



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA DE CASCARONES NEGROS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

BRANDON ADRIÁN HERNÁNDEZ JUÁREZ

TUTOR:

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Hernández

Juárez

Brandon Adrián

(55) 53 70 70 96

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

311167577

2. Datos del tutor

Dr.

Hernando

Quevedo

Cubillos

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Darío

Núñez

Zúñiga

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Rodolfo Patricio

Martínez

Romero

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Francisco

Nettel

Rueda

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Alberto

Sánchez

Moreno

7. Datos del trabajo escrito

Dinámica de cascarones negros

59 p

2019

A mi familia

Agradecimientos

Para empezar, quiero agradecerle a mi padre Perfecto Hernández, a quien le debo toda la base de mis principios y cuya experiencia nunca dudó en compartirme. A mi madre Beatríz Juárez, que con su infinito amor me hizo sentir seguro a cada paso. Y a mis hermanos Karen y Bryan, pilares de mi confianza y a los que espero corresponderles de la misma manera siempre.

Le agradezco especialmente al Dr. Hernando Quevedo por su tiempo, paciencia y conocimiento. Su inestimable ayuda fue clave en la realización de este trabajo y yo no podría estar mas satisfecho con el resultado.

Muchas gracias a todas esas personas que por algún u otro motivo me motivaron y ayudaron a llegar a este punto. En particular quiero agradecer la invaluable e incondicional amistad de César, amigo desde tiempos arcaicos y fuente inagotable de optimismo; también a mis amigas Rosario y Liz, a las que les debo grandes momentos de mi vida. Aprovecho para agradecer con sobremanera la amistad brindada por aquellas personas que me acompañaron durante la carrera, de verdad los considero grandes amigos: Johas, Hodek, Moises, Luis, Toño, Rogelio, sin duda la mejor compañía que pude y quizás podré tener. Por último doy un reconocimiento especial a mi demás familia repartida entre Veracruz e Hidalgo la cual siempre estuvo al pendiente de mi.

Finalmente, término esta ola de agradecimientos expresando mi profunda gratitud por los sinodales que se tomaron el tiempo de leer mi trabajo, así como también en general por las instituciones de la UNAM e ICN que me dieron tanto por tan poco.

Resumen

En el presente trabajo de tesis se busca en primera instancia utilizar el formalismo de juntas para describir el colapso gravitacional de un objeto compacto cuya masa se encuentra totalmente distribuida en su superficie, en otras palabras, un cascarón de materia. El sistema gravitacional del cascarón se describe por medio de las ecuaciones dinámicas obtenidas a partir de considerar que la métrica en el exterior está dada por Reissner-Nordström y la métrica en el interior se describe por Minkowski, a fin de calcular el radio de formación del horizonte de eventos. Para ello empezaremos por hacer un análisis de las hipersuperficies, desde su descripción hasta los campos tensoriales que se pueden definir sobre estas con el propósito de obtener las ecuaciones de Gauss-Codazzi y consecuentemente una versión proyectada de las ecuaciones de Einstein. Así podremos dar una correcta descripción del cascarón de materia que será utilizado como superficie de junta. Posteriormente examinaremos el formalismo de juntas de Israel con el objetivo de encontrar las condiciones de unión adecuadas para dicha hipersuperficie, obteniendo una expresión analítica para el tensor de energía-momento superficial del cascarón. A continuación utilizaremos el formalismo primero para un colapso de tipo Oppenheimer-Snyder y después a un cascarón de materia como el descrito en un principio. Una vez obtenidas las ecuaciones dinámicas seguiremos el colapso del cascarón hasta que se convierta en una hipersuperficie nula. Esta hipersuperficie será el horizonte de eventos del cascarón negro y de la cual obtendremos su radio. Utilizando el escalar de Kretschmann estudiaremos las singularidades de curvatura de la métrica que describe al cascarón a fin de corroborar la formación de un agujero negro a partir de las condiciones de este sistema.

Para continuar con el análisis del cascarón negro haremos una breve revisión de las leyes mecánicas de los agujeros negros, así como también de la temperatura y entropía de Hawking y Bekenstein respectivamente, que nos permitirá estudiar la termodinámica de los mismos. De estas leyes obtendremos las siguientes propiedades termodinámicas para el cascarón negro: entropía S , temperatura T y calor específico C . Finalmente usando el formalismo de la Geometrotermodinámica calcularemos la métrica termodinámica asociada al cascarón negro, estudiaremos su curvatura y compararemos los resultados con los obtenidos con la termodinámica estándar de los agujeros negros.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	IV
1 Introducción	1
2 Formalismo de hipersuperficies	5
2.1 La métrica inducida	6
2.2 Campos vectoriales tangentes	6
2.2.1 Derivada covariante intrínseca	7
2.3 Ecuaciones de Gauss-Codazzi	9
2.4 El tensor de Einstein	11
2.4.1 El escalar de Ricci	11
3 El formalismo de junturas	13
3.1 Problema de valores iniciales (constricciones)	13
3.2 Condiciones de juntura	14
3.2.1 Primera condición de juntura	15
3.2.2 El tensor de energía-momento superficial	16
3.2.3 Segunda condición de juntura	18
4 Colapso gravitacional	20
4.1 Colapso de Oppenheimer-Snyder	20
4.2 Colapso de un cascarón delgado de polvo cargado	23
4.3 El radio del horizonte de eventos	28
4.4 Singularidades de la métrica	30
5 Termodinámica de agujeros negros	32
5.1 Ley cero de la mecánica de los agujeros negros	32
5.2 Primera ley de la mecánica de los agujeros negros	33

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VI
5.3 Segunda ley de la mecánica de los agujeros negros	34
5.4 La entropía de Bekenstein-Hawking	34
5.5 Propiedades termodinámicas del cascarón negro	35
6 Geometrotermodinámica de cascarones	38
6.1 Fundamentos de la GTD	39
6.1.1 Estructura de contacto	39
6.1.2 La invariancia de Legendre	40
6.1.3 Estructura métrica	41
6.2 GTD de agujeros negros	42
6.3 Cascarón negro de polvo cargado	43
7 Conclusiones	46
A Cálculo de las componentes de la curvatura extrínseca	49
B Cálculo del los escalares de curvatura	53
Bibliografía	57

Capítulo 1

Introducción

Hace casi 400 años las leyes de Newton mostraron la universalidad de la gravedad: cada cuerpo en el universo atrae cada otro con una fuerza que es proporcional a la masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Asimismo, se asumía que la luz estaba hecha de corpúsculos (partículas) y se sabía que viajaba a una velocidad finita (Roemer 1676) [11]. Fue natural entonces para John Michell en 1783 expandir dicha universalidad combinando la descripción corpuscular con la gravitación de Newton. Si los corpúsculos de luz son afectados en la misma medida que otro tipo de partículas, debe haber una circunferencia crítica para un cuerpo en el cual la velocidad de escape de una partícula sea la velocidad de la luz [28]. Desde ese punto de vista los rayos de luz que salieran de un cuerpo con un radio ligeramente menor volverían a caer en su superficie, es decir, a una cierta distancia esos objetos serían totalmente negros.

En 1915 Albert Einstein presentó las leyes de la Relatividad General, una nueva y mejorada teoría de la gravitación. Y tan solo algunos meses después Karl Schwarzschild obtuvo su famosa métrica, representando el campo gravitacional de un objeto masivo esféricamente simétrico. Fue hasta entonces que con un mejor entendimiento de la gravedad y de la luz que, indirectamente la idea de las estrellas oscuras recibió mayor atención a través de algo llamado singularidades de Schwarzschild. Eso es porque la métrica de Schwarzschild que explícitamente tiene la siguiente forma [26]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (1.1)$$

en donde

$$d\Omega = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2, \quad (1.2)$$

deja en evidencia dos valores singulares, uno en $r = 0$ propio de la geometría esférica y uno más interesante en $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. La naturaleza física o no física de dicha singularidad de Schwarzschild fue tema de debate

durante los próximos 40, años e incluso el propio Einstein se pronunció al respecto en contra basado en cálculos propios [6] que mostraban la imposibilidad de comprimir un objeto por debajo de la circunferencia crítica que establecía la métrica. Si bien los cálculos de Einstein eran correctos no incluía la posibilidad de implosión, la idea contra las singularidades de Schwarzschild recaía en encontrar algún tipo de fuerza que balanceara la fuerza de gravedad.

En ese mismo año Robert Oppenheimer y Hartland Snyder mostraron que una estrella idealizada lo suficientemente masiva que ha agotado todas sus posibles fuentes de energía termonuclear colapsará. Establecían un límite de implosión para la estrella: "Si la fisión debido a la rotación, la radiación de la masa o la liberación de masa por radiación reducían la masa de la estrella al orden del Sol, esta contracción continuará indefinidamente"[21]. Si bien este trabajo fue visto con escepticismo en aquella época, años más tarde despertó el interés de varios físicos que con el avance tecnológico e ideológico obtenido durante la segunda guerra mundial se habían convencido de la existencia física de las singularidades de Schwarzschild, ahora llamadas agujeros negros. Uno de ellos fue Werner Israel, quien abordó el problema del colapso gravitacional usando hipersuperficies y formulando condiciones de juntura adecuadas en las superficies de discontinuidad [13].

La idea de Israel consistía en asumir que la estrella colapsando era un cascarón de materia y que el espacio-tiempo estaba dividido en tres regiones: el exterior de la estrella, el interior de esta y su superficie. Dada una métrica $g_{\mu\nu}$ para el campo exterior vacío y el interior, el problema entonces era unir de manera apropiada ambos campos en la superficie considerando que esta tiene cierta densidad. Para hacerlo se basó mayormente en el trabajo realizado anteriormente por Cornelius Lanczos en el tema de hipersuperficies singulares [16].

Posteriormente, hacia los años 70's se vivió la época dorada del estudio de los agujeros negros. Impulsada por John Wheeler, Werner Israel, Stephen Hawking, Brandon Carter, entre otros, se fueron desarrollando un análisis completo de estos objetos en base a la geometría diferencial, lo que derivó en resultados importantes a la vez que sorprendentes como el conocido "Teorema de no pelo" que postula que todas las soluciones de agujero negro de las ecuaciones de Einstein-Maxwell de gravitación y electromagnetismo en relatividad general pueden ser completamente caracterizadas por solo tres parámetros clásicos observables de manera externa: masa M , su carga Q y momento angular J [17], mismo que fue probado por Israel para los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordström [14] [15] y por Brandon para el agujero negro de Kerr [4]. Este resultado permitió a su vez describir la estructura de los agujeros negros a través de una relación variacional entre el área del horizonte de eventos y los parámetros externos antes mencionados. Por su parte Hawking demostró que el área de la fusión de dos agujeros negros era siempre mayor que el área individual de los agujeros negros que lo formaron [10] lo que en conjunto con los resultados anterio-

res permitió establecer las leyes mecánicas de los agujeros negros [1]. En años siguientes Hawking probó la existencia de un tipo de radiación producido en el horizonte de eventos debido a efectos plenamente cuánticos [9], fue entonces que se notó el increíble parecido de estas leyes mecánicas con las leyes de la termodinámica, lo que llevo a considerarlos como casos particulares de sistemas termodinámicos con una nueva definición para la temperatura y la entropía.

Recientemente se pensó en abordar la termodinámica asociada a un agujero negro a partir de las definiciones de Hawking y Bekenstein empleando geometría, concretamente utilizando la Geometrotermodinámica o GTD desarrollada por el profesor Hernando Quevedo Cubillos [24]. En ella, para un sistema termodinámico dado, se define una métrica termodinámica G sobre una variedad denominada **espacio fase termodinámico** τ con coordenadas $Z^A = \{\Phi, E^a, I^a\}$, siendo Φ el potencial termodinámico, E^a las variables extensivas e I^a las variables intensivas. Mediante el mapeo $\varphi^*(G) = g$, G induce una métrica g sobre un espacio llamado **espacio termodinámico de estados de equilibrio** ϵ cuyas coordenadas están dadas por las variables extensivas E^a . La idea central en la GTD es que la curvatura asociada a la métrica g nos da toda la información acerca de la interacción termodinámica del sistema dada por su relación fundamental $\Phi(E^a)$. La cualidad principal de la métrica termodinámica es ser invariante de Legendre, una propiedad sumamente importante pues garantiza que las características de un sistema termodinámico no dependan del potencial termodinámico utilizado para describirlo.

Dicho lo anterior, esta tesis se organiza de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 introduciremos las bases matemáticas para el estudio de las hipersuperficies. Veremos como se expresa una hipersuperficie encajada en un espacio de dimension mayor y posteriormente nos centraremos en la definición de los objetos geométricos que el espacio induce sobre esta tales como los campos tensoriales y la métrica. Esto con el fin de calcular las ecuaciones de Gauss-Codazzi y con ello proyectar las ecuaciones de Einstein sobre la hipersuperficie.
- En el capítulo 3 repasaremos la construcción de las dos condiciones de juntura de Israel necesarias para que dos regiones $(M^+, g_{\alpha\beta}^+)$ y $(M^-, g_{\alpha\beta}^-)$ divididas por una hipersuperficie Σ espacio-temporal se junten de manera suave en Σ , de tal forma que la union de $g_{\alpha\beta}^+$ y $g_{\alpha\beta}^-$ satisfagan las ecuaciones de Einstein. De dichas condiciones obtendremos una ecuación que relaciona la curvatura extrínseca de la hipersuperficie con cierto tensor superficial de materia.
- En el capítulo 4 examinaremos a modo de ejemplo el colapso de Oppenheimer-Snyder utilizando el formalismo de juntas de Israel. Posteriormente utilizaremos nuevamente el formalismo pero esta vez para un cascarón hecho de polvo, con lo cual tendremos la dinámica que describe su colapso. Después empleando la 3-velocidad del cascarón calcularemos el radio al cual este se convierte en una hipersuperficie nula y por ende coincide con el horizonte de eventos. Para terminar el capítulo

revisaremos las singularidades de curvatura correspondientes a la métrica que describe al cascarón.

- En el capítulo 5 estudiaremos las leyes mecánicas de los agujeros negros, consecuentemente daremos la definición de la temperatura de Hawking y la entropía de Bekenstein y aplicaremos los resultados al radio del horizonte de eventos que encontramos en el capítulo anterior para calcular el valor de la temperatura y el calor específico.
- En el capítulo 6 revisaremos los conceptos fundamentales de la Geometrotermodinámica y su aplicación a los agujeros negros. Utilizando la entropía del capítulo anterior como potencial termodinámico calcularemos la métrica termodinámica g invariante de Legendre y analizaremos su curvatura.
- En el capítulo 7 veremos las conclusiones obtenidas al realizar este trabajo de tesis dados por los resultados más relevantes obtenidos del análisis termodinámico y de la GTD aplicados al cascarón negro.

Capítulo 2

Formalismo de hipersuperficies

En una 4-variedad espacio-temporal, una hipersuperficie es una subvariedad 3-dimensional que puede ser temporal, espacial o nula. Una hipersuperficie Σ particular puede ser escogida poniendo una restricción sobre las coordenadas [22]:

$$\Phi(x^\alpha) = 0, \quad (2.1)$$

o bien dando ecuaciones paramétricas de la forma

$$x^\alpha = x^\alpha(y^\alpha), \quad (2.2)$$

siendo y^α (con $\alpha = 1, 2, 3$) las coordenadas intrínsecas de la hipersuperficie. Por ejemplo, una 2-esfera encajada en un espacio plano 3-dimensional se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad \text{ó} \quad & \begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \theta \sin \theta \\ z &= R \cos \theta \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Por otro lado, notemos que el vector $n_\alpha = \Phi_{,\alpha}$ es normal a la hipersuperficie ya que Φ solo cambia en la dirección ortogonal a Σ . Si la hipersuperficie es no nula, esta normal unitaria n_α se puede definir de la siguiente manera:

$$n^2 = n^\alpha n_\alpha = \epsilon \equiv \begin{cases} -1 & \text{si } \Sigma \text{ es espacial} \\ +1 & \text{si } \Sigma \text{ es temporal.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Si exigimos además que n^α siempre esté en la dirección de incremento $\Phi : n^\alpha \Phi_{,\alpha} > 0$, podemos definir n_α como:

$$n_\alpha = \frac{\epsilon \Phi_{,\alpha}}{|g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}|^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.5)$$

2.1. La métrica inducida

La métrica intrínseca de la hipersuperficie Σ se obtiene restringiendo el elemento de línea a desplazamientos solo sobre la hipersuperficie. Retomando las ecuaciones paramétricas $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$, tenemos los siguientes vectores

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}, \quad (2.6)$$

tangentes a las curvas contenidas en Σ , por lo que $e_a^\alpha n_\alpha = 0$. Para desplazamientos en Σ usamos

$$\begin{aligned} d\Sigma^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) \\ &= h_{ab} dy^a dy^b, \end{aligned} \quad (2.7)$$

siendo

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (2.8)$$

la métrica inducida o también llamada **primera forma fundamental** de la hipersuperficie Σ . Notemos que es un escalar respecto a las transformaciones $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}$ de las coordenadas del espacio-tiempo, pero un tensor bajo transformaciones $y^a \rightarrow y^{a'}$ de las coordenadas de la hipersuperficie. Asimismo podemos establecer una relación de completez para la métrica inversa de la siguiente manera

$$g^{\alpha\beta} = \epsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (2.9)$$

siendo h^{ab} métrica inducida inversa.

2.2. Campos vectoriales tangentes

Dada una hipersuperficie Σ , se pueden tener campos tensoriales $A^{\alpha\beta\dots}$ definidos solo sobre Σ y que son puramente tangentes a la hipersuperficie. Estos tensores admiten la descomposición

$$A^{\alpha\beta\dots} = A^{ab\dots} e_a^\alpha e_b^\beta \dots, \quad (2.10)$$

siendo e_a^α los vectores base en Σ . La ecuación anterior implica que $A^{\alpha\beta\dots} n_\alpha = A^{\alpha\beta\dots} n_\beta = \dots = 0$, que confirma que $A^{\alpha\beta\dots}$ es tangente a la hipersuperficie. En general, un tensor arbitrario $T^{\alpha\beta}$ siempre se puede proyectar sobre la hipersuperficie, sin embargo, solo sobrevivirán las componentes tangenciales. La cantidad que efectúa la proyección es $h^{\alpha\beta} \equiv h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta = g^{\alpha\beta} - \epsilon n^\alpha n^\beta$ por lo que $h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \dots T^{\alpha\beta\dots}$ es tangente

a la hipersuperficie. Las proyecciones

$$A_{\alpha\beta\dots}e_a^\alpha e_b^\beta\dots = A_{ab\dots} \equiv h_{am}h_{bn}\dots A^{mn\dots} \quad (2.11)$$

nos dan un 3-tensor $A^{ab\dots}$ asociado a $A^{\alpha\beta\dots}$, los índices latinos son subidos y bajados con h_{ab} y h^{ab} respectivamente. Las relaciones 2.10 y 2.11 nos muestran cómo ir y volver entre el campo tensorial $A^{\alpha\beta\dots}$ y su equivalente 3-tensorial $A^{ab\dots}$.

2.2.1. Derivada covariante intrínseca

Para un campo vectorial tangente A^α , tal que satisface

$$A^\alpha = A^a e_a^\alpha \quad A_a = A_\alpha e_a^\alpha \quad A^\alpha n_\alpha = 0 \quad (2.12)$$

se define la derivada covariante intrínseca del 3-vector A_a como la proyección de $A_{\alpha;\beta}$ sobre la hipersuperficie:

$$A_{a|b} \equiv A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (2.13)$$

Veremos a continuación que $A_{a|b}$, definida de esta forma no es más que la derivada covariante de A_a definida de la forma usual en términos de la conexión Γ_{bc}^a que es compatible con h_{ab} . Para empezar, desarrollemos la parte derecha de la ecuación 2.13:

$$\begin{aligned} A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= (A_\alpha e_a^\alpha)_{;\beta} e_b^\beta - A_\alpha e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta \\ &= A_{a;\beta} e_b^\beta - e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta A^c e_c^\gamma \\ &= \frac{\partial A_a}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} - e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta A^c \\ &= A_{a,b} - \Gamma_{cab} A^c \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde definimos

$$\Gamma_{cab} = e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta. \quad (2.15)$$

De esta manera

$$A_{a|b} = A_{a,b} - \Gamma_{cab}^c A_c \quad (2.16)$$

tiene la forma habitual de una derivada covariante. Tal y como se ha definido la conexión esperaríamos que fuera compatible con la métrica inducida, es decir, que pudiéramos expresar a Γ_{cab} como

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}(h_{ca,b} + h_{cb,a} - h_{ab,c}), \quad (2.17)$$

es decir, necesitamos probar que la conexión satisface $h_{ab|c} \equiv h_{\alpha\beta;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = 0$. Para ello basta con usar la relación de completéz para la métrica:

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma &= (g_{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta)_{;\gamma} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma \\ &= -\epsilon (n_{\alpha;\gamma} n_\beta + n_{\beta;\gamma} n_\alpha) e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

ya que $h_\alpha e_a^\alpha = 0$. La derivación intrínseca es por lo tanto la misma operación que la de tomar la derivada covariante de un 3-tensor. Las cantidades $A_{a|b} = A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ son las componentes tangenciales del vector $A_{;\beta} e_b^\beta$. Lo siguiente es ver si este vector también tiene alguna componente normal, escribiendo $A_{;\beta} e_b^\beta$ como $g_\mu^\alpha A_{;\beta} e_b^\beta$ y usando la relación de completéz tenemos

$$\begin{aligned} A_{;\beta} e_b^\beta &= (\epsilon n^\alpha n_\mu + h^{am} e_a^\alpha e_{m\mu}) A_{;\beta}^\mu e_b^\beta \\ &= \epsilon n_\mu A_{;\beta}^\mu e_b^\beta n^\alpha + h^{am} (A_{\mu;\beta} e_m^\mu e_b^\beta) e_a^\alpha, \end{aligned} \tag{2.19}$$

notemos que el segundo término es tangente a Σ y el primero ortogonal al mismo. Usando el hecho de que A^μ es ortogonal a n^μ obtenemos

$$\begin{aligned} A_{;\beta} e_b^\beta &= -\epsilon (n_{\mu;\beta} A^\mu e_b^\beta) n^\alpha + h^{am} A_{m|b} e_a^\alpha \\ &= A_{|b}^a e_a^\alpha - \epsilon A^a (n_{\mu;\beta} e_a^\mu e_b^\beta) n^\alpha. \end{aligned} \tag{2.20}$$

En este punto introduciremos el 3-tensor

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \tag{2.21}$$

llamado curvatura extrínseca o **segunda forma fundamental** de la hipersuperficie Σ . En estos términos reescribimos $A_{;\beta} e_b^\beta$ como

$$A_{;\beta} e_b^\beta = A_{|b}^a e_a^\alpha - \epsilon A^a K_{ab} n^\alpha, \tag{2.22}$$

de donde es fácil ver que $A_{|b}^a$ representa la parte puramente tangencial del campo vectorial mientras que $-\epsilon A^a K_{ab}$ representa la parte puramente normal. Así pues, la componente normal se hace cero si y solo si la curvatura extrínseca se hace cero. Por otro lado, notemos que si e_a^α se sustituye en el lugar de A^α entonces $A^c = \delta_a^c$ por lo que

$$e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta = \Gamma_{ab}^c e_c^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha \tag{2.23}$$

que es conocida como la ecuación de Gauss-Weingarten. La curvatura extrínseca es una cantidad muy importante y además un tensor simétrico, $K_{ab} = K_{ba}$. Esto se puede ver del hecho de que los vectores e_a^α y n^α son ortogonales y que los vectores base se transportan por Lie uno a lo largo del otro, i.e.,

$e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta = e_{b;\beta}^\alpha e_a^\beta$, lo que permite que:

$$\begin{aligned}
 K_{ab} &= n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \\
 &= -n_\alpha e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta \\
 &= -n_\alpha e_{b;\beta}^\alpha e_a^\beta \\
 &= n_{\alpha;\beta} e_b^\alpha e_a^\beta \\
 &= K_{ba}.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

La simetría de K_{ab} nos permite expresarlo como

$$K_{ab} = n_{(\alpha;\beta)} e_a^\alpha e_b^\beta \tag{2.25}$$

demostrando que K_{ab} esta íntimamente relacionado con la derivada de la normal del tensor métrico. Finalmente veamos la siguiente relación que nos será de utilidad en posteriores cálculos:

$$\begin{aligned}
 K &\equiv h^{ab} K_{ab} = n_{\alpha;\beta} h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta \\
 &= n_{\alpha;\beta} (g^{\alpha\beta} - \epsilon n^\alpha n^\beta) \\
 &= n_{;\alpha}^\alpha
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

en donde usamos la relación de completez de $g^{\alpha\beta}$ y el hecho de que $n^\alpha n_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2}(n^\alpha n_\alpha)_{;\beta} = 0$. Esto muestra que K es igual a la expansión de una congruencia de geodésicas que intersecan la hipersuperficie ortogonalmente. De esta forma Σ es convexa si $K > 0$ o cóncava si $K < 0$. Así pues, podemos ver que mientras h_{ab} tiene que ver con aspectos puramente intrínsecos de la geometría de una hipersuperficie, K_{ab} tiene que ver con los aspectos extrínsecos, la forma en la que la hipersuperficie está embebida en la variedad espacio-temporal. Tomando ambos aspectos esos tensores nos dan virtualmente una caracterización completa de la hipersuperficie.

2.3. Ecuaciones de Gauss-Codazzi

Una vez establecida la derivada covariante intrínseca asociada a la métrica inducida h_{ab} , podemos definir un tensor de curvatura puramente intrínseco dado por la relación

$$A_{|ab}^c - A_{|ba}^c = -R_{dab}^c A^d, \tag{2.27}$$

la cual a su vez implica que

$$R_{dab}^c = \Gamma_{db,a}^c - \Gamma_{da,b}^c + \Gamma_{ma}^c \Gamma_{db}^m - \Gamma_{mb}^c \Gamma_{da}^m. \tag{2.28}$$

La cuestión ahora es ver si este tensor de Riemann tridimensional puede expresarse en términos de $R_{\delta\alpha\beta}^{\gamma}$ (la forma cuatridimensional) evaluada sobre Σ . Comencemos con la siguiente identidad, aplicando ${}_{;\gamma}e^{\gamma}$ a la ecuación de Gauss-Weingarten

$$(e_{a;\beta}^{\alpha}e_b^{\beta})_{;\gamma}e_c^{\gamma} = (\Gamma_{ab}^de_d^{\alpha} - \epsilon K_{ab}n^{\alpha})_{;\gamma}e_c^{\gamma}, \quad (2.29)$$

desarrollamos la parte izquierda

$$\begin{aligned} \text{PI} &= (e_{a;\beta}^{\alpha}e_b^{\beta})_{;\gamma}e_c^{\gamma} \\ &= e_{a;\beta\gamma}^{\alpha}e_b^{\beta}e_c^{\gamma} + e_{a;\beta}^{\alpha}e_{b;\gamma}^{\beta}e_c^{\gamma} \\ &= e_{a;\beta\gamma}^{\alpha}e_b^{\beta}e_c^{\gamma} + e_{a;\beta}^{\alpha}(\Gamma_{bc}^de_d^{\beta} - \epsilon K_{bc}n^{\beta}) \\ &= e_{a;\beta\gamma}^{\alpha}e_b^{\beta}e_c^{\gamma} + \Gamma_{bc}^de_{ad}e_e^{\alpha} - \epsilon K_{ad}n^{\alpha} - \epsilon K_{bc}e_{a;\beta}^{\alpha}n^{\beta} \end{aligned} \quad (2.30)$$

y luego desarrollamos la parte derecha

$$\begin{aligned} \text{PD} &= (\Gamma_{ab}^de_d^{\alpha} - \epsilon K_{ab}n^{\alpha})_{;\gamma}e_c^{\gamma} \\ &= \Gamma_{ab;c}^de_d^{\alpha} + \Gamma_{ab}^de_{d;\gamma}e_c^{\gamma} - \epsilon K_{ab;c}n^{\alpha} - \epsilon K_{ab}n_{;\gamma}^{\alpha}e_c^{\gamma} \\ &= \Gamma_{ab;c}^de_d^{\alpha} + \Gamma_{ab}^de_{dc}e_e^{\alpha} - \epsilon K_{de}n^{\alpha} - \epsilon K_{ab;c}n^{\alpha} - \epsilon K_{ab}n_{;\gamma}^{\alpha}e_c^{\gamma} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ahora igualamos ambas ecuaciones y resolvemos para $e_{a;\beta\gamma}^{\alpha}e_b^{\beta}e_c^{\gamma}$. Restando una expresión similar para $e_{a;\gamma\beta}^{\alpha}e_c^{\gamma}e_b^{\beta}$ obtenemos $-R_{\mu\beta\gamma}^{\alpha}e_a^{\mu}e_b^{\beta}e_c^{\gamma}$, la cantidad en la que estamos interesados. Reacomodando los términos encontramos finalmente:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu}e_a^{\alpha}e_b^{\beta}e_c^{\gamma} = R_{abc}^me_m^{\mu} + \epsilon(K_{ab|c} - K_{ac|b})n^{\mu} + \epsilon K_{ab}n_{;\gamma}^{\mu}e_c^{\gamma} - \epsilon K_{ac}n_{;\beta}^{\mu}e_b^{\beta}, \quad (2.32)$$

proyectando a lo largo de $e_{d\mu}$ obtenemos

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}e_a^{\alpha}e_b^{\beta}e_c^{\gamma}e_d^{\delta} = R_{abcd} + \epsilon(K_{ad}K_{bc} - K_{ac}K_{bd}), \quad (2.33)$$

la relación deseada entre R_{abcd} y el tensor de Riemann completo. De manera similar, proyectando a lo largo de n_{μ} obtenemos

$$R_{\mu\beta\gamma}n^{\mu}e_a^{\alpha}e_b^{\beta}e_c^{\gamma} = K_{ab|c} - K_{ac|b}. \quad (2.34)$$

Las ecuaciones 2.33 y 2.34 son conocidas como ecuaciones de Gauss-Codazzi y nos dicen que componentes del tensor de curvatura espacio-temporal pueden ser expresadas en términos de las curvaturas intrínseca y extrínseca de una hipersuperficie. Las componentes que no aparecen son $R_{\mu\alpha\nu\beta}n^{\mu}e_a^{\alpha}n^{\nu}e_b^{\beta}$ ya que no pueden expresarse solo en términos de h_{ab} y K_{ab} y cantidades relacionadas.

2.4. El tensor de Einstein

Una vez obtenidas las ecuaciones de Gauss-Codazzi (dado que están en términos del tensor de Riemann) podemos contraerlas hasta obtener el tensor de Einstein $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$. El tensor espacio-temporal de Ricci esta dado por

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= (\epsilon n^\mu n^\nu + h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu) R_{\mu\alpha\nu\beta} \\ &= \epsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu, \end{aligned} \quad (2.35)$$

y el escalar de Ricci es

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\ &= (\epsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta) (\epsilon R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu + h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_n^\nu) \\ &= 2\epsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu e_a^\alpha n^\nu e_b^\beta + h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Sustituyendo tenemos las siguientes relaciones:

$$-2G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = {}^3R + \epsilon(K^{ab}K_{ab} - K^2) \quad (2.37)$$

$$G_{\alpha\beta} e_a^\alpha n^\beta = K_{a|b}^b - K_{,a} \quad (2.38)$$

En donde ${}^3R = h^{ab} R_{amb}^m$, es el escalar de Ricci tridimensional. Las ecuaciones 2.37 y 2.38 son muy importantes pues forman parte de las ecuaciones de campo de Einstein sobre la hipersuperficie Σ , que necesitaremos mas adelante. De la misma forma y como era de esperarse, al igual que con el tensor de Riemann completo, las componentes restantes del tensor de Einstein $G_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ no pueden ser expresadas solo en términos de h_{ab} , K_{ab} y cantidades relacionadas.

2.4.1. El escalar de Ricci

Partiendo de la ecuación 2.36

$$R = 2\epsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu e_a^\alpha n^\nu e_b^\beta + h^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta, \quad (2.39)$$

el primer término se puede simplificar usando la relación de completez y el hecho de que $R_{\mu\alpha\nu\beta}n^\mu n^\alpha n^\nu n^\beta = 0$. Reescribiendo el primer término nos queda

$$2\epsilon h^{ab} R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu e_a^\alpha n^\nu e_b^\beta = 2\epsilon(g^{\alpha\beta} + \epsilon n^\alpha n^\beta) R_{\mu\alpha\nu\beta} n^\mu n^\nu = 2\epsilon R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \quad (2.40)$$

usando la definición del tensor de Riemann

$$A_{;\alpha\beta}^\mu - A_{;\beta\alpha}^\mu = -R_{\nu\alpha\beta}^\mu A^\nu, \quad (2.41)$$

podemos reescribir la ecuación 2.40 como

$$R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -n_{;\alpha\beta}^\alpha n^\beta + n_{;\beta\alpha}^\alpha n^\beta = -(n_{;\alpha}^\alpha n^\beta)_{;\beta} + n_{;\alpha}^\alpha n_{;\beta}^\beta + (n_{;\beta}^\alpha n^\beta)_{;\alpha} - n_{;\beta}^\alpha n_{;\alpha}^\beta. \quad (2.42)$$

En el segundo término de la expresión anterior reconocemos K^2 , siendo $K = n_{;\alpha}^\alpha$ la traza de la curvatura extrínseca. El cuarto término por otro lado puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} n_{;\beta}^\alpha n_{;\alpha}^\beta &= g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu} n_{\alpha;\beta} n_{\mu;\nu} \\ &= (\epsilon n^\beta n^\mu + h^{\beta\mu})(\epsilon n^\alpha n^\nu + h^{\alpha\nu}) n_{\alpha;\beta} n_{\mu;\nu} \\ &= (\epsilon n^\beta n^\mu + h^{\beta\mu}) h^{\alpha\nu} n_{\alpha;\beta} n_{\mu;\nu} \\ &= h^{\beta\mu} h^{\alpha\nu} n_{\alpha;\beta} n_{\mu;\nu} \\ &= h^{bm} h^{an} n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta n_{\mu;\nu} e_m^\mu e_n^\nu \\ &= h^{bm} h^{an} K_{ab} K_{mn} \\ &= K_{ab} K^{ba} \\ &= K^{ab} K_{ab} \end{aligned} \quad (2.43)$$

utilizando nuevamente la relación de completez de $g^{\alpha\beta}$, la abreviación $h^{\alpha\beta} = h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta$, el hecho de que $n^\alpha n_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2}(n^\alpha n_\alpha)_{;\beta} = 0$ y la definición de la curvatura extrínseca así como su propiedad simétrica. Recordemos que toda la manipulación anterior es para el primer término de la expresión original para el escalar de Ricci 2.36. El segundo término se simplifica sustituyendo las ecuaciones de Gauss-Codazzi

$$\begin{aligned} R^{ab} h^{mn} R_{\mu\alpha\nu\beta} e_m^\mu e_a^\alpha e_n^\nu e_b^\beta &= h^{ab} h^{mn} [R_{manb} + \epsilon(K_{mb} K_{an} - K_{mn} K_{ab})] \\ &= {}^3 R + \epsilon(K^{ab} K_{ab} - K^2). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Juntando ambos resultados obtenemos el escalar de Ricci 4-dimensional evaluado sobre la hipersuperficie:

$$R = {}^3 R + \epsilon(K^2 - K^{ab} K_{ab}) + 2\epsilon(n_{;\beta}^\alpha n^\beta - n^\alpha n_{;\beta}^\beta)_{;\alpha} \quad (2.45)$$

Capítulo 3

El formalismo de juntas

3.1. Problema de valores iniciales (constricciones)

En la mecánica de Newton se necesitan los valores iniciales de la posición y la velocidad del cuerpo para tener una solución completa de las ecuaciones de movimiento. En el caso de las teorías de campo una solución completa de las ecuaciones requiere la especificación del campo y su derivada temporal a un tiempo dado, es decir, para obtener una solución completa de las ecuaciones de campo de Einstein (las cuales son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden) necesitamos especificar $g_{\alpha\beta}$ y $g_{\alpha\beta,t}$ para un tiempo t . Si bien a priori este sería el camino a seguir se abordará el problema de una forma más geométrica [22].

El problema de valores iniciales de la relatividad general empieza con la selección de una hipersuperficie Σ espacial que representa un “instante de tiempo”, esta hipersuperficie se puede escoger libremente poniendo coordenadas y^a sobre esta. Asimismo recordemos que la métrica del espacio-tiempo $g_{\alpha\beta}$ al ser evaluada sobre Σ aun tiene componentes que caracterizan desplazamientos lejos de la hipersuperficie, es decir, g_{tt} solo es una componente si Σ es una superficie de t constante; a estas componentes no se les puede dar un significado en términos solo de las propiedades geométricas de Σ . Para dar valores iniciales útiles para la métrica espacio-temporal necesitamos considerar desplazamientos solo dentro de la hipersuperficie, dicho de otra manera, los valores iniciales para $g_{\alpha\beta}$ tienen que ser las seis componentes de la métrica inducida $h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$, las sobrantes son arbitrarias ya que refleja la completa libertad de escoger las coordenadas espacio-temporales x^α .

De manera similar los valores iniciales para la derivada temporal de la métrica esta descrita por un 3-tensor que lleva la información sobre la derivada de la métrica en la dirección normal a la hipersuperficie. Ya que $K_{ab} = n_{(\alpha;\beta)} e_a^\alpha e_b^\beta$, la curvatura extrínseca parece ser la opción adecuada.

El problema de valores iniciales de la relatividad general por lo tanto consiste en especificar dos campos tensoriales simétricos, h_{ab} y K_{ab} , sobre una superficie espacial Σ . Estos tensores se pueden escoger libremente pero deben satisfacer las ecuaciones de constricción de la relatividad general. Estas están dadas por las ecuaciones 2.37 y 2.38, junto con las ecuaciones de campo de Einstein $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$:

$${}^3R + K^2 - K^{ab}K_{ab} = 16\pi T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta \equiv 16\pi\rho \quad (3.1)$$

$$K^b_{a|b} - K_{|a} = 8\pi T_{\alpha\beta}e_a^\alpha n^\beta \equiv 8\pi j_a \quad (3.2)$$

3.2. Condiciones de juntura

Una hipersuperficie Σ espacio-temporal divide a 2 regiones V^+ y V^- . En V^+ la métrica es $g_{\alpha\beta}^+$ y se expresa en coordenadas x_\pm^α . En V^- la métrica es $g_{\alpha\beta}^-$ y se expresa en coordenadas x_-^α . La cuestión a resolver es: ¿Qué condiciones necesitamos poner sobre las métricas para asegurarnos de que V^+ y V^- se juntan de manera suave en Σ , de tal forma que la unión de $g_{\alpha\beta}^+$ y $g_{\alpha\beta}^-$ forme una solución válida de las ecuaciones de campo de Einstein? Veremos a continuación que responder a esa pregunta no es sencillo, sobre todo en situaciones prácticas, pues los sistemas coordenados serán diferentes y no será posible comparar las métricas directamente. Por esa razón nos centraremos en la formulación de las condiciones de juntura que involucran solo a los 3-tensores sobre Σ ya sea de tipo espacial o temporal.

Para empezar, vamos a asumir que podemos poner las mismas coordenadas y^a en ambos lados de la hipersuperficie y vamos a escoger n^α la normal unitaria a Σ de un punto V^- a V^+ . Supondremos que hay un sistema coordenado continuo x^α , diferente de x_\pm^α , que puede ser introducido en ambos lados de la hipersuperficie. Esas coordenadas se sobreponen con x_\pm^α en un abierto en V^+ que contiene Σ y también se sobreponen con x_-^α en un abierto en V^- que contiene Σ . (Como veremos más adelante, estas coordenadas son mera conveniencia ya que no aparecerán en la formulación final de las condiciones de juntura.)

Ahora, imaginemos a Σ siendo atravesado por una congruencia de geodésicas que lo intersecan ortogonalmente. Tomemos l para denotar la distancia propia (o tiempo propio) a lo largo de las geodésicas y ajustemos la parametrización de tal forma que $l = 0$ cuando las geodésicas atraviesen la superficie, con esta convención l sera negativo en V^- y positivo en V^+ . Podemos pensar a l como un campo escalar: El punto P identificado por las coordenadas x^α está unido a Σ por un miembro de la congruencia, y $l(x^\alpha)$ es la distancia propia (o tiempo propio) de Σ a P a lo largo de esa geodésica. Nuestra construcción implica que un desplazamiento fuera de la hipersuperficie a lo largo de la geodésica es descrito por $dx^\alpha = n^\alpha dl$, en donde

$$n_\alpha = \epsilon \partial_\alpha l \quad \text{con} \quad n^\alpha n_\alpha = \epsilon. \quad (3.3)$$

De aquí en adelante resolveremos el problema en el lenguaje de las distribuciones. Empezaremos introduciendo la distribución de Heaviside $\Theta(l)$: igual a 1 si $l > 0$, 0 si $l < 0$ e indeterminado si $l = 0$, que tiene las siguientes propiedades:

$$\Theta^2(l) = \Theta(l) \quad \Theta(l)\Theta(-l) = 0 \quad \frac{d}{dl}\Theta(l) = \delta(l) \quad (3.4)$$

siendo $\delta(l)$ la distribución de Dirac. Notemos también que el producto $\Theta(l)\delta(l)$ no está definido como una distribución. Antes de continuar establezcamos la siguiente notación:

$$[A] \equiv A(V^+)|_{\Sigma} - A(V^-)|_{\Sigma} \quad (3.5)$$

en donde A es cualquier cantidad tensorial definida en ambos lados de la hipersuperficie, $[A]$ es por lo tanto el salto de A a travez de Σ . De forma inmediata notemos las siguientes relaciones:

$$[n^\alpha] = [e_a^\alpha] = 0 \quad (3.6)$$

con $e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$. La primera se sigue de la relación $dx^\alpha = n^\alpha dl$ y de la continuidad de l y x^α a través de Σ y la segunda del hecho de que las coordenadas y^a son las mismas en ambos lados de la hipersuperficie.

3.2.1. Primera condición de juntura

Empezaremos por expresar la métrica $g_{\alpha\beta}$ en las coordenadas x^α como una distribución evaluada

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(l)g_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta}^-, \quad (3.7)$$

siendo $g_{\alpha\beta}^\pm$ la métrica en V^\pm expresada en coordenadas x^α . A continuación veremos si esta métrica es una solución válida de las ecuaciones de campo de Einstein verificando que las cantidades geométricas construidas con $g_{\alpha\beta}$ tales como el tensor de Riemann están bien definidas como distribuciones. Es por ello que debemos intentar eliminar, o al menos interpretar, los términos singulares que podamos encontrar en esas cantidades geométricas.

Derivando 3.7 obtenemos

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Theta(l)g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\gamma}^- + \epsilon\delta(l)[g_{\alpha\beta}]n_\gamma \quad (3.8)$$

utilizando además 3.3. Evidentemente el último término es singular y causa problemas a la hora de calcular los símbolos de Christoffel ya que genera términos proporcionales a $\Theta(l)\delta(l)$. De esta manera, si el último término pudiera sobrevivir la conexión no estaría bien definida como una distribución. Para eliminar este

término imponemos la continuidad de la métrica a través de la hipersuperficie: $[g_{\alpha\beta}] = 0$. Esto solo es válido para el sistema coordenado x^α , sin embargo, podemos hacerlo invariante también para las otras coordenadas usando 3.6:

$$0 = [g_{\alpha\beta}]e_a^\alpha e_b^\beta = [g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta]. \quad (3.9)$$

El resultado se traduce en

$$[h_{ab}] = 0, \quad (3.10)$$

es decir, la métrica inducida debe ser la misma en ambos lados de Σ . La ecuación 3.10 es claramente requerida si queremos que la hipersuperficie tenga una geometría bien definida y es por eso que es la **primera condición de juntura**. Notemos que se expresa independientemente de las coordenadas x^α o x_\pm^α , lo que a su vez nos explica por que en 3.10 tenemos solo seis condiciones en vez de las 10 de la original $[g_{\alpha\beta}] = 0$, el desencaje corresponde a las cuatro condiciones coordenadas $[x^\alpha] = 0$.

Para encontrar la segunda condición de juntura necesitamos calcular el tensor de Riemann como una distribución evaluada. Usando los resultados anteriores, tenemos que los símbolos de Christoffel están dado por

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Theta(l)\Gamma_{\beta\gamma}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\gamma}^{-\alpha}, \quad (3.11)$$

en donde $\Gamma_{\beta\gamma}^{\pm\alpha}$ son los símbolos construidos a partir de $g_{\alpha\beta}^\pm$. Derivando $\Gamma_{\beta\gamma}^{\pm\alpha}$ tenemos

$$\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\alpha = \Theta(l)\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{-\alpha} + \epsilon\delta(l)[\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha]n_\delta \quad (3.12)$$

y a partir de esto se sigue que el tensor de Riemann esta dado por:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \Theta(l)R_{\beta\gamma\delta}^{+\alpha} + \Theta(-l)R_{\beta\gamma\delta}^{-\alpha} + \delta(l)A_{\beta\gamma\delta}^\alpha \quad (3.13)$$

en donde

$$A_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \epsilon([\Gamma_{\beta\delta}^\alpha]n_\gamma - [\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha]n_\delta). \quad (3.14)$$

Como podemos ver, el tensor de Riemann esta bien definido como una distribución pero el término δ — representa una singularidad de curvatura en Σ . La **segunda condición de juntura** buscará eliminar este termino. Sin embargo, si no lo conseguimos veremos que se le puede dar una interpretación física a la singularidad.

3.2.2. El tensor de energía-momento superficial

A pesar de estar construidas a partir de símbolos de Christoffel las cantidades $A_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ forman un tensor debido a que la diferencia entre dos conjuntos de símbolos de Christoffel son una cantidad tensorial. A

continuación buscaremos una expresión explícita para este tensor.

El hecho de que la métrica sea continua a través de Σ en las coordenadas x^α implica que su derivada tangencial también es continua, esto significa que si $g_{\alpha\beta,\gamma}$ es discontinua, la discontinuidad debe estar a lo largo del vector normal n^α . Por lo tanto debe existir un tensor $k_{\alpha\beta}$ tal que

$$[g_{\alpha\beta,\gamma}] = k_{\alpha\beta}n_\gamma, \quad (3.15)$$

que esta dado explícitamente por

$$k_{\alpha\beta} = \epsilon[g_{\alpha\beta,\gamma}]n^\gamma. \quad (3.16)$$

La ecuación 3.15 implica

$$[\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha] = \frac{1}{2}(k_\beta^\alpha n_\gamma + k_\gamma^\alpha n_\beta - k_{\beta\gamma}n^\alpha), \quad (3.17)$$

y con ello tenemos que

$$A_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \frac{\epsilon}{2}(k_\delta^\alpha n_\beta n_\gamma - k_\gamma^\alpha n_\beta n_\delta - k_{\beta\delta}n^\alpha n_\gamma + k_{\beta\gamma}n^\alpha n_\delta), \quad (3.18)$$

la parte δ^- del tensor de Riemann.

Contrayendo el primer y el tercer índice obtenemos la parte δ^- del tensor de Ricci

$$A_{\alpha\beta} \equiv A_{\alpha\mu\beta}^\mu = \frac{\epsilon}{2}(k_{\mu\alpha}n^\mu n_\beta + k_{\mu\beta}n^\mu n_\alpha - kn_\alpha n_\beta - \epsilon k_{\alpha\beta}), \quad (3.19)$$

siendo $k \equiv k_\alpha^\alpha$. Después de una contracción mas obtenemos la parte δ^- de escalar de Ricci

$$A = A_\alpha^\alpha = \epsilon(k_{\mu\nu}n^\mu n^\nu - \epsilon k). \quad (3.20)$$

Con lo anterior ya estamos en condiciones de construir la parte δ^- del tensor de Einstein, que a su vez nos permite utilizar las ecuaciones de campo a fin de encontrar una expresión para el tensor de energía-momento:

$$T_{\alpha\beta} = \Theta(l)T_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l)T_{\alpha\beta}^- + \delta(l)S_{\alpha\beta}, \quad (3.21)$$

en donde

$$8\pi S_{\alpha\beta} \equiv A_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Ag_{\alpha\beta}. \quad (3.22)$$

En la parte derecha de la ecuación 3.21 el primer y segundo término representan el tensor de energía-momento de las regiones V^+ y V^- respectivamente. El término de la parte δ^- por otro lado tiene una interpretación: Se asocia con la presencia de una distribución delgada de materia (un cascarón) en Σ que

tiene un tensor de energía-momento superficial igual a $S_{\alpha\beta}$.

3.2.3. Segunda condición de junta

Explicitamente el tensor de energía-momento esta dado por

$$16\pi\epsilon S_{\alpha\beta} = k_{\mu\alpha}n^\mu n_\beta + k_{\mu\beta}n^\mu n_\alpha - kn_\alpha n_\beta - \epsilon k_{\alpha\beta} - (k_{\mu\nu}n^\mu n^\nu - \epsilon k)g_{\alpha\beta}, \quad (3.23)$$

de aquí podemos ver que $S_{\alpha\beta}$ es tangente a la hipersuperficie $S_{\alpha\beta}n^\beta = 0$ y admite la descomposición

$$S^{\alpha\beta} = S^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (3.24)$$

siendo $S_{ab} = S_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta$ es un 3-tensor simétrico. Desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} 16\pi S_{ab} &= -k_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta - \epsilon(k_{\mu\nu}n^\mu n^\nu - \epsilon k)h_{ab} \\ &= -k_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta - k_{\mu\nu}(g^{\mu\nu} - h^{mn}e_m^\mu e_n^\nu)h_{ab} + kh_{ab} \\ &= -k_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta + h^{mn}k_{\mu\nu}e_m^\mu e_n^\nu h_{ab}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} [n_{\alpha;\beta}] &= -[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma]n_\gamma \\ &= -\frac{1}{2}(k_{\gamma\alpha}n_\beta + k_{\gamma\beta}n_\alpha - k_{\alpha\beta}n_\gamma)n^\gamma \\ &= -\frac{1}{2}(\epsilon k_{\alpha\beta} - k_{\gamma\alpha}n_\beta n^\gamma - k_{\gamma\beta}n_\alpha n^\gamma), \end{aligned} \quad (3.26)$$

que nos permite escribir

$$[K_{ab}] = [n_{\alpha;\beta}]e_a^\alpha e_b^\beta = \frac{\epsilon}{2}k_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (3.27)$$

Juntando ambos resultados obtenemos

$$S_{ab} = -\frac{\epsilon}{8\pi}([K_{ab}] - [K]h_{ab}), \quad (3.28)$$

que relaciona el tensor energía-momento superficial con el salto en la curvatura extrínseca de uno de los lados de Σ al otro. El tensor energía-momento completo en la capa superficial es

$$T_\Sigma^{\alpha\beta} = \delta(l)S^{ab}e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (3.29)$$

Concluimos que una transición suave a través de Σ requiere que $[K_{ab}] = 0$, es decir, la curvatura extrínseca debe ser la misma en ambos lados de la hipersuperficie. Este requerimiento hace mas que solo

remover la parte δ^- del tensor de Einstein, se puede probar que $[K_{ab}] = 0$ implica que $A_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$ lo que significa que el tensor de Riemann completo es no singular en Σ .

La condición $[K_{ab}] = 0$ es la **segunda condición de junta**, y esta expresada independientemente de las coordenadas x^α y x_\pm^α . Si esta condición es violada entonces el espacio-tiempo será singular en Σ , pero como vimos es precisamente la singularidad la que nos da una interpretación física: Una superficie con tensor energía-momento $T_\Sigma^{\alpha\beta}$ esta presente en la hipersuperficie.

Capítulo 4

Colapso gravitacional

4.1. Colapso de Oppenheimer-Snyder

Este sencillo modelo fue el primero que describió el colapso estelar de manera continua. Por simplicidad se tomó una esfera de materia sin presión con densidad uniforme, en general un fluido perfecto con presión despreciable es comúnmente llamado polvo. La métrica interior del polvo es Friedman-Lemaître-Roberson-Walker (FLRW) mientras que la métrica exterior es Schwarzschild. Usando el formalismo de juntas veremos las condiciones necesarias para que estas dos métricas puedan unirse suavemente por su frontera común, la superficie de la esfera colapsando.

La métrica dentro del polvo colapsando (región V^-) esta dada por:

$$ds_-^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) \quad (4.1)$$

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.2)$$

siendo τ el tiempo propio sobre las líneas de mundo comóvil y $a(\tau)$ es el factor de escala. Usando las ecuaciones de Friedman se satisface

$$\dot{a}^2 + 1 = \frac{8\pi}{3} \rho a^2 \quad (4.3)$$

en donde el punto denota diferenciación respecto a τ . Asimismo a partir de la conservación del tensor de energía-momento en ausencia de presión, el polvo satisface

$$\rho a^3 = cte \equiv \frac{3}{8\pi} a_{max}, \quad (4.4)$$

con a_{max} el máximo valor posible del factor de escala. La solución a las ecuaciones 4.3 y 4.4 tienen la

siguiente forma paramétrica:

$$a(\eta) = \frac{1}{2}a_{max}(1 + \cos(\eta)) \quad \tau(\eta) = \frac{1}{2}a_{max}(\eta + \sin(\eta)), \quad (4.5)$$

el colapso empieza en $\eta = 0$ cuando $a = a_{max}$ y termina cuando $\eta = \pi$ cuando $a = 0$. La hipersuperficie Σ coincide con la superficie de la estrella colapsando que se localiza en χ_0 en las coordenadas comóviles.

La métrica afuera del polvo (región V^+) está dada por:

$$ds_{\pm}^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad \text{con} \quad f = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (4.6)$$

siendo M la masa de la estrella colapsando. Visto desde fuera Σ es descrita por las ecuaciones paramétricas $r = R(\tau)$ y $t = T(\tau)$ donde τ es el tiempo propio de los observadores comóviles en la superficie. Cabe mencionar que τ es el mismo que aparece en la métrica de la ecuación 4.1.

Es conveniente escoger $y^a = (\tau, \theta, \phi)$ como coordenadas en Σ ya que $e_{\tau}^{\alpha} = u^{\alpha}$, es decir, la 4-velocidad de un observador moviéndose con la superficie de la estrella. A continuación vamos a calcular las métricas inducidas:

Desde V^- la métrica en Σ es:

$$\begin{aligned} d\Sigma^2 &= -d\tau^2 + a^2(\tau)(d\chi_0 + \sin^2 \chi_0 d\Omega^2) \\ &= -d\tau^2 + a^2(\tau) \sin^2 \chi_0 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Desde V^+ la métrica en Σ es:

$$dr = \dot{R}(\tau) d\tau \quad dt = \dot{T}(\tau) d\tau. \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} d\Sigma^2 &= -F\dot{T}^2 d\tau^2 + F^{-1}\dot{R}^2 d\tau^2 + R^2 d\Omega^2 \\ &= -(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2) d\tau^2 + R^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

con $F = 1 - \frac{2M}{R}$.

La primera condición de juntura establece que la métrica inducida debe ser la misma en ambos lados de la hipersuperficie con lo cual obtenemos las siguientes relaciones:

$$R(\tau) = a(\tau) \sin \chi_0 \quad F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2 = 1. \quad (4.10)$$

La primera ecuación define $R(\tau)$ y en la segunda se puede despejar $F\dot{T}(\tau)$ para definir:

$$F\dot{T} = \sqrt{\dot{R}^2 + F} \equiv \beta(R, \dot{R}), \quad (4.11)$$

cabe mencionar que al integrarse esta ecuación para $T(\tau)$ el movimiento de la frontera en V^+ está completamente determinado.

Por otro lado, de la normal unitaria a Σ se tienen las relaciones:

$$n_\alpha u^\alpha = 0 \quad n_\alpha n^\alpha = 1, \quad (4.12)$$

por lo que desde V^- tenemos

$$u_-^\alpha \partial_\alpha = \partial_\tau \quad n_-^\alpha dx^\alpha = a d\chi, \quad (4.13)$$

escogiendo $n^\chi > 0$ de forma que n^α apunte hacia V^+ y desde V^+

$$u_+^\alpha \partial_\alpha = \dot{T} \partial_\tau + \dot{R} \partial_r \quad n_-^\alpha dx^\alpha = -\dot{R} dt + \dot{T} dr, \quad (4.14)$$

siendo consistentes con el signo.

Ahora, recordemos que la curvatura extrínseca es definida sobre cualquiera de los dos lados de Σ por $K = n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$. Las componentes que no son iguales a cero son

$$K_{\tau\tau} = n_{\alpha;\beta} u^\alpha u^\beta = -n_{\alpha;\beta} u^\beta = -n_\alpha a^\alpha, \quad (4.15)$$

siendo a^α la aceleración de un observador comóvil a la superficie. Explícitamente dichas componentes se escriben a continuación ¹ :

Desde V^-

$$K_{-\tau}^\tau = 0 \quad (4.16)$$

$$K_{-\theta}^\theta = K_{+\phi}^\phi = a^{-1} \cot \chi_0 \quad (4.17)$$

Desde V^+

$$K_{+\tau}^\tau = \frac{\dot{\beta}(R, \dot{R})}{\dot{R}} \quad (4.18)$$

¹Para el cálculo explícito y detallado revisar el **Apéndice A**

$$K_{+\theta}^{\theta} = K_{+\phi}^{\phi} = \frac{\beta(R, \dot{R})}{R} \quad (4.19)$$

con $\beta(R, \dot{R})$ definida por la ecuación 4.11.

Dado que en este caso no hemos impuesto alguna condición sobre el cascarón, esperamos que la transición sea suave en la superficie de la estrella que esta colapsando por lo que exigimos que K_{ab} sea igual en ambos lados de la hipersuperficie. Es necesario entonces para u_{+}^{α} satisfacer la ecuación geodésica (a_{+}^{α}) en V^{+} .

De las relaciones anteriormente calculadas es fácil ver que de la ecuación geodésica

$$\beta^2 = \dot{R}^2 + F = \tilde{E}^2, \quad (4.20)$$

siendo $\tilde{E} = -u_t$ el parámetro de energía (conservada) del observador comóvil. Por otro lado $[K_{\theta}^{\theta}] = 0$ nos dice que

$$\frac{\cot \chi_0}{a} = \frac{\beta}{R} = \frac{\tilde{E}}{a \sin \chi_0}, \quad (4.21)$$

y con lo anterior ya tenemos el requerimiento para una transición suave en Σ : que la hipersuperficie sea generada por geodésicas tanto de V^{-} como de V^{+} , con los parámetros \tilde{E} y χ_0 fijados por la ecuación 4.21. De hecho podemos reexpresar la ecuación 4.21 usando 4.3, 4.10 y 4.11 para obtener

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \quad (4.22)$$

que nos dice que la masa gravitacional de la estrella colapsando es el producto de su densidad y su volumen, tal como lo esperaríamos.

4.2. Colapso de un cascarón delgado de polvo cargado

Como una aplicación directa del formalismo de juntas vamos a analizar el colapso gravitacional de un cascarón delgado de materia esférico. En la región interior V^{-} del cascarón vamos a considerar un espacio-tiempo plano y en la región exterior V^{+} la solución de Reissner-Nordström. Vamos a considerar además que el cascarón está hecho de materia cargada sin presión por lo que el tensor de energía-momento tendrá la siguiente forma:

$$S^{ab} = \sigma u^a u^b, \quad (4.23)$$

siendo σ la densidad superficial de carga y materia, y u^a la 4-velocidad del cascarón. Así pues, buscaremos obtener las ecuaciones de movimiento bajo estas condiciones.

Usando los resultados encontrados en la sección pasada tenemos que desde la región V^+ :

$$K_{+\tau}^{\tau} = \frac{\dot{\beta}_+}{R}, \quad (4.24)$$

$$K_{+\theta}^{\theta} = K_{+\phi}^{\phi} = \frac{\beta_+}{R}, \quad (4.25)$$

$$\beta_+ = \sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}}, \quad (4.26)$$

mientras que desde la región interior V^-

$$K_{-\tau}^{\tau} = \frac{\dot{\beta}_-}{R}, \quad (4.27)$$

$$K_{-\theta}^{\theta} = K_{-\phi}^{\phi} = \frac{\beta_-}{R}, \quad (4.28)$$

$$\beta_- = \sqrt{\dot{R}^2 + 1}, \quad (4.29)$$

siendo $R(\tau)$ es el radio del cascarón, M su masa y Q su carga. La ecuación 3.28 nos dice cómo calcular las componentes del tensor energía-momento superficial a partir de las componentes de la curvatura extrínseca y $[K]$ que se define como:

$$[K] = K^+ - K^- = h^{ab}K_{ab}^+ - h^{ab}K_{ab}^-, \quad (4.30)$$

calculando el valor de K^+ y K^- tenemos que

$$K^+ = K_{\tau}^{\tau} + K_{\theta}^{\theta} + K_{\phi}^{\phi} = \frac{\dot{\beta}_+}{R} + 2\frac{\beta_+}{R}, \quad (4.31)$$

$$K^- = \frac{\dot{\beta}_-}{R} + 2\frac{\beta_-}{R}, \quad (4.32)$$

por lo que explícitamente

$$[K] = \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{R} + 2\frac{\beta_+ - \beta_-}{R}. \quad (4.33)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación 3.28 y tratándose esta de una hipersuperficie de tipo espacial según 2.4 obtenemos

$$\begin{aligned}
S_\tau^\tau &= h^{\tau\tau} S_{\tau\tau} = \frac{1}{8\pi} ([K_\tau^\tau] - [K]) \\
&= \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} - \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} - 2 \frac{\beta_+ - \beta_-}{R} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\beta_+ - \beta_-}{R} \right) \\
&= -\sigma
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
S_\theta^\theta &= h^{\theta\theta} S_{\theta\theta} = \frac{1}{8\pi} ([K_\theta^\theta] - [K]) \\
&= \frac{-1}{8\pi} \left(\frac{\beta_+ - \beta_-}{\dot{R}} - \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} - 2 \frac{\beta_+ - \beta_-}{R} \right) \\
&= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\beta_+ - \beta_-}{R} + \frac{\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-}{\dot{R}} \right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

La ecuación 4.35 puede ser integrada de manera directa al multiplicarla por $\dot{R}R$

$$\begin{aligned}
(\beta_+ - \beta_-)\dot{R} + (\dot{\beta}_+ - \dot{\beta}_-)R &= 0 \\
\frac{d}{d\tau} [(\beta_+ - \beta_-)R] &= 0 \\
(\beta_+ - \beta_-)R &= cte
\end{aligned} \tag{4.36}$$

sustituyendo este resultado en la ecuación 4.34 encontramos que

$$4\pi R^2 \sigma \equiv m = cte, \tag{4.37}$$

por ende

$$(\beta_+ - \beta_-) = -\frac{m}{R}. \tag{4.38}$$

La ecuación 4.37 nos dice además que la masa en reposo m del cascarón de polvo se mantiene constante durante la evolución. Sustituyendo el valor de β_+ y β_- en la ecuación 4.38, elevando al cuadrado y resolviendo para M tenemos

$$\sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}} - \sqrt{\dot{R}^2 + 1} = -\frac{m}{R},$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}} &= \sqrt{\dot{R}^2 + 1} - \frac{m}{R}, \\
\dot{R}^2 + 1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q}{R^2} &= \dot{R}^2 + 1 + \frac{m^2}{R^2} - \frac{2m\sqrt{\dot{R}^2 + 1}}{R}, \\
M &= m\sqrt{\dot{R}^2 + 1} + \frac{Q^2 - m^2}{2R},
\end{aligned} \tag{4.39}$$

la cual tiene una interpretación física. El primer término del lado derecho corresponde a la energía cinética relativista del cascarón incluida la masa en reposo y el segundo término se relaciona con energía de cohesión, es decir, el trabajo requerido para mantener unido el polvo que forma el cascarón. La suma de ambas es el total de la energía conservada y es igual a la masa gravitacional M del cascarón.

Resolviendo para \dot{R} la ecuación 4.39 y considerando que durante el colapso el mismo cascarón esta cayendo bajo la acción de su propia gravedad podemos asumir que la masa en reposo es igual a la masa gravitacional, obteniendo así la ecuación dinámica del cascarón que nos dice como evoluciona el radio durante el colapso

$$\dot{R} = \left(\frac{M^2 - Q^2}{MR} \right) \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{M^2 - Q^2}{MR} \right) \right]. \tag{4.40}$$

Para $Q=0$ podemos integrar esta ecuación diferencial de manera analítica mediante el cambio de variable $u = 4MR \rightarrow du = 4MdR$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2R}{\sqrt{M^2 + 4MR}} dR &= \frac{1}{(4M)(2M)} \int \frac{4MR}{\sqrt{M^2 + 4MR}} dR \\
&= \frac{1}{8M^2} \int \frac{udu}{\sqrt{M^2 + u}} = \frac{1}{8M^2} \int \frac{M^2 + u - M^2}{\sqrt{M^2 + u}} du \\
&= \frac{1}{8M^2} \int (M^2 + u)^{\frac{1}{2}} du - \frac{m^2}{8M^2} \int (M^2 + u)^{-\frac{1}{2}} du \\
&= \frac{1}{8M^2} \frac{2}{3} (M^2 + u)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} 2(M^2 + u)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{4.41}$$

tomando $M = 1$ obtenemos la figura 1.

Si quisiéramos describir la evolución del cascarón pero ahora desde un observador que no se encuentra sobre el cascarón necesitaríamos utilizar la relación $d\tau = \sqrt{1 - \frac{2m}{r^2}} dt$ en la ecuación 4.40 e integrarla para poder obtener una gráfica en términos del tiempo coordenado t . Sin embargo, dado que esta ya no se puede resolver de forma analítica utilizando el software de Mathematica conseguimos la figura 2.

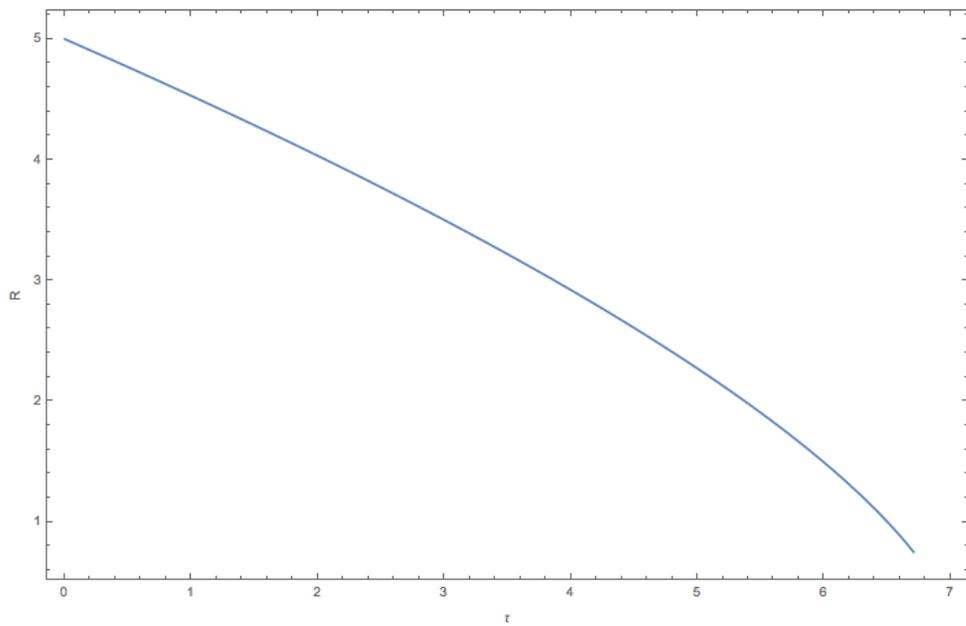


Figura 4.1: R vs τ

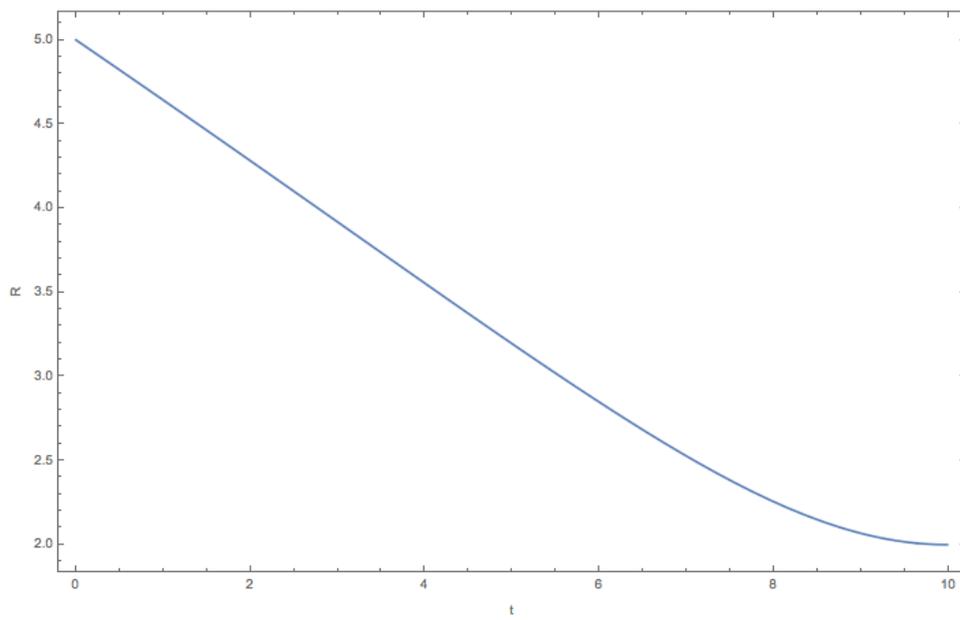


Figura 4.2: R vs t

Podemos ver claramente en cada gráfica como percibe un observador la evolución de un cascarón de polvo dependiendo de si este se encuentra sobre el mismo (Fig. 4.1) o no (Fig. 4.2). La diferencia mas notable es que un observador fuera del cascarón verá a este colapsar pero nunca tener un radio menor a $R = 2$ mientras que alguien que se mueva junto con el cascarón podrá ver como este se encoge hasta tener un radio prácticamente nulo de $R = 0$.

4.3. El radio del horizonte de eventos

Nuestro objetivo ahora es calcular el radio al cual el cascarón coincide con el horizonte de eventos, si es que en algún momento esto ocurre. Para empezar notemos que la 3-métrica que describe la evolución del cascarón no tiene un vector de Killing de tipo temporal por lo que necesitamos encontrar un método alternativo para determinar el horizonte. Para ello consideraremos la propiedad de que a lo largo del horizonte una partícula de prueba se puede mover solo con la velocidad de la luz. Consideremos entonces una partícula con la 3-velocidad u^a

$$u^a = \frac{dy^a}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\tau, \theta, \phi), \quad (4.42)$$

para un observador en la superficie la norma de la 3-velocidad está dada de la siguiente manera

$$u^2 = u_a u^a = h_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = h_{\tau\tau} (u^\tau)^2 + h_{\theta\theta} (u^\theta)^2 + h_{\phi\phi} (u^\phi)^2. \quad (4.43)$$

Ahora, supongamos que $u^\theta = C_\theta = cte$ y $u^\phi = C_\phi = cte$ y consideremos, sin pérdida de generalidad, que la partícula se mueve a lo largo del plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ del cascarón. Con dichas consideraciones

$$u^2 = -(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2) + R^2(C_\theta + C_\phi). \quad (4.44)$$

Supongamos entonces que existe un radio $R = R_h = cte$ en el cual $u^2 = 0$, es decir, la partícula se mueve a lo largo del ecuador a la velocidad de la luz. Así, de la ecuación anterior

$$u^2 = -F\dot{T}^2 + F^{-1}\dot{R}^2 + C_R^2 = 0 \quad (4.45)$$

con $C_R = R^2(C_\theta + C_\phi)$. Para resolver esta ecuación buscaremos soluciones del tipo

$$F\dot{T}^2 = C_1 = cte \quad F^{-1}\dot{R}^2 = C_2 = cte, \quad (4.46)$$

de esta forma la condición para la existencia de horizonte de eventos se reduce a una ecuación algebraica

$$-C_1 + C_2 + C_R^2 = 0, \quad (4.47)$$

de donde obtenemos la siguiente relación

$$\frac{F\dot{T}^2}{F^{-1}\dot{R}^2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \longrightarrow \quad F\dot{T}^2 = \frac{C_1}{C_2} \frac{\dot{R}^2}{F}, \quad (4.48)$$

que podemos reexpresar usando la norma de n

$$n^2 = F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2 = 1 \quad (4.49)$$

$$\left(\frac{C_1}{C_2} - 1\right) \frac{\dot{R}^2}{F} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{\dot{R}^2}{F} = \frac{C_2}{C_1 - C_2} = cte = K \quad (4.50)$$

con $C_1 \neq C_2$.

Finalmente, utilizando la ecuación dinámica del cascarón 4.40 obtenemos un valor para el cual radio coincide con el horizonte de eventos

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= \left(\frac{M^2 - Q^2}{MR}\right) \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{M^2 - Q^2}{MR}\right)\right] \\ &= KF \\ &= K \left(1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}\right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Resolviendo para R obtenemos la siguiente ecuación:

$$4M^2KR^2 - 4M(M^2(2K+1) - Q^2)R + 4M^2KQ - (M^2 - Q^2)^2 = 0, \quad (4.52)$$

siendo esta una ecuación cuadrática en R podemos resolverla fácilmente obteniendo en conclusión

$$R_h = \frac{M^2(2K+1) - Q^2 \pm \sqrt{[M^2(2K+1) - Q^2]^2 - K[4M^2Q^2K - (M^2 - Q^2)^2]}}{2MK}. \quad (4.53)$$

Como podemos ver el radio del horizonte depende muchísimo del valor de la constante K y en principio la única restricción a la que puede estar sujeta la podemos obtener del discriminante de la raíz. Sin embargo, también podemos estimar un rango de valores que sean físicamente aceptables quitando la dependencia de una variable. Por ejemplo, si consideramos que el cascarón negro carece de carga obtenemos un radio evidentemente mas sencillo que es simplemente proporcional a la masa como en la solución Schwarzschild:

$$R_{hs} = M \left[\frac{2K + 1 \pm \sqrt{(2K + 1)^2 + K}}{2K} \right] \quad (4.54)$$

Tomando como referencia el horizonte de eventos de un agujero negro de tipo Schwarzschild $R_h = 2M$ podemos discernir entre sus distintos valores y tomar como consistentes todos aquellos que nos den como resultado un valor mayor:

$$\begin{aligned}
M \left[\frac{2K + 1 + \sqrt{(2K + 1)^2 + K}}{2K} \right] &> 2M \\
2K + 1 + \sqrt{(2K + 1)^2 + K} &> 4K \\
+\sqrt{(2K + 1)^2 + K} &> 2K - 1 \\
(2K + 1)^2 + K &> (2K - 1)^2 \\
4K^2 + 4K + 1 + K &> 4K^2 - 4K + 1 \\
K &> 0
\end{aligned} \tag{4.55}$$

considerando tanto K como la raíz positiva. Esta condición es totalmente consistente con la ecuación 4.50 ya que como \dot{R}^2 siempre es positiva tenemos la siguiente restricción:

$$\begin{aligned}
F &> 0 \\
1 - \frac{2M}{R} &> 0 \\
1 &> \frac{2M}{R} \\
R &> 2M.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

De esta forma tenemos que para valores positivos de K siempre se obtiene un radio mayor al ya conocido. Esto nos dice que un cascarón de materia que colapsa y se transforma en un cascarón negro forma un horizonte de eventos antes que un agujero negro normal lo hace, por lo que la distribución de materia del objeto juega un papel muy importante a la hora de determinar las propiedades que tendrá una vez que ya haya colapsado.

4.4. Singularidades de la métrica

Es bien sabido que la Teoría de Einstein no da una descripción completa de la gravitación en todos los puntos del espacio-tiempo, pues existen regiones de este en las cuales las soluciones dadas por las ecuaciones de campo no esta bien definidas. Si bien existen varios tipos de singularidades, las que nos interesan son las de singularidades de curvatura, pues sin ahondar mucho en el tema sabemos que existen los conocidos **Teoremas de singularidad** [32] [10] en Relatividad General que nos aseguran que las singularidades son características reales de soluciones cosmológicas y que colapsan. En particular dada la simetría de la métrica de Schwarzschild los teoremas predicen la ocurrencia de singularidades en el interior de los agujeros negros asociados a esta métrica [27]. En nuestro caso solo analizaremos aquellas

regiones del espacio-tiempo en donde los invariantes escalares asociadas con las curvatura y que nos dan la intensidades del campo gravitacional se hacen infinito. La ventaja de usar estas cantidades es que al ser invariantes no dependen del sistema de coordenadas en el que estemos por lo que estará ahí seamos el observador que ve como colapsa el cascarón o seamos el observador que cae con el cascarón.

La manera de determinar estas singularidades es evidentemente construirlas en base a contracciones del tensor de curvatura, tales como el escalar de Ricci:

$$R_s \equiv g^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} = g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (4.57)$$

o el escalar de escalar de Kretschmann [12]:

$$K_s \equiv R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (4.58)$$

En nuestro caso para la métrica del cascarón

$$d\Sigma_+^2 = -(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2)d\tau^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (4.59)$$

el escalar de Ricci y el escalar de Kretschmann están dado respectivamente por ²:

$$R_s = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2\ddot{R}R + \dot{R}^2}{R^2} \right) \quad (4.60)$$

$$K_s = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + 2\dot{R}^2 + 2\ddot{R}R^2 + \dot{R}^4}{R^4} \right) \quad (4.61)$$

en donde claramente podemos ver que existe una singularidad de curvatura para $R = 0$.

²Para el cálculo explícito y detallado revisar el **Apéndice B**

Capítulo 5

Termodinámica de agujeros negros

A continuación haremos una breve revisión de las leyes mecánica de los agujeros negros [1] [31] a fin de aplicarlas al radio del horizonte de eventos que previamente hemos encontrado para el cascarón y de las cuales podremos hacer una analogía a las leyes de la termodinámica a partir de la temperatura y entropía definida por Bekenstein y Hawking [30].

5.1. Ley cero de la mecánica de los agujeros negros

La ley cero establece que la gravedad superficial κ de un agujero negro estacionario es constante sobre el horizonte de eventos.

La gravedad superficial κ en un espacio-tiempo estático se puede interpretar como la fuerza requerida de un observador en infinito para sostener un partícula estacionaria en el horizonte de eventos. En un espacio-tiempo estacionario el horizonte de eventos es típicamente un horizonte de Killing¹ para un vector de Killing adecuado, formalmente se define utilizando la siguiente ecuación

$$k^a \nabla_a k^b = \kappa k^b. \tag{5.1}$$

Como vimos en el capítulo anteriormente la métrica que describe la evolución del cascarón no cuenta con un vector de Killing que podamos utilizar para definir el horizonte de eventos. Sin embargo, para horizontes de eventos mas generales, es decir, en espacios-tiempos no necesariamente estacionarios la gravedad superficial se puede definir en términos de los generadores nulos del horizonte con una ecuación similar a 5.1 [20] [7]. Así que siguiendo la misma idea en la que calculamos el radio del horizonte de eventos podemos establecer la gravedad superficial para la hipersuperficie nula que corresponde al horizonte de eventos del cascarón.

¹Un horizonte de Killing es una hipersuperficie donde el vector de Killing se hace nulo

5.2. Primera ley de la mecánica de los agujeros negros

La primera ley nos da una relación entre el área y la energía de los agujeros negros estacionarios, esta nos dice [29]:

Si un agujero negro estacionario de masa M , carga Q y momento angular J , con un horizonte de eventos de gravedad superficial κ , potencial superficial eléctrico Φ_H y velocidad angular Ω_H , es perturbado de tal manera que se establezca en otro agujero negro de con masa $M + \delta M$, carga $Q + \delta Q$ y momento angular $J + \delta J$, entonces

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ. \quad (5.2)$$

La primera ley aplicada a nuestro cascarón la obtendremos calculando el área del horizonte de eventos, notemos de entrada que en nuestro caso el momento angular es cero. Haciendo $d\tau = 0$ en 4.9 tenemos

$$d\Sigma = R^2 d\Omega^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.3)$$

integrando tenemos que el área del horizonte esta dado por

$$\begin{aligned} A_h &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R_h^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi R_h^2, \end{aligned} \quad (5.4)$$

sustituyendo el radio del horizonte que encontramos para el cascarón tenemos

$$A_h = 4\pi \left[\frac{M^2(2K+1) - Q^2 + \sqrt{[M^2(2K+1) - Q^2]^2 - K[4M^2Q^2K - (M^2 - Q^2)^2]}}{2MK} \right]^2. \quad (5.5)$$

Dada la dependencia explícita de la masa M y la carga Q tenemos la relación $A_h = A_h(M, Q)$, que podemos expresar de forma diferencial como

$$dA_h = \left(\frac{\partial A_h}{\partial M} \right)_Q dM + \left(\frac{\partial A_h}{\partial Q} \right)_M dQ, \quad (5.6)$$

reacomodando los términos y usando las siguientes relaciones

$$\left(\frac{\partial M}{\partial A_h} \right)_Q = \frac{1}{\left(\frac{\partial A_h}{\partial M} \right)_Q}, \quad (5.7)$$

$$\left(\frac{\partial A_h}{\partial M}\right)_Q \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)_{A_h} \left(\frac{\partial Q}{\partial A_h}\right)_M = -1, \quad (5.8)$$

obtenemos la primera ley aplicada al cascarón

$$dM = \left(\frac{\partial M}{\partial A_h}\right)_Q dA_h + \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)_{A_h} dQ \quad (5.9)$$

en donde se satisface

$$\left(\frac{\partial M}{\partial A_h}\right)_Q = \frac{\kappa}{8\pi} \quad \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)_{A_h} = \Phi_H. \quad (5.10)$$

5.3. Segunda ley de la mecánica de los agujeros negros

La segunda ley nos dice que, el área del horizonte de eventos no decrece con el tiempo

$$dA \geq 0, \quad (5.11)$$

de esta manera, si dos agujeros negros colapsan, el área del horizonte de eventos final sera mayor que la suma de las áreas de los agujeros negros originales

$$A_3 > A_1 + A_2. \quad (5.12)$$

Esto establece una analogía directa entre el área del horizonte de eventos y la entropía, de la cual hablaremos a continuación. Esta ley es un poco mas fuerte que su contraparte termodinámica pues en termodinámica uno puede transferir entropía de un sistema a otro y solo se requiere que la entropía total no disminuya. Mas en cambio, no se puede transferir área de un agujero negro sin dividirla, se requiere que el área de cada agujero negro no disminuya.

5.4. La entropía de Bekenstein-Hawking

Como podemos ver, pareciera que las leyes mecánicas de los agujeros negros son prácticamente análogas a las leyes de la termodinámica. Sin embargo, en el trabajo original de Barden, Carter y Hawking [1] enfatizan que los agujeros negros tienen temperatura cero. Como nada escapa de un agujero negro entonces no es posible que puedan irradiar algo, lo que a su vez nos dice que no pueden tener una entropía física y por ende la analogía entre las leyes mecánicas de los agujeros negros y las leyes de la termodinámica son meramente formales.

Jacob Bekenstein profundizo en la segunda ley y notó que esta se violaría si los agujeros negros no tuvieran entropía en el sentido de que podríamos arrojar arbitrariamente objetos entrópicos dentro del agujero negro disminuyendo así la entropía total del universo exterior. Conjeturó entonces que los agujeros

negros deberían tener una entropía $S_{BH} \propto A$. De esta manera, la generalización de la segunda ley dada por Bekenstein dice

$$dS_{total} \geq 0 \quad (5.13)$$

en donde $S_{total} = S_{externa} + S_{BH}$ [5]. No obstante, dichos resultados se obtuvieron a partir de la mecánica clásica, por lo que Hawking posteriormente utilizando mecánica cuántica mostró que los agujeros negros pueden crear y emitir partículas dando lugar a un flujo térmico como si fueran objetos calientes con una temperatura bien definida, lo que implica que efectivamente se comportan como un sistema termodinámico [9]. Dicha temperatura esta dada por

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B}, \quad (5.14)$$

siendo \hbar la constante de Plank reducida, κ la gravedad superficial y k_B la constante de Boltzmann.

Teniendo una expresión para temperatura de un agujero negro y usando la relación dada por la primera ley se confirmaron las sospechas de Bekenstein con un valor explícito para la entropía de un agujero negro

$$S_{BH} = \frac{A}{4} \quad (5.15)$$

tomando $\hbar = k_B = 1$. Con esta relación podemos calcular de forma inmediata la entropía de un cascarón negro

$$S_{BH} = \pi \left[\frac{M^2(2K+1) - Q^2 + \sqrt{[M^2(2K+1) - Q^2]^2 - K[4M^2Q^2K - (M^2 - Q^2)^2]}}{2MK} \right]^2 \quad (5.16)$$

5.5. Propiedades termodinámicas del cascarón negro

Siendo el cascarón negro un sistema termodinámico podemos utilizar las condiciones termodinámicas de equilibrio para calcular la temperatura y el calor específico [3]. De la primera ley tenemos que

$$dM = TdS_{BH} + \Phi_H dQ \quad (5.17)$$

por lo que la temperatura T esta dada por

$$\left(\frac{\partial S_{BH}}{\partial M} \right) = \frac{1}{T}, \quad (5.18)$$

y explícitamente toma el siguiente valor:

$$\begin{aligned}
 T^{-1} = & \frac{\pi \sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)(4KM^2 + M^2 - Q^2)} + (2K+1)M^2 - Q^2}{2K^2M^3 \sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)((4K+1)M^2 - Q^2)}} \\
 & \times \left[(2K+1)M^2 \sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)((4K+1)M^2 - Q^2)} \right. \\
 & \left. + (K+1)(4K+1)M^4 + Q^2 \sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)(4KM^2 + M^2 - Q^2)} - (K+1)Q^4 \right] \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

El calor específico C se obtiene de la siguiente relación

$$C = T \left(\frac{\partial S_{BH}}{\partial T} \right), \quad (5.20)$$

sin embargo, no podemos usarla de manera directa pues la entropía que calculamos no esta en términos de la temperatura. Usando la regla de la cadena podemos reexpresarla como

$$C = T \left(\frac{\partial S_{BH}}{\partial M} \right) \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right) = T \frac{1}{T} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right) = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right), \quad (5.21)$$

y calcular su valor a partir de la relación inversa. Derivando 5.19 con respecto a M tenemos que:

$$\begin{aligned}
 C = & \pi \sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)((4K+1)M^2 - Q^2)} \\
 & \times \left(\sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)(4KM^2 + M^2 - Q^2)} + (2K+1)M^2 - Q^2 \right)^2 \\
 & \times \left((2K+1)M^2 \sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)((4K+1)M^2 - Q^2)} + (K+1)(4K+1)M^4 \right. \\
 & \left. + Q^2 \sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)(4KM^2 + M^2 - Q^2)} - (K+1)Q^4 \right)^2 \\
 & \times \left[2K^2(K+1)M^2 \left(2(K+1)(2K+1)(4K+1)^2 M^{10} - 2(K+1)Q^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3Q^8((K+2)\sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)((4K+1)M^2 - Q^2)}) \right. \right. \\
 & \left. \left. - 6(2K+1)M^2 Q^6((K+2)\sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)((4K+1)M^2 - Q^2)} - 3(K+1)Q^2) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (4K+1)M^8((K(8K+9)+2)\sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)((4K+1)M^2 - Q^2)} - 6(K+1)(2KQ+Q^2)) \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2(2K+1)M^6 Q^2((K(8K+9)+2)\sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)((4K+1)M^2 - Q^2)} - 6(K+1)(4K+1)Q^2) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4M^4 Q^4((K(5K+9)+2)\sqrt{(K+1)(M^2 - Q^2)((4K+1)M^2 - Q^2)} - 5(K+1)(2K(K+2)+1)Q^2) \right) \right]^{-1}. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Como podemos ver, las expresiones para la temperatura y el calor específico presentan un denominador bastante complicado para el cual no es posible ver a simple vista los valores en donde se anula. En el caso del calor específico una divergencia podría indicarnos la presencia de una transición de fase para este sistema termodinámico ya que el cascarón negro esta compuesto tanto de masa como de carga. Ahora, recordemos que la constante K sí bien no es una propiedad del cascarón como tal si influye directamente en el radio del horizonte que estamos analizando por lo que determina también el valor numérico de las divergencias de la temperatura y el calor específico. Como ejemplo, veamos el comportamiento del calor específico para K y M igual a la unidad.

Para empezar veamos el rango de valores admisibles según el discriminante que aparece en la expresión para la entropía. La entropía para $M = K = 1$ es

$$S = \frac{1}{4}\pi \left(-Q^2 + \sqrt{2}\sqrt{Q^4 - 6Q^2 + 5} + 3 \right)^2, \quad (5.23)$$

el discriminante es por lo tanto

$$D = Q^4 - 6Q^2 + 5, \quad (5.24)$$

cuyas raíces son $Q = \{\pm 1, \pm\sqrt{5}\}$. Así pues, las divergencias con significado físico serán aquellas dentro del dominio $Q \in [0, 1]$. La gráfica correspondiente al calor específico se muestra a continuación:

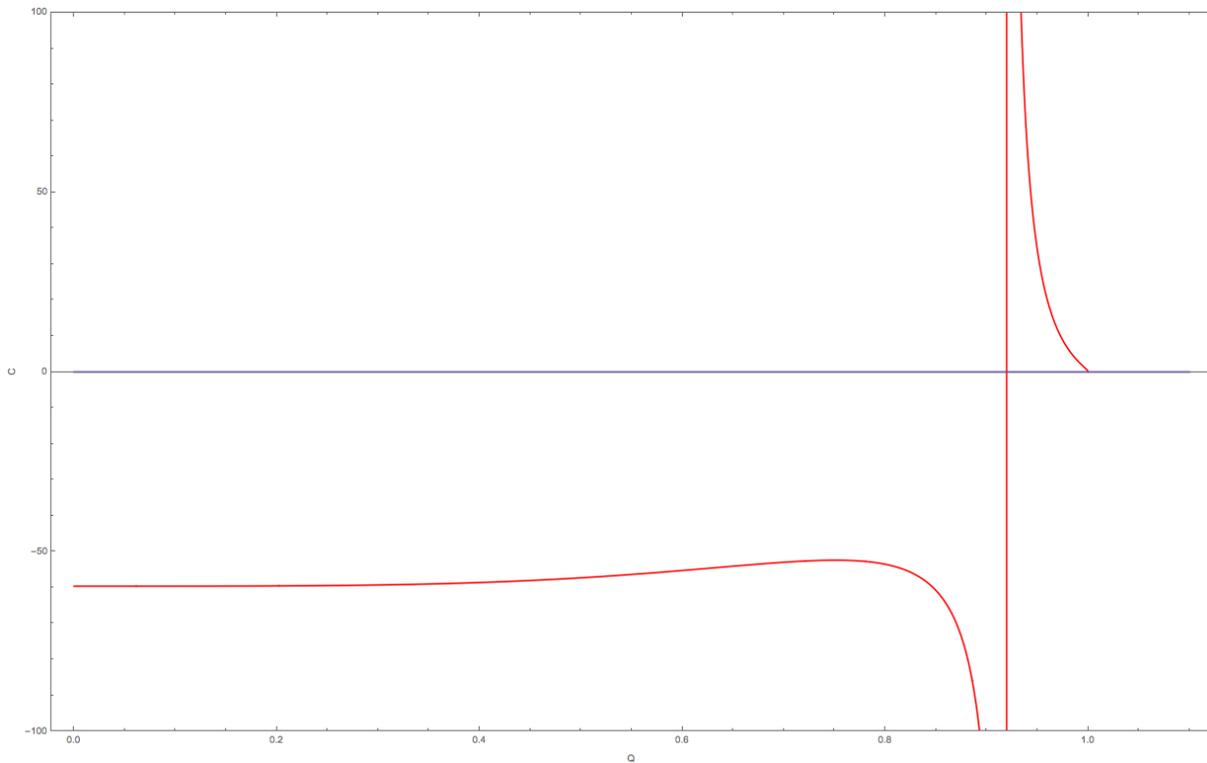


Figura 5.1: Q vs C

En la gráfica se puede observar que existe un único valor singular para $Q = 0,9195$ que podemos asociar a una transición de fase del sistema termodinámico del cascarón.

Capítulo 6

Geometrotermodinámica de cascarones

Como vimos anteriormente, los agujeros negros son hasta cierto punto sencillos de describir pues solo están caracterizados por la masa M , el momento angular J y la carga eléctrica Q según las leyes mecánicas de los agujeros negros. Las propiedades termodinámicas se las otorgamos posteriormente utilizando las definiciones de Hawking y Bekenstein de la temperatura y la entropía respectivamente sin decir en algún momento si la termodinámica de los agujeros negros tenía una base estadística como si lo tiene la termodinámica estándar en la física estadística. Sin embargo, lo que nos concierne ahora no es tratar de buscar dicho origen, pues es verdaderamente complicado, si no más bien abordar la termodinámica de agujeros negros desde otra perspectiva, la geométrica.

La visión geométrica de la gravedad tuvo sus inicios en los trabajos de Gibbs [8] y los de Caratheodory cuyos resultados fueron expresados en 2 distintos enfoques, el primer introduciendo una estructura métrica en el espacio de estados de equilibrio termodinámicos ε y el segundo usando una estructura de contacto del llamado espacio fase termodinámico τ . Por el lado de la estructura métrica hubieron 2 enfoques; el primero de F. Wienhold [33] que introdujo sobre ε una métrica definida como el Hessiano de la energía interna termodinámica tomado las derivadas con respecto a las variables extensivas termodinámicas y el de G. Ruppeiner [25] una métrica conforme equivalente utilizando el inverso de la temperatura como el factor conforme. Por otro lado R. Herman y R. Mrugala [19] se inclinaron por la estructura de contacto del espacio fase τ en donde las variables termodinámicas extensivas e intensivas junto con el potencial termodinámico constituyen unas coordenadas bien definidas sobre τ , sin mencionar que un subespacio de τ es el espacio de estados de equilibrio termodinámicos ε , definido mediante el mapeo suave $\varphi : \varepsilon \rightarrow \tau$ [18]. Esto último nos indica que cada sistema tiene su propio espacio ε . Así mismo, sobre τ es siempre posible introducir la 1-forma fundamental de Gibbs que, cuando es proyectada sobre ε con el pullback de φ , genera la primera ley de la termodinámica y la condición para el equilibrio termodinámico. Sin embargo, esto no es suficiente, lo importante es que sobre τ también es posible considerar estructuras Riemannianas.

De manera mas reciente, la Geometrotermodinámica (GTD) se desarrollo como un formalismo que unificara la estructura de contacto sobre τ con la métrica de la estructura sobre ε de manera consistente, considerando solo estructuras métricas invariantes de Legendre tanto en τ como en ε [2]. Esta ultima propiedad es sumamente importante pues garantiza que las características de un sistema termodinámico no dependan del potencial termodinámico utilizado para describirlo.

6.1. Fundamentos de la GTD

A continuación revisaremos con mas detalle lo que se menciono anteriormente sobre la estructura de contacto que constituye la base para al GTD [23].

6.1.1. Estructura de contacto

Sabemos de la termodinámica en equilibrio estándar que, un sistema con n grados de libertad esta determinado por n variables extensivas E^a con sus correspondientes variables intensivas conjugadas I^a y un potencial termodinámico Φ que las relacione. Por eso, en primera instancia vamos a considerar una variedad $(2n+1)$ -dimensional denominada **espacio fase termodinámico** τ en la cual daremos como coordenadas al conjunto $Z^A = \{\Phi, E^a, I^a\}$. Por convención se usa $A = 0, \dots, 2n$ y $a = 1, \dots, n$ por lo que $\Phi = Z^0$, $E^a = Z^{2a}$ e $I^a = Z^{2n+a}$. Seguido de esto, introducimos la forma fundamental de Gibbs

$$\Theta_G = d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b, \quad \delta_{ab} = (1, 1, \dots, 1). \quad (6.1)$$

El par (τ, Θ_G) es llamado variedad de contacto si τ es diferenciable y Θ_G satisface la condición $\Theta_G \wedge (d\Theta_G)^n \neq 0$. Consideremos ahora el espacio n -dimensional ε dado por las coordenadas E^a , esto lo podemos realizar mediante un mapeo suave $\varphi : \varepsilon \rightarrow \tau$,

$$\varphi : (E^a) \rightarrow (\Phi, E^a, I^a), \quad (6.2)$$

con $\Phi = \Phi(E^a)$. Definimos entonces el **espacio termodinámico de estados de equilibrio** ε como el subespacio de τ dado por mapeo $\varphi : \varepsilon \rightarrow \tau$ para la cual, la condición

$$\varphi^*(\Theta_G) = \varphi^*(d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b) = 0 \quad (6.3)$$

se satisface, siendo φ^* un pullback. Esto a su vez implica la relación

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E^a} = \delta_{ab} I^a, \quad (6.4)$$

que es precisamente la condición estándar para el equilibrio termodinámico. Consecuentemente, sobre el espacio termodinámico de estados de equilibrio ϵ , de la condición 6.3 obtenemos la **primera ley de la termodinámica**

$$d\Phi - \delta_{ab} I^a dE^b = 0. \quad (6.5)$$

Para distinguir un sistema termodinámico de otro en el espacio de estados de equilibrio, uno puede especificar la ecuación fundamental que, en la representación descrita anteriormente, esta contenida en el mapeo 6.2 a través de la relación $\Phi = \Phi(E^a)$. Esta construcción debe complementarse con la **segunda ley de la termodinámica**

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^a \partial E^b} \geq 0 \quad (6.6)$$

también conocida como condición de convexidad. El potencial termodinámico debe satisfacer la condición de homogeneidad $\Phi(\lambda E^a) = \lambda^\beta \Phi(E^a)$ para los parámetros constantes λ y β . Derivando condición de homogeneidad con respecto a λ y evaluando el resultado en $\lambda = 1$, obtenemos una expresión conocida como la identidad de Euler

$$\beta \Phi(E^a) = \delta_{ab} I^a E^a, \quad (6.7)$$

después de usar la condición de dualidad 6.4. Ahora, calculando la derivada exterior de la identidad de Euler y usando la ecuación 6.5, obtenemos la relación generalizada de Gibbs-Duhem

$$(1 - \beta) \delta_{ab} I^a dE^b + \delta_{ab} E^a dI^b = 0, \quad (6.8)$$

de estas relaciones es fácil ver que las expresiones clásicas para la identidad de Euler y la relación de Gibbs-Duhem son un caso particular tomando $\beta = 1$.

6.1.2. La invariancia de Legendre

Las transformaciones de Legendre nos permiten redefinir el potencial termodinámico intercambiando su dependencia mediante el uso de pares conjugados de las variables extensivas e intensivas. En el espacio fase τ esto no es más que un cambio de coordenadas, adquiriendo sentido físico mientras estemos en el espacio de estados de equilibrio ϵ . De manera formal son un caso especial de transformaciones de contacto que dejan invariante al estructura de contacto en τ , por lo que dicho en términos físicos, la invariancia de Legendre significa que las propiedades termodinámicas de un sistema son independientes del potencial termodinámico usado para describirlo. Consideremos entonces una transformación parcial de Legendre definida a través de las siguientes relaciones

$$\{Z^A\} \rightarrow \{\tilde{Z}^A\} = \{\tilde{\Phi}, \tilde{E}^a, \tilde{I}^a\} \quad (6.9)$$

$$\Phi = \tilde{\Phi} - \delta_{kl} \tilde{E}^k \tilde{I}^l \quad (6.10)$$

$$E^i = -\tilde{I}^i, \quad E^j = \tilde{E}^j, \quad I^i = \tilde{E}^i, \quad I^j = \tilde{I}^j \quad (6.11)$$

en donde $i \cup j$ es cualquier descomposición disjunta del conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$, y $k, l = 1, \dots, i$. En particular, para $i = 1, \dots, n$ e $i = \emptyset$ se obtiene las transformaciones totales de Legendre y la identidad, respectivamente. Cabe destacar que los resultados obtenidos no serán afectados por esta simplificación.

La invariancia de la estructura de contacto vista anteriormente se hace evidente del hecho de que en las nuevas coordenadas $\{\tilde{Z}^A\}$ la 1-forma de Gibbs 6.1 se convierte en $\tilde{\Theta}_G = d\tilde{\Phi} - \delta_{ab}\tilde{I}^a d\tilde{E}^b$. Siguiendo con los cálculos también es posible ver la invariancia de la condición de dualidad 6.4 y la primera 6.5 y segunda 6.6 ley de la termodinámica. Cabe destacar que una transformación de Legendre intercambia el carácter de las variables intensivas y extensivas, así que para establecer la validez de la identidad de Euler y, consecuentemente la relación de Gibbs-Duhem en las nuevas variables es necesario identificar primero las variables extensivas \tilde{E}^a y la ecuación fundamental $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\tilde{E}^a)$. De esta manera, la invariancia de Legendre se sigue del hecho de que la condición de dualidad 6.4 y la primera ley 6.5 son invariantes.

6.1.3. Estructura métrica

Ademas de la descripción geométrica de la termodinámica en términos de una estructura de contacto, en la GTD se asciende la variedad de contacto (τ, Θ_G) a una variedad de contacto Riemanniana (τ, Θ_G, G) , en donde G es una métrica que comparte simetrías con Θ_G . Con todo lo anterior antes dicho se formula el enunciado principal de la GTD. Un sistema termodinámico es descrito por una métrica G que es llamada **métrica termodinámica** si satisface las siguientes condiciones:

1. G es invariante con respecto a las transformaciones que no modifican la estructura de contacto de τ . En particular, G debe ser invariante con respecto a las transformaciones de Legendre.
2. G induce en el espacio de estados de equilibrio ε una métrica g mediante el mapeo

$$\varphi^*(G) = g. \quad (6.12)$$

La condición 1 se establece debido a que una métrica termodinámica debe describir un sistema termodinámico independientemente de las coordenadas usadas en τ , esto es fundamental si queremos que la geometrotermodinámica sea capaz de describir propiedades termodinámicas en términos de conceptos geométricos, de manera que debe ser invariante respecto a cambios en el potencial termodinámico. La condición 2 establece la conexión entre la geometría sobre τ y la geometría ε usando las mismas herramientas que son usadas para definir estados de equilibrio en la construcción de la estructura de contacto.

La clase de métricas que satisfacen los requerimientos es extensa y actualmente no hay un principio general que permita seleccionar una en particular, de hecho, es fácil construir una métrica invariante

general $(2n+1)$ -dimensional definiendo la métrica de Gibbs como el cuadrado de la 1-forma de Gibbs 6.1 mas un término invariante, i.e.,

$$G = \Theta_G \otimes \Theta_G + (\delta_{ab} E^a I^b)(\eta_{cd} dE^c dI^d) \quad (6.13)$$

que induce naturalmente sobre ε la métrica

$$g = \left(E^a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \right) \left(\eta_b^c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^c \partial E^d} dE^b dE^d \right) \quad (6.14)$$

en donde $\eta_b^c = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. La invariancia de Legendre de esta métrica se sigue de la invariancia de la 1-forma de Gibbs y a su vez induce la invariancia de g .

6.2. GTD de agujeros negros

Habiendo revisado la estructura central de la GTD es momento de aplicar dichos principios a agujeros negros [24], considerando que son sistemas termodinámicos como ya se han definido antes. Partiendo de la primera ley termodinámica de los agujeros negros $dM = TdS + \Omega_H dJ + \phi dQ$ y para una ecuación fundamental dada $M = M(S, J, Q)$ tenemos las condiciones para el equilibrio termodinámico

$$T = \frac{\partial M}{\partial S}, \quad \Omega_H = \frac{\partial M}{\partial J}, \quad \phi = \frac{\partial M}{\partial Q}. \quad (6.15)$$

Así pues, el espacio fase τ para un agujero negro es 7-dimensional con coordenadas $Z^A = \{M, S, J, Q, T, \Omega_H, \phi\}$, la 1-forma de Gibbs esta dada por $\Theta = dM - TdS - \Omega_H dJ - \phi dQ$ y el espacio termodinámico de estados de equilibrio ε es 3-dimensional con coordenadas $E^a = \{S, J, Q\}$, y es definido mediante el mapeo

$$\varepsilon : \{S, J, Q\} \rightarrow \left\{ M(S, J, Q), S, J, Q, \frac{\partial M}{\partial S}, \frac{\partial M}{\partial J}, \frac{\partial M}{\partial Q} \right\}. \quad (6.16)$$

La masa M aquí toma el papel del potencial termodinámico que depende de las variables extensivas S , J y Q . Sin embargo, usando las transformaciones de Legendre podemos introducir un conjunto de siete potenciales termodinámicos adicionales dependiendo de las diferentes combinaciones de las variables extensivas e intensivas. Cabe destacar que el mapeo φ puede ser definido en cada caso independientemente del potencial termodinámico escogido y ademas como estamos considerando solo estructuras invariantes de Legendre sobre τ y ε las características de la geometría dada para un sistema termodinámico dado serán independientes del potencial termodinámico. Consecuentemente, en la representación de la masa de la termodinámica del agujero negro descrita anteriormente, tenemos una total libertad de escoger cualquier otro potencial sin afectar las propiedades termodinámicas del agujero negro.

En la GTD, también es posible considerar una representación de la entropía. En este caso, la 1-forma

de Gibbs del espacio fase puede ser escogida como

$$\Theta_S = dS - \frac{1}{T}dM + \frac{\Omega_H}{T}dJ + \frac{\phi}{T}dQ. \quad (6.17)$$

El espacio de estados de equilibrio se define entonces por el mapeo

$$\varphi_S : \{M, J, Q\} \rightarrow \{M, S(M, J, Q), J, Q, T(M, J, Q), \Omega_H(M, J, Q), \phi(M, J, Q)\}, \quad (6.18)$$

con

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial M}, \quad \frac{\Omega_H}{T} = -\frac{\partial S}{\partial J}, \quad \frac{\phi}{T} = -\frac{\partial S}{\partial Q}. \quad (6.19)$$

tal que se cumple $\varphi^*(\Theta_S) = 0$ de la cual obtenemos la primera ley. En la representación de la entropía la ecuación fundamental es ahora dada por $S = S(M, J, Q)$, y la segunda ley de la termodinámica corresponde a la condición de concavidad de la función entropía. Esta de mas mencionar que las propiedades termodinámicas deben ser independientes de la representación.

6.3. Cascarón negro de polvo cargado

En el capítulo 5 encontramos que la entropía de Bekenstein-Hawking para un cascarón negro debe ser

$$S = \pi \left[\frac{M^2(2K+1) - Q^2 \pm \sqrt{[M^2(2K+1) - Q^2]^2 - K[4M^2Q^2K - (M^2 - Q^2)^2]}}{2MK} \right]^2, \quad (6.20)$$

esta es la ecuación fundamental en la representación de la entropía. La métrica G sobre τ esta dada entonces por

$$G = \left(dS - \frac{1}{T}dM + \frac{\phi}{T}dQ \right)^2 - \left(\frac{1}{T}M - \frac{\phi}{T}Q \right) \left(dM d\left(\frac{1}{T}\right) + dQ d\left(\frac{\phi}{T}\right) \right), \quad (6.21)$$

y la correspondiente métrica inducida sobre ϵ

$$g = \left(M \frac{\partial S}{\partial M} + Q \frac{\partial S}{\partial Q} \right) \left(-\frac{\partial^2 S}{\partial M^2} dM^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial Q^2} dQ^2 \right). \quad (6.22)$$

Utilizando subindices para expresar las derivadas podemos reescribir la ecuación para la métrica g de la siguiente manera

$$g = (MS_M + QS_Q)(-S_{MM} + S_{QQ}), \quad (6.23)$$

cuyos valores para S_M , S_Q , S_{MM} y S_{QQ} tienen explícitamente la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 S_M &= \frac{\pi}{2K^2 M^3 \sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right)} \\
 &\times \left[\left(\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} (4KM^2 + M^2 - Q^2) + (2K+1)M^2 - Q^2 \right) \right. \\
 &\times \left((K+1)(4K+1)M^4 + (2K+1)M^2 \sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right) \right. \\
 &\left. \left. + Q^2 \sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} (4KM^2 + M^2 - Q^2) - (K+1)Q^4 \right) \right] \quad (6.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_Q &= \frac{-\pi Q}{K^2 M^2 \sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right)} \\
 &\times \left(\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} (4KM^2 + M^2 - Q^2) + (2K+1)M^2 - Q^2 \right) \\
 &\times \left(\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} (4KM^2 + M^2 - Q^2) + (K+1)(2K+1)M^2 - (K+1)Q^2 \right) \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{MM} &= \frac{\pi(K+1)}{2K^2 M^4 \left((K+1)(M-Q)(M+Q) \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right) \right)^{3/2}} \\
 &\times \left[2(K+1)(2K+1)(4K+1)^2 M^{10} \right. \\
 &+ 3Q^8 \left((K+2) \sqrt{(K+1)(M-Q)(M+Q)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right) - 2(K+1)Q^2 \right) \\
 &- 6(2K+1)M^2 Q^6 \left((K+2) \sqrt{(K+1)(M-Q)(M+Q)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right) - 3(K+1)Q^2 \right) \\
 &+ (4K+1)M^8 \left((K(8K+9)+2) \sqrt{(K+1)(M-Q)(M+Q)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right) - 6(K+1)(2KQ+Q)^2 \right) \\
 &- 2(2K+1)M^6 Q^2 \left((K(8K+9)+2) \sqrt{(K+1)(M-Q)(M+Q)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right) - 6(K+1)(4K+1)Q^2 \right) \\
 &\left. + 4M^4 Q^4 \left((K(5K+9)+2) \sqrt{(K+1)(M-Q)(M+Q)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right) - 5(K+1)(2K(K+2)+1)Q^2 \right) \right] \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{QQ} &= \frac{\pi}{2K^2 M^2} \left[\left(\frac{16Q^4(K+1) \left((-2K-1)M^2 + Q^2 \right)}{\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right)} - 1 \right)^2 \right. \\
 &- \left(\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} (4KM^2 + M^2 - Q^2) + (2K+1)M^2 - Q^2 \right) \\
 &\times \left(\frac{2(K+1) \left((2K+1)M^2 - 3Q^2 \right)}{\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right)} + \frac{4(K+1)^2 \left(Q^3 - M^2(2KQ+Q) \right)^2}{\left((K+1)(M^2-Q^2) \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right) \right)^{3/2}} - 2 \right) \left. \right] \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

Calculando el primer termino de la métrica tenemos

$$\begin{aligned}
 MS_M + QS_Q &= \frac{\pi \left(\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} (4KM^2 + M^2 - Q^2) + (2K+1)M^2 - Q^2 \right)}{2K^2 M^2 \sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} \left((4K+1)M^2 - Q^2 \right)} \\
 &\times \left[(2K+1)M^2 \left(\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} (4KM^2 + M^2 - Q^2) - 2(K+1)Q^2 \right) \right. \\
 &\left. - Q^2 \sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)} (4KM^2 + M^2 - Q^2) + (K+1)Q^4 + (4K^2 + 5K + 1)M^4 \right], \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

del denominador de esta ecuación es fácil ver los valores singulares de la métrica

$$Q = \pm M \qquad Q = \pm\sqrt{4K+1}M. \qquad (6.29)$$

Sin embargo, recordemos que la interacción termodinámica esta dada por el escalar de curvatura R_g asociada a la métrica 6.23 por lo que no podemos darles una interpretación directa a esos puntos solo por aparecer en el denominador de esta. Por esa razón como ejemplo revisaremos el caso anteriormente visto con la termodinámica de agujeros negros haciendo $M = K = 1$ y obteniendo el correspondiente escalar de curvatura. La gráfica correspondiente a este caso esta dada por:

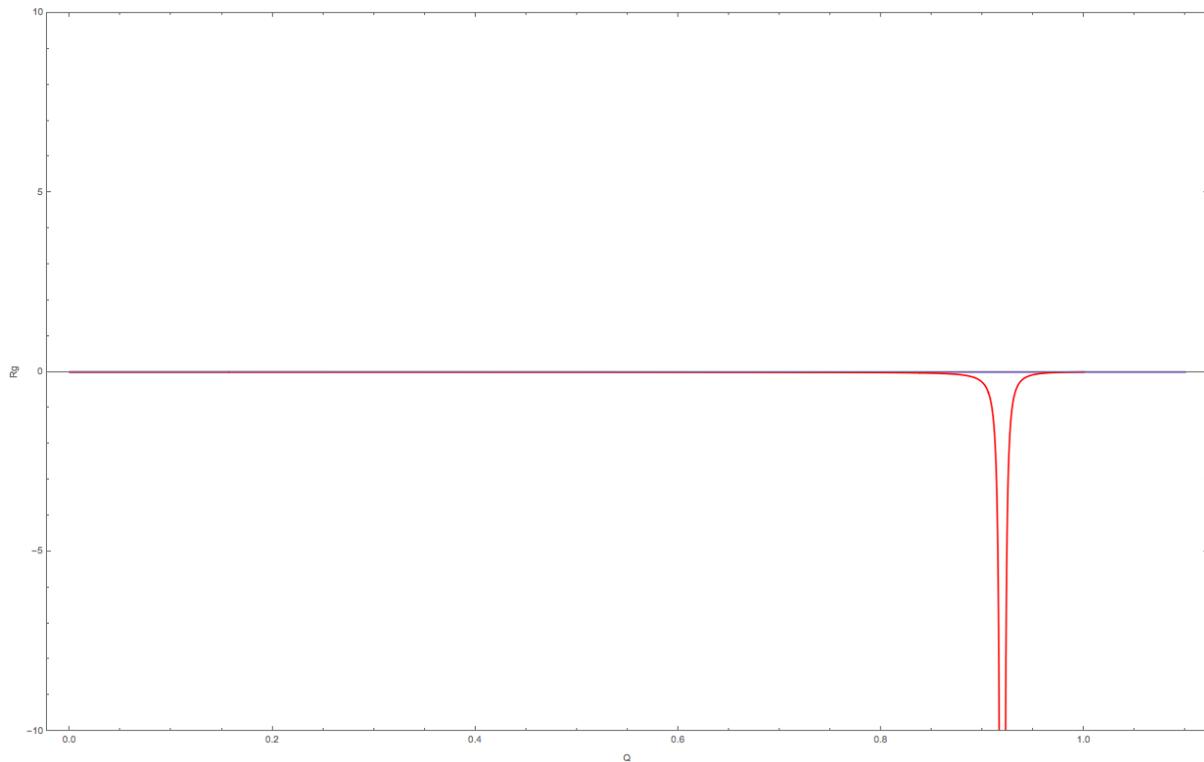


Figura 6.1: Q vs R_g

Como podemos observar el escalar de curvatura reproduce el mismo valor singular en $Q = 0,9195$ lo que según la interpretación de la GTD nos asegura la existencia de una transición de fase de segundo orden en ese punto.

Capítulo 7

Conclusiones

Partimos con el objetivo de describir el colapso gravitacional de una estrella idealizada la cual tiene toda su masa distribuida en su superficie. Para ello fue necesario describir dicho problema en el contexto de la geometría diferencial, caracterizando la superficie de un objeto que representa el cascarón de materia como una hipersuperficie que divide el espacio-tiempo en 2; el exterior descrito por la métrica de Reissner-Nordström y el interior dado por la métrica de Minkowski. Luego, nos valimos del formalismo de juntas de Israel para obtener las ecuaciones que describen su dinámica.

Una vez obtenidas dichas ecuaciones seguimos la evolución del cascarón hasta que eventualmente en su colapso la hipersuperficie que lo caracterizara se volviera nula, es decir, formara un horizonte de eventos y se convirtiera en un cascarón negro. La finalidad ahora era calcular el radio al que sucedía esto. Dado que la métrica que describe al cascarón no tiene un vector de Killing fue necesario hacer uso de su 3-velocidad aunque esto supuso la introducción de una constante K sin determinar. El resultado fue una infinidad de radios

$$R_h = \frac{M^2(2K + 1) - Q^2 \pm \sqrt{[M^2(2K + 1) - Q^2]^2 - K[4M^2Q^2K - (M^2 - Q^2)^2]}}{2MK}. \quad (7.1)$$

producto de la fuerte dependencia de la constante K . Para limitar la gran cantidad de valores que puede tomar tenemos la condición del discriminante de la raíz y/o eliminar la carga y reducirnos al caso del agujero negro de Schwarzschild. Al exigir que solo los radios que superen $R_2 = 2M$ tengan significado físico encontramos que solo los valores positivos de K cumplen esta condición. Esto es consistente con cálculos previos que involucraban la constante K por lo que nos indica que a diferencia de un agujero negro convencional, un cascarón negro colapsa antes y por ende forma primero su horizonte de eventos.

Posteriormente utilizando la termodinámica de agujeros negros realizamos un análisis de las propieda-

des termodinámicas del cascarón negro. Calculando su temperatura y capacidad calorífica obtuvimos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 T^{-1} = & \frac{\pi\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)(4KM^2+M^2-Q^2)} + (2K+1)M^2 - Q^2}{2K^2M^3\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)((4K+1)M^2-Q^2)}} \\
 & \times \left[(2K+1)M^2\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)((4K+1)M^2-Q^2)} \right. \\
 & \left. + (K+1)(4K+1)M^4 + Q^2\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)(4KM^2+M^2-Q^2)} - (K+1)Q^4 \right] \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C = & \pi\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)((4K+1)M^2-Q^2)} \\
 & \times (\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)(4KM^2+M^2-Q^2)} + (2K+1)M^2 - Q^2)^2 \\
 & \times \left((2K+1)M^2\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)((4K+1)M^2-Q^2)} + (K+1)(4K+1)M^4 \right. \\
 & \left. + Q^2\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)(4KM^2+M^2-Q^2)} - (K+1)Q^4 \right)^2 \\
 & \times \left[2K^2(K+1)M^2 \left(2(K+1)(2K+1)(4K+1)^2M^{10} - 2(K+1)Q^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3Q^8((K+2)\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)((4K+1)M^2-Q^2)}) \right. \right. \\
 & \left. \left. - 6(2K+1)M^2Q^6((K+2)\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)((4K+1)M^2-Q^2)} - 3(K+1)Q^2) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (4K+1)M^8((K(8K+9)+2)\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)((4K+1)M^2-Q^2)} - 6(K+1)(2KQ+Q^2)) \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2(2K+1)M^6Q^2((K(8K+9)+2)\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)((4K+1)M^2-Q^2)} - 6(K+1)(4K+1)Q^2) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4M^4Q^4((K(5K+9)+2)\sqrt{(K+1)(M^2-Q^2)((4K+1)M^2-Q^2)} - 5(K+1)(2K(K+2)+1)Q^2) \right) \right]^{-1} \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

Esta de más mencionar que la dependencia de la constante K es heredada del radio dada la definición de la entropía, por lo que las propiedades termodinámicas de un cascarón negro son evidentemente distintas a las de un agujero negro. Dicho de otra manera, las propiedades de un agujero negro son afectadas directamente por la distribución inicial de materia del objeto del cual se formó.

Revisamos el caso particular de $M = K = 1$ con el fin de encontrar valores singulares que hicieran que la capacidad calorífica divergiera hasta infinito y que nos indicaran una posible transición de fase. Dada la restricción de tomar a la masa como la unidad tuvimos que considerar un rango de valores limitado, solo aquellos puntos dentro de $Q \in [0, 1]$ tendrían significado físico. Graficando Q vs C encontramos un único punto singular en $Q = 0,9195$.

Por último nos adentramos en la geometría del sistema termodinámico dado por el cascarón negro utilizando el formalismo de la GTD. Encontramos una métrica termodinámica asociada al sistema y analizamos la curvatura de la misma. En la métrica destacaban los siguientes valores como puntos singulares:

$$Q = \pm M \qquad Q = \pm\sqrt{4K+1}M. \quad (7.4)$$

Sin embargo, cabe destacar que en la GTD la interacción termodinámica esta dada por el escalar de curvatura, así como también las divergencias del mismo son las que representan las verdaderas transiciones de fase. En nuestro caso el escalar obtenido era sumamente grande lo cual no nos decía mucho del sistema, así que se optó por tomar nuevamente $M = K = 1$ y analizar los resultados. Restringidos nuevamente a los valores de $Q \in [0, 1]$, haciendo la gráfica de Q vs R_g encontramos que el escalar divergía exactamente en el mismo valor que el calor específico $Q = 0,9195$ lo cual hacia consistente nuestros resultados.

Apéndice A

Cálculo de las componentes de la curvatura extrínseca

La curvatura extrínseca es definida sobre cualquiera de los dos lados de Σ por $K = n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$. Las componentes que no son iguales a cero son,

$$K_{\tau\tau} = n_{\alpha;\beta} u^\alpha u^\beta = -n_{\alpha;\beta} u^\beta = -n_\alpha a^\alpha \quad (\text{A.1})$$

y en particular

$$K_{-\tau}^\tau = h^{\tau\tau} K_{-\tau\tau} = 0, \quad (\text{A.2})$$

resultado inmediato pues las líneas de mundo comóviles en FLRW son geodésicas.

$$\begin{aligned} K_{-\theta}^\theta &= h^{\theta\theta} K_{-\theta\theta} = h^{\theta\theta} n_{\alpha;\beta} e_\theta^\alpha e_\theta^\beta = h^{\theta\theta} n_{\theta;\theta} \\ &= h^{\theta\theta} (n_{\theta;\theta} - \Gamma_{\theta\theta}^\gamma n_\gamma) = -h^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^\chi n_\chi \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\chi &= \frac{1}{2} g^{\chi\chi} (g_{\chi\theta,\theta} + g_{\theta\chi,\theta} - g_{\theta\theta,\chi}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{\chi\chi} g_{\theta\theta,\chi} = -\sin \chi_0 \cos \chi_0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$K_{-\theta}^\theta = \frac{1}{a^2 \sin^2 \chi_0} \cdot \sin \chi_0 \cos \chi_0 \cdot a = a^{-1} \cot \chi_0 \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} K_{-\phi}^\phi &= h^{\phi\phi} K_{-\phi\phi} = h^{\phi\phi} n_{\alpha;\beta} e_\phi^\alpha e_\phi^\beta = h^{\phi\phi} n_{\phi;\phi} \\ &= h^{\phi\phi} (n_{\phi;\phi} - \Gamma_{\phi\phi}^\gamma n_\gamma) = -h^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^\chi n_\chi \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\phi\phi}^{\chi} &= \frac{1}{2}g^{\chi\chi}(g_{\chi\phi,\phi} + g_{\phi\chi,\phi} - g_{\phi\phi,\chi}) \\
 &= -\frac{1}{2}g^{\chi\chi}g_{\phi\phi,\chi} = -\sin\chi_0 \cos\chi_0 \sin^2\theta
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 K_{-\theta}^{\theta} &= \frac{1}{a^2 \sin^2\chi_0 \sin^2\theta} \cdot \sin\chi_0 \cos\chi_0 \sin^2\theta \cdot a \\
 &= a^{-1} \cot\chi_0
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

En V^+

$$\begin{aligned}
 K_{+\tau}^{\tau} &= h^{\tau\tau} K_{-\tau\tau} = -h^{\tau\tau} n_{\alpha} a^{\alpha} \\
 &= \frac{1}{F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2} (n_t a^t + n_r a^r) \\
 &= n_t a^t + n_r a^r
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
 a^t &= \frac{du^t}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^t u^{\alpha} u^{\beta} \\
 &= \ddot{T} + \Gamma_{tt}^t u^t u^t + 2\Gamma_{tr}^t u^t u^r + \Gamma_{rr}^t u^r u^r \\
 &= \ddot{T} + \Gamma_{tt}^t \dot{T}^2 + 2\Gamma_{tr}^t \dot{T}\dot{R} + \Gamma_{rr}^t \dot{R}^2
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\Gamma_{tt}^t = 0 \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,r} + g_{rt,t} - g_{tr,t}) \\
 &= \frac{1}{2}g^{tt}g_{tt,r} = f^{-1}\frac{M}{r^2}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tr,r} + g_{rt,r} - g_{rr,t}) = 0 \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
 a^t &= \ddot{T} + 2F^{-1}\frac{M}{R^2}\dot{T}\dot{R} \\
 &= \ddot{T} + F^{-1}\dot{F}\dot{T}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
 a^r &= \frac{du^r}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^r u^\alpha u^\beta \\
 &= \ddot{R} + \Gamma_{tt}^r u^t u^t + 2\Gamma_{tr}^r u^t u^r + \Gamma_{rr}^r u^r u^r \\
 &= \ddot{R} + \Gamma_{tt}^r \dot{T}^2 + 2\Gamma_{tr}^r \dot{T}\dot{R} + \Gamma_{rr}^r \dot{R}^2
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rt,t} + g_{tr,t} - g_{tt,r}) \\
 &= -\frac{1}{2}g^{rr}g_{tt,r} = f\frac{M}{r^2}
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\Gamma_{tr}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rt,r} + g_{rr,t} - g_{tr,r}) = 0 \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,r} = \frac{1}{2}ff_{,r}^{-1} = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\right)_{,r} \\
 &= \frac{1}{2}f\left(\frac{r}{r-2M}\right)_{,r} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{r-2M-r}{(r-2M)^2}\right) \\
 &= -f^{-1}\frac{M}{r^2}
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 a^r &= \ddot{R} + F\frac{M}{R^2}\dot{T}^2 - F^{-1}\frac{M}{R^2}\dot{R}^2 \\
 &= \ddot{R} + \frac{F\dot{F}\dot{T}^2}{2\dot{R}} - \frac{1}{2}F^{-1}\dot{F}\dot{R}
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
 K_{+\tau}^r &= -\dot{R}(\ddot{T} + F^{-1}\dot{F}\dot{T}) + \dot{T}(\ddot{R} + \frac{F\dot{F}\dot{T}^2}{2\dot{R}} - \frac{1}{2}F^{-1}\dot{F}\dot{R}) \\
 &= \dot{T}\ddot{R} - \dot{R}\ddot{T} + \frac{F\dot{F}\dot{T}^3}{2\dot{R}} - \frac{3}{2}F^{-1}\dot{F}\dot{R}\dot{T} \\
 &= \frac{1}{\dot{R}}[\dot{T}\dot{R}\ddot{R} - \dot{R}^2\ddot{T} + \frac{1}{2}F\dot{F}\dot{T}^3 - \frac{3}{2}F^{-1}\dot{F}\dot{R}^2\dot{T}]
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Derivando la ecuación (4.13) respecto a τ definida anteriormente tenemos

$$\dot{\beta}(R, \dot{R}) = \dot{F}\dot{T} + F\ddot{T} = \frac{1}{2}\frac{2\dot{R}\ddot{R} + \dot{F}}{\sqrt{\dot{R}^2 + F}} = \frac{1}{2}\frac{2\dot{R}\ddot{R} + \dot{F}}{F\dot{T}}, \tag{A.21}$$

despejando para $\dot{R}\ddot{R}$ obtenemos,

$$\dot{R}\ddot{R} = F\dot{F}\dot{T}^2 + F^2\ddot{T}\dot{T} - \frac{1}{2}\dot{F}, \tag{A.22}$$

y sustituyendo en la ecuación para $K_{+\tau}^\tau$ encontramos

$$\begin{aligned}
 K_{+\tau}^\tau &= \frac{1}{\dot{R}} [\dot{T}(F\dot{F}\dot{T}^2 + F^2\dot{T}\ddot{T} - \frac{1}{2}\dot{F}) - \dot{R}^2\ddot{T} + \frac{1}{2}F\dot{F}\dot{T}^3 - \frac{3}{2}F^{-1}\dot{F}\dot{R}^2\dot{T}] \\
 &= \frac{1}{\dot{R}} [F\dot{F}\dot{T}^3 + F^2\dot{T}^2\ddot{T} - \frac{1}{2}\dot{F}\dot{T} - \dot{R}^2\ddot{T} + \frac{1}{2}F\dot{F}\dot{T}^3 - \frac{3}{2}F^{-1}\dot{F}\dot{R}^2\dot{T}] \\
 &= \frac{1}{\dot{R}} [(F^2\dot{T} - \dot{R}^2)\ddot{T} + (\frac{3}{2}(F\dot{T}^2 - F^{-1}\dot{R}^2) - \frac{1}{2})\dot{F}\dot{T}].
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

Usando la relación (A.39) dada por la condición de juntura, encontramos finalmente que:

$$K_{+\tau}^\tau = \frac{1}{\dot{R}} [F\ddot{T} + \dot{F}\dot{T}] = \frac{\dot{\beta}(R, \dot{R})}{\dot{R}} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
 K_{+\theta}^\theta &= h^{\theta\theta} K_{-\theta\theta} = h^{\theta\theta} n_{\alpha;\beta} e_\theta^\alpha e_\theta^\beta = h^{\theta\theta} n_{\theta;\theta} \\
 &= h^{\theta\theta} (n_{\theta,\theta} - \Gamma_{\theta\theta}^\gamma n_\gamma) = -h^{\theta\theta} (\Gamma_{\theta\theta}^t n_t + \Gamma_{\theta\theta}^r n_r)
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (g_{t\theta,\theta} + g_{\theta t,\theta} - g_{\theta\theta,t}) = 0 \tag{A.26}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (g_{r\theta,\theta} + g_{\theta r,\theta} - g_{\theta\theta,r}) = -\frac{1}{2} g^{rr} g_{\theta\theta,r} = -fr \tag{A.27}$$

$$K_{+\theta}^\theta = \frac{1}{R^2} \cdot FR \cdot \dot{T} = \frac{\beta(R, \dot{R})}{R} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
 K_{+\phi}^\phi &= h^{\phi\phi} K_{-\phi\phi} = h^{\phi\phi} n_{\alpha;\beta} e_\phi^\alpha e_\phi^\beta = h^{\phi\phi} n_{\phi;\phi} \\
 &= h^{\phi\phi} (n_{\phi,\phi} - \Gamma_{\phi\phi}^\gamma n_\gamma) = -h^{\phi\phi} (\Gamma_{\phi\phi}^t n_t + \Gamma_{\phi\phi}^r n_r)
 \end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (g_{t\phi,\phi} + g_{\phi t,\phi} - g_{\phi\phi,t}) = 0 \tag{A.30}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (g_{r\phi,\phi} + g_{\phi r,\phi} - g_{\phi\phi,r}) = -\frac{1}{2} g^{rr} g_{\phi\phi,r} \tag{A.31}$$

$$= -fr \sin^2 \theta \tag{A.32}$$

$$K_{+\phi}^\phi = \frac{1}{R^2 \sin^2} \cdot FR \sin^2 \theta \cdot \dot{T} = \frac{\beta(R, \dot{R})}{R} \tag{A.33}$$

Apéndice B

Cálculo del los escalares de curvatura

Para calcular estos invariantes usaremos el método de tétradas, en el cual utilizaremos una base ortonormal no coordinada de campos vectoriales suaves $(e_\mu)^a$ que satisfacen [32]:

$$(e_\mu)^a (e_\nu)_a = \eta_{\mu\nu} \quad (\text{B.1})$$

siendo $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Para este desarrollo utilizaremos los índices griegos μ, ν para nombrar los vectores de las bases que tendrán un rango de 1 a 3; el índice latino a simplemente nos dice que e_μ es un vector.

En este formalismo el tensor de Riemann se define como:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^a (e_\sigma)^b (\nabla_a \omega_{b\mu\nu} - \nabla_b \omega_{a\mu\nu}) - \eta^{\alpha\beta} \{ \omega_{a\beta\mu} \omega_{b\alpha\nu} - \omega_{b\beta\mu} \omega_{a\alpha\nu} \} \quad (\text{B.2})$$

en donde los términos a calcular $\omega_{a\mu\nu}$ y $\omega_{b\mu\nu}$ satisfacen la siguiente propiedad:

$$\omega_{a\mu\nu} = -\omega_{a\nu\mu}. \quad (\text{B.3})$$

Dada la métrica del cascarón

$$d\Sigma_+^2 = -d\tau^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (\text{B.4})$$

una conveniente base ortonormal para esta métrica es

$$(e_0)_a = (d\tau)_a \quad (\text{B.5})$$

$$(e_1)_a = R(d\theta)_a \quad (\text{B.6})$$

$$(e_2)_a = R \sin(\theta)(d\phi)_a \quad (\text{B.7})$$

calculando las derivadas

$$\partial[a(e_0)_b] = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\partial[a(e_1)_b] = \dot{R}(d\tau)[a(d\theta)_b] \quad (\text{B.9})$$

$$\partial[a(e_2)_b] = \dot{R} \sin(\theta)(d\tau)[a(d\phi)_b] + R \cos(\theta)(d\theta)[a(d\phi)_b] \quad (\text{B.10})$$

Con lo anterior, usando la propiedad (236) vamos a resolver la siguiente ecuación a fin de obtener $\omega_{a\mu\nu}$ y $\omega_{b\mu\nu}$

$$\partial[a(e_\sigma)_b] = \eta^{\mu\nu}(e_\mu)[a\omega_b]_{\sigma\nu} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \partial[a(e_0)_b] &= 0 \\ &= \eta^{00}(e_0)[a\omega_b]_{00} + \eta^{11}(e_1)[a\omega_b]_{01} + \eta^{22}(e_2)[a\omega_b]_{02} \\ &= R(d\theta)[a\omega_b]_{01} + R \sin(\theta)(d\phi)[a\omega_b]_{02} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \partial[a(e_1)_b] &= \dot{R}(d\tau)[a(d\theta)_b] \\ &= \eta^{00}(e_0)[a\omega_b]_{10} + \eta^{11}(e_1)[a\omega_b]_{11} + \eta^{22}(e_2)[a\omega_b]_{12} \\ &= -(d\tau)[a\omega_b]_{10} + R(d\theta)[a\omega_b]_{12} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \partial[a(e_2)_b] &= \dot{R} \sin(\theta)(d\tau)[a(d\phi)_b] + R \cos(\theta)(d\theta)[a(d\phi)_b] \\ &= \eta^{00}(e_0)[a\omega_b]_{20} + \eta^{11}(e_1)[a\omega_b]_{21} + \eta^{22}(e_2)[a\omega_b]_{22} \\ &= -(d\tau)[a\omega_b]_{20} + R(d\theta)[a\omega_b]_{21}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos las 1-formas de conexión:

$$\omega_{b01} = \dot{R}(d\theta)_b \quad (\text{B.15})$$

$$\omega_{b02} = \dot{R} \sin(\theta)(d\phi)_b \quad (\text{B.16})$$

$$\omega_{b12} = -\cos(\theta)(d\phi)_b \quad (\text{B.17})$$

teniendo ya las 1-formas de conexión calculemos las componentes del Riemann diferentes de 0

$$\begin{aligned}
 R_{ab01} &= \nabla_{[a}\omega_{b]01} - \eta^{\alpha\beta}\{\omega_{[a|\beta 0}|\omega_{b]\alpha 1}\} \\
 &= \nabla_{[a}\dot{R}(\theta)_{b]} - \eta^{00}[\omega_{[a|00}|\omega_{b]01} - \eta^{11}[\omega_{[a|10}|\omega_{b]11} - \eta^{22}[\omega_{[a|20}|\omega_{b]21}] \\
 &= \ddot{R}(d\tau)_{[a}(d\theta)_{b]}
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
 R_{ab02} &= \nabla_{[a}\omega_{b]02} - \eta^{\alpha\beta}\{\omega_{[a|\beta 0}|\omega_{b]\alpha 2}\} \\
 &= \nabla_{[a}\dot{R}\sin(\theta)(\phi)_{b]} - \eta^{00}[\omega_{[a|00}|\omega_{b]02} - \eta^{11}[\omega_{[a|10}|\omega_{b]12} - \eta^{22}[\omega_{[a|20}|\omega_{b]22}] \\
 &= \ddot{R}\sin(\theta)(d\tau)_{[a}(d\phi)_{b]}
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}
 R_{ab12} &= \nabla_{[a}\omega_{b]12} - \eta^{\alpha\beta}\{\omega_{[a|\beta 1}|\omega_{b]\alpha 2}\} \\
 &= \nabla_{[a}\cos(\theta)(d\phi)_{b]} - \eta^{00}[\omega_{[a|01}|\omega_{b]02} - \eta^{11}[\omega_{[a|11}|\omega_{b]12} - \eta^{22}[\omega_{[a|21}|\omega_{b]22}] \\
 &= \sin(\theta)(d\theta)_{a[}(d\phi)_{b]} + \dot{R}^2\sin(\theta)(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}
 \end{aligned} \tag{B.20}$$

contrayendo los primeros dos indices

$$\begin{aligned}
 R_{0101} &= (e_0)^a(e_1)^b\ddot{R}(d\tau)_{[a}(d\theta)_{b]} \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
 R_{0202} &= (e_0)^a(e_2)^b\ddot{R}\sin(\theta)(d\tau)_{[a}(d\phi)_{b]} \\
 &= \frac{\ddot{R}\sin(\theta)}{2R\sin(\theta)} \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right)
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}
 R_{1212} &= (e_1)^a(e_2)^b\{\sin(\theta)(d\theta)_{a[}(d\phi)_{b]} + \dot{R}^2\sin(\theta)(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}\} \\
 &= \frac{1}{2R^2\sin(\theta)}\{\sin(\theta) + \dot{R}^2\sin(\theta)\} \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 + \dot{R}^2}{R^2}\right)
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

usando la métrica $\eta^{\alpha\beta}$ calculemos las componentes contravariantes:

$$\begin{aligned} R^{0101} &= \eta^{00}\eta^{11}\eta^{00}\eta^{11}R_{0101} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} R^{0202} &= \eta^{00}\eta^{22}\eta^{00}\eta^{22}R_{0202} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} R^{1212} &= \eta^{11}\eta^{22}\eta^{11}\eta^{22}R_{0101} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \dot{R}^2}{R^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Una vez que tenemos todas las componentes diferentes de cero del tensor de Riemann, podemos simplemente contraer los índices para obtener tanto el escalar de Ricci como el escalar de Kretschmann:

$$\begin{aligned} R &= \eta^{00}\eta^{11}R_{0101} + \eta^{00}\eta^{22}R_{0202} + \eta^{11}\eta^{22}R_{1212} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{R}}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \dot{R}^2}{R^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 2\ddot{R}R + \dot{R}^2}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} K &= R^{0101}R_{0101} + R^{0202}R_{0202} + R^{1212}R_{1212} \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\{ \frac{\ddot{R}}{R} \right\}^2 + \left\{ \frac{\ddot{R}}{R} \right\}^2 + \left\{ \frac{1 + \dot{R}^2}{R^2} \right\}^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 + 2\dot{R}^2 + 2\ddot{R}R^2 + \dot{R}^4}{R^4} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Bibliografía

- [1] James M Bardeen, Brandon Carter, and Stephen W Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31(2):161–170, 1973.
- [2] Alessandro Bravetti, Cesar S Lopez-Monsalvo, Francisco Nettel, and Hernando Quevedo. The conformal metric structure of geometrothermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 54(3):033513, 2013.
- [3] H.B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Wiley, 1985.
- [4] B. Carter. Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. *Physical Review Letters*, 26:331–333, February 1971.
- [5] Fay Dowker. Black holes. *Imperial College London, MSc Quantum Fields and Fundamental Forces, Lecture Notes*, 2013.
- [6] Albert Einstein. On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses. *Annals of Mathematics*, pages 922–936, 1939.
- [7] Gyula Fodor, Kouji Nakamura, Yoshimi Oshiro, and Akira Tomimatsu. Surface gravity in dynamical spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, 54(6):3882, 1996.
- [8] J Willard Gibbs. The collected works of j. willard gibbs. Technical report, Yale Univ. Press., 1948.
- [9] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Comm. Math. Phys.*, 43(3):199–220, 1975.
- [10] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [11] Stephen W Hawking and Werner Israel. *Three hundred years of gravitation*. Cambridge University Press, 1989.
- [12] Richard Conn Henry. Kretschmann scalar for a kerr-newman black hole. *The Astrophysical Journal*, 535(1):350, 2000.

- [13] Werner Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 44(1):1–14, 1966.
- [14] Werner Israel. Event horizons in static vacuum space-times. *Phys. Rev.*, 164:1776–1779, Dec 1967.
- [15] Werner Israel. Event horizons in static electrovac space-times. *Comm. Math. Phys.*, 8(3):245–260, 1968.
- [16] Cornelius Lanczos. Ein vereinfachendes koordinatensystem für die einsteinschen gravitationsgleichungen. *Phys. Z*, 23:537–539, 1922.
- [17] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. 1973.
- [18] R Mrugała. Geometrical formulation of equilibrium phenomenological thermodynamics. *Reports on Mathematical Physics*, 14(3):419–427, 1978.
- [19] R Mrugała. Submanifolds in the thermodynamic phase space. *Reports on Mathematical Physics*, 21(2):197–203, 1985.
- [20] Alex B Nielsen and Jong Hyuk Yoon. Dynamical surface gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 25(8):085010, 2008.
- [21] J Robert Oppenheimer and Hartland Snyder. On continued gravitational contraction. *Physical Review*, 56(5):455, 1939.
- [22] Eric Poisson. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004.
- [23] Hernando Quevedo. Geometrothermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 48(1):013506, 2007.
- [24] Hernando Quevedo. Geometrothermodynamics of black holes. *General Relativity and Gravitation*, 40(5):971–984, 2008.
- [25] George Ruppeiner. Thermodynamics: A riemannian geometric model. *Physical Review A*, 20(4):1608, 1979.
- [26] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *arXiv preprint physics/9905030*, 1999.
- [27] José MM Senovilla. Singularity theorems and their consequences. *General Relativity and Gravitation*, 30(5):701–848, 1998.
- [28] Kip Thorne. *Black Holes & Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy (Commonwealth Fund Book Program)*. WW Norton & Company, 1995.

- [29] Paul K Townsend. Black holes. *arXiv preprint gr-qc/9707012*, 1997.
- [30] Robert M Wald. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. University of Chicago Press, 1994.
- [31] Robert M. Wald. The Thermodynamics of Black Holes. *NATO Sci. Ser. II*, 60:477–522, 2002.
- [32] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago Press (Chicago, 1984), 2007.
- [33] Frank Weinhold. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. *The Journal of Chemical Physics*, 63(6):2479–2483, 1975.