



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

**SOBRE LA TROPICALIZACIÓN DE LAS
PROPIEDADES DE LAS CURVAS HESSIANAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A :

M.C. ANGELITO CAMACHO CALDERÓN

**DIRECTORA DE LA TESIS: DRA. FUENSANTA AROCA BISQUERT
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM, CUERNAVACA, MORELOS.**

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

**DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM, CD. MX.**

**DRA. LIUDMILA SABININA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UAEM, CUERNAVACA, MORELOS.
PROGRAMA: DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS.**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Manifiesto mi gratitud a la Unidad de Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México por la beca de lugar que me ha otorgado desde Febrero de 2012 hasta la fecha.

De igual forma agradezco a CONACYT por la beca 225387-292689 que me fue otorgada de Febrero de 2012 a Enero de 2016. También quiero agradecer a los proyectos de investigación PAPIIT-IN108216 y a ECOS M14M03. Dichas becas y proyectos me proporcionaron las condiciones más propicias para realizar exitosamente mis estudios de Doctorado.

Dedico este trabajo a mi amada esposa Daniela y a mi hija Romina Khorkina, que han sido mi soporte y son mis compañeras en este viaje llamado vida. Para recordarles, que siempre luchen por sus sueños, sean perseverantes, y nunca se den por vencidas. Y sobre todo, que no olviden que el trabajo duro vence al talento cuando el talento no se está esforzando.

Contents

1	Curvas y Superficies	9
1.1	Curvas planas diferenciables	9
1.2	Superficies diferenciables	12
1.2.1	Clasificación de los Puntos de una Superficie	16
1.3	Algunas propiedades de las Curvas Hessianas	20
2	Teoría de Poliedros	25
3	Teoría de Perturbación	31
3.1	Perturbación de puntos parabólicos especiales	35
3.2	Mapeos cuasihomotéticos	38
3.3	Puntos Parabólicos Especiales bajo Cuasihomotecias	39
4	Pegado de Viro para Puntos Parabólicos Especiales Transversales.	43
4.1	Pegado de Oleg Viro	43
4.2	Pegado de puntos parabólicos especiales transversales	47
5	Aplicación del Corolario 4.14	51
6	Geometría Tropical	55
6.1	Álgebra Tropical	55
6.2	Hipersuperficies Tropicales	57
6.3	Intersección de Curvas Tropicales	58
6.4	Modificaciones Tropicales	61

Introducción

En el presente trabajo, defino y estudio los puntos parabólicos especiales transversales sobre superficies que son gráficas de polinomios, y la principal aportación es el Teorema 4.13, el cual es una adaptación del teorema de pegado de Viro, para pegar puntos parabólicos especiales transversales de superficies que son gráficas de polinomios de grado $d \geq 3$. Los conceptos y definiciones necesarias para entender el teorema 4.13, son introducidos del capítulo 1 al 4.

Teorema 4.13(Teorema de pegado para puntos parabólicos especiales transversales) Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional y sea τ la subdivisión poliedral convexa de Δ inducida por $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $d \geq 3$, con poliedro de Newton Δ . Si b_t es el polinomio pegado de $\{f^E; E \in \text{dimax}(\tau)\}$ inducido por λ , entonces existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$, Existe una inclusión

$$\varphi_t : PPET(f, \text{dimax})^* \hookrightarrow PPET(b_t)^*.$$

El cual, nos permite la construcción de polinomios en dos variables de grado $d \geq 3$ cuyas gráficas son superficies con una cantidad dada de puntos parabólicos especiales. Para la enunciación de este teorema se estudia la técnica del Pegado de Oleg Viro, esta técnica es conocida como *Patchworking*. También se estudia a detalle la clasificación de los puntos sobre superficies que son gráficas de funciones diferenciables.

El Patchworking es una técnica muy poderosa usada para construir hipersuperficies algebraicas reales no singulares con una topología dada (ver [27]), esta técnica fue introducida por Oleg Viro en la década de los setentas y ha sido usada en varios trabajos por ejemplo en [25] y [3].

Respecto a la clasificación de puntos sobre superficies. En 1827 Johann Carl Friedrich Gauss, clasificó los puntos de la gráfica de una función diferenciable f , mediante el Hessiano de f , en *elípticos*, *parabólicos* e *hiperbólicos*, con curvatura Gaussiana positiva, cero y negativa respectivamente(ver [6]).

Años después, George Salmon hace un estudio más minucioso de la clasificación de los puntos sobre las gráficas de funciones diferenciables dada por Gauss, y define el orden de

contacto de una recta con una superficie en un punto, y es así como en el año de 1874 introduce una subclasificación de los puntos de una superficie S , dada en términos del máximo *orden de contacto* de las rectas tangentes a S en un punto (ver [24]).

En esta subclasificación, Salmon distingue tres tipos de puntos parabólicos: *genéricos*, *especiales* y *degenerados*, el primero de ellos con una única recta tangente de orden de contacto exactamente 3 con la superficie, el segundo con una única recta tangente con orden de contacto mayor o igual que 4, y el último de ellos con más de dos rectas tangentes de orden mayor o igual que 3.

A partir de ahí, se despierta el interés por el estudio de los puntos parabólicos especiales. En la literatura, los puntos parabólicos especiales también son llamados *Cúspides Gaussianas* o *Godrones* (Ver por ejemplo [8] y [23]), el término godrón fue dado por René Thom, en 1980 ver [22].

Más de un siglo después de la clasificación de los puntos parabólicos especiales, en el año 1982, V. S. Kulikov(ver [13]) obtiene una cota superior para la cantidad de puntos parabólicos especiales que una superficie genérica algebraica de grado d en el espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ puede tener, la cual es la siguiente:

$$\#P.P.E. = 2d(d - 2)(11d - 24)$$

Este número es una cota superior para la cantidad de puntos parabólicos especiales de superficies genéricas algebraicas de grado d en $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$.

En el año 2002, A. Ortiz (ver[18]) construye una familia de polinomios con gráficas que son superficies genéricas que tienen exactamente $d(d - 2)$ puntos parabólicos especiales.

En el año 2003, A. Ortiz (ver[18]) obtiene una cota superior para la cantidad de puntos parabólicos especiales para superficies que son gráficas de polinomios de grado d en dos variables: $2(d - 2)(5n - 12)$.

A finales del 2012, A. Ortiz, F. Sánchez y L.I. Hernández en [8], obtienen un refinamiento de la cota superior dada en [18], quedando como : $(d - 2)(5n - 12)$. En la fecha en que se escribe este trabajo, ésta es la mejor cota superior conocida, sin embargo, aún no se sabe si es óptima.

Una consecuencia del Teorema 4.13 es el siguiente corolario.

Corolario 4.14 Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional y sea τ la subdivisión poliedral convexa de Δ inducida por una función convexa $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio poliedro de Newton Δ . Si b_t es el polinomio pegado de $\{f^E; E \in \text{dimax}(\tau)\}$ inducido por λ , entonces existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$, tenemos que

$$\sum_{E \in \text{dimax}(\tau)} |PPET(f^E)^*| \leq |PPET(b_t)^*|.$$

Una aplicación inmediata de este corolario es la construcción de una familia de polinomios de grado d , con $3 \leq d \leq 10000$ en dos variables con al menos $(d - 4)(2d - 9)$ puntos

parabólicos especiales en sus gráficas, que hago en el capítulo 5. Con esto nos acercamos más a la realización de la cota superior de $(d-2)(5d-12)$ puntos parabólicos especiales dada en [8].

Tal vez, utilizando el corolario 4.14 sea posible construir familias de polinomios con gráficas que sea superficies genéricas con exactamente $(d-2)(5n-12)$ puntos parabólicos especiales, continúo trabajando en la demostración.

Cabe mencionar que la técnica del pegado de Viro, es precursora de la Geometría Tropical. La Geometría Tropical es una rama de las matemáticas relativamente nueva. El Dr. Imre Simon (1943-2009), matemático informático brasileño de la Universidad de São Paulo, Brasil es considerado el fundador del álgebra tropical y ésta es la razón por la cuál se le ha llamado tropical a esta geometría.

La geometría tropical comenzó a desarrollarse por sí misma en el anillo de polinomios con coeficientes en el semi-campo tropical. Inició con la enunciación en el sentido tropical de resultados conocidos de Geometría Clásica, tales como el teorema de Bernstein [10], el teorema de Bézout [10], y de los conceptos básicos tales como la raíz de un polinomio, la *hipersuperficie tropical* asociada a un polinomio. Otros conceptos a la fecha no han sido definidos del todo, uno de éstos es el concepto de variedad.

Por otro lado también se han definido nuevos objetos tales como la *Amiba de un polinomio* o de una variedad, la *Tropicalización* y las *Modificaciones Tropicales*, en este trabajo definimos lo que es el *Hessiano tropical* de un polinomio, así como también demostramos que la tropicalización de la curva parabólica de una superficie S que es gráfica de un polinomio f , es la modificación tropical de la *curva Hessiana* de f , respecto de f .

Curvas y Superficies

En este capítulo recordaremos algunos conceptos básicos y no tan básicos de Cálculo Diferencial y Geometría Diferencial; daremos una pequeña introducción al estudio de curvas planas diferenciables, seguida de un acercamiento a la clasificación de los puntos sobre superficies diferenciables. Terminando el capítulo con dos resultados: el lema 1.37 y la proposición 1.38, que utilizaremos en el capítulo 4.

Curvas planas diferenciables

Definición 1.1. Sea $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \varphi(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ una función continua localmente inyectiva, llamamos *curva* o *traza* a la imagen de I bajo φ . La aplicación φ es conocida como una *representación paramétrica* de la curva.

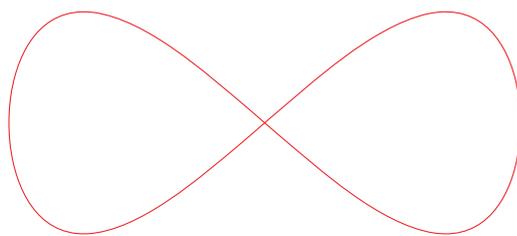


Figure 1.1: Ejemplo de una curva.

En la figura 1.1, se tomó la representación paramétrica $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \varphi(t) = \left(2 \cos(t), \sin \left(2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$.

Definición 1.2. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función definida sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que f es *diferenciable* en un punto $x_0 \in U$ si existen las derivadas parciales de f en x_0 y si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot (x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

donde $Df(x_0)$ es la matriz cuyos elementos matriciales son las derivadas parciales de f evaluadas en x_0 , $Df(x_0) \cdot (x - x_0)$ es el producto de $Df(x_0)$ con $(x - x_0)$ (considerado como vector columna) y $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana usual. Llamamos a $Df(x_0)$ la *derivada* de f en x_0 . Decimos que f es diferenciable en U si f es diferenciable en todo punto $x \in U$.

La imagen de una función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable en I es conocida como *curva diferenciable*.

Ejemplo 1.3. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y - 2x^3}{x^2 + y^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

El único punto en el que esta función podría ser discontinua es el $(0, 0)$. Sin embargo, $f(0, 0) = 0$ y $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$. Por lo tanto, esta función es continua en todo \mathbb{R}^2 ,

Ahora, las derivadas direccionales de ésta función en el punto $(0, 0)$ en la dirección del vector unitario $u = (\cos \theta, \sin \theta)$ es

$$D_u f = \begin{cases} 3 \sin \theta - 2 \cos \theta, & \text{si } \cos \theta \neq 0 \\ 0, & \text{si } \cos \theta = 0. \end{cases}$$

Sin embargo, no satisface la definición de diferenciability, esto es:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0) \cdot x - f_y(0, 0) \cdot y}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2y + 2xy^4}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}},$$

tomando $y = mx$, tenemos que

$$\lim_{(x, mx) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2y + 2xy^4}{(x^4 + y^4)\sqrt{x^2 + y^2}} = \pm \frac{3m}{\sqrt{1 + m^2}},$$

Por lo tanto, el límite no existe, y la función no es diferenciable en el punto $(0, 0)$.

Definición 1.4. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces

- a) f es de clase \mathcal{C}^0 en $q \in U$ si y solo si f es continua en q .
- b) f es de clase \mathcal{C}^r en $q \in U$ si y solo si existen y son continuas todas las derivadas parciales de orden menor o igual a r en q .
- c) f es de clase \mathcal{C}^∞ en $q \in U$ si y solo si f es de clase \mathcal{C}^r en $q \in U$ para toda $r \in \mathbb{N}$.

Decimos que f es diferenciable de clase \mathcal{C}^r , $r \in \mathbb{N}$, en U si y solo si existen y son continuas todas las derivadas parciales de orden menor o igual a r en todo punto $x \in U$. Así, las funciones de clase \mathcal{C}^r son diferenciables, sin embargo, no todas las funciones diferenciables son de clase \mathcal{C}^r .

Definición 1.5. Una curva C definida por la función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es llamada *regular* si y sólo si φ es de clase \mathcal{C}^1 y $\varphi^{(1)}(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo $t \in I$, donde $\varphi^{(1)}$ denota el vector cuyas entradas son las derivadas parciales de primer orden de φ evaluadas en t , a este vector se le conoce como vector *tangente* de C en $\varphi(t)$.

Definición 1.6. Sea $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función \mathcal{C}^0 , llamamos *puntos singulares* a las imágenes bajo φ de aquellos valores $t_0 \in I$ para los cuales $\varphi^{(1)}(t_0) = (0, 0, 0)$ o $\varphi^{(1)}(t_0)$ no existe.

Ejemplo 1.7. La cúspide en el plano $z = 0$, es una curva singular, ya que puede ser parametrizada por $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, y es visible que $\varphi^{(1)}(0) = (0, 0)$

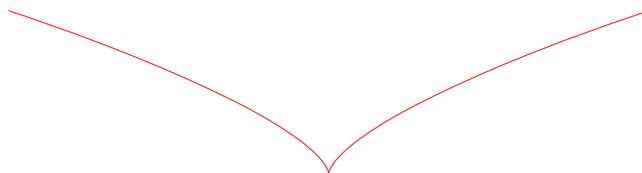


Figure 1.2: Ejemplo de una curva singular.

Definición 1.8. Dos curvas no vacías $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$ son *transversales* en $q \in C_1 \cap C_2$, denotado $C_1 \pitchfork_q C_2$, si son no singulares en q y sus rectas tangentes en q son transversales. Las curvas $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$ son *transversales*, denotado $C_1 \pitchfork C_2$, si son transversales en cada punto $q \in C_1 \cap C_2$.

Definición 1.9. Una curva C definida por la función $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es llamada *plana* si está totalmente contenida en un plano. Si φ es diferenciable entonces, se llama *plana diferenciable*.

Las curvas contenidas en el plano $z = 0$ tienen ecuaciones implícitas ó paramétricas de la siguiente forma:

$$z = 0, f(x, y) = 0, \text{ ó } x = x(t), y = y(t)$$

Es decir, las curvas planas en el plano $z = 0$ se pueden ver implícitamente como los ceros de una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 1.10. Sea q un punto sobre una curva C en el plano $z = 0$, definida como los ceros de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^r , con $r \in \mathbb{N}$. Decimos que la *multiplicidad* de q sobre C es $m \leq r$, si y sólo si todas las derivadas parciales de f , de orden menor que m se anulan en q , y al menos una de las derivadas parciales de f de orden m es distinta de cero en q .

Recordemos también, que los puntos de una curva plana se clasifican por la multiplicidad que ellos tienen sobre la curva, algunos de estos puntos destacan por poseer propiedades interesantes, por mencionar alguno tenemos la siguiente definición.

Definición 1.11. Sea q un punto sobre la curva plana C , decimos que q es un *punto de inflexión* si tiene multiplicidad sobre C , finita y es mayor o igual que tres.

Los puntos de inflexión de una curva plana, han sido objeto de estudio de algunos trabajos sobre curvas planas (ejemplo ver [4] y [12]). También existen curvas que son asociadas a funciones diferenciables, y que han llegado ser objeto de estudio en muchos trabajos, tal es el caso de la Curva Hessiana de una función diferenciable (ver [3],[18], [8], [19] y [5]), la cual definimos enseguida.

Definición 1.12. Dada una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la matriz asociada a f definida como

$$\text{Hess}f(x, y) := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Se conoce como *matriz Hessiana* de f . Llamamos *Hessiano de f* , denotado $H_f(x, y)$, al determinante de la matriz Hessiana de f , esto es, $H_f(x, y) := f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Donde f_{xx} , f_{yy} y f_{xy} denotan las derivadas parciales de de orden 2 de f .

De aquí en adelante, denotaremos al conjunto de ceros de una función f por $V(f)$.

Definición 1.13. La *curva Hessiana* de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, es la curva determinada por los ceros del polinomio $H_f(x, y)$, y es denotada como $V(H_f)$.

Superficies diferenciables

Las superficies en las que fijaremos nuestra atención son aquellas que no tienen hoyos, picos, esquinas, ni pliegues, a este tipo de superficies se conocen como superficies *suaves*.

En este trabajo, nos interesamos por superficies suaves $S \subset \mathbb{R}^3$ que son imágenes de abiertos del plano bajo funciones diferenciables $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, estas superficies pueden ser localmente expresadas implícitamente por una ecuación $z - f(x, y) = 0$, donde f una función localmente continua e inyectiva.

Definición 1.14. Sea f una función localmente continua e inyectiva en $U \subset \mathbb{R}^2$, y sea

$\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \Gamma(x, y) = (x, y, f(x, y))$, llamamos *superficie* o *gráfica* de f a la imagen de U bajo Γ . La función Γ es una *representación paramétrica* de la superficie S .

Ejemplo 1.15. La superficie S definida por la representación paramétrica

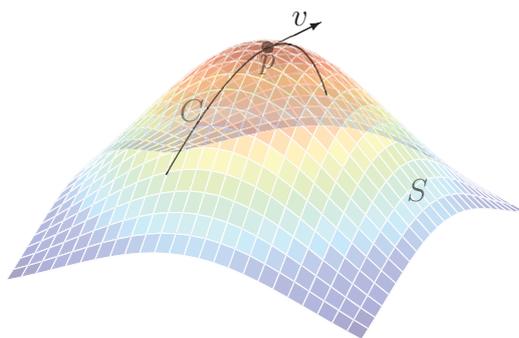
$\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$, es decir, S es el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $z = x^2 + y^2$.

Definición 1.16. Sea $\Gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \Gamma(x, y)$, una función de clase \mathcal{C}^r si

$$\Gamma_x \times \Gamma_y \neq (0, 0, 0), \forall (x, y) \in U$$

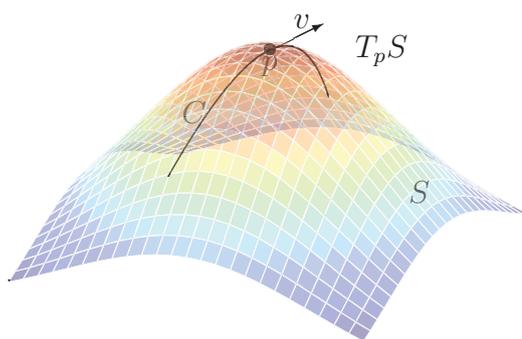
donde Γ_x y Γ_y denotan los vectores cuyas entradas son las derivadas parciales de Γ respecto de x e y respectivamente, y \times denota el producto vectorial, entonces se dice que Γ es *regular*. Una superficie S es llamada *superficie regular* si es la imagen de una representación paramétrica regular.

Definición 1.17. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, y p un punto sobre S . Decimos que un vector v es *tangente* a S en p si existe alguna curva regular $C \subset S$ tal que v es tangente a C en p .



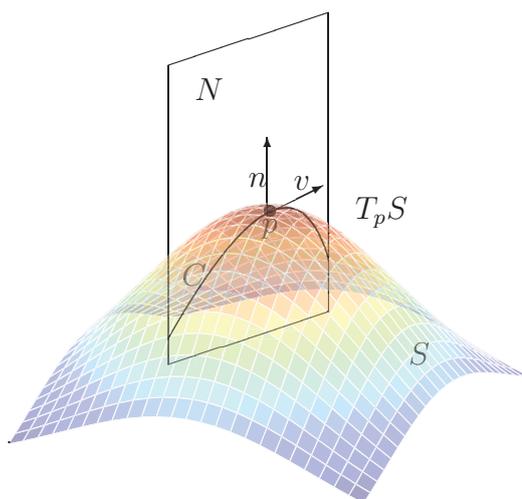
Definición 1.18. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y sea $p \in S$. El conjunto de todos los vectores tangentes a S en p forman un plano, el cual se conoce como *plano tangente* a S en p y se denota $T_p(S)$. Si S es la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $p = (x_0, y_0, z_0)$. El plano tangente $T_p(S)$ se define mediante la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] (x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] (y - y_0).$$



Definición 1.19. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y p un punto sobre S . A la recta perpendicular al plano tangente $T_p(S)$ en p se conoce como *recta normal* a S en p . Al vector dirección de esta recta se le llama *vector normal* en p .

Sea S una superficie diferenciable en el espacio euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 , y $p \in S$ un punto. La curva C obtenida al cortar la superficie S con un plano N que contiene al vector normal $\vec{n}(p)$ a S en p , se conoce como *curva seccional normal*.



Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es una parametrización local de una superficie S en una vecindad del punto $p = \varphi(u(t_0), v(t_0))$, una curva $C \subset S$ puede ser expresada como $\varphi(u(t), v(t))$, donde $(u(t), v(t)) \in U$, con $t \in I \subset \mathbb{R}$, y su vector tangente $\xi = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$.

Definición 1.20. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, se dice que S es *orientable* si y sólo si existe una familia de parametrizaciones $\{(U_i, \varphi_i)\}$ que la cubren, y tal que si para $i \neq j$ se satisface que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Es importante mencionar que todas las superficies que puedan definirse globalmente como la imagen de una parametrización son orientables. En particular, las gráficas de funciones diferenciables son orientables.

Definición 1.21. Una *Forma Cuadrática* sobre \mathbb{R} , es una aplicación $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, le asigna un número real como sigue:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \dots + a_{n-1n}x_{n-1}x_n. \quad (1.2)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j = 1, \dots, n$, y que corresponde a un polinomio homogéneo de segundo grado en las n variables x_1, \dots, x_n .

El polinomio (1.2) se expresa matricialmente de la siguiente forma:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^t A X, \text{ donde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

donde X^t es la matriz transpuesta de X y A es la matriz simétrica de orden n asociada a la forma cuadrática $Q(x_1, \dots, x_n)$.

Dada una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada regular orientable, sea φ una parametrización de una vecindad de $\varphi(q) = p \in S$, con coordenadas (u, v) . Por ser S orientable, el vector unitario

$$N(p) = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q)$$

es normal al plano tangente $T_p S$.

Para saber cuánto se aparta la superficie S de su plano tangente $T_p S$, lo hacemos calculando la derivada $\ddot{\varphi}(t)$, y midiendo su proyección en el vector normal N . Esto se calcula mediante

$$\langle \ddot{\varphi}, N \rangle = e[\dot{u}(t)]^2 + 2f\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g[\dot{v}(t)]^2,$$

donde

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle, \quad f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = \langle \varphi_{vu}, N \rangle, \quad \text{y } g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle.$$

Así, la proyección de $\ddot{\varphi}(t)$ en el vector normal N , puede verse como una forma cuadrática definida en cada punto de la región parametrizada por φ . Es decir, para cada punto $p \in S$ se tiene una matriz

$$C := \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Con esta matriz se define una forma cuadrática que aplicada a un vector ψ tangente a S , satisface que

$$\psi^t C \psi = \langle \psi, \psi \rangle_C.$$

Definición 1.22. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, la forma cuadrática definida por la matriz C , se conoce como la *segunda forma fundamental* de S en el punto $p \in S$.

Ejemplo 1.23. Sea f un función diferenciable, y sea $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = f(x, y)\}$ la gráfica de f , parametrizada por

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

Calculando sus segundas derivadas, se tiene que

$$\varphi_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad \varphi_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad \varphi_{yy} = (0, 0, f_{yy}), \quad \text{y } \varphi_x \times \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1),$$

de ahí,

$$N = \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{\|\varphi_x \times \varphi_y\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

Con esto, los coeficientes de la segunda forma fundamental de S son:

$$e = \langle \varphi_{xx}, N \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$f = \langle \varphi_{xy}, N \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$g = \langle \varphi_{yy}, N \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Así, la segunda forma fundamental de S es:

$$C_S := \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} [dx]^2 + 2 \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dx dy + \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} [dy]^2.$$

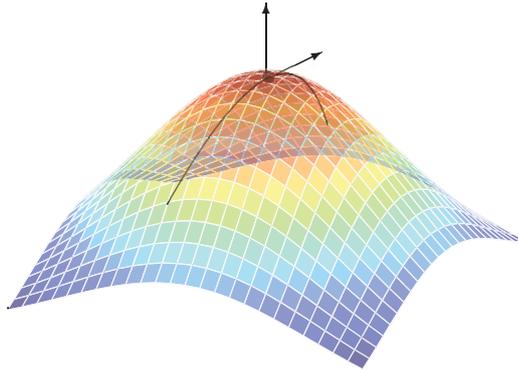
Teorema 1.24. (Teorema de Euler [17]) Sea p un punto sobre una superficie S , y sea $\varphi(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva seccional normal a S en p , con parámetro natural t . Salvo el signo, la curvatura k de esta curva coincide con la segunda forma fundamental aplicada al vector tangente $\xi = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\varphi}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\varphi}{\partial v}$.

Clasificación de los Puntos de una Superficie

En 1827 Gauss (ver [6]), definió el concepto conocido como *curvatura Gaussiana* y con ella clasificó los puntos de la gráfica de una función diferenciable f , mediante el Hessiano de f , ya que por el lema de Diagonalización de Sylvester [21], $H_f(q)$ es igual a la curvatura Gaussiana de S en $p \in S$, de la siguiente manera.

Proposición 1.25. Si $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie localmente expresada como la gráfica de una función diferenciable f , y sea $p = (q, f(q)) \in S$ con $q \in \mathbb{R}^2$, entonces

1. Si $H_f(q) < 0$, p es un punto hiperbólico.
2. Si $H_f(q) = 0$, p es un punto parabólico.
3. Si $H_f(q) > 0$, p es un punto elíptico.



Un ejemplo de una superficie en la cual encontramos puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos es el toro, como el que se muestra en la figura 1.3.

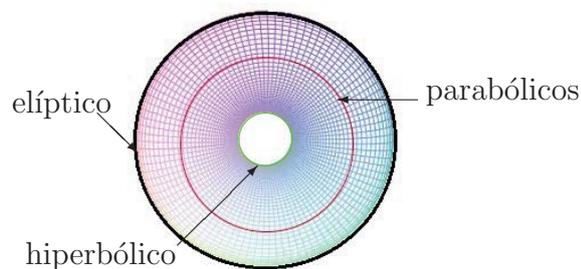


Figure 1.3: Ejemplo de superficie con puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos.

Recordemos que si S es una superficie regular, por el teorema de la función implícita, localmente se puede ver como la gráfica de una función diferenciable $z = f(x, y)$, es decir, localmente S puede verse como los ceros de una función diferenciable

$$G(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Análogamente al concepto de multiplicidad de un punto q sobre una curva plana C , podemos definir el orden de contacto de una recta l y una superficie S en un punto $p \in l$ como sigue.

Definición 1.26. Sea S una superficie suave en \mathbb{R}^3 , definida por los ceros de una función diferenciable $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, $S := \{(x, y, z) \ ; \ G(x, y, z) = 0\}$. Sea $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, una parametrización de una recta con $l(t_0) = p$, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Decimos que l tiene *orden de contacto* $k \in \mathbb{N}$ con S en p , si y sólo si

$$(G \circ l)^{(m)}(t_0) = 0 \quad \text{y} \quad (G \circ l)^{(k)}(t_0) \neq 0, \quad \text{para } m = 0, \dots, k-1,$$

donde $(G \circ l)^{(k)}(t_0)$ denota la derivada de orden k de la función $(G \circ l)$.

Una recta l interseca a una superficie S en un punto $p = l(t_0)$ si $(G \circ l)(t_0) = 0$, si $(G \circ l)(t_0) \neq 0$, entonces l no interseca a S y se dice que l tiene orden de contacto cero con S . Notemos que una recta l es tangente en p a una superficie S si y sólo si tiene orden de contacto con S en p mayor o igual a dos.

Definición 1.27. Una recta l tangente a una superficie S en p , es una *dirección asintótica* si tiene orden de contacto con S en p mayor o igual que tres.

En base a las definiciones anteriores, Salmon G. (ver [24]) hace un estudio más minucioso de la clasificación dada por Gauss, y en 1874 introduce la siguiente clasificación de los puntos de una superficie S , dada en términos del máximo orden de contacto de las rectas tangentes a S en cada punto.

Definición 1.28. Un punto p sobre una superficie S , es punto *elíptico* si todas las rectas tangentes a S en p tienen orden de contacto con S en p igual a dos, es decir, S no tiene direcciones asintóticas en p .

Un ejemplo de una superficie compuesta sólo de puntos elípticos es un paraboloides, como en la figura 1.4.

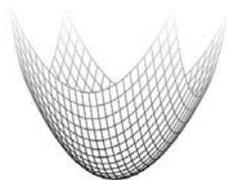


Figure 1.4: Ejemplo de una superficie conformada únicamente de puntos elípticos.

Definición 1.29. Un punto p sobre una superficie S , es *hiperbólico* si S tiene exactamente dos direcciones asintóticas en p .

Un ejemplo de una superficie compuesta sólo de puntos hiperbólicos es la silla de montar.

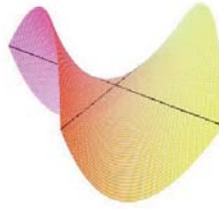


Figure 1.5: Ejemplo de una superficie conformada únicamente de puntos hiperbólicos.

Cada uno de los puntos de esta superficie tiene exactamente dos direcciones asintóticas, las rectas negras son las direcciones asintóticas del centro de la silla.

Definición 1.30. Un punto hiperbólico p sobre una superficie S , es llamado punto de *inflexión* si al menos una de sus direcciones asintóticas tiene orden de contacto mayor o igual que cuatro con S en p .

Definición 1.31. Un punto p sobre una superficie S , es un punto *parabólico* si tiene una o más de dos direcciones asintóticas, y se distinguen los siguientes tipos:

1. *genérico*, si tiene una única dirección asintótica l , y ésta tiene orden de contacto igual a 3 con S en p ,
2. *especial*, si tiene una única dirección asintótica doble, y ésta tiene orden de contacto mayor o igual que 4 con S en p ,
3. *degenerado*, si p tiene más de dos direcciones asintóticas, o el 4-jet de S (sin parte lineal ni constante) es el cuadrado perfecto de algún polinomio.

En la literatura, los puntos parabólicos especiales también son llamados *Cúspides Gaussianas* o *Godrones* (Ver por ejemplo [8] y [23]). El término godrón fue dado por René Thom, en 1980 ver [22]. Dentro del conjunto de los puntos parabólicos especiales, damos la siguiente definición.

Definición 1.32. Sea $p = (q, f(q)) \in \mathbb{R}^3$ un punto parabólico especial de la gráfica de $f \in \mathbb{R}[x, y]$. Decimos que p es un *punto parabólico especial transversal* de f si la curva $\{H_f = 0\}$ es no singular en $q \in \mathbb{R}^2$ y $\{E_{1,f} = 0\} \pitchfork_q \{E_{2,f} = 0\}$. Denotamos $TSPP(f)$ al conjunto de puntos parabólicos especiales transversales de $f \in \mathbb{R}[x, y]$.

Para $i = 1, 2$ el espacio tangente a cualquier punto suave $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en la curva $V(E_{i,f})$ es dado por $\ker dE_{i,f}|_{(x,y)}$. Un punto suave $p = (q, f(q)) \in \mathbb{R}^3$ es un punto parabólico especial transversal en la gráfica de f , si

$$\mathbb{R}^2 \simeq \ker dE_{1,f}|_q + \ker dE_{2,f}|_q. \quad (1.5)$$

En este tipo de puntos parabólicos especiales enfocaremos nuestra atención en los capítulos 3, 4, y 5.

Algunas propiedades de las Curvas Hessianas

Definición 1.33. Al conjunto de los puntos parabólicos de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, se le conoce como la *curva parabólica* de S y se denota como $Par(S)$.

Observación 1.34. En general la curva parabólica de una superficie no es lisa.

En el espacio de superficies suaves compactas en $\mathbb{R}P^3$ existe un conjunto abierto denso en todas partes con la topología usual, de superficies tales que los gérmenes de éstas, en cada punto son equivalentes a los gérmenes que tienen los p -jets de las clases normales de O. Platonova, ver [20]. Las superficies dentro de este abierto son conocidas como superficies genéricas.

Una propiedad importante de las superficies genéricas es, que la curva parabólica de una superficie genérica es lisa. Ejemplos de superficies genéricas son estudiadas en [18], [8], [19] y [5].

De aquí en adelante usaremos la proyección π del espacio tridimensional al plano xy , definida como sigue.

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y). \end{aligned}$$

Como hemos visto, por la proposición 1.25 y la definición 1.33, la curva Hessiana de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ que es la gráfica de un función diferenciable, es la proyección al plano xy de la curva parabólica de S .

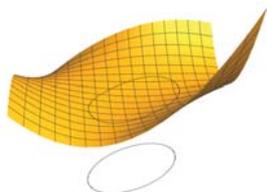


Figure 1.6: Superficie con curva Parabólica y Curva Hessiana.

Las direcciones asintóticas de la gráfica S de una función diferenciable f , también pueden calcularse a partir de f .

Lema 1.35. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la gráfica de una función diferenciable f . Las proyecciones al plano xy de las direcciones asintóticas de S , son las rectas solución de la forma cuadrática:

$$Q_f(x, y) := f_{xx}(x, y)(dx)^2 + 2f_{xy}(x, y)dxdy + f_{yy}(x, y)(dy)^2. \quad (1.6)$$

Demostración. Sea $l(t) = (x(t), y(t), z(t))$, una parametrización lineal de una dirección asintótica L de S , en $p = l(t_0) \in S$. Como, $S := \{V(G)\}$ donde $G(x, y, z) = f(x, y) - z$, se tiene

$$(G \circ l)(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)) - z(t_0) = 0,$$

$$(G \circ l)^{(1)}(t_0) = (dx)f_x(x(t_0), y(t_0)) + (dy)f_y(x(t_0), y(t_0)) - dz = 0,$$

$$(G \circ l)^{(2)}(t_0) = (dx)^2 f_{xx}(x(t_0), y(t_0)) + 2dxdy f_{xy}(x(t_0), y(t_0)) + (dy)^2 f_{yy}(x(t_0), y(t_0)) = 0.$$

Esto por definición de dirección asintótica de S , es decir, L tiene orden de contacto al menos 3 con S en $p = l(t_0)$. Notemos que en la última expresión no interviene la variable z , Así, las soluciones de la forma cuadrática son las proyecciones de las direcciones asintóticas de S en p . □

Lema 1.36. ([8] Lema 6) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, con curva Hessiana $V(H_f)$ no singular. Entonces, p es una cúspide Gaussiana de la gráfica de f si y solo si $q = \pi(p)$ yace en la intersección de las curvas $V(H_f)$ y $V(C_f(x, y))$, donde

$$C_f(x, y) = \left(-(H_f)_y, (H_f)_x \right) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_f)_y \\ (H_f)_x \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

y $(H_f)_x$ y $(H_f)_y$ son las derivadas parciales del Hessiano de f , respecto de x y y , respectivamente.

La demostración de este lema se encuentra en [8].

Para continuar con el estudio de los puntos parabólicos de la gráfica de una función diferenciable f , consideraremos los polinomios $E1_f$ y $E2_f$ como sigue:

$$\begin{pmatrix} E1_f \\ E2_f \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_f)_y \\ (H_f)_x \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Es decir,

$$E1_f(x, y) = -(H_f)_y f_{xx} + (H_f)_x f_{xy}, \text{ y } E2_f(x, y) = -(H_f)_y f_{xy} + (H_f)_x f_{yy}. \quad (1.9)$$

Estos polinomios fueron introducidos por V. I. Arnold en [1]. Una propiedad de los polinomios $E1_f$ y $E2_f$ que utilizaremos en el capítulo 4, es enunciada en el lema siguiente.

Lema 1.37. Sea f una función diferenciable, sea $q \in \{E1_f = 0\} \cap \{E2_f = 0\}$ y para cada número real k en el rango del Hessiano H_f , sea $X(f)_k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ H_f(x, y) = k\}$ una curva de nivel del polinomio H_f . Entonces, o q pertenece al conjunto $Sing(X(f)_k)$ de puntos singulares de $X(f)_k$ con $k \neq 0$ o $q \in X(f)_0$.

Demostración. Sea $q \in V(E1_f) \cap V(E2_f)$ y supongamos que

$$q \in X(f)_k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ H_f(x, y) = k\} \text{ con } k \neq 0.$$

Así

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E1_f \\ E2_f \end{pmatrix} \Big|_q = \left[\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_f)_y \\ (H_f)_x \end{pmatrix} \right] \Big|_q,$$

el vector $u(q) := (-(H_f)_y(q), (H_f)_x(q))^t \in \text{kernel} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \Big|_q \cap T_q X(f)_k$, donde $|_q$ significa evaluado en q .

Si $u(q) \neq (0, 0)$, entonces $\text{rango} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \Big|_q \leq 1$ así, $q \in V(H_f)$ y tenemos una contradicción. Por lo tanto, $u(q) = (0, 0)$, lo cual implica que $q \in Sing(X(f)_k)$. □

Proposición 1.38. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la gráfica de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con curva Hessiana no singular, y sea $p \in S$, entonces, p es un punto parabólico especial de S si y sólo si $\pi(p)$ yace en la intersección de las curvas $V(H_f)$, $V(E1_f)$ y $V(E2_f)$.

Demostración. Por el lema 1.36, basta mostrar la equivalencia que existe entre

$$V(C_f(x, y)) \text{ y } V(E1_f) \cap V(E2_f).$$

Sea p tal que $\pi(p) = q \in V(E1_f) \cap V(E2_f)$. La forma matricial de $C_f(x, y)$ es:

$$C_f(x, y) = (-(H_f)_y, (H_f)_x) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_f)_y \\ (H_f)_x \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

De (1.8) se tiene que

$$\left[\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_f)_y \\ (H_f)_x \end{pmatrix} \right] \Big|_q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p \in V(C_f). \quad (1.11)$$

Así, si $\pi(p) = q \in V(E1_f) \cap V(E2_f)$ entonces $q \in V(C_f)$.

Ahora, sea $p \in S$ tal que $\pi(p) = q \in V(H_f) \cap V(C_f(x, y))$, por el lema 1.36 p es un punto parabólico especial de S , y tiene una única dirección asintótica l en p . La condición $q \in V(C_f(x, y))$ implica que la recta tangente l' que pasa por $p \in S$ en la dirección del vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $u = \pi(v) = (- (H_f)_y(q), (H_f)_x(q))$ tiene orden de contacto $k \geq 3$ con S en p , esto por el lema 1.35.

Así, l' es una dirección asintótica de S en p , y por unicidad de la dirección asintótica de un punto parabólico especial se tiene que $l = l'$.

Ahora, el plano generado por la dirección asintótica l de S en p , y un vector normal \vec{n} al plano tangente a S en p , interseca a S en una curva C . Por el teorema de Euler sobre curvaturas de curvas seccionales normales(ver 1.24) la curvatura de C en la dirección del vector u es cero, y por ser l la única dirección asintótica de S en el punto parabólico especial p , u es la única dirección con curvatura cero, esto implica que el valor cero es un máximo o un mínimo, por lo tanto λu es una dirección principal, lo cual es equivalente a que λu sea una dirección propia de la matriz Hessiana de f con valor propio λ . Así,

$$0 = u \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} u^t = \lambda \|u\|^2.$$

Esto implica, que si $u \neq (0, 0)$, entonces

$$\left[\begin{pmatrix} E1_f \\ E2_f \end{pmatrix} \right]_{|_q} = \left[\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_f)_y \\ (H_f)_x \end{pmatrix} \right]_{|_q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto es,

$$q \in \{V(H_f)\} \cap \{V(E1_f)\} \cap \{V(E2_f)\}. \quad (1.12)$$

Si $u = (0, 0)$ implica que q es un punto singular de $V(H_f)$, lo cual no ocurre, por ser $V(H_f)$ no singular. Por lo tanto si $\pi(p) = q \in V(C_f)$ entonces $q \in V(E1_f) \cap V(E2_f)$. \square

Agradezco a la Dra. Adriana Ortiz Rodríguez por brindarme la demostración de esta proposición.

Teoría de Poliedros

En este capítulo, recordamos algunas propiedades de los poliedros que utilizaremos en los capítulos 4, 5 y 6.

Definición 2.1. Un *poliedro* en \mathbb{R}^n es la intersección finita de semi-espacios dados por ecuaciones de la forma : $\langle x, v \rangle \geq a$, donde $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ y \langle, \rangle denota el producto punto usual en \mathbb{R}^n .

Un poliedro es llamado *racional* si $v \in \mathbb{Z}^n$. En este trabajo siempre utilizaremos poliedros racionales.

Definición 2.2. Llamamos *complejo poliedral* $P \in \mathbb{R}^n$ a una colección finita de poliedros en \mathbb{R}^n , la cual contiene todas las caras de sus miembros y la intersección de cualesquiera dos poliedros en P es una cara común.

Definición 2.3. Sea P un complejo poliedral. Definimos el *soporte poliedral* de P (denotado $|P|$), como la unión de todos los poliedros de P vistos como conjuntos. La dimensión de P es la dimensión máxima de los poliedros de P . Si todos los poliedros maximales de P (respecto a la inclusión) tienen la misma dimensión, entonces P es llamado de dimensión pura.

Definición 2.4. Sea Δ un poliedro racional en \mathbb{R}^n , y $\tau = \{\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(l)}\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto finito de poliedros de diferentes dimensiones. Decimos que τ es una *subdivisión poliedral* de Δ si cumple las siguientes condiciones:

1. Si $\Delta^{(i)} \cap \Delta^{(j)} \neq \emptyset$, entonces $\Delta^{(i)} \cap \Delta^{(j)} \in \tau$.
2. $int(\Delta^{(i)}) \cap int(\Delta^{(j)}) = \emptyset$, si $i \neq j$.
3. Si $\Delta^{(i)} \cap \Delta^{(j)}$ es una cara de $\Delta^{(i)}$, entonces también es una cara de $\Delta^{(j)}$.
4. $\bigcup_{\Delta^{(i)} \in \tau} Int(\Delta^{(i)}) = \Delta$.

Definición 2.5. Decimos que $\lambda : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función *convexa* si para cualquier $x, y \in U$ y para todo $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$\lambda(tx + (1-t)y) \leq t\lambda(x) + (1-t)\lambda(y).$$

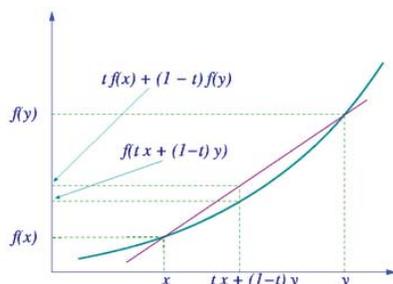


Figure 2.1: Función convexa.

Definición 2.6. Sea Δ un poliedro n -dimensional y τ una subdivisión poliedral de Δ . Decimos que τ es *convexa* si existe una función $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ continua, y convexa que satisfice:

1. $\lambda|_{\Delta'}$ es afín $\forall \Delta' \in \tau$.
2. $\lambda|_{\Delta' \cup \Delta''}$ no es afín $\forall \Delta', \Delta'' \in \tau$ con Δ', Δ'' de dimensión máxima.
3. $\lambda(\Delta \cap \mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}$.

En la literatura, las subdivisiones poliedrales convexas son también llamadas *regulares*.

Ejemplo 2.7. Sea $\Delta_d \subset \mathbb{R}^2$ el poliedro dado por el triángulo con vértices $(2, 2)$, $(d, 2)$, $(2, d) \in \mathbb{R}^2$, es decir, $\Delta_d = \Delta\{(2, 2), (d, 2), (2, d)\}$ con τ la subdivisión poliedral de Δ_d inducida por las rectas $x = i$ donde $i = 2, \dots, d-1$, y sea $\lambda : \Delta_d \rightarrow \mathbb{R}$, tal que tomando $z_1 = x$, y $z_i = z_{i-1} + x - i$, $(x, y) \mapsto z_i, \forall x \in [i, i+1)$ con $i = 2, \dots, d-1$.

Tomando los puntos (x_i, y_i) y (x_j, y_j) tal que $x_i \in [i, i+1)$, $x_j \in [j, j+1)$, con $j \geq i$. Notamos que

$$\lambda((1-t)(x_i, y_i) + t(x_j, y_j)) \leq tz_j \leq tz_j + (1-t)z_i = t\lambda((x_j, y_j)) + (1-t)\lambda((x_i, y_i)), t \in [0, 1].$$

Así, λ es una función continua y convexa, que además satisfice las condiciones de la definición anterior, por lo tanto τ es una subdivisión poliedral convexa de Δ_d .

Observación 2.8. De manera análoga se muestra que si τ es la subdivisión poliedral de Δ_d inducida por las rectas $y = -x + i$ donde $i = 2, \dots, d-1$, y sea $\lambda : \Delta_d \rightarrow \mathbb{R}$, tal

que tomando $z_1 = x + y$, y $z_i = z_{i-1} + x + y - i$, $(x, y) \mapsto z_i, i \leq x + y \leq i + 1$ con $i = 2, \dots, d - 1$. Es una subdivisión poliedral convexa de Δ_d .

También si τ es la subdivisión poliedral de Δ_d inducida por las rectas $y = -2x + i$ donde $i = 2, \dots, d - 1$, y sea $\lambda : \Delta_d \rightarrow \mathbb{R}$, tal que tomando $z_1 = 2x + y$, y $z_i = z_{i-1} + 2x + y - i$, $(x, y) \mapsto z_i, i \leq 2x + y \leq i + 1$ con $i = 2, \dots, d - 1$. Es una subdivisión poliedral convexa de Δ_d .

Dada una subdivisión τ inducida por la función λ , la envolvente convexa de la gráfica Γ_λ de λ forma un politopo, nos referiremos al conjunto de caras 2-dimensionales que yacen en Γ_λ por $T(\lambda)$ y nos referiremos a este como el *politopo compacto con subdivisión poliedral inducida por λ* .

Notemos que la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ induce una biyección entre las caras de $T(\lambda)$ y los poliedros en λ .

Lema 2.9. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro y $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función convexa con $\lambda(\Delta \cap \mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}$. Si $E \in T(\lambda)$, entonces existe un vector $(\alpha, \beta, 1) \in \mathbb{Z}^3$ ortogonal a E . En particular, la

transformación lineal $l_{(\alpha, \beta)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix}$, satisface que

$l_{(\alpha, \beta)}(E)$ está contenido en el plano $\{z = r\}$, donde $r = \min\{(\alpha, \beta, 1) \cdot v \ ; \ v \in T(\lambda)\} \in \mathbb{Z}$ y $\pi(v) = \pi(l_{(\alpha, \beta)}(v))$ para cualquier $v \in E$.

Demostración. Sean $(x_1, y_1, \lambda(x_1, y_1)), (x_2, y_2, \lambda(x_2, y_2)), (x_3, y_3, \lambda(x_3, y_3)) \in E \cap \mathbb{Z}^3$ puntos con la propiedad de que no existe un punto con coordenadas enteras dentro del triángulo $\Delta(v_1, v_2, v_3)$ con vértices $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2), v_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{Z}^2$, esto es,

$$1 = \text{área}(\Delta(v_1, v_2, v_3)) = |\langle (v_3 - v_1), (v_2 - v_1)^\perp \rangle|, \quad (2.1)$$

donde \langle, \rangle denota el producto escalar, y $(,)^\perp$ es el vector ortogonal.

Un vector $(\alpha, \beta, 1) \in \mathbb{Z}^3$ es ortogonal a E si $(\alpha, \beta, 1) \cdot (x_k, y_k, \lambda(x_k, y_k))$ es constante para $k = 1, 2, 3$. El sistema de ecuaciones en las variables reales α, β y r ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ \lambda(x_k, y_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ r \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

que envía E al plano horizontal $\{z = r\}$ es equivalente al sistema de tres ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda(x_1, y_1) \\ -\lambda(x_2, y_2) \\ -\lambda(x_3, y_3) \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz, dado por

$$(x_2y_3 - y_2x_3) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = \langle (x_3 - x_1, y_3 - y_1), (-(y_2 - y_1), x_2 - x_1) \rangle$$

$$= \langle (v_3 - v_1), (v_2 - v_1)^\perp \rangle, \text{ es igual a } \pm 1$$

por (2.1). Así, se garantiza la existencia de las soluciones enteras $\alpha, \beta, r \in \mathbb{Z}$ para el sistema (2.2).

La transformación lineal $l_{(\alpha, \beta)}$ envía la cara $E \in T(\lambda)$ a una cara en $T(\tilde{\lambda})$ contenida en el plano horizontal $\{z = r\}$, donde $\tilde{\lambda}(i, j) = \lambda(i, j) + i\alpha + j\beta$ mientras las caras 2-dimensionales restantes en $T(\lambda)$ son enviadas a caras en $T(\hat{\lambda})$ arriba de este plano horizontal, así, $r = \min\{(\alpha, \beta, 1) \cdot v \ ; \ v \in T(\lambda)\} \in \mathbb{Z}$.

□

Proposición 2.10. Sean $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, funciones convexas sobre $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces toda combinación lineal con coeficientes positivos, de las funciones λ_i es una función convexa.

Demostración. Sean $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, funciones convexas sobre $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces para cualquier par de puntos $a, b \in U$ y para todo $t \in [0, 1]$, tenemos que

$$\lambda_i((1-t)a + tb) \leq (1-t)\lambda_i(a) + t\lambda_i(b), \text{ con } i = 1, \dots, m.$$

Así, para cualquier $\alpha_i > 0, i = 1, \dots, m$

$$\alpha_i \lambda_i((1-t)a + tb) \leq \alpha_i [(1-t)\lambda_i(a) + t\lambda_i(b)].$$

De ahí,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i((1-t)a + tb) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i [(1-t)\lambda_i(a) + t\lambda_i(b)]$$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i((1-t)a + tb) \leq (1-t) \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i(a) + t \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i(b)$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i(x)$ es una función convexa.

□

Corolario 2.11. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ el poliedro dado por el triángulo con vértices $\{(2, 2), (d, 2), (2, d)\} \subset \mathbb{R}^2$. Sea τ la subdivisión poliedral de Δ en los triángulos de la forma

$$\Delta^{(1)} = \Delta\{(i, 2), (i + 1, 2), (i, 3)\},$$

$$\Delta^{(2)} = \Delta\{(l, j), (l + 1, j - 1), (l, j + 1)\} \text{ con } l + j \leq d - 2$$

$$\Delta^{(3)} = \Delta\{(j, k + 2), (l + 1, k + 1), (l + 1, k)\} \text{ con } l + k \leq d - 2$$

para $i \in \{2, \dots, d - 3\}$, $j \in \{3, \dots, d - 3\}$, y $l, k \in \{2, \dots, d - 4\}$. Entonces τ es convexa.

Demostración. Notemos que esta subdivisión poliedral se puede ver como la unión de las subdivisiones poliedrales convexas del ejemplo 2.7 y de la observación 2.8, y por la proposición 2.10 se tiene el resultado.

□

Teoría de Perturbación

En este capítulo recordaremos algunos conceptos, definiciones y resultados básicos sobre la teoría de perturbación de polinomios y curvas, los cuales utilizaremos más adelante para mostrar el comportamiento de los puntos parabólicos especiales en la gráfica de funciones bajo pequeñas perturbaciones.

Dado un punto $q \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por $D(q, R)$ al disco cerrado de radio $R \in \mathbb{R}$ centrado en q .

Definición 3.1. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio. Llamamos una *perturbación* de f a una familia de funciones $F_t = f + tg_t$, donde $g_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$, tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$ se tiene que $|F_t(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon$ para todo $(x, y) \in D(q, R)$, donde $q \in V(f)$.

Definición 3.2. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio y F_t una perturbación de f . Sea $C := V(f)$ la curva definida por el conjunto de ceros de $f \in \mathbb{R}[x, y]$, llamamos una *perturbación de C* a la familia de curvas $C_t := V(F_t)$, definida por el conjunto de ceros una perturbación F_t con $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 3.3. Sea $F_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$ una perturbación de $f \in \mathbb{R}[x, y]$. Para $\delta > 0$, sea $\{q_t\}_{t \in (-\delta, \delta)}$ una colección de puntos en $D(q, R) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0} q_t = q$, entonces $\lim_{t \rightarrow 0} F_t(q_t) = f(q)$.

Demostración Sea $F_t = f + tg_t$ con $f \in \mathbb{R}[x, y]$ y $g_t \in \mathbb{R}[x, y, t]$. Tomamos el compacto $[-\varepsilon, \varepsilon] \times D(q, R)$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|g_t(x, y)| < M$ para todo $(x, y) \in D(q, R)$. Sea $q_t \in D(q, R)$, con $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, así

$$|t \cdot g_t(q_t)| < t \cdot M \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot g_t(q_t) = 0.$$

De ahí,

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_t(q_t) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(q_t) + t \cdot g_t(q_t)) = f(\lim_{t \rightarrow 0} q_t) + \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot g_t(q_t) = f(q).$$

Por lo tanto $\lim_{t \rightarrow 0} F_t(q_t) = f(q)$.

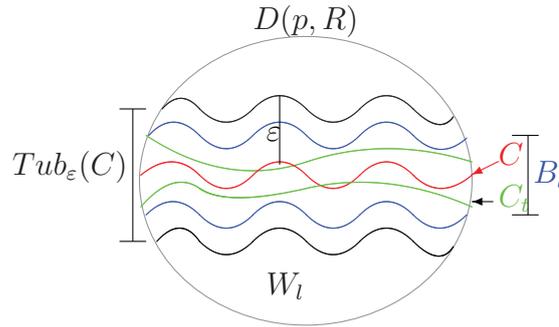
□

Definición 3.4. Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$, denotaremos por $Tub_\varepsilon(A) \subset \mathbb{R}^2$, al conjunto de puntos, que están a distancia no mayor que ε de A , y lo llamamos, la *vecindad tubular* de radio ε centrada en A . Es decir

$$Tub_\varepsilon(A) := \{w \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \min_{z \in A} \{|z - w| \leq \varepsilon\}\}.$$

Denotamos por $\text{Int } Tub_\varepsilon(A)$, al interior de la vecindad tubular $Tub_\varepsilon(A)$.

Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva, en la siguiente figura se ilustra la vecindad tubular de C .



Proposición 3.5. Sea $C_t := V(F_t) \subset \mathbb{R}^2$ una perturbación de la curva $C := V(f) \subset \mathbb{R}^2$ donde $f \in \mathbb{R}[x, y]$.

- i) Dado $\varepsilon > 0$ y un disco cerrado $D(q, R) \subset \mathbb{R}^2$ de radio R centrado en $q \in C$, existe $\delta > 0$ tal que $C_t \cap D(q, R)$ está contenido en la vecindad tubular $Tub_\varepsilon(C)$ para $|t| < \delta$.
- ii) Si C es no singular dentro del disco cerrado $D(q, R) \subset \mathbb{R}^2$ de radio R centrado en $q \in C$, existe $\delta > 0$ tal que $C_t \cap D(q, R) \neq \emptyset$ es no singular para $|t| < \delta$.

Demostración

- i) Sea $F_t = f + tg_t$, donde $f \in \mathbb{R}[x, y]$ y $g_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$. Los conjuntos

$$B_k := \{(x, y) \in D(q, R) \ ; \ |f(x, y)| \leq k\}$$

definen una sucesión de conjuntos compactos con la propiedad de que $B_k \subset B_{k'}$ para $k < k'$ y tal que $C \cap D(q, R) = \bigcap_{k \geq 0} B_k$.

Los conjuntos abiertos $W_k := D(q, R) \setminus B_k$, con $k \geq 0$ definen una cubierta de $U = D(q, R) \setminus \text{Int } Tub_\varepsilon(C)$, por lo cual existe una subcubierta finita $U \subset \bigcup_{j=1}^l W_j$.

Por lo tanto, $U \subset D(q, R) \setminus B_l$ para algún $l > 0$, y así, $B_l \subset \text{Int } Tub_\varepsilon(C) \cap D(q, R) \subset Tub_\varepsilon(C) \cap D(q, R)$.

Sea $M := \max\{|g_t(x, y)| \ ; \ (x, y) \in D(q, R), t \in [-1, 1]\}$, entonces para $|t| < \frac{l}{l+M+1}$ y $(x, y) \in D(q, R)$, tenemos que $|tg_t(x, y)| < l$.

Sea $\delta = \frac{l}{l+M+1}$, entonces, para $|t| < \delta$ se tiene que

$$C_t \cap D(q, R) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ |f(x, y)| = |tg_t(x, y)| \leq l\} \cap D(q, R) \subset B_l \subset Tub_\varepsilon(C) \cap D(q, R).$$

- ii) Primero, vamos a probar que $C_t \cap D(q, R) \neq \emptyset$ para valores suficientemente pequeños de t . Como C es no singular en q , existe $\epsilon > 0$ tal que $[-\epsilon, \epsilon] \subset f(D(q, R))$.

Elegimos $q_1 \in f^{-1}(-\epsilon) \cap D(q, R)$, $q_2 \in f^{-1}(\epsilon) \cap D(q, R)$, y consideramos

$$M := \max\{|g_t(x, y)| \ ; \ (x, y) \in D(q, R), t \in [-1, 1]\}.$$

Entonces, para $|t| < \frac{\epsilon}{\epsilon+2(M+1)} < 1$, tenemos que $F_t(q_1) = f(q_1) + tg_t(q_1) < 0$, y $F_t(q_2) = f(q_2) + tg_t(q_2) > 0$. Como F_t es continua en $D(q, R)$, existe $p \in D(q, R)$ tal que $F_t(p) = 0$, es decir, $C_t \cap D(q, R) \neq \emptyset$.

Definimos en $D(q, R)$ las funciones continuas dadas por

$$\psi(x, y) := \max \left\{ \left| \frac{\partial g_t(x, y)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial g_t(x, y)}{\partial y} \right|, t \in [-1, 1] \right\} \text{ y}$$

$$\varphi(x, y) := \max \left\{ \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \right\}.$$

Como φ es estrictamente positiva sobre $C \cap D(q, R)$, podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que φ es estrictamente positiva en $Tub_\varepsilon(C) \cap D(q, R)$.

Consideramos $N := \max\{\psi(x, y) \ ; \ (x, y) \in Tub_\varepsilon(C) \cap D(q, R)\}$ y el valor positivo $n := \min\{\varphi(x, y) \ ; \ (x, y) \in Tub_\varepsilon(C) \cap D(q, R)\}$. Así, para $(x, y) \in Tub_\varepsilon(C) \cap D(q, R)$ y $|t| < \frac{n}{n+2N+1}$, tenemos que

$$\max \left\{ \left| t \frac{\partial g_t(x, y)}{\partial x} \right|, \left| t \frac{\partial g_t(x, y)}{\partial y} \right| \right\} < \frac{m}{2} \leq \begin{cases} \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| & \text{si } \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| \leq \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \\ \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| & \text{si } \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|. \end{cases}$$

Por i), existe $0 < \delta_0 < 1$ tal que $C_t \cap D(q, R) \subset Tub_\varepsilon(C) \cap D(q, R)$ para $|t| < \delta_0$. Por lo tanto, para $|t| < \min \left\{ \frac{\epsilon}{\epsilon+2(N+1)}, \frac{m}{m+2M+1}, \delta_0 \right\}$ se tiene una de las siguientes condiciones;

a) $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + t \frac{\partial g_t(x, y)}{\partial x} \right| > \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|$, si $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|$, ó

b) $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + t \frac{\partial g_t(x, y)}{\partial y} \right| > \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|$, si $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| \leq \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|$, en $C_t \cap D(q, R) \neq \emptyset$.

Así,

$$\left(\frac{\partial F_t}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F_t}{\partial y}(x, y) \right) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + t \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + t \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right) \neq (0, 0),$$

es decir, la curva $C_t \cap D(q, R) \neq \emptyset$ es no singular.

□

Proposición 3.6. Sean $C_t, D_t \subset \mathbb{R}^2$ perturbaciones de las curvas $C, D \subset \mathbb{R}^2$, respectivamente. Si $C \pitchfork_q D$ entonces para cualquier $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $|t| < \delta$, las curvas C_t y D_t se intersecan transversalmente en algún punto $q_t \in D(p, R)$. Más aún, q_t puede ser elegido tal que $\lim_{t \rightarrow 0} q_t = q$.

Demostración. Sean $C := V(f)$, $D := V(g)$, $C_t := \{F_t := f + t\varphi_t = 0\}$ y $D_t := \{G_t := g + t\psi_t = 0\}$ con $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ y $\varphi_t, \psi_t \in \mathbb{R}[x, y, t]$. Sea $H(x, y) := (f(x, y), g(x, y))$ una función, y $h = \det(J(f, g))$, el determinante jacobiano de H , y tomamos $\gamma := V(h) \subset \mathbb{R}^2$.

Como las rectas tangentes de C y D son secantes en q , $h(q) \neq 0$ y existe $0 < \varepsilon \leq R$ tal que $\gamma \cap D(q, \varepsilon) = \emptyset$. Además, podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que $Tub_\varepsilon(\gamma) \cap D(q, \varepsilon) = \emptyset$ dentro de $D(q, R)$. Por la proposición 3.5, existe $\delta_1 > 0$ tal que las curvas

$$\emptyset \neq C_t \cap D(q, \varepsilon) \subset Tub_{\frac{\varepsilon}{2}}(C) \cap D(q, \varepsilon) \text{ y } \emptyset \neq D_t \cap D(q, \varepsilon) \subset Tub_{\frac{\varepsilon}{2}}(D) \cap D(q, \varepsilon)$$

son no singulares para $|t| < \delta_1$. Más aún, para $|t| < \delta_1$, $C_t \cap D \cap D(q, R) \neq \emptyset$ y podemos encontrar puntos $q_1, q_2 \in C_t \cap Tub_{\frac{\varepsilon}{2}}(D) \cap D(q, \varepsilon)$ con $g(q_1) < 0$ y $g(q_2) > 0$. Así, por el mismo argumento dado en la prueba de la proposición 3.5 ii), existe δ_2 tal que las curvas C_t y D_t se intersecan dentro de $D(q, \varepsilon) \subset D(q, R)$ para toda $|t| < \delta_2$.

Las rectas tangentes a las curvas C_t y D_t en $q_t \in C_t \cap D_t \cap D(q, \varepsilon) \neq \emptyset$, son transversales si y solo si q_t no yacen sobre las curvas

$$\gamma_t = \{V(h_t := \det(J(F_t, G_t)))\},$$

definidas por el determinante $h_t = \det(J(F_t, G_t))$ de la matriz de derivadas de las funciones $(F_t, G_t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como $h_t = h + t \left(\frac{d\varphi_t}{dx} \frac{d\psi_t}{dy} - \frac{d\psi_t}{dx} \frac{d\varphi_t}{dy} \right)$, la curva γ_t es una perturbación de γ y, por la proposición 3.5, para algún disco cerrado $D(q, r) \subset \mathbb{R}^2$ centrados en $q \in \gamma$ y tal que $D(q, \varepsilon) \subset D(q, r)$, existe $\delta_3 > 0$ tal que $\gamma_t \cap D(q, r) \subset Tub_\varepsilon(\gamma) \cap D(q, r)$ para $|t| < \delta_3$. En particular, para $|t| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, $\gamma_t \cap D(q, r) \cap D(q, \varepsilon) \subset Tub_\varepsilon(\gamma) \cap D(q, \varepsilon) = \emptyset$, por lo tanto $q_t \in C_t \cap D_t \cap D(q, \varepsilon) \neq \emptyset$ no pertenece a la curva γ_t y por lo tanto $C_t \pitchfork_{q_t} D_t$ con $q_t \in D(q, R)$.

□

La condición de transversalidad es necesaria en la proposición 3.6.

Ejemplo 3.7. Sean $C_t := V(y - x^2 - t)$, $D_t := V(y + x^2 + t)$ perturbaciones de las curvas $C := V(y - x^2)$, $D := V(y + x^2)$. Las curvas C y D tiene sólo un punto de intersección

$\bar{0} = (0, 0)$, el cual no es transversal. Para $0 < t < \delta$ la intersección de C_t y D_t dentro de $D(\bar{0}, r)$ es vacía, y para $-\delta < t < 0$ la intersección de C_t y D_t dentro de $D(\bar{0}, r)$ tiene dos puntos, así la cantidad de puntos en la intersección de C y D no se preserva bajo pequeñas perturbaciones.

La proposición 3.6 no puede ser extendida a más de dos curvas.

Ejemplo 3.8. Sean $C_t := V(x-t)$, $D_t := V(y-t)$ y $E_t := V(y+x+t)$ perturbaciones de las curvas $C := V(x)$, $D := V(y)$ y $E := V(y+x)$. Las curvas C , D y E tienen un único punto de intersección transversal $\bar{0} = (0, 0)$. Para $0 < |t| < \delta$, la intersección de las curvas C_t , D_t y E_t dentro de $D(\bar{0}, r)$ es vacía, por lo tanto la cantidad de puntos de intersección no es preservada bajo pequeñas perturbaciones.

Perturbación de puntos parabólicos especiales

En esta sección analizaremos cómo se comportan los puntos parabólicos especiales bajo pequeñas perturbaciones de las gráficas a las que pertenecen.

Los puntos parabólicos pueden ser expresados por la intersección de dos curvas tangentes, o tres curvas, como hemos visto en los ejemplos 3.7 y 3.8; ambas situaciones en general, no son preservadas bajo pequeñas perturbaciones.

En [14], E. Landis enunció que: bajo algunas condiciones de genericidad, los puntos parabólicos son preservados bajo perturbaciones. Landis no da una prueba de este hecho. Podemos darnos cuenta que este hecho es una consecuencia del trabajo de Platonova. Sin embargo, aquí damos una prueba detallada para puntos parabólicos especiales transversales.

Proposición 3.9. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $d \geq 3$ y $g_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$. Si $F_t := f + tg_t$ es una perturbación de f , entonces las curvas $V(H_{F_t})$, $V(E1_{F_t})$ y $V(E2_{F_t})$ son perturbaciones de las curvas $V(H_f)$, $V(E1_f)$ y $V(E2_f)$, respectivamente.

Demostración. La curva Hessiana de $F_t(x, y) = f(x, y) + tg_t(x, y)$, está definida por los ceros del polinomio

$$H_{F_t}(x, y) = H_f(x, y) + t\varphi, \text{ donde } \varphi = (f_{xx}g_{t_{yy}} + g_{t_{xx}}f_{yy} - 2f_{xy}g_{t_{xy}} + tH_{g_t}).$$

Por definición, los polinomios $E1_{F_t}$ y $E2_{F_t}$, son

$$E1_{F_t} := E1_f + t[-(H_f)_y g_{t_{xx}} - \varphi_y F_{t_{xx}} + (H_f)_x t g_{t_{xy}} + \varphi_x F_{t_{xy}}],$$

$$E2_{F_t} := E2_f + t[-(H_f)_y g_{t_{xy}} - \varphi_y F_{t_{xy}} + (H_f)_x t g_{t_{yy}} + \varphi_x F_{t_{yy}}].$$

Así, las curvas $V(H_{F_t})$, $V(E1_{F_t})$ y $V(E2_{F_t})$ son perturbaciones de las curvas $V(H_f)$, $V(E1_f)$ y $V(E2_f)$, respectivamente.

□

Corolario 3.10. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $d \geq 3$ y sea Ω una región acotada. Si F_t es una perturbación de f y la curva $V(H_f)$ es no singular en la cerradura de Ω , entonces la curva Hessiana $V(H_{F_t})$ de F_t para valores suficientemente pequeños de t es no singular en Ω .

Demostración. Es consecuencia inmediata de las proposiciones 3.5 y 3.9. □

Lema 3.11. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $d \geq 3$, sea $H_f^{-1}(k) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ H_f(x, y) = k\}$ la curva de nivel del polinomio H_f . Sea $q \in V(E1_f) \cap V(E2_f)$, tal que $H_f(q) = k$ entonces, o q pertenece al conjunto $Sing(H_f^{-1}(k))$ de puntos singulares de $H_f^{-1}(k)$ con $k \neq 0$ o $q \in H_f^{-1}(0)$.

Demostración. Sea $q \in V(E1_f) \cap V(E2_f)$ y sea $q \in H_f^{-1}(k) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ H_f(x, y) = k, k \neq 0\}$. Así,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E1_f \\ E2_f \end{pmatrix} \Big|_q = \left[\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_f)_y \\ (H_f)_x \end{pmatrix} \right] \Big|_q,$$

el vector $u(q) := (-(H_f)_y, (H_f)_x) \Big|_q \in \ker \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \Big|_q \cap T_q H_f^{-1}(k)$,

donde $T_q H_f^{-1}(k)$ es el espacio tangente a $H_f^{-1}(k)$ en q .

Si $u(q) \neq (0, 0)$, entonces $rango \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \Big|_q \leq 1$. Así, $H_f(q) = 0$ y obtenemos una contradicción. Por lo tanto $u(q) = (0, 0)$, lo cual implica que $q \in Sing(H_f^{-1}(k))$. □

Lema 3.12. Sea $\tilde{q}_t \in V(E1_{F_t}) \cap V(E2_{F_t})$ y sea $H_{F_t}^{-1}(k) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ H_{F_t}(x, y) = k\}$ la curva de nivel del Polinomio H_{F_t} . Entonces, o \tilde{q}_t pertenece al conjunto $Sing(H_{F_t}^{-1}(k))$ de puntos singulares de $H_{F_t}^{-1}(k)$ con $k \neq 0$ o $\tilde{q}_t \in H_{F_t}^{-1}(0)$.

Demostración.

Sea $\tilde{q}_t \in V(E1_{F_t}) \cap V(E2_{F_t})$ y sea $\tilde{q}_t \in H_{F_t}^{-1}(k) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ H_{F_t}(x, y) = k, k \neq 0\}$. Así,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E1_{F_t} \\ E2_{F_t} \end{pmatrix} \Big|_{\tilde{q}_t} = \left[\begin{pmatrix} (F_t)_{xx} & (F_t)_{xy} \\ (F_t)_{yx} & (F_t)_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_{F_t})_y(t) \\ (H_{F_t})_x \end{pmatrix} \right] \Big|_{\tilde{q}_t},$$

el vector $u(\tilde{q}_t) := (-(H_{F_t})_y, (H_{F_t})_x) \Big|_{\tilde{q}_t} \in \ker \begin{pmatrix} (F_t)_{xx} & (F_t)_{xy} \\ (F_t)_{yx} & (F_t)_{yy} \end{pmatrix} \Big|_{\tilde{q}_t} \cap T_{\tilde{q}_t} H_{F_t}^{-1}(k)$,

donde $T_{\tilde{q}_t} H_{F_t}^{-1}(k)$ es el espacio tangente a $H_{F_t}^{-1}(k)$ en \tilde{q}_t .

Si $u(\tilde{q}_t) \neq (0, 0)^t$, entonces $rango \begin{pmatrix} (F_t)_{xx} & (F_t)_{xy} \\ (F_t)_{yx} & (F_t)_{yy} \end{pmatrix} \Big|_{\tilde{q}_t} \leq 1$. Así, $H_{F_t}(\tilde{q}_t) = 0$ y obtenemos una contradicción. Por lo tanto $u(\tilde{q}_t) = (0, 0)^t$, lo cual implica que $\tilde{q}_t \in Sing(H_{F_t}^{-1}(k))$.

□

Teorema 3.13. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $d \geq 3$ con curva Hessiana no singular $V(H_f)$ y tal que $V(E1_f) \pitchfork V(E2_f)$, y $F_t(x, y) = f(x, y) + tg_t(x, y)$, con $g_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$, una perturbación de f . Sean $PPET(f)$ y $PPET(F_t)$, los conjuntos de puntos parabólicos especiales transversales en las gráficas de f y F_t , respectivamente. Entonces, para cada $(\tilde{q}, f(\tilde{q}))$ punto parabólico especial transversal de la gráfica de f y $\forall \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $0 < t < \delta$, existe un punto parabólico especial transversal $(\tilde{q}_t, F_t(\tilde{q}_t))$ en la gráfica de F_t en el disco cerrado $D(\tilde{q}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$.

Demostración. Sea $p = (\tilde{q}, f(\tilde{q})) \in \mathbb{R}^3$ un punto parabólico especial transversal de la gráfica de f , y $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre el plano xy . Por la proposición 1.38, se tiene que $\tilde{q} = \pi(p)$ yace en la intersección de las curvas $V(H_f)$, $V(E1_f)$ y $V(E2_f)$. Como la curva $V(H_f)$ es no singular en \tilde{q} , por el corolario 3.10 la curva $V(H_{F_t})$ es no singular dentro del disco cerrado $D(\tilde{q}, \varepsilon)$ para valores de t suficientemente pequeños, y por el proposición 1.38 el conjunto de puntos parabólicos especiales transversales de la gráfica de F_t dentro de $D(\tilde{p}, \varepsilon)$ esta definidos por la intersección $V(H_{F_t}) \cap V(E1_{F_t}) \cap V(E2_{F_t}) \cap D(\tilde{p}, \varepsilon)$ para valores suficientemente pequeños de t . Así, existe $\delta_1 > 0$ tal que para $|t| < \delta_1$

$$\pi(PPET(F_t)) \cap D(\tilde{q}, \varepsilon) = V(H_{F_t}) \cap V(E1_{F_t}) \cap V(E2_{F_t}) \cap D(\tilde{q}, \varepsilon)$$

Por la proposición 3.6 existe $\delta_2 > 0$ tal que para $|t| < \delta_2$ las curvas $V(E1_{F_t})$ y $V(E2_{F_t})$ se intersecan transversalmente en algún punto $q_t \in D(\tilde{q}, \varepsilon)$ con $\lim_{t \rightarrow 0} q_t = q$.

Ahora para probar que $q_t \in PPET(F_t)$, supongamos $H_{F_t}(q_t) = k_t \neq 0$, por el lema 3.12 tenemos que $q_t \in D(q, \varepsilon)$ es un punto singular de $H_{F_t}^{-1}(k_t) : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ H_{F_t}(x, y) = k_t\}$.

El vector $v(q_t) := (-(H_{F_t})_y(q_t), (H_{F_t})_x(q_t)) = (0, 0)$, define una sucesión con

$$(0, 0) \neq (-(H_f)_y(\tilde{q}), (H_f)_x(\tilde{q})) = \lim_{t \rightarrow 0} (-(H_{F_t})_y(\tilde{q}_t), (H_{F_t})_x(\tilde{q}_t)) = \lim_{t \rightarrow 0} v(\tilde{q}_t) = (0, 0).$$

Lo cual implica que para $|t| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ el punto $q_t \in V(E1_{F_t}) \cap V(E2_{F_t})$ yace también en $V(H_{F_t}) \cap D(q, \varepsilon)$. Por lo tanto, el punto $(q_t, F_t(q_t))$ es un punto parabólico especial transversal de la gráfica de F_t con $q_t \in D(q, \varepsilon)$.

□

Corolario 3.14. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $d \geq 3$ con curva Hessiana no singular y sea $F_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$ una perturbación de f . Entonces, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$ existe una inclusión

$$\psi_t : PPET(f) \hookrightarrow PPET(F_t)$$

tal que $\pi(\psi_t(p)) \in D(\pi(p), \varepsilon)$. Más aun, eligiendo ε suficientemente pequeña también tenemos:

$$\psi_t : PPET(f)^* \hookrightarrow PPET(F_t)^*.$$

Demostración

Sea $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ tal que para cualquier $q, q' \in \pi(PPET(f))$ con $q \neq q'$, $D(q, \varepsilon_1) \cap D(q', \varepsilon_1) = \emptyset$ y $D(q, \varepsilon_1), D(q', \varepsilon_1) \subset (\mathbb{R}^*)^2$. Por el teorema 3.13, para cualquier $q \in \pi(PPET(f))$, existe $\delta_q > 0$ tal que, para $|t| < \delta_q$, existe un punto $(q_t, F_t(q_t)) \in PPET(F_t)$ con $q_t \in D(q, \varepsilon_1)$.

Por ser el conjunto $PPET(f)$ finito, tenemos $\delta := \min_{q \in \pi(PPET(f))} \delta_q > 0$ y para $p = (q, f(q)) \in PPET(f)$ definimos $\psi_t(p) := (q_t, F_t(q_t))$.

Mapeos cuasihomotéticos

En esta sección, mostraremos algunas propiedades de un tipo especial de transformaciones, llamadas *cuasihomotecias* por O. Y. Viro [26]. Las cuasihomotecias son mapeos

$$\begin{aligned} \rho_s^{(\alpha, \beta)} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (s^\alpha x, s^\beta y). \end{aligned}$$

para algún $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ y $s \in \mathbb{R}$. Para $s \neq 0$ la función $\rho_s^{(\alpha, \beta)}$ es uno a uno, y la diferencial $d\rho_s^{(\alpha, \beta)}|_{(x, y)}$ corresponde al isomorfismo definido por la matriz $\begin{pmatrix} s^\alpha & 0 \\ 0 & s^\beta \end{pmatrix}$.

Lema 3.15. Sea $h_{s^{\alpha_i}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto s^{\alpha_i} x$. Dado $\alpha_1 < \alpha_2$, para cualesquiera dos intervalos $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |s| < \delta$ se tiene que $h_{s^{\alpha_1}}([a, b]) \cap h_{s^{\alpha_2}}([c, d]) = \emptyset$.

Demostración Daremos una prueba para el caso donde $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}_{>0}$. Consideremos $\delta_1 = (\frac{a}{d})^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$. Si $s > 0$ o α_1, α_2 son pares, entonces $h_{s^{\alpha_1}}([a, b]) = [s^{\alpha_1} a, s^{\alpha_1} b]$ y $h_{s^{\alpha_2}}([c, d]) = [s^{\alpha_2} c, s^{\alpha_2} d]$, así eligiendo $0 < |s| < \delta_1$ tenemos que $s^{\alpha_2 - \alpha_1} < \frac{a}{d}$, por lo cual $s^{\alpha_2} d < s^{\alpha_1} a$ y $h_{s^{\alpha_1}}([a, b]) \cap h_{s^{\alpha_2}}([c, d]) = \emptyset$. Si $s < 0$ y $\alpha_1 + \alpha_2$ es impar, entonces o $h_{s^{\alpha_1}}([a, b]) \subset \mathbb{R}_{>0}$ y $h_{s^{\alpha_2}}([c, d]) \subset \mathbb{R}_{<0}$; o $h_{s^{\alpha_1}}([a, b]) \subset \mathbb{R}_{<0}$ y $h_{s^{\alpha_2}}([c, d]) \subset \mathbb{R}_{>0}$, así el resultado se sigue.

Si $s < 0$ y α_1, α_2 son impares, entonces $h_{s^{\alpha_1}}([a, b]) = [s^{\alpha_1} b, s^{\alpha_1} a]$ y $h_{s^{\alpha_2}}([c, d]) = [s^{\alpha_2} d, s^{\alpha_2} c]$, por lo tanto $|s| < \delta_1$ implica que $s > -(\frac{a}{d})^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$, así $0 < -s < (\frac{a}{d})^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$, y $s^{\alpha_1} a < s^{\alpha_2} d$, lo cual implica que $h_{s^{\alpha_1}}([a, b]) \cap h_{s^{\alpha_2}}([c, d]) = \emptyset$.

Para los casos donde $[a, b] \subset \mathbb{R}_{>0}$ y $[c, d] \subset \mathbb{R}_{<0}$; $[a, b] \subset \mathbb{R}_{<0}$ y $[c, d] \subset \mathbb{R}_{>0}$; o $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}_{<0}$, es suficiente considerar $0 < |s|$ más pequeño que $\delta_2 = |\frac{a}{c}|^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$, $\delta_3 = |\frac{b}{d}|^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$, $\delta_4 = (\frac{b}{c})^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}}$ para tener $h_{s^{\alpha_1}}([a, b]) \cap h_{s^{\alpha_2}}([c, d]) = \emptyset$, respectivamente. Tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, el resultado se sigue.

Proposición 3.16. Dado $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta') \in \mathbb{Z}^2$, sean $A, B \subset (\mathbb{R}^*)^2$ conjuntos finitos de puntos y sea $\varepsilon > 0$ tal que para todo $q \in A \cup B$, el disco cerrado $D(q, \varepsilon) \subset (\mathbb{R}^*)^2$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |s| < \delta$,

$$\rho_s^{(\alpha, \beta)}(Tub_\varepsilon(A)) \cap \rho_s^{(\alpha', \beta')}(Tub_\varepsilon(B)) = \emptyset.$$

Demostración Supongamos que $\alpha \neq \alpha'$ y sea $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección $(x, y) \mapsto x$. Sean $[a, b], [e, f] \subset \mathbb{R}_{<0}$, y $[c, d], [g, h] \subset \mathbb{R}_{>0}$ intervalos tales que

$$\pi_1(Tub_\varepsilon(A)) \subseteq [a, b] \cup [c, d] \text{ y } \pi_1(Tub_\varepsilon(B)) \subseteq [e, f] \cup [g, h].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \pi_1\left(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(Tub_\varepsilon(A))\right) &= \{s^\alpha x; x \in \pi_1(Tub_\varepsilon(A))\} \subseteq h_{s^\alpha}([a, b]) \cup h_{s^\alpha}([c, d]) \text{ y} \\ \pi_1\left(\rho_s^{(\alpha', \beta')}(Tub_\varepsilon(B))\right) &= \{s^{\alpha'} x; x \in \pi_1(Tub_\varepsilon(B))\} \subseteq h_{s^{\alpha'}}([e, f]) \cup h_{s^{\alpha'}}([g, h]). \end{aligned}$$

Tomando estos intervalos dos a dos, el resultado se sigue del lema 3.15.

Por otro lado, si $\alpha = \alpha'$ y $\beta \neq \beta'$, entonces con la proyección $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y$ y un proceso similar obtenemos el resultado deseado.

Puntos Parabólicos Especiales bajo Cuasihomotecias

En esta sección mostraremos como la cantidad de puntos parabólicos especiales transversales y no transversales sobre gráficas de funciones diferenciables se preserva bajo cuasihomotecias.

Dados $\alpha, \beta, r \in \mathbb{Z}$, de aquí en adelante consideramos la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{(\alpha, \beta, r)} : \mathbb{R}[x, y] &\rightarrow \mathbb{R}[s][x, y] \\ f(x, y) &\mapsto \tilde{h}_{(\alpha, \beta, r)}(f)(x, y) = s^r f \circ \rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Notemos que $\tilde{h}_{(\alpha, \beta, r)}(f)$ no define una perturbación de $f \in \mathbb{R}[x, y]$. Sin embargo, si consideramos la traslación $T1 : \mathbb{R}[s][x, y] \rightarrow \mathbb{R}[s][x, y]$, $f(x, y, s) \mapsto f(x, y, s + 1)$, entonces la composición $T1 \circ \tilde{h}_{(\alpha, \beta, r)}(f)$ es una perturbación de f .

Lema 3.17. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada. Si la curva Hessiana de $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es no singular dentro de la cerradura de Ω , entonces para $s \neq 0$ y $r \in \mathbb{Z}$,

- i) $(x, y, f(x, y)) \in PPE(f) \cap \pi^{-1}(\Omega)$ si y solo si $(x, y, \tilde{h}_{(0,0,r)}(f)(x, y)) \in PPE(\tilde{h}_{(0,0,r)}(f)) \cap \pi^{-1}(\Omega)$.
- ii) $(x, y, f(x, y)) \in PPE(f)^* \cap \pi^{-1}(\Omega)$ si y solo si $(x, y, \tilde{h}_{(0,0,r)}(f)(x, y)) \in PPE(\tilde{h}_{(0,0,r)}(f))^* \cap \pi^{-1}(\Omega)$.

Demostración Sea $\tilde{f}(x, y) := \tilde{h}_{(0,0,r)}(f)(x, y) = s^r f(x, y)$, y sea $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre el plano xy , por la proposición 1.38 el conjunto de puntos parabólicos especiales en la gráfica de \tilde{f} es dado por el conjunto $PPE(\tilde{f}) \cap \pi^{-1}(\Omega) = \{(x, y, \tilde{f}(x, y)) \ ; \ (x, y) \in V(H_{\tilde{f}}) \cap V(E1_{\tilde{f}}) \cap V(E2_{\tilde{f}})\} \cap \pi^{-1}(\Omega)$, donde

$$H_{\tilde{f}}(x, y) = \det \begin{pmatrix} \tilde{f}_{xx}(x, y) & \tilde{f}_{xy}(x, y) \\ \tilde{f}_{yx}(x, y) & \tilde{f}_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} s^r f_{xx}(x, y) & s^r f_{xy}(x, y) \\ s^r f_{yx}(x, y) & s^r f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = s^{2r} H_f(x, y), \text{ y} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E1_{\tilde{f}}(x, y) \\ E2_{\tilde{f}}(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{f}_{xx}(x, y) & \tilde{f}_{xy}(x, y) \\ \tilde{f}_{yx}(x, y) & \tilde{f}_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_{\tilde{f}})_y(x, y) \\ (H_{\tilde{f}})_x(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s^r f_{xx}(x, y) & s^r f_{xy}(x, y) \\ s^r f_{yx}(x, y) & s^r f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s^{2r} (H_f)_y(x, y) \\ s^{2r} (H_f)_x(x, y) \end{pmatrix} = s^{3r} \begin{pmatrix} E1_f(x, y) \\ E2_f(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como la curva Hessiana de f es no singular dentro de Ω , por la ecuación (3.2) también la curva Hessiana de \tilde{f} es no singular dentro de Ω . Ya que $PPE(f) \cap \pi^{-1}(\Omega) = \{(x, y, f(x, y)) \ ; \ (x, y) \in V(H_f) \cap V(E1_f) \cap V(E2_f)\} \cap \pi^{-1}(\Omega)$, por las ecuaciones (3.2) y (3.3) se obtiene el resultado deseado para $s \neq 0$.

Lema 3.18. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada. Si la curva Hessiana de $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es no singular dentro de la cerradura de Ω , entonces para $s \neq 0$ y $r \in \mathbb{Z}$,

i) $(x, y, f(x, y)) \in PPE(f) \cap \pi^{-1}(\Omega)$ si y solo si $(x, y, \tilde{h}_{(0,0,r)}(f)(x, y)) \in PPE(\tilde{h}_{(0,0,r)}(f)) \cap \pi^{-1}(\Omega)$.

ii) $(x, y, f(x, y)) \in PPE(f)^* \cap \pi^{-1}(\Omega)$ si y solo si $(x, y, \tilde{h}_{(0,0,r)}(f)(x, y)) \in PPE(\tilde{h}_{(0,0,r)}(f))^* \cap \pi^{-1}(\Omega)$.

Demostración Un punto suave $p = (q, f(q)) \in \mathbb{R}^3$ es un punto parabólico especial transversal en la gráfica de f si satisface la ecuación (1.5). Por las ecuaciones (3.2) (3.3) tenemos que $\mathbb{R}^2 \simeq \ker dE1_{\tilde{f}}|_q + \ker dE2_{\tilde{f}}|_q$, y por el lema 3.17 se sigue el resultado.

Sea $\tilde{\varphi}_s^{(\alpha,\beta,r)}$ una transformación dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_s^{(\alpha,\beta,r)} : \Gamma_f &\rightarrow \Gamma_{\tilde{h}_{(\alpha,\beta,r)}(f)} \\ (x, y, f(x, y)) &\mapsto \left(s^{-\alpha} x, s^{-\beta} y, \tilde{h}_{(\alpha,\beta,r)}(f) \left(\rho_s^{(-\alpha,-\beta)}(x, y) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Proposición 3.19. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada. Si la curva Hessiana de $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es no singular dentro de la cerradura de Ω , entonces para $s \neq 0$, y $\alpha, \beta, r \in \mathbb{Z}$, la transformación $\tilde{\varphi}_s^{(\alpha,\beta,r)}$ es una correspondencia uno a uno entre los conjuntos $PPE(f) \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPE(\tilde{h}_{(\alpha,\beta,r)}(f)) \cap \pi^{-1}(\rho_s^{(-\alpha,-\beta)}(\Omega))$. Más aún, $\tilde{\varphi}_s^{(\alpha,\beta,r)}$ es una correspondencia uno a uno entre los conjuntos $PPE(f)^* \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPE(\tilde{h}_{(\alpha,\beta,r)}(f))^* \cap \pi^{-1}(\rho_s^{(-\alpha,-\beta)}(\Omega))$.

Demostración Por el Lema 3.17, es suficiente probar que $\tilde{\varphi}_s^{(\alpha,\beta,r)}$ es una correspondencia uno a uno para $r = 0$. Sea $\hat{f}(x, y) := \tilde{h}_{(\alpha,\beta,0)}(f)(x, y) = f(\rho_s^{(\alpha,\beta)}(x, y))$, por la proposición

1.38, el conjunto de puntos parabólicos especiales en la gráfica de \widehat{f} es descrita por el conjunto

$$PPE(\widehat{f}) \cap \pi^{-1}(\Omega) = \{(x, y, \widehat{f}(x, y)) \ ; \ (x, y) \in V(H_{\widehat{f}}) \cap V(E1_{\widehat{f}}) \cap V(E2_{\widehat{f}})\} \cap \pi^{-1}(\Omega),$$

donde

$$\begin{aligned} H_{\widehat{f}}(x, y) &= \det \begin{pmatrix} \widehat{f}_{xx}(x, y) & \widehat{f}_{xy}(x, y) \\ \widehat{f}_{yx}(x, y) & \widehat{f}_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} s^{2\alpha} f_{xx}(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) & s^{\alpha+\beta} f_{xy}(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) \\ s^{\alpha+\beta} f_{yx}(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) & s^{2\beta} f_{yy}(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) \end{pmatrix} \\ &= s^{2(\alpha+\beta)} H_f(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)), \text{ and} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E1_{\widehat{f}}(x, y) \\ E2_{\widehat{f}}(x, y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \widehat{f}_{xx}(x, y) & \widehat{f}_{xy}(x, y) \\ \widehat{f}_{yx}(x, y) & \widehat{f}_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(H_{\widehat{f}})_y(x, y) \\ (H_{\widehat{f}})_x(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s^{2\alpha} f_{xx}(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) & s^{\alpha+\beta} f_{xy}(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) \\ s^{\alpha+\beta} f_{yx}(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) & s^{2\beta} f_{yy}(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s^{2(\alpha+\beta)} (H_f)_y(s^\alpha x, s^\beta y) \\ s^{2(\alpha+\beta)} (H_f)_x(s^\alpha x, s^\beta y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s^{4\alpha+3\beta} E1_f(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) \\ s^{3\alpha+4\beta} E2_f(\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por la ecuación (3.5), la curva Hessiana $V(H_{\widehat{f}})$ de \widehat{f} es no singular dentro de Ω para $s \neq 0$; y por las ecuaciones (3.5) y (3.6), $\widetilde{\varphi}_s^{(\alpha, \beta, r)}$ es una correspondencia uno a uno entre los conjuntos $PPE(f) \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPE(\widetilde{h}_{(\alpha, \beta, r)}(f)) \cap \pi^{-1}(\rho_s^{(-\alpha, -\beta)}(\Omega))$. Además, como para $s \neq 0$, $s^\alpha x = 0$ si y solo si $x=0$, y $s^\beta y = 0$ si y solo si $y=0$, $\widetilde{\varphi}_s^{(\alpha, \beta, r)}$ es una correspondencia uno a uno entre los conjuntos $PPE(f)^* \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPE(\widetilde{h}_{(\alpha, \beta, r)}(f))^* \cap \pi^{-1}(\rho_s^{(-\alpha, -\beta)}(\Omega))$. \square

Proposición 3.20. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada. Si la curva Hessiana de $f \in \mathbb{R}[x, y]$ es no singular dentro de Ω , entonces para $s \neq 0$ y $\alpha, \beta, r \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{\varphi}_s^{(\alpha, \beta, r)}$ es una correspondencia uno a uno entre los conjuntos $PPET(f) \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPET(\widetilde{h}_{(\alpha, \beta, r)}(f)) \cap \pi^{-1}(\rho_s^{(-\alpha, -\beta)}(\Omega))$. Más aún, $\widetilde{\varphi}_s^{(\alpha, \beta, r)}$ es una correspondencia uno a uno entre $PPET(f)^* \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPET(\widetilde{h}_{(\alpha, \beta, r)}(f))^* \cap \pi^{-1}(\rho_s^{(-\alpha, -\beta)}(\Omega))$.

Demostración Por el corolario 3.18, es suficiente probar la proposición para $r = 0$. Sea $\widehat{f}(x, y) := \widetilde{h}_{(\alpha, \beta, 0)}(f)(x, y) = f \circ \rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)$, por la proposición 3.19, es suficiente mostrar que si $\mathbb{R}^2 \simeq \ker dE1_f|_{(x, y)} + \ker dE2_f|_{(x, y)}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |s| < \delta$ tenemos que $\mathbb{R}^2 \simeq \ker dE1_{\widehat{f}}|_{\rho_s^{(-\alpha, -\beta)}(x, y)} + \ker dE2_{\widehat{f}}|_{\rho_s^{(-\alpha, -\beta)}(x, y)}$. Como

$$\begin{aligned} dE1_{\widehat{f}}|_{(x, y)} &= s^{4\alpha+3\beta} dE1_f|_{\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)} \cdot \begin{pmatrix} s^\alpha & 0 \\ 0 & s^\beta \end{pmatrix}, \text{ y} \\ dE2_{\widehat{f}}|_{(x, y)} &= s^{3\alpha+4\beta} dE2_f|_{\rho_s^{(\alpha, \beta)}(x, y)} \cdot \begin{pmatrix} s^\alpha & 0 \\ 0 & s^\beta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces $\ker dEi_{\hat{f}}|_{\rho_s^{(-\alpha, -\beta)}(x, y)}$ es la imagen de $\ker dEi_f|_{(x, y)}$ bajo el isomorfismo definido por la matriz $d\rho_s^{(\alpha, \beta)}|_{(x, y)} = \begin{pmatrix} s^\alpha & 0 \\ 0 & s^\beta \end{pmatrix}$, para $i = 1, 2$. De ahí, si $\mathbb{R}^2 \simeq \ker dE1_f|_{(x, y)} + \ker dE2_f|_{(x, y)}$, entonces $\ker dE1_{\hat{f}}|_{\rho_s^{(-\alpha, -\beta)}(x, y)} + \ker dE2_{\hat{f}}|_{\rho_s^{(-\alpha, -\beta)}(x, y)} \simeq \mathbb{R}^2$.

Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio y sea F_t una perturbación de f . Para $t \in \mathbb{R}$, sea $h_{(\alpha, \beta, r)}$ la transformación

$$\begin{aligned} h_{(\alpha, \beta, r)} : \mathbb{R}[t][x, y] &\rightarrow \mathbb{R}[t][x, y] \\ F_t(x, y) &\mapsto h_{(\alpha, \beta, r)}(F_t)(x, y) = t^r F_t \circ \rho_t^{(\alpha, \beta)}(x, y). \end{aligned}$$

Notemos que $h_{(\alpha, \beta, r)}$ puede ser obtenida al extender la transformación $\tilde{h}_{(\alpha, \beta, r)}$ en 3.1 para polinomios $F_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$ y componiendo con $\varrho : \mathbb{R}[s, t][x, y] \rightarrow \mathbb{R}[t][x, y]$, $P(s, t, x, y) \mapsto P(t, t, x, y)$.

Sea $\varphi_t^{(\alpha, \beta, r)}$ la transformación dada por

$$\begin{aligned} \varphi_t^{(\alpha, \beta, r)} : \Gamma_{F_t} &\rightarrow \Gamma_{h_{(\alpha, \beta, r)}(F_t)} \\ (x, y, F_t(x, y)) &\mapsto \left(t^{-\alpha} x, t^{-\beta} y, h_{(\alpha, \beta, r)}(F_t) \circ \rho_t^{(-\alpha, -\beta)}(x, y) \right). \end{aligned}$$

Notemos que $\varphi_t^{(\alpha, \beta, r)}$ puede ser obtenida al extender la transformación $\tilde{\varphi}_s^{(\alpha, \beta, r)}$ en (3.4) para polinomios $F_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$ y componiendo con $\varrho : \mathbb{R}[s, t][x, y] \rightarrow \mathbb{R}[t][x, y]$, $P(s, t, x, y) \mapsto P(t, t, x, y)$.

Proposición 3.21. *Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio con curva Hessiana no singular y sea $F_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$ una perturbación de f . Entonces, para cualquier región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$, $\varphi_t^{(\alpha, \beta, r)}$ es una correspondencia uno a uno entre los conjuntos*

- i) $PPE(F_t) \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPE(h_{(\alpha, \beta, r)}(F_t)) \cap \pi^{-1}(\rho_t^{(-\alpha, -\beta)}(\Omega))$,
- ii) $PPE(F_t)^* \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPE(h_{(\alpha, \beta, r)}(F_t))^* \cap \pi^{-1}(\rho_t^{(-\alpha, -\beta)}(\Omega))$,
- iii) $PPET(F_t) \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPET(h_{(\alpha, \beta, r)}(F_t)) \cap \pi^{-1}(\rho_t^{(-\alpha, -\beta)}(\Omega))$, y
- iv) $PPET(F_t)^* \cap \pi^{-1}(\Omega)$ y $PPET(h_{(\alpha, \beta, r)}(F_t))^* \cap \pi^{-1}(\rho_t^{(-\alpha, -\beta)}(\Omega))$

para cualquier $(\alpha, \beta, r) \in \mathbb{Z}^3$.

Demostración Como H_f es no singular en la cerradura de Ω , por el corolario 3.10, existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$, H_{F_t} no tiene singularidades dentro de Ω . Por la proposición 3.19, y haciendo $s = t$, tenemos i) y ii). Y, por la proposición 3.20, tenemos iii) y iv). \square

Pegado de Viro para Puntos Parabólicos Especiales Transversales.

En este capítulo recordaremos la técnica del pegado de Oleg Viro, y realizaremos una adaptación de ésta técnica para el estudio de los puntos parabólicos especiales transversales sobre gráficas de polinomios.

Pegado de Oleg Viro

El pegado de Oleg Viro, también conocido como *Patchworking*, es una técnica usada para construir hipersuperficies algebraicas reales no singulares con una topología dada, esta técnica fue introducida por Oleg Viro en la década de los setentas(ver [27]). Oleg Viro usó esta técnica para construir curvas algebraicas de grado 7 para responder el problema 16 de Hilbert para grado 7(ver [25]), para grados mayores o iguales que 8 el problema continúa abierto.

El Patchworking también ha sido usado por E. Brugallé y Benoit Bertrand, para construir ejemplos de superficies algebraicas con curvas parabólicas con $(d-4)^2$ componentes compactas (ver [3]). La técnica del pegado de Viro [26], consiste en lo siguiente. Itenberg y Shustin utilizaron el patchworking en [11], para estudiar la relación entre el número de puntos críticos de T-polinomios.

Recordemos que dado $f = \sum_{\varepsilon(f)} a_{i,j} x^i y^j$ un polinomio, donde $\varepsilon(f) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2; a_{i,j} \neq 0\}$ con $|\varepsilon(f)| < \infty$, el conjunto $\varepsilon(f)$ también es conocido como el soporte de f .

Para cualquier subconjunto $A \subset \varepsilon(f)$, definimos la *restricción de f a A* por

$$f^A(x, y) := \sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} x^i y^j.$$

Sean f_1, \dots, f_s polinomios reales en dos variables con

1. $Int\Delta(f_i) \cap Int\Delta(f_j) = \emptyset$ para $i \neq j$, y $f_i^{\Delta(f_i) \cap \Delta(f_j)} = f_j^{\Delta(f_i) \cap \Delta(f_j)}$.

$$2. \Delta = \bigcup_{i=1}^s \Delta(f_i) \text{ convexo.}$$

Entonces, existe un polinomio f con $\Delta(f) = \Delta$ tal que $f^{\Delta(f_i)} = f_i$ para $i = 1, \dots, s$.

Definición 4.1. Sea $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa tal que:

1. Las restricciones $\lambda|_{\Delta(f_i)}$ son lineales.
2. Si la restricción de λ a un conjunto abierto es lineal, entonces el conjunto abierto está contenido en algún $\Delta(f_i)$.
3. $\lambda(\Delta \cap \mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}$.

Decimos que λ *convexifica* la partición $\{\Delta(f_1), \dots, \Delta(f_s)\}$ de Δ .

Definición 4.2. Si $f = \sum_{w \in \varepsilon(f)} a_w x^{w_1} y^{w_2}$, con $w = (w_1, w_2)$, entonces definimos

$$b_t = \sum_{w \in \varepsilon(f)} a_w x^{w_1} y^{w_2} t^{\lambda(w)},$$

y decimos que los polinomios b_t son obtenidos por el *pegado de los polinomios* f_1, \dots, f_s inducido por λ .

Definición 4.3. Un polinomio en dos variables es llamado periféricamente no degenerado si para cada lado l de su poliedro de Newton, la curva $V(f^l)$ es no singular.

Definición 4.4. Un polinomio en dos variables es llamado completamente no degenerado si es periféricamente no degenerado y la curva $V(f)$ es no singular.

Teorema 4.5. *Teorema del Patchworking* [26] Si f_1, \dots, f_s son polinomios completamente no degenerados que satisfacen todas las condiciones anteriores, y b_t son obtenidos por los pegados de f_1, \dots, f_s inducidos por alguna función λ que convexifica al conjunto $\{\Delta(f_1), \dots, \Delta(f_s)\}$, entonces existe $t_0 > 0$ tal que para cualquier $t \in (0, t_0]$ el polinomio b_t es completamente no degenerado y su curva $V(b_t)$ es obtenida por la unión de las curvas de $V(f_1), \dots, V(f_s)$.

Sea f un polinomio que satisface las condiciones del teorema 4.5. Si denotamos por $CC(f)^*$ el conjunto de componentes conexas compactas de $V(f) \setminus \{xy = 0\}$ y definimos

$$CC(f, \tau)^* := \bigcup_{E \in \text{dimax}(\tau)} \{(\mathcal{C}, E) \ ; \ \mathcal{C} \in CC(f^E)^*\}.$$

donde $\text{dimax}(\tau)$ denota al conjunto de los poliedros de dimensión máxima que pertenecen a τ .

La construcción de Oleg Viro, implica que si $b_t \in \mathbb{R}[t][x, y]$ es el polinomio pegado de $\{f^E; E \in \text{dimax}(\tau)\}$ inducido por λ , entonces existe $\delta > 0$ tal que existe una inclusión

$$CC(f, \tau)^* \hookrightarrow CC(b_t)^*$$

para $0 < |t| < \delta$.

Más adelante extenderemos este resultado para puntos parabólicos especiales transversales sobre gráficas de polinomios. El siguiente ejemplo nos ilustra como funciona el patchworking en polinomios de una variable.

Ejemplo 4.6. Sean los polinomios $f_1 = 12 + 4x$, $f_2 = 4x - 15x^2$, y $f_3 = -15x^2 - 5x^3 + 3x^4 + x^5$. Notemos que $\Delta(f_1) = [0, 1]$, $\Delta(f_2) = [1, 2]$ y $\Delta(f_3) = [2, 3, 4, 5]$. Tomando el polinomio $f = 12 + 4x - 15x^2 - 5x^3 + 3x^4 + x^5$ cuyo soporte es $\Delta(f) = [0, 5]$ y la función convexa λ definida como:

$$\lambda(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i \leq 1, \\ i - 1 & \text{si } 1 \leq i \leq 2. \\ 2i - 3 & \text{si } 2 \leq i \leq 5. \end{cases}$$

El polinomio pegado de f_1, f_2, f_3 inducido por λ es:

$$b_t = 12 + 4x - 15tx^2 - 5t^3x^3 + 3t^5x^4 + t^7x^5$$

Cuando $t \rightarrow 0$, $b_t \approx 12 + 4x \Rightarrow b_t$ tiene una raíz simple distinta de cero cerca de $x = -3$.

Si tomamos la transformación $b_{1t} = tb_t(t^{-1}x) = t^3x^5 + 3t^2x^4 - 5tx^3 - 15x^2 + 4x + 12t$.

Cuando $t \rightarrow 0$, $b_{1t} \approx -15x^2 + 4x \Rightarrow b_t$ tiene una raíz simple distinta de cero cerca de $x = \frac{4t^{-1}}{15}$.

Con la transformación $b_{2t} = t^2b_{1t}(t^{-1}x) = t^3b_t(t^{-2}x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4tx + 12t^3$.

Cuando $t \rightarrow 0$, $b_{2t} \approx x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 \Rightarrow b_t$ tiene tres raíces simples distintas de cero: cerca $x = -3t^{-2}$, $x = -\sqrt{5}t^{-2}$ y $x = \sqrt{5}t^{-2}$.

El teorema del Patchworking garantiza que para $t > 0$ suficientemente pequeño, existe b_t tal que tiene 5 raíces simples distintas de cero.

Notemos que O. Viro utiliza transformaciones especiales estudiadas en la sección anterior llamadas *Cuasihomotecias*:

$$h_{(\alpha, \beta, r)} : \mathbb{R}[t, x, y] \rightarrow \mathbb{R}[t, x, y] \\ G_t(x, y) \mapsto t^r G_t \circ (t^\alpha x, t^\beta y).$$

Recordemos que dado $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional y τ una subdivisión poliedral de Δ . Decimos que τ es *convexa* si existe una función lineal por pedazos $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, que toma valores enteros sobre los vértices de la subdivisión poliedral τ , cuya restricción a los poliedros de τ es lineal; y con la propiedad de que no es lineal en la unión de cualesquiera dos poliedros distintos contenidos en τ . Diremos en este caso que λ *induce la subdivisión poliedral convexa* τ . Estas definiciones son equivalentes a las condiciones solicitadas en el teorema 4.5.

Definición 4.7. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional, dada una subdivisión poliedral convexa τ de Δ inducida por la función λ , la gráfica Γ_λ forma un politopo llamado el *politopo compacto con subdivisión poliedral inducida por λ* . Nos referiremos al conjunto de caras de dimensión máxima que yacen en Γ_λ por $T(\lambda)$.

La proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sobre el plano xy induce una biyección entre las caras de Γ_λ y los poliedros en τ . La inversa de esta biyección será denotada por μ , esto es,

$$\mu : \tau \rightarrow \Gamma_\lambda, E \mapsto \pi^{-1}(E) \cap \Gamma_\lambda.$$

Definición 4.8. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional y sea $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función convexa que induce a τ , una subdivisión poliedral convexa de Δ . Dado un polinomio $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \Delta} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{R}[x, y]$ cuyo soporte es Δ , el polinomio $b_t(x, y) := \sum_{(i,j) \in \Delta} a_{i,j} t^{\lambda(i,j)} x^i y^j \in \mathbb{R}[t][x, y]$, será llamado el *polinomio pegado de f* , es decir, el polinomio obtenido del pegado de $\{f^E; E \in \text{dimax}(\tau)\}$ inducido por λ .

Definición 4.9. Dado $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional con una subdivisión poliedral convexa τ , inducida por una función convexa λ . Si $\tilde{S} \subset \Gamma_\lambda$, la restricción de b_t a \tilde{S} es dada por

$$b_t^{\tilde{S}} := \sum_{(i,j, \lambda(i,j)) \in \tilde{S}} a_{i,j} t^{\lambda(i,j)} x^i y^j.$$

Dada $\tilde{E} \in T(\lambda)$ y $E \in \tau$ tal que $\pi(\tilde{E}) = E$, entonces $b_t^{\tilde{E}}$ es el pegado de f^E inducido por $\lambda|_E$.

Definición 4.10. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional y sea τ una subdivisión poliedral convexa de Δ inducida por $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \Delta} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio con soporte Δ y sea b_t el polinomio pegado de f inducido por λ . Dado $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, denotaremos por $b_t^{[r]}$ la restricción de b_t a $\lambda^{-1}(r)$, es decir,

$$b_t^{[r]}(x, y) := t^r \sum_{\{(i,j) \in \Delta ; \lambda(i,j)=r\}} a_{i,j} x^i y^j.$$

Considerando los elementos de la definición anterior, con $r := \min_{(i,j) \in \Delta} \{\lambda(i,j)\}$. Tomando $\tilde{E} := \{(a,b,c) \in \Gamma_\lambda \ ; \ c = r\}$, lo cual es una cara de $T(\lambda)$; si $E = \pi(\tilde{E})$ tenemos que

$$b_t^{\tilde{E}} = b_t^{[r]} = t^r f^{\pi(\tilde{E})} = t^r f^E.$$

Pegado de puntos parabólicos especiales transversales

En esta sección realizaremos una adaptación de la técnica del pegado de Oleg Viro para el estudio de los puntos parabólicos especiales transversales que yacen en gráficas de polinomios.

Sea τ la subdivisión poliedral convexa de $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ inducida por $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio con soporte Δ . Dado $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, la función

$$\tilde{\lambda} : (i, j) \mapsto \lambda(i, j) + \alpha i + \beta j$$

es también una función convexa que induce a τ . Sea b_t el polinomio pegado de f inducido por λ y sea \tilde{b}_t el polinomio pegado inducido por $\tilde{\lambda}$, entonces

$$\tilde{b}_t = h_{(\alpha, \beta, 0)}(b_t) = t^r b_t(t^\alpha x, t^\beta y) \quad (4.1)$$

para algunos valores enteros $r \in \mathbb{Z}$.

Proposición 4.11. Sea τ la subdivisión poliedral convexa de $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ inducida por $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio con soporte Δ y sea b_t el polinomio pegado de f inducido por λ . Si el vector $(\alpha, \beta, 1) \in \mathbb{Z}^3$ es ortogonal a la cara $\tilde{E} \in T(\lambda)$, entonces el polinomio pegado \tilde{b}_t inducido por $\tilde{\lambda}(i, j) = \lambda(i, j) + i\alpha + j\beta$ satisface que $h_{(\alpha, \beta, 0)}(b_t^{\tilde{E}}) = \tilde{b}_t^{[r]}$ para alguna constante $r \in \mathbb{Z}$.

Demostración Es consecuencia inmediata de (4.1) y el lema 2.9.

Teorema 4.12. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional y sea τ la subdivisión poliedral convexa de Δ inducida por $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio con soporte Δ y sea b_t el polinomio pegado de f inducido por λ . Si el vector $(\alpha, \beta, 1) \in \mathbb{Z}^3$ es ortogonal a la cara $\tilde{E} \in T(\lambda)$ y $\gamma = -\min\{(\alpha, \beta, 1) \cdot v \ ; \ v \in T(\lambda)\}$ entonces $h_{(\alpha, \beta, \gamma)}(b_t^{\tilde{E}})$ es una perturbación de $f^{\pi(\tilde{E})}$.

Demostración Sea $f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \Delta} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{R}[x, y]$. Por la Proposición 4.11, el polinomio pegado \tilde{b}_t inducido por $\tilde{\lambda}(i, j) = \lambda(i, j) + i\alpha + j\beta$ satisface que $h_{(\alpha, \beta, 0)}(b_t^{\tilde{E}}) = \tilde{b}_t^{[r]}$

para $r = \min\{(\alpha, \beta, 1) \cdot v \ ; \ v \in T(\lambda)\} \in \mathbb{Z}$. El polinomio

$$h_{(\alpha, \beta, -r)}(b_t)(x, y) = t^{-r} \tilde{b}_t(t^\alpha x, t^\beta y) = \sum_{(i, j) \in \Delta} a_{i, j} t^{\lambda(i, j) + i\alpha + j\beta - r} x^i y^j \in \mathbb{R}[t][x, y],$$

es el polinomio pegado \widehat{b}_t inducido por la función convexa

$$\widehat{\lambda} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \widehat{\lambda}(i, j) := \lambda(i, j) + i\alpha + j\beta - r.$$

En particular, $h_{(\alpha, \beta, -r)}(b_t^{\tilde{E}}) = \widehat{b}_t^{[0]}$. Expresando \widehat{b}_t como la suma finita de los conjuntos de nivel $\widehat{\lambda}^{-1}(r_0), \dots, \widehat{\lambda}^{-1}(r_m)$ de $\widehat{\lambda}$ que corresponden a los valores $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_m$, tenemos que $\widehat{b}_t(x, y) = f^{\pi(\tilde{E})} + t\varphi_t$, con $\varphi_t(x, y) = \sum_{l=1}^m a_{i, j} t^{r_l - 1} \widehat{b}_t^{[r_l]}(x, y) \in \mathbb{R}[t][x, y]$. Por lo tanto, $h_{(\alpha, \beta, -r)}(b_t^{\tilde{E}})$ es una perturbación de $f^{\pi(\tilde{E})}$. □

Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional y sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio con soporte Δ . Sea τ una subdivisión poliedral convexa de Δ inducida por $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Denotamos por $PPET(f, \tau)^*$ al conjunto de todos los pares (E, p) , con $E \in \tau$ y $p \in PPET(f^E)^*$, esto es,

$$PPET(f, \tau)^* := \bigcup_{E \in \tau} \{(E, p) \ ; \ p \in PPET(f^E)^*\}.$$

Teorema 4.13. (*Teorema de pegado para puntos parabólicos especiales transversales*) Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional y sea τ la subdivisión poliedral convexa de Δ inducida por $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio de grado $d \geq 3$, con poliedro de Newton Δ . Si b_t es el polinomio pegado de $\{f^E; E \in \text{dimax}(\tau)\}$ inducido por λ , entonces existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$, Existe una inclusión

$$\varphi_t : PPET(f, \text{dimax})^* \hookrightarrow PPET(b_t)^*.$$

Demostración Sea $(\alpha, \beta, 1) \in \mathbb{Z}^3$ el vector ortogonal a la cara $\tilde{E} \in T(\lambda)$ con $E = \pi(\tilde{E})$, y sea $r := -\min\{(\alpha, \beta, 1) \cdot v \ ; \ v \in T(\lambda)\} \in \mathbb{Z}$. Entonces, por el teorema 4.12, el polinomio $h_{(\alpha, \beta, r)}(b_t)(x, y)$ define una perturbación de f^E . Así, para cada cara E en τ , definiendo $C_E := \{\pi(PPET(f^E)^*)\}$, podemos elegir $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña tal que, para cualquier $q, q' \in C_E$, tenemos que

$$D(q, \varepsilon), D(q', \varepsilon) \subset (\mathbb{R}^*)^2 \text{ y } D(q, \varepsilon) \cap D(q', \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Por el corolario 3.14, existe $\delta_1 > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta_1$ existe una inclusión

$$\psi_t^E : PPET(f^E)^* \hookrightarrow PPET(h_{(\alpha, \beta, r)}(b_t))^*$$

que satisface que $\pi(\psi_t^E(p)) \in D(\pi(p), \varepsilon)$. Así, para cada $q \in C_E$, tenemos que

$$\pi \left(PPET(h_{(\alpha, \beta, r)}(b_t)) \right)^* \cap D(q, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Así, por la proposición 3.21, existe $\delta_2 > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta_2$, resulta que

$$\left(\varphi_t^{(\alpha, \beta, r)} \right)^{-1} : PPET(h_{(\alpha, \beta, r)}(b_t))^* \rightarrow PPET(b_t)^*$$

es una biyección. Como, para $0 < |t| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tenemos la inclusión

$$\varphi_t^E : PPET(f^E)^* \xrightarrow{\psi_t^E} PPET(h_{(\alpha, \beta, r)}(b_t))^* \xrightarrow{(\varphi_t^{(\alpha, \beta, r)})^{-1}} PPET(b_t)^*.$$

Por la proposición 3.16, existe $\delta_3 > 0$, tal que, para $|t| < \delta_3$, $\text{Im}(\varphi_t^E) \cap \text{Im}(\varphi_t^{E'}) = \emptyset$ con $E \neq E'$. Por lo tanto, para $0 < |t| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, obtenemos la inclusión

$$\varphi_t : PPET(f, \text{dimax})^* \hookrightarrow PPET(b_t)^*.$$

□

Corolario 4.14. Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ un poliedro racional y sea τ la subdivisión poliedral convexa de Δ inducida por una función convexa $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sea $f \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio poliedro de Newton Δ . Si b_t es el polinomio pegado de $\{f^E; E \in \text{dimax}(\tau)\}$ inducido por λ , entonces existe $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$, tenemos que

$$\sum_{E \in \text{dimax}(\tau)} |PPET(f^E)^*| \leq |PPET(b_t)^*|.$$

Demostración Es consecuencia inmediata del teorema 4.13.

Aplicación del Corolario 4.14

En este capítulo daremos uso al teorema 4.14 para construir un ejemplo de familias de polinomios en dos variables de grado d con al menos $(d-4)(2d-9)$ puntos parabólicos especiales transversales en sus gráficas para $5 \leq d \leq 10000$.

En el año 2002, Adriana Ortiz en [18] construye una familia de polinomios con gráficas que son superficies genéricas que tienen exactamente $d(d-2)$ puntos parabólicos especiales. En ese mismo trabajo hace la conjetura siguiente.

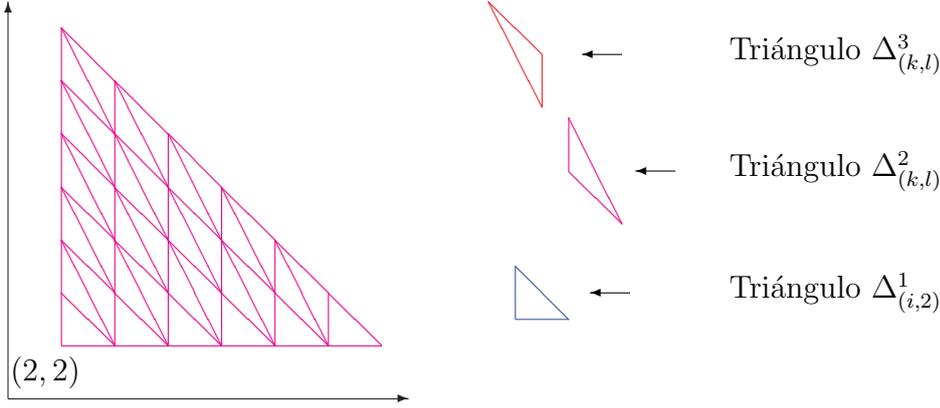
Conjetura 5.1. (*Conjetura 2, [18]*) *Si la gráfica de un polinomio real de grado d en dos variables es una superficie genérica, entonces ésta tiene a lo más $d(d-2)$ puntos parabólicos especiales.*

En [9], L. I. Hernández-Martínez, A. Ortiz. y F. Sánchez-Bringas, dan un polinomio de grado 4 cuya gráfica posee una curva parabólica compacta con 10 puntos parabólicos especiales, es decir, rebasa la cota de $d(d-2)$ de la conjetura por 2 puntos parabólicos especiales. Sin embargo, $d(d-2) + 2 \leq (d-4)(2d-9)$ para $d \geq 13$, así, mediante el uso del corolario 4.14 nos acercamos más a realización de la cota $(d-2)(5d-12)$ de puntos parabólicos especiales sobre gráficas de polinomios de grado d dada en [8].

Denotaremos por

- $\Delta_d := \text{Conv}(\{(2, 2), (d-2, 2), (2, d-2)\})$,
- $\Delta_{(i,2)}^1 := \text{Conv}(\{(i, 2), (i+1, 2), (i, 3)\})$,
- $\Delta_{(k,l)}^2 := \text{Conv}(\{(k+1, l), (k, l+1), (k, l+2)\})$, y
- $\Delta_{(k,l)}^3 := \text{Conv}(\{(k+1, l), (k, l+2), (k+1, l+1)\})$

para $d, i, k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.



Por el corolario 2.11 la subdivisión poliedral τ de Δ_d obtenida al dividir Δ_d en $\Delta^1_{(i,2)}, \Delta^2_{(k,l)}, \Delta^3_{(k,l)}$ con $i \in \{2, 3, \dots, d-3\}$, $k \in \{2, 3, \dots, d-4\}$ y $l \in \{2, \dots, d-2-k\}$, es convexa. El poliedro Δ_d es la unión de $d-4$ triángulos del tipo $\Delta^1_{(i,2)}$ y $\frac{(d-4)^2-(d-4)}{2} = \frac{(d-5)(d-4)}{2}$ triángulos del tipo $\Delta^2_{(k,l)}$ y $\Delta^3_{(k,l)}$, respectivamente. Esta subdivisión es inducida por una función convexa $\lambda : \Delta_d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que ha sido usada en varios trabajos, por ejemplo en [3] y [15].

Sea

$$f(x, y) := x^2 y^2 \sum_{i+j=d-4} x^i y^j,$$

notemos que $\Delta(f) = \Delta_d$. Las restricciones de f a los triángulos de τ están dadas por:

$$P^1_{(i,2)} := f^{\Delta^1_{(i,2)}}, \quad P^2_{(k,l)} := f^{\Delta^2_{(k,l)}} \text{ and } P^3_{(k,l)} := f^{\Delta^3_{(k,l)}}.$$

Lema 5.2. Para $2 \leq i \leq 10000$, las curvas $V(E1_{P^1_{(i,2)}})$ y $V(E2_{P^1_{(i,2)}})$ se intersecan transversalmente. Para $2 \leq k, l \leq 10,000$, las curvas $V(E1_{P^r_{(k,l)}})$ y $V(E2_{P^r_{(k,l)}})$ se intersecan transversalmente para $r = 2, 3$.

Demostración Sean $\Delta^1 := \Delta\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$, $\Delta^2 := \Delta\{(1,0), (0,1), (0,2)\}$, y $\Delta^3 := \Delta\{(1,0), (0,2), (1,1)\}$. Con esta notación $\Delta^r_{(k,l)} = (k, l) + \Delta^r$.

Como hemos visto, el poliedro de Newton polytope de $P^r_{(k,l)}$ es $(k, l) + \Delta^r$. Entonces, los poliedros de Newton de $E1_{P^r_{(k,l)}}$ y $E2_{P^r_{(k,l)}}$ están contenidos en $(3k-4, 3l-3) + 3\Delta^r$ y $(3k-3, 3l-4) + 3\Delta^r$. Entonces, por el teorema de Bernstein [2] el número de soluciones en $(\mathbb{C}^*)^2$ es a lo más 9.

Haciendo uso del software Mathematica [28] es posible ver que el sistema de ecuaciones $E1_{P^r_{(k,l)}} = E2_{P^r_{(k,l)}} = 0$, tiene 9 soluciones complejas en $(\mathbb{C}^*)^2$, para $2 \leq k, l \leq 10000$. Por lo tanto, las soluciones tienen multiplicidad uno y de ahí, las curvas $V(E1_{P^r_{(k,l)}})$ y $V(E2_{P^r_{(k,l)}})$ se intersecan trasnversalmente. □

Lema 5.3. Para $2 \leq i \leq 10000$, la curva $V\left(H_{P_{(i,2)}^1}\right)$ es no singular en $(\mathbb{R}^*)^2$. Para $2 \leq k, l \leq 10,000$, las curvas $V\left(H_{P_{(k,l)}^r}\right)$ son no singulares en $(\mathbb{R}^*)^2$ para $r = 2, 3$.

Demostración Usando el software Mathematica [28] podemos ver que el polinomio Hessiano de $P_{(i,2)}^1$ es $H_{P_{(i,2)}^1}(x, y) = 4x^2 + i^2(2 + 2x^2 + 4y + 3y^2 + 4x(1 + y)) + i(2 + 6x^2 + 8y + 6y^2 + 8x(1 + y))$. Además, obtenemos hay soluciones reales para el sistema $H_{P_{(i,2)}^1} = \left(H_{P_{(i,2)}^1}\right)_x = \left(H_{P_{(i,2)}^1}\right)_y = 0$ para $2 \leq i \leq 10,000$. Así, la curva $V\left(H_{P_{(i,2)}^1}\right)$ es no singular.

Análogamente, se obtiene que las curvas Hessianas $V\left(H_{P_{(k,l)}^2}\right)$ y $V\left(H_{P_{(k,l)}^3}\right)$ son no singulares en $(\mathbb{R}^*)^2$ para $2 \leq k, l \leq 10,000$.

Aquí $H_{P_{(k,l)}^2}(x, y) = -l^2x^2 - k^2(l(x + y + y^2)^2 + y^2(1 - 2x + 2y + 2y^2)) - k(2y^2(-x + y + y^2) + l^2(x + y + y^2)^2 + l(x^2 + y^2 + 4y^3 + 3y^4))$, y

$H_{P_{(k,l)}^3}(x, y) = -(kly^2 + (1+k)lx(1+y) + y(x+kx+2ky))^2 + k((-1+k)y^2 + (1+k)x(1+y))(lx(-1+y) + 2y^2 + 3ly^2 + l^2(x+xy+y^2))$.

Por los lemas 5.2 y 5.3, es posible encontrar los puntos parabólicos especiales transversales de estas restricciones de f como las raíces reales en común de los polinomios descritos en la proposición 1.38. Con el software Mathematica [28] se obtienen éstas raíces, y se tiene que $|TSP(P_{(i,2)}^1)^*| = 1$ para $2 \leq i \leq 10,000$, $|TSP(P_{(k,l)}^2)^*| = 1$ y $|TSP(P_{(k,l)}^3)^*| = 3$ para $2 \leq k, l \leq 10,000$.

En particular, para $5 \leq d \leq 10000$, el corolario 4.14 garantiza que el número de puntos parabólicos especiales transversales en la gráfica del polinomio $b_t \in \mathbb{R}[x, y]$ obtenido del pegado $\{f^E; E \in \text{dimax}(\tau)\}$ inducido por λ satisfaces que

$$|TSP(b_t)^*| \geq 1(d-4) + 4 \left(\frac{(d-5)(d-4)}{2} \right) = (d-4)(2d-9),$$

para valores suficientemente pequeños de $t \neq 0$, para $5 \leq d \leq 10000$.

Esta construcción se resume en el siguiente teorema.

Teorema 5.4. Para cualquier entero d con $5 \leq d \leq 10,000$, existe un polinomio real en dos variables de grado d con al menos $(d-4)(2d-9)$ puntos parabólicos especiales en su gráfica.

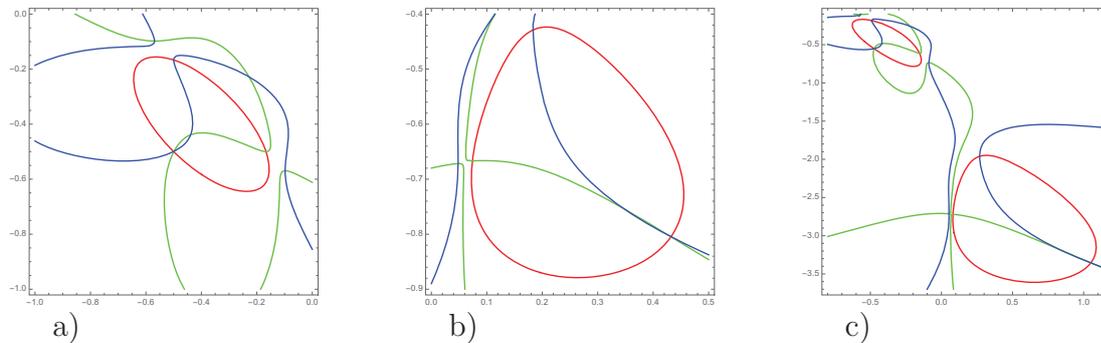
Ejemplo 5.5. Sea $f(x, y) := x^2y^2(1+x+y+y^2)$, sea $\Delta := \text{Conv}(\{(2, 2), (3, 2), (2, 3), (2, 4)\})$ el poliedro de Newton asociado a f , y sea $\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ la función convexa definida como sigue

$$\lambda(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i + j \leq 5, \\ i + j - 5 & \text{if } i + j > 5. \end{cases}$$

La subdivisión poliedral convexa de Δ inducida por λ , es

$\tau := \{ \{(2, 2)\}, \{(3, 2)\}, \{(2, 3)\}, \{(2, 4)\}, \text{Conv}(\{(2, 2), (3, 2)\}), \text{Conv}(\{(2, 2), (2, 3)\}),$
 $\text{Conv}(\{(2, 3), (2, 4)\}), \text{Conv}(\{(2, 3), (3, 2)\}), \text{Conv}(\{(2, 4), (3, 2)\}), \text{Conv}(\{(2, 2), (3, 2), (2, 3)\}),$
 $\text{Conv}(\{(3, 2), (2, 3), (2, 4)\}) \}.$

Denotaremos $\Delta^1 := \text{Conv}(\{(2, 2), (3, 2), (2, 3)\})$ y $\Delta^2 := \text{Conv}(\{(3, 2), (2, 3), (2, 4)\})$. El polinomio pegado de f inducido por λ es $b_t = x^2y^2(1 + x + y + ty^2)$. Para $0 < |t| < 0.3$, tenemos las siguientes figuras obtenidas mediante el software Mathematica [28].



En las figuras a), b) y c) se muestran las curvas $V(E1_{f\Delta_1}), V(E1_{f\Delta_2})$ y $V(E1_{b_t})$ en color verde; las curvas $V(E2_{f\Delta_1}), V(E2_{f\Delta_2})$ y $V(E2_{b_t})$ en color azul, y en color rojo se muestran las curvas $V(H_{f\Delta_1}), V(H_{f\Delta_2})$ y $V(H_{b_t})$.

Por la proposición 1.38 sabemos que los puntos que pertenecen a la intersección de estas tres curvas en cada inciso son los puntos parabólicos de las gráficas de nuestros polinomios.

Geometría Tropical

En este capítulo, recordamos algunos conceptos de la Geometría tropical, como son algunos teoremas esenciales en la teoría de intersección de curvas tropicales, además obtendremos resultados tales como; el teorema 6.23 y la proposición 6.30.

Álgebra Tropical

Cuando se usa geometría tropical se tienen muchas herramientas de combinatoria que podemos usar. Para conocerlas empezamos con el Álgebra tropical, también conocida como min-plus o max-plus, en este trabajo usaremos max-plus.

Definimos el conjunto de los números tropicales denotado por $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, con las siguientes operaciones, llamadas *adición tropical* y *multiplicación tropical*, respectivamente:

$$\oplus : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \quad \odot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$$

$$(x, y) \mapsto \max\{x, y\} \quad (x, y) \mapsto x + y$$

Donde $+$ es la suma usual de los números reales, y

$$x \oplus (-\infty) = \max\{x, -\infty\} = x, \forall x \in \mathbb{T},$$

$$x \odot (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty, \forall x \in \mathbb{T},$$

$$a^0 = 0, \forall a \in \mathbb{T}.$$

Notemos que $-\infty$ es el neutro aditivo y 0 es el neutro multiplicativo.

Los números tropicales forman un semi-campo $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ (llamado *semi-campo tropical*), es decir, se cumplen todos los axiomas de un campo excepto la existencia de un inverso aditivo. El adjetivo *Tropical* fue acuñado por colegas franceses del Dr. Imre Simon, para hacer referencia al trabajo de este.

Como $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ es un semi-campo tenemos la noción natural de *polinomios tropicales*, es decir polinomios sobre \mathbb{T} . Tales polinomios,

$$P(x) = \bigoplus_{\alpha \in \varepsilon(P)} a_\alpha \odot x^\alpha, \text{ donde } \varepsilon(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \ ; \ a_\alpha \neq -\infty\} \text{ tal que } |\varepsilon(P)| < \infty,$$

inducen una función lineal a trozos

$$P : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}$$

$$x \mapsto \max\{a_\alpha + \langle x, \alpha \rangle\}$$

donde $x \in \mathbb{T}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Así $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \odot \dots \odot x_n^{\alpha_n}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto punto estándar sobre \mathbb{R}^n .

Definición 6.1. Sea $P(x) = \bigoplus_{\alpha \in \varepsilon(P)} a_\alpha \odot x^\alpha$ un polinomio tropical, denotamos por $a_\alpha \odot x^\alpha$ al monomio de P correspondiente al exponente α , y definimos el *grado* de P como

$$\deg(P) := \max_{\alpha \in \varepsilon(P)} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad ; \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right\}.$$

El grado del polinomio ‘cero’ es $-\infty$.

Dado un polinomio tropical $P \in \mathbb{T}[x]$, le asociamos un politopo, llamado *Politopo de Newton* el cual es la envolvente convexa de $\varepsilon(P)$, y lo denotamos por

$$\Delta(P) = \text{Conv}\{\varepsilon(P)\}.$$

Decimos que P es *genérico* de grado d si $\Delta(P)$ es el triángulo con vértices en $(d, 0)$, $(0, d)$ y el origen.

Definición 6.2. Sea $P \in \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos el *poliedro asociado* a x respecto de P , como la envolvente convexa del conjunto de $\alpha \in \varepsilon(P)$ tales que $P(x) = a_\alpha \odot x^\alpha$.

$$\Delta^x(P) := \text{Conv}\{\alpha \in \varepsilon(P) \quad ; \quad P(x) = a_\alpha \odot x^\alpha\}.$$

Y la *Celda* o *Célula* de x como la cerradura topológica del conjunto

$$\mathcal{C}^x := \{z \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \Delta^z(P) = \Delta^x(P)\}.$$

Sea $P \in \mathbb{T}[x]$, $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos la *subdivisión poliedral dual* de P como

$$\tau_P = \{\Delta^x(P) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^n\},$$

donde $\Delta^x(P)$ es el poliedro asociado a x . Estos poliedros son de dimensión $0 \leq i \leq n$

Algunos de los resultados conocidos e importantes y que serán de gran utilidad para nuestro propósito son los siguientes.

Teorema 6.3. [10] Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $P(x) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \odot x^\alpha \in \mathbb{T}[x]$ y τ_P la subdivisión dual asociada a P . Entonces, τ_P es una subdivisión poliedral convexa de $\Delta(P)$.

Dado un espacio vectorial V , llamamos *espacio afín* a un subconjunto A de V tal que para cualquier $a \in A$, $A - a = \{x - a \ ; \ x \in A\}$ es un subespacio vectorial de V . Así, la *dimensión* de A es $\dim(A - a)$.

Definición 6.4. Sea $B = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto de puntos. El *espacio afín generado* por B , denotado $Aff(B)$, es el conjunto de puntos de la forma

$$\sum_{k=1}^m s_k v_k,$$

con $s_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{k=1}^m s_k = 1.$$

Dos subespacios afines A y B son ortogonales $A \perp B$, si dado $b_0 \in B$, existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall b \in B, \forall a \in A$,

$$\langle a, b_0 - b \rangle = c.$$

Hipersuperficies Tropicales

Definición 6.5. Sea $P \in \mathbb{T}[x]$. Definimos la *Hipersuperficie Tropical* S_P asociada a P como el lugar de no diferenciabilidad de P , es decir, el conjunto de los puntos $x \in \mathbb{T}^n$ tales que los puntos $(x, P(x))$ son los puntos quiebre de la gráfica de P . Y se describe como

$$S_P := \{x \in \mathbb{T}^n \ ; \ \exists \alpha, \beta \in \varepsilon(P), P(x) = a_\alpha \odot x^\alpha = a_\beta \odot x^\beta, \text{ con } \alpha \neq \beta\}.$$

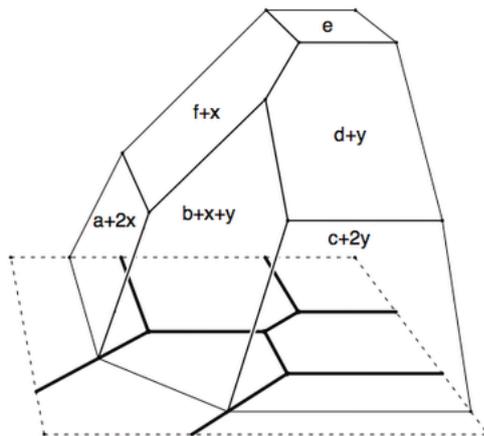


Figure 6.1: Gráfica e hipersuperficie tropical de $P(x, y)$.

Definición 6.6. El *peso* de una arista E de una hipersuperficie tropical S_P está definido como el número de puntos de coordenadas enteras menos 1, que están contenidos en dicha arista.

La *curva tropical* definida por $P(x, y)$ es el conjunto S_P equipada con esta función peso sobre sus aristas.

Teorema 6.7. [10] Sea $P(x) \in \mathbb{T}[x]$, S_P la hipersuperficie Tropical de P y τ_P su subdivisión dual. Entonces, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\text{Aff}(\Delta^x) \perp \text{Aff}(\mathcal{C}_x)$, y $\dim(\text{Aff}(\Delta^x)) + \dim(\text{Aff}(\mathcal{C}_x)) = n$, donde $\text{Aff}(\Delta^x)$ y $\text{Aff}(\mathcal{C}_x)$ son los espacios afines generados por Δ^x y \mathcal{C}_x respectivamente.

Teorema 6.8. [10] Sea Δ un poliedro n -dimensional con vértices en $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ y τ una subdivisión poliedral convexa de Δ . Entonces, existe un polinomio tropical $P \in \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\Delta(P) = \Delta$ y $\tau_P = \tau$.

Intersección de Curvas Tropicales

Definición 6.9. Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{T}[x, y]$ dos polinomios tropicales que definen las curvas tropicales C_{P_1} y C_{P_2} en \mathbb{R}^2 . Entonces el polinomio $P_3(x, y) = "P_1(x, y)P_2(x, y)"$ define una curva tropical C_{P_3} . Un vértice v de C_{P_3} el cual está en el conjunto de intersección $C_{P_1} \cap C_{P_2}$ es llamado un *punto de intersección tropical* de C_{P_1} y C_{P_2} . El conjunto de puntos de intersección tropical es denotado por $C_{P_1} \cap_{\mathbb{T}} C_{P_2}$.

Ahora asignamos una multiplicidad $(C_{P_1} \circ_{\mathbb{T}} C_{P_2})_v$ para cada punto de intersección tropical v de C_{P_1} y C_{P_2} como sigue

$$(C_{P_1} \circ_{\mathbb{T}} C_{P_2})_v := \frac{1}{2}(\text{Area}(\Delta^v) - \delta^v)$$

donde

- $\delta^v = 0$ si v es un punto de intersección aislado de una arista de C_{P_1} y otra de C_{P_2} ;
- $\delta^v = \text{Area}(\Delta^{v'})$ si v es un vértice v' de C_{P_1} (respectivamente C_{P_2}) pero no de C_{P_2} (respectivamente C_{P_1});
- $\delta^v = \text{Area}(\Delta^{v'}) + \text{Area}(\Delta^{v''})$ si v es un vértice de C_{P_1} , pero también un vértice v'' de C_{P_2} .

Una componente de $C_{P_1} \cap C_{P_2}$ es una componente conexa de este conjunto. Tal componente E tiene una multiplicidad definida como

$$(C_{P_1} \circ_{\mathbb{T}} C_{P_2})_v := \sum_{v \in C_{P_1} \cap_{\mathbb{T}, E} C_{P_2}} (C_{P_1} \circ_{\mathbb{T}} C_{P_2})_v$$

donde $C_{P_1} \cap_{\mathbb{T}, E} C_{P_2}$ es el conjunto de puntos de intersección tropical de C_{P_1} y C_{P_2} contenidos en E .

Definición 6.10. Sean B y C conjuntos en \mathbb{R}^n . Definimos la *Suma Minkowski* de B y C como:

$$B \boxplus C := \{b + c \ ; \ b \in B, c \in C\}.$$

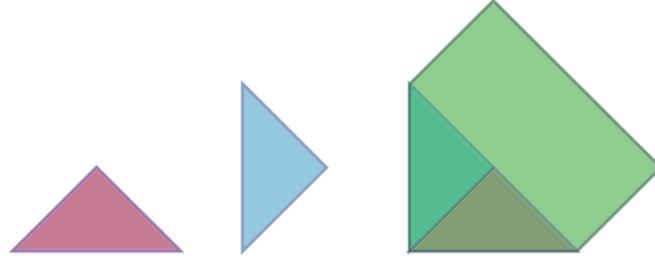


Figure 6.2: Suma de Minkowski.

Observación 6.11. El poliedro de Newton del producto dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}^n$, es la suma de Minkowski de los poliedros de Newton de los polinomios dados $\Delta(P)$ y $\Delta(Q)$.

$$\Delta(P \odot Q) = \Delta(P) \boxplus \Delta(Q)$$

Teorema 6.12. (Bernstein)[10] Sean P_1 y P_2 dos polinomios complejos en dos variables, entonces el número de soluciones de $P_1(x, y) = P_2(x, y) = 0$ en $(\mathbb{C}^*)^2$ contando sus multiplicidades es el Área Mixta:

$$\mathcal{M}(\Delta(P_1), \Delta(P_2)), \text{ donde } \mathcal{M}(\Delta(P_1), \Delta(P_2)) = \text{Area}(\Delta(P_1) \boxplus \Delta(P_2)) - \text{Area}(\Delta(P_1)) - \text{Area}(\Delta(P_2)).$$

Siendo \boxplus la suma de Minkowski.

Teorema 6.13. (Bézout)[7] Sean C_1, C_2 dos curvas complejas proyectivas lisas de grado d_1 y d_2 , respectivamente. Entonces, la intersección $C_1 \cap C_2$ tiene exactamente $d_1 d_2$ puntos, contando multiplicidades.

Proposición 6.14. Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{T}[x, y]$. La curva tropical C_{P_3} del producto $P_1 P_2$ es la unión de las curvas tropicales C_{P_1} y C_{P_2} asociadas a P_1 y P_2 respectivamente, esto es

$$C_{P_3} := C_{P_1} \cup C_{P_2}.$$

Teorema 6.15. (*Bernstein Tropical*) [10] Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{T}[x, y]$ dos polinomios de grados d_1 y d_2 respectivamente. Supongamos que sus curvas tropicales C_{P_1} y C_{P_2} se intersecan transversalmente. Entonces,

$$\sum_{v \in C_{P_1} \cap C_{P_2}} \mu(v) = \mathcal{M}(\Delta(P_1), \Delta(P_2)),$$

donde $\mathcal{M}(\Delta(P_1), \Delta(P_2))$ es el Área mixta de $\Delta(P_1)$ y $\Delta(P_2)$ contando a cada punto con su multiplicidad de intersección.

Teorema 6.16. (*Bézout Tropical*) [10] Sean $P_1, P_2 \in \mathbb{T}[x, y]$ dos polinomios genéricos de grado d_1 y d_2 respectivamente. Supongamos que sus curvas tropicales C_{P_1} y C_{P_2} se intersecan transversalmente. Entonces, la suma de las multiplicidades de los puntos en $C_{P_1} \cap C_{P_2}$ es exactamente $d_1 d_2$.

Definición 6.17. Sea K un campo. Definimos el *Campo de Series de Puiseux generalizadas* como

$$\mathbb{K} := \left\{ \phi(t) = \sum_{r \in R} a_r t^r, a_r \in K, r \in \mathbb{R}, t \in U \right\},$$

donde R es un conjunto bien ordenado. Es decir, todo subconjunto de R tiene un primer elemento.

Definición 6.18. Sea K un campo y $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Decimos que v es una *Valoración no Arquimediana* si satisface las siguientes propiedades:

- $v(x) = \infty \iff x = 0$
- $v(xy) = v(x) + v(y), \forall x, y \in K$, and
- $v(x + y) \geq \inf\{v(x), v(y)\}$.

El campo K es llamado *campo valorado no Arquimediano*.

Por ejemplo, si $K = \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{Q}^*$, x puede ser descompuesto como $x = p^t x_0$ para algún primo $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, donde $t \in \mathbb{Z}$ tal que ni el numerador ni el denominador de x_0 es divisible por p . Entonces $v(x) \equiv v_p(x) \equiv t$ es una valoración no Arquimediana.

El campo \mathbb{K} tiene una valoración no Arquimediana natural definida como sigue

$$val : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$0 \mapsto -\infty$$

$$\sum_{r \in R} \alpha_r t^r \neq 0 \mapsto -\min\{r \mid \alpha_r \neq 0\}.$$

Esta valoración se extiende naturalmente a un mapeo $Val : \mathbb{K}^n \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$ por la evaluación val coordenada a coordenada, es decir $Val(z_1, \dots, z_n) = (val(z_1), \dots, val(z_n))$. Si $X \subset (\mathbb{K}^*)^n$ es una variedad algebraica, entonces $Val(X) \subset \mathbb{R}^n$ es llamada la *Amiba no Arquimediana* de X .

Sea X una variedad algebraica irreducible de dimensión m . En este caso, Bieri y Groves probaron que $Val(X)$ es un complejo poliedral racional finito F de *dimensión pura* m .

Las caras de F de dimensión máxima son llamadas *caretas*. Dada una careta de F , le asignamos un número entero positivo $w(F)$, llamado *el peso* de F , como sigue: tomamos un punto (p_1, \dots, p_n) en el interior relativo de F , y elegimos una base (e_1, \dots, e_n) de $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ tal que (e_1, \dots, e_m) es una base de la dirección de F ; denotamos por $Y_F \subset (\mathbb{K}^*)^n$ la translación multiplicativa de $\Phi_{(e_{m+1}, \dots, e_n)}((\mathbb{K}^*)^n)$ hasta $(t^{p_1}, \dots, t^{p_n})$, y definimos $w(F)$ como la suma de los puntos de intersección de X y Y_F contado con multiplicidades con valoración (p_1, \dots, p_n) .

Definición 6.19. La amiba no arquimediana de X acompañada con la función peso sobre sus caretas es llamada la *Tropicalización* de X , y es denotada por $Trop(X)$.

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva tropical y sea v un vértice de C . Sean e_1, \dots, e_l las aristas de C adyacentes a v . Como C es una gráfica racional, cada arista e_i tiene una dirección entera primitiva. Si además le damos la orientación de e_i definida por este vector que apunta hacia afuera de v , entonces este vector entero primitivo es único, denotamos a este vector como u_{v, e_i} .

Proposición 6.20. (*Condición de Balance*) Para cualquier vértice v , tenemos que

$$\sum_{i=1}^l w(e_i) u_{v, e_i} = 0.$$

Si C es una curva tropical en \mathbb{R}^n , cualquier arista acotada e tiene una *longitud* $l(e)$ definida como sigue:

$$l(e) = \frac{\|v_1 v_2\|}{w(e) \|u_{v_1, e}\|}$$

Teorema 6.21. (*Kapranov*)[16] Sea $P(z) = \sum a_i z^i$ un polinomio sobre \mathbb{K} . Si definimos $P_{trop}(x) = \bigoplus val(a_i) \odot x^i$, entonces

$$Trop(V(P)) = V(P_{trop}).$$

Modificaciones Tropicales

La tropicalización de una variedad algebraica X en $(\mathbb{K}^*)^n$ definida por un ideal I depende únicamente de los términos de primer orden de los elementos de I . Para una hipersu-

perficie esto se sigue inmediatamente del teorema de Kapranov. Tan áspero como puede verse el proceso de tropicalización guarda pistas de una cantidad no despreciable de información acerca de las variedades algebraicas originales, por ejemplo las multiplicidades de intersección. Sin embargo, existe información que depende más que solo de los términos de primer orden que pueden perderse cuando se pasa de X a $Trop(X)$. Las modificaciones tropicales, introducidas por Mikhalkin, pueden ser vistas como un refinamiento del proceso de tropicalización, y nos permite recuperar información acerca de X sensible a los términos de orden mayor.

Definición 6.22. Sea $P(z)$ un polinomio en n variables sobre \mathbb{K} y denotemos por $Y = (\mathbb{K}^*)^n \setminus V(P)$. Este polinomio define el siguiente encaje de Y en $(\mathbb{K}^*)^{n+1}$

$$\begin{aligned}\Phi : Y &\rightarrow (\mathbb{K}^*)^{n+1} \\ z &\mapsto (z, P(z)).\end{aligned}$$

La variedad tropical $Mod_P(Y) = Trop(\Phi(Y))$ es llamada la *modificación tropical* de $(\mathbb{K}^*)^n$ definida por $P(z)$.

Teorema 6.23. Sea $f \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ de grado ≥ 3 , sea $S := V(z - f(x, y))$ la gráfica de f , con curva parabólica $Par(S)$ y curva Hessiana $V(H_f)$. Entonces,

$$Trop(Par(S)) = Mod_f(V(H_f)).$$

Demostración. Sea S la superficie definida por la representación paramétrica

$$\Gamma : (\mathbb{K}^*)^2 \setminus V(f) \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)),$$

donde f es una función continua sobre $(\mathbb{K}^*)^2$, que encaja $(\mathbb{K}^*)^2 \setminus V(f)$ en $(\mathbb{K}^*)^3$. Sea $Mod_f((\mathbb{K}^*)^2 \setminus V(f)) = Trop(\Gamma((\mathbb{K}^*)^2 \setminus V(f)))$, la modificación tropical del $(\mathbb{K}^*)^2$ respecto de f . Notemos que: $\Gamma(V(H_f)) = Par(S)$ ya que $V(H_f) = \pi(Par(S))$,

y así

$$Mod_f(V(H_f)) = Trop(\Gamma(V(H_f))) = Trop(Par(S)).$$

□

Definimos $\pi_{n+1}^{\mathbb{K}} : (\mathbb{K}^*)^{n+1} \rightarrow (\mathbb{K}^*)^n$ (respectivamente $\pi_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$) a la proyección que olvida la última coordenada, entonces

$$Trop \circ \pi_{n+1}^{\mathbb{K}} = \pi_{n+1} \circ Trop. \tag{6.1}$$

Definición 6.24. Sea C una curva tropical en \mathbb{R}^3 . Llamamos *final vertical* a toda arista no cotada de C con dirección $(0, 0, -1)$.

Sea P_1 y P_2 dos polinomios que definen las curvas X_1 y X_2 respectivamente en $(\mathbb{K}^*)^2$, tal que X_1 y X_2 no tienen componentes irreducibles en común. Denotaremos por C' a la modificación tropical de C_1 respecto a P_2 y por $C_i = \text{Trop}(X_i)$.

Lema 6.25. [4] *Si e es un final vertical de C'_1 , entonces $\pi_{C'_1}(e) \in \text{Trop}(X_1 \cap X_2)$. Inversamente, si $p \in \text{Trop}(X_1 \cap X_2)$, entonces $\pi_{C'_1}^{-1}(p)$ contiene un final vertical e de C'_1 , y*

$$w(e) = \sum_{q \in X_1 \cap X_2 \cap \text{Val}^{-1}(p)} (X_1 \circ X_2)_q.$$

Proposición 6.26. [4] *Sea E una componente de $C_1 \cap C_2$, y sea m la suma de los pesos de todos los finales verticales en $\pi_{C'_1}^{-1}(E)$. Entonces*

$$m \leq (C_1 \circ_{\mathbb{T}} C_2)_E$$

y se cumple la igualdad si E es compacto.

Lema 6.27. [4] *Sea p un punto sobre una arista e de C_1 tal que $\pi_{C'_1}^{-1}(p)$ no continene ningún vértice de C'_1 , y sean e_1, \dots, e_l las aristas de C'_1 que contienen un punto de $\pi_{C'_1}^{-1}(p)$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^l w(e_i) \leq w(e).$$

Corolario 6.28. [4] *Si C_1 es una curva tropical no singular con ninguna componente contenida en C_2 , entonces C'_1 está completamente determinada por C_1, C_2 , y $\text{Trop}(X_1 \cap X_2)$. Más precisamente tenemos*

1. $\pi_{C'_1}$ es uno a uno sobre $C_1 \setminus \text{Trop}(X_1 \cap X_2)$;
2. Para cualquier $p \in \text{Trop}(X_1 \cap X_2)$, el conjunto $\pi_{C'_1}^{-1}(p)$ es un final vertical de peso $w(p)$.
3. Cualquier arista e de C'_1 que no sea un final vertical es de peso 1.

Definición 6.29. Sea \mathbb{K} un campo de característica cero, sea C una variedad tropical en \mathbb{R}^n , y sea X una subvariedad de $(\mathbb{K}^*)^n$. Decimos que X realiza a C , si $C = \text{Trop}(X)$. Si $X = V(P)$, para algún polinomio $P(z)$, decimos que $P(z)$ realiza C .

La Geometría Tropical es una herramienta especial de la geometría algebraica, imaginemos a la geometría tropical como una máquina de tomografías que usan en medicina para estudiar el cuerpo humano (en este caso el cuerpo es la geometría algebraica), lo que vemos en una tomografía es la representación en imágenes de partes del cuerpo humano.

Al igual que las tomografías no nos sirven para ver todos los problemas del cuerpo humano, la geometría tropical no se puede aplicar en algunos problemas de geometría algebraica. Sin embargo, existen problemas donde resulta una herramienta muy útil, por ejemplo: en Parametrizaciones, Teoría de Intersección, Geometría Enumerativa, para probar la existencia de objetos algebraicos reales con algunas propiedades, y si se quiere construirlos la geometría tropical es una muy buena herramienta. Un ejemplo de ello, es la construcción que dieron E. Brugalé y L. López de Medrano en [4], para una curva algebraica plana de grado d con $d(d - 2)$ puntos de inflexión, siendo ésta la cantidad máxima posible de puntos de inflexión en una curva algebraica plana de grado d .

Proposición 6.30. Sea $P(x, y) = \bigoplus_{i, j \in \mathbb{A}^1 \mathbb{C} \mathbb{Z}} a_{ij} \odot x^i \odot y^j$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Denotemos por C_1 la hipersuperficie tropical de $P(x, y)$, y sea S la modificación tropical del espacio \mathbb{R}^2 respecto de C_1 , entonces las caras verticales heredan los pesos de las caras de C_1 y el resto de las caras de S tienen peso 1.

Demostración. Sea F una cara de C_1 , y sean $a_{i_0, j_0} \odot x^{i_0} \odot y^{j_0}$ y $a_{i_1, j_1} \odot x^{i_1} \odot y^{j_1}$ los monomios que definen la célula dual del poliedro de Newton de P .

Sea F_0 la cara vértical de S que se proyecta en F , sea F_1 la cara de S que se proyecta en la dominancia de $a_{i_1, j_1} \odot x^{i_1} \odot y^{j_1}$ y sea F_2 la cara que se proyecta en la dominancia de $a_{i_0, j_0} \odot x^{i_0} \odot y^{j_0}$.

Recordemos que por definición el peso de F es $m.c.d.(|i_0 - i_1|, |j_0 - j_1|) = k$, sea \bar{n}_0 el vector normal de F_0 , así $\bar{n}_0 = (i_0 - i_1, j_0 - j_1, 0)$ y sea \bar{n}_2 es el vector normal de F_2 , y sea \bar{n}_1 el vector normal de F_1 .

Observemos que F_2 es el plano $z = i_0x + j_0y$ esto implica que $\bar{n}_2 = (-i_0, -j_0, 1)$, y F_1 es el plano $z = i_1x + j_1y$ esto implica que $\bar{n}_1 = (i_1, j_1, -1)$. Además $w(\bar{n}_1) = 1 = w(\bar{n}_2)$ y $w(\bar{n}_0) = k$, y por último, notemos que $\bar{n}_0 + \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = 0$, es decir, se cumple la condición de equilibrio.

□

Bibliography

- [1] V. I. Arnold. Remarks on the parabolic curves on surfaces and on the higher-dimensional möbius-sturm theory. *Functional Analysis and Its Applications*, 31(4):227–239, 1997.
- [2] D. N. Bernstein. The numbers of roots of system of equations. *Funct. Anal. Appl.*, 9, 1975.
- [3] B. Bertand and E. Brugallé. On the number of connected components of the parabolic curve. *Comptes Rendus Mathématique*, 348(5):287–289, 2010.
- [4] E. Brugallé and L. López de Medrano. Inflection points of real and tropical plane curves. *Journal of Singularities*, 2012.
- [5] Angelito Camacho Calderón and Adriana Ortiz Rodríguez. On the realization problem of real algebraic plane curves as hessian curves. *Journal of Geometry*, 105:495–506, 2014.
- [6] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. pages 212–242.
- [7] C. G. Gibson. *Elementary geometry of algebraic curves: an undergraduate introduction*. Cambridge University Press, 1998.
- [8] L. I. Hernández-Martínez, A. Ortiz-Rodríguez, and F. Sánchez-Bringas. On the affine geometry of the graph of a real polynomial. *Journal of dynamical and control systems*, 18(4):455–465, 2012.
- [9] L. I. Hernández-Martínez, A. Ortiz-Rodríguez, and F. Sánchez-Bringas. On the hessian geometry of a real polynomial hyperbolic near infinity. *Advances in Geometry*, 13(2):277–292, 2013.
- [10] I. Itenberg, G. Mikhalkin, and E. I. Shustin. *Tropical algebraic geometry*, volume 35. Springer Science and Business Media, 2009.
- [11] I. Itenberg and E. Shustin. Critical points of real polynomials and topology of real algebraic t-surfaces. *Geometriae Dedicata*, 101(1):61–91, Oct 2003.

- [12] V. Kharlamov and F. Sottile. Maximally inflected real rational curves. *Mosc. Math. J.*, 2015:5436–5455, 2015.
- [13] V.S. Kulikov. Calculation of singularities of an embedding of a generic algebraic surface in projective space \mathbb{P}^3 . *Moscow Polygraphic Institute*, 17:176–186, 1982.
- [14] E. E. Landis. Tangential singularities. *Funct. Anal. Appl.*, 1981.
- [15] L. López de Medrano. *Courbe totale des hypersurfaces algébriques réelles et patchwork*. PhD thesis, 2006.
- [16] Kapranov M. Amoebas over non-archimedean fields. 2006, 2006.
- [17] J. Reyes O. Palmas. *Curso de Geometría Diferencial*. Las prensas de Ciencias, 2005.
- [18] A. Ortiz-Rodríguez. Quelques aspects sur la géométrie des surfaces algébriques réelles. *Bulletin des Sciences mathématiques*, 127(2):149–177, 2003.
- [19] A. Ortiz-Rodríguez and F. Sottile. Real hessian curves. *arXiv preprint math/0504040*, 2005.
- [20] O. A. Platonova. Singularities of the mutual disposition of a surface and a line. *Russian Mathematical Surveys*, 36(1):248–249, 1981.
- [21] J. Reyes. R. Becerril, D. Jardón. *Cálculo Diferencial en varias variables*. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa., 2002.
- [22] T. Banchoff. R. Thom. Sur les points paraboliques des surfaces. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 77:475, 1970.
- [23] Uribe-Vargas Ricardo. A new projective invariant for swallowtails and godrons (cusps of gauss), and global theorems on the flecnodal curve. *arXiv:math/0412484*, 77:184–192, 2003.
- [24] G. Salmon. *A treatise on the analytic geometry of three dimensions*. Hodges, Smith, and Company, 1865.
- [25] O. Viro. Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7. *Lectures Notes in Math.*, pages 187–200, 1984.
- [26] O. Y. Viro. Patchworking real algebraic varieties. *Uppsala University. Department of Mathematics*, 1994.
- [27] Oleg Viro. Construction multicomponent real algebraic surfaces. *Doklady AN SSSR*, pages 231–252, 1979.

[28] Wolfram Research, Inc. *Mathematica, Version 10.4*. Champaign, IL, 2016.