trabajo de las fuerzas de cuerpo y presión contra el trabajo por fuerzas viscosas. De esta manera, de la ecuación de Stokes se obtiene:

$$\int_v \bar{u}_m \cdot (\rho \bar{g} - \bar{\nabla}_m P_m) dv = - \int_v \mu_e \bar{u}_m \cdot \bar{\nabla}_m^2 U_m dv, \quad (2.14)$$

y utilizando la definición de  $\bar{G}$  introducida anteriormente después de la Ec (2.5), la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\bar{u} \cdot \bar{G} v = - \int_v \mu_e \bar{u}_m \cdot \bar{\nabla}_m^2 U_m dv. \quad (2.15)$$

Donde el lado izquierdo de la ecuación anterior representa la integral. Es necesario indicar que el subíndice "m" se refiere a aquellas cantidades físicas de carácter "microscópico" y que una vez que se calculan con la ayuda de la anterior formulación integral para toda la red, podemos hablar de cantidades medias de carácter macroscópico.

El siguiente paso es una expansión sobre el lado derecho de la ecuación anterior con la finalidad de identificar los componentes del Laplaciano a lo largo de toda la red. Por otro lado, es necesario aproximar los volúmenes tanto del canal como de los nodos mediante las expresiones siguientes:  $v_c \approx \delta_\epsilon r^2 L$  y  $v_n \approx \delta_n \frac{r^3}{2}$ . Que fueron deducidas en trabajos anteriores (Stephan A. Koehler S. H., 2000). Con ayuda de las anteriores aproximaciones, el lado derecho de la Ec. (2.15) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \int_v \mu_e \bar{u}_m \cdot \bar{\nabla}_m^2 \bar{u}_m dv &= \mu_e \left( \int_{v_n} \bar{u}_m \cdot \bar{\nabla}_m^2 \bar{u}_m dv_n + \int_{v_c} \bar{u}_m \cdot \bar{\nabla}_{Tm}^2 \bar{u}_m dv_c + \right. \\ &\quad \left. \int_{v_c} \bar{u}_m \cdot \bar{\nabla}_{Lm}^2 \bar{u}_m dv_c \right) = \mu_e \left( \frac{\delta_n r^3}{2} \int_{\frac{2v_n}{\delta_n r^3}} \bar{u}_m \cdot \bar{\nabla}_m^2 \bar{u}_m \frac{2}{\delta_n r^3} dv_n + \right. \\ &\quad \left. \delta_a r^2 L \int_{\frac{v_c}{\delta_a r^2 L}} (\bar{u}_m \cdot \bar{\nabla}_{Tm}^2 \bar{u}_m + \bar{u}_m \cdot \bar{\nabla}_{Lm}^2 \bar{u}_m) \frac{dv_c}{\delta_a r^2 L} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Expresión que representa la disipación de la energía en las regiones nodales, el componente transversal del laplaciano a lo largo del canal y por último el componente longitudinal del laplaciano y que se pueden reescribir respectivamente como:

$$\begin{aligned} \mu_e u^2 \left( \frac{\delta_n r}{2} \int_{\frac{2v_n}{\delta_n r^3}} \frac{\bar{u}_m}{u} \cdot r^2 \bar{\nabla}_m^2 \frac{\bar{u}_m}{u} \frac{2}{\delta_n r^3} dv_n + \delta_a L \int_{\frac{v_c}{\delta_a r^2 L}} \frac{\bar{u}_m}{u} \cdot r^2 \bar{\nabla}_{Tm}^2 \frac{\bar{u}_m}{u} \frac{dv_c}{\delta_a r^2 L} + \right. \\ \left. \frac{\delta_a r^2}{L} \int_{\frac{v_c}{\delta_a r^2 L}} \frac{\bar{u}_m}{u} \cdot L^2 \bar{\nabla}_{Lm}^2 \frac{\bar{u}_m}{u} \frac{dv_c}{\delta_a r^2 L} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Los términos anteriores que expresan el balance energético se pueden simplificar considerablemente reescribiendo el balance energético y abreviando las integrales ya adimensionalizadas del trabajo por disipación y con  $v$  aproximado por  $v_c \approx \delta_a r^2 L$  y de esta manera se tiene que:

$$\bar{u} \cdot \bar{G} v = \mu_e u^2 \left[ \frac{\delta_n r}{2} (/n) + \delta_a L (/cT) + \frac{\delta_a r^2}{L} (/cL) \right] \quad (2.18)$$

$$\hat{u} \cdot \bar{G} = \mu_e u \left[ \frac{\delta_n}{2\delta_a r L} (/n) + \frac{1}{r^2} (/cT) + \frac{1}{L^2} (/cL) \right]. \quad (2.19)$$

A continuación, se puede definir también una velocidad promedio del líquido en todas las direcciones  $\bar{v} \equiv \langle \bar{u} \rangle_\theta$  y se reescribe la ecuación anterior como,

$$\langle \bar{U} \cdot \bar{G} \rangle_\theta = \mu_e \bar{v} \left[ \frac{\delta_n}{2\delta_a r L} (/n) + \frac{1}{r^2} (/cT) + \frac{1}{L^2} (/cL) \right] \quad (2.20)$$

donde el término del lado izquierdo de la ecuación anterior se puede evaluar fácilmente y escribirse de forma compacta con ayuda de la expresión siguiente:

$$\langle \bar{U} \cdot \bar{G} \rangle_\theta = \bar{G} \int_0^1 \cos^2 \theta \, d \cos \theta = \bar{G} \int_0^1 w^2 \, dw = \frac{\bar{G}}{3} \quad (2.21)$$

y de esta manera, la Ec. 2.20 se puede reescribir como,

$$\frac{\bar{G}}{3} = \mu_e \bar{v} \left[ \frac{\delta_n}{2\delta_a r L} (/n) + \frac{1}{r^2} (/cT) + \frac{1}{L^2} (/cL) \right]. \quad (2.22)$$

Con el procedimiento anterior obtenemos una ecuación que podemos comparar directamente con la ley de Darcy para identificar la suma de integrales como el término relacionado con la permeabilidad, destacando que el cálculo de cada una de las integrales es sumamente complicada y aunque se pudieran obtener de simulaciones numéricas, también han sido determinadas a partir de procedimientos experimentales; sin embargo, para este procedimiento solo se mencionarán como factores adimensionales; entendiendo el papel que juega cada uno en la dinámica del problema. Por consiguiente, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\bar{G} = \frac{\mu_e \bar{v}}{k_\epsilon} \approx \mu_e \bar{v} \left[ \frac{3\delta_n}{2\delta_a r L} (/n) + \frac{3}{r^2} (/cT) + \frac{3}{L^2} (/cL) \right] \quad (2.23)$$

donde

$$k_\epsilon \approx \left[ \frac{3\delta_n}{2\delta_a r L} (/n) + \frac{3}{r^2} (/cT) + \frac{3}{L^2} (/cL) \right]^{-1}. \quad (2.24)$$

Nuevamente se acude a la aproximación conseguida a partir del polinomio de Kohler para el radio para escribir la expresión de la permeabilidad en función de la fracción volumétrica, mediante la siguiente ecuación:

$$k_\epsilon \approx \left[ \frac{3\delta_n \delta^{\frac{1}{2}}}{2\delta_a \epsilon^{\frac{1}{2}} L^2} (/n) + \frac{3\delta}{\epsilon L^2} (/cT) + \frac{3}{L^2} (/cL) \right]^{-1}. \quad (2.25)$$

El siguiente paso para determinar la expresión de la permeabilidad consiste en analizar cada uno de los términos para dilucidar un término predominante. Así por ejemplo, podemos decir que cuando  $r \ll L$ , el último término del lado derecho de la ecuación anterior, es por mucho menor a todos los demás y podemos prescindir de él. Es importante mencionar que bajo el mismo criterio se pueden comparar el primer y segundo término, donde las primeras teorías consideraban el segundo término como dominante; es decir, le otorgaban mayor importancia a la disipación de energía en el canal,

consiguiendo una expresión de la permeabilidad a partir de este término. Es importante señalar que aunque uno pueda imaginar que efectivamente el área transversal se modifica a lo largo del canal en relación directa con la velocidad del fluido manifestando disipación igualmente a lo largo de todo el canal, también es verdad que en el nodo ocurre una disipación importante de energía al conectar diferentes flujos que se combinan y cambian de dirección desde distintos canales, a partir de este argumento se decide proponer el primer término como un término que domina sobre los otros dos para lograr la expresión buscada. De esta manera se tiene que:

$$k_{\epsilon} \approx \left[ \frac{3\delta_n \delta_{\epsilon}^{\frac{1}{2}}}{2\delta_a \epsilon^{\frac{1}{2}} L^2} (/n) \right]^{-1} \quad (2.26)$$

$$k_{\epsilon} = K_{1/2} L^2 \epsilon^{\frac{1}{2}}; K_{1/2} \equiv \frac{2\delta_a}{3\delta_n \delta_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} (/n)}. \quad (2.27)$$

Ahora para darle un mayor significado a esta expresión conviene señalar que la mayor disipación de energía por fuerzas viscosas que ocurre en el canal, descansa en las dos condiciones siguientes: 1) la condición de paredes fijas de las burbujas en el canal por donde circula el fluido y cuando dichas paredes presentan contacto con el fluido en su interior, el esfuerzo cortante presentado entre ellas, es resistido por la tensión superficial, lo que produce en el interior un flujo de Poiseuille; 2) se propone un corte sobre las moléculas de los tensoactivos que se encuentran localizados en la superficie y que son arrastrados aguas abajo y producen un gradiente de concentración de tensoactivos en dirección del flujo ocasionando que las paredes del canal se mantengan estáticas. Por otro lado, si se proponen paredes móviles, libres de esfuerzos, se concibe un flujo tipo tapón en el canal y gradientes de concentración de tensoactivos bajos, donde efectivamente se puede ver que la disipación de energía no tendría por qué ser dominante en esta región. Para entender estas suposiciones de manera sencilla se sugiere pensar en las burbujas contenidas en la espuma con sus centros fijos en la posición inicial en todo momento, pero pensando en ellas como un balón atrapado en una cuenca que aunque no cambia su posición, si puede girar en todas direcciones, siendo las pistas de estos balines las zonas intersticiales de la espuma. De igual manera, también es posible imaginar que la máxima disipación de energía ocurrirá en las conexiones de estas pistas (los nodos) porque en cada cara del canal debería existir un ligero patinamiento de la burbuja producido por el perfil de velocidad que como se puede imaginar se modifica aguas abajo a lo largo de toda la espuma y cada una de estas ligeras diferencias colapsa precisamente en los nodos produciendo el flujo más complicado que se presenta en toda la espuma y donde efectivamente ocurrirá la máxima disipación.

Por todo lo anterior se acude a una función de permeabilidad que según el número de permeabilidad, Ec. (2.6) y la Ec. (2.27) deberá ser igual a la propuesta en la Ec.(2.28), esto es:

$$k_{\epsilon} = K_{1/2} L^{n+1} \epsilon^{\frac{1}{2}}; K_{1/2} \equiv \frac{2\delta_a}{3\delta_n \delta_{\epsilon}^{\frac{1}{2}} (/n)} \quad (2.28)$$

De esta forma el modelo propuesto para la Ec. (2.13) queda como,

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{(\gamma \delta_\epsilon^{1/2} K_{1/2} L^n)^{1/n}}{2n(\mu_e)^{1/n}} \left[ \frac{\rho g_i L \epsilon^{1/2}}{\gamma \delta_\epsilon^{1/2}} - \frac{1}{2\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right]^{\frac{1-n}{n}} \quad (2.29)$$

$$\left[ (2n+1)\epsilon^{1/2} \frac{\rho g_i L}{\gamma \delta_\epsilon^{1/2}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_i^2} - \frac{(n-1)}{\epsilon} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right)^2 \right] = 0$$

Para la Ec. (2.29) con  $n=1$  y enfocándose únicamente en la coordenada  $z$  ( $x_3$ ), se recupera el modelo nombrado por Kohler como el “modelo dominado por los nodos”, caso que arroja indicios de un buen tratamiento del presente análisis y que por consiguiente se puede escribir como:

$$\mu_e \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho g K_{1/2} L^2 \frac{\partial \epsilon^{3/2}}{\partial z} - \frac{K_{1/2} L \gamma \delta_\epsilon^{1/2}}{2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial z^2} = 0. \quad (2.30)$$

Es importante mencionar que la Ec. (2.29) es la ecuación en variables físicas que se obtiene a partir de proponer que la disipación de energía más importante ocurre en los nodos de la microestructura de la espuma y el acoplamiento del modelo de ley de potencia. La ecuación mencionada es el caso más amplio del drenado (válido para fluidos no newtonianos) y a partir de ella se obtendrán diferentes ecuaciones adimensionales que se presentan en la siguiente sección.

## ECUACIÓN ADIMENSIONAL DE DRENADO GENERALIZADA Y MODELO DE LEY DE POTENCIA

### Primera forma de la Ecuación de Drenado Generalizada y Modelo de Ley de Potencia Adimensional

A partir de la Ec. (2.29) y considerando únicamente las variaciones del problema en la coordenada  $z$  en dirección del flujo y con ayuda de las siguientes transformaciones

$\epsilon = (\epsilon_{ref}) \tilde{\epsilon}, \zeta = \frac{(z)Z^*}{(\epsilon_{ref})^{1/2}}$ , donde  $Z^* = \frac{\gamma \delta_\epsilon^{1/2}}{2\rho g L}$  es una longitud característica capilar (Stephan A. Koehler S. H., 2000), la Ec. (2.29) se puede reescribir como:

$$\epsilon_{ref} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t} + \frac{2}{n} \left[ \frac{K_{1/2} (\rho g)^{n+1} L^{2n+1}}{\mu_e (\gamma \delta_\epsilon^{1/2})^n} \right]^{\frac{1}{n}} \left[ \epsilon_{ref}^{1/2} \tilde{\epsilon}^{\frac{1}{2}} - \frac{\epsilon_{ref}^{1/2}}{2\tilde{\epsilon}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} \right]^{\frac{1-n}{n}} \quad (2.31)$$

$$\left[ \frac{(2n+1)\epsilon_{ref}^2 \tilde{\epsilon}^{1/2}}{2} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} - \epsilon_{ref}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta^2} - \frac{(n-1)\epsilon_{ref}^2}{\tilde{\epsilon}} \left( \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} \right)^2 \right] = 0$$

En la Ec. (2.31) aún es necesario determinar un tiempo característico para poder adimensionalizarla por completo. Una opción que es bastante usual en mecánica de fluidos cuando se tiene una velocidad y una distancia característica es determinarlo a partir de estas dos magnitudes, en este caso contamos con una distancia característica capilar y podemos proponer la velocidad de Darcy como una velocidad característica tal

que a partir de  $Z^* = \frac{\gamma \delta_\epsilon^2}{2\rho g L}$  y  $v^* = \left[ \frac{K_{1/2}(\rho g)L^{n+1}}{\mu_e} \right]^{\frac{1}{n}}$  obtenemos:

$$t^* = 2 \left[ \frac{\mu_e (\gamma \delta_\epsilon^{1/2})^n}{K_{1/2}(\rho g)^{n+1} L^{2n+1}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (2.32)$$

El tiempo característico también se puede determinar simplemente con la transformación de la Ec. (2.31), considerando  $t = \frac{(\tau)t^*}{n \epsilon_{ref}}$ . De esta manera se tiene que,

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tau} + \left[ \epsilon_{ref}^{1/2} \tilde{\epsilon}^{\frac{1}{2}} - \frac{\epsilon_{ref}^{1/2}}{2\tilde{\epsilon}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} \right]^{\frac{1-n}{n}} \left[ \frac{(2n+1)\tilde{\epsilon}^{1/2}}{2} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta^2} - \frac{(n-1)}{\tilde{\epsilon}} \left( \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} \right)^2 \right] = 0. \quad (2.33)$$

La Ec. (2.33) es la ecuación de drenado generalizada acoplada al modelo de ley de potencia. Finalmente, para el caso donde  $n = 1$  se llega a:

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\epsilon}^{3/2}}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (2.34)$$

La Ec. (2.34) es estudiada y resuelta por (Stephan A. Koehler S. H., 2000) a partir de recursos computacionales, dada su no linealidad. Para el caso de la Ec. (2.33) se puede prever que encontrar una solución tampoco será sencillo y por ello en la siguiente sección se aborda otra alternativa para adimensionalizarla.

## Segunda forma de la Ecuación de Drenado Generalizada y Modelo de Ley de Potencia Adimensional

En esta sección se retoma la Ec. (2.29) pero se elegirá una longitud característica diferente, que será la longitud de la espuma que se pretende modelar, es decir, pensando en una espuma confinada en un tubo largo, la longitud de dicho tubo será la longitud característica y las transformaciones serán  $\epsilon = (\epsilon_{ref})\tilde{\epsilon}$ ,  $\zeta = (z)Z^*$ , donde  $Z^* = H$ . Trabajando la ecuación mencionada se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t} + \frac{(\tilde{\epsilon} \epsilon_{ref})^{\frac{1}{2n}}}{2nH} \left[ \frac{K_{1/2} \rho g_i L^{n+1}}{\mu_e} \right]^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \frac{1}{2\beta \epsilon_{ref}^{1/2} \tilde{\epsilon}^{3/2}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} \right]^{\frac{1-n}{n}} \\ \left[ (2n+1) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta^2} \frac{1}{\beta (\tilde{\epsilon} \epsilon_{ref})^{\frac{1}{2}}} - \frac{(n-1)}{\beta \epsilon_{ref}^{1/2} \tilde{\epsilon}^{3/2}} \left( \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En la Ec. (2.35) el parámetro adimensional  $\beta$  se define como  $\beta = \frac{\rho g L H}{\gamma \delta_\epsilon^{\frac{1}{2}}}$ , donde

se considera para este trabajo que  $\beta \gg 1$  de manera que es posible reducir el segundo corchete a la unidad, además comparando los tres términos del ultimo corchete, prevalecerá únicamente el de signo positivo reduciendo la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tau} + \tilde{\epsilon}^{\frac{1}{2n}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.36)$$

$$\text{donde } t = (\tau)t^* \text{ y } t^* = \frac{2nH}{(2n+1)} \left[ \frac{\mu_e}{K_{\frac{1}{2}} \rho g L^{n+1} \epsilon_{ref}^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Lo primero que hay que mencionar después del procedimiento anterior es que  $\beta$  resulta ser similar al número de Bond el cual es una razón de las fuerzas gravitacionales a las fuerzas de tensión superficial. Según la condición que se ha impuesto  $\beta \gg 1$ , se les ha otorgado peso a las fuerzas gravitacionales, situación para la que las paredes del canal a través del cual circula el líquido son móviles, este argumento se encuentra también entre las bases de la teoría de drenado dominada por los nodos misma que nos ha permitido desarrollar una expresión para la permeabilidad ( $k_\epsilon$ )



# CAPITULO 3: SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO PROPUESTO

## ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Antes de encontrar la solución para la ecuación (2.36) conviene revisar la naturaleza de la ecuación misma, de esa manera se podrá elegir alguna opción válida para finalmente encontrar dicha solución.

La expresión (2.36) es evidentemente una ecuación en derivadas parciales y en cuanto a ecuaciones en derivadas parciales se refiere, estas pueden ser escritas como una  $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$  donde  $u$  es una función desconocida de las variables  $x, y$ . En el caso en el que la ecuación es lineal en sus primeras derivadas y sus respectivos coeficientes son función de  $c, y, u$ ; recibe el nombre de *quasi-lineal* y debe seguir la forma de (3.1).

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (3.1)$$

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u) \quad (3.2)$$

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y) \quad (3.3)$$

Si los coeficientes de las primeras derivadas son independientes de  $u$  la ecuación recibe el nombre de *semilineal* (3.2) y se dice que la ecuación es *lineal* si es de la forma (3.3) donde los coeficientes son solo función de:  $x, y$ ; donde  $d(x, y)$  es una función dada. Evidentemente cada una es un caso particular de la anterior, es decir, una ecuación *lineal* es un caso particular de una ecuación *quasi-lineal*.

### Construcción De Una Ecuación De Primer Orden

Sea una familia de superficies descritas por la ecuación(3.4) donde- $a$  y  $b$  son parámetros arbitrarios, si derivamos dicha ecuación respecto a “ $x$ ” y “ $y$ ” obtendremos las ecuaciones (3.6).

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \quad (3.5)$$

$$f_x + pf_z = 0, \quad f_y + qf_z = 0 \quad (3.6)$$

Pensemos por ejemplo en las esferas descritas por la ecuación (3.7)

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -x(r^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -y(r^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

$$x + \frac{\partial z}{\partial x}(z - c) = 0, \quad y + \frac{\partial z}{\partial y}(z - c) = 0. \quad (3.9)$$

Los parámetros arbitrarios pueden ser eliminados y así obtener una ecuación de primer orden(3.10) cuya solución completa o integral completa es (3.11).

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}y - \frac{\partial z}{\partial y}x = 0 \quad (3.11)$$

Cuando (3.12) involucra a dos funciones conocidas  $\phi = \phi(x, y, z), \psi = \psi(x, y, z)$  y además es solución de la ecuación (3.10), entonces se dice que (3.12) es la solución general o integral general de dicha ecuación(3.10), resaltando el hecho de que la solución de una ecuación en derivadas parciales depende de una función arbitraria mientras que para una ecuación diferencial ordinaria la solución general depende de una constante arbitraria. La solución general puede obtenerse de la solución completa.

$$f(\phi, \psi) = 0 \quad (3.12)$$

Si en la solución completa se escribe un parámetro como función del otro se obtienen las ecuaciones (3.13) y (3.14) que definen a la solución general de (3.4), con  $a = a(x, y, z)$  se puede resolver (3.13) y obtener (3.15) donde para cada  $b(a)$  se obtiene una solución particular desde la solución general. Es evidente que si la solución general depende de una función arbitraria entonces se tendrá una infinidad de soluciones, pero solo una de ella será capaz de satisfacer las condiciones de un problema físico particular. Lo anterior se puede escribir como:

$$f(x, y, z, a, b(a)) = 0 \quad (3.13)$$

$$f_a + \frac{\partial b}{\partial a}f_b = 0 \quad (3.14)$$

$$f(x, y, z, a(x, y, z), b(a(x, y, z))) = 0 \quad (3.15)$$

Si se deriva la ecuación (3.12) respecto a  $x$  y  $y$  se obtienen las ecuaciones (3.16) y (3.17) mismas que dan lugar a un sistema para el que una solución diferente a la trivial

puede ser encontrada por medio de la expresión (3.19) cuya expansión resulta en la ecuación diferencial (3.20)

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + p \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial \phi} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + q \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + q \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (3.17)$$

$$\begin{vmatrix} \phi_x + p\phi_z & \phi_y + p\psi_z \\ \psi_x + q\phi_z & \psi_y + q\psi_z \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

$$p \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, z)} + q \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(z, x)} = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

En general, si  $\phi = \phi(x, y, z), \psi = \psi(x, y, z)$  son dos funciones dadas y  $f(\phi, \psi) = 0$  es una arbitraria, entonces  $z = z(x, y)$  satisface la ecuación diferencial de primer orden (3.18). Es importante tener presente que las funciones solución de las ecuaciones en derivadas parciales no son siempre suaves (continuas y derivables) pueden por ejemplo presentar discontinuidades en sus derivadas dando lugar a una solución débil; la solución débil más común es la que presenta discontinuidades en sus primeras derivadas. Las ecuaciones quasi-lineales y no lineales en derivadas parciales es que tienden a desarrollar discontinuidades a medida que se alejan de su estado inicial.

## Interpretación Geométrica De Una Ecuación De Primer Orden

Partiendo de una ecuación quasi-lineal (3.1) donde  $u = u(x, y)$  es una posible solución; y en forma implícita queda como (3.21), representa una posible superficie solución en el espacio  $(x, y, u)$  también conocida como superficie integral de la ecuación (3.1).

$$f(x, y, u) \equiv u(x, y) - u = 0 \quad (3.21)$$

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_u) = (u_x, u_y, -1) \quad (3.22)$$

En cualquier punto  $(x, y, z)$  de la superficie solución,  $\nabla f$  es normal a la superficie y ya que es posible escribir la expresión (3.1) como el producto punto de  $\nabla f$  y  $(a, b, c)$  (3.23), este último necesariamente es tangente a la superficie en el punto  $(x, y, z)$  determinando así un campo de dirección que se nombra dirección característica, esto es:

$$au_x + bu_y - c = (u_x, u_y, -1) \cdot (a, b, c) = 0. \quad (3.23)$$

Por otro lado, si se tiene una curva en el espacio  $(x, y, u)$  con vectores tangentes coincidentes a la dirección característica  $(a, b, c)$  se dice que se tiene una curva característica. Si la curva característica puede ser parametrizada como se muestra en (3.22), el vector tangente a la curva es  $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}\right)$  y por lo tanto es igual al vector  $(a, b, c)$ , este argumento es fundamental para el presente trabajo pues es así que se pueden construir las ecuaciones características que permiten desarrollar el método de solución del modelo de drenado presentado. Lo anterior es equivalente a escribir las ecuaciones características siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, u), \frac{dy}{dt} = b(x, y, u) = \frac{du}{dt} = a(x, y, u) \quad (3.24)$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} \quad (3.25)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales descrito en (3.24) es conocido como ecuaciones características de la ecuación quasi-lineal (3.1) mismas que en su forma no paramétrica se escriben como (3.25). Es evidente que al haber solo dos ecuaciones diferenciales ordinarias independientes, la solución depende de una familia de dos parámetros en el espacio  $(x, y, u)$ ; cuando  $u = 0$  la proyección de la curva en el plano  $(x, y)$  se llama característica base o simplemente se nombra como característica.

El problema típico para resolver la ecuación (3.1) con una  $u$  prescrita en una curva plana dada  $C$  es equivalente a encontrar una superficie integral en el espacio  $(x, y, u)$ , que satisface la ecuación (3.1) y que contiene a la curva  $\Gamma$  del espacio tridimensional definida por los valores de  $u$  en  $C$ , que es proyección en  $u = 0$  de  $\Gamma$ .

Es importante mencionar en primer lugar que esta interpretación geométrica puede ser generalizada para ecuaciones en derivadas parciales de orden superior; sin embargo, la visualización de los argumentos geométricos sería muy complicada y en segundo lugar se tiene que tomar en cuenta que para ecuaciones en derivadas parciales no lineales la interpretación geométrica se complica aun más por la clase de curvas que de estas ecuaciones se derivan (conos de Monge).

## Método De Las Características

A partir de la interpretación geométrica de una ecuación en derivadas parciales y sus curvas características es posible desarrollar un método para encontrar la solución de ecuaciones quasi-lineales, conocido como el método de las características de Lagrange. Como se anticipó es el método al que se recurre para resolver el modelo propuesto en este trabajo.

Se ha discutido previamente que  $f(\phi, \psi) = 0$  es solución de una ecuación en derivadas parciales quasi-lineal de primer orden (3.1) con  $f$  como función arbitraria de  $\phi(x, y, z)$  y  $\psi(x, y, z)$ , ambas funciones constantes,  $\phi = c_1, \psi = c_2$  que de hecho son

solución de las ecuaciones características  $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}$ ; la familia de curvas descritas por ambas constantes es llamada familia de curvas características de la ecuación (3.1).

Partiendo del hecho que tanto  $\phi$  como  $\psi$  son constantes se deben satisfacer las ecuaciones descritas por sus diferenciales exactas (3.26) y (3.27) mismas que a través de las ecuaciones características son equivalentes a las ecuaciones (2.71) y (2.71) respectivamente. Lo anterior es equivalente a escribir:

$$d\phi = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_u du = 0 \quad (3.26)$$

$$d\psi = \psi_x dx + \psi_y dy + \psi_u du = 0 \quad (3.27)$$

$$\phi_x a + \phi_y b + \phi_u c = 0 \quad (3.28)$$

$$\psi_x a + \psi_y b + \psi_u c = 0 \quad (3.29)$$

Si uno se da a la tarea de resolver este sistema de ecuaciones, formado por (3.28) y (3.29) encontrará los valores de  $(a, b, c)$  descritos en la expresión (3.30) mismos que se pueden escribir como determinantes y con ello arribar a la expresión (3.31)

$$a = \phi_y \psi_u - \phi_u \psi_y, b = \phi_u \psi_x - \phi_x \psi_u, c = \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x \quad (3.30)$$

O bien,

$$\frac{a}{\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)}} = \frac{b}{\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, x)}} = \frac{c}{\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}} \quad (3.31)$$

Se ha demostrado en la construcción de una ecuación de primer orden que  $f(\phi, \psi) = 0$  satisface la ecuación (3.19) que además es similar a la ecuación (3.28) de manera que sustituyendo (3.27) en (3.28) encontramos que  $(\phi, \psi) = 0$  es solución de la ecuación en derivadas parciales quasi-lineal de primer orden (3.1).

$$p \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(y, u)} + q \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, x)} = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)} \quad (3.32)$$

## SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DE DRENADO GENERALIZADA Y MODELO DE LEY DE POTENCIA

En esta sección se hallará una solución analítica de la Ec. (2.36) donde el perfil de  $\tilde{\epsilon}$  depende de la propia solución de la ecuación lo que hace posible su resolución mediante el método de las características. Aunque es posible desarrollar una solución paramétrica, se opta por pasar directamente al sistema característico en forma diferencia, que queda como:

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{d\zeta}{\tilde{\epsilon}^{2n}} = \frac{d\tilde{\epsilon}}{0} \quad (3.33)$$

donde optaremos por separar dos ecuaciones.

$$d\tilde{\epsilon} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}^{2n}} d\tau = d\zeta \quad (3.35)$$

La Ec. (3.34) se puede integrar directamente, determinando que  $\tilde{\epsilon}$  es constante, lo que permite escribir la Ec. (3.35) como una ecuación separable de la forma:  $C1 d\tau = d\zeta$ , integrar y obtener un nuevo sistema de ecuaciones característico:

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}^{2n}} = C1 \quad (3.36)$$

$$\zeta = C1 \tau + C2 \quad (3.37)$$

Para obtener una solución general es necesario volver la mirada hacia atrás y recordar la posibilidad de expresar al sistema de ecuaciones (3.33) en forma paramétrica. Además, el parámetro puede ser elegido de manera arbitraria de manera que en un procedimiento similar al desarrollado anteriormente, se pueden obtener las constantes de integración en función de ese parámetro, por ejemplo el parámetro  $\Gamma$  con  $C1(\Gamma)$  y  $C2(\Gamma)$ . Entonces es posible despejar al parámetro  $\Gamma$  y expresar una de las constantes en función de la otra o una función que dependa de ambas variables.

Se elige expresar a  $C1$  como función de  $C2$  y así obtener la solución general implícita que se indica a continuación:

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}^{2n}} = f\left(\zeta - \frac{1}{\tilde{\epsilon}^{2n}} \tau\right) \quad (3.38)$$

## SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA ECUACIÓN DE DRENADO GENERALIZADA Y MODELO DE LEY DE POTENCIA

Antes de adentrarnos a una solución particular de la Ec. (2.36) es necesario mencionar algunas características que se plantearon al final del capítulo dos, esto es que dicha ecuación es un caso particular de una ecuación hiperbólica de la forma:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dA}{dx} [f(A)] = 0 \quad (3.39)$$

que es una ecuación hiperbólica cuya solución puede admitir discontinuidades (Juan Luna, 2016), razón por la que suele perturbarse con un término de segundas derivadas respecto a la posición, para evitar discontinuidades, por lo menos para soluciones numéricas. Un ejemplo claro es la ecuación de Burgers a la que suele adicionarle el término mencionado denominado “viscosidad artificial” y que da pauta a la diferenciación entre Ecuación de Burgers No Viscosa y Ecuación de Burgers Viscosa.

Con la intención de completar un panorama de la ecuación con la que estamos trabajando también es importante mencionar que en general las soluciones de las ecuaciones que se derivan de la Ec (3.39) generan soluciones como “ondas” y las discontinuidades que se producen son aprovechadas para modelar ondas de choque en problemas de la mecánica de fluidos. Ahora para continuar con la solución es necesario hallar una curva “dato inicial” que pueda correr sobre las ecuaciones características de la ecuación Ec. (2.36); la curva dato inicial es una especie de generatriz para la solución particular, por lo que es indispensable elegirla correctamente.

Como se ha mencionado anteriormente, existen tres escenarios para el drenado de una espuma, siendo el drenado libre el primero de ellos y es a partir de este escenario que se busca la primera solución particular de la Ec. (2.36) para ello se plantea reconfigurar la Ec. (3.35) como se muestra en la Ec. (3.40). Para determinar el valor de  $C2$  es necesario observar la física del drenado libre recordando además que para la simplificación de la Ec. (2.36) se ha impuesto  $\beta \gg 1$ , límite que se puede considerar realista si se considera un valor de  $H$  muy grande.

$$\tau = \frac{\zeta}{\tilde{\epsilon}^{2n}} + C2 \quad (3.40)$$

Es posible plantear una ecuación hidrostática para la presión inicial en la fase líquida para cada punto de la espuma, por ejemplo,  $P_{liq} = P_o + \rho g z$ , es decir, la presión en cada punto aumenta a medida que avanzamos en el fondo de la espuma. Combinando la condición

anterior con las ecuaciones (2.9) y (2.10) es posible expresar  $\epsilon(0, z)$  como se muestra en la Ec. (3.41).

$$\epsilon^{\frac{1}{2}} = \frac{\gamma \delta_{\epsilon}^{1/2}}{L} \left( \frac{1}{P_{gas} - (P_o + \rho g z)} \right) \quad (3.41)$$

Para adimensionalizar la ecuación (3.42) se utilizaron las mismas transformaciones que fueron usadas para arribar a la Ec. (2.36) y así obtener la expresión final para  $\tilde{\epsilon}(0, \zeta)$  que describe el perfil inicial de  $\tilde{\epsilon}$ , que será la curva que determina las curvas características de la solución particular que se está buscando. De esta manera,

$$\tilde{\epsilon} = \left( \frac{\gamma \delta_{\epsilon}^{1/2}}{L(P_{gas} - P_o)} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_{ref}} \left( \frac{1}{1 - \frac{\rho g H \zeta}{P_{gas} - P_o}} \right)^2 \quad (3.42)$$

Es posible simplificar aún más la Ec. (3.42) si establecemos una condición más, es decir, si hacemos al primer término entre paréntesis del orden  $\epsilon_{ref}$  y con ello conseguimos:

$$\tilde{\epsilon}(0, \zeta) = \left( \frac{1}{1 - \gamma_p \zeta} \right)^2. \quad (3.43)$$

Donde  $\gamma_p = \rho g H / (P_{gas} - P_o)$ . Este parámetro adimensional representa la competencia entre la carga hidrostática del líquido y la carga de presión del gas. Es importante mencionar que para el caso del drenado libre, se debe mantener un perfil casi constante de la fracción líquida de manera que se elige  $\gamma_p \leq 10^{-3}$  como un límite en el entendido de aceptarse variaciones hasta de dos en cien a lo largo de toda la espuma. Finalmente, a partir de la Ec. (3.43) se llega a:

$$\tilde{\epsilon} = \left( \frac{\zeta}{\tau + \zeta(1 - \gamma_p \zeta)^{1/n}} \right)^{2n}. \quad (3.44)$$

Antes de ilustrar el comportamiento de la Ec. (3.44) conviene cerrar el problema del drenado libre y para ello es necesario conocer además del comportamiento de la fracción líquida; el comportamiento de la presión y la velocidad. Para modelar el comportamiento de la presión es necesario recurrir a las Ecs. (2.9), (2.10) y (3.44) según las cuales se puede escribir una presión adimensional para la fase líquida.



$$\pi_{liq} = \pi_{gas} - \tilde{\epsilon}^{-\frac{1}{2}}; \pi_x = \frac{P_x L}{\gamma \delta_{\epsilon}^{\frac{1}{2}}} \quad (3.45)$$

Para conseguir una expresión de la velocidad es necesario retomar las Ecs.(2.7), (2.28) y las transformaciones usadas hasta la Ec. (3.45), la cual se muestra a continuación:

$$\tilde{v}^n = \tilde{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{\beta} \frac{d\pi}{d\zeta} + 1 \right); \tilde{v}^n = \frac{\mu_e v^n}{K_{\frac{1}{2}} \rho g L^{n+1} \epsilon_{ref}^{\frac{1}{2}}} \quad (3.46)$$

Siendo consistentes con el planteamiento para determinar la Ec. (2.36), la Ec. (3.46) se reduce simplemente a:

$$\tilde{v} = \tilde{\epsilon}^{\frac{1}{2n}} \quad (3.47)$$

En la siguiente sección se muestran los resultados de evaluar las Ecs. (3.44), (3.45) y (3.47) bajo diferentes valores en los parámetros adimensionales  $n$ ,  $\gamma_p$  y diferentes valores del tiempo adimensional  $\tau$ .

## CAPITULO 4: RESULTADOS Y CONCLUSIONES DEL MODELO PROPUESTO

En este capítulo se presentan los resultados que se derivan del método de las características para determinar la permeabilidad variable de la espuma, así como los perfiles o distribuciones de presión y velocidad. En las primeras seis figuras, se presenta el caso de una espuma con comportamiento newtoniano, esto es, se trata el caso de  $n = 1$  y se considera que el parámetro adimensional  $\gamma_p$  asume dos valores diferentes ( $\gamma_p = 0.01$  y  $0.005$ ). Es importante mencionar que para las restantes figuras para  $n \neq 1$ , esto es, Figs. 14-30 y que representan los casos del comportamiento reológico de la espuma, también se asumió la misma variación para el parámetro  $\gamma_p$ . Como se puede apreciar en las primeras dos figuras 8 y 9, la permeabilidad disminuye conforme transcurre el paso del tiempo, indicando una característica notable del drenado libre: la existencia de un tiempo crítico por encima del cual la concavidad de la curva se invierte; además para tiempos largos la parte superior de la zona analizada se drena y la permeabilidad del fondo disminuye notablemente; situación que se aprecia por un notable cambio en la pendiente de la permeabilidad.

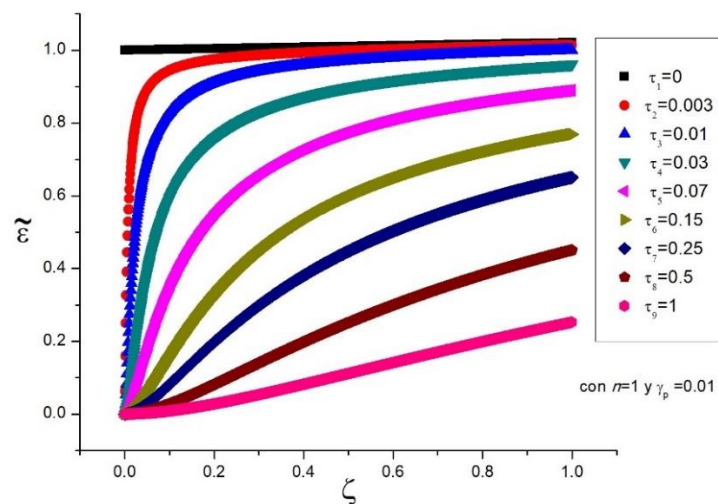


Figura 8. Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=1$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Complementariamente, la situación inversa ocurre para tiempos cortos, esto es, la evolución dinámica todavía no es suficiente para percibir cambios en la permeabilidad y esta permanece prácticamente constante. Es importante mencionar que la influencia del parámetro  $\gamma_p$  es marginal para estas figuras. Esta situación se repite reiteradamente en las

demás figuras, independientemente del valor del parámetro reológico  $n$ . Situación que se presenta para el drenado libre.

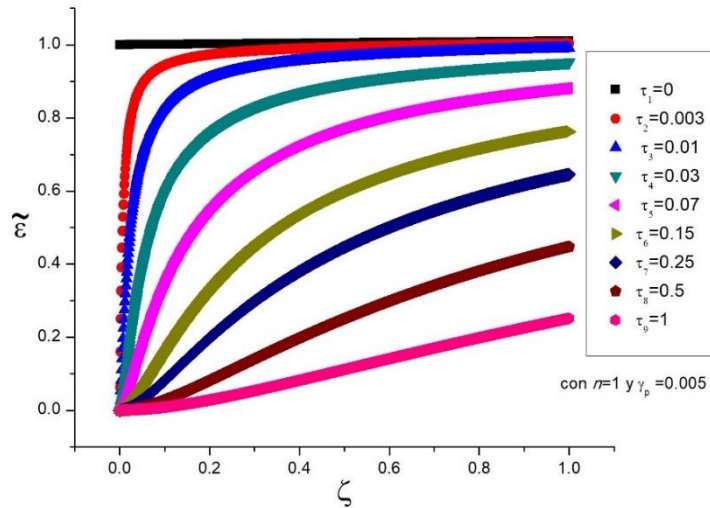


Figura 9 Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=1$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

En las Figuras 10 y 11 se puede apreciar los campos de presión en la espuma manteniendo los mismos parámetros de las figuras anteriores. Como se puede apreciar, hay una región muy próxima a la parte superior de la espuma, del orden de  $\zeta \sim 0.1$ , donde existen cambios muy bruscos de la presión y fuera de esta zona la presión se estabiliza, manteniéndose prácticamente uniforme. Como puede apreciarse a medida que avanza el tiempo la presión del líquido tiene una tendencia a tener el mismo valor que tiene la presión del gas (véase Ec. (3.45)).

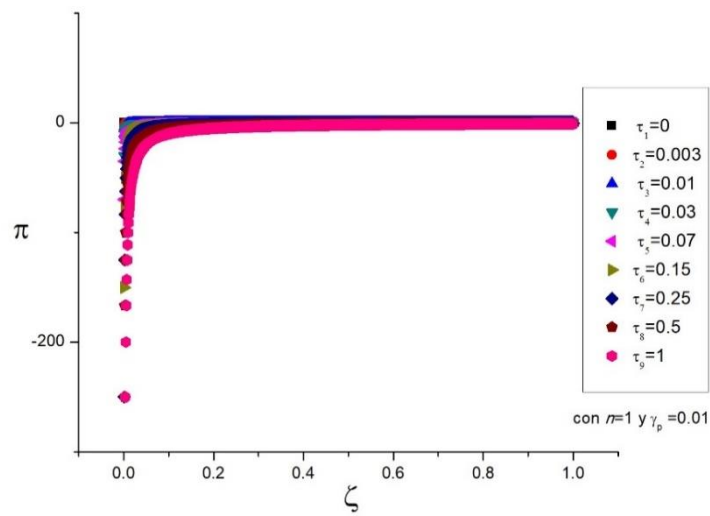


Figura 10 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=1$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Este aspecto físico es un tanto controversial ya que es probable que la geometría de la espuma haya cambiado, situación no prevista en el presente modelo.

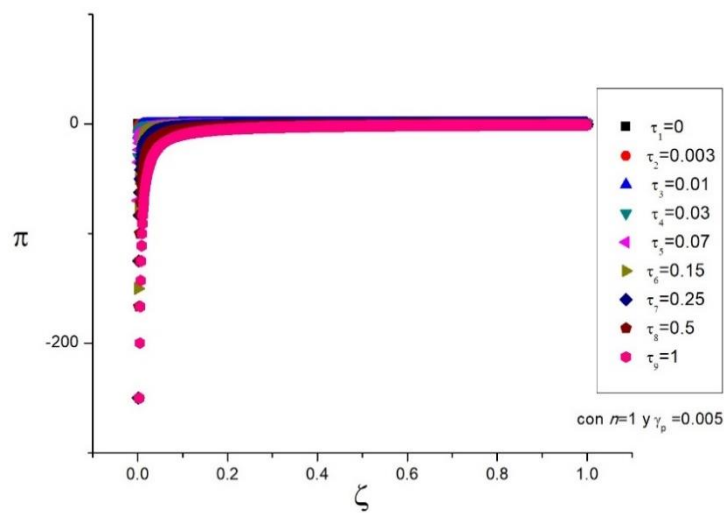


Figura 11 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=1$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

En las figuras 12 y 13 se muestra la distribución o perfil de la velocidad como función de la coordenada longitudinal  $\zeta$  para los mismos parámetros adimensionales propuestos.

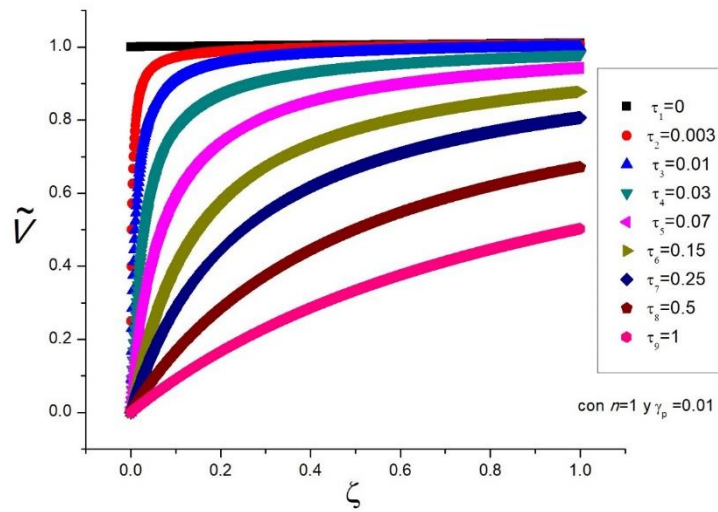


Figura 12 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=1$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Como puede apreciarse claramente la velocidad disminuye conforme se incrementa el tiempo para todas las posiciones o bien para un instante de tiempo dado, la velocidad siempre se incrementa conforme se incrementa la posición. Es importante mencionar que este comportamiento se repite sistemáticamente en las demás figuras como veremos más adelante. Como se puede apreciar de la Ec. (3.47) el efecto de la presión no se transmite al campo de velocidad ya que el parámetro  $\beta$  en este trabajo se consideró muy grande y por ende, el primer término de la Ec. (3.46) es despreciable. Sin embargo, para regiones muy cercanas a la parte superior de la espuma los gradientes de presión son muy importantes, pudiendo hacer que este término contribuya para la determinación de la velocidad. Sin embargo, este aspecto no fue tomado en cuenta en el presente trabajo.

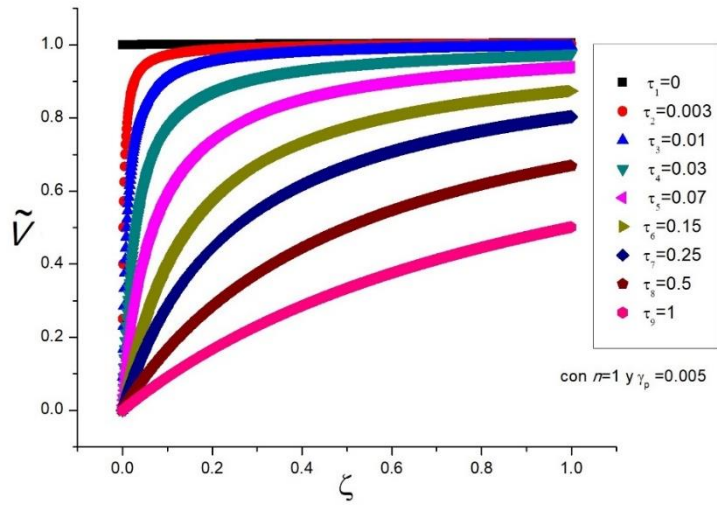


Figura 13 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=1$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Tal y como se menciona al principio de esta sección, las siguientes figuras son producto de una variación del parámetro  $n$  tomando valores menores a la unidad. La primera variación se hace con  $n=0.8$ .

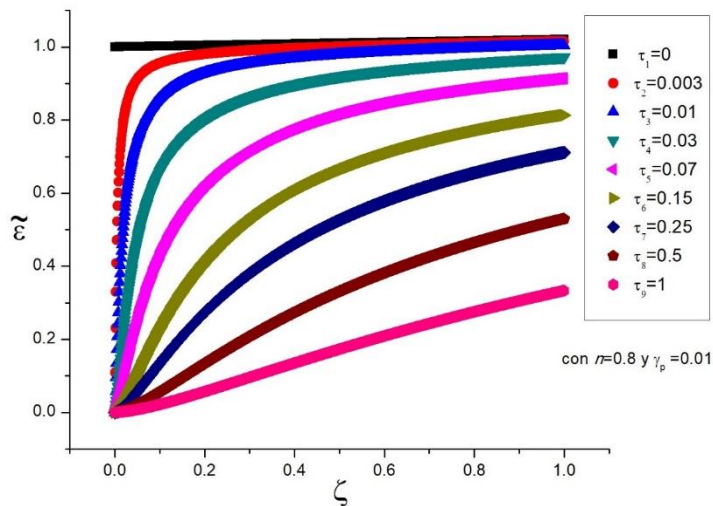


Figura 14 Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.8$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Del mismo modo que en el caso  $n=1$  la permeabilidad disminuye conforme transcurre el paso del tiempo y la forma del perfil se mantiene prácticamente igual, volviendo a manifestar ese cambio en el comportamiento de la permeabilidad; antes y después de cierto tiempo característico.

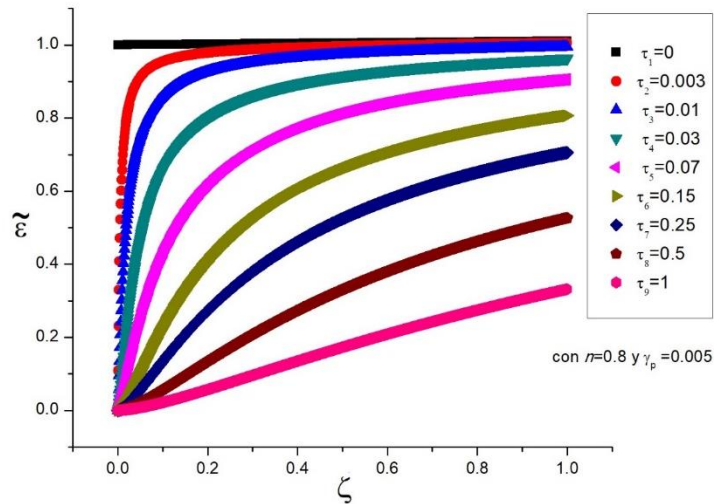


Figura 15 Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.8$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

El caso de la presión no es la excepción y mantiene las mismas características del caso  $n=1$  con una región en la parte superior de la espuma que manifiesta cambios muy bruscos de la presión, una zona estable y la tendencia a igualar la presión del gas.

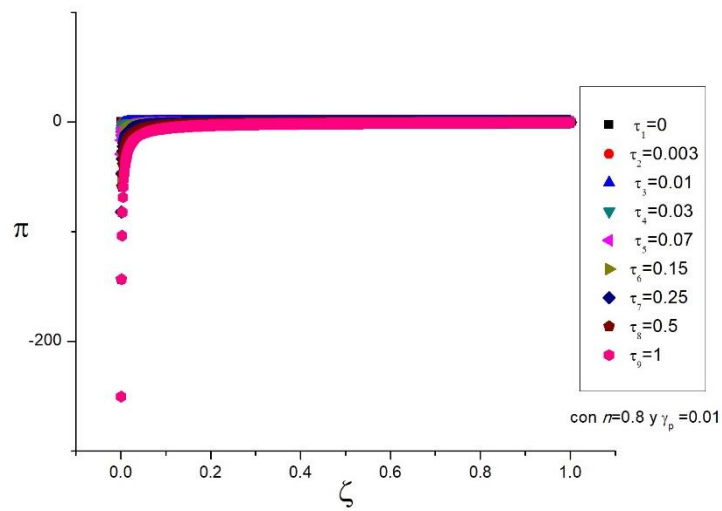


Figura 16 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.8$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

La variación de  $\gamma_p$  aunque es un parámetro que está ligado fuertemente a presión, no parece manifestar ningún efecto en la física del drenado libre.

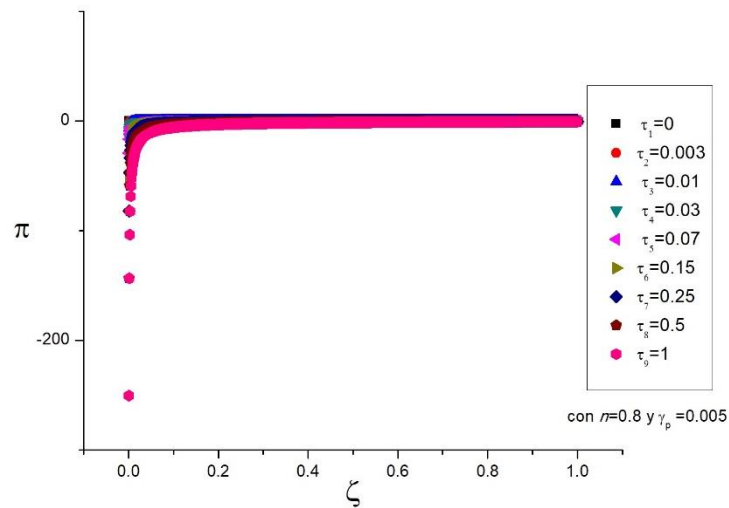


Figura 17 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.8$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Las figuras 18 y 19 corresponden al perfil de velocidades con las variaciones indicadas y tal como se advirtió en el caso de  $n=1$ , observamos un comportamiento prácticamente igual al del primer caso.



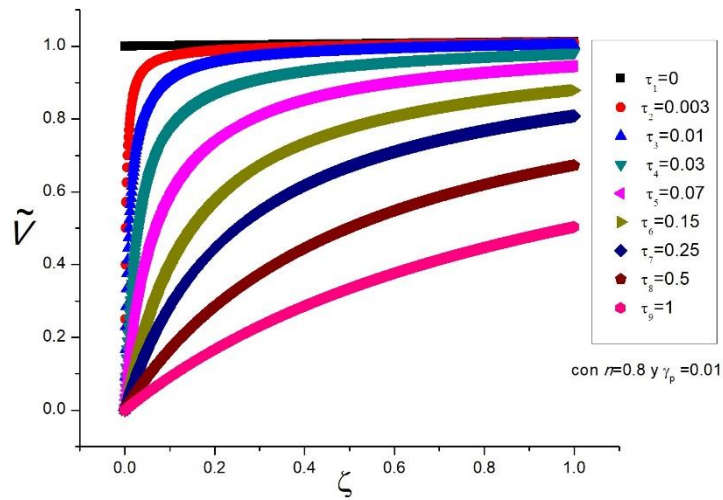


Figura 18 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.8$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Debido a que el efecto de la presión en la ecuación de la velocidad quedo anulado, es lógico suponer que  $\gamma_p$  no tendrá ninguna influencia en el comportamiento de la velocidad.

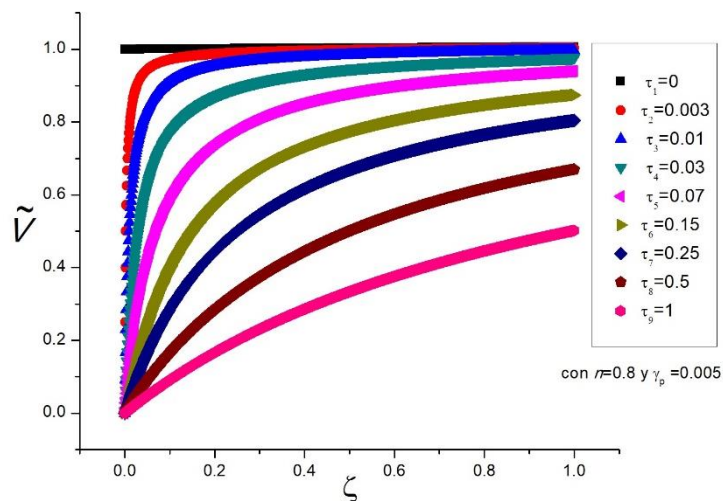


Figura 19 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.8$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Las siguientes figuras corresponden al caso donde  $n= 0.6$ , donde tal y como se podrá observar no se notan cambios significativos en ningún parámetro, pero es a partir de este conjunto que es posible hacer algunas afirmaciones a priori del comportamiento para valores de  $n$  más pequeños.

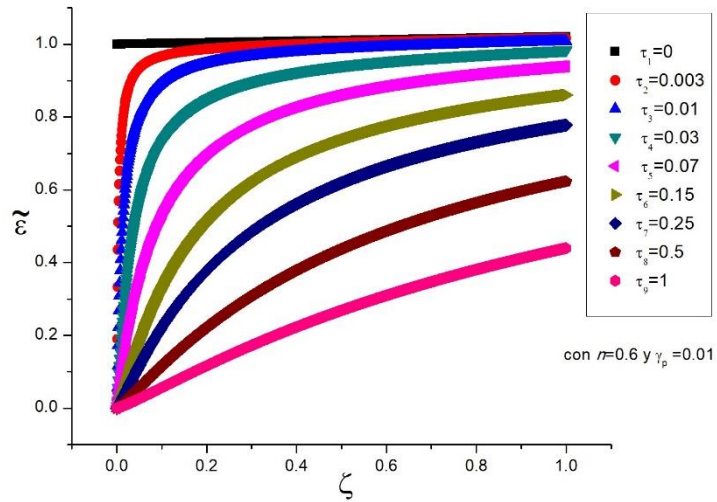


Figura 20 Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.6$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Tanto en la figura 20 como en la figura 21 se puede observar que se mantienen las características antes destacadas del drenado libre.

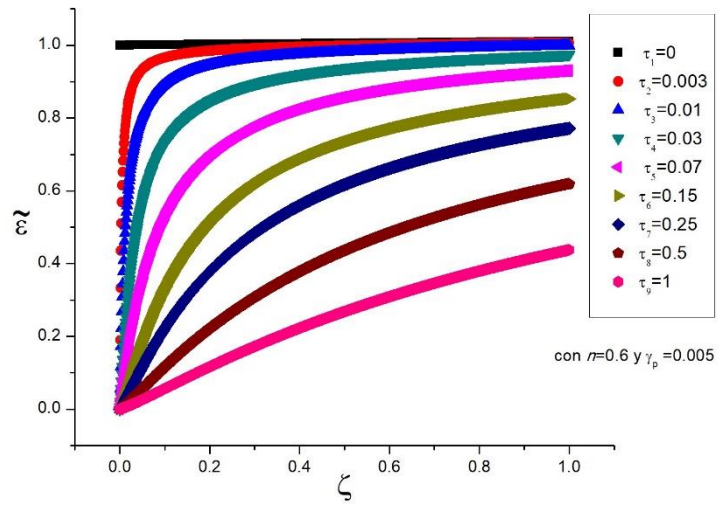


Figura 21 Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.6$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

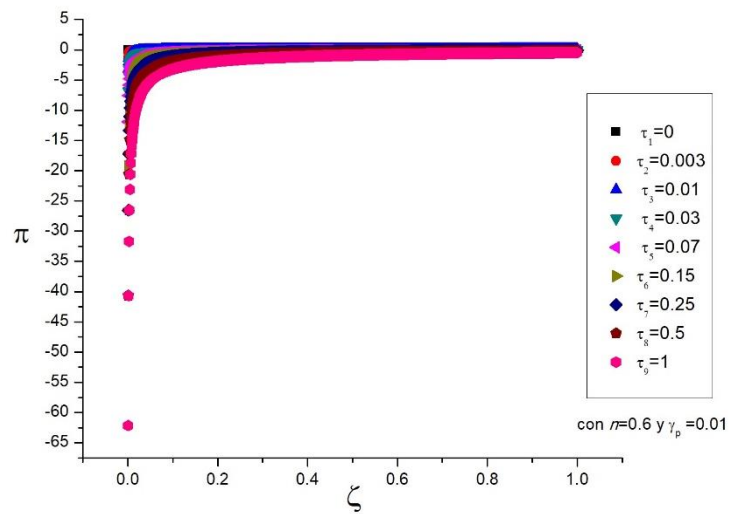


Figura 22 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.6$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Las figuras 22 y 23 que se refieren a la presión manifiestan una variación en rango de presiones, sin embargo, el perfil mantiene su forma y  $\gamma_p$  sigue sin manifestar efectos.

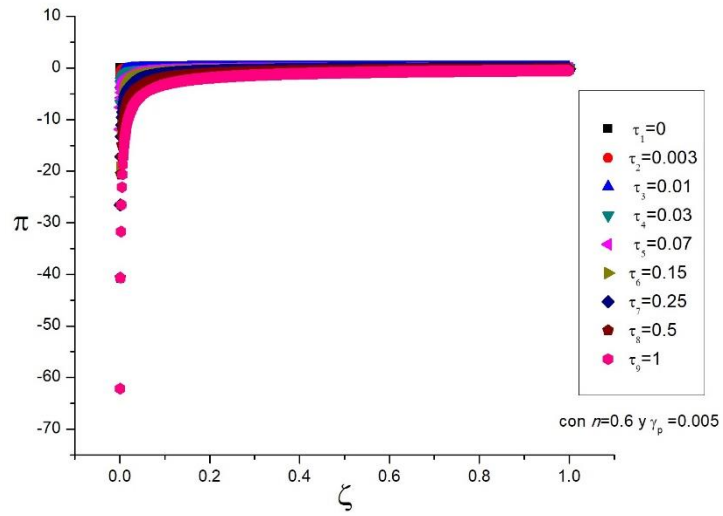


Figura 23 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.6$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

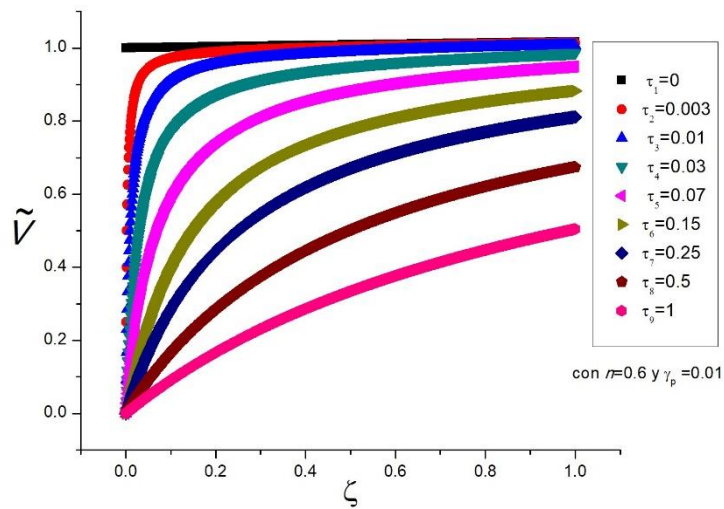


Figura 24 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.6$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

En las figuras 24 y 25 se puede observar que la velocidad ha resultado el paramento más resistente a manifestar algún tipo de cambio.

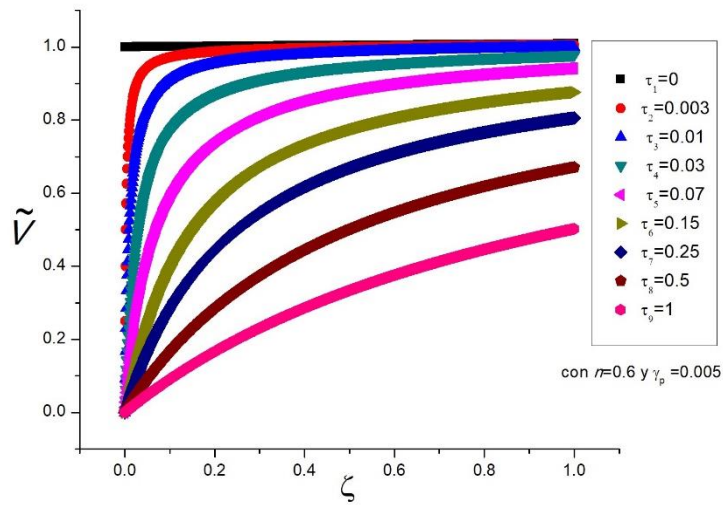


Figura 25 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.6$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Las siguientes figuras corresponden a valores de  $n=0.4$ ; donde es posible al ver las figuras 26 y 27 que corresponden a  $\tilde{\epsilon}$ , pensar que se ha manifestado un cambio en el perfil sin embargo, es importante mencionar que dado que la función que modela dicho parámetro no sufre ningún cambio, el hecho de observar diferencias respecto a las figuras anteriores puede deberse simplemente a que hace falta graficar un par de series mas y entonces aparecerían las formas que faltan.

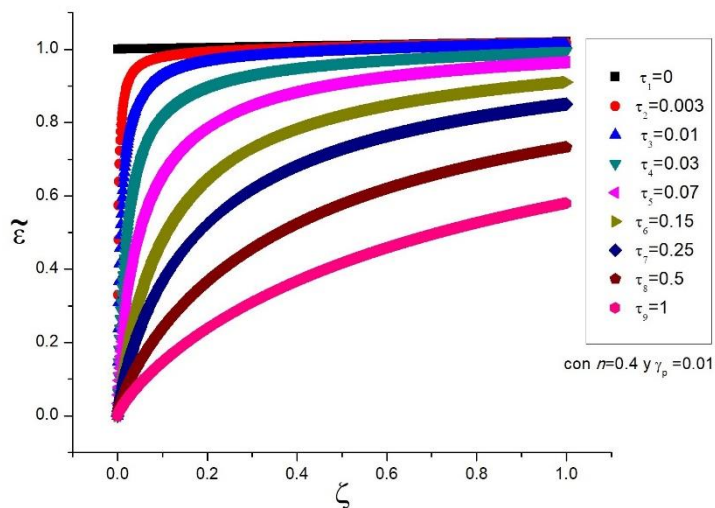


Figura 26 Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.4$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

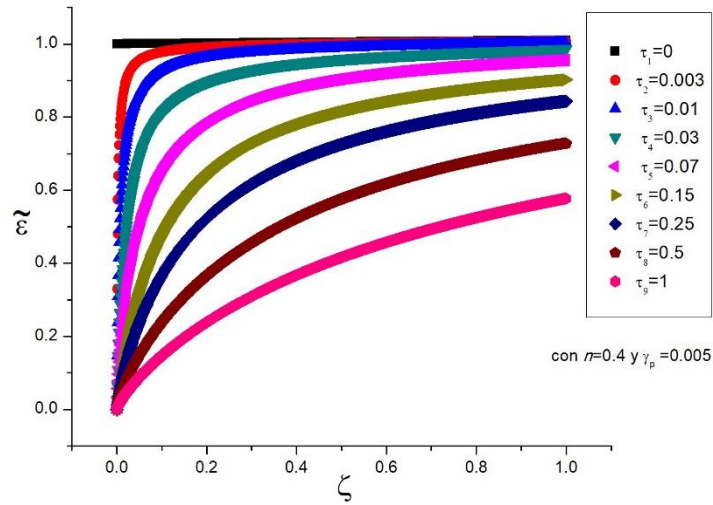


Figura 27 Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.4$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

La presión, en las figuras 28 y 29 sigue reduciendo su rango, pero una vez hecho el análisis en las figuras de permeabilidad, también es posible suponer que estas reducciones pueden deberse simplemente a que están haciendo falta las series que corresponden a cambios mas bruscos de presión.

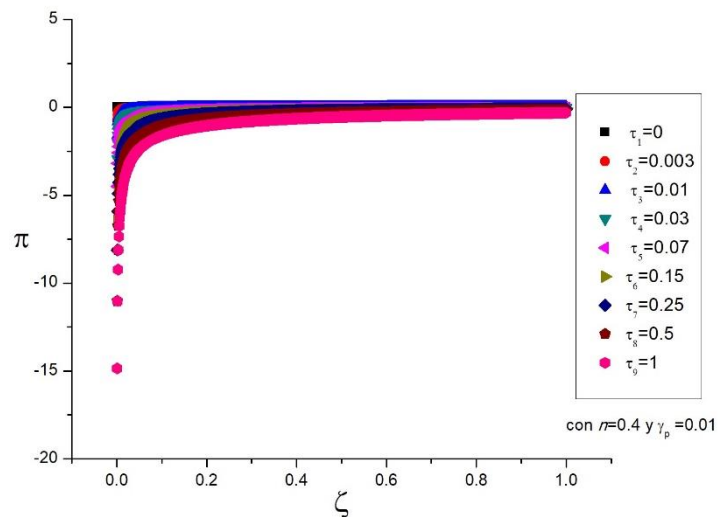


Figura 28 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.4$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

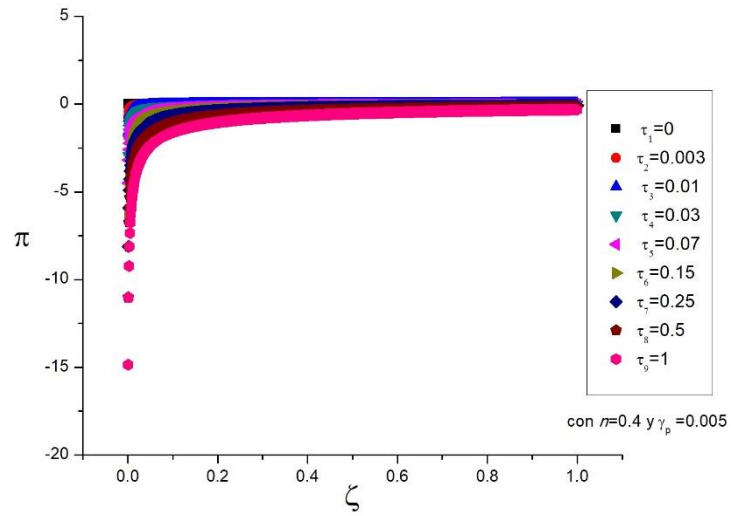


Figura 29 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.4$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Las figuras 30 y 31 referentes a la velocidad se mantienen sin manifestar ningún tipo de cambio, ni siquiera aparente.

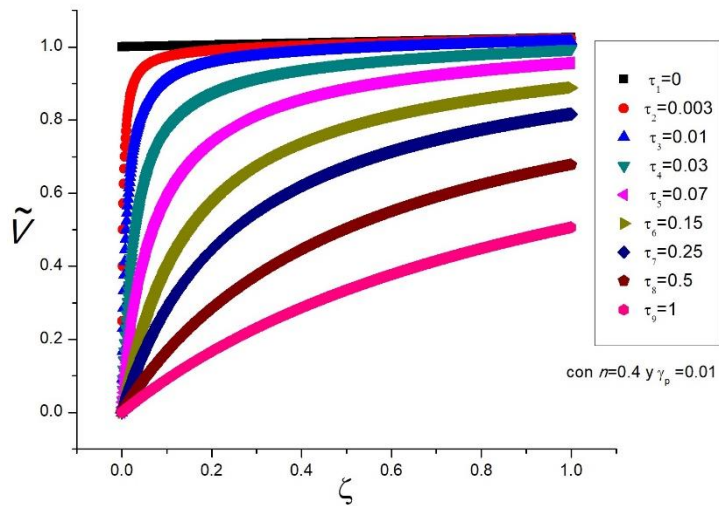


Figura 30 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.4$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

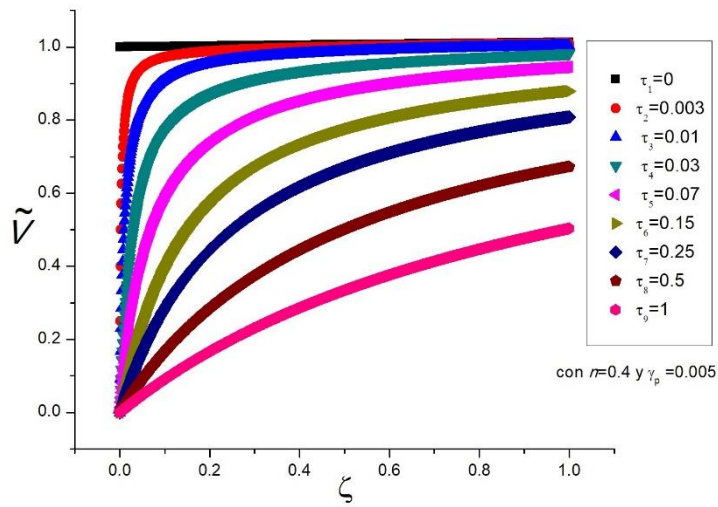


Figura 31 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.4$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Tanto Con el afán de tener un panorama completo se han incluido figuras donde  $n=0.2$  aún cuando no suele usarse este valor para los análisis en el modelo de ley de potencia.

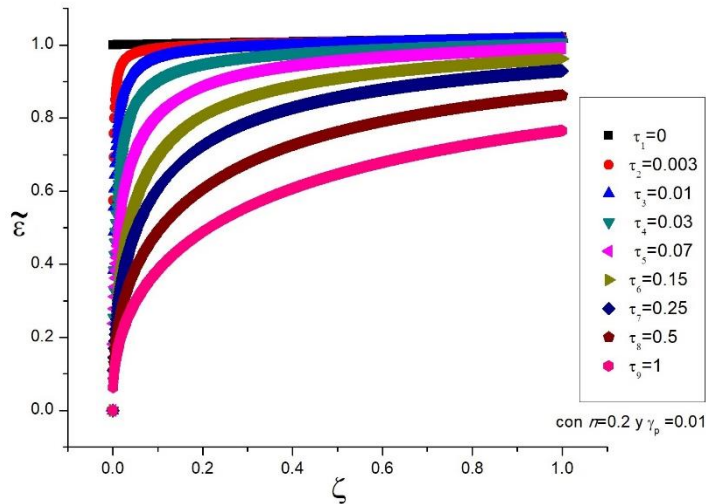


Figura 32 Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.2$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .



Igual que para el caso donde  $n=0.4$ , parece existir una modificación en los perfiles de permeabilidad, sin embargo, como ya se comentó en dicho caso, las variaciones no son significativas.

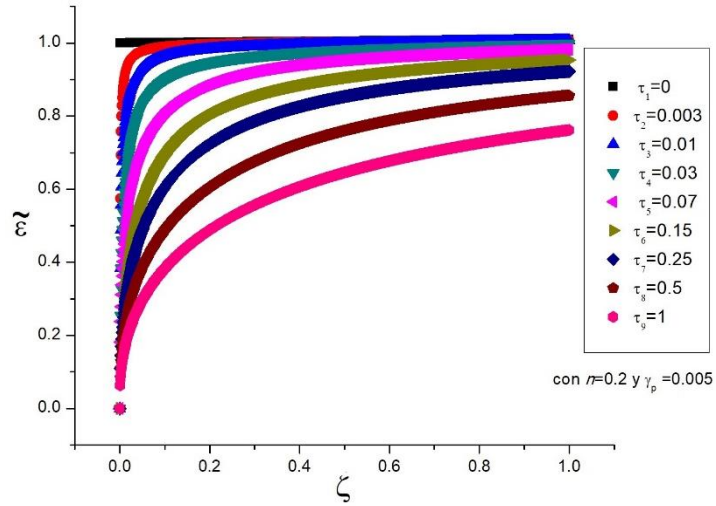


Figura 33 Variación de la permeabilidad,  $\tilde{\epsilon}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.2$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Las figuras 34 y 35 referentes a la presión manifiestan el mismo comportamiento y el parámetro  $\gamma_p$  demostró no producir ningún efecto sobre la presión, situación que parece ser característica del drenado libre.

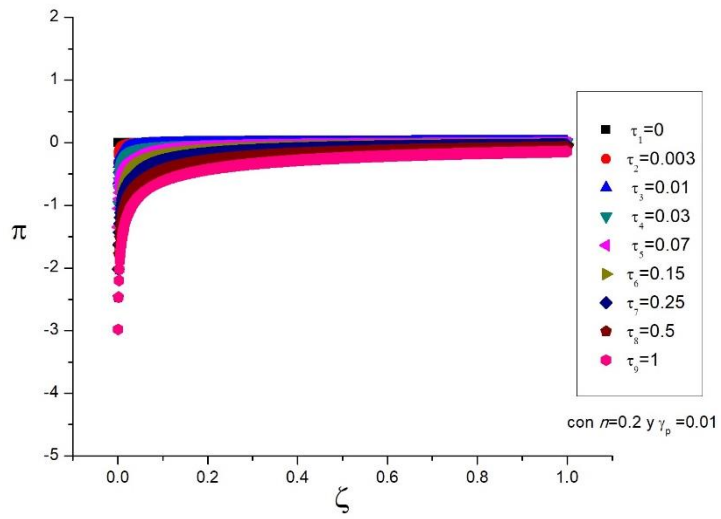


Figura 34 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.2$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

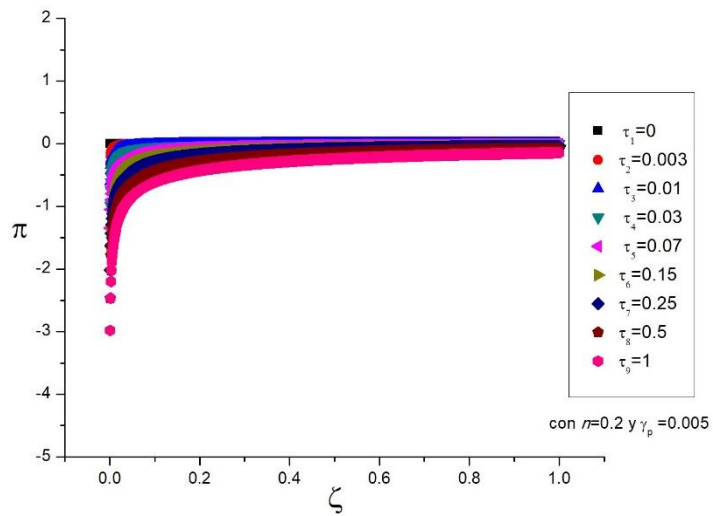


Figura 35 Variación de la presión adimensional,  $\pi$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.2$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

Por ultimo se incluye en las figuras 36 y 37 el comportamiento de la velocidad, parámetro que durante todas las variaciones de  $n$ , no mostró ningún tipo de cambio o sensibilidad a nada.

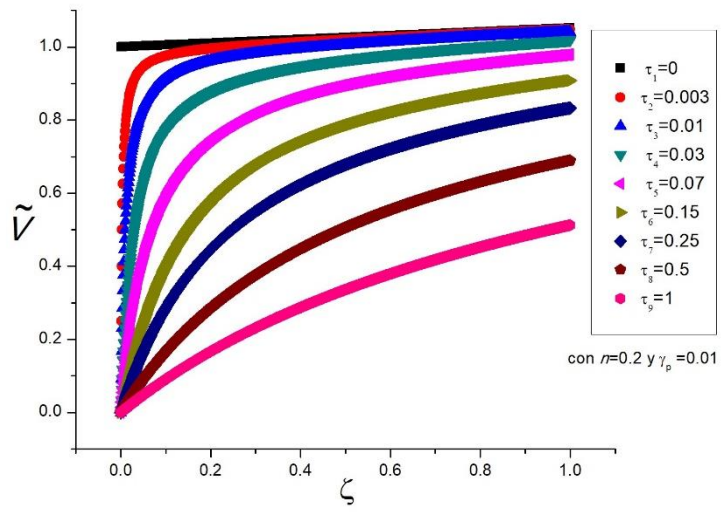


Figura 36 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.2$ ,  $\gamma_p = 0.01$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

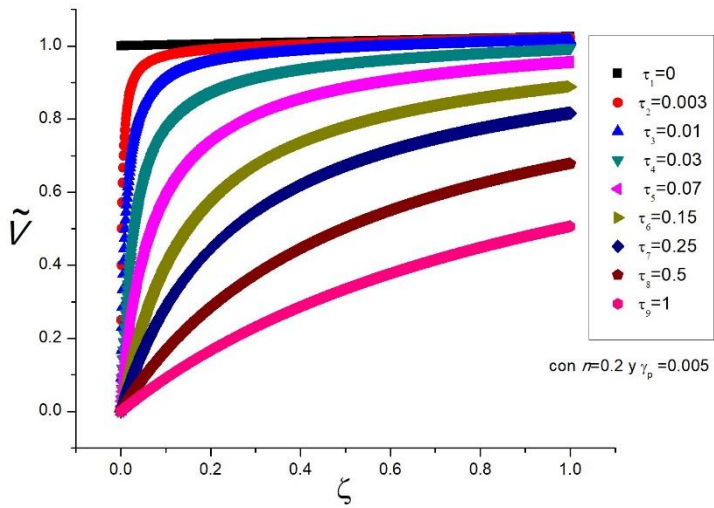


Figura 37 Variación de la velocidad adimensional,  $\tilde{v}$ , contra la coordenada adimensional  $\zeta$  con  $n=0.2$ ,  $\gamma_p = 0.005$  y valores diferentes del tiempo adimensional  $\tau$ .

## CONCLUSIONES

El problema original de la dinámica del drenado de una espuma se pueden distinguir dos regiones, una región externa donde los efectos difusivos, no son principales, lo que conduce a una formulación hiperbólica de las ecuaciones de movimiento de las cuales se puede obtener con relativa facilidad una solución analítica, situación que ha sido estudiada a lo largo de todo este trabajo y se verifica con el caso de  $n=1$ . La segunda región se encuentra próxima al fondo de la espuma, donde a partir de otros experimentos e investigaciones, se ha determinado que el valor de permeabilidad colapsa en el tiempo sobre un valor de referencia, antes de pasar a la zona de transición entre la espuma húmeda, dicha región comprende un espacio muy pequeño de la espuma y es donde el modelo propuesto pierde efectividad; a partir de esto se puede concluir que es en esta región donde los efectos difusivos recuperan un papel principal y requieren un análisis particular.

La descripción matemática permite determinar los perfiles de permeabilidad, presión y velocidad, tomando en consideración que las fuerzas gravitacionales son dominantes respecto de las fuerzas de tensión superficial. Este punto es especialmente relevante ya que con la consideración de  $\beta \gg 1$  permite desprestigiar en primera aproximación la presencia de otras fuerzas moleculares, particularmente las fuerzas de Vander Walls, estas últimas podrían ser en el caso opuesto  $\beta \ll 1$  tan relevantes como las fuerzas de tensión superficial. Un segundo parámetro es  $\gamma_p$  que como se ha visto, no produce ningún efecto en el drenado libre, sin embargo, esto podía anticiparse debido a que en el drenado libre no se aplica ningún tipo de sobrepresión, es posible también hacer una predicción que proponga una sensibilidad mayor en el caso del modelo de drenado forzado.

Una conclusión muy importante en este trabajo gira alrededor del efecto que muestra el parámetro reológico  $n$ , y es que se ha determinado que para la zona donde el modelo muestra validez, el parámetro parece mostrar un efecto nulo. Posiblemente para la región cercana al fondo el comportamiento del parámetro sea diferente, esta posibilidad puede ser explorada en investigaciones posteriores.

Otra alternativa que se deriva del presente trabajo es extender el análisis del drenado forzado para los casos de drenado forzado y pulsado a partir de valores iniciales adecuados a las condiciones de cada tipo de drenado y analizar el alcance que pudiera tener dicho modelo de drenado.

## BIBLIOGRAFÍA

- Ashok Bhakta, E. R. (1997). *Decay of standing foams: drainage, coalescence and collapse*. Elsevier Inc. .
- Bikerman, J. (1973). *Foams*. New York: Springer.
- Dekker, M. ( 1996.). *Foams: Theory, Measurements and Applications*,. New York,: G. Narsimhan, E. Ruckenstein, en: R. K. Prudhomme, S. A. Khan.
- I. Cantat, S. C.-A.-J. ( 2013). *Foams: Structure and Dynamics*. New York: Oxford University Press.
- J. F. Sadoc, N. R. (1999). *Foams and Emulsions*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Julia C. Muccino, W. G. (1998). *TOWARD AND IMPROVED UNDERSTANDING OF MULTIPHASE FLOW IN POROUS MEDIA*.
- Krainyk, A. M. (1999). *FOAM MICROMECHANICS (Structure and Rheology of Foams, Emulsions, and Cellular Solids)*.
- Larson, R. G. (1981). *Derivation of Generalized Darcy Equations for Creeping Flow in Porous Media* . Minneapolis: Department of Chemical Engineering and Materials Science, University of Minnesota.
- Morrison, F. A. (2001). *Understanding rheology*. New York: Oxford University Press .
- Stephan A. Koehler, H. A. (1998). *Dinamics of Foam Drainage*. The American Physical Society.
- Stephan A. Koehler, S. H. ( 2000). *A Generalized View of Foam Dreainege: Experimental and Theory*. American Chemical Society.
- Stephan A. Koehler, S. H. (1999). Foam Drainage: Experiments and a New Model. En D. B. Waire, *Procedings of the international Workshop on Foams and Films*, (pág. 49). Bremen. Germany: MIT-Verlag.
- Sullivan, R. M. (2007). *A general tetrakaidecahedron model for open-celled foams*.
- Tadros, T. F. (2005). *Applied Surfactants: Principles and Applications*. Weinheim,: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA .
- Wang Chaoyang, T. C. (1990). *MIXED CONVECTION OF NON- NEWTONIANIAN FLUIDS FROM A VERTICAL PLATE EMBEDDED IN A POROUS MEDIUM*. New York: Allerton Press, INC.
- Zebin Wang, G. N. ( 2006). , *Model for Plateau border drainage of power-law fluid with mobile interface and its application to foam drainage*. Elsevier Inc.