



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**CONTROL DE FUERZA EN SISTEMAS**  
**TELEOPERADOS CON RETARDOS VARIANTES EN**  
**EL TIEMPO**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

PRESENTA:  
**ÓSCAR HERNÁNDEZ ORTIZ**

TUTOR PRINCIPAL  
**DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ, FI-UNAM**

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., AGOSTO, 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando  
Secretario: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto  
1er Vocal: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio  
2o. Vocal: Dr. Nuño Ortega Emmanuel  
3er. Vocal: Dr. Rodríguez Angeles Alejandro

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ, FI-UNAM

---



---

.

---

*Esto es por ustedes.  
Arturo, Aide y Gaby.  
Por su apoyo incondicional.*  
**Mi familia.**



# Reconocimientos

---

*Primero que nada, gracias a dios por permitirme la vida y la salud para realizar este trabajo.*

*Le agradezco a la UNAM por ofrecerme siempre las puertas abiertas para incrementar mi formación, mediante educación gratuita de la más alta calidad.*

*Le agradezco al Dr. Marco Arteaga por su apoyo y confianza para realizar este trabajo. Porque a pesar de las dudas, confió y favoreció que desarrollara mis ideas; además de ser mi maestro y mi guía para realizar el trabajo de investigación.*

*Gracias a mis compañeros del laboratorio de robótica, por darme tan cordial bienvenida, y ofrecerme siempre su tiempo y su ayuda.*

*Gracias a mis entrenadores, amigos y compañeros de entrenamiento; por su confianza y reconocimiento; porque además de complementar mi formación educativa, este periodo también estuvo lleno de logros deportivos.*

*Gracias a mi familia: Arturo, Aide y Gaby; por su apoyo durante la totalidad de mis estudios. Porque al principio me ayudaron a hacer; cuando ya no podían ayudarme a hacer, me ayudaron a pensar; y cuando tampoco podían ayudarme con eso, me ayudaban con apoyo moral. Gracias por su confianza inquebrantable.*

*Una mención especial para Luz Gabriela Castillo. Porque, a pesar de que estuvimos en diferentes campos disciplinarios, caminamos juntos este trayecto; porque en los momentos en que las cosas se pusieron difíciles estuvo siempre a mi lado para decirme “levántate y sigue andando”. Porque sin su apoyo y motivación, no estaría aquí el día de hoy.*

*Se agradece el apoyo del Proyecto “Diseño de observadores para la teleoperación bilateral de sistemas con retardo”. Ref. IN114617. PAPIIT. y al CONACYT por su apoyo para que yo pudiera realizar mis estudios de posgrado.*



# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Óscar Hernández Ortiz. Ciudad Universitaria, CD. MX., Agosto, 2019



# Resumen

---

El ser humano ha desarrollado distintas herramientas en la búsqueda de realizar tareas de la forma más sencilla y eficiente posible. Del mismo modo, ha buscado realizar tareas en ambientes peligrosos o de difícil acceso; por lo que se ha determinado conveniente el desarrollo de sistemas teleoperados. Estos sistemas son diseñados con el objetivo de ofrecer al operador la sensación de hallarse en el ambiente remoto, así como proveerlo de la capacidad de interactuar con el entorno, del mismo modo en que lo haría de encontrarse ahí. Debido a que los sistemas de teleoperación requieren de un canal de comunicación para la transmisión de la información necesaria para su funcionamiento, su desempeño se puede ver afectado por el retardo que podría presentarse en dicho canal. Este retardo en las comunicaciones suele aparecer cuando el sistema de teleoperación cubre una distancia considerablemente grande, o bien, cuando el canal de comunicación se comparte con el flujo de información de otra clase. Cuando el retardo se encuentra presente en el sistema de teleoperación, la telepresencia y la transparencia resultan afectadas, e incluso el sistema puede llegar a presentar un comportamiento inaceptable. Debido a esto, el esquema de control debe ser diseñado considerando la posible presencia de retardos.

En investigaciones reportadas con anterioridad se ha propuesto utilizar el mismo esquema de control para ambos manipuladores del sistema de teleoperación, buscando que los robots se sigan mutuamente, y se ha incluido la retroalimentación de la fuerza que se aplica sobre cada manipulador. Si bien, la propuesta anterior garantiza resolver el problema de consenso o sincronización, así como mantener los errores de seguimiento de posición y de fuerza, arbitrariamente pequeños; surge la disyuntiva al definir la cota final de los errores de seguimiento, ya que, al mejorar la precisión en el seguimiento de posición, el operador requiere aplicar mayor fuerza para mover el manipulador local. En el presente trabajo se propone un esquema de control para el sistema de teleoperación, que garantiza la obtención de cierta correspondencia cinemática retardada para el operador, de modo que este es capaz de percibir el entorno remoto; además de que se pueden buscar errores de seguimiento de posición arbitrariamente pequeños, sin comprometer la manipulación del robot local, por parte del operador. La prueba del funcionamiento del esquema de control propuesto se encuentra complementada mediante los resultados experimentales, obtenidos al implementarlo sobre un sistema de teleoperación.





# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
1.2. Estado del arte . . . . .	2
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.4. Contribución . . . . .	4
1.5. Estructura . . . . .	4
<b>2. Marco teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Límite de funciones . . . . .	7
2.2. Modelo cinemático . . . . .	7
2.2.1. Cinemática directa . . . . .	8
2.2.2. Cinemática diferencial . . . . .	9
2.3. Modelo dinámico . . . . .	10
2.3.1. Sistema de teleoperación . . . . .	10
<b>3. Diseño del controlador</b>	<b>15</b>
3.1. Objetivos . . . . .	15
3.2. Solución propuesta . . . . .	16
3.3. Resultado principal . . . . .	18
<b>4. Resultados experimentales</b>	<b>33</b>
4.1. Prueba sin retardo . . . . .	34
4.1.1. Superficie rígida . . . . .	34
4.1.2. Superficie deformable . . . . .	39
4.2. Mismo retardo para ambos manipuladores. . . . .	43
4.2.1. Superficie rígida . . . . .	44
4.2.2. Superficie deformable . . . . .	48
4.3. Retardo mayor para el local. . . . .	51
4.3.1. Superficie rígida . . . . .	52

## ÍNDICE GENERAL

---

4.3.2. Superficie deformable . . . . .	56
4.4. Retardo mayor para el remoto. . . . .	59
4.4.1. Superficie rígida . . . . .	60
4.4.2. Superficie deformable . . . . .	64
4.5. Análisis de resultados . . . . .	67
<b>5. Conclusiones</b>	<b>71</b>
5.1. Trabajo futuro . . . . .	72
<b>A. Implementación / teoremas auxiliares</b>	<b>75</b>
A.1. Robot <i>Geomagic Touch</i> . . . . .	75
A.1.1. Cinemática directa . . . . .	76
A.1.2. Jacobiano . . . . .	77
A.1.3. Especificaciones . . . . .	77
A.1.4. Pares de gravedad . . . . .	78
A.1.5. Implementación . . . . .	78
A.2. Teoremas auxiliares . . . . .	79
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

## Índice de figuras

---

2.1. Reducción a coordenadas cilíndricas. . . . .	9
3.1. Definición del error local $e_1$ . . . . .	17
4.1. Sistema de teleoperación. . . . .	33
4.2. Retardo propio del sistema. . . . .	34
4.3. Superficie rígida como restricción. . . . .	34
4.4. Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo $\mathbf{q}_1(t)$ (—) vs $\mathbf{q}_r(t)$ (- - - -). . . . .	35
4.5. Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t)$ . . . . .	35
4.6. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -). . . . .	36
4.7. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista frontal) en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -). . . . .	36
4.8. Error local en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo $e_1(t)$ . . . . .	37
4.9. Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo $\mathbf{F}_h(t)$ (—) vs $\mathbf{F}_e(t)$ (- - - -). . . . .	38
4.10. Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t)$ . . . . .	38
4.11. Superficie deformable como restricción. . . . .	39
4.12. Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo $\mathbf{q}_1(t)$ (—) vs $\mathbf{q}_r(t)$ (- - - -). . . . .	40
4.13. Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t)$ . . . . .	40
4.14. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -). . . . .	41
4.15. Error local en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo $e_1(t)$ . . . . .	41

4.16. Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo $\mathbf{F}_h(t)$ (—) vs $\mathbf{F}_e(t)$ (- - - -). . . . .	42
4.17. Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t)$ . . . . .	42
4.18. Retardo variante en el tiempo, inducido al sistema, con media de aproximadamente 0.75 seg. . . . .	43
4.19. Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{q}_r(t)$ (- - - -). . . . .	44
4.20. Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ . . . . .	44
4.21. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -). . . . .	45
4.22. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista frontal) en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -). . . . .	45
4.23. Error local en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $e_1(t)$ . . . . .	46
4.24. Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{F}_e(t)$ (- - - -). . . . .	47
4.25. Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ . . . . .	47
4.26. Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{q}_r(t)$ (- - - -). . . . .	48
4.27. Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ . . . . .	48
4.28. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -). . . . .	49
4.29. Error local en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $e_1(t)$ . . . . .	49
4.30. Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{F}_e(t)$ (- - - -). . . . .	50
4.31. Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s] $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ . . . . .	50

4.32. Retardo total en la comunicación entre el robot local y el remoto (mayor retardo en el local). . . . .	51
4.33. Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{q}_r(t)$ (- - - -). . . . .	52
4.34. Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ . . . . .	52
4.35. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -). . . . .	53
4.36. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista frontal) en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -). . . . .	53
4.37. Error local en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{e}_1(t)$ . . . . .	54
4.38. Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{F}_e(t)$ (- - - -). . . . .	55
4.39. Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ . . . . .	55
4.40. Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{q}_r(t)$ (- - - -). . . . .	56
4.41. Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ . . . . .	56
4.42. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -). . . . .	57
4.43. Error local en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{e}_1(t)$ . . . . .	57
4.44. Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{F}_e(t)$ (- - - -). . . . .	58
4.45. Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ . . . . .	58
4.46. Retardo asimétrico: mayor retardo en la comunicación entre el robot remoto y el local. . . . .	59
4.47. Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{q}_r(t)$ (- - - -). . . . .	60
4.48. Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ . . . . .	60

4.49. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -).	61
4.50. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista frontal) en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -).	61
4.51. Error local en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto $e_1(t)$ .	62
4.52. Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{F}_e(t)$ (- - - -).	63
4.53. Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ .	63
4.54. Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{q}_r(t)$ (- - - -).	64
4.55. Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ .	64
4.56. Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto $\mathbf{x}_1$ (—) vs $\mathbf{x}_r$ (- - - -).	65
4.57. Error local en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto $e_1(t)$ .	65
4.58. Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ (—) vs $\mathbf{F}_e(t)$ (- - - -).	66
4.59. Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ .	66
A.1. Robot <i>Geomagic Touch de 3D Systems</i> .	75
A.2. Reducción a coordenadas cilíndricas (D-H) del robot <i>Geomagic Touch</i> .	76

# Índice de tablas

---

4.1. Valores RMS de los errores de seguimiento de posición y fuerza, para cada experimento (completo). . . . .	68
4.2. Valores RMS de los errores de seguimiento de posición y fuerza, para cada experimento (solo movimiento restringido). . . . .	69
A.1. Especificaciones técnicas del robot <i>Geomagic Touch de 3D Systems</i> . . .	77
A.2. Relación giro-cuentas de encoders <i>Geomagic Touch de 3D Systems</i> . . .	78





# Introducción

---

Entre las distintas herramientas que ha desarrollado el hombre, los manipuladores robóticos destacan por su capacidad de realizar tareas de forma similar a como las llevaría a cabo una persona; esto también debido a la similitud en su estructura. Una aplicación importante de los manipuladores se encuentra en los sistemas de teleoperación, ya que en estos se combina la precisión en los movimientos del robot, con las habilidades y el conocimiento de un operador. De esta manera, al ofrecer a un operador la posibilidad de interactuar en un entorno remoto, permite ejecutar una gran variedad de tareas de considerable complejidad en un entorno que no permite al operador acceder a él. Entre las aplicaciones de los sistemas teleoperados se encuentra la telecirugía, aplicaciones aeroespaciales, misiones submarinas, manipulación de sustancias peligrosas, entre otras [1].

Un robot manipulador se define como un brazo mecánico articulado formado por eslabones, los cuales están conectados a través de uniones o articulaciones que permiten el movimiento relativo entre ellos. El número de articulaciones en un manipulador define los grados de libertad que posee [2].

Un sistema de teleoperación se compone por un robot manipulador local, el cual es gobernado por un operador; y un robot manipulador remoto, el cual busca interactuar con el entorno de modo que resulte de utilidad para la realización de alguna tarea. El retardo en las comunicaciones puede afectar el desempeño del sistema de teleoperación, y este suele aparecer cuando los robots se encuentran separados entre sí por una distancia considerablemente grande; o bien, cuando las comunicaciones pudieran realizarse a través de una red con un flujo saturado de datos.

Se busca que el sistema de teleoperación ofrezca telepresencia y transparencia al operador. Se entiende por telepresencia lograr que el operador tenga la sensación de estar en el entorno remoto; mientras que la transparencia significa que el medio físico entre el operador humano y el ambiente remoto, no posee un comportamiento dinámico. Sin embargo, debido al retardo en las comunicaciones, resulta imposible obtener transparencia en el sistema de teleoperación. Debido a esto, únicamente se busca obtener cierta correspondencia cinemática retardada [3].

### 1.1. Motivación

El retardo en las comunicaciones entre ambos robots puede dificultar la manipulación del sistema de teleoperación, e incluso llegar a presentar un comportamiento inaceptable que podría resultar peligroso para alguna aplicación. Es debido a ello que, el esquema de control que hace funcionar al sistema de teleoperación debe ser diseñado tomando en cuenta los posibles retardos en las comunicaciones, y más aún, suponer que estos pueden cambiar en el tiempo. Si bien, para lograr cierta robustez y facilitar la implementación del controlador del sistema, se busca utilizar controladores que no requieran del conocimiento exacto del modelo dinámico del sistema.

### 1.2. Estado del arte

Entendiendo a la teleoperación como la realización de una acción a distancia, esta extiende la capacidad del ser humano de manipular objetos de forma remota, al proveer al operador de condiciones similares a aquellas que se encuentran en el ambiente remoto [1]. El retardo en las comunicaciones puede causar comportamientos no deseados en el sistema, por lo que lidiar con el retardo ha sido uno de los mayores desafíos a los que se ha enfrentado la investigación en el campo de la teleoperación bilateral de robots. Así mismo, se ha planteado la posibilidad de escalar la fuerza y precisión del operador humano, para otorgarle la capacidad de manipular objetos pesados, o bien, realizar tareas delicadas en objetos de pequeñas dimensiones.

El primer teleoperador de manipuladores maestro-esclavo fue construido por Raymond Goertz alrededor de 1949 para el manejo de material radioactivo [1]. Durante los años de 1960 se incrementó el interés por entender el efecto de los retardos de tiempo en los sistemas de teleoperación, así como la retroalimentación de fuerza al manipulador maestro [4]. Fue en 1965 que en [4] realizaron experimentos para determinar el efecto de los retardos, en el desempeño del operador humano al realizar una tarea a través de los manipuladores teleoperados; donde encontraron que el operador humano adquiere un comportamiento en el que, primero mueve un poco el manipulador maestro, y luego observa el movimiento correspondiente por el manipulador esclavo, de modo que se asegura de que la tarea se realiza correctamente. Cuando el robot esclavo posee sensores para reflejar las fuerzas de reacción de la tarea que está llevando a cabo, al operador humano a través del robot maestro; se le denomina teleoperación bilateral.

A mediados de los años 1980, se comenzaron análisis más avanzados, basados en la Teoría de Lyapunov [5]. A inicios de los años 1990 se comenzó a utilizar la teoría de redes a través de la representación de impedancias [6], representación híbrida [7], así como teoría de dispersión y control basado en pasividad [8] [9]. Se han planteado otros problemas que han surgido con las comunicaciones, relacionados con los retardos de tiempo; entre ellos se encuentra el reordenamiento de los paquetes de datos en la red, así como las variaciones aleatorias del retardo, el intercambio de información en tiempo discreto y la pérdida de información.

En [10] y [11] se observa que, para lograr la transparencia en el sistema de teleoperación, es necesario incluir la velocidad y fuerza retroalimentada en las leyes de control, tanto para el maestro como para el esclavo. En [12] se propone un esquema de control adaptable para lidiar con la incertidumbre paramétrica.

En investigaciones más recientes, como [13] se propone un control basado en pasividad, capaz de mantener los errores de seguimiento y velocidades acotadas, sin la necesidad de mediciones de velocidad, considerando retardos de tiempo variables, y bajo la suposición de que el operador humano y el ambiente, actúan como sistemas pasivos. En [3] se proponen nuevas nociones en términos de la posición y fuerza, para la obtención de correspondencia cinemática retardada unilateral, con el fin de abordar el problema de los retardos variantes en el tiempo; así mismo, se propone un esquema de control-observador con el que se garantiza que los errores de observación y seguimiento tienden a cero al dejar a ambos robots en movimiento libre, así como que el robot esclavo sigue la trayectoria retardada comandada por el robot maestro, y finalmente, le ofrece al operador cierta correspondencia cinemática retardada cuando el robot esclavo entra en contacto con el entorno, únicamente bajo la suposición de que las fuerzas ejercidas por el operador humano y el entorno están acotadas.

En otros trabajos basados en [3], además de proponer el esquema de control-observador sin el conocimiento exacto del modelo, del párrafo anterior; se introducen las mediciones de las fuerzas aplicadas por el operador humano y por el ambiente, a través de una ley de control de fuerza tipo proporcional-integral; con lo que garantiza también, que las fuerzas aplicadas sobre cada robot tienden a ser iguales. Sin embargo, al igual que en [3] este esquema de control presenta la desventaja de que, entre mayor sea la precisión en el seguimiento de cada robot, más difícil le resulta al operador humano mover el manipulador local.

### 1.3. Planteamiento del problema

En el presente trabajo se busca diseñar un esquema de control que, además de garantizar que las señales del sistema de teleoperación se encuentren dentro de ciertos límites, ofrezca cierta correspondencia cinemática retardada al operador; para que, a pesar del retardo en las comunicaciones, el operador pueda reconocer el entorno remoto, y tener cierta sensación de encontrarse ahí (telepresencia). Para ello, se busca diseñar un controlador para el robot remoto, que logre seguimiento de posición y fuerza, robusto ante perturbaciones constantes; mientras que para el robot local se busca diseñar un control que ofrezca cierta correspondencia cinemática retardada al operador humano, lo que sucede al no permitir el movimiento en la dirección de la restricción impuesta sobre el robot remoto, pero sí en las demás direcciones.

### 1.4. Contribución

En este trabajo se propone un esquema de control que solo requiere el conocimiento de la cinemática de ambos manipuladores, así como las masas de los eslabones del manipulador local. El esquema de control propuesto garantiza la estabilidad local entrada a estados del sistema de teleoperación, siendo robusto ante la presencia de ciertos retardos de tiempo variables. La principal innovación en el esquema de control propuesto, es que la magnitud del retardo no tiene efecto en el desempeño del sistema, cuando los robots se encuentran en movimiento libre, ni cuando el robot local es movido por el operador humano y el robot remoto no entra en contacto con el ambiente. A diferencia de [3], con el esquema de control propuesto, se pueden lograr errores de seguimiento arbitrariamente pequeños, sin dificultar el movimiento del robot local al operador humano.

### 1.5. Estructura

Este documento está organizado de la siguiente forma: el Capítulo 2 contiene las definiciones, propiedades y conceptos necesarios, para el desarrollo teórico del trabajo. En el Capítulo 3 se presentan los objetivos que se buscan cumplir, así como el esquema de control diseñado para lograr estos objetivos. El Capítulo 4 contiene los resultados obtenidos experimentalmente al realizar la implementación del controlador propuesto, en un sistema de teleoperación bajo distintas condiciones de operación, que resultan de especial interés. Por último, en el Capítulo 5 se encuentran las conclusiones obtenidas a partir del trabajo realizado, así como las observaciones realizadas sobre los resultados obtenidos, y el trabajo a realizarse en un futuro, con base en el presente trabajo.





## Marco teórico

---

En este capítulo se presentan las bases matemáticas sobre las que se realiza el desarrollo teórico del trabajo.

### 2.1. Límite de funciones

**Definición 2.1.1** [14] *Para una función  $f$  definida en cada punto de algún intervalo abierto que contenga al punto  $c$ , con la posible excepción del mismo. Se dice que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$  es  $L$ , es decir*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L, \quad (2.1)$$

*si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .*

**Definición 2.1.2** [14] *Se dice que  $f(x)$  tiende a  $L$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , es decir*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L, \quad (2.2)$$

*si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un  $N > 0$ , que depende de  $\varepsilon$ , tal que si  $x > N$ , entonces  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .*

### 2.2. Modelo cinemático

La cinemática es la ciencia del movimiento sin considerar las fuerzas que lo ocasionan [15]. El modelo cinemático solo especifica, en cualquier instante, la posición, velocidad y aceleración del objeto de estudio.



### 2.2.1. Cinemática directa

La cinemática directa de un manipulador describe la relación entre la posición articular  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y la posición y orientación  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  del efector final del robot. Por simplicidad se considera  $n = m$ . Entonces, la cinemática directa de un robot es una relación de la forma [2]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}). \quad (2.3)$$

Esta es obtenida mediante el método de reducción a coordenadas cilíndricas (Denavit-Hartenberg), que consiste en definir la posición de un punto en el espacio a partir de un sistema de referencia  $i - 1$ , por medio de un vector  $\mathbf{c}_i$ , el cual se obtiene como:

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i, \quad (2.4)$$

donde

$$\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} r_i \cos(\theta_i) \\ r_i \sin(\theta_i) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_i \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

así como su orientación mediante dos rotaciones, la primera con respecto al eje  $z$  y la segunda con respecto al eje  $x$

$$\mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

El resultado es la descripción de la posición y orientación en el espacio de un punto  $\mathbf{x}$ , como se muestra en la Figura 2.1.

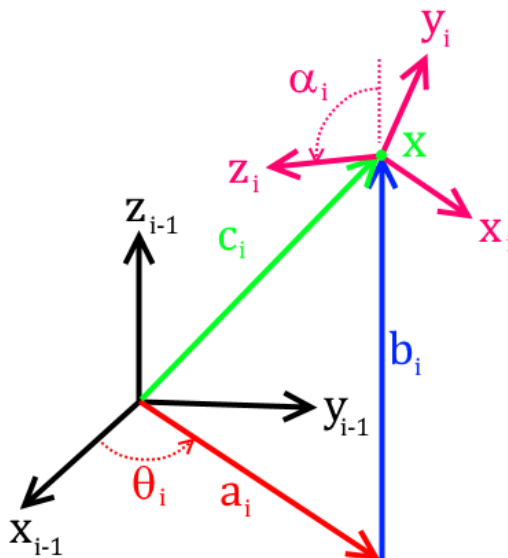


Figura 2.1: Reducción a coordenadas cilíndricas.

### 2.2.2. Cinemática diferencial

La cinemática diferencial tiene por objetivo encontrar la relación entre las velocidades articulares y la velocidad del efector final del robot [16]. Este modelo puede ser obtenido al derivar el modelo cinemático directo, con respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es el Jacobiano analítico del manipulador.

Por otra parte, el modelo cinemático diferencial puede ser obtenido de forma geométrica, al analizar el efecto de cada articulación, sobre la velocidad lineal y angular del efector final del robot. Resultando

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  y  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  son la velocidad lineal y angular del efector final del robot, respectivamente; y  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  es el Jacobiano geométrico del manipulador.

Si bien, para el caso de la velocidad lineal ambos jacobianos resultan equivalentes; para la velocidad angular, el Jacobiano analítico ofrece el cambio de orientación en términos de la representación de la orientación del efector final del robot; mientras que el Jacobiano geométrico ofrece el vector de velocidad angular en el espacio cartesiano. El modelo cinemático diferencial y, en particular, el Jacobiano geométrico también es útil para relacionar el efecto de la fuerza  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n$  aplicada sobre el efector final del

manipulador, con los pares  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  ejercidos en las articulaciones, resultando en [15]

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}. \quad (2.9)$$

### 2.3. Modelo dinámico

Las ecuaciones dinámicas para un robot consisten en la forma en que se produce el movimiento de este, debido a los momentos de torsión aplicados por los actuadores en las articulaciones, o por las fuerzas externas aplicadas a él [15]. Son obtenidas mediante el método de Euler-Lagrange, para lo cual, se calcula el Lagrangiano  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}$ , como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (2.10)$$

donde  $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}$  y  $\mathcal{U}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}$ , son la energía cinética y potencial del manipulador, respectivamente. Las ecuaciones dinámicas del manipulador resultan:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.11)$$

donde  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}$  es la función de disipación de Rayleigh. El resultado es el siguiente modelo generalizado

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.12)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, simétrica y definida positiva;  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de Coriolis y pares causados por fuerzas centrífugas,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal semidefinida positiva, con los coeficientes de fricción viscosa,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  corresponde con el vector de pares generados por la gravedad, y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares que actúan sobre cada articulación [2].

#### 2.3.1. Sistema de teleoperación

Basado en [17], el sistema de teleoperación local (l) - remoto (r), compuesto por dos manipuladores, cada uno con  $n$  articulaciones rotacionales; su dinámica está descrita por

$$\mathbf{H}_l(\mathbf{q}_l)\ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{D}_l\dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{g}_l(\mathbf{q}_l) = \boldsymbol{\tau}_l - \boldsymbol{\tau}_h \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H}_r(\mathbf{q}_r)\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_r(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}_r\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r) = \boldsymbol{\tau}_e - \boldsymbol{\tau}_r, \quad (2.14)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{R}^n$  son los pares aplicados por el operador humano, sobre las articulaciones del robot local, y  $\boldsymbol{\tau}_e \in \mathbb{R}^n$  son los pares generados en las articulaciones del robot remoto, por causa de su interacción con el ambiente. Este modelo posee las siguientes propiedades, para  $i = l, r$ :

**Propiedad 2.3.1** Se satisface que  $\lambda_{\text{hi}}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{x} \leq \lambda_{\text{Hi}}\|\mathbf{x}\|^2$ ,  $\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $0 < \lambda_{\text{hi}} < \lambda_{\text{Hi}} < \infty$ , con  $\lambda_{\text{hi}} \triangleq \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i))$ , y  $\lambda_{\text{Hi}} \triangleq \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i))$ . Donde  $\lambda_{\text{mín}}$  y  $\lambda_{\text{máx}}$  corresponden con el mínimo y máximo valor propio de una matriz, respectivamente.  $\triangle$

**Propiedad 2.3.2** Utilizando los símbolos de Christoffel para calcular  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ , la matriz  $\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  es antisimétrica. Así mismo, se cumple que  $\dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) + \mathbf{C}_i^T(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ .  $\triangle$

**Propiedad 2.3.3** La matriz  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  satisface la desigualdad

$$\|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\| \leq k_{\text{ci}}\|\dot{\mathbf{q}}_i\|.$$

para alguna constante positiva  $k_{\text{ci}}$ .  $\triangle$

**Propiedad 2.3.4** Se satisface  $\lambda_{\text{di}}\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{D}_i\mathbf{x} \leq \lambda_{\text{Di}}\|\mathbf{x}\|^2$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $0 \leq \lambda_{\text{di}} \leq \lambda_{\text{Di}} < \infty$ , con  $\lambda_{\text{di}} \triangleq \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{D}_i)$  y  $\lambda_{\text{Di}} \triangleq \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{D}_i)$ .  $\triangle$

**Propiedad 2.3.5** El vector de pares gravitacionales cumple con  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \frac{\partial \mathcal{U}_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i}$ , donde  $\mathcal{U}_i(\mathbf{q}_i)$  es la energía potencial del manipulador.  $\triangle$

**Propiedad 2.3.6** El vector de pares gravitacionales  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$  satisface  $\|\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)\| \leq \sigma_{\text{gi}}$ . Así como que existe una constante positiva  $k_{\text{gi}}$  tal que,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , se satisface

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{u}) - \mathbf{g}_i(\mathbf{v})\| \leq k_{\text{gi}}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

$\triangle$

**Propiedad 2.3.7** La relación [18] entre los pares articulares y las fuerzas

$\boldsymbol{\tau}_{\text{h}} = \mathbf{J}_{\text{l}}^T(\mathbf{q}_{\text{l}})\mathbf{F}_{\text{h}}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{\text{e}} = \mathbf{J}_{\text{r}}^T(\mathbf{q}_{\text{r}})\mathbf{F}_{\text{e}}$ , donde  $\mathbf{J}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $i = \text{l}, \text{r}$  es el Jacobiano geométrico del robot manipulador,  $\mathbf{F}_{\text{h}} \in \mathbb{R}^n$  es la fuerza aplicada por el operador humano sobre el manipulador local, y  $\mathbf{F}_{\text{e}} \in \mathbb{R}^n$  es la fuerza aplicada por el robot remoto sobre el ambiente. Nótese que para  $n \leq 6$  siempre es posible obtener una matriz Jacobiana que sea cuadrada.  $\triangle$

**Propiedad 2.3.8** *Existe una constante positiva  $k_{J_i}$  tal que  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , se satisface*

$$\|\mathbf{J}_i^T(\mathbf{u}) - \mathbf{J}_i^T(\mathbf{v})\| \leq k_{J_i} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (2.15)$$

△





## Diseño del controlador

---

En este capítulo se presentan los objetivos que se buscan lograr, así como las definiciones utilizadas y el esquema de control propuesto para dar solución al problema planteado anteriormente.

### 3.1. Objetivos

Con base en [3] se distinguen tres casos particulares de interés, que ocurren en al menos un intervalo de tiempo:

- a) Movimiento libre: Este caso ocurre cuando  $\tau_h(t) = \tau_e(t) = 0$  y se busca lograr que  $\mathbf{q}_l(t) = \mathbf{q}_r(t - T_r(t))$  y  $\mathbf{q}_r(t) = \mathbf{q}_l(t - T_l(t))$ ; esto es, que ambos manipuladores lleguen a la misma posición articular (consenso).
- b) Movimiento libre del manipulador remoto: Este caso ocurre cuando  $\tau_h(t) \neq 0$  y  $\tau_e(t) = 0$ . Se busca únicamente que  $\mathbf{q}_r(t) = \mathbf{q}_l(t - T_l(t))$ , lo que significa que el manipulador remoto siga la trayectoria retardada del manipulador local.
- c) Movimiento restringido: Este caso ocurre cuando  $\tau_h(t) \neq 0$  y  $\tau_e(t) \neq 0$ . Se busca lograr una de las siguientes tres respuestas ideales de correspondencia cinemática retardada unilateral:

*i.*  $\mathbf{q}_l(t) = \mathbf{q}_r(t - T_r(t))$ .

*ii.*  $\mathbf{F}_e(t) = \mathbf{F}_h(t - T_l(t))$ .

*iii.*  $\mathbf{q}_l(t) = \mathbf{q}_r(t - T_r(t))$  y  $\mathbf{F}_e(t) = \mathbf{F}_h(t - T_l(t))$ .

La respuesta unilateral ideal *b* implica que, cuando el manipulador remoto está en movimiento libre, este debe seguir la trayectoria retardada comandada por el operador humano en el manipulador local. Por otra parte, la respuesta unilateral *c.i* implica que, la persona será capaz de “reconstruir” la superficie remota, al no permitir el movimiento en la dirección de la restricción; obteniendo cierta correspondencia cinemática



retardada que hace al operador “sentir” hasta cierto punto, el objeto remoto. La respuesta unilateral *c.ii* implica que la fuerza aplicada por el manipulador remoto es la comandada por el operador humano. Finalmente, la respuesta unilateral ideal *c.iii* es una combinación de las situaciones anteriores.

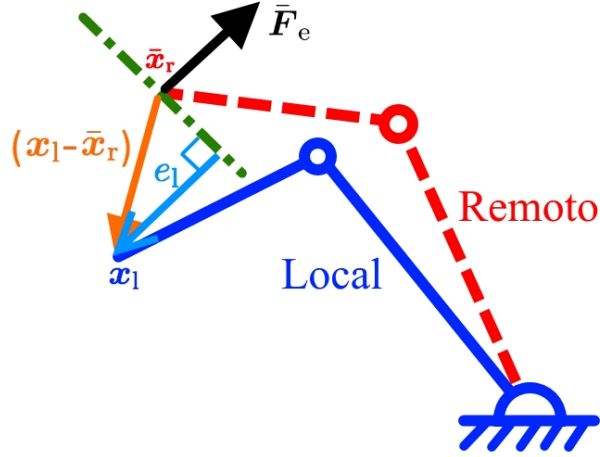
## 3.2. Solución propuesta

Se busca proponer un esquema de control que no requiera del conocimiento exacto del modelo dinámico del sistema, lo que, además de ofrecer cierta robustez, facilita su implementación. Para el diseño del controlador se hace la siguiente suposición:

**Suposición 3.2.1** *Se considera que el retardo y sus derivadas (al menos hasta la segunda) están acotados, i. e.,  $|T_i(t)| \leq \bar{T}_i < \infty$ ,  $|\dot{T}_i(t)| \leq T_i^* < \infty$ ,  $|\ddot{T}_i(t)| \leq T_i^{**} < \infty$ ;  $i = 1, r$ .*  $\triangle$

La suposición anterior implica que no hay pérdida de paquetes de datos; lo cual es válido, ya que en la práctica se suele conservar la información de un paquete de datos, hasta llegar el siguiente. Para el diseño del esquema de control, se realizan las siguientes definiciones:

- $\bar{\mathbf{q}}_1 \triangleq \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$  la posición articular retardada del manipulador local.
- $\bar{\mathbf{q}}_r \triangleq \mathbf{q}_r(t - T_r(t))$  la posición articular retardada del manipulador remoto.
- $\bar{\mathbf{F}}_h \triangleq \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$  la fuerza retardada aplicada sobre el manipulador local.
- $\bar{\mathbf{F}}_e \triangleq \mathbf{F}_e(t - T_r(t))$  la fuerza retardada aplicada por el manipulador remoto.
- $\mathbf{x}_1(\mathbf{q}_1)$  la posición del efector final (cinemática directa) del manipulador local.
- $\bar{\mathbf{x}}_r \triangleq \mathbf{x}_r(\bar{\mathbf{q}}_r)$  la posición retardada del efector final del manipulador remoto.
- $\mathbf{e}_r \triangleq \mathbf{q}_r - \bar{\mathbf{q}}_1$  el error de seguimiento de posición del manipulador remoto.
- $e_1 \triangleq \frac{\bar{\mathbf{F}}_e^T(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}}_r)}{\|\bar{\mathbf{F}}_e\|}$  el error local, el cuál solo se define para  $\|\bar{\mathbf{F}}_e\| \geq d_e > 0$  como se observa en la Figura 3.1. Nótese que corresponde con la distancia de  $\mathbf{x}_1$  al plano que pasa por  $\bar{\mathbf{x}}_r$  y que tiene como vector normal a  $\bar{\mathbf{F}}_e$ . Esto al superponer los sistemas de referencia base de ambos manipuladores.
- $\Delta \mathbf{f} \triangleq \mathbf{F}_e - \bar{\mathbf{F}}_h$  el error de seguimiento de fuerza y su integral se define como  $\Delta \mathbf{F} \triangleq \int_0^t \Delta \mathbf{f} dt$ .



**Figura 3.1:** Definición del error local  $e_1$ .

Con base en las definiciones anteriores, la ley de control propuesta para el manipulador local está dada por las siguientes ecuaciones

$$\tau_1 = -\mathbf{K}_a \dot{q}_1 + \mathbf{g}_1(q_1) - s \mathbf{J}_1^T(q_1) \bar{\mathbf{F}}_e \quad (3.1)$$

$$s = k_p e_1 + k_i \xi_1 \quad (3.2)$$

$$\dot{\xi}_1 = e_1, \quad \xi_1(0) = 0. \quad (3.3)$$

La ley de control propuesta para el manipulador remoto es

$$\tau_r = \mathbf{K}_p \mathbf{e}_r + \mathbf{K}_i \xi_r + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_r + \mathbf{J}_r^T(q_r) (\bar{\mathbf{F}}_h - \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F}) \quad (3.4)$$

$$\dot{\xi}_r = \mathbf{e}_r, \quad \xi_r(0) = 0, \quad (3.5)$$

donde  $k_p, k_i > 0$  y  $\mathbf{K}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; para  $k = a, p, i, d, f$  son matrices diagonales definidas positivas.

**Observación 3.2.1** *La ley de control para el manipulador local consiste en un término de inyección de amortiguamiento, compensación de la gravedad y un término que busca reconstruir la superficie de la restricción.*  $\triangle$

**Observación 3.2.2** *La ley de control para el manipulador remoto consiste en un control PID para realizar el seguimiento de la trayectoria retardada del manipulador local, junto con un término de control de fuerza.*  $\triangle$

Adicionalmente se consideran las siguientes suposiciones:

**Suposición 3.2.2** *Las fuerzas aplicadas por parte del operador humano y el entorno están acotadas para todo tiempo, al igual que sus derivadas, i. e., existen constantes positivas  $b_h, b_e, b_{dh}$  y  $b_{de}$  tales que  $\|\mathbf{F}_h\| \leq b_h < \infty$ ,  $\|\frac{d}{dt}\mathbf{F}_h\| \leq b_{dh} < \infty$ ,  $\|\mathbf{F}_e\| \leq b_e < \infty$  y  $\|\frac{d}{dt}\mathbf{F}_e\| \leq b_{de} < \infty$ ,  $\forall t \geq 0$ .  $\triangle$*

**Suposición 3.2.3** *Los manipuladores no pasan por ninguna singularidad, de modo que  $\mathbf{J}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)$  para  $i = l, r$ , siempre existe.  $\triangle$*

### 3.3. Resultado principal

En esta sección se muestra el resultado principal del presente trabajo.

**Teorema 3.3.1** *Para el sistema de teleoperación con retardos variantes en el tiempo (2.13)-(2.14), en lazo cerrado con las leyes de control para los manipuladores local y remoto respectivamente, (3.1)-(3.5). Bajo las Suposiciones 3.2.1 a 3.2.3, siempre se pueden encontrar ganancias de control tales que*

- i. Todos los errores de seguimiento permanezcan acotados.*

Con respecto a los casos de interés b y c:

- b) Cuando  $\tau_h \neq 0$  y  $\tau_e = 0$*

- ii. El manipulador remoto sigue la trayectoria retardada del manipulador local, con errores de seguimiento del remoto  $(\mathbf{e}_r, \dot{\mathbf{e}}_r)$  que pueden hacerse arbitrariamente pequeños.*

- c) Cuando  $\tau_h \neq 0$  y  $\tau_e \neq 0$*

- iii. Si el movimiento del manipulador remoto se encuentra restringido, el manipulador local ofrece cierta correspondencia cinemática retardada al operador humano; en el sentido de que no permite mover libremente el efector final local en la dirección en que el remoto experimenta la fuerza. El movimiento en la dirección de la fuerza aplicada sobre el remoto solo está permitido*

por  $|e_1| \leq \delta_{\max 1}$ , donde  $\delta_{\max 1}$  es una constante positiva que puede hacerse arbitrariamente pequeña.

- iv. Para valores grandes de  $\mathbf{K}_f$ , la fuerza que aplica el remoto tiende a la fuerza retardada aplicada por el operador humano sobre el manipulador local, i. e.  $\mathbf{F}_e \rightarrow \bar{\mathbf{F}}_h$ ; y eligiendo  $\mathbf{K}_f$  suficientemente grande, el error de seguimiento de fuerza  $\Delta \mathbf{f}$  puede hacerse arbitrariamente pequeño.

△

**Observación 3.3.1** A diferencia de [3], donde al establecer la cota máxima para los errores de seguimiento surge la disyuntiva entre mejorar la precisión en el seguimiento del robot remoto al local, y ofrecer mayor libertad al operador humano de mover el robot local. Con el esquema de control propuesto en este trabajo, es posible elegir la cota final de los errores de seguimiento del robot remoto arbitrariamente pequeña, sin dificultar el movimiento del robot local.

△

Definiendo

$$\boldsymbol{\tau}_{al} \triangleq -\mathbf{J}_1^T(\mathbf{q}_1) [s\bar{\mathbf{F}}_e + \mathbf{F}_h] \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{ar} \triangleq \mathbf{J}_r^T(\mathbf{q}_r) (\Delta \mathbf{f} + \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F}). \quad (3.7)$$

Considerando el sistema (2.13) en lazo cerrado con la ley de control (3.1)–(3.3), la dinámica del manipulador local se puede escribir como

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}_1 + (\mathbf{D}_1 + \mathbf{K}_a)\dot{\mathbf{q}}_1 = \boldsymbol{\tau}_{al} \quad (3.8)$$

$$e_1 = \dot{\xi}_1 = -\frac{k_i}{k_p}\xi_1 + y_1, \quad (3.9)$$

donde  $y_1 \triangleq \frac{s}{k_p}$ . Considerando ahora el sistema (2.14) en lazo cerrado con la ley de control (3.4) y (3.5), además de que  $\mathbf{e}_r = \mathbf{q}_r - \bar{\mathbf{q}}_1$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\bar{\mathbf{q}}}_1$  y  $\ddot{\mathbf{e}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_r - \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1$ ; la dinámica del robot remoto puede ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_r \\ \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \\ \Delta \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \\ \mathbf{H}_r^{-1}(-\mathbf{C}_r\dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{g}_r - \mathbf{K}_p\mathbf{e}_r - \mathbf{K}_i\boldsymbol{\xi}_r + \mathbf{y}_{r1}) \\ -\mathbf{K}_f\Delta \mathbf{F} + \mathbf{y}_{r2} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

donde  $\mathbf{H}_i \triangleq \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ ,  $\mathbf{C}_i \triangleq \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ ,  $\mathbf{g}_i \triangleq \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$ , para  $i = 1, r$ ;  $\mathbf{K}_v \triangleq \mathbf{D}_r + \mathbf{K}_d$ ,  $\mathbf{y}_{r1} \triangleq -(\mathbf{H}_r\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1 + \mathbf{C}_r\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1 + \mathbf{D}_r\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1 - \boldsymbol{\tau}_{ar})$  y  $\mathbf{y}_{r2} \triangleq \mathbf{J}_r^{-T}(\mathbf{q}_r)\boldsymbol{\tau}_{ar}$ .

### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

---

Se define el vector de estados para la dinámica en lazo cerrado de (3.8)-(3.10) como

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1^T & \xi_1 & \boldsymbol{\xi}_r^T & \mathbf{e}_r^T & \dot{\mathbf{e}}_r^T & \boldsymbol{\Delta F}^T \end{bmatrix}^T. \quad (3.11)$$

Así mismo, se define la siguiente región de interés

$$\mathcal{D} \triangleq \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{5n+1} \mid \|\mathbf{x}\| \leq x_{\text{máx}} \}, \quad (3.12)$$

para alguna constante positiva  $x_{\text{máx}}$  arbitraria. Antes de comenzar con la prueba de los incisos del Teorema 3.3.1, se busca probar que, en  $\mathcal{D}$ , todas las señales relacionadas con el sistema en lazo cerrado están acotadas, salvo tal vez las posiciones  $\mathbf{q}_1$  y  $\mathbf{q}_r$ .

De la definición de  $e_1$  se observa que  $\frac{\bar{\mathbf{F}}_e^T}{\|\bar{\mathbf{F}}_e\|}$  es un vector fila unitario; además de que, al considerarse robots con únicamente articulaciones rotacionales, las posiciones cartesianas  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_r$  están acotadas; lo que implica que  $e_1$  siempre está acotado. De (3.2) se observa que, en  $\mathcal{D}$ ,  $s$  se encuentra acotado. De (3.6) y (3.7) se obtiene que  $\boldsymbol{\tau}_{\text{al}}$  y  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ar}}$  están acotadas en  $\mathcal{D}$ , gracias a la Suposición 3.2.2. De (3.8) se obtiene que  $\dot{\mathbf{q}}_1$  está acotada en  $\mathcal{D}$ . Se sabe que  $\dot{\mathbf{q}}_i = (1 - \dot{T}_i(t)) \dot{\mathbf{q}}_i(t - T_i(t))$ , así como  $\ddot{\mathbf{q}}_i = -\ddot{T}_i(t) \dot{\mathbf{q}}_i(t - T_i(t)) + (1 - \dot{T}_i(t))^2 \ddot{\mathbf{q}}_i(t - T_i(t))$  que, junto con la Suposición 3.2.1, implica que  $\dot{\mathbf{q}}_1$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_1$  están acotadas en  $\mathcal{D}$ . De las definiciones de  $y_1$ ,  $\mathbf{y}_{r1}$  y  $\mathbf{y}_{r2}$ , se observa que están acotadas en  $\mathcal{D}$ . Del tercer renglón de (3.10), gracias a la Propiedad 2.3.6, se obtiene que  $\ddot{\mathbf{e}}_r$  está acotada en  $\mathcal{D}$ . Por último, de las definiciones de  $\dot{\mathbf{e}}_r$  y  $\ddot{\mathbf{e}}_r$ , se obtiene que  $\dot{\mathbf{q}}_r$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  están acotadas en  $\mathcal{D}$ . Adicionalmente se obtiene

$$\dot{e}_1 = \frac{\bar{\mathbf{F}}_e^T [\mathbf{J}_1(\mathbf{q}_1) \dot{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{J}_r(\bar{\mathbf{q}}_r) \dot{\mathbf{q}}_r]}{\|\bar{\mathbf{F}}_e\|} + \left[ \frac{\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{F}}_e}{\|\bar{\mathbf{F}}_e\|} - \frac{\bar{\mathbf{F}}_e \left( \bar{\mathbf{F}}_e^T \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{F}}_e \right)}{\|\bar{\mathbf{F}}_e\|^3} \right]^T [\mathbf{x}_1(\mathbf{q}_1) - \mathbf{x}_r(\bar{\mathbf{q}}_r)], \quad (3.13)$$

de forma que, para  $\|\bar{\mathbf{F}}_e\| \geq d_e$  para alguna constante positiva  $d_e$ ,  $\dot{e}_1$  está acotada en  $\mathcal{D}$ , y por lo tanto  $\dot{y}_1$  también. Del mismo modo, se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ar}} = \left( \frac{\partial \mathbf{J}_r^T}{\partial \mathbf{q}_r} \dot{\mathbf{q}}_r \right) (\boldsymbol{\Delta f} + \mathbf{K}_f \boldsymbol{\Delta F}) + \mathbf{J}_r^T(\mathbf{q}_r) \left( \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Delta f} + \mathbf{K}_f \boldsymbol{\Delta f} \right), \quad (3.14)$$

la cual se observa que está acotada en  $\mathcal{D}$ , y por lo tanto  $\dot{y}_{r2}$  también.

*i.* Para demostrar que las ganancias pueden ser elegidas de forma que el estado  $\mathbf{x}(t)$  permanezca acotado para todo tiempo, *i. e.* si  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{D}$ , entonces  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{D} \forall t > 0$ ; se propone

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}, \quad (3.15)$$

con  $\mathbf{M} \triangleq$  diagonal a bloques  $\{\mathbf{H}_1(\mathbf{q}_1), 1, \mathbf{P}, \mathbf{I}\}$ , donde

$$\mathbf{P} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_i & \mathbf{K}_i + \mathbf{K}_v & \mathbf{H}_r \\ \mathbf{K}_i + \mathbf{K}_v & \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v & \mathbf{H}_r \\ \mathbf{H}_r & \mathbf{H}_r & \mathbf{H}_r \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Considerando la Propiedad 2.3.1, se satisface

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2, \quad (3.17)$$

con  $\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{M})$  y  $\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathbf{M})$ . De (3.15) se observa que  $V$  puede ser escrita como  $V(\mathbf{x}) = V_1 + V_2 + V_3$ , donde

$$V_1 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{1}{2} \xi_1^2 \quad (3.18)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_r \\ \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_r \\ \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\Delta} \mathbf{F}. \quad (3.20)$$

Se busca probar que  $V$  es definida positiva. Se observa de (3.18) y (3.20) que las funciones  $V_1$  y  $V_3$  son definidas positivas con respecto a  $\dot{\mathbf{q}}_1$ ,  $\xi_1$  y  $\boldsymbol{\Delta} \mathbf{F}$ . Para probar que  $V_2$  es definida positiva con respecto a  $\boldsymbol{\xi}_r$ ,  $\mathbf{e}_r$  y  $\dot{\mathbf{e}}_r$ , se utiliza la siguiente desigualdad

$$V_2 \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\xi}_r\| \\ \|\mathbf{e}_r\| \\ \|\dot{\mathbf{e}}_r\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{kp} + \lambda_{ki} & -\lambda_{Ki} - \lambda_{Kv} & -\lambda_{Hr} \\ -\lambda_{Ki} - \lambda_{Kv} & \lambda_{kp} + \lambda_{kv} & -\lambda_{Hr} \\ -\lambda_{Hr} & -\lambda_{Hr} & \lambda_{hr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\xi}_r\| \\ \|\mathbf{e}_r\| \\ \|\dot{\mathbf{e}}_r\| \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

donde  $\lambda_{ki} \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_i)$  y  $\lambda_{Ki} \triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{K}_i)$ , para  $i = p, i, v, f$ . Utilizando el criterio de Sylvester, se observa que se deben satisfacer las siguientes desigualdades

$$\lambda_{kp} + \lambda_{ki} > 0 \quad (3.22)$$

$$(\lambda_{kp} + \lambda_{ki})(\lambda_{kp} + \lambda_{kv}) - (\lambda_{Ki} + \lambda_{Kv})^2 > 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_{kp} + \lambda_{ki})(\lambda_{kp} + \lambda_{kv}) \lambda_{hr} - 2(\lambda_{Ki} + \lambda_{Kv}) \lambda_{Hr}^2 - (\lambda_{kp} + \lambda_{ki}) \lambda_{Hr}^2 - (\lambda_{kp} + \lambda_{kv}) \lambda_{Hr}^2 + \\ & - \lambda_{hr} (\lambda_{Ki} + \lambda_{Kv})^2 > 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

A partir de la elección de las matrices  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_i$  definidas positivas, se observa que (3.22) se satisface. Desarrollando (3.23) se observa que es satisfecha al elegir  $\mathbf{K}_p$  suficientemente grande, tal que

$$\lambda_{kp} > -\frac{\lambda_{ki} + \lambda_{kv}}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda_{ki} + \lambda_{kv})^2}{4} + (\lambda_{Ki} + \lambda_{Kv})^2 - \lambda_{ki} \lambda_{kv}}. \quad (3.25)$$

### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

---

Expresando a (3.24) como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} (\lambda_{kp} + \lambda_{ki}) (\lambda_{kp} + \lambda_{kv}) \lambda_{hr} - 2 (\lambda_{Ki} + \lambda_{Kv}) \lambda_{Hr}^2 - \lambda_{hr} (\lambda_{Ki} + \lambda_{Kv})^2 + \\ & + (\lambda_{kp} + \lambda_{ki}) \left[ \frac{1}{3} (\lambda_{kp} + \lambda_{kv}) \lambda_{hr} - \lambda_{Hr}^2 \right] + (\lambda_{kp} + \lambda_{kv}) \left[ \frac{1}{3} (\lambda_{kp} + \lambda_{ki}) \lambda_{hr} - \lambda_{Hr}^2 \right] > 0, \end{aligned}$$

es satisfecha al elegir

$$\begin{aligned} \lambda_{kp} > \text{máx} \left\{ \frac{3\lambda_{Hr}^2}{\lambda_{hr}} - \lambda_{kv}, \frac{3\lambda_{Hr}^2}{\lambda_{hr}} - \lambda_{ki}, \right. \\ \left. - \frac{\lambda_{ki} + \lambda_{kv}}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda_{ki} + \lambda_{kv})^2}{4} + 6 (\lambda_{Ki} + \lambda_{Kv}) \lambda_{Hr}^2 + (\lambda_{Ki} + \lambda_{Kv})^2 \lambda_{Hr} - \lambda_{ki} (\lambda_{kv})} \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Con base en (3.22), (3.25) y (3.26) se obtiene que  $V_2$  es definida positiva con respecto a  $\boldsymbol{\xi}_r$ ,  $\mathbf{e}_r$  y  $\dot{\mathbf{e}}_r$ , al elegir  $\mathbf{K}_p$  suficientemente grande. Calculando la derivada de  $V(\mathbf{x})$  a lo largo de (3.8)-(3.10)

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3, \quad (3.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T \dot{\mathbf{H}}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \xi_1 \dot{\xi}_1 \\ &= \dot{\mathbf{q}}_1^T \{ -\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 - (\mathbf{D}_1 + \mathbf{K}_a) \dot{\mathbf{q}}_1 \} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_1^T \dot{\mathbf{H}}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 - \frac{k_i}{k_p} \xi_1^2 + \xi_1 y_1 \\ &= -\dot{\mathbf{q}}_1^T (\mathbf{D}_1 + \mathbf{K}_a) \dot{\mathbf{q}}_1 - \frac{k_i}{k_p} \xi_1^2 + \xi_1 y_1, \end{aligned} \quad (3.28)$$

así como

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \Delta \mathbf{F}^T \frac{d}{dt} \Delta \mathbf{F} \\ &= \Delta \mathbf{F}^T (-\mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F} + \mathbf{y}_{r2}) \\ &= -\Delta \mathbf{F}^T \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}^T \mathbf{y}_{r2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para el cálculo de  $\dot{V}_2$ , primero se expande (3.19)

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}_r^T (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_i) \boldsymbol{\xi}_r + \boldsymbol{\xi}_r^T (\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_v) \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\xi}_r^T \mathbf{H}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{2} \mathbf{e}_r^T (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v) \mathbf{e}_r + \\ &+ \mathbf{e}_r^T \mathbf{H}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_r^T \mathbf{H}_r \dot{\mathbf{e}}_r. \end{aligned}$$

Utilizando la Propiedad 2.3.2 se calcula la derivada de  $V_2$  a lo largo de (3.10)

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &= \boldsymbol{\xi}_r^T (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_i) \dot{\boldsymbol{\xi}}_r + \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^T (\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_v) \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\xi}_r^T (\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_v) \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{\boldsymbol{\xi}}_r^T \mathbf{H}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \\
 &\quad + \boldsymbol{\xi}_r^T \dot{\mathbf{H}}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \boldsymbol{\xi}_r^T \mathbf{H}_r \ddot{\mathbf{e}}_r + \mathbf{e}_r^T (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v) \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{\mathbf{e}}_r^T \mathbf{H}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \mathbf{e}_r^T \dot{\mathbf{H}}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \mathbf{e}_r^T \mathbf{H}_r \ddot{\mathbf{e}}_r + \\
 &\quad + \dot{\mathbf{e}}_r^T \mathbf{H}_r \ddot{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_r^T \dot{\mathbf{H}}_r \dot{\mathbf{e}}_r \\
 &= \boldsymbol{\xi}_r^T (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_i) \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r^T (\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_v) \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\xi}_r^T (\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_v) \dot{\mathbf{e}}_r + \mathbf{e}_r^T \mathbf{H}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \boldsymbol{\xi}_r^T \dot{\mathbf{H}}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \\
 &\quad + \boldsymbol{\xi}_r^T (-\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{g}_r - \mathbf{K}_p \mathbf{e}_r - \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi}_r + \mathbf{y}_{r1}) + \mathbf{e}_r^T (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v) \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{\mathbf{e}}_r^T \mathbf{H}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \\
 &\quad + \mathbf{e}_r^T \dot{\mathbf{H}}_r \dot{\mathbf{e}}_r + \mathbf{e}_r^T (-\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{g}_r - \mathbf{K}_p \mathbf{e}_r - \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi}_r + \mathbf{y}_{r1}) + \\
 &\quad + \dot{\mathbf{e}}_r^T (-\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{g}_r - \mathbf{K}_p \mathbf{e}_r - \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi}_r + \mathbf{y}_{r1}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_r^T \dot{\mathbf{H}}_r \dot{\mathbf{e}}_r \\
 &= -\boldsymbol{\xi}_r^T \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi}_r + \boldsymbol{\xi}_r^T \mathbf{C}_r^T \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{e}_r^T (\mathbf{K}_p - \mathbf{K}_i - \mathbf{K}_v) \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_r^T (\mathbf{H}_r + \mathbf{C}_r^T) \dot{\mathbf{e}}_r + \\
 &\quad - \dot{\mathbf{e}}_r^T (\mathbf{K}_v - \mathbf{H}_r) \dot{\mathbf{e}}_r + (\boldsymbol{\xi}_r^T + \mathbf{e}_r^T + \dot{\mathbf{e}}_r^T) (-\mathbf{g}_r + \mathbf{y}_{r1}). \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

De la Propiedad 2.3.3 se obtiene

$$\|\mathbf{C}_r^T (\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)\| \leq k_{cr} \|\dot{\mathbf{q}}_r\| = k_{cr} \|\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\| \leq k_{cr} (\|\dot{\mathbf{e}}_r\| + \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\|). \tag{3.31}$$

Utilizando (3.31), de (3.30) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &\leq -\lambda_{ki} \|\boldsymbol{\xi}_r\|^2 + k_{cr} (\|\dot{\mathbf{e}}_r\| + \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\|) \|\boldsymbol{\xi}_r\| \|\dot{\mathbf{e}}_r\| - (\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv}) \|\mathbf{e}_r\|^2 + \\
 &\quad + [\lambda_{Hr} + k_{cr} (\|\dot{\mathbf{e}}_r\| + \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\|)] \|\mathbf{e}_r\| \|\dot{\mathbf{e}}_r\| - (\lambda_{kv} - \lambda_{Hr}) \|\dot{\mathbf{e}}_r\|^2 + \\
 &\quad + (\boldsymbol{\xi}_r^T + \mathbf{e}_r^T + \dot{\mathbf{e}}_r^T) (-\mathbf{g}_r + \mathbf{y}_{r1}) \\
 &\leq -\lambda_{ki} \|\boldsymbol{\xi}_r\|^2 + (k_{cr} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\|) \|\boldsymbol{\xi}_r\| \|\dot{\mathbf{e}}_r\| - (\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv}) \|\mathbf{e}_r\|^2 + \\
 &\quad + (\lambda_{Hr} + k_{cr} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\|) \|\mathbf{e}_r\| \|\dot{\mathbf{e}}_r\| - [\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - k_{cr} (\|\boldsymbol{\xi}_r\| + \|\mathbf{e}_r\|)] \|\dot{\mathbf{e}}_r\|^2 + \\
 &\quad + (\boldsymbol{\xi}_r^T + \mathbf{e}_r^T + \dot{\mathbf{e}}_r^T) (-\mathbf{g}_r + \mathbf{y}_{r1}). \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

Entonces, (3.32) se puede escribir como

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\xi}_r\| \\ \|\mathbf{e}_r\| \\ \|\dot{\mathbf{e}}_r\| \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\xi}_r\| \\ \|\mathbf{e}_r\| \\ \|\dot{\mathbf{e}}_r\| \end{bmatrix} + (\boldsymbol{\xi}_r^T + \mathbf{e}_r^T + \dot{\mathbf{e}}_r^T) (-\mathbf{g}_r + \mathbf{y}_{r1}), \tag{3.33}$$

donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2\lambda_{ki} & 0 & -k_{cr} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\| \\ 0 & 2(\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv}) & -\lambda_{Hr} - k_{cr} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\| \\ -k_{cr} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\| & -\lambda_{Hr} - k_{cr} \|\dot{\hat{\mathbf{q}}}_1\| & 2[\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - k_{cr} (\|\boldsymbol{\xi}_r\| + \|\mathbf{e}_r\|)] \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$



### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

---

Se busca probar que  $\mathbf{Q}$  es definida positiva, por lo que debe satisfacer las siguientes desigualdades

$$\lambda_{ki} > 0 \quad (3.35)$$

$$\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv} > 0 \quad (3.36)$$

$$4\lambda_{ki} (\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv}) [\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - k_{cr} (\|\boldsymbol{\xi}_r\| + \|\mathbf{e}_r\|)] - \lambda_{ki} (\lambda_{Hr} + k_{cr} \|\dot{\mathbf{q}}_1\|)^2 + \\ - (\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv}) k_{cr}^2 \|\dot{\mathbf{q}}_1\|^2 > 0. \quad (3.37)$$

Considerando que  $\dot{\mathbf{q}}_1(t) = (1 - \dot{T}_1(t)) \dot{\mathbf{q}}_1(t - T_1(t))$ , además de que el análisis se realiza solo para cuando  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ ; entonces, usando la Suposición 3.2.1, se satisface  $\|\dot{\mathbf{q}}_1\| \leq a_1 x_{\text{máx}}$  con  $a_1 = 1 + T_1^*$ . Se observa que la desigualdad (3.35) se satisface inmediatamente de elegir  $\mathbf{K}_i$  definida positiva. La desigualdad (3.36) es satisfecha al elegir  $\mathbf{K}_p$  suficientemente grande, tal que

$$\lambda_{kp} > \lambda_{Ki} + \lambda_{Kv}. \quad (3.38)$$

La desigualdad (3.37) se satisface si se cumple que:

$$2\lambda_{ki} (\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv}) (\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - 2k_{cr} x_{\text{máx}}) - \lambda_{ki} (\lambda_{Hr} + k_{cr} a_1 x_{\text{máx}})^2 + \\ (\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv}) [2\lambda_{ki} (\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - 2k_{cr} x_{\text{máx}}) - k_{cr}^2 a_1^2 x_{\text{máx}}^2] > 0, \quad (3.39)$$

lo que ocurre al elegir

$$\lambda_{kv} > \lambda_{Hr} + 2k_{cr} x_{\text{máx}} \quad (3.40)$$

$$\lambda_{ki} > \frac{k_{cr}^2 a_1^2 x_{\text{máx}}^2}{2(\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - 2k_{cr} x_{\text{máx}})} \quad (3.41)$$

$$\lambda_{kp} > \frac{(\lambda_{Hr} + k_{cr} a_1 x_{\text{máx}})^2}{2(\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - 2k_{cr} x_{\text{máx}})} + \lambda_{Ki} + \lambda_{Kv}. \quad (3.42)$$

Con base en (3.38), (3.40)-(3.42) se obtiene que  $\mathbf{Q}$  es definida positiva en  $\mathcal{D}$ , al elegir  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  suficientemente grandes, y  $\mathbf{K}_i$  adecuadamente.

Con lo anterior,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  satisface

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\dot{\mathbf{q}}_1^T (\mathbf{D}_1 + \mathbf{K}_a) \dot{\mathbf{q}}_1 - \frac{k_i}{k_p} \xi_1^2 - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\xi}_r\| \\ \|\mathbf{e}_r\| \\ \|\dot{\mathbf{e}}_r\| \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{\xi}_r\| \\ \|\mathbf{e}_r\| \\ \|\dot{\mathbf{e}}_r\| \end{bmatrix} - \Delta \mathbf{F}^T \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F} + \\ + \xi_1 y_1 + (\boldsymbol{\xi}_r^T + \mathbf{e}_r^T + \dot{\mathbf{e}}_r^T) (-\mathbf{g}_r + \mathbf{y}_{r1}) + \Delta \mathbf{F}^T \mathbf{y}_{r2} \\ \leq -(\lambda_{d1} + \lambda_a) \|\dot{\mathbf{q}}_1\|^2 - \frac{k_i}{k_p} \xi_1^2 - \frac{1}{2} \lambda_q (\|\boldsymbol{\xi}_r\|^2 + \|\mathbf{e}_r\|^2 + \|\dot{\mathbf{e}}_r\|^2) - \lambda_{kf} \|\Delta \mathbf{F}\|^2 + \\ + \xi_1 y_1 + (\boldsymbol{\xi}_r^T + \mathbf{e}_r^T + \dot{\mathbf{e}}_r^T) (-\mathbf{g}_r + \mathbf{y}_{r1}) + \Delta \mathbf{F}^T \mathbf{y}_{r2} \quad (3.43)$$

donde  $\lambda_a \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_a)$  y  $\lambda_q \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{Q})$ . Al realizarse el análisis en  $\mathcal{D}$ , deben existir constantes positivas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_{r1}$  y  $\alpha_{r2}$  tales que  $\alpha_1 \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} |y_1|$ ,  $\alpha_{r1} \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\mathbf{y}_{r1}\|$  y  $\alpha_{r2} \triangleq \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}} \|\mathbf{y}_{r2}\|$ . Es posible reescribir (3.43) como

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) \leq & -(\lambda_{dl} + \lambda_a) \|\dot{\mathbf{q}}_1\|^2 - \frac{k_i}{k_p} \xi_1^2 - \frac{1}{2} \lambda_q (\|\boldsymbol{\xi}_r\|^2 + \|\mathbf{e}_r\|^2 + \|\dot{\mathbf{e}}_r\|^2) - \lambda_{kf} \|\Delta \mathbf{F}\|^2 + \\ & + \alpha_1 |\xi_1| + (\sigma_{gr} + \alpha_{r1}) (\|\boldsymbol{\xi}_r\| + \|\mathbf{e}_r\| + \|\dot{\mathbf{e}}_r\|) + \alpha_{r2} \|\Delta \mathbf{F}\|. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Por simplicidad, se supone que las ganancias se eligen de modo que satisfacen

$$\lambda_{dl} + \lambda_a \geq 2\delta \quad (3.45)$$

$$\frac{k_i}{k_p} \geq 2\delta \quad (3.46)$$

$$\lambda_q \geq 4\delta \quad (3.47)$$

$$\lambda_{kf} \geq 2\delta, \quad (3.48)$$

donde  $\delta$  es una constante positiva. Así mismo, se define  $\beta \triangleq \alpha_1 + 3(\sigma_{gr} + \alpha_{r1}) + \alpha_{r2}$ ; resultando así

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -2\delta \|\mathbf{x}\|^2 + \beta \|\mathbf{x}\| = -\delta \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x}\| (\delta \|\mathbf{x}\| - \beta). \quad (3.49)$$

Definiendo

$$\mu \triangleq \frac{\beta}{\delta}, \quad (3.50)$$

entonces, cuando  $\|\mathbf{x}\| \geq \mu$ , se tiene que

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\delta \|\mathbf{x}\|^2 \triangleq -W_3(\|\mathbf{x}\|), \quad (3.51)$$

y al elegir  $\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2$  y  $\alpha_2(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2$ , las condiciones (A.4) y (A.5) del Teorema A.2.1 pueden ser cumplidas en  $\mathcal{D}$ . De acuerdo con (A.7), la condición inicial debe cumplir con

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x_{\max}, \quad (3.52)$$

y de acuerdo con (A.9) el estado estará finalmente acotado por

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \mu \triangleq b_f. \quad (3.53)$$

De acuerdo con (A.6),  $\delta$  debe ser suficientemente grande tal que  $\mu \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x_{\max}$ . Contrario a lo que parece, la cota final  $b_f$  no se puede hacer arbitrariamente pequeña, ya que al estar restringido el movimiento de ambos robots, no es posible reducir los errores

### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

---

de seguimiento, sin el uso de suposiciones adicionales. Lo anterior prueba el inciso *i.* del Teorema 3.3.1.

*ii.* En la prueba del inciso *i.* se obtiene que el estado está finalmente acotado, sin embargo, la cota final no puede ser asignada arbitrariamente, ya que, al haber restricciones en el movimiento o fuerza en alguno de los manipuladores, hacer los errores arbitrariamente pequeños violaría estas restricciones. En caso de que  $\tau_h \neq 0$  y  $\tau_e = 0$ , los errores de seguimiento de posición  $\xi_r$ ,  $e_r$  y  $\dot{e}_r$  se pueden hacer arbitrariamente pequeños, para lograr la precisión deseada para el seguimiento del robot remoto al local. Esto prueba el inciso *ii.* del Teorema 3.3.1.

*iii.* De (3.9) se puede obtener

$$\dot{e}_1 = -\frac{k_i}{k_p}e_1 + \dot{y}_1, \quad (3.54)$$

con  $\dot{y}_1$  acotada en  $\mathcal{D}$ . Como (3.54) representa un filtro lineal estable, valores grandes de  $\frac{k_i}{k_p}$  implican que la cota final  $\delta_{\max 1}$  de  $|e_1|$  pueda ser hecha arbitrariamente pequeña. De esta manera, si el movimiento del manipulador remoto se encuentra restringido, y el operador humano trata de mover el efector final del manipulador local, en la dirección de la restricción, entonces el valor de  $e_1$  incrementará, pero al final, este no será mayor que  $\delta_{\max 1}$ ; lo que significa que el movimiento del manipulador local estará restringido, de modo que el operador humano será capaz de percibir la restricción. Lo anterior prueba el inciso *iii.* del Teorema 3.3.1.

*iv.* De (3.7) se puede obtener

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{f} = -\mathbf{K}_f\Delta\mathbf{f} + \dot{\mathbf{y}}_{r2}, \quad (3.55)$$

con  $\dot{\mathbf{y}}_{r2}$  acotado en  $\mathcal{D}$ . Como (3.55) representa un filtro lineal estable, valores grandes de  $\mathbf{K}_f$  implican que la cota final de  $\Delta\mathbf{f}$  pueda ser hecha arbitrariamente pequeña. Lo anterior prueba el inciso *iv.* del Teorema 3.3.1, y concluye la demostración del mismo.

Con respecto al caso de interés *a* propuesto en el Capítulo 2, se presenta el siguiente corolario:

**Corolario 3.3.1** *Para el sistema de teleoperación con retardos variantes en el tiempo (2.13)-(2.14), en lazo cerrado con las leyes de control para los manipuladores local y remoto respectivamente, (3.1)-(3.5). Bajo las Suposiciones 3.2.1 a 3.2.3, con las ganancias de control adecuadas*

a) Cuando  $\tau_h = \tau_e = 0$

- v. El manipulador local tiende a una posición constante, i. e.,  $\dot{\mathbf{q}}_1(t) \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{q}_1(t) \rightarrow \mathbf{q}_c$  para algún vector constante  $\mathbf{q}_c$ .
- vi. El manipulador remoto tiende a la misma posición constante  $\mathbf{q}_c$  del manipulador local.  $\triangle$

v. Para probar que cuando  $\tau_h = \tau_e = 0$  el manipulador local tiende a una posición constante, se considera (3.8) con  $\tau_{al} = 0$  y la función  $V_4(\dot{\mathbf{q}}_1) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{H}_1 \dot{\mathbf{q}}_1$ . Su derivada satisface

$$\dot{V}_4(\dot{\mathbf{q}}_1) \leq -(\lambda_{dl} + \lambda_a) \|\dot{\mathbf{q}}_1\|^2 \leq 0 \quad \forall \dot{\mathbf{q}}_1 \neq 0, \quad (3.56)$$

lo que implica por el Teorema A.2.2 que  $\dot{\mathbf{q}}_1 \rightarrow 0$  de forma exponencial, i. e.,

$$\|\dot{\mathbf{q}}_1(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{Hl}}{\lambda_{hl}}} \|\dot{\mathbf{q}}_1(t_0)\| e^{-(\lambda_{dl} + \lambda_a)/2\lambda_{Hl}(t-t_0)}. \quad (3.57)$$

Con respecto a  $\mathbf{q}_1(t)$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}_1(t)\| &= \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{q}}_1(\tau)\| d\tau \leq \sqrt{\frac{\lambda_{Hl}}{\lambda_{hl}}} \|\dot{\mathbf{q}}_1(t_0)\| \int_{t_0}^t e^{-(\lambda_{dl} + \lambda_a)/2\lambda_{Hl}(\tau-t_0)} d\tau \\ &\leq \frac{2\lambda_{Hl}}{(\lambda_{dl} + \lambda_a)} \sqrt{\frac{\lambda_{Hl}}{\lambda_{hl}}} \|\dot{\mathbf{q}}_1(t_0)\| (1 - e^{-(\lambda_{dl} + \lambda_a)/2\lambda_{Hl}(t-t_0)}) \\ &\leq \frac{2\lambda_{Hl}}{(\lambda_{dl} + \lambda_a)} \sqrt{\frac{\lambda_{Hl}}{\lambda_{hl}}} \|\dot{\mathbf{q}}_1(t_0)\| < \infty, \end{aligned} \quad (3.58)$$

por lo que  $\mathbf{q}_1(t)$  tiende a alguna posición constante  $\mathbf{q}_c$  finita. Lo anterior prueba el inciso v. del Corolario 3.3.1.

vi. Para probar que el manipulador remoto tiende a la misma posición que el local, hace falta probar que  $\mathbf{e}_r \rightarrow 0$ . Para ello, se escribe la dinámica resultante del manipulador remoto, considerando  $\Delta \mathbf{f} = 0$  y por tanto  $\Delta \mathbf{F} = \Delta \mathbf{F}^*$ .

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_r \\ \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \\ \mathbf{H}_r^{-1} (-\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{g}_r + \mathbf{J}_r^T \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F}^* - \mathbf{K}_p \mathbf{e}_r - \mathbf{K}_i \boldsymbol{\xi}_r + \mathbf{y}_{r3}) \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

donde  $\mathbf{J}_r^T \triangleq \mathbf{J}_r^T(\mathbf{q}_r)$  y  $\mathbf{y}_{r3} \triangleq -(\mathbf{H}_r \ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{D}_r \dot{\mathbf{q}}_1)$ . Se encuentra el punto de equilibrio, que resulta ser

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_r \\ \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_r^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

---

donde, para  $\mathbf{y}_{r3} = 0$ , entonces  $\boldsymbol{\xi}_r^* = -\mathbf{K}_i^{-1} [\mathbf{g}_{rc} - \mathbf{J}_{rc}^T \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F}^*]$ , donde  $\mathbf{g}_{rc} \triangleq \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_c)$  y  $\mathbf{J}_{rc}^T \triangleq \mathbf{J}_r^T(\mathbf{q}_c)$ . Realizando el cambio de variable  $\mathbf{z}_r \triangleq \boldsymbol{\xi}_r - \boldsymbol{\xi}_r^*$ , el sistema (3.59) puede ser escrito como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_r \\ \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \\ \mathbf{H}_r^{-1} (-\mathbf{C}_r \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{e}}_r - \mathbf{g}_r + \mathbf{g}_{rc} + \mathbf{J}_r^T \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F}^* - \mathbf{J}_{rc}^T \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F}^* + \\ -\mathbf{K}_p \mathbf{e}_r - \mathbf{K}_i \mathbf{z}_r + \mathbf{y}_{r3}) \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Utilizando

$$V_5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_r \\ \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_r \\ \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_r \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

su derivada a lo largo de (3.61) resulta de manera similar a (3.32)

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &\leq -\lambda_{ki} \|\mathbf{z}_r\|^2 + (k_{cr} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1\|) \|\mathbf{z}_r\| \|\dot{\mathbf{e}}_r\| - (\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv}) \|\mathbf{e}_r\|^2 + \\ &\quad + (\lambda_{Hr} + k_{cr} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1\|) \|\mathbf{e}_r\| \|\dot{\mathbf{e}}_r\| - [\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - k_{cr} (\|\mathbf{z}_r\| + \|\mathbf{e}_r\|)] \|\dot{\mathbf{e}}_r\|^2 + \\ &\quad + (\mathbf{z}_r^T + \mathbf{e}_r^T + \dot{\mathbf{e}}_r^T) [-\mathbf{g}_r + \mathbf{g}_{rc} + (\mathbf{J}_r^T - \mathbf{J}_{rc}^T) \mathbf{K}_f \Delta \mathbf{F}^* + \mathbf{y}_{r3}]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Utilizando las Propiedades 2.3.6 y 2.3.8, se obtienen (3.64) y (3.65) respectivamente

$$\|\mathbf{g}_r(\mathbf{q}_c) - \mathbf{g}_r(\mathbf{q}_r)\| \leq k_{gr} \|\mathbf{q}_c - \mathbf{q}_r\| = k_{gr} \|\mathbf{q}_c - \mathbf{e}_r - \bar{\mathbf{q}}_1\| \leq k_{gr} (\|\mathbf{q}_c - \bar{\mathbf{q}}_1\| + \|\mathbf{e}_r\|) \quad (3.64)$$

$$\|\mathbf{J}_r^T(\mathbf{q}_r) - \mathbf{J}_r^T(\mathbf{q}_c)\| \leq k_{Jr} \|\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_c\| = k_{Jr} \|\mathbf{e}_r + \bar{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{q}_c\| \leq k_{Jr} (\|\mathbf{e}_r\| + \|\bar{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{q}_c\|), \quad (3.65)$$

de modo que (3.63) queda como

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &\leq -\lambda_{ki} \|\mathbf{z}_r\|^2 + k_r \|\mathbf{z}_r\| \|\mathbf{e}_r\| + (k_{cr} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1\|) \|\mathbf{z}_r\| \|\dot{\mathbf{e}}_r\| - (\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv} - k_r) \|\mathbf{e}_r\|^2 + \\ &\quad + (\lambda_{Hr} + k_{cr} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1\| + k_r) \|\mathbf{e}_r\| \|\dot{\mathbf{e}}_r\| - [\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - k_{cr} (\|\mathbf{z}_r\| + \|\mathbf{e}_r\|)] \|\dot{\mathbf{e}}_r\|^2 + \\ &\quad + (\|\mathbf{z}_r\| + \|\mathbf{e}_r\| + \|\dot{\mathbf{e}}_r\|) (k_r \|\mathbf{q}_c - \bar{\mathbf{q}}_1\| + \|\mathbf{y}_{r3}\|), \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde  $k_r \triangleq k_{gr} + k_{Jr} \lambda_{Kf} \|\Delta \mathbf{F}^*\|$ . Entonces, (3.66) se puede escribir como

$$\dot{V}_5 \leq -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\mathbf{z}_r\| \\ \|\mathbf{e}_r\| \\ \|\dot{\mathbf{e}}_r\| \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_1 \begin{bmatrix} \|\mathbf{z}_r\| \\ \|\mathbf{e}_r\| \\ \|\dot{\mathbf{e}}_r\| \end{bmatrix} + (\|\mathbf{z}_r\| + \|\mathbf{e}_r\| + \|\dot{\mathbf{e}}_r\|) (k_r \|\mathbf{q}_c - \bar{\mathbf{q}}_1\| + \|\mathbf{y}_{r3}\|), \quad (3.67)$$

donde

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 2\lambda_{ki} & & -k_r & & -k_{cr} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1\| \\ -k_r & 2(\lambda_{kp} - \lambda_{Ki} - \lambda_{Kv} - k_r) & & & -\lambda_{Hr} - k_{cr} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1\| - k_r \\ -k_{cr} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1\| & & -\lambda_{Hr} - k_{cr} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1\| - k_r & & 2[\lambda_{kv} - \lambda_{Hr} - k_{cr} (\|\mathbf{z}_r\| + \|\mathbf{e}_r\|)] \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

De forma equivalente a como se realiza en la prueba del inciso *i.*, se puede demostrar que al elegir  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_d$  suficientemente grandes, y  $\mathbf{K}_i$  adecuadamente, la matriz  $\mathbf{Q}_1$  es definida positiva en  $\mathcal{D}$ . Tomando  $\mathbf{w} \triangleq [z_r^T \ e_r^T \ \dot{e}_r^T]^T$  y  $u \triangleq 3(k_r\|\mathbf{q}_c - \bar{\mathbf{q}}_1\| + \|\mathbf{y}_{r3}\|)$ , de modo que (3.67) queda como

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &\leq -\frac{1}{2}\lambda_{q1}\|\mathbf{w}\|^2 + u\|\mathbf{w}\| \\ &\leq -\frac{1}{4}\lambda_{q1}\|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{w}\| \left[ \frac{1}{4}\lambda_{q1}\|\mathbf{w}\| - \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} u(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Definiendo

$$\mu_1 = \frac{4 \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} u(\tau) \right)}{\lambda_{q1}}, \quad (3.70)$$

entonces, cuando  $\|\mathbf{w}\| \geq \mu_1$ , se tiene que

$$\dot{V}_5 \leq -\frac{1}{4}\lambda_{q1}\|\mathbf{w}\|^2 \triangleq -W_3(\|\mathbf{w}\|), \quad (3.71)$$

y al elegir  $\alpha_1(\|\mathbf{w}\|) = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathbf{P})\|\mathbf{w}\|^2$  y  $\alpha_2(\|\mathbf{w}\|) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\mathbf{P})\|\mathbf{w}\|^2$ , las condiciones (A.4) y (A.5) del Teorema A.2.1 pueden ser cumplidas en  $\mathcal{D}$ . De acuerdo con (A.7), si la condición inicial cumple con

$$\|\mathbf{w}(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}} x_{\max}, \quad (3.72)$$

así como  $\mu_1 \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}} x_{\max}$ ; entonces, de acuerdo con (A.9), existe un tiempo  $T > 0$  (dependiente de  $\mathbf{w}(t_0)$  y  $\mu_1$ ) para el cual se satisface

$$\|\mathbf{w}(t)\| \leq \gamma \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} u(\tau) \right), \quad \forall t \geq t_0 + T, \quad (3.73)$$

donde  $\gamma \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} u(\tau) \right) \triangleq \frac{4}{\lambda_{q1}} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}} \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} u(\tau) \right)$ . Recordando el inciso *v.* del Corolario 3.3.1, se sabe que  $\mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_c$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_1, \ddot{\mathbf{q}}_1 \rightarrow 0$ , de modo que también  $\bar{\mathbf{q}}_1 \rightarrow \mathbf{q}_c$ ,  $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_1, \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_1 \rightarrow 0$ , lo que implica que  $\|\mathbf{q}_c - \bar{\mathbf{q}}_1\|, \|\mathbf{y}_{r3}\| \rightarrow 0$ , por lo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ . Utilizando la desigualdad (3.73) es posible probar que también  $\|\mathbf{w}(t)\| \rightarrow 0$ .

Para cualquier  $\varepsilon > 0$ , se puede encontrar un  $\varepsilon_1 > 0$  tal que  $\gamma(\varepsilon_1) \leq \varepsilon$ . Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ , dado  $\varepsilon_1$ , existe un  $T_1 > 0$  tal que  $u(t) \leq \varepsilon_1$  para todo  $t \geq T_1$ . Tomando  $t_0 \geq T_1$  entonces  $\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} u(\tau) \leq \varepsilon_1$ . Para  $t \geq t_0 + T$  se satisface la desigualdad (3.73) y por lo tanto también

$$\|\mathbf{w}(t)\| \leq \gamma(\varepsilon_1) \leq \varepsilon, \quad (3.74)$$

### 3. DISEÑO DEL CONTROLADOR

---

lo que prueba que para cada  $\varepsilon > 0$  existe un tiempo  $T_2 \geq T_1 + T > 0$ , que depende de  $\varepsilon$ , tal que si  $t \geq T_2$ , entonces  $\|\mathbf{w}(t)\| \leq \varepsilon$ . De acuerdo con la Definición 2.1.2, puede decirse que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}(t)\| = 0$  y por lo tanto también  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_r(t)\| = 0$ . Lo que prueba el inciso *vi.* del Corolario 3.3.1.



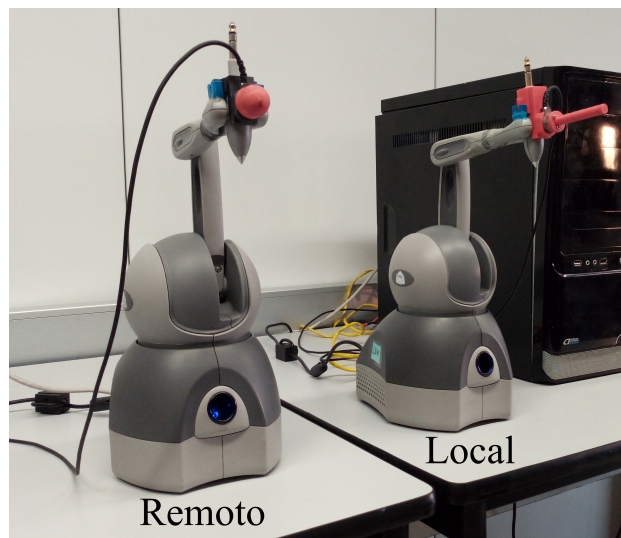




## Resultados experimentales

---

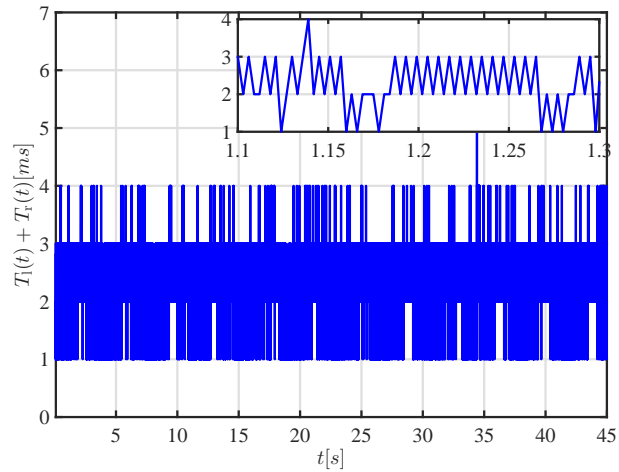
En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de forma experimental, al implementar la ley de control propuesta para los manipuladores local y remoto, mostrada en el capítulo anterior. Para la implementación, se utilizó un sistema de teleoperación construido con dos robots hápticos *Geomagic Touch*, cada uno conectado a una computadora. La comunicación se realizó por internet, mediante una red local alámbrica. Los robots cuentan con 3 grados de libertad actuados, y fueron dotados de un sensor de fuerza de 3 ejes, colocado en el efector final de cada robot. El retardo en las comunicaciones entre ambos robots resulta despreciable para la experimentación, por lo que se induce un retardo mayor, de manera artificial mediante software. El algoritmo de control fue implementado en lenguaje de programación C++. Para comprobar el funcionamiento del algoritmo propuesto, se realizaron pruebas de movimiento restringido para ambos robots, con restricción rígida y deformable, así como con distintos retardos.



**Figura 4.1:** Sistema de teleoperación.

### 4.1. Prueba sin retardo

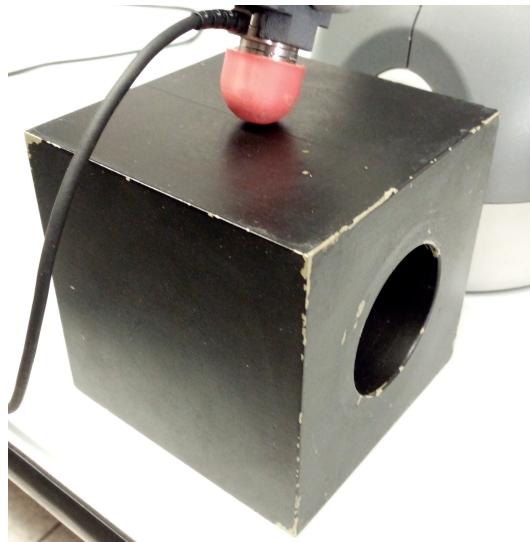
Como punto de comparación, se realizaron las pruebas sin inducir el retardo de manera artificial.



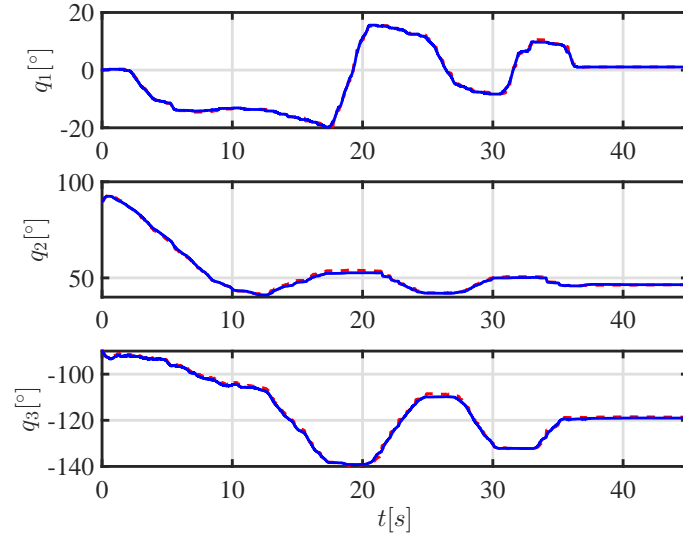
**Figura 4.2:** Retardo propio del sistema.

#### 4.1.1. Superficie rígida

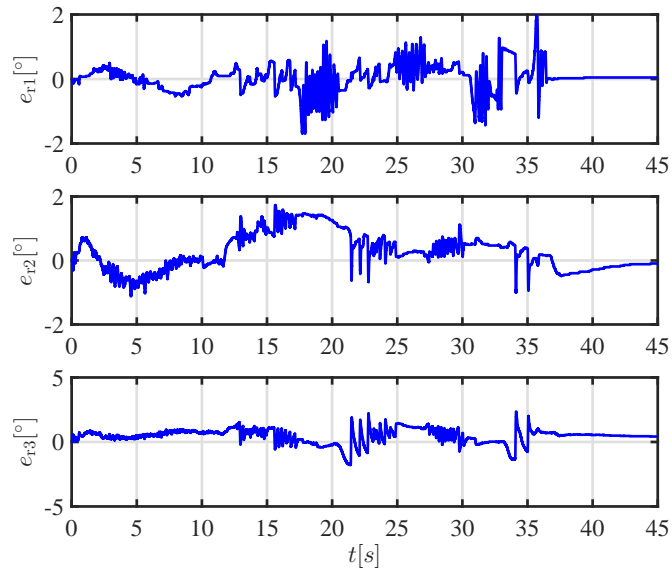
Para el experimento con superficie rígida se utilizó un cubo de acero como restricción.



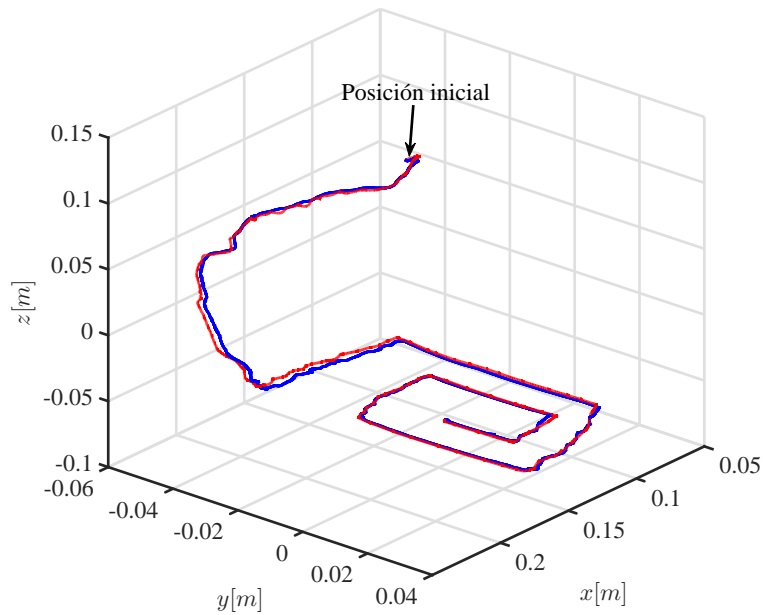
**Figura 4.3:** Superficie rígida como restricción.



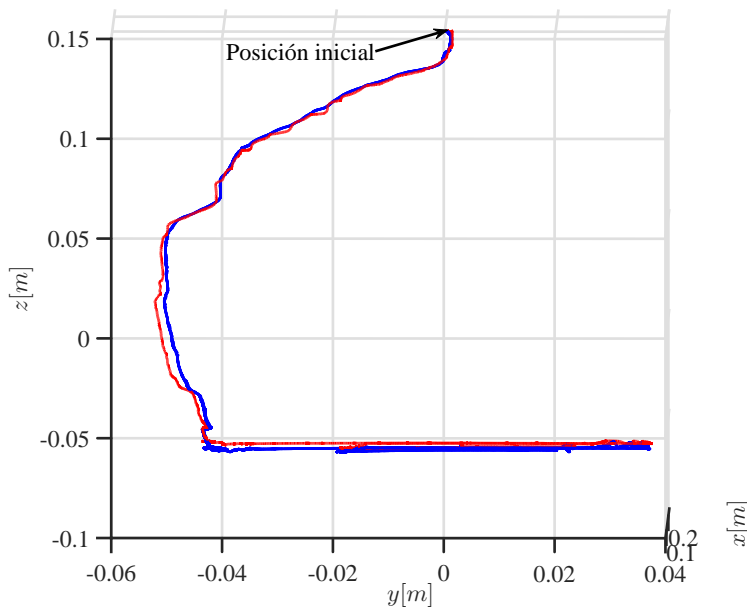
**Figura 4.4:** Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo  $q_1(t)$  (—) vs  $q_r(t)$  (- - -).



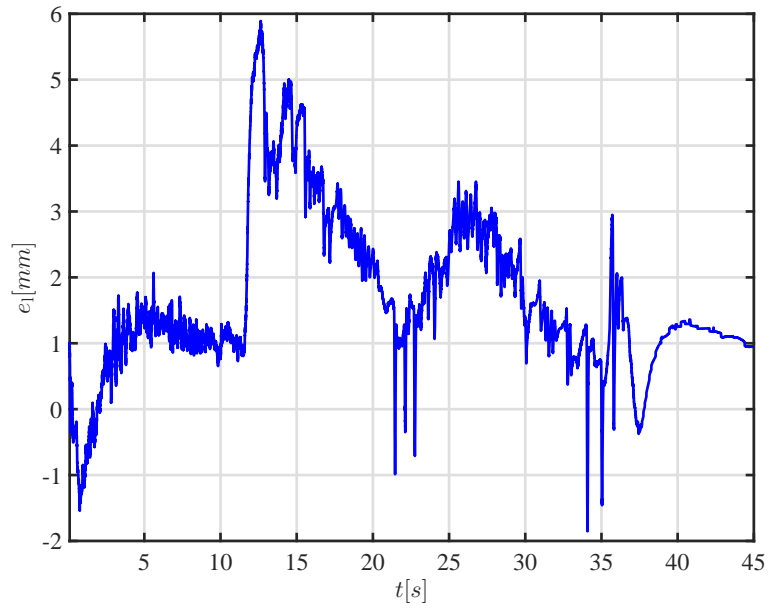
**Figura 4.5:** Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo  $e_r(t) = q_r(t) - q_1(t)$ .



**Figura 4.6:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo  $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).



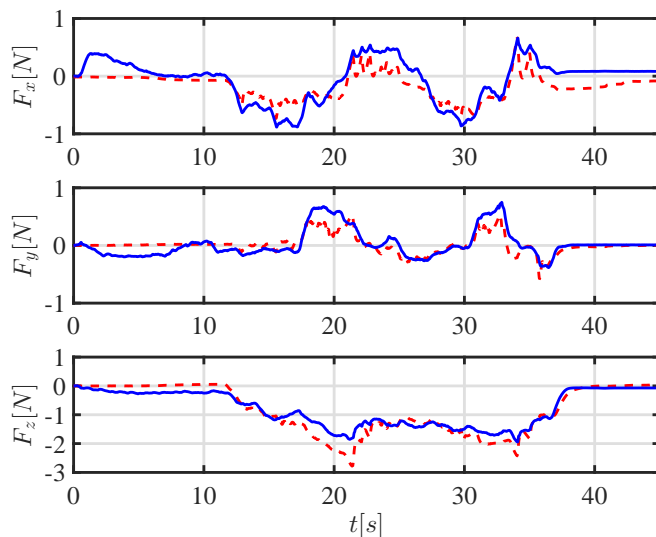
**Figura 4.7:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista frontal) en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo  $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).



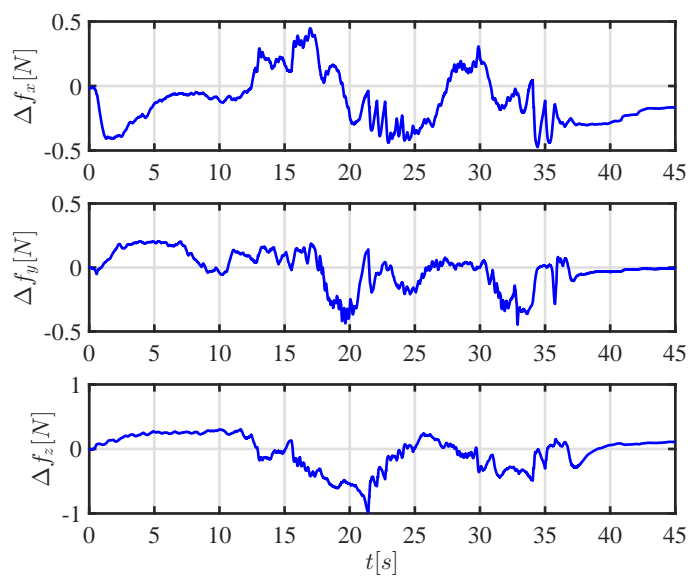
**Figura 4.8:** Error local en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo  $e_1(t)$ .

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---



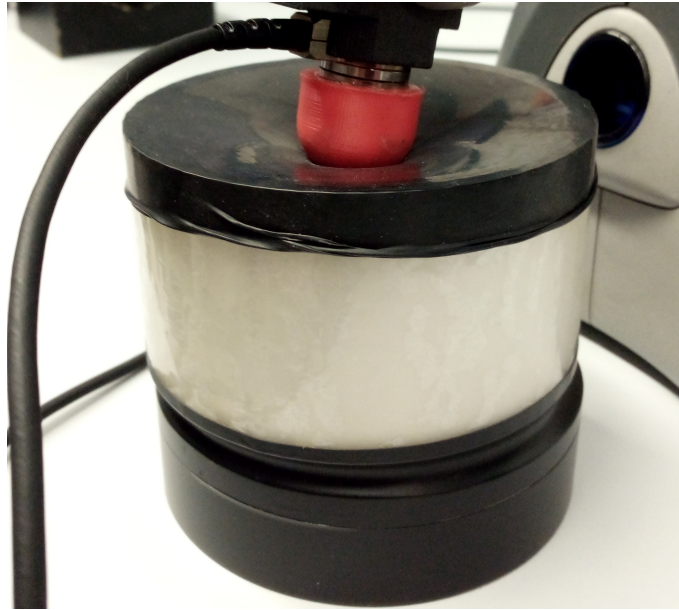
**Figura 4.9:** Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo  $\mathbf{F}_h(t)$  (—) vs  $\mathbf{F}_e(t)$  (- - -).



**Figura 4.10:** Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie rígida y sin retardo  $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t)$ .

#### 4.1.2. Superficie deformable

Para el experimento con superficie deformable se utilizó una pequeña cama elástica de hule como restricción.

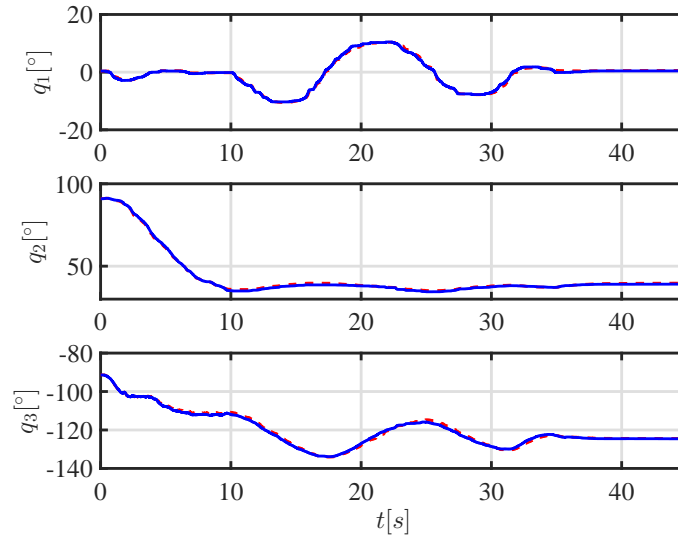


**Figura 4.11:** Superficie deformable como restricción.

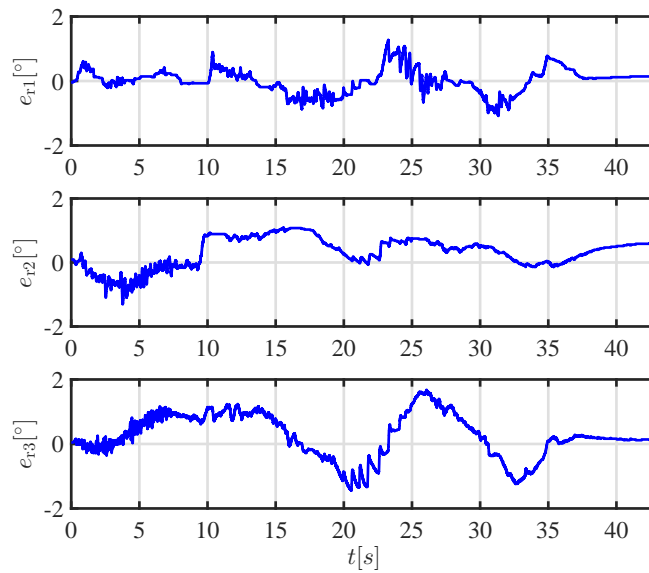


#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

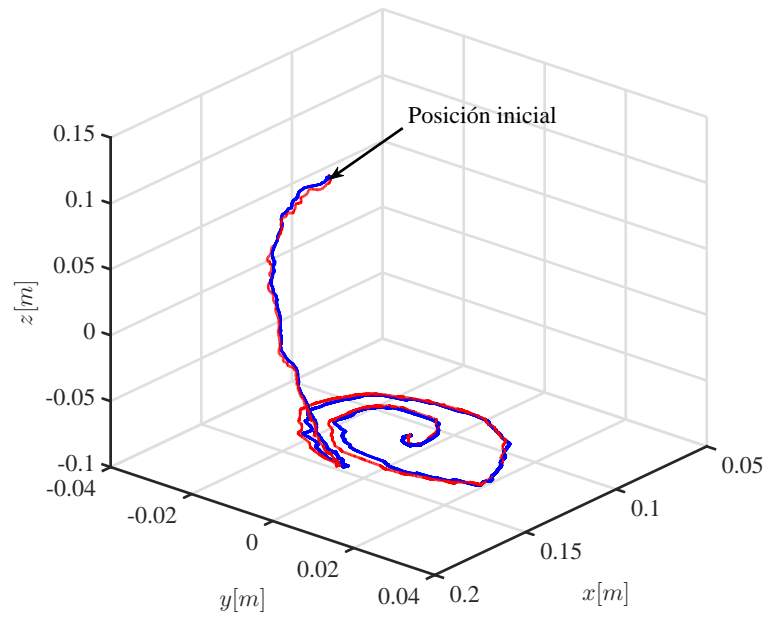
---



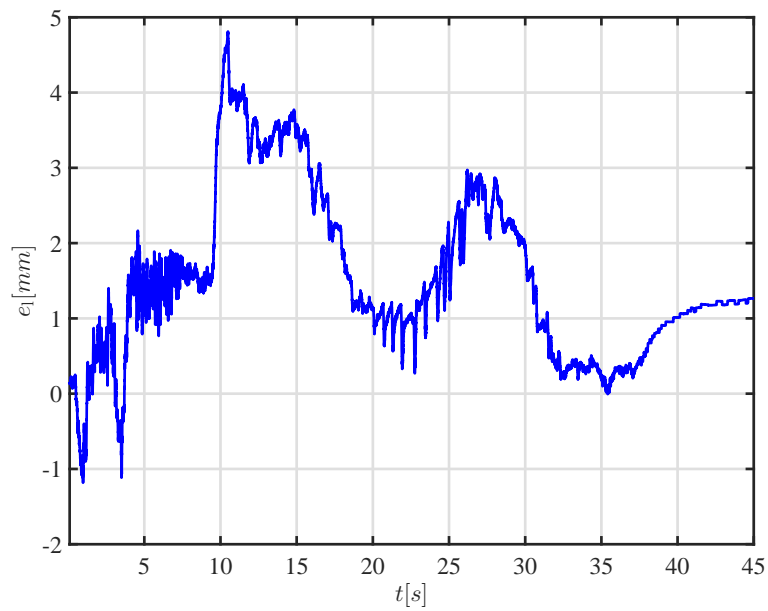
**Figura 4.12:** Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo  $\mathbf{q}_1(t)$  (—) vs  $\mathbf{q}_r(t)$  (- - -).



**Figura 4.13:** Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo  $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t)$ .



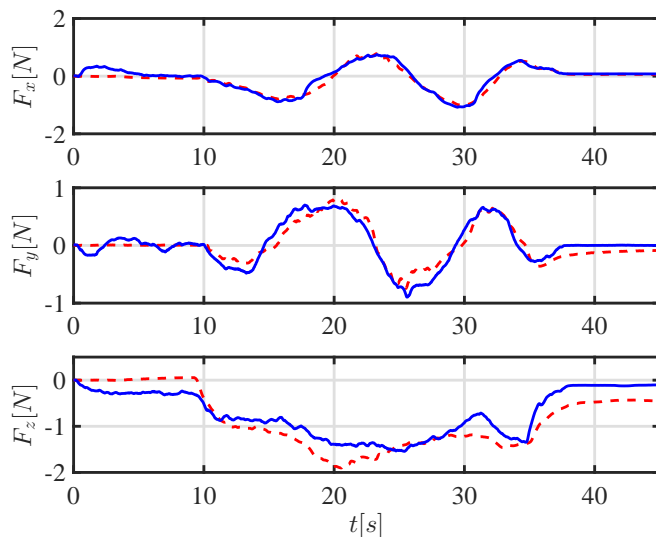
**Figura 4.14:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo  $x_1$  (—) vs  $x_r$  (- - -).



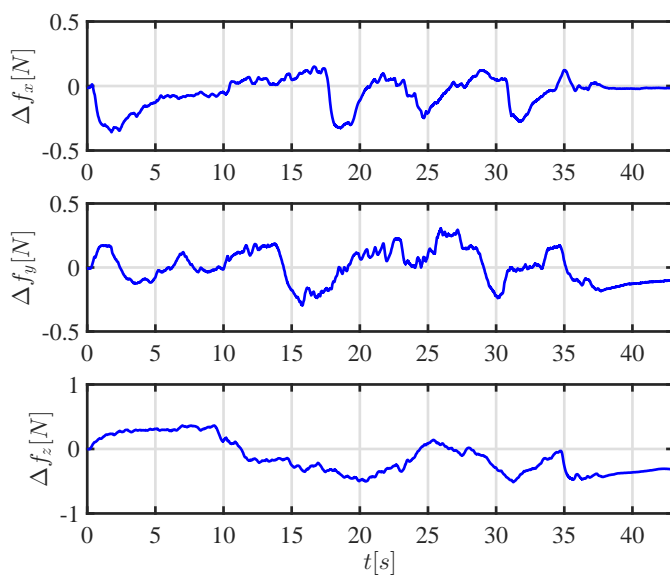
**Figura 4.15:** Error local en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo  $e_1(t)$ .

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---



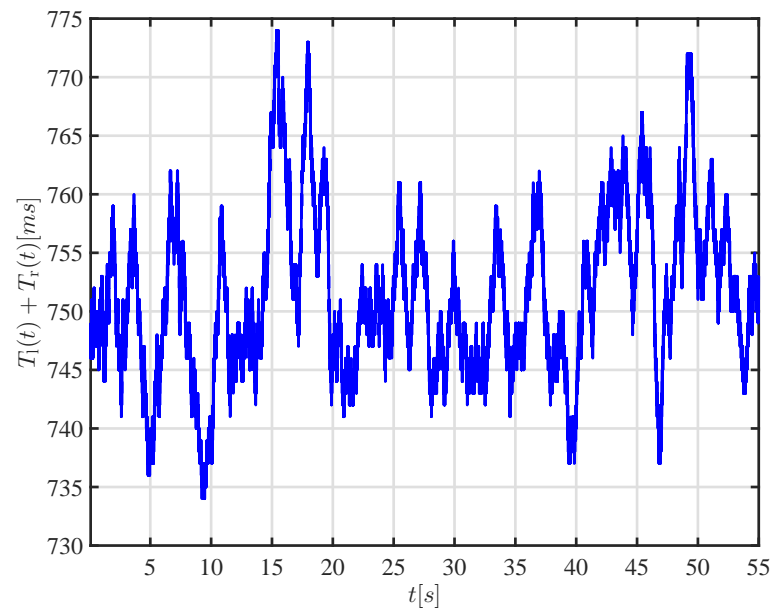
**Figura 4.16:** Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo  $\mathbf{F}_h(t)$  (—) vs  $\mathbf{F}_e(t)$  (- - -).



**Figura 4.17:** Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie deformable y sin retardo  $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t)$ .

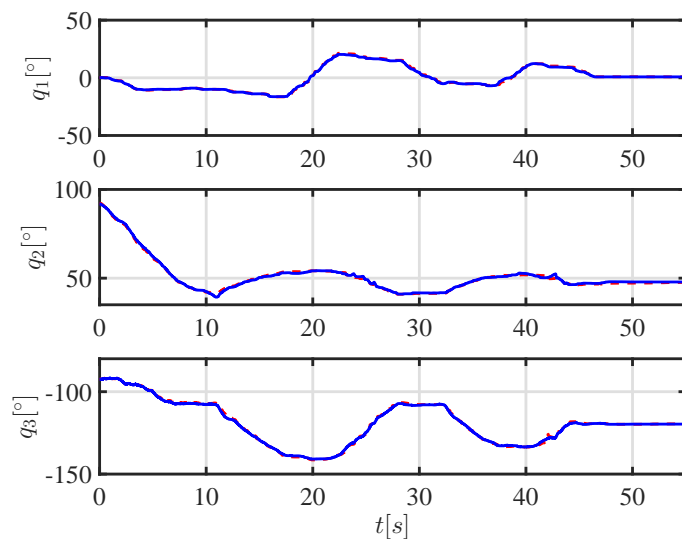
## 4.2. Mismo retardo para ambos manipuladores.

Los siguientes resultados fueron obtenidos induciendo un retardo en el canal de comunicación, variante en tiempo y con una media aproximada de 0.75 segundos como la suma de los retardos (aproximadamente 0.375 seg. en cada robot).

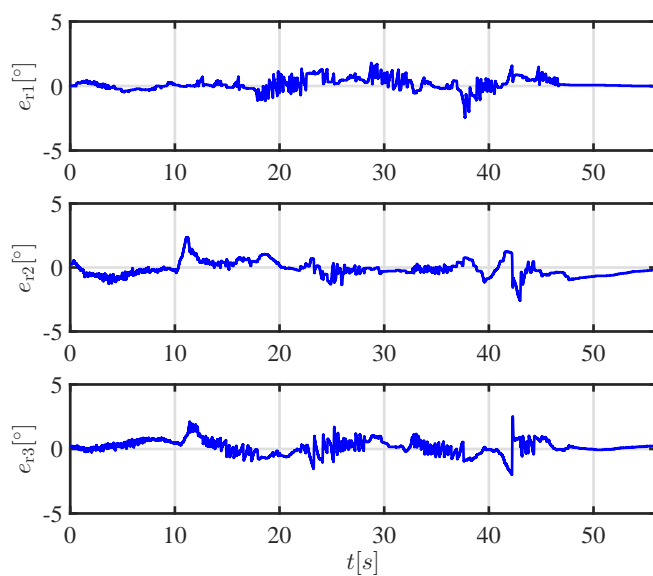


**Figura 4.18:** Retardo variante en el tiempo, inducido al sistema, con media de aproximadamente 0.75 seg.

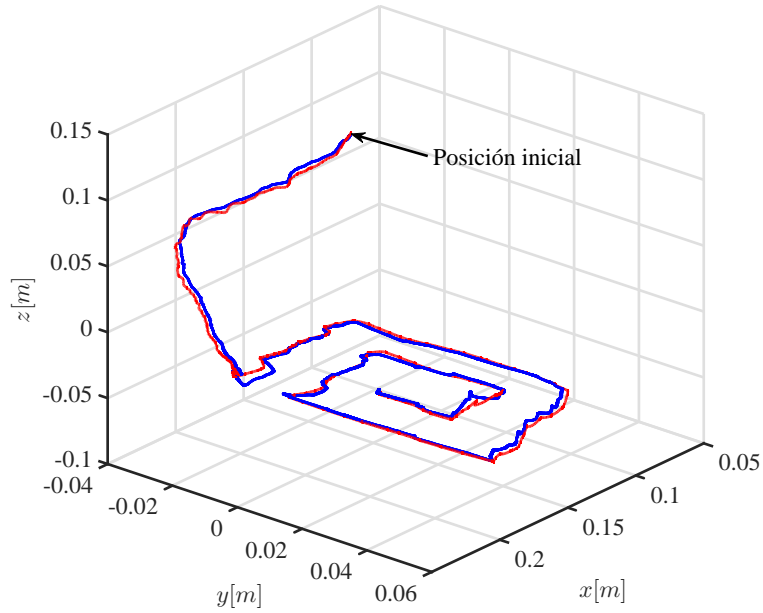
### 4.2.1. Superficie rígida



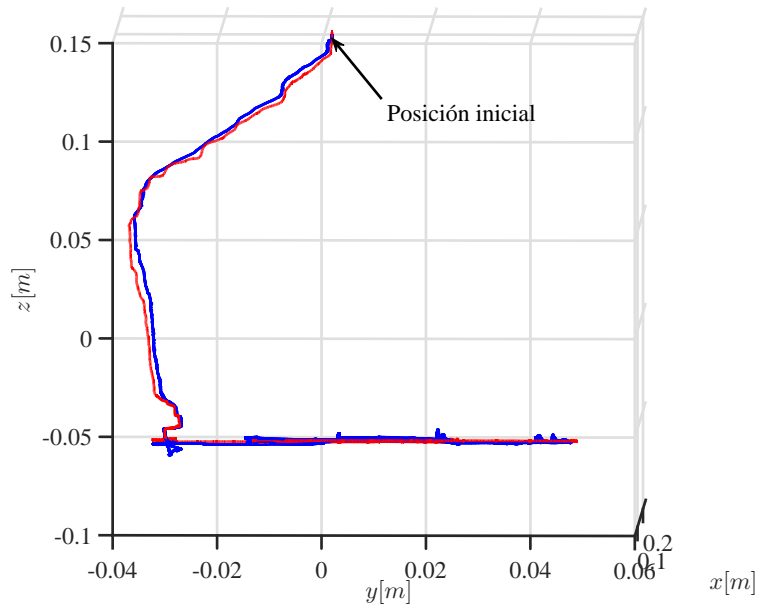
**Figura 4.19:** Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente  $0.75 [s]$   $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{q}_r(t)$  (- - -).



**Figura 4.20:** Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente  $0.75 [s]$   $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ .



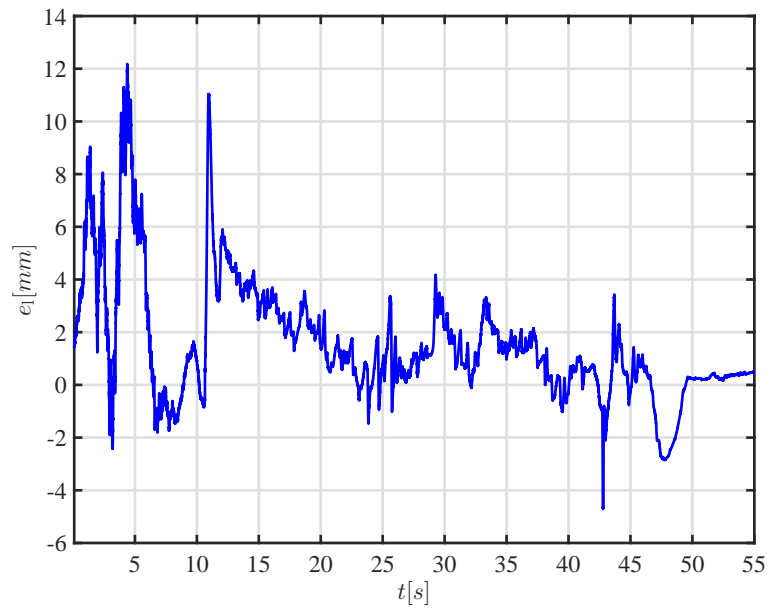
**Figura 4.21:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente  $0.75 [s]$   $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).



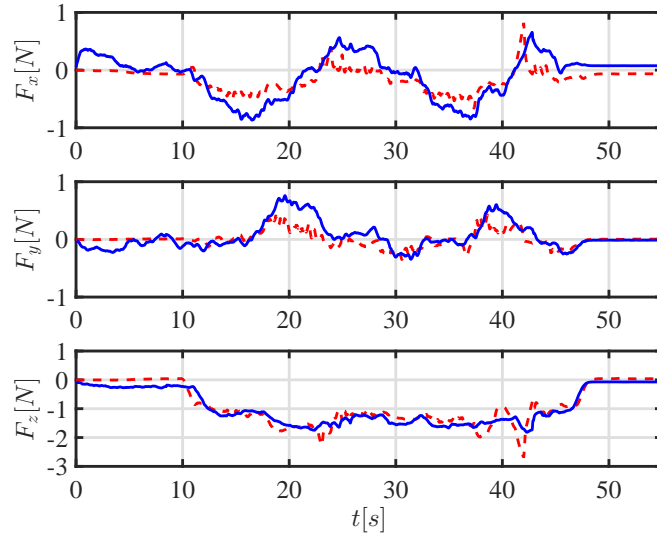
**Figura 4.22:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista frontal) en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente  $0.75 [s]$   $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

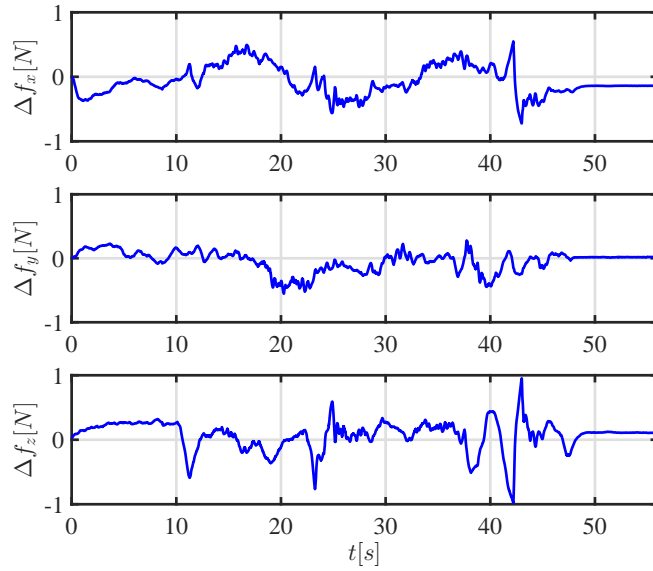
---



**Figura 4.23:** Error local en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s]  $e_1(t)$ .



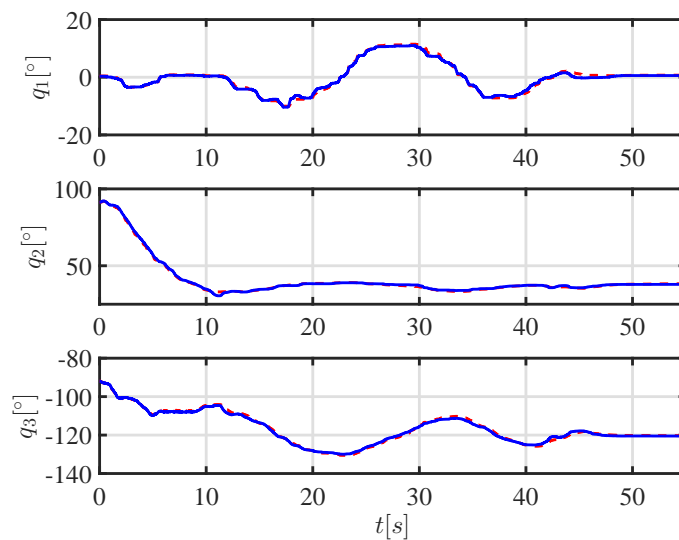
**Figura 4.24:** Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente  $0.75 [s]$   $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{F}_e(t)$  (- - -).



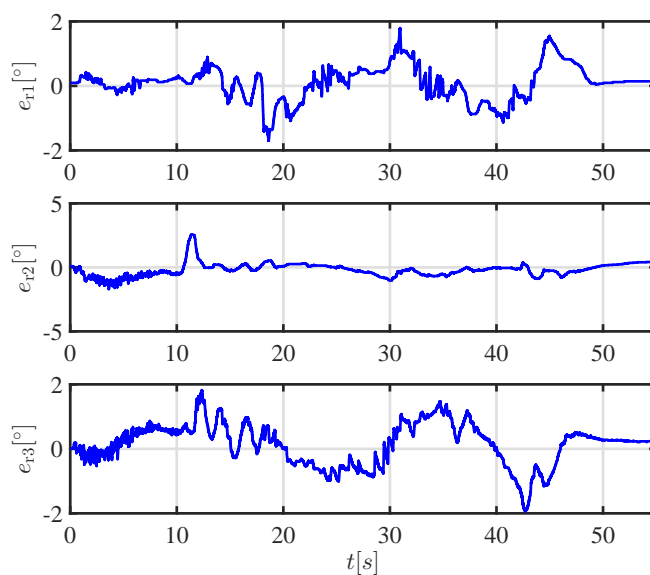
**Figura 4.25:** Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie rígida, con retardo variante con media de aproximadamente  $0.75 [s]$   $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ .



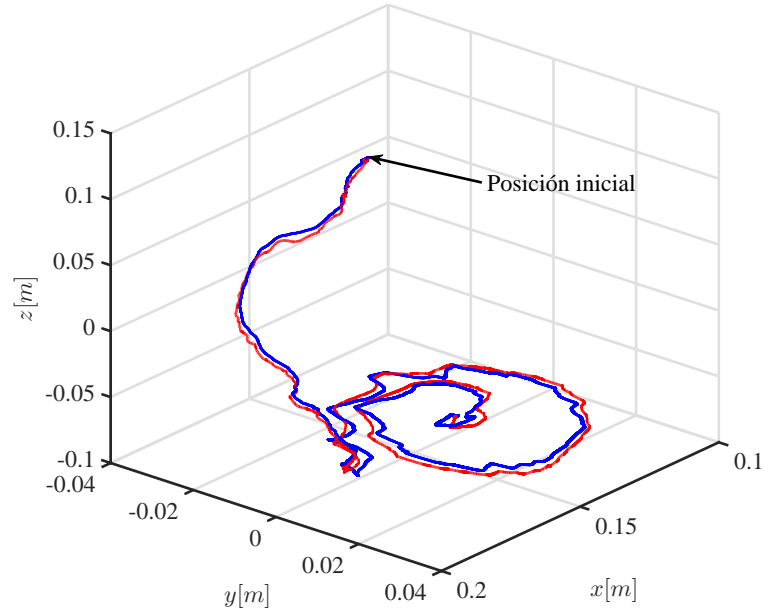
## 4.2.2. Superficie deformable



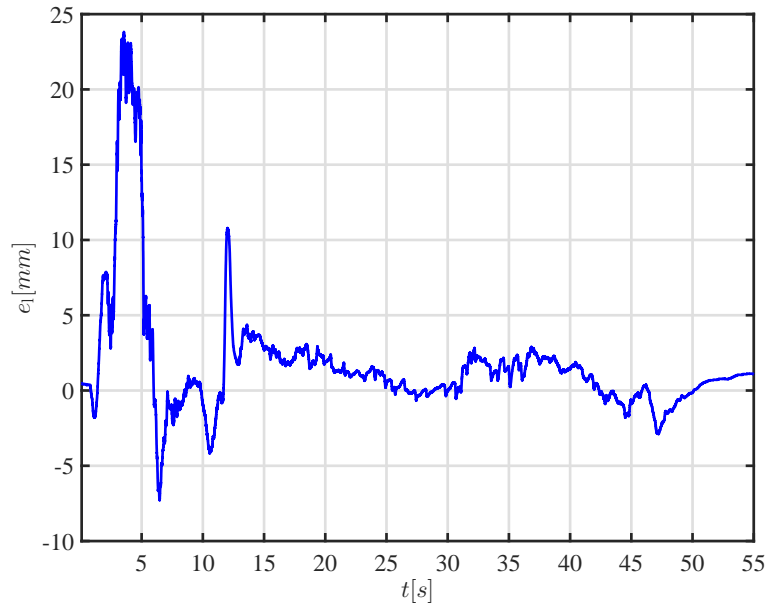
**Figura 4.26:** Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s]  $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{q}_r(t)$  (- - -).



**Figura 4.27:** Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s]  $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ .



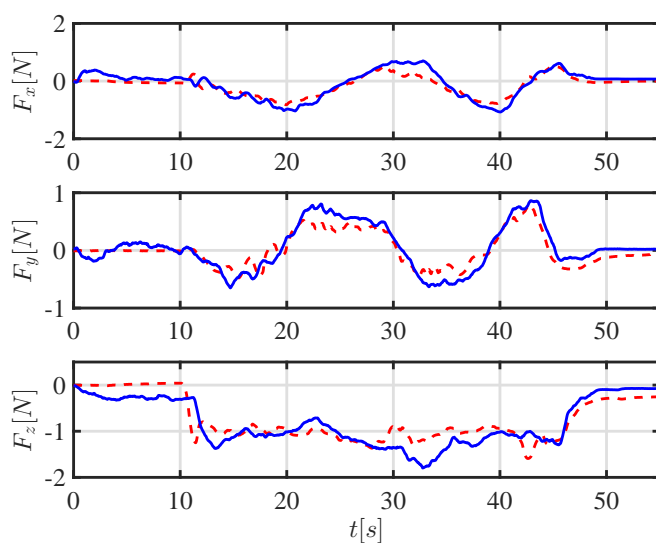
**Figura 4.28:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s]  $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).



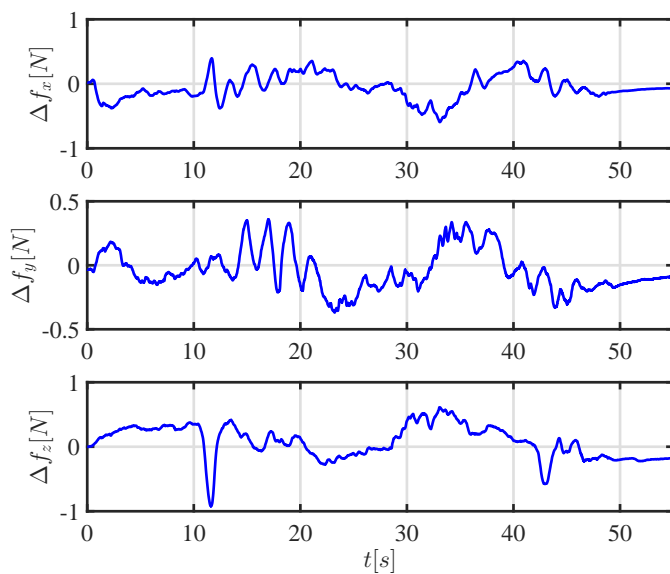
**Figura 4.29:** Error local en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s]  $e_1(t)$ .

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---



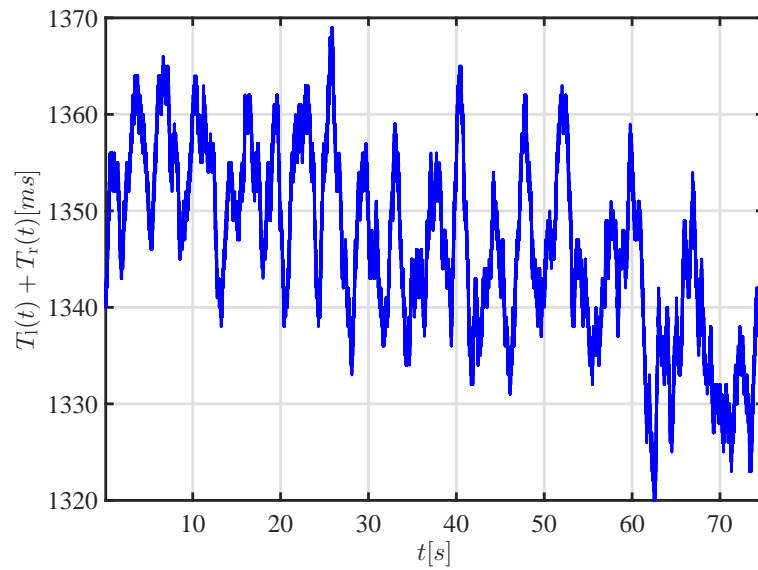
**Figura 4.30:** Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s]  $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{F}_e(t)$  (- - -).



**Figura 4.31:** Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie deformable, con retardo variante con media de aproximadamente 0.75 [s]  $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ .

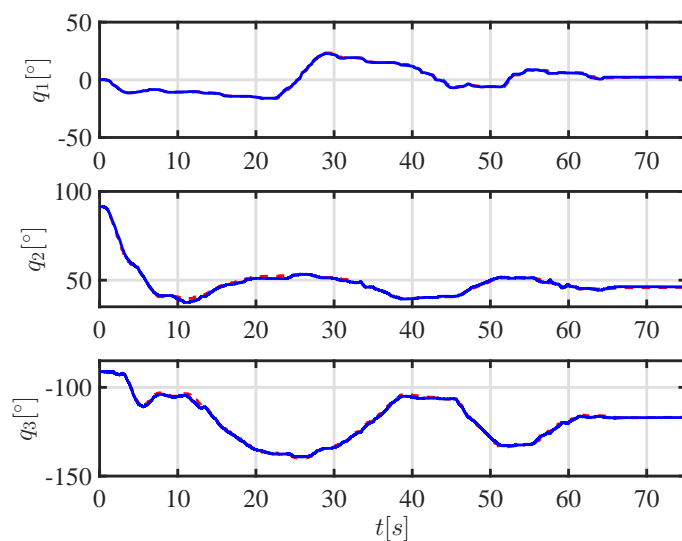
### 4.3. Retardo mayor para el local.

Los siguientes resultados fueron obtenidos induciendo un retardo variante en tiempo y con una media aproximada de 0.97 y 0.375 segundos en los robots local y remoto respectivamente.

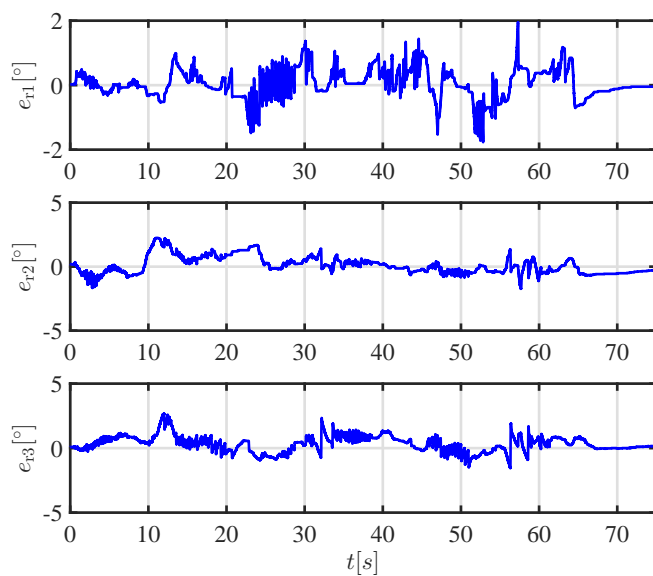


**Figura 4.32:** Retardo total en la comunicación entre el robot local y el remoto (mayor retardo en el local).

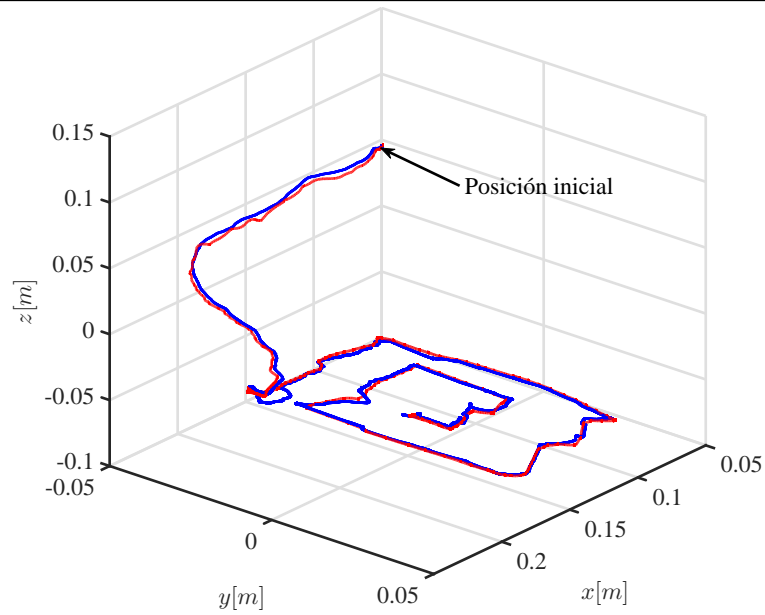
## 4.3.1. Superficie rígida



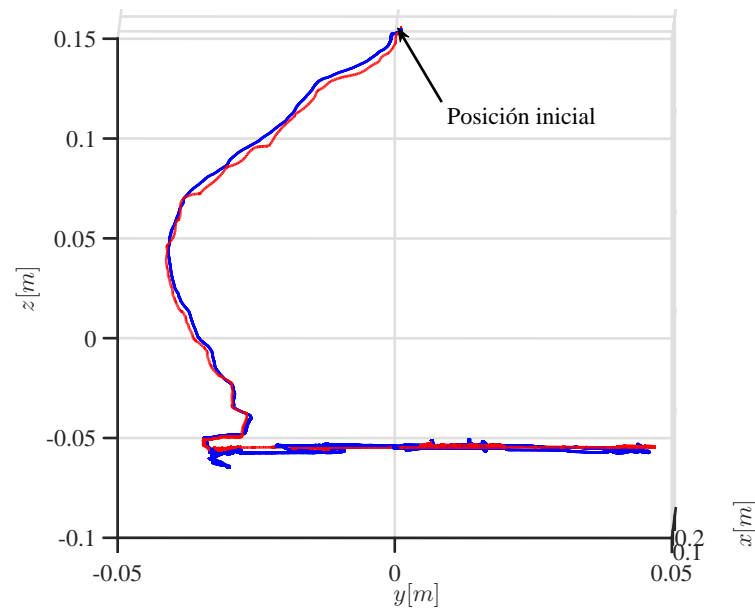
**Figura 4.33:** Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local  $q_1(t - T_1(t))$  (—) vs  $q_r(t)$  (- - -).



**Figura 4.34:** Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local  $e_r(t) = q_r(t) - q_1(t - T_1(t))$ .



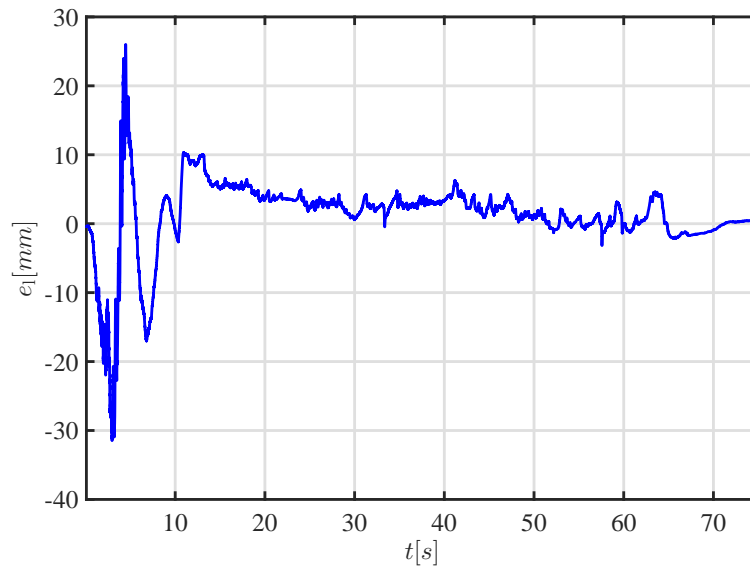
**Figura 4.35:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local  $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).



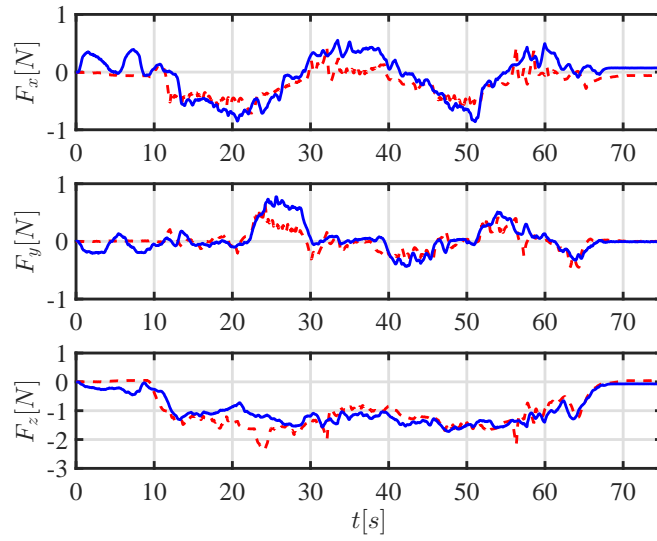
**Figura 4.36:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista frontal) en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local  $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

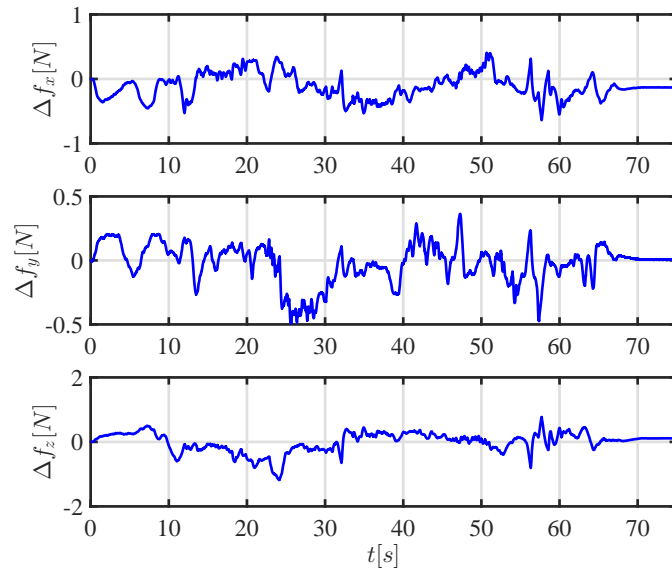
---



**Figura 4.37:** Error local en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local  $e_1(t)$ .



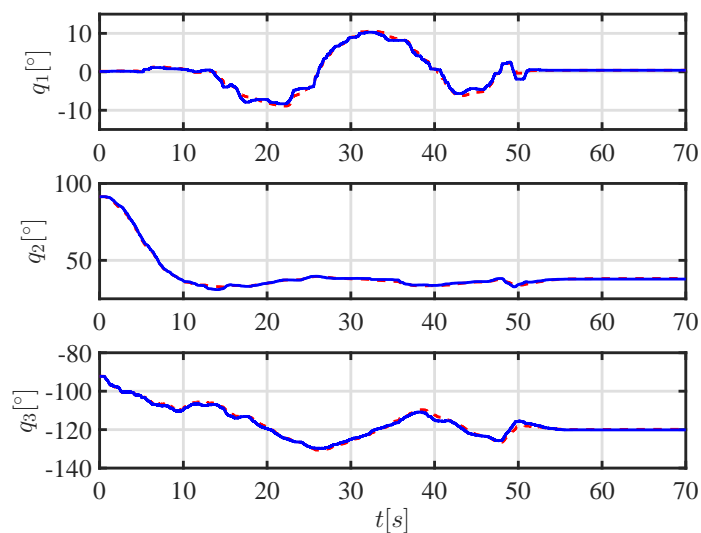
**Figura 4.38:** Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local  $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{F}_e(t)$  (- - -).



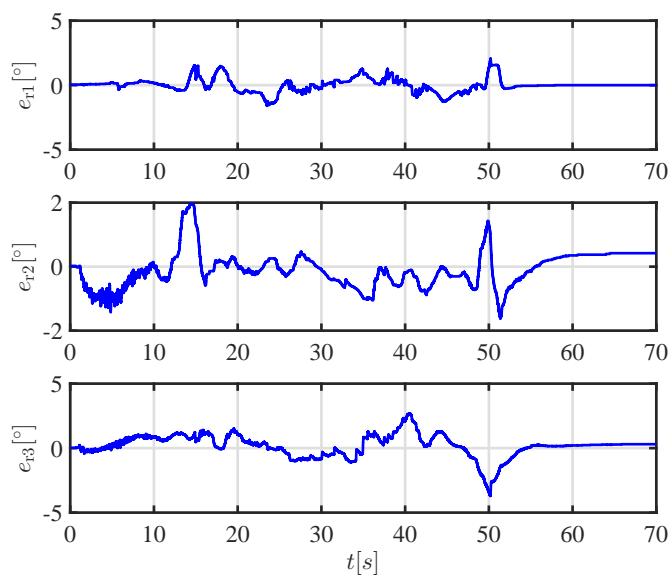
**Figura 4.39:** Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot local  $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ .



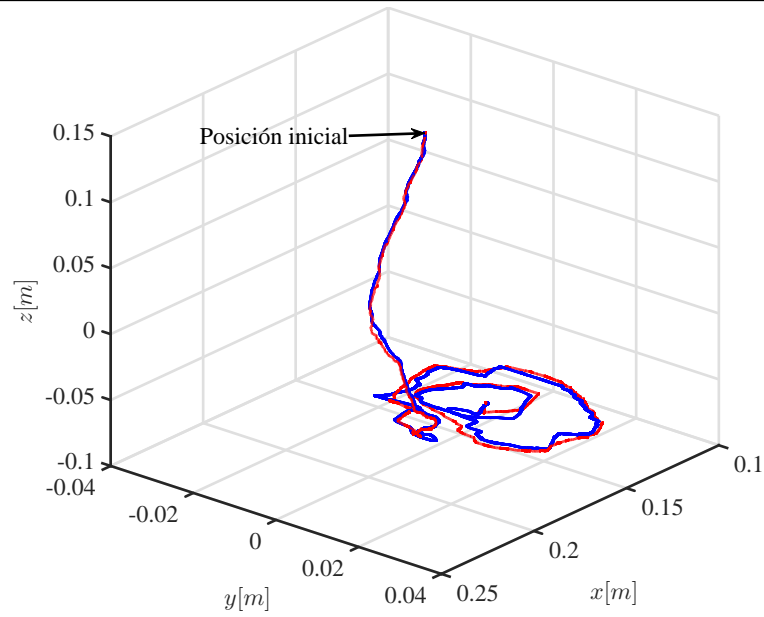
### 4.3.2. Superficie deformable



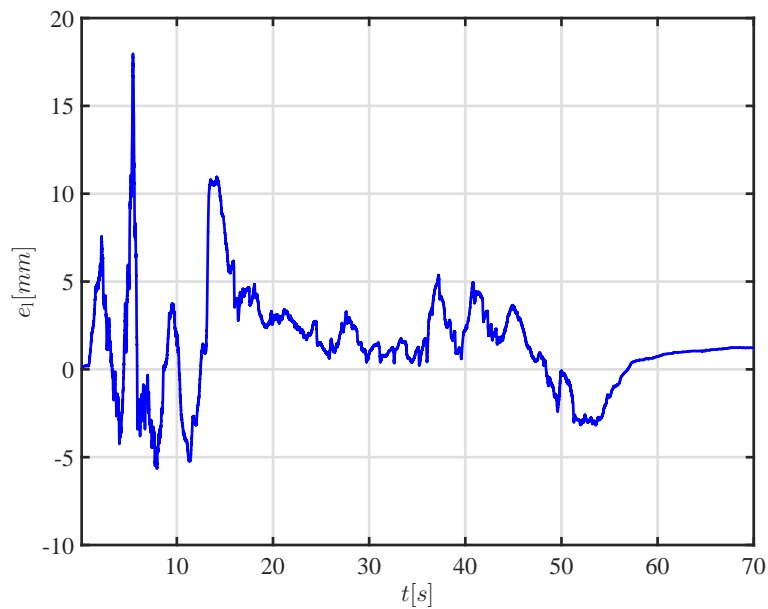
**Figura 4.40:** Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local  $q_1(t - T_1(t))$  (—) vs  $q_r(t)$  (- - -).



**Figura 4.41:** Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local  $e_r(t) = q_r(t) - q_1(t - T_1(t))$ .



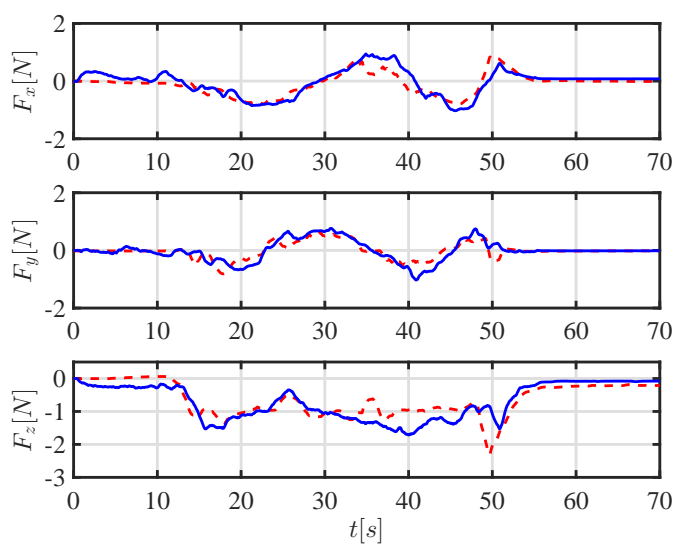
**Figura 4.42:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local  $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).



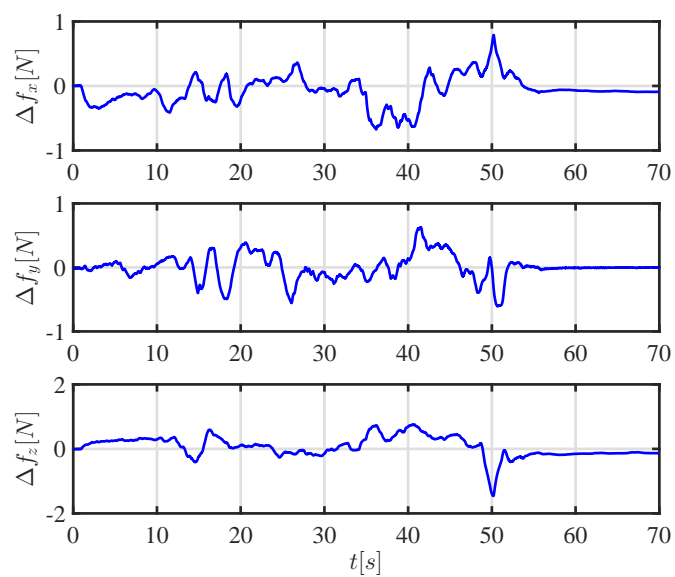
**Figura 4.43:** Error local en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local  $e_1(t)$ .

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---



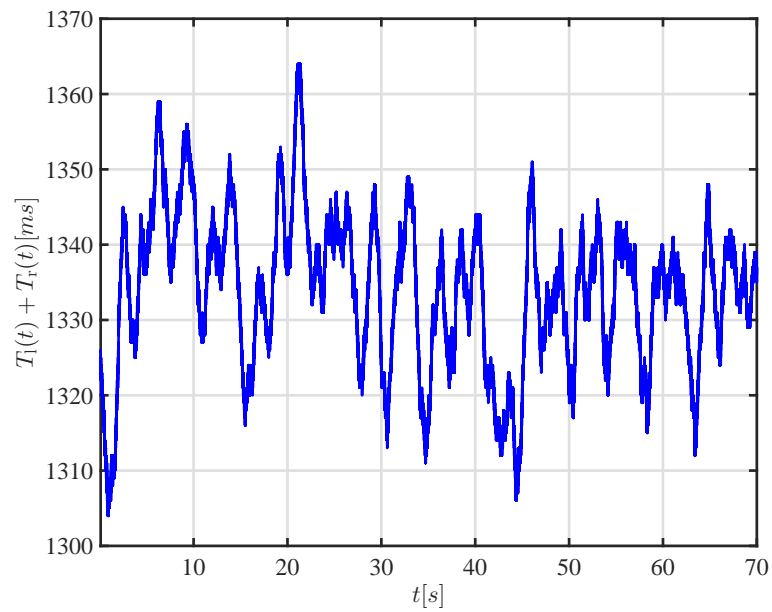
**Figura 4.44:** Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local  $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{F}_e(t)$  (- - -).



**Figura 4.45:** Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot local  $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ .

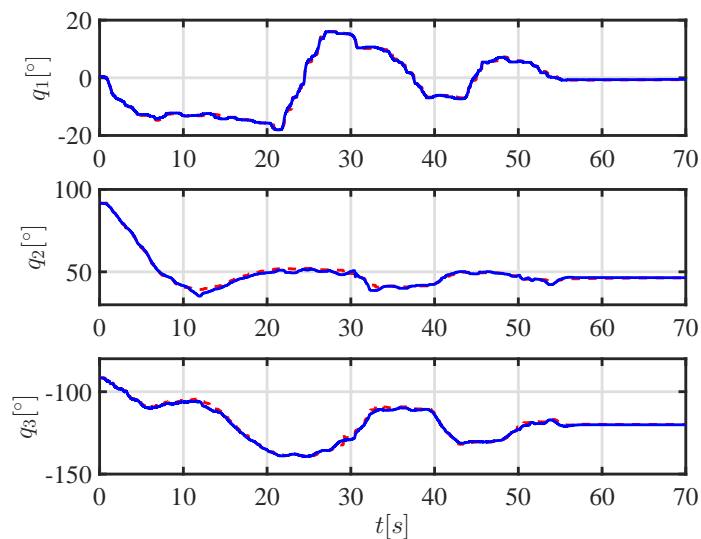
#### 4.4. Retardo mayor para el remoto.

Los siguientes resultados fueron obtenidos induciendo un retardo asimétrico variante en tiempo y con una media aproximada de 0.375 y 0.97 segundos en los robots local y remoto respectivamente.

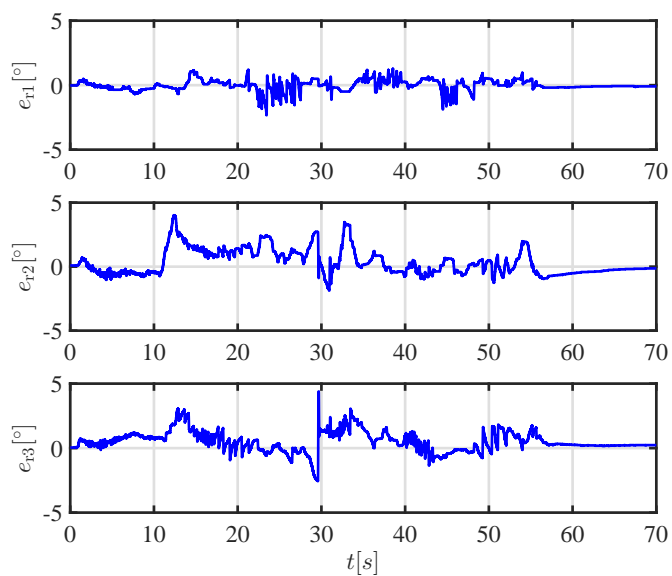


**Figura 4.46:** Retardo asimétrico: mayor retardo en la comunicación entre el robot remoto y el local.

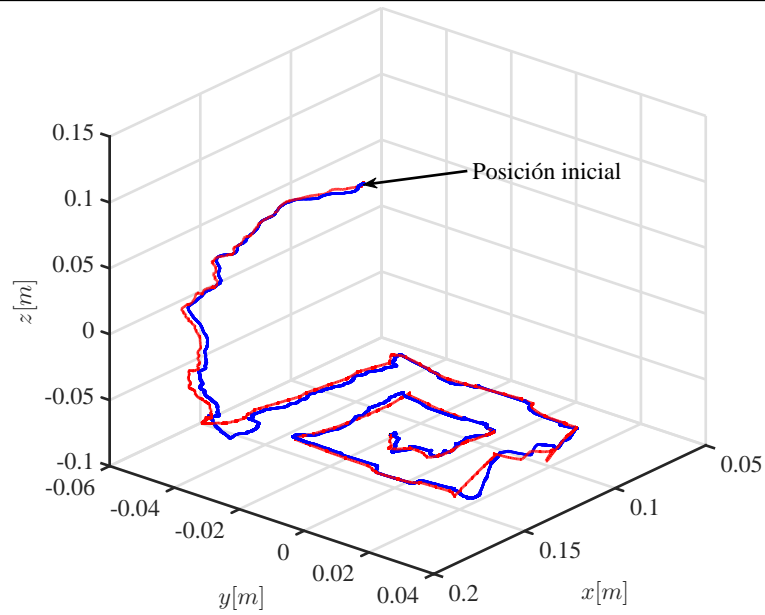
#### 4.4.1. Superficie rígida



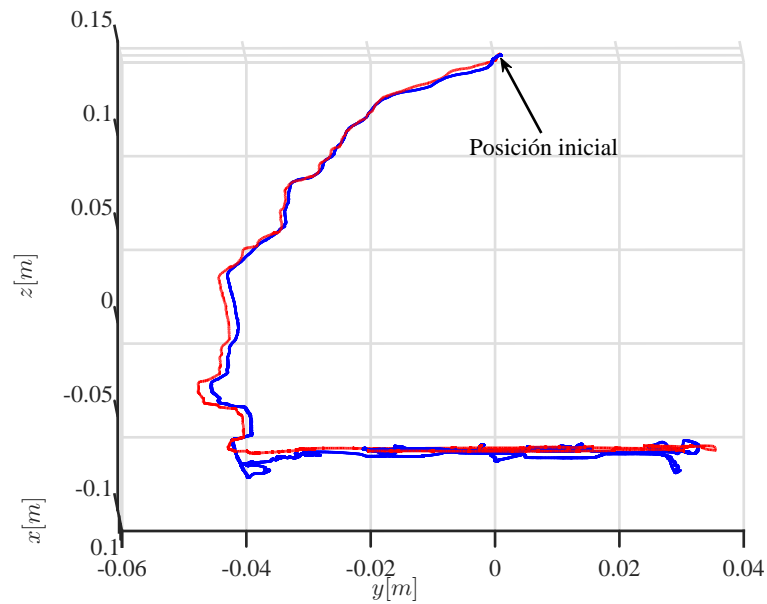
**Figura 4.47:** Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto  $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{q}_r(t)$  (- - -).



**Figura 4.48:** Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto  $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ .



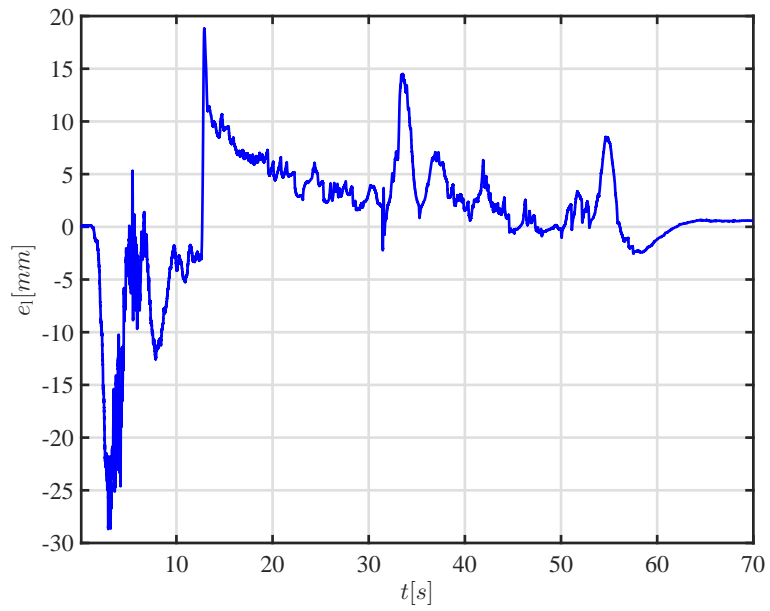
**Figura 4.49:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto  $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).



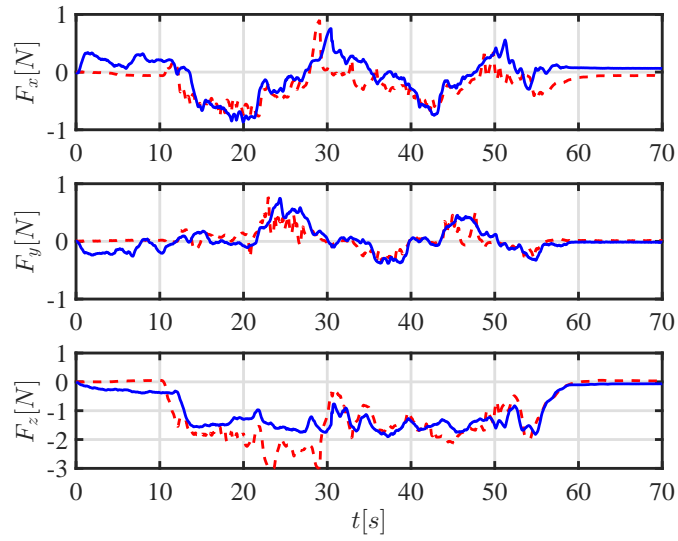
**Figura 4.50:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista frontal) en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto  $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

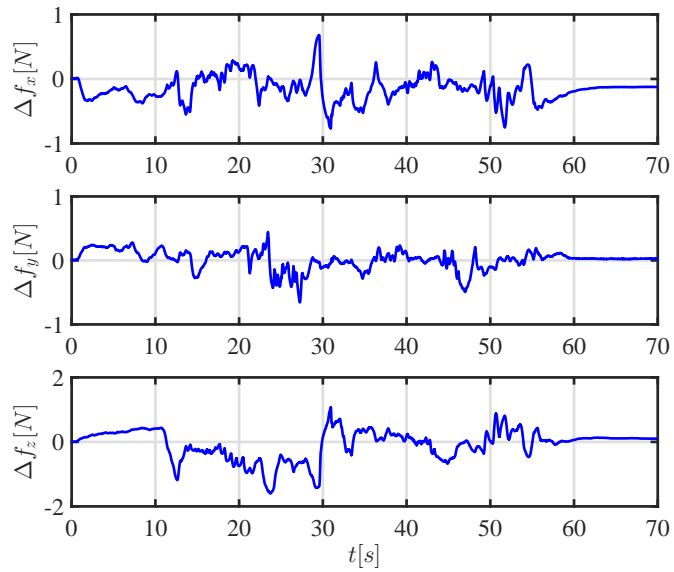
---



**Figura 4.51:** Error local en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto  $e_1(t)$ .



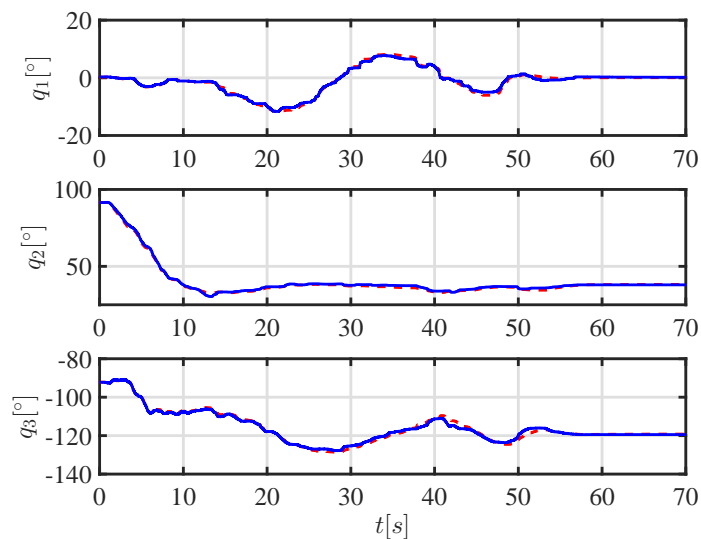
**Figura 4.52:** Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto  $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{F}_e(t)$  (- - -).



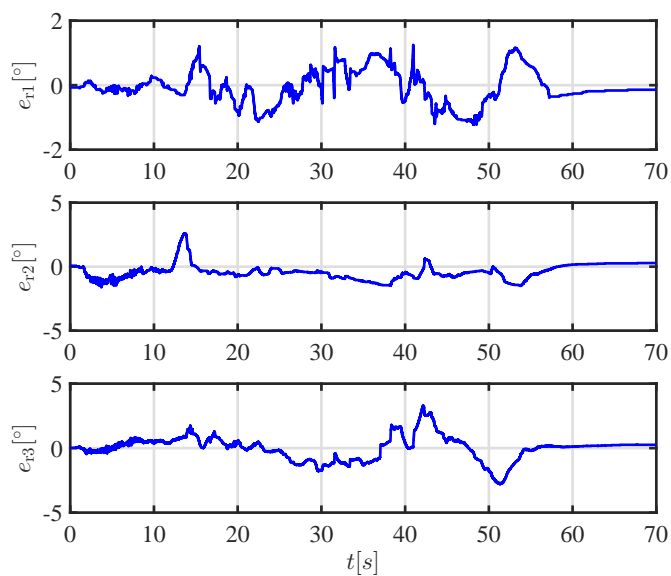
**Figura 4.53:** Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie rígida, con mayor retardo para el robot remoto  $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ .



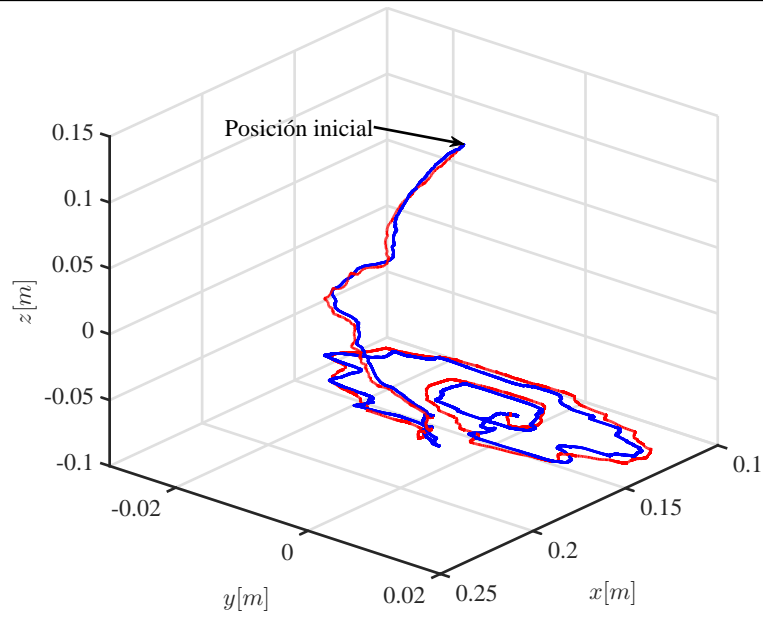
## 4.4.2. Superficie deformable



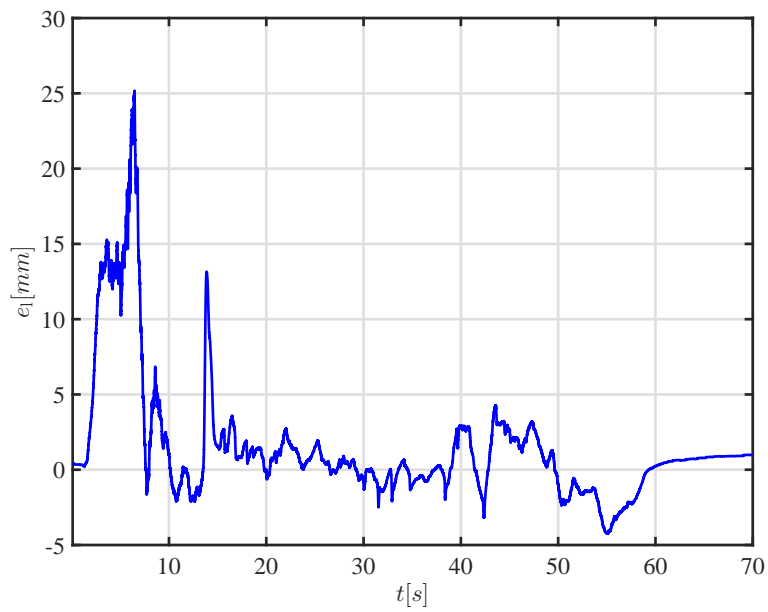
**Figura 4.54:** Posiciones articulares en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto  $\mathbf{q}_1(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{q}_r(t)$  (- - -).



**Figura 4.55:** Errores de seguimiento en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto  $\mathbf{e}_r(t) = \mathbf{q}_r(t) - \mathbf{q}_1(t - T_1(t))$ .

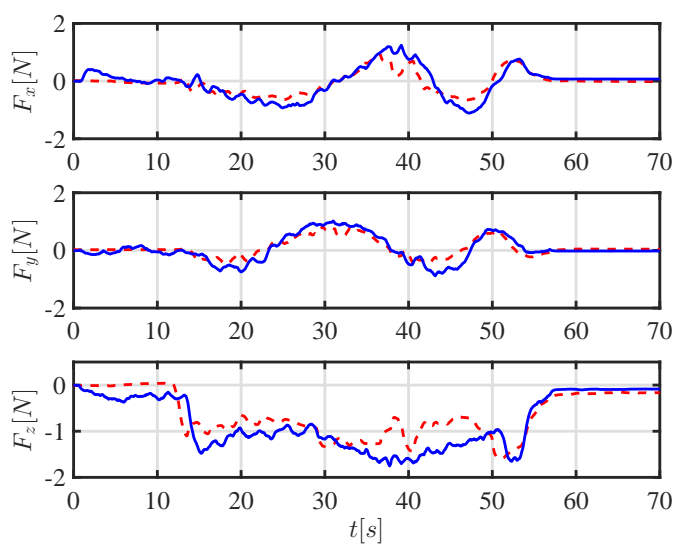


**Figura 4.56:** Reconstrucción de la superficie de la restricción (vista isométrica) en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto  $\mathbf{x}_1$  (—) vs  $\mathbf{x}_r$  (- - -).

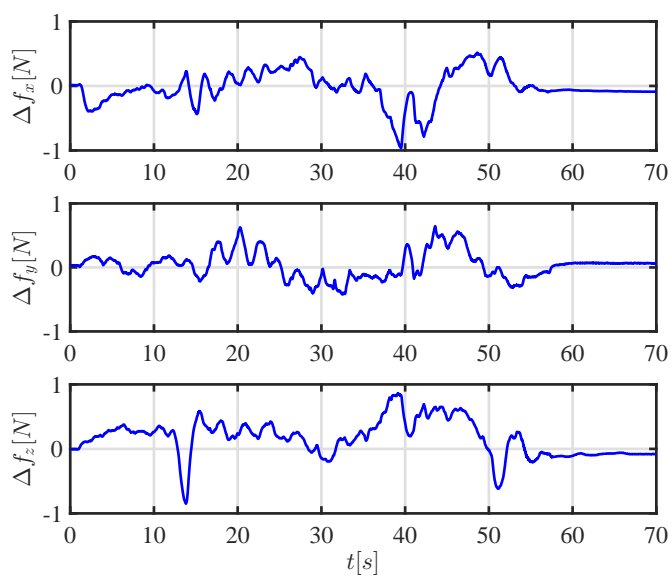


**Figura 4.57:** Error local en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto  $e_1(t)$ .

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES



**Figura 4.58:** Fuerzas aplicadas por cada robot en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto  $\mathbf{F}_h(t - T_1(t))$  (—) vs  $\mathbf{F}_e(t)$  (- - -).



**Figura 4.59:** Error de seguimiento de fuerza en movimiento restringido con superficie deformable, con mayor retardo para el robot remoto  $\Delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_e(t) - \mathbf{F}_h(t - T_1(t))$ .

## 4.5. Análisis de resultados

Al comparar las gráficas de las posiciones articulares, errores de posición, fuerzas y errores de fuerza, para todos los experimentos realizados, se observa que, ni el retardo ni el tipo de restricción (rígida o deformable), afectan de manera considerable a los errores de posición y fuerza; ya que, en todos los experimentos, los errores de posición no superan los 5 [°], mientras que los errores de fuerza no superan los 2 [N].

Con respecto al error local, el retardo únicamente lo afecta en el momento del contacto con la superficie de la restricción; ya que, cuando este ocurre, el robot remoto no es capaz de seguir con precisión los movimientos del local; mientras que, debido al retardo, el robot local tarda en *darse cuenta* de la presencia de la restricción. Sin embargo, después del contacto con la superficie de la restricción, el error local disminuye y permanece la mayor parte del tiempo, por debajo de los 5 [mm].

Para realizar una comparación más objetiva de los resultados obtenidos en cada experimento, se obtuvieron los valores RMS de los errores de seguimiento de posición y de fuerza, los cuales se muestran en las Tablas 4.1 y 4.2. A partir de estos, se observa que la presencia del retardo, así como su incremento, no afecta considerablemente los valores RMS de los errores de posición y de fuerza. A pesar de que se observa que los valores RMS de  $e_r$  y  $e_f$  incrementan con el retardo (en la mayoría de los experimentos), este incremento solo ocurre en el momento de contacto con la superficie de la restricción.

Si bien mediante la experimentación se complementa la prueba del funcionamiento del esquema de control propuesto; al comparar las gráficas de la cinemática directa de los manipuladores, se observa que, el operador pierde precisión al manipular el robot local, al incrementar el retardo en las comunicaciones. Esto posiblemente debido a la demora en la retroalimentación de fuerza para el operador.

**Tabla 4.1:** Valores RMS de los errores de seguimiento de posición y fuerza, para cada experimento (completo).

Experimento	Superficie	$e_{r1}$ [°]	$e_{r2}$ [°]	$e_{r3}$ [°]	$e_l$ [mm]	$F_x$ [N]	$F_y$ [N]	$F_z$ [N]
Sin retardo	Rígida	0.3982	0.6332	0.7105	2.0783	0.2303	0.1397	0.2663
	Deformable	0.3633	0.5680	0.7133	1.8890	0.1262	0.1294	0.2952
Mismo retardo	Rígida	0.4786	0.6045	0.5575	2.7806	0.2360	0.1674	0.2386
	Deformable	0.5367	0.5523	0.6581	4.5013	0.1994	0.1643	0.2657
Mayor retardo local	Rígida	0.4585	0.6935	0.6973	5.5016	0.2226	0.1516	0.3020
	Deformable	0.5231	0.5661	0.8854	3.1150	0.2342	0.1935	0.3198
Mayor retardo remoto	Rígida	0.4247	1.0532	0.9283	5.8690	0.2432	0.1486	0.4644
	Deformable	0.5157	0.7224	0.9393	4.4507	0.2527	0.2092	0.3244

**Tabla 4.2:** Valores RMS de los errores de seguimiento de posición y fuerza, para cada experimento (solo movimiento restringido).

Experimento	Superficie	$e_{r1}$ [°]	$e_{r2}$ [°]	$e_{r3}$ [°]	$e_l$ [mm]	$F_x$ [N]	$F_y$ [N]	$F_z$ [N]
Sin retardo	Rígida	0.4381	0.6925	0.7392	0.2389	0.1412	0.2788	1.9188
	Deformable	0.3965	0.5993	0.7381	0.1065	0.1389	0.3011	1.756
Mismo retardo	Rígida	0.5178	0.6213	0.5763	0.245	0.1752	0.2392	1.7646
	Deformable	0.5881	0.4846	0.6997	0.1993	0.1756	0.2644	1.7366
Mayor retardo local	Rígida	0.4858	0.7034	0.7062	0.2176	0.1527	0.3054	2.9922
	Deformable	0.5682	0.5519	0.9342	0.2352	0.2089	0.3307	2.7154
Mayor retardo remoto	Rígida	0.443	1.1202	0.9622	0.2423	0.143	0.4858	4.0726
	Deformable	0.5618	0.7212	1.0142	0.2645	0.2243	0.3377	1.8144

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTALES

---

## Conclusiones

---

En este capítulo se presentan las conclusiones a las que fue posible llegar, con base en el trabajo previo realizado, desde el estado del arte, el desarrollo teórico y los resultados obtenidos. También se señala el trabajo a futuro correspondiente con la línea de investigación a la que pertenece este trabajo.

Con la realización de este trabajo fue posible analizar el estado del arte y, con base en él, realizar un adecuado planteamiento del problema. Así mismo, tomando como referencia el trabajo de investigación que se ha realizado previamente, fue posible diseñar una ley de control para el sistema de teleoperación, considerando los retardos variantes en el tiempo, que podrían estar presentes en las comunicaciones al implementar el sistema a través de largas distancias o al realizar la comunicación mediante una red saturada de información. El esquema de control propuesto resulta innovador y práctico, con respecto a las leyes de control que se han reportado como solución al problema planteado; ya que solo requiere del conocimiento de la cinemática de cada robot y las masas de los eslabones del robot local; siendo innecesario conocer los momentos de inercia y los coeficientes de fricción de cada manipulador; los cuales son difíciles de obtener, en comparación con los parámetros requeridos por el controlador propuesto. Del mismo modo, el esquema de control propuesto únicamente asume que las fuerzas aplicadas por el operador y el entorno, sobre los robots, son suaves y están acotadas. Otra contribución importante con respecto al presente trabajo es que, al plantear el problema de la manera en que se realizó, es posible buscar errores de seguimiento tan pequeños como se deseen, sin dificultar la manipulación del robot local, para el operador. Por otra parte, con el esquema de control propuesto se observa que el tamaño del retardo únicamente demora la aparición de la correspondencia cinemática retardada; sin embargo, este no afecta la manipulación del robot local, ni el seguimiento por parte del remoto. Mediante la experimentación, fue posible comprobar el correcto funcionamiento del sistema de teleoperación al implementar el esquema de control propuesto, aún a pesar de la presencia de retardos variantes en el tiempo en las comunicaciones.



### 5.1. Trabajo futuro

Para continuar con la línea de investigación en la que se encuentra el presente trabajo, podría utilizarse el planteamiento del problema en el que hacer los errores de seguimiento arbitrariamente pequeños no presenta directamente ningún efecto negativo en el desempeño del sistema. De este modo resulta posible buscar diseñar un esquema de control que logre un mejor seguimiento por parte del robot remoto al local, así como también lograr un mejor seguimiento de fuerza y que lleve al error local a cero. El esquema de control propuesto presenta la desventaja de que asume conocidas las velocidades de ambos manipuladores, de modo que habría que considerar la inclusión de un observador para la obtención de dichas velocidades. Así mismo, resultaría de utilidad comprobar el esquema de control en un sistema de teleoperación compuesto por robots de mayor número de grados de libertad, así como con robots local y remoto con diferente configuración cinemática.





## Implementación / teoremas auxiliares

---

### A.1. Robot *Geomagic Touch*

Para la comprobación experimental del esquema de control propuesto, se utilizó un par de robots *Geomagic Touch*. Este robot está diseñado principalmente para aplicaciones hápticas; sin embargo, gracias a su código abierto puede ser utilizado en distintas aplicaciones.

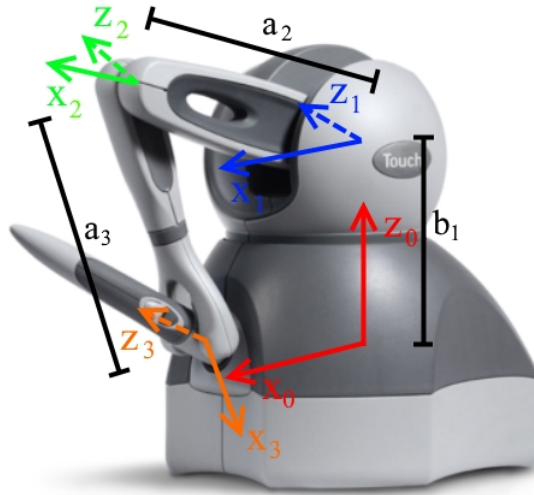


**Figura A.1:** Robot *Geomagic Touch* de 3D Systems

El robot *Geomagic Touch* cuenta con seis articulaciones, de las cuales, sólo las tres primeras se encuentran actuadas mediante motores de corriente directa. Las posiciones articulares  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  se obtienen por medio de encoders, mientras que para  $q_4$ ,  $q_5$  y  $q_6$  la posición se obtiene mediante potenciómetros.

### A.1.1. Cinemática directa

La cinemática directa  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$  para cada robot es obtenida mediante el método de reducción a coordenadas cilíndricas (Denavit-Hartenberg) como se muestra en la Figura A.2. En el presente trabajo solo se calcula hasta la posición del centro de la muñeca del robot. Según la convención, los ángulos  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  se deben de medir sobre los ejes  $z_0$ ,  $z_1$  y  $z_2$ , y desde  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente. Debido a la construcción del robot, la posición articular  $\theta_3$  del tercer eslabón se mide sobre el eje  $z_2$ , pero con respecto a un eje vertical fijo; por lo que la posición  $q_3$  se mide como  $q_3 = \theta_3 - q_2 - \pi/2$ .



**Figura A.2:** Reducción a coordenadas cilíndricas (D-H) del robot *Geomagic Touch*.

La cinemática directa del robot *Geomagic Touch* respecto al sistema base, esta dada por:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3)) \cos(q_1) \\ (a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3)) \sin(q_1) \\ a_2 \sin(q_2) + a_3 \sin(q_2 + q_3) + b_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

### A.1.2. Jacobiano

Al solo poseer 3 grados de libertad, el Jacobiano del robot se puede obtener como se muestra en la ecuación (2.7). Resultando el siguiente Jacobiano:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(q_1) (a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3)) & -\cos(q_1) (a_2 \sin(q_2) + a_3 \sin(q_2 + q_3)) \\ \cos(q_1) (a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3)) & -\sin(q_1) (a_2 \sin(q_2) + a_3 \sin(q_2 + q_3)) \\ 0 & a_2 \cos(q_2) + a_3 \cos(q_2 + q_3) \\ & -a_3 \cos(q_1) \sin(q_2 + q_3) \\ & -a_3 \sin(q_1) \sin(q_2 + q_3) \\ & a_3 \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

### A.1.3. Especificaciones

En la Tabla A.1 se muestran algunas de las especificaciones del robot, ofrecidas por el fabricante.

**Tabla A.1:** Especificaciones técnicas del robot *Geomagic Touch de 3D Systems*

Especificaciones	Descripción
Peso	3 Libras (1360.78 g)
Grados de Libertad	6
Rigidez	Eje X 1.26 N / mm Eje Y 2.31 N / mm Eje Z 1.02 N / mm
Espacio de trabajo	160 w x 120 h x 70 d [mm]
Comunicación	Puerto Usb o puerto Ethernet conforme a RJ45
Fuerza máxima nominal	0.75 lbf (3.3 N)
Resolución nominal de la posición	0.055 [mm]

Gracias al paquete de librerías *Open Haptics* proporcionadas por *3D Systems*, es posible obtener el número de pulsos de los encoders en las tres articulaciones del robot, así como introducir directamente los pares de torsión a los motores.

**Tabla A.2:** Relación giro-cuentas de encoders *Geomagic Touch de 3D Systems*

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3 = f_{min}(\theta_2)$	$\theta_3 = f_{max}(\theta_2)$
Cuentas	-2435 a 2380	-60 a -4420	-841 a 3180	2290 a 4901
Grados	-57 a 57	0 a 105	$-20.8 < \theta_3 < 73.5$	$-49.9 < \theta_3 < 11.25$

De la información de la Tabla A.2, se puede observar que el rango de movimiento de la tercera articulación está limitado por la posición de la segunda, esto es debido al diseño mecánico del robot.

#### A.1.4. Pares de gravedad

El esquema de control del presente trabajo se diseñó buscando utilizar lo menos posible el conocimiento del modelo dinámico de los robots; sin embargo, como en movimiento libre, el robot local resulta en un sistema autónomo, es necesaria la compensación de la gravedad para evitar que este se *caiga*. El vector de pares de gravedad obtenido

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}g_0(a_2(m_2 + 2(m_3 + m_4)\cos(q_2) + a_3(m_3 + 2m_4)\cos(q_2 + q_3))) \\ \frac{1}{2}a_3g_0(m_3 + 2m_4)\cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Tanto para el vector de pares de gravedad como para el cálculo del Jacobiano del robot, los parámetros  $a_2 = 14.5$  [cm] y  $a_3 = 17.39$  [cm] fueron obtenidos al realizar la medición de las dimensiones del robot. Los valores para las masas de los eslabones 2 y 3 respectivamente son  $m_2 = 0.0085$  [kg],  $m_3 = 0.01$  [kg], obtenidos de [19];  $g_0 = 9.79$  [m/s<sup>2</sup>] es la constante de gravedad en Ciudad Universitaria, México. Finalmente la masa  $m_4 = 0.0138$  [kg] correspondiente al sensor de fuerza, fue obtenida utilizando una báscula digital.

#### A.1.5. Implementación

Al implementar el esquema de control propuesto en el sistema de teleoperación, se utilizaron las siguientes ganancias de control:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_a &= \text{diag} \begin{pmatrix} 0.02 & 0.005 & 0.005 \end{pmatrix} & \mathbf{K}_p &= \text{diag} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \\ k_p &= 300 & \mathbf{K}_i &= \text{diag} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \\ k_i &= 5 & \mathbf{K}_d &= \text{diag} \begin{pmatrix} 0.012 & 0.012 & 0.012 \end{pmatrix} \\ & & \mathbf{K}_f &= \text{diag} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

las cuales se mantuvieron fijas para todos los experimentos realizados. El tiempo de muestreo utilizado fue de 3 [ms]. La integral se calculó mediante integración rectangular, y la derivada se obtuvo utilizando la derivada sucia.

## A.2. Teoremas auxiliares

**Teorema A.2.1** [20] Sea  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contenga al origen y  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0, \quad (\text{A.5})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $\mathcal{K}$ ,  $W_3(\mathbf{x})$  es una función continua definida positiva y  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathcal{D}$ . Sea  $r > 0$  tal que  $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset \mathcal{D}$  y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (\text{A.6})$$

Entonces, existe una función  $\beta$  clase  $\mathcal{KL}$  y para cada estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  que satisface

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (\text{A.7})$$

existe  $T \geq 0$  (dependiente de  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  satisface

$$\|\mathbf{x}\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{A.8})$$

$$\|\mathbf{x}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (\text{A.9})$$

Además, si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (A.8)–(A.9) son válidas para algún estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$ , sin ninguna restricción sobre cuan grande pueda ser  $\mu$  [20].  $\triangle$

**Teorema A.2.2** [20] Sea  $\mathbf{x} = 0$  un punto de equilibrio para  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathcal{D}$ . Sea  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene a  $\mathbf{x} = 0$ . Sea  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$k_1 \|\mathbf{x}\|^a \leq V(t, \mathbf{x}) \leq k_2 \|\mathbf{x}\|^a \quad (\text{A.10})$$



$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -k_3 \|\mathbf{x}\|^a, \quad (\text{A.11})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , donde  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $a$  son constantes positivas. Entonces,  $\mathbf{x} = 0$  es exponencialmente estable. Si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathbf{x} = 0$  es global y exponencialmente estable. En particular, se satisface

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{1/a} \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{(k_3/k_2 a)(t-t_0)}. \quad (\text{A.12})$$

# Bibliografía

---

- [1] P. F. Hokayem and M. W. Spong, “Bilateral teleoperation: An historical survey,” *Automatica*, vol. 42, no. 12, pp. 2035–2057, 2006. 1, 2
- [2] R. Kelly and V. Santibáñez, *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson educación, 2003. 1, 8, 10
- [3] M. A. Arteaga-Pérez, L. López-Recillas, M. López, and E. Nuño, “Observer design for bilateral teleoperation systems with variable time delays,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 14368–14373, 2017. 1, 3, 4, 15, 19
- [4] W. R. Ferrell, “Remote manipulation with transmission delay,” *IEEE Transactions on Human Factors in Electronics*, no. 1, pp. 24–32, 1965. 2
- [5] F. Miyazaki, S. Matsubayashi, T. Yoshimi, and S. Arimoto, “A new control methodology toward advanced teleoperation of master-slave robot systems,” in *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, pp. 997–1002, IEEE, 1986. 2
- [6] G. J. Raju, G. C. Verghese, and T. B. Sheridan, “Design issues in 2-port network models of bilateral remote manipulation,” in *Proceedings, 1989 International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1316–1321, IEEE, 1989. 2
- [7] B. Hannaford and P. Fiorini, “A detailed model of bi-lateral teleoperation,” in *Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 1, pp. 331–336, 1988. 2
- [8] R. J. Anderson and M. W. Spong, “Bilateral control of teleoperators with time delay,” *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 34, no. 5, pp. 494–501, 1989. 2
- [9] G. Niemeyer and J.-J. Slotine, “Stable adaptive teleoperation,” *IEEE Journal of oceanic engineering*, vol. 16, no. 1, pp. 152–162, 1991. 2
- [10] D. A. Lawrence, “Stability and transparency in bilateral teleoperation,” *IEEE transactions on robotics and automation*, vol. 9, no. 5, pp. 624–637, 1993. 3

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [11] Y. Yokokohji and T. Yoshikawa, “Bilateral control of master-slave manipulators for ideal kinesthetic coupling-formulation and experiment,” *IEEE transactions on robotics and automation*, vol. 10, no. 5, pp. 605–620, 1994. 3
- [12] N. Chopra and M. W. Spong, “Adaptive coordination control of bilateral teleoperators with time delay,” in *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)(IEEE Cat. No. 04CH37601)*, vol. 5, pp. 4540–4547, IEEE, 2004. 3
- [13] E. Nuño, M. Arteaga-Pérez, and G. Espinosa-Pérez, “Control of bilateral teleoperators with time delays using only position measurements,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 28, no. 3, pp. 808–824, 2018. 3
- [14] W. E. Boyce, *Cálculo*. 1994. 7
- [15] J. Craig, “Introducción a la robótica,” 2006. 7, 10
- [16] M. Hernaldo, *Apuntes de Robótica*. Universidad Politécnica de Madrid, 2017. 9
- [17] E. Nuno, I. Sarras, and L. Basanez, “An adaptive controller for bilateral teleoperators: Variable time-delays case,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 47, no. 3, pp. 9341–9346, 2014. 10
- [18] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, *Robotics: modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media, 2010. 11
- [19] M. G. L. Rodríguez, “Control de un sistema bilateral teleoperado con retardo en movimiento restringido.” 78
- [20] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems, 3rd ed.* Upper Saddle River, New Jersey. U .S. A.: Prentice–Hall, 2002. 79