



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Modelo y análisis de
vibraciones de una máquina
herramienta paralela**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Luna Díaz Angel Ivan

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Ricardo Yáñez-Valdez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolló en las instalaciones del Centro de Ingeniería Avanzada de la División de Ingeniería Mecánica e Industrial de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México bajo la dirección del Dr. Ricardo Yáñez-Valdez. Proyecto realizado gracias al programa UNAM-IA105717 “Diseño, construcción y análisis de vibraciones de una máquina herramienta basada en un mecanismo paralelo traslacional de tres grados de libertad”.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por formarme académica y profesionalmente a lo largo de más de diez años, por permitirme representarla en el extranjero y darme la oportunidad de conocer a tantas y tan maravillosas personas.

A mi asesor Ricardo Yáñez-Valdez, por toda su motivación, constante apoyo y dedicación, tanto en el aula como en el desarrollo del presente trabajo.

Al profesor Francisco Cuenca, por su pasión dentro del aula y por despertar en mí uno de mis más grandes gustos: la dinámica de multicuerpos y vibraciones mecánicas.

Al profesor Miguel Angel Hernández Gallegos, por fortalecer en mí la costumbre del trabajo bien hecho.

Al profesor Óscar Vega Roldán por ser un gran ejemplo e inspiración de excelencia profesional y gran sentido humano.

A mi padre, por siempre mostrarme el camino correcto para lograr mis metas, por ser una de mis mayores figuras a seguir, por todas tus enseñanzas, apoyo y amor.

A mi madre, por cultivar en mí la determinación de siempre buscar ser mejor en todo sentido, por siempre enseñarme con el ejemplo, por todas tus enseñanzas, apoyo y amor.

A mi hermano, por siempre apoyarme y saber hacerme sonreír en cualquier momento, por todas tus enseñanzas, apoyo y amor.

A mis abuelas Elvia y Consuelo, por su inmenso amor que nos demuestran a mi hermano y a mí día con día, por ser siempre una fuente de alegrías y un gran ejemplo a seguir.

A mis amigos Diego y Hugo, por siempre estar a mi lado y apoyarme en cada momento y decisión en mi vida, por ser mis hermanos no de sangre, pero sí de corazón.

A mi novia Chío, por tener palabras de aliento y motivación en todo momento, por tantos momentos tan bellos y por todo tu amor.

A Diana, mi amiga por más de 20 años, por siempre escucharme y aconsejarme, por toda tu alegría, cariño, enseñanzas y apoyo.

A mi abuelo, por ser el más grande ejemplo de que la vida debe disfrutarse y plantar siempre una sonrisa a la adversidad.

A mis primos Rodrigo, Zaida, Pepe, Alan y Axel por ser un gran ejemplo de fortaleza, amor y unión, por tantas alegrías y aprendizajes a su lado.

A mis padrinos Edmedt y Agustín, por todo su amor y por ser un enorme ejemplo de esfuerzo, así como a mi tío Nemesio por su incomparable alegría, y mis primos Edmedt, Scarlett y Roger por todo su cariño y motivación que me brindan desde siempre.

A mis tíos José Luis y Elvira, por todo su amor y por ser un gran ejemplo de dedicación, y a mi prima Albaluz, por ser siempre un ejemplo a seguir para mí.

A mi familia, a mis incontables primos, tíos y sobrinos que me han apoyado por toda mi vida, que me han brindado su cariño en cada momento y me motivan a seguir adelante siempre.

A los profesores Hiroki Mori y Sawae Yoshinori por contagiarme el gusto por las vibraciones mecánicas y por ayudarme a comprender una cultura tan distinta a la mía.

A mis amigos y compañeros en ASA por ser grandes ejemplos a seguir, por su distintiva alegría y por todas sus enseñanzas.

A todos mis amigos y compañeros de la carrera y de idiomas, por enseñarme tanto y permitirme conocer a cada uno de ustedes.

Contenido

Introducción.....	xi
Definición del problema.....	xii
Justificación.....	xiii
Objetivo general.....	xiii
Objetivos específicos.....	xiii
Hipótesis.....	xiv
1 ANTECEDENTES.....	1
1.1 Procesos de maquinado.....	1
1.1.1 Contexto e importancia de los procesos de maquinado.....	1
1.1.2 Maquinado por corte.....	4
1.1.3 Fresado.....	7
1.2 Mecanismos paralelos.....	9
1.2.1 Definición y características de las configuraciones paralelas.....	9
1.2.2 Configuraciones paralelas en máquinas herramienta.....	10
1.3 Vibraciones mecánicas.....	11
1.3.1 Importancia del estudio de las vibraciones mecánicas.....	11
1.3.2 Vibraciones en máquinas herramienta.....	12
2 MARCO TEÓRICO.....	14
2.1 Fresado.....	14
2.1.1 Fuerza de corte en fresado periférico.....	14
2.1.1.1 Variación de las fuerzas de corte a lo largo del tiempo.....	17
2.1.2 Fuerza de corte en fresado en las caras.....	19
2.2 Dinámica.....	22

2.2.1	Ecuación de movimiento de Lagrange	22
2.3	Vibraciones mecánicas	25
2.3.1	Clasificación de vibraciones.....	25
2.3.2	Procedimiento de análisis de vibraciones.....	27
2.3.3	Elementos de rigidez	28
2.3.4	Elementos de disipación	29
2.3.5	Elementos de masa o inercia	30
2.3.6	Respuesta bajo una fuerza armónica	30
2.3.6.1	Frecuencia natural	31
2.3.6.2	Amortiguamiento crítico	32
2.3.6.3	Factor de amortiguamiento y ratio de frecuencia.....	33
2.3.7	Método de Euler para resolución de ecuaciones diferenciales.....	34
2.3.8	Simulación por elemento finito para obtención de frecuencias naturales	35
3	MODELADO Y ANÁLISIS DE LA MÁQUINA HERRAMIENTA	41
3.1	Modelado de un sistema vibratorio de una máquina herramienta paralela.....	43
3.1.1	Propuesta de bases separadas	45
3.1.1.1	Sistema de un grado de libertad	45
3.1.1.2	Sistema de tres grados de libertad.....	47
3.1.2	Propuesta de base conjunta.....	49
3.1.2.1	Sistema de dos grados de libertad	49
3.2	Determinación de los elementos de rigidez y disipación del sistema vibratorio ...	52
3.2.1	Propuesta de bases separadas	53
3.2.1.1	Sistema de un grado de libertad	53
3.2.1.2	Sistema de tres grados de libertad.....	58

3.2.2	Propuesta de base conjunta.....	61
3.2.2.1	Sistema de dos grados de libertad	61
3.3	Solución de las ecuaciones de movimiento	62
3.3.1	Propuesta de bases separadas	63
3.3.1.1	Sistema de un grado de libertad	63
3.3.1.2	Sistema de tres grados de libertad.....	63
3.3.2	Propuesta de base conjunta.....	64
3.3.2.1	Sistema de dos grados de libertad	64
3.4	Determinación del tamaño de paso	65
3.5	Cálculo de la fuerza de corte.....	68
4	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	69
4.1	Resultados	69
4.1.1	Propuesta de bases separadas	69
4.1.1.1	Sistema de un grado de libertad	69
4.1.1.2	Sistema de tres grados de libertad.....	71
4.1.2	Propuesta de base conjunta.....	73
4.1.2.1	Sistema de dos grados de libertad	73
4.2	Análisis de resultados	75
	CONCLUSIONES.....	77
	Trabajos futuros.....	80
	Referencias	81
	Anexos	83
1.	Productos generados.....	83

Índice de figuras

Figura 1: Descripción gráfica de maquinado.....	1
Figura 2: Clasificación de los procesos de maquinado.....	4
Figura 3: Descripción de las partes del maquinado por corte.....	4
Figura 4: Maquinado por corte.	5
Figura 5: Modelos de plano de corte y zona de corte.	6
Figura 6: Up-milling (a) y down-milling (b).	8
Figura 7: Tipos de fresado en las caras.....	9
Figura 8: Configuración geométrica de un robot delta (a) y una de sus versiones industriales: FlexPicker IRB 340 (b).	10
Figura 9: Elementos de la formación de viruta en el fresado periférico.....	15
Figura 10: Variación de la fuerza de corte a lo largo del tiempo en up-milling con un diente a la vez.	18
Figura 11: Variación de la fuerza de corte a lo largo del tiempo en up-milling con empalme de dos dientes; fuerza por diente(arriba), fuerza total (abajo).	18
Figura 12: Elementos de la formación de viruta en el fresado en las caras; vista superior (a), vistas laterales del diente con $\chi \neq 90^\circ$ (b) y con $\chi = 90^\circ$ (c).	19
Figura 13: Variación de la fuerza de corte a lo largo del tiempo en face-milling con un diente a la vez.	21
Figura 14: Variación de la fuerza de corte a lo largo del tiempo en face-milling con empalme de dos dientes.	21
Figura 15: Fuerza de corte total a lo largo del tiempo en face-milling con empalme de dos dientes.	22
Figura 16: Resolución de las fuerzas de corte en un fresado en las caras (vista superior)...	22

Figura 17: Excitaciones determinística y aleatoria.....	26
Figura 18: Motocicleta con motociclista: sistema físico y modelo matemático.....	28
Figura 19: Sistema masa-resorte-amortiguador de 1-GDL.	31
Figura 20: Frecuencia natural para el primer modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.....	37
Figura 21: Frecuencia natural para el segundo modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.	37
Figura 22: Frecuencia natural para el tercer modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.....	38
Figura 23: Frecuencia natural para el tercer modo normal de vibración en rotación de una viga sin apoyo.....	38
Figura 24: Frecuencia natural para el cuarto modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.....	38
Figura 25: Frecuencia natural para el cuarto modo normal de vibración en reducción de una viga sin apoyo.....	39
Figura 26: Frecuencia natural para el quinto modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.....	39
Figura 27: Frecuencia natural para el quinto modo normal de vibración en rotación de una viga sin apoyo.....	39
Figura 28: Propuesta de PKM.	41
Figura 29: Comparación de propuestas de diseño para la PKM.	42
Figura 30: (a) Máquina fresadora; (b) modelo vibratorio; (c) diagrama de cuerpo libre de los elementos inerciales.....	43
Figura 31: Fresadora horizontal: sistema físico (a y modelado (b) con descomposición de fuerzas (c) y equivalencia (d).	44
Figura 32: Modelo de una herramienta y pieza de trabajo durante un proceso de corte.	45

Figura 33: Modelo vibratorio de 1-GDL para PKM (abajo) con asignación de colores (arriba).	46
Figura 34: Modelo vibratorio de 3-GDL para la PKM (abajo) con asignación de colores (arriba).	47
Figura 35: Modelo vibratorio de 2-GDL para la PKM (abajo) con asignación de colores (arriba).	50
Figura 36: Sistema de 1-GDL.....	54
Figura 37: Mallado de subsistemas del sistema de 1-GDL; (a) pieza de trabajo; (b) herramienta.	55
Figura 38: Frecuencia natural del subsistema herramienta para 1-GDL; unidades en milímetros.	56
Figura 39: Frecuencia natural del subsistema pieza de trabajo para 1-GDL; unidades en milímetros.	57
Figura 40: Sistema de 3-GDL.....	58
Figura 41: Frecuencia natural del subsistema base de herramienta para 3-GDL; unidades en milímetros.	59
Figura 42: Frecuencia natural del subsistema herramienta para 3-GDL; unidades en milímetros.	59
Figura 43: Frecuencia natural del subsistema base de pieza de trabajo para 3-GDL; unidades en milímetros.	60
Figura 44: Frecuencia natural del subsistema pieza de trabajo para 3-GDL; unidades en milímetros.	60
Figura 45: Gráfica de espacio fásico con $h=0.1$	66
Figura 46: Gráfica de espacio fásico con $h=0.01$	66
Figura 47: Gráfica de espacio fásico con $h=0.001$	67
Figura 48: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 1-GDL en 200 [s].	69

Figura 49: Respuesta de velocidades para el sistema de 1-GDL en 200 [s].....	70
Figura 50: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 1-GDL en 1000 [s].	70
Figura 51: Respuesta de velocidades para el sistema de 1-GDL en 1000 [s].....	71
Figura 52: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 3-GDL en 200 [s].	71
Figura 53: Respuesta de velocidades para el sistema de 3-GDL en 200 [s].....	72
Figura 54: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 3-GDL en 1000 [s].	72
Figura 55: Respuesta de velocidades para el sistema de 3-GDL en 1000 [s].....	73
Figura 56: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 2-GDL en 200 [s].	73
Figura 57: Respuesta de velocidades para el sistema de 2-GDL en 200 [s].....	74
Figura 58: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 2-GDL en 1000 [s].	74
Figura 59: Respuesta de velocidades para el sistema de 2-GDL en 1000 [s].....	75
Figura 60: Propuesta de diseño con mejor desempeño general (bases separadas).....	78

Introducción

Un modelo es una representación de las principales características y propiedades de un sistema físico, el cual se emplea para describir y, en algunos casos, predecir su comportamiento, todo ello con la finalidad de estudiarlo [1].

A partir del modelo o los modelos se pueden realizar los análisis necesarios para lograr la comprensión del comportamiento del mismo. Este análisis representa una parte crucial en la ingeniería de diseño de cualquier producto. El proceso de diseño repercute directamente en la calidad y costos inherentes al producto, por lo que es de suma importancia realizar un buen proceso de diseño.

La forma de llevar a cabo un modelo y su representación matemática dependerá completamente tanto del tipo de sistema que se esté estudiando, como de la naturaleza del mismo. De igual forma, la información que se desee obtener a partir del análisis a realizar determinará la manera en la que se modelará el sistema. Normalmente se recurren a recursos computacionales para poder procesar de una forma más rápida y sencilla los cálculos matemáticos que se requieran realizar durante las etapas de análisis.

Aunado a lo anteriormente mencionado, la teoría de vibraciones mecánicas aporta un bagaje de conocimientos de suma utilidad en el terreno del modelado, puesto que casi cualquier sistema dinámico puede ser reducido a un sistema vibratorio para su análisis, a partir del cual se podrá estudiar el comportamiento que presentará ante las solicitaciones a las que será sometido dicho sistema. El modelo planteado, entre más se aproxime a la realidad, mayor complejidad tendrá la representación matemática de este y, por lo tanto, se requerirá de una mayor cantidad de conocimientos, de variables a considerar y de recursos matemáticos, así como de una mayor capacidad de cómputo para poder procesar los cálculos requeridos.

En cuanto a las máquinas herramienta, resultan ser un muy buen ejemplo de sistemas que requieren modelarse y analizarse dentro del terreno de las vibraciones mecánicas, puesto que las tareas que desempeñan conllevan la interacción con fuerzas que fluctúan a lo largo de su operación, las cuales pueden generar vibraciones indeseadas. El análisis de este tipo de máquinas a partir de la teoría de vibraciones mecánicas buscará garantizar la estabilidad dinámica de estas.

En este orden de ideas, las características de las máquinas herramienta convencionales y su comportamiento ya es algo muy resuelto en la actualidad. Sin embargo, realizar una propuesta de una configuración distinta a las convencionales, como es el caso de una configuración paralela, requiere de un análisis detallado y minucioso debido al hecho mismo de que aún no es común la aplicación de este tipo de configuraciones a máquinas herramienta.

El presente documento está dividido en cuatro capítulos, los cuales abordan en primera instancia los antecedentes y el marco teórico necesarios para una mejor comprensión del tema abordado. Posteriormente, se lleva a cabo el análisis dinámico de la máquina herramienta planteada, así como las simulaciones por elemento finito de esta en software de CAD (por sus siglas en inglés *Computer-Aided Design*) (NX) necesarias para obtener información inherente al sistema analizado. Finalmente se presentan los resultados y conclusiones derivados de dichos análisis y simulaciones.

Definición del problema

El planteamiento de una configuración no convencional e innovadora para una máquina herramienta tipo fresadora representa la necesidad de llevar a cabo una gran cantidad de análisis, cálculos y procesos iterativos de diseño, puesto que no existe información sobre dicha configuración en específico.

Una de las problemáticas a resolver es la estabilidad dinámica de la máquina, la cual se debe analizar a partir de la aplicación de la teoría de vibraciones mecánicas, considerando y evaluando las vibraciones forzada y regenerativa, las cuales son propensas a presentarse en máquinas herramienta. Este análisis permitirá obtener parámetros necesarios para la construcción de la máquina herramienta propuesta.

Por otro lado, se sabe que una máquina herramienta se compone de un subensamble que soporta a la herramienta de trabajo y otra sección que soporta la pieza de trabajo (las cuales convencionalmente forman parte de un mismo ensamble). Ante el planteamiento de una nueva configuración se presenta la interrogante referente al efecto que puedan tener las vibraciones mecánicas en la máquina en dos casos distintos, y qué caso pueda ser más conveniente:

- Si el soporte de la pieza de trabajo se mantiene unido al soporte de la herramienta de trabajo.
- Si el soporte de la pieza de trabajo se separa físicamente del soporte de la herramienta de trabajo.

Cabe mencionar que tanto la propuesta base como las variantes a analizar, son diseños previamente planteados en [2]; se retomarán para profundizar más en el terreno de las vibraciones mecánicas.

Justificación

La determinación de la magnitud de los elementos de rigidez y amortiguamiento del sistema vibratorio aportarán información importante para el diseño y construcción de la máquina herramienta, mientras que el análisis de los casos planteados determinará qué tipo de configuración resulta más favorable en términos de reducción de posibles efectos negativos originados por las vibraciones mecánicas, derivando en una mejor propuesta de diseño.

Objetivo general

Determinar qué propuesta presenta el mejor desempeño en cuanto a minimizar las vibraciones mecánicas presentes en la máquina herramienta.

Objetivos específicos

- Desarrollar el modelo vibratorio de la máquina herramienta paralela.
- Determinar los parámetros de rigidez y amortiguamiento de la máquina herramienta paralela.
- Analizar los modelos vibratorios asociados a cada caso.

Hipótesis

Mantener las bases separadas promoverá que la energía asociada a cada una y a los componentes que soportan sea disipada de forma independiente, lo que resultará en que las vibraciones presentes en el sistema sean casi imperceptibles.

Capítulo 1

1 ANTECEDENTES

1.1 Procesos de maquinado

1.1.1 Contexto e importancia de los procesos de maquinado

Se entiende por maquinado a la acción de remoción de material no deseado a una pieza de trabajo (Figura 1), con la finalidad de llegar al producto final buscado, el cual tendrá dimensiones, forma y calidad superficial en función de los procesos de maquinado que se le apliquen. El maquinado forma parte de las tecnologías de manufactura. Por otro lado, se define como máquina herramienta a la maquinaria empleada para desempeñar los procesos de maquinado involucrados en la manufactura de un determinado producto.

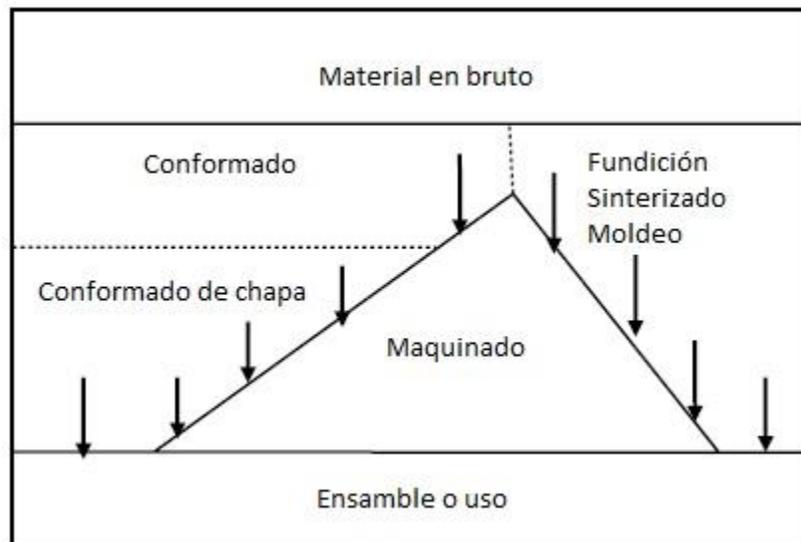


Figura 1: Descripción gráfica de maquinado [2].

En un principio los procesos de maquinado consistían en técnicas de corte para a continuación dar paso a métodos basados en la abrasión mecánica, lo cual brindó una amplia variedad de posibilidades de poder llegar a los productos finales deseado; ambos considerados procesos tradicionales o convencionales.

Posteriormente fueron introducidos los procesos que utilizaban los principios de la erosión en conjunto con otros tipos de energía para llevar a cabo la remoción de material a las piezas de trabajo; este tipo de procesos son considerados como no tradicionales o no convencionales.

Naturalmente, los primeros procesos de maquinado se llevaban a cabo haciendo uso de máquinas herramienta con las que se podían lograr una relativamente baja precisión y exactitud. Con el paso del tiempo y el constante desarrollo tecnológico fueron introducidas a estas máquinas convencionales mecanismos automáticos y procesos de control que influyeron directamente en la calidad de las piezas, logrando rangos de exactitud y precisión mayores.

La introducción de la tecnología de control numérico (NC por sus siglas en inglés *Numerical Control*) dio paso a lo que hoy conocemos como control numérico por computadora (CNC por sus siglas en inglés *Computer Numerical Control*) y control numérico directo (DNC por sus siglas en inglés *Direct Numerical Control*). Cabe mencionar que este tipo de máquinas herramienta conforman alrededor del 70% de las máquinas operacionales de producción y tienen como una de sus características principales su alta exactitud de producción en comparación con las máquinas herramienta de conformado de metales [3].

El maquinado ha sido objeto de considerables investigaciones y experimentaciones que han conllevado a una mejor comprensión de la naturaleza de los procesos de maquinado, así como mejorar la calidad de las partes maquinadas. Las investigaciones sistemáticas tuvieron comienzo en el año 1850 y han continuado desde entonces, cubriendo los temas enlistados en la Tabla 1.

Tabla 1: Investigaciones alrededor de los procesos de maquinado [3]¹.

Año	Investigaciones
1851	Mediciones de las fuerzas de corte y el consumo de energía para remover un volumen determinado de metal.
1870	Mecánica de formación de viruta.
1893	Análisis de las fuerzas dentro de la zona de corte.
1907	Estudio del desgaste de las herramientas e introducción de las HSS (por sus siglas en inglés <i>High-Speed Steel</i>).
1928	Términos y definiciones de maquinabilidad.
1935	Introducción a los modelos teóricos del corte ortogonal y oblicuo.
1950	Verificación de los modelos de corte de metal.
1960	Desarrollos en el campo de rectificación y procesos de maquinado no convencionales.
1970	Desarrollos en el campo de los procesos de maquinado no convencionales e híbridos, incluyendo micro y nano maquinado.

Con la finalidad de poder tener una mejor visualización de los diversos procesos de maquinado, a continuación, en la Figura 2 se presenta un diagrama que desglosa la clasificación de dichos procesos y enuncia diversos ejemplos de cada una de estos.

¹ Información recopilada de [3] y ordenada cronológicamente.

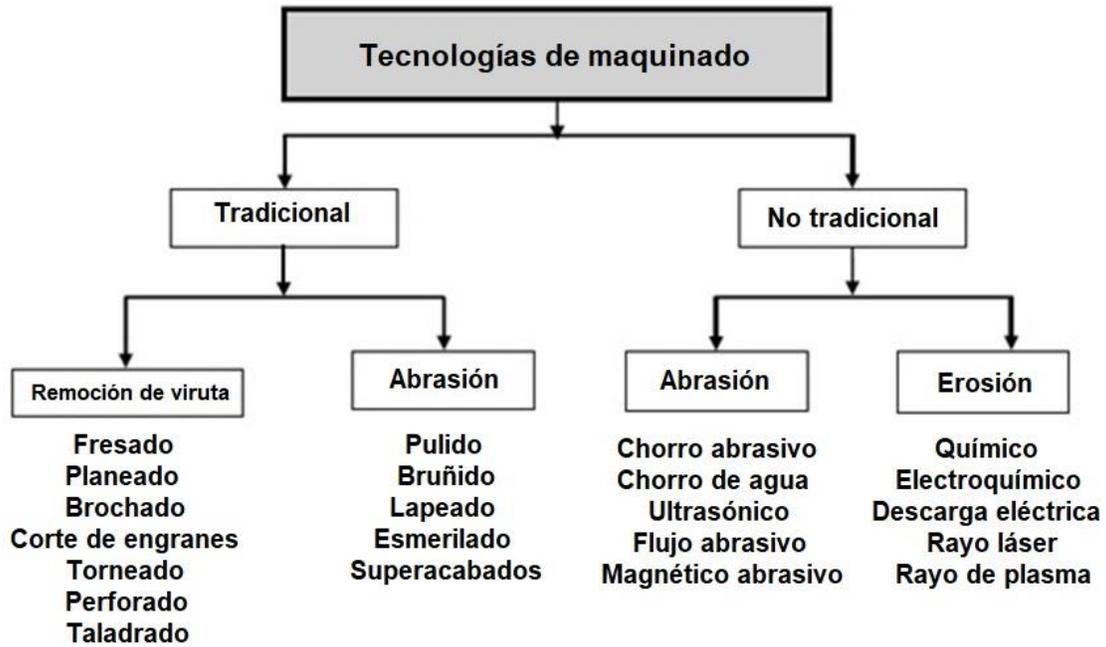


Figura 2: Clasificación de los procesos de maquinado [2].

1.1.2 Maquinado por corte

El maquinado por corte está conformado principalmente por la herramienta, la pieza de trabajo y la máquina herramienta que controla los movimientos requeridos de los dos componentes anteriormente mencionados. A lo largo de las operaciones de maquinado de este proceso, la herramienta penetra dentro de la pieza de trabajo a una determinada profundidad de corte, generando la viruta del material en cuestión (Figura 3).

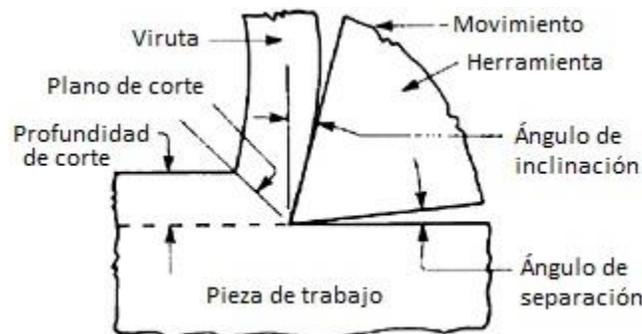


Figura 3: Descripción de las partes del maquinado por corte [2].

Dentro de los procesos de maquinado por corte, podemos encontrar tres distintas clasificaciones generales en función de la naturaleza de las operaciones (Figura 4):

- Corte de forma: La herramienta de corte posee la geometría del contorno final de la pieza de trabajo.
- Corte de generación: La geometría final de la pieza de trabajo es obtenida por medio del movimiento de esta en conjunto con el avance de la pieza de trabajo.
- Corte de forma y generación: La obtención de la geometría deseada en la pieza de trabajo es el resultado de la conjunción de los movimientos tanto de la pieza de trabajo como de la herramienta, mientras que al mismo tiempo esta última posee la geometría del contorno final de la pieza de trabajo.



Figura 4: Maquinado por corte [3].

A su vez también pueden encontrarse dos clasificaciones dentro de los procesos de maquinado de corte en función de la relación entre el avance y la dirección de corte:

- Corte ortogonal: La orientación del filo de la herramienta de corte y la dirección del movimiento relativo entre la pieza de trabajo y la herramienta forman un ángulo recto.
- Corte oblicuo: La orientación del filo de la herramienta de corte y la dirección del movimiento relativo entre la pieza de trabajo y la herramienta forman un ángulo distinto al recto.

En el presente documento se abordará la teoría del corte ortogonal debido a que esa será la naturaleza del proceso que desempeñará la fresadora que se fabricará, aunado al hecho de que dicha configuración es la más convencional y estudiada, hecho que facilitará el cálculo

de los parámetros inherentes a la fuerza de corte y, por lo tanto, la fuerza misma, permitiendo que los cálculos se enfoquen más en los temas asociados a vibraciones mecánicas.

En cuanto al estudio de los procesos de corte, se han generado dos vertientes en las líneas de investigación de este tema inherentes a la naturaleza de la zona de corte (Figura 5): aquella que considera la zona de corte como un plano y aquella que la considera como una región con un espesor determinado. El primer enfoque describe el proceso bajo condiciones con velocidades de corte elevadas, mientras que el segundo es adecuado para velocidades bajas. Los análisis de fuerzas de corte desarrollados más adelante en este documento partirán de un enfoque que considera la zona de corte como un plano.



Figura 5: Modelos de plano de corte y zona de corte [3].

Por otro lado, el comportamiento de la formación de la viruta a lo largo del proceso de corte también resulta importante en términos de la exactitud de la pieza de trabajo, así como del acabado superficial de esta. La naturaleza de la generación de viruta puede ser:

- Discontinua: Presente en materiales frágiles (bronce, fundición de hierro, etc.), así como en condiciones de grandes profundidades de corte.
- Continua: La fractura o ruptura del material no ocurre debido a la ductilidad del material (cobre, aluminio, acero de bajo carbono o suave), así como por velocidades de corte altas (> 60 m/min) y profundidades de corte bajas.
- Continua con acumulación (BUE por sus siglas en inglés *Built Up Edge*): Común en materiales dúctiles y bajo condiciones de velocidades de corte bajas (< 60 m/min) y grandes profundidades de corte.

Puesto que el objetivo del presente documento no recae en el estudio de la naturaleza de la formación de viruta, los cálculos y análisis partirán del caso más sencillo y común: formación continua de viruta.

1.1.3 Fresado

El fresado es uno de los procesos de maquinado más comunes, el cual consiste y se caracteriza por presentar un movimiento rotacional en la herramienta y un movimiento rectilíneo o curvilíneo relativo entre esta y la pieza de trabajo (ya sea que un actuador desplace la pieza de trabajo o la herramienta). Es importante mencionar que, a diferencia de otros procesos, un aspecto importante inherente al fresado es la intermitencia en el corte de material durante el proceso de maquinado, puesto que cada diente genera viruta de forma separada, y además de sección transversal variable.

En primera instancia, los procesos de fresado pueden clasificarse de acuerdo con la orientación del cortador con respecto a la pieza de trabajo: fresado en las caras y fresado perimetral. A su vez es posible hacer una segunda o hasta tercera clasificación en función de la naturaleza de cada una de las configuraciones presentes en los procesos.

El fresado perimetral (o periférico) presenta una configuración tal que el proceso de corte es generado, como su nombre lo indica, por los filos en la periferia de la herramienta, generando una superficie paralela al eje de giro de esta. Cabe aclarar que debido a que este tipo de fresado es comúnmente llevado a cabo por máquinas donde el portaherramientas se encuentra en posición horizontal, suele también llamársele a este proceso como fresado horizontal.

Dentro del proceso de fresado perimetral, se pueden diferenciar dos tipos de operaciones:

- *Up milling*: La dirección del avance es opuesto al sentido de giro del cortador (Figura 6a); este proceso es el más convencional de los dos casos de fresado perimetral.
- *Down milling*: La dirección del avance es la misma que el sentido de giro del cortador (Figura 6b).

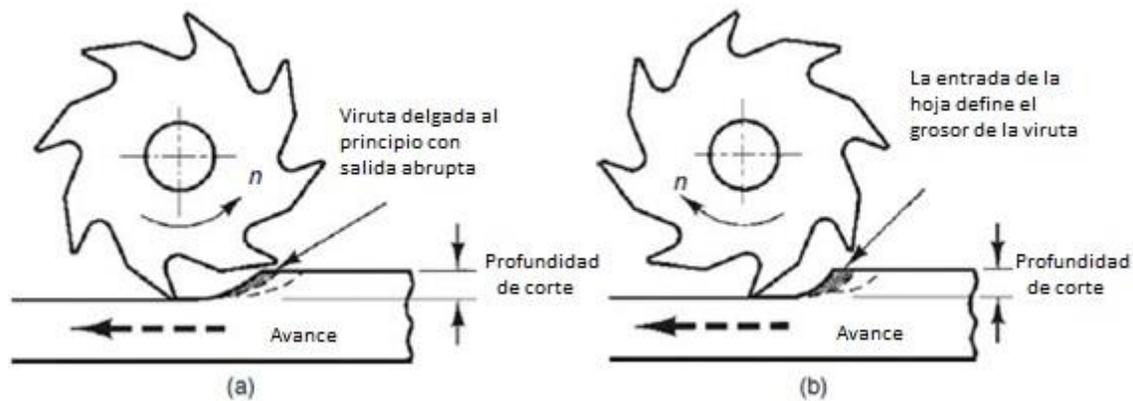


Figura 6: Up-milling (a) y down-milling (b) [2].

Por otro lado, el fresado en las caras presenta una orientación tal que el eje de giro de la herramienta forma un ángulo recto con respecto a la superficie generada en la pieza de trabajo. De forma similar a su caso análogo (fresado perimetral), este proceso es generalmente ejecutado por máquinas en las que el portaherramientas se encuentra en posición vertical, y es por ello que suele llamársele fresado vertical pese a que cualquiera de los dos casos de fresado puede llevarse a cabo de forma vertical, horizontal o con una cierta inclinación.

Puede realizarse una primera clasificación dentro del caso de fresado en las caras dependiendo de si la cara del cortador se encuentra en contacto parcial o completo con la pieza de trabajo, mientras que a su vez puede realizarse una segunda clasificación en función de si ambas mitades (con respecto al sentido de avance) de la cara del cortador se encuentran en contacto con la pieza de trabajo:

- Fresado de cara completo: El ancho de corte es igual al diámetro del cortador; este proceso siempre será bidireccional (Figura 7a).
- Fresado de cara parcial: El ancho de corte es menor al diámetro del cortador.
 - Fresado unidireccional: Sólo una mitad del cortador (respecto al avance) se encuentra en contacto con la pieza de trabajo (Figura 7b).
 - Fresado bidireccional: Ambas mitades del cortador (respecto al avance) se encuentran en contacto con la pieza de trabajo (Figura 7c).

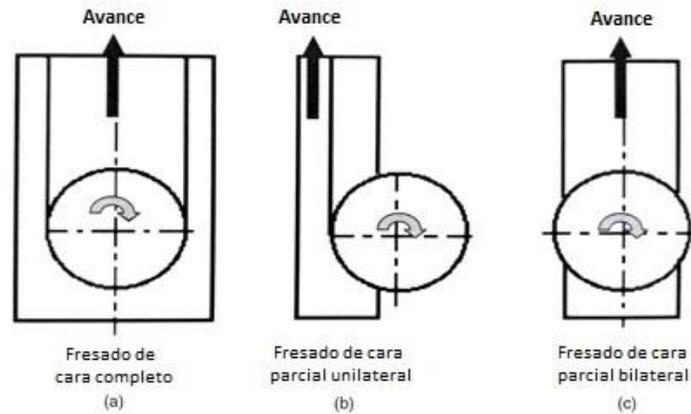


Figura 7: Tipos de fresado en las caras [2].

Finalmente, los cortadores empleados en las operaciones de fresado juegan un papel de suma importancia durante el proceso de maquinado; estos pueden ser tan variados como las posibles operaciones mismas, las cuales pueden ser capaces desde generar superficies relativamente sencillas, hasta la manufactura de engranes. En función de las tareas que pueda desempeñar una máquina fresadora se le podrá caracterizar como “de propósito general” o “de propósito particular”.

1.2 Mecanismos paralelos

1.2.1 Definición y características de las configuraciones paralelas

Un mecanismo paralelo es un mecanismo de cadena cinemática cerrada, en el cual su efector final está unido a la base por diversas cadenas cinemáticas independientes. Este tipo de mecanismos, al tener al menos dos cadenas cinemáticas ligadas al efector final (estos contienen al menos un actuador simple cada una), permite distribuir entre estas las cargas inherentes a las operaciones a realizar. De igual forma, una característica de igual importancia es que el número de grados de libertad (GDL) del efector final es igual a la cantidad de actuadores, los cuales, al estar bloqueados, derivan en una movilidad nula del manipulador, aspecto que brinda seguridad en determinadas aplicaciones [4]. Por definición, dentro de un sistema físico, los grados de libertad son el número mínimo de parámetros necesarios para poder determinar completamente la posición o velocidad de cualquier componente del sistema en cuestión. Un ejemplo de un mecanismo paralelo es el Robot Delta mostrado en la Figura 8.

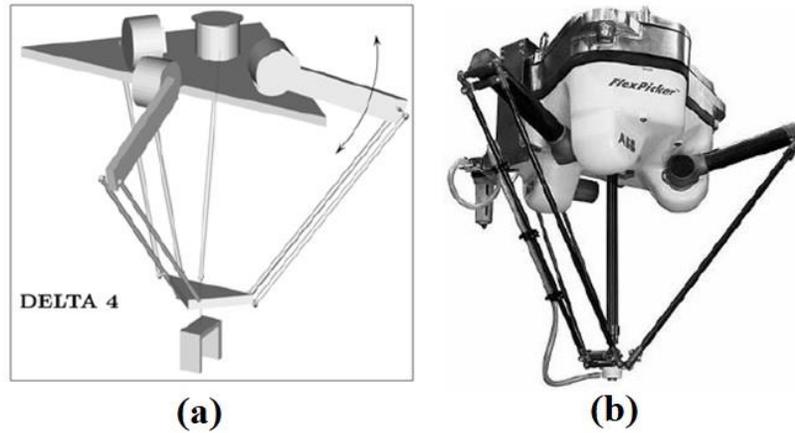


Figura 8: Configuración geométrica de un robot delta (a) y una de sus versiones industriales: FlexPicker IRB 340 (b) [4].

1.2.2 Configuraciones paralelas en máquinas herramienta

Las PKM (por sus siglas en inglés *Parallel Kinematic Machine*) han llamado la atención de instituciones de investigación e industria debido a su alta rigidez estructural y alta precisión debido a sus características de cadenas cinemáticas cerradas y ausencia de acumulación de errores. Pese a que han transcurrido más de 20 años desde que la primera máquina herramienta de configuración paralela comercial fue introducida, aún no se han sido ampliamente aceptadas en la industria; durante el mencionado lapso, más de 50 diferentes máquinas herramienta de configuración paralela han sido fabricadas, pero sólo unas pocas han tenido éxito comercial [5].

El uso de los mecanismos paralelos como máquinas herramienta ha sido poco explorado debido a los retos de diseño que conlleva su implementación a una aplicación real. Por lo tanto, se vislumbra un área de oportunidad para proponer las pautas que permitan seleccionar una configuración paralela con miras a aplicarse como máquina herramienta [6].

Algunas ventajas generales inherentes a las PKM son:

- Buenas relaciones carga/peso, debido a la distribución de cargas entre sus cadenas cinemáticas.
- Rigidez alta, la cual deriva en deformaciones mínimas en los eslabones y a su vez en una alta precisión del manipulador.

- Baja inercia, debido a que los actuadores se encuentran generalmente en la base.
- La posición del efector final no es afectada por los errores articulares.
- Alta precisión debido a la ausencia de errores acumulativos en juntas y uniones.
- El espacio de trabajo es generalmente de fácil acceso.

Por otro lado, algunas desventajas de las PKM son:

- Existen dificultades analíticas para muchas configuraciones.
- Es común la necesidad de juntas esféricas, las cuales son caras en comparación con otro tipo de juntas.
- Espacio de trabajo limitado en comparación con las dimensiones del mecanismo.
- Destreza limitada.
- Relativa dificultad en el diseño mecánico.
- La calibración de las PKM suele requerir mucho tiempo.

El potencial uso de las estructuras de configuración paralela en el campo de las máquinas herramienta ha sido motivo para el desarrollo de diversas investigaciones, especialmente relacionados con los componentes mecánicos, control de vibración, y síntesis de estructuras con menos de seis grados de libertad, al ser suficientes entre tres y cinco grados de libertad para la mayoría de las operaciones de maquinado [4].

1.3 Vibraciones mecánicas

1.3.1 Importancia del estudio de las vibraciones mecánicas

Se puede definir como vibración a todo aquel movimiento que se repite tras un determinado intervalo de tiempo [7]. El estudio de las vibraciones comenzó con fenómenos acústicos, para posteriormente trasladarse al análisis del fenómeno en otros sistemas que no implicaban necesariamente cuestiones acústicas. Las aportaciones a la teoría de las vibraciones mecánicas se remontan al mismo Galileo Galilei, pasando por Sir Isaac Newton, J. B. Joseph Fourier, Charles Coulomb, entre otros, hasta las investigaciones desarrolladas por numerosos autores durante el último siglo.

Una gran cantidad de actividades humanas implican vibraciones, como lo pueden ser fenómenos biológicos, así como la operación de motores, turbinas, vehículos o procesos de maquinado, entre muchos otros.

El fenómeno que prácticamente siempre se buscará evitar en el terreno de las vibraciones mecánicas es la resonancia, el cual puede hacerse presente cuando la frecuencia de la excitación externa asociada al sistema (máquina, estructura, etc.) coincide con la frecuencia natural de este; dicho fenómeno genera deflexiones excesivas y eventualmente la falla misma del sistema. Debido a la gran repercusión que pueden tener las vibraciones en máquinas o estructuras, las pruebas y análisis de vibraciones se han vuelto un procedimiento estándar en el diseño y desarrollo de la mayoría de los sistemas en ingeniería [7].

En primera instancia, la importancia del estudio de las vibraciones mecánicas reside en la reducción de estas por medio de un diseño adecuado de los sistemas en cuestión, derivando en la posibilidad de minimizar los posibles desbalances inherentes a los componentes móviles de un sistema, atendiendo a su vez al correcto diseño del soporte, base o empotramiento del sistema, asegurando que los posibles desbalances no resulten perjudiciales para el entorno.

1.3.2 Vibraciones en máquinas herramienta

Las vibraciones se encuentran presentes en todos los procesos de maquinado. Cuando este fenómeno no es controlado apropiadamente, puede resultar en una precaria calidad de la superficie maquinada, una baja productividad, así como abrasión o daño excesivo en las herramientas. Se puede categorizar el tipo de vibraciones presentes en los procesos de maquinado de acuerdo con el mecanismo que promueva su aparición: vibraciones forzadas y vibraciones autoinducidas (chatter) [8].

En primera instancia, las vibraciones forzadas son causadas por excitaciones externas variantes con el tiempo; esta puede ser evitada o prevenida de una forma relativamente sencilla, siempre y cuando la fuente principal de la vibración sea identificada [8].

Por otro lado, las vibraciones autoinducidas pueden ser originadas por los fenómenos conocidos como: chatter regenerativo y modo de acoplamiento de chatter. El chatter

regenerativo ocurre cuando el arranque de viruta se lleva a cabo sobre una superficie rugosa resultado de una operación de corte previa, lo que a su vez vuelve a generar una nueva superficie rugosa; el espesor de viruta y la fuerza de corte varía debido a la diferencia de fase entre la superficie rugosa originada por el corte de un diente previo, y la superficie rugosa generada por el corte del diente actual. A diferencia del primer caso mencionado, el modo de acoplamiento de chatter se presenta cuando la vibración en la dirección de la fuerza de avance genera vibración en la dirección de la fuerza de corte y viceversa [8].

Los modelos matemáticos a partir de la teoría de vibraciones mecánicas son un recurso de gran utilidad, al poder tener la versatilidad de, en un principio, plantear modelos sencillos que discriminen diversas variables con la finalidad de simplificar el análisis, para posteriormente considerar poco a poco dichas variables (tales como grados de libertad, fricción, etc.) y así obtener resultados que describan de forma más acertada el fenómeno real, teniendo siempre en cuenta que dichos modelos siempre nos ofrecerán una aproximación útil.

Capítulo 2

2 MARCO TEÓRICO

2.1 *Fresado*

Para poder abordar el análisis de fuerzas es indispensable comprender los elementos que intervienen en este proceso, tales como espesor de viruta, velocidad de avance, profundidad de corte, entre otros.

Puesto que las variantes del fresado pueden llegar a diferenciarse debido a las diversas variables que estas pueden involucrar, se describirá la naturaleza del proceso para los casos de fresado perimetral y fresado en las caras, remarcando el hecho de que bajo ciertas condiciones se pueden tener modelos matemáticos de fuerza de corte que sean válidos para ambos casos.

2.1.1 *Fuerza de corte en fresado periférico*

En la Figura 9 se pueden apreciar los elementos que conforman el proceso de arranque de viruta por medio de fresado periférico.

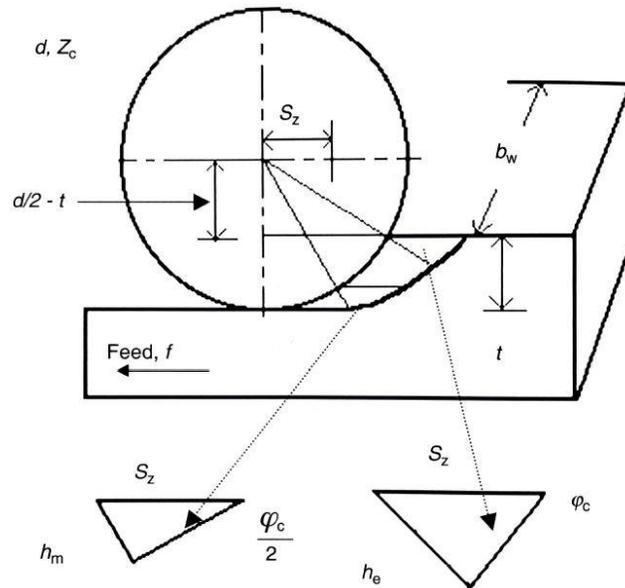


Figura 9: Elementos de la formación de viruta en el fresado periférico [3].

Avance (f): Es la velocidad lineal relativa entre la herramienta y la pieza de trabajo.

Profundidad de corte (t): Es la dimensión de la viruta que es removida en una sola pasada de un filo del cortador, medida en una dirección perpendicular a la superficie de corte.

Ancho del fresado (bw): Es la dimensión de la viruta, medida en una dirección perpendicular al avance y paralela a la superficie maquinada.

Se sabe que el avance por revolución del proceso, S , es:

$$S = \frac{f}{N} \text{ mm/rev} \quad (2.1)$$

Mientras que el avance por diente, S_z , es:

$$S_z = \frac{f}{NZ_c} \text{ mm/diente} \quad (2.2)$$

siendo N la velocidad rotacional del cortador en revoluciones por minuto, y Z_c el número de dientes del mismo.

Asumiendo un cortador recto, el ángulo de contacto entre la pieza de trabajo y el diente, φ_c , puede ser calculado por:

$$\cos(\varphi_c) = \frac{d/2 - t}{d/2} \quad (2.3)$$

$$\cos(\varphi_c) = 1 - \frac{2t}{d} \quad (2.4)$$

De igual forma, se puede definir a partir del espesor de viruta:

$$\sin(\varphi) = \frac{h}{S_Z} \quad (2.5)$$

Entonces, para un espesor de viruta máximo h_e :

$$h_e = S_Z \sin(\varphi_c) = \frac{f}{NZ_c} \sin(\varphi_c) \quad (2.6)$$

De forma que:

$$\sin(\varphi_c) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2t}{d}\right)^2} \quad (2.7)$$

o

$$\sin(\varphi_c) = 2 \sqrt{\frac{t}{d}} \quad (2.8)$$

Por lo tanto:

$$h_e = \frac{2f}{NZ_c} \sqrt{\frac{t}{d}} \quad (2.9)$$

La fuerza tangencial máxima en un solo diente, F_e , es:

$$F_e = k_s b_w h_e [N/diente] \quad (2.10)$$

$$F_e = k_s b_w \frac{2f}{NZ_c} \sqrt{\frac{t}{d}} [N/diente] \quad (2.11)$$

o bien considerando la ecuación (2.6):

$$F_e = k_s b_w \frac{f}{NZ_c} \sin(\varphi) [N/diente] \quad (2.12)$$

La fuerza de corte tangencial principal, F_m , es entonces:

$$F_m = k_s b_w h_m [N/diente] \quad (2.13)$$

donde h_m es el espesor de viruta principal:

$$F_m = k_s b_w \frac{f}{NZ_c} \sqrt{\frac{t}{d}} [N/diente] \quad (2.14)$$

El número de dientes que cortan al mismo tiempo, Z_e , está dado por:

$$Z_e = \frac{\bar{\varphi}_c}{2\pi} Z_c \quad (2.15)$$

debido a:

$$\bar{\varphi}_c = \sin(\varphi_c) \quad (2.16)$$

entonces:

$$Z_e = \frac{Z_c}{\pi} \sqrt{\frac{t}{d}} \quad (2.17)$$

La fuerza de corte total principal (tangencial), F_{mt} , causada por el número efectivo de dientes, Z_e , es:

$$F_{mt} = \frac{k_s t f b_w}{\pi d N} [N] \quad (2.18)$$

2.1.1.1 Variación de las fuerzas de corte a lo largo del tiempo

Durante el proceso de fresado periférico, el espesor de la viruta a cortar por cada diente incrementa desde cero a un cierto valor máximo y decrece a cero de nuevo. Esto significa

que las fuerzas de corte variarán de la misma forma. En la Figura 10 y Figura 11 se muestran cambios típicos en la fuerza de corte en un proceso tipo *up-milling* haciendo uso de un cortador con dientes rectos. Dichos diagramas son válidos para situaciones donde el ángulo de contacto es menor que el ángulo de inclinación del diente del cortador. Las variaciones periódicas de las fuerzas causan vibraciones, las cuales pueden generar el fenómeno de chatter. Es posible conseguir una mejor uniformidad de carga en los dientes, así como agilizar las operaciones, incrementando el número de dientes que cortan al mismo tiempo, o en su defecto usando dientes helicoidales.

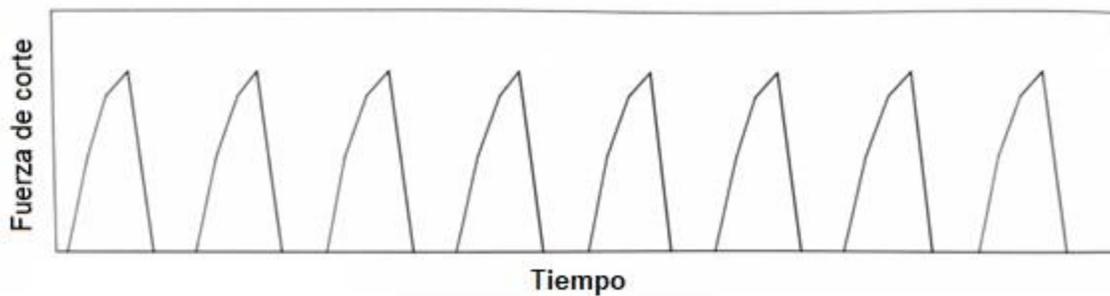


Figura 10: Variación de la fuerza de corte a lo largo del tiempo en *up-milling* con un diente a la vez [3].

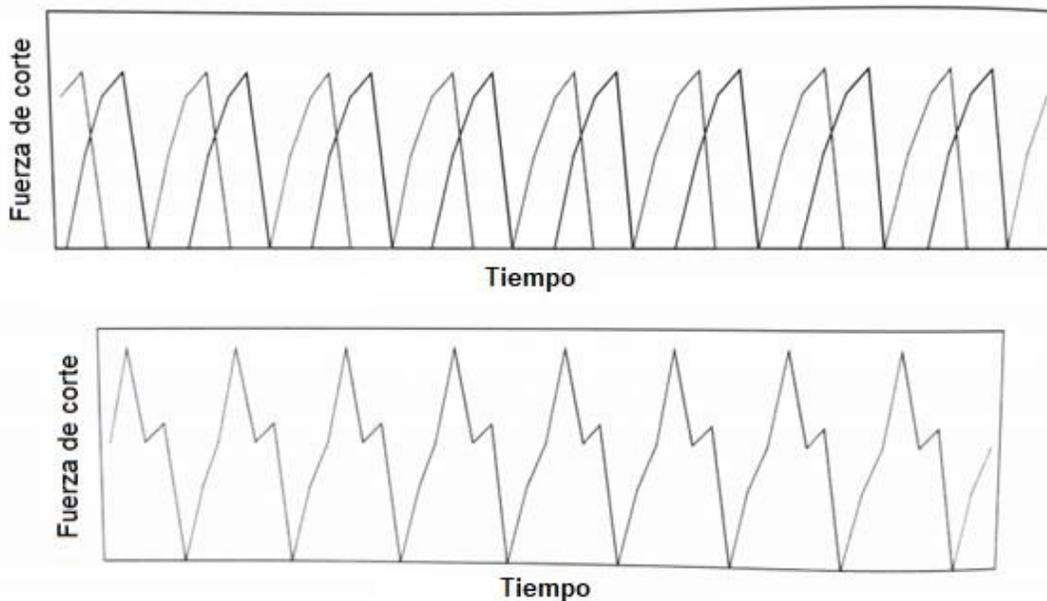


Figura 11: Variación de la fuerza de corte a lo largo del tiempo en *up-milling* con empalme de dos dientes; fuerza por diente (arriba), fuerza total (abajo) [3].

2.1.2 Fuerza de corte en fresado en las caras

La Figura 12 muestra los parámetros involucrados en la formación de viruta del proceso de fresado en las caras. Asumiendo un caso asimétrico bilateral con ángulo de entrada φ_1 y ángulo de salida φ_2 , el espesor principal de viruta puede ser calculado integrando el elemento generado y dividiéndolo por la longitud de contacto por diente.

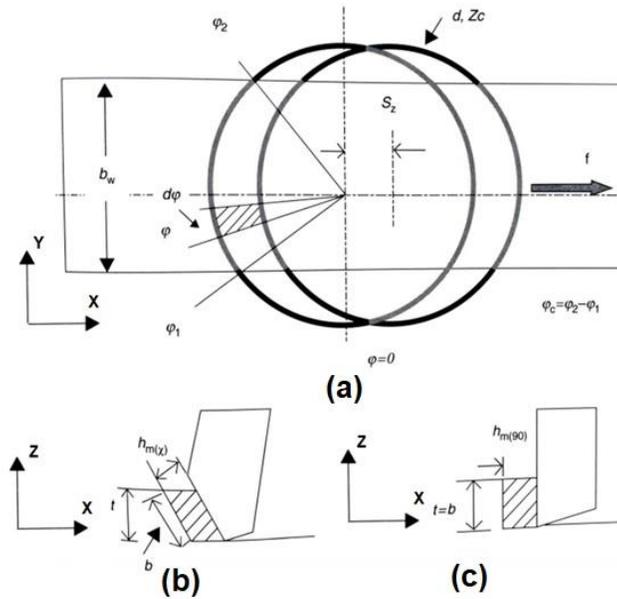


Figura 12: Elementos de la formación de viruta en el fresado en las caras; vista superior (a), vistas laterales del diente con $\chi \neq 90^\circ$ (b) y con $\chi = 90^\circ$ (c) [3].

Para una herramienta con un ángulo de ajuste χ de 90° , el área del elemento generado, A_{SZ} , es:

$$A_{SZ} = S_Z \sin(\varphi) \left(\frac{d}{2} d\varphi \right) \tag{2.19}$$

donde S_Z es el avance por diente en milímetros y d es el diámetro del cortador en las mismas unidades. El área recorrida por un solo diente, A_{SZ} , es:

$$A_{SZ} = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} S_Z \frac{d}{2} \sin(\varphi) d\varphi \tag{2.20}$$

$$A_{SZ} = S_Z \frac{d}{2} (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2)) \tag{2.21}$$

por lo que el espesor principal de viruta se vuelve:

$$h_{m(90)} = \frac{A_{SZ}}{d/2 \bar{\varphi}_c} \quad (2.22)$$

$$h_{m(90)} = \frac{S_Z(\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))}{\varphi_c} \quad (2.23)$$

Para un ángulo de ajuste dado, χ , el espesor principal de viruta es:

$$h_{m(\chi)} = \frac{S_Z \sin(\chi)(\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))}{\bar{\varphi}_c} \quad (2.24)$$

La fuerza principal de corte en un solo diente, F_m , es:

$$F_m = k_s b h_{m(\chi)} [N/diente] \quad (2.25)$$

$$F_m = \frac{k_s b S_Z \sin(\chi)(\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))}{\bar{\varphi}_c} \quad (2.26)$$

puesto que:

$$t = b \sin(\chi) \quad (2.27)$$

entonces:

$$F_m = \frac{k_s t S_Z (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))}{\bar{\varphi}_c} \quad (2.28)$$

Si el número de dientes cortando al mismo tiempo, Z_e , y el avance por diente, S_Z , son:

$$Z_e = \frac{\bar{\varphi}_c}{2\pi} Z_c \quad (2.29)$$

$$S_Z = \frac{f}{NZ_c} \quad (2.30)$$

entonces la fuerza total principal F_{mt} (en la dirección de la velocidad de corte V) es:

$$F_{mt} = \frac{k_s f t (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))}{2\pi N} \quad (2.31)$$

La fuerza de corte en la periferia sobre el diente en una operación de fresado de cara completa comienza a incrementar arriba de los 10° , probablemente como resultado del deslizamiento inicial del diente sobre el material hasta que el espesor de la viruta se vuelve suficiente para que la deformación plástica comience. Generalmente, durante el fresado de cara parcial, dependiendo del ángulo de entrada, velocidad y profundidad de corte, así como del avance por diente, el impacto de un diente al principio del corte puede incrementar la fuerza de corte desde un 10% hasta un 80%.

La Figura 13 muestra la variación de fuerzas cuando un sólo diente realiza la operación de corte. La Figura 14 muestra el caso cuando dos dientes realizan dicha operación, mientras que la Figura 15 muestra la fuerza total bajo la mencionada condición. La Figura 16 muestra la resolución de la fuerza de corte, F_m , y la fuerza radial, F_r , en la dirección horizontal (de avance), F_h , y la dirección vertical, F_{vr} .

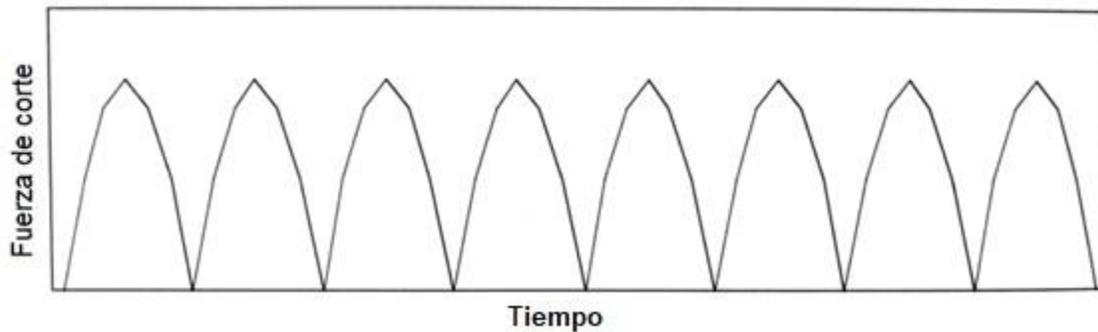


Figura 13: Variación de la fuerza de corte a lo largo del tiempo en face-milling con un diente a la vez [3].

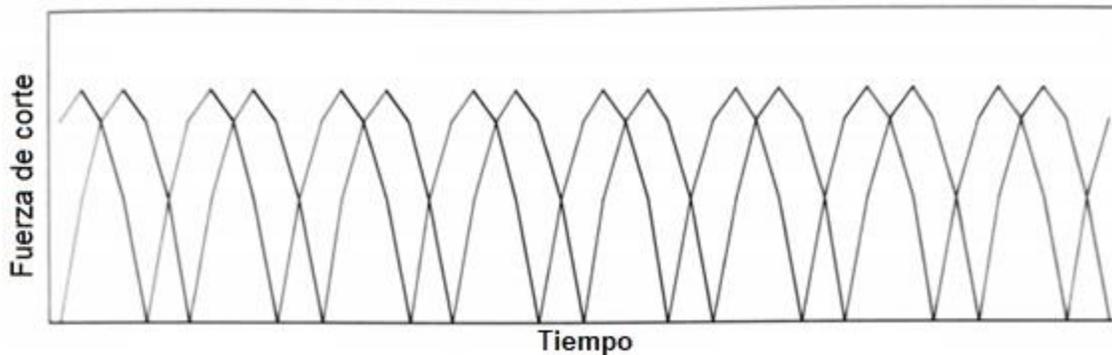


Figura 14: Variación de la fuerza de corte a lo largo del tiempo en face-milling con empalme de dos dientes [3].

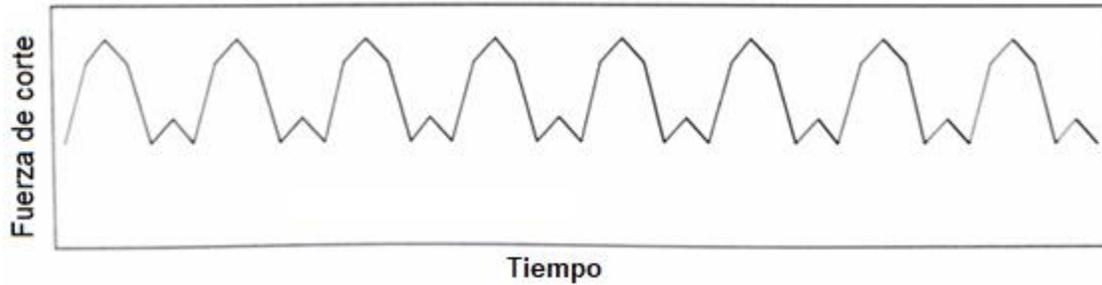


Figura 15: Fuerza de corte total a lo largo del tiempo en face-milling con empalme de dos dientes [3].

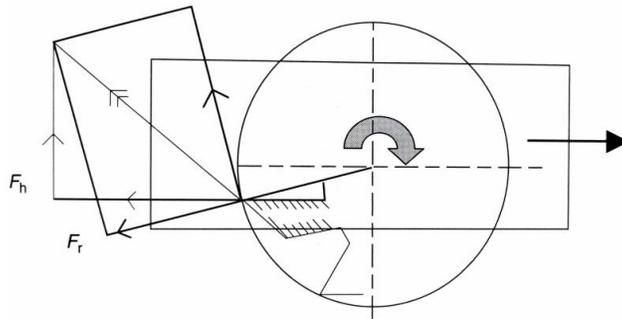


Figura 16: Resolución de las fuerzas de corte en un fresado en las caras (vista superior) [3].

2.2 Dinámica

En el terreno de la dinámica, dos de los conceptos más importantes para poder realizar un correcto análisis de sistemas vibratorios son:

- Segunda ley de Newton
- Ecuación de movimiento de Lagrange

En el presente documento se utilizará el segundo método mencionado debido a las ventajas mencionadas más adelante.

2.2.1 Ecuación de movimiento de Lagrange

Este método es particularmente útil cuando se analiza un sistema dinámico que presente desplazamientos en distintas direcciones, así como en aquellos que presenten una cantidad considerable de grados de libertad. El uso de la ecuación de movimiento de Lagrange se

fundamenta en la comprensión de los conceptos de energía cinética, energía potencial, trabajo, trabajo virtual y fuerzas no conservativas.

Dentro de un sistema mecánico generalmente habrá presentes cuerpos y elementos de una determinada masa, los cuales al desplazarse presentarán una velocidad dada (lineal o angular) y tendrán asociada una energía cinética, la cual puede describirse por medio de:

$$E_{Kl} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2.32)$$

$$E_{Kr} = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \quad (2.33)$$

Para desplazamientos lineales o angulares, respectivamente. Donde m es la masa del cuerpo o elemento, y \dot{x} la velocidad del mismo; mientras que, para el caso rotacional, I_G es el momento de inercia del cuerpo o elemento, y $\dot{\theta}$ es la velocidad angular del mismo.

Por otro lado, la energía potencial presente en un sistema mecánico se deberá a la diferencia de altura entre los diversos elementos que lo conformen; esta podrá ser descrita de acuerdo con:

$$E_p = mgx \quad (2.34)$$

donde g es la aceleración gravitacional a la que se encuentra sometido el sistema, y x la altura con respecto al origen de referencia del mismo.

Cuando hay presentes elementos tipo resorte en un sistema mecánico, estos generarán un trabajo a partir de su deformación; este trabajo es descrito por:

$$U_{LS} = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.35)$$

$$U_{RS} = \frac{1}{2} k_{\theta} \theta^2 \quad (2.36)$$

Para resortes lineales y rotacionales, respectivamente. Donde k es la constante de rigidez del resorte lineal, y x la deformación lineal del mismo; mientras que k_{θ} es la constante de rigidez del resorte rotacional, y θ la deformación angular del mismo.

Finalmente, se entenderá por fuerzas no conservativas aquellas fuerzas que le son aplicadas de forma externa al sistema mecánico, así como a las generadas por la acción de amortiguadores, las cuales pueden ser descritas por:

$$F_D = c\dot{x} \quad (2.37)$$

donde c es la constante de amortiguamiento del amortiguador, y \dot{x} la velocidad de deformación del mismo.

De tal forma que el trabajo total asociado a las fuerzas no conservativas dentro de un sistema se puede expresar:

$$\delta W^{nc} = Q_k^{nc} \delta x \quad (2.38)$$

$$\delta W^{nc} = F\delta x - c\dot{x}\delta x \quad (2.39)$$

donde Q_k^{nc} es la componente de fuerza del trabajo virtual asociado al desplazamiento virtual δx , ya sea aquel generado por la fuerza externa o por la deformación de un amortiguador.

Finalmente, la energía cinética total y energía potencial total de un sistema mecánico será:

$$T = E_{Kl} + E_{Kr} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \quad (2.40)$$

$$U = E_P + U_{LS} + U_{RS} = mgx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_\theta\theta^2 \quad (2.41)$$

respectivamente.

De esta forma, la ecuación de movimiento se define como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^{nc} \quad (2.42)$$

donde q_k es la k ésima coordenada generalizada del sistema en cuestión, mientras que Q_k^{nc} es la fuerza no conservativa asociada a q_k ; entendiéndose por coordenadas generalizadas aquellas con las que es suficiente para poder describir cualquier posición de cualquier componente de un sistema.

Cabe mencionar que un sistema mecánico tendrá tantas ecuaciones de movimiento como coordenadas generalizadas, aspecto que se retomará más adelante.

2.3 Vibraciones mecánicas

El principal objetivo del análisis vibratorio de un sistema es conocer la respuesta que tendrá este en términos de desplazamientos, velocidades o aceleraciones. Los sistemas suelen simplificarse en arreglos de masas interconectados por medio de componentes como resortes y amortiguadores; conociendo los componentes que constituyen el sistema analizado, se podrán derivar las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de este, a la vez que la solución de dichas ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales (dependiendo del número de grados de libertad) describirá el o los desplazamientos, velocidades o aceleraciones que se buscan conocer.

2.3.1 Clasificación de vibraciones

Es importante conocer las clasificaciones generales de las vibraciones mecánicas, así como lo que define cada una de ellas y así poder establecer de forma clara las consideraciones que se tomarán dentro del presente trabajo. Algunas de las clasificaciones más importantes son las siguientes:

- Vibración libre y forzada.
 - Vibración libre: Se le conoce como vibración libre a aquella que resulta tras aplicar una perturbación inicial a un sistema y dejar que este vibre por sí solo sin la aplicación de fuerzas externas sobre el mismo.
 - Vibración forzada: Se le conoce como vibración forzada a aquella generada por la aplicación continua de una fuerza externa a un sistema.
- Vibración amortiguada y no amortiguada: El fenómeno de vibración amortiguada se presenta cuando existe pérdida o disipación de energía en el sistema por efecto de la fricción o algún otro medio de resistencia durante la oscilación. Por otro lado, cuando

esta pérdida o disipación de energía no se hace presente, se tiene entonces vibración no amortiguada.

- Vibración lineal y no lineal: Si todos los componentes básicos del sistema vibratorio (resorte, masa y amortiguador) presentan un comportamiento lineal, la vibración resultante es conocida como vibración lineal. Por otro lado, si alguno de estos componentes presenta un comportamiento no lineal, la vibración generada será no lineal. A su vez, las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un sistema vibratorio lineal o no lineal serán a su vez lineales o no lineales, respectivamente. Cabe mencionar que, a diferencia de los sistemas vibratorios lineales, el principio de superposición no es válido para los sistemas vibratorios no lineales; de igual forma, se conocen menos técnicas para el análisis de estos sistemas.
- Vibración determinística y aleatoria: Cuando la magnitud de la fuerza de excitación que actúa en un sistema vibratorio es conocida en cualquier momento, generará una vibración determinística (Figura 17a). Por otro lado, cuando la excitación es aleatoria, la respuesta del sistema será una vibración aleatoria (Figura 17b); en estos casos, la amplia recopilación de registros de la excitación puede resultar en una regularidad estadística.

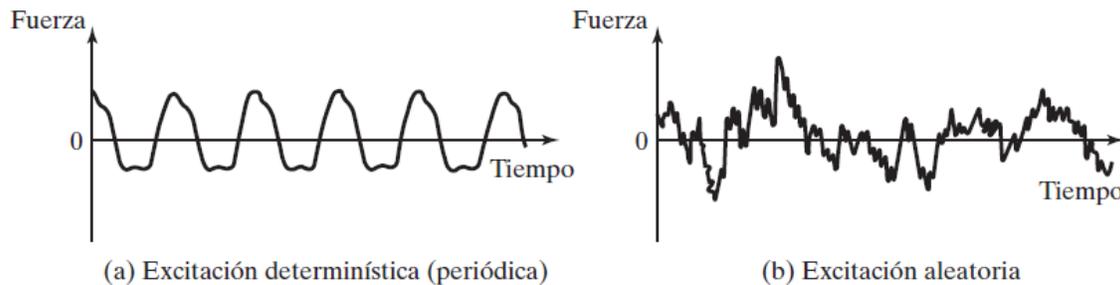


Figura 17: Excitaciones determinística y aleatoria [7].

El presente trabajo se manejará dentro de un marco en el cual se consideren las siguientes condiciones:

- Vibración forzada
- Vibración amortiguada
- Vibración lineal
- Vibración determinística

2.3.2 *Procedimiento de análisis de vibraciones*

Generalmente, los sistemas vibratorios son sumamente complejos y resulta imposible considerar todos los detalles dentro de un análisis matemático; es por ello que sólo se consideran los aspectos más importantes en el análisis, para así predecir el comportamiento del sistema bajo determinadas condiciones de entrada. Usualmente se puede determinar este comportamiento considerando incluso un modelo simple del sistema físico complejo. Por lo tanto, el análisis de un sistema vibratorio normalmente implica el modelado matemático, obtención de las ecuaciones rectoras, la solución de estas y la interpretación de resultados [7].

- **Modelado matemático:** El modelado matemático tiene como principal propósito recopilar las características más importantes del sistema, para posteriormente poder deducir las ecuaciones rectoras que describen el comportamiento del sistema.
- **Deducción de las ecuaciones rectoras:** Estas ecuaciones se obtienen a partir del modelo matemático propuesto, haciendo uso de principios, leyes y métodos propios de la dinámica de cuerpos rígidos. Las ecuaciones rectoras suelen presentarse como ecuaciones diferenciales ordinarias para sistemas discretos y como ecuaciones diferenciales parciales para sistemas continuos.
- **Solución de las ecuaciones rectoras:** La solución de las ecuaciones de movimiento resulta en la obtención de la respuesta del sistema vibratorio. El método a seleccionar para solucionar dichas ecuaciones dependerá de la naturaleza de estas.
- **Interpretación de resultados:** El análisis de resultados deberá tener siempre en cuenta el propósito del análisis y las posibles implicaciones de diseño que resulte de esta interpretación.

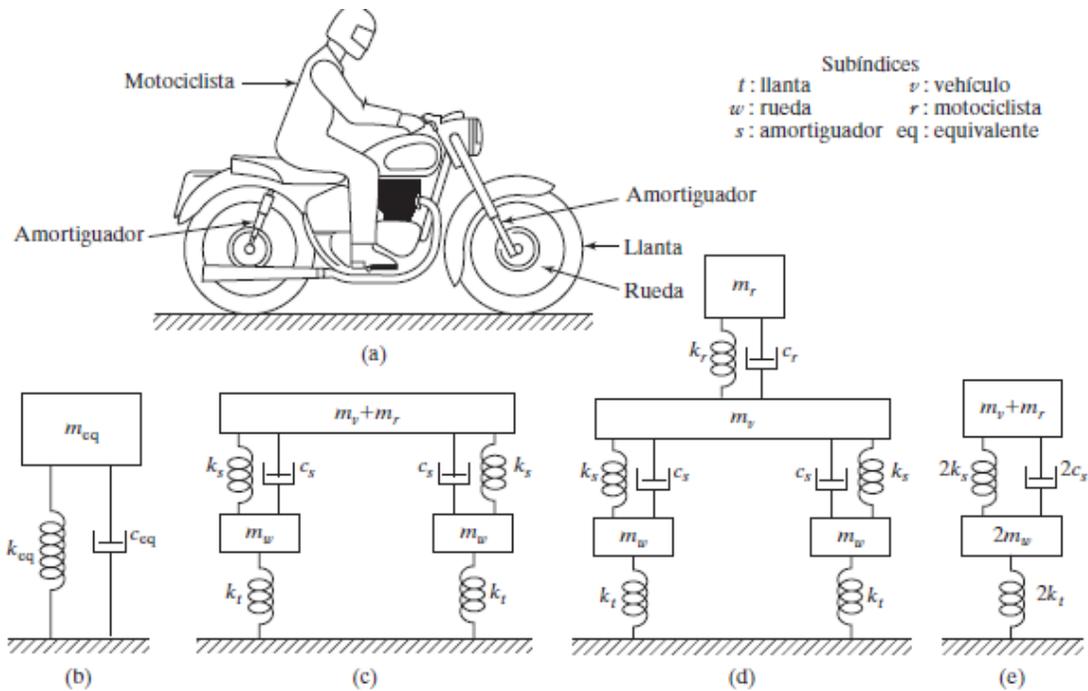


Figura 18: Motocicleta con motociclista: sistema físico y modelo matemático [7].

En la Figura 18 puede apreciarse el proceso de modelización de un sistema físico en particular: una motocicleta y su conductor. En primera instancia se obtiene un modelo sencillo de un grado de libertad (b) que considera una masa, amortiguamiento y rigidez equivalente del sistema completo. Posteriormente en (c) se divide el sistema al considerar cada llanta por separado, logrando tener un mayor detalle en el modelo. Más adelante se separa el motociclista del sistema, obteniendo un modelo (d) más refinado. Con la finalidad de demostrar que los modelos anteriores no son únicos, se plantea un modelo final (e) de dos grados de libertad derivado del modelo (d), donde el sistema es dividido en dos secciones: cuerpo de la motocicleta junto con el motociclista y, por otro lado, las llantas.

2.3.3 Elementos de rigidez

Dentro de los sistemas vibratorios existen elementos que, además de unir mecánicamente elementos de inercia, suelen responder de forma lineal al someterlos a elongación o contracción; dicha respuesta será siempre en el sentido contrario de la fuerza que genera este cambio de longitud. Si bien suelen usarse representaciones en forma de resorte, no siempre significa que exista uno de forma física en el sistema de estudio, sino que simboliza la rigidez

inherente a los elementos que lo componen y casi siempre se considera que tienen masas despreciables.

La fuerza de reacción que presenta un elemento de rigidez ante su elongación suele ser de la siguiente forma:

$$F = kx \quad (2.43)$$

Donde F representa la fuerza de reacción, x el cambio de longitud y k la constante de rigidez.

En función de la complejidad y objetivo de análisis de un sistema vibratorio, se puede llegar a una versión simplificada de este al reducir el número de elementos que lo componen. La simplificación dependerá de la disposición de los elementos de rigidez, ya sea en serie o en paralelo, teniendo entonces la posibilidad de sustituir grupos de elementos de rigidez por una rigidez equivalente según

- En paralelo: $k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i$ (2.44)

- En serie: $k_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^n k_i^{-1}$ (2.45)

2.3.4 Elementos de disipación

Es común que, en diversos sistemas dinámicos, como los vibratorios, la energía asociada al sistema se disipe en forma de sonido o calor, a lo cual se le conoce como amortiguamiento. El efecto que tiene esta disipación de energía en la respuesta de un sistema vibratorio es la reducción de los desplazamientos que se presenten en este. Aunque la energía disipada suele ser relativamente pequeña, la consideración de un efecto de disipación es importante para una aproximación correcta de la respuesta del sistema. Al igual que los elementos de rigidez, la inclusión de un elemento de disipación en un sistema vibratorio no significa que exista un amortiguador de forma física en el sistema de estudio, sino que simboliza los efectos de disipación de energía en el sistema. Estos elementos suelen ser considerados con masas despreciables [7].

Principalmente existen tres tipos de amortiguamiento: amortiguamiento viscoso, amortiguamiento de fricción seca y amortiguamiento sólido. En el presente documento se

considerarán solamente los efectos del amortiguamiento viscoso. Este caso presenta una respuesta ante la velocidad relativa en los extremos del elemento de la siguiente forma:

$$F = c\dot{x} \quad (2.46)$$

Donde F representa la fuerza de reacción, \dot{x} la velocidad relativa y c la constante de amortiguamiento.

Al igual que para los elementos de rigidez, se puede llegar a una versión simplificada de un sistema vibratorio al reducir el número de elementos que lo componen, en función de la complejidad y objetivo de análisis de este. La simplificación dependerá de la disposición de los elementos de disipación, ya sea en serie o en paralelo, teniendo entonces la posibilidad de sustituir grupos de elementos de disipación por un elemento de disipación equivalente según

- En paralelo: $c_{eq} = \sum_{i=1}^n c_i$ (2.47)

- En serie: $c_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^n c_i^{-1}$ (2.48)

2.3.5 Elementos de masa o inercia

Los elementos de inercia son representados por las masas de los componentes de los sistemas vibratorios, los cuales se consideran cuerpos rígidos. Estos pueden ganar o perder energía cinética al cambiar su velocidad, ya sea una velocidad lineal o angular. La energía asociada al movimiento lineal o angular de un elemento de inercia está denotada por las ecuaciones (2.32) y (2.33), respectivamente.

2.3.6 Respuesta bajo una fuerza armónica

Al someter un sistema vibratorio a una excitación armónica, la respuesta de este también tendrá un comportamiento armónico. Cabe mencionar que, si la frecuencia de la excitación coincide con la frecuencia natural del sistema, el fenómeno de resonancia se hará presente, conduciendo al sistema en cuestión, de manera progresiva, a deflexiones y fallas excesivas.

Existen parámetros de suma importancia en cualquier sistema vibratorio que cuente elementos de rigidez y de disipación, como lo son la frecuencia natural, amortiguamiento crítico, factor de amortiguamiento, ratio de frecuencia, entre otros. La determinación de algunos de estos parámetros depende directamente del arreglo en el que se encuentre dispuesto el sistema vibratorio, mientras que otros mantienen una definición constante.

Si se considera un sistema vibratorio simple de un grado de libertad con un elemento de masa, un elemento de disipación, un elemento de rigidez y una fuerza de excitación armónica como se muestra en la Figura 19:

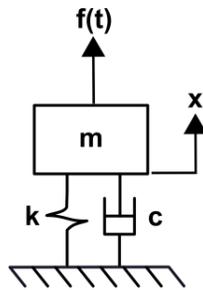


Figura 19: Sistema masa-resorte-amortiguador de 1-GDL.

Se tiene entonces una ecuación de movimiento de la forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (2.49)$$

en donde se deben realizar algunas consideraciones para determinar los diferentes parámetros del sistema.

2.3.6.1 Frecuencia natural

Para la determinación de este parámetro se deben asumir las siguientes consideraciones:

- Constante de amortiguamiento del elemento de disipación igual a cero: $c = 0$
- Fuerza de excitación nula: $F_0 = 0$

Tomando como base la ecuación (2.49), se tiene entonces una ecuación de movimiento de la forma:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.50)$$

Asumiendo una solución para x de la forma $x(t) = A \cos(\omega t - \phi)$, donde A y ϕ denotan la amplitud y el ángulo de fase, respectivamente, siendo ambas constantes determinadas por las condiciones iniciales del sistema, mientras que ω denota la frecuencia de la respuesta. Al sustituir esta solución y su segunda derivada respecto al tiempo en la ecuación (2.50) se tiene:

$$m * (-\omega^2 A \cos(\omega t - \phi)) + k * (A \cos(\omega t - \phi)) = 0 \quad (2.51)$$

Si se divide la ecuación (2.51) entre $A \cos(\omega t - \phi)$ y despejando para ω se tiene:

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (2.52)$$

donde ω_n representa la frecuencia natural del sistema vibratorio.

Cabe mencionar que un sistema vibratorio tendrá una cantidad de frecuencias naturales igual número de grados de libertad de este. Sin embargo, el cálculo de estas para sistemas de dos o más grados de libertad se vuelve cada vez más complejo, puesto que en lugar de tener solamente una ecuación de movimiento (como en el caso de 1-GDL) se tendrán tantas como GDL tenga el sistema en cuestión.

2.3.6.2 Amortiguamiento crítico

Para la determinación de este parámetro se debe asumir la siguiente consideración:

- Fuerza de excitación nula: $F_0 = 0$

Tomando como base la ecuación (2.49), se tiene entonces una ecuación de movimiento de la forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.53)$$

Asumiendo una solución para x de la forma $x(t) = Ce^{st}$, donde C y s son constantes determinadas por las condiciones iniciales del sistema. Al sustituir esta solución, así como su primera y segunda derivada respecto al tiempo en la ecuación (2.53) y dividiéndola entre Ce^{st} se tiene:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.54)$$

con raíces para s de la forma:

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.55)$$

Luego entonces, se tendrá un amortiguamiento crítico cuando el radical de la ecuación (2.55) sea igual a cero, resultando en:

$$c_c = 2\sqrt{km} \quad (2.56)$$

donde c_c denota el valor del amortiguamiento crítico del sistema.

2.3.6.3 Factor de amortiguamiento y ratio de frecuencia

A diferencia de la frecuencia natural y el amortiguamiento crítico propios de un sistema vibratorio, los cuales dependen directamente del arreglo en el que se encuentre dispuesto el sistema vibratorio (que a su vez se ve reflejado en las ecuaciones de movimiento), los parámetros *factor de amortiguamiento* y *ratio de frecuencia* son parámetros con definición constante:

$$\zeta = c/c_c \quad (2.57)$$

$$r = \omega/\omega_n \quad (2.58)$$

Donde ζ denota el factor de amortiguamiento y describe la relación entre el amortiguamiento del sistema y su amortiguamiento crítico, mientras que r denota el ratio de frecuencia y describe la relación entre la frecuencia de la fuerza de excitación del sistema y la frecuencia natural del mismo. Resulta importante mencionar que un sistema vibratorio puede clasificarse de acuerdo con el valor del factor de amortiguamiento, según:

- Subamortiguado: $\zeta < 1$
- Críticamente amortiguado: $\zeta = 1$
- Sobreamortiguado: $\zeta > 1$

2.3.7 Método de Euler para resolución de ecuaciones diferenciales

Este método tiene por objeto obtener una aproximación de un problema bien planteado de valor inicial, en el cual no se obtendrá una aproximación continua a la solución $x(t)$; por el contrario, se generarán aproximaciones a esa solución en varios valores, llamados puntos de red, en un intervalo $[a, b]$. Una vez obtenida la aproximación en los puntos, se podrá obtener por interpolación la solución aproximada en otros puntos del intervalo [9].

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad a \leq t \leq b, \quad x(a) = \alpha \quad (2.59)$$

Primero se establece que los puntos de red tienen una distribución uniforme en todo el intervalo $[a, b]$. Se garantiza esta condición al seleccionar un entero positivo N y los puntos de red:

$$t_i = a + ih, \text{ para cada } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

La distancia común entre los puntos $h = (b - a)/N$ es denominada *tamaño de paso*.

Utilizando el teorema de Taylor para derivar el método de Euler, se supone que la ecuación diferencial (2.59) tiene una solución $x(t)$ con dos derivadas continuas en $[a, b]$, de modo que para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i) \quad (2.60)$$

para algún número ξ_i en (t_i, t_{i+1}) . Si $h = t_{i+1} - t_i$, entonces:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \quad (2.61)$$

y, como $y(t)$ satisface la ecuación (2.59):

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i) \quad (2.62)$$

El método de Euler construye $w_i \approx y(t_i)$ para cada $i = 0, 1, 2, \dots, N$, al eliminar el término restante. Por tanto:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \text{ para cada } i = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (2.63)$$

A la ecuación (2.63) se le llama *ecuación de diferencias* asociada al método de Euler.

2.3.8 Simulación por elemento finito para obtención de frecuencias naturales

En el presente trabajo se realizarán simulaciones por elemento finito para la obtención de frecuencias naturales de diferentes ensambles por medio del software NX. Dichas simulaciones se llevarán a cabo haciendo uso del solucionador *NX Nastran* con un análisis de tipo estructural por medio de la solución “*SOL 103 Response Simulation*”.

Con la finalidad de comprobar la validez y fiabilidad del procedimiento a seguir aplicado en las simulaciones posteriores, se compararán los resultados para la obtención de frecuencias naturales de una simulación por elemento finito respecto a un cálculo analítico de estas.

El elemento a analizar será una viga de acero con sección cuadrada de 20 [mm] por lado y una longitud de 400 [mm], considerando ausencia de apoyos y con las siguientes propiedades:

$$\rho = 7829 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

$$E = 206.94 \text{ [GPa]}$$

Siendo ρ la densidad y E el módulo de elasticidad. Estos valores son los registrados en NX.

En [10], la ecuación para el cálculo de la frecuencia natural de una viga uniforme sin apoyo en ambos extremos es:

$$f = \frac{K_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EIg}{wl^4}} \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad (2.64)$$

Siendo K_n una constante experimental, donde n representa el modo normal de vibración correspondiente, E el módulo de elasticidad, I el momento de inercia de área, g la gravedad, w el peso como carga distribuida y l la longitud de la viga.

Si w puede representarse por:

$$w = \frac{s^2 l \rho g}{l} \left[\frac{N}{m} \right] \quad (2.65)$$

siendo s la magnitud de un lado del perfil cuadrado. Entonces la ecuación (2.64) se puede expresar de la forma:

$$f = \frac{K_n}{2\pi} \sqrt{\frac{Es^2}{12\rho l^4}} [s^{-1}] \quad (2.66)$$

de tal forma que, sustituyendo los valores de E , s , ρ y l , se tiene:

$$f = K_n \cdot 29.52 [s^{-1}] \quad (2.67)$$

En [10], los valores de K_n para los primeros cinco modos normales de vibración de una viga de sección uniforme sin apoyo en ambos extremos son:

$$\begin{array}{lll} K_1 = 22.4 & K_3 = 121 & K_5 = 299 \\ K_2 = 61.7 & K_4 = 200 & \end{array}$$

Por lo tanto, sustituyendo estos valores en la ecuación (2.67), los primeros cinco modos normales de vibración de la viga en cuestión tienen asociadas las siguientes frecuencias naturales:

$$\begin{array}{lll} f_1 = 661 [Hz] & f_3 = 3572 [Hz] & f_5 = 8828 [Hz] \\ f_2 = 1821 [Hz] & f_4 = 5902 [Hz] & \end{array}$$

Habiendo obtenido estos valores, el siguiente paso será modelar y simular la viga descrita en NX para la obtención de sus frecuencias naturales.

El mallado para la simulación se realizó por elementos tetraédricos de diez nodos con un tamaño de 15 [mm], siendo este valor un 25% más fino que el valor automático recomendado

por el programa de CAD. Cabe mencionar que, en la simulación por elemento finito, cada frecuencia natural puede repetirse dos o más veces y variar ligeramente entre sí en función de si el modo normal de vibración al que está asociado puede presentarse en diferentes planos, de forma rotacional o de expansión/reducción. Los desplazamientos mostrados en las siguientes imágenes están dados en milímetros.

El primer modo normal de vibración presentó una frecuencia natural de 654 [Hz] en dos planos. Los desplazamientos asociados a este modo se muestran en la Figura 20:

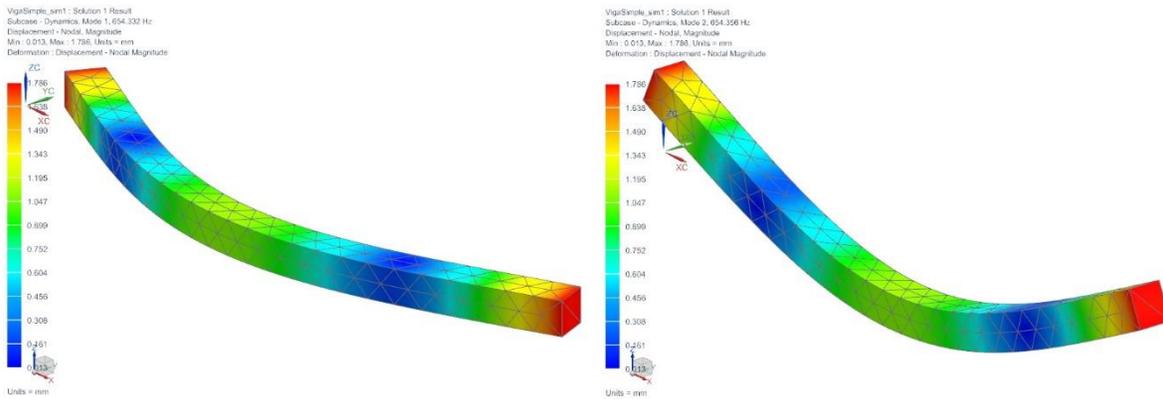


Figura 20: Frecuencia natural para el primer modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.

El segundo modo normal de vibración presentó una frecuencia natural de 1774 [Hz] en dos planos. Los desplazamientos asociados a este modo se muestran en la Figura 21:

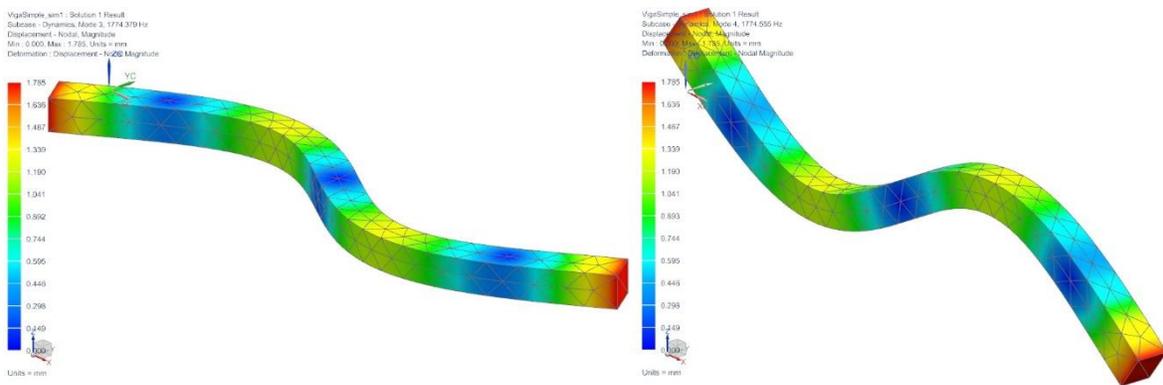


Figura 21: Frecuencia natural para el segundo modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.

El tercer modo normal de vibración presentó una frecuencia natural de 3400 [Hz] y 3401 [Hz] en dos planos, y de 3605 [Hz] de forma rotacional. Los desplazamientos asociados a este modo se muestran en la Figura 22 y la Figura 23:

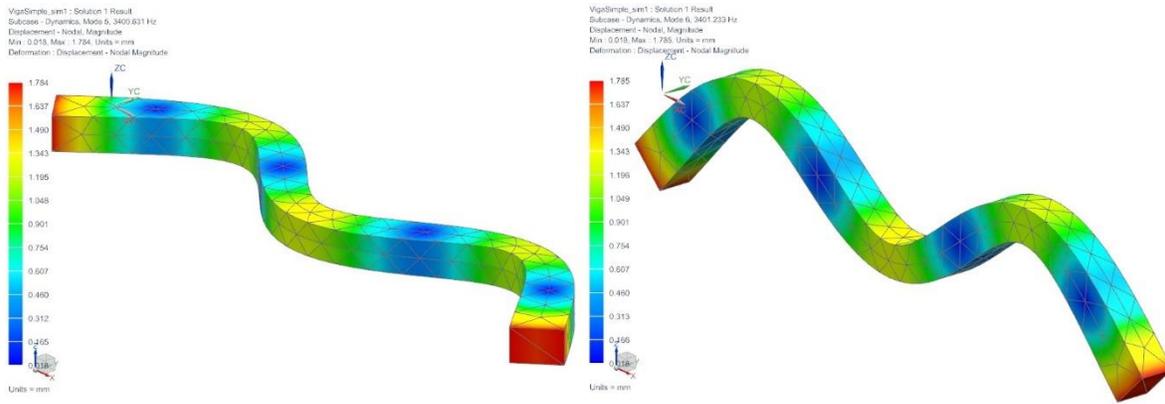


Figura 22: Frecuencia natural para el tercer modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.

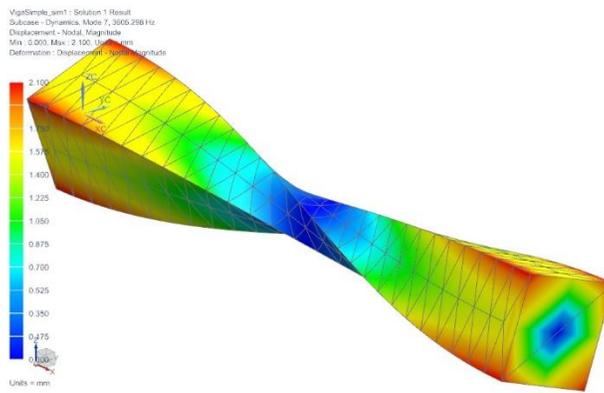


Figura 23: Frecuencia natural para el tercer modo normal de vibración en rotación de una viga sin apoyo.

El cuarto modo normal de vibración presentó una frecuencia natural de 5465 [Hz] y 5466 [Hz] en dos planos, y de 6425 [Hz] en reducción. Los desplazamientos asociados a este modo se muestran en la Figura 24 y la Figura 25:

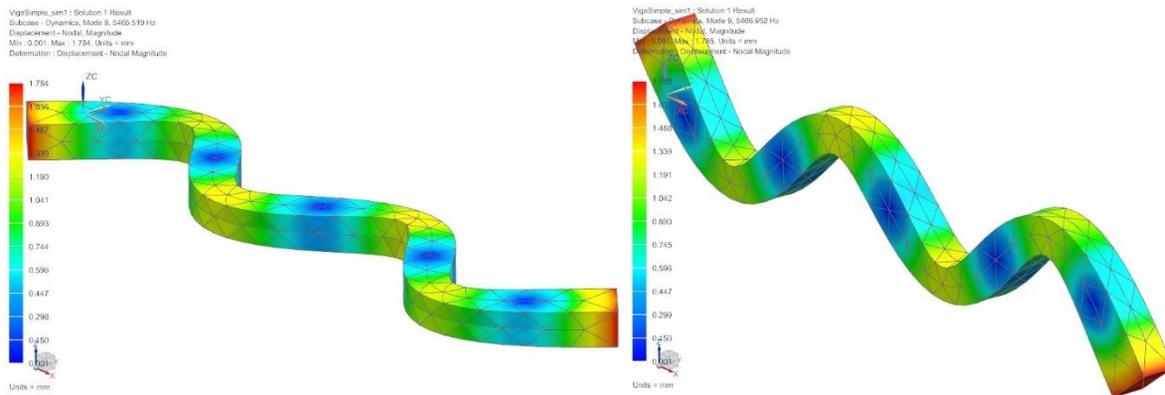


Figura 24: Frecuencia natural para el cuarto modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.

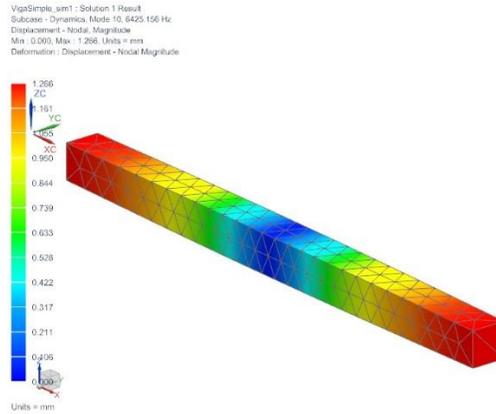


Figura 25: Frecuencia natural para el cuarto modo normal de vibración en reducción de una viga sin apoyo.

Por último, el quinto modo normal de vibración presentó una frecuencia natural de 7904 [Hz] y 7907 [Hz] en dos planos, y de 7212 [Hz] de forma rotacional. Los desplazamientos asociados a este modo se muestran en la Figura 26 y la Figura 27:

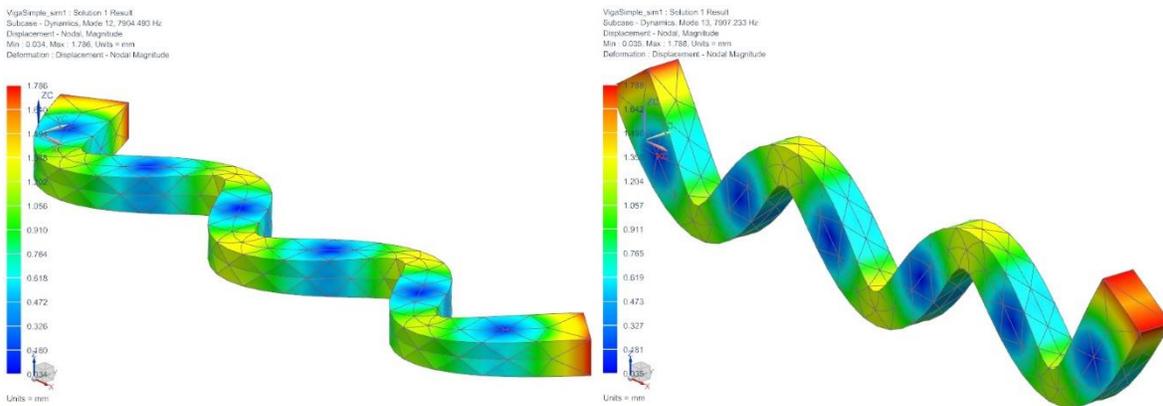


Figura 26: Frecuencia natural para el quinto modo normal de vibración en dos planos de una viga sin apoyo.

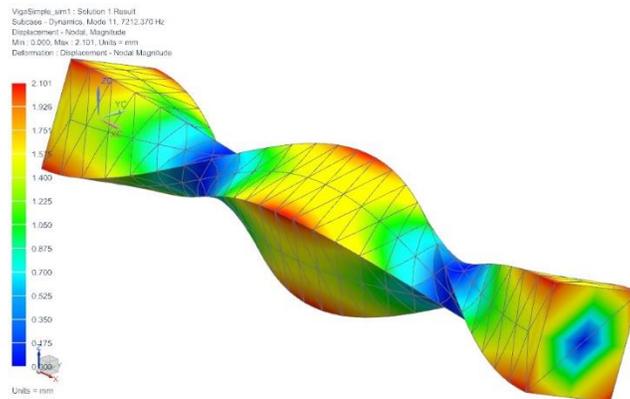


Figura 27: Frecuencia natural para el quinto modo normal de vibración en rotación de una viga sin apoyo.

El cálculo del error porcentual del resultado de frecuencia natural obtenido por medio de simulación por elemento finito respecto al calculado de forma analítica se realizará de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$error = \frac{|f_{sim} - f_{analít}|}{f_{analít}} \cdot 100\% \quad (2.68)$$

Siendo f_{sim} la frecuencia natural obtenida por simulación, y $f_{analít}$ la frecuencia natural calculada analíticamente. Para estos cálculos no se considerarán los resultados asociados a modos naturales de vibración en rotación ni en expansión/reducción, debido a que la ecuación (2.64) no puede emplearse para calcular las frecuencias naturales de estos modos. Por lo tanto, comparando el menor valor de frecuencia natural asociado a cada modo natural de vibración, se tienen los siguientes resultados:

Tabla 2: Error asociado a los cálculos de frecuencia natural vía simulación.

Modo	f_{sim} [Hz]	$f_{analít}$ [Hz]	Error [%]
1	654	661	1.11
2	1774	1821	2.62
3	3400	3571	4.83
4	5465	5903	7.45
5	7904	8826	10.47

En la Tabla 2 puede observarse que el error aumenta conforme se avanza en el modo normal de vibración en cuestión, sin embargo, debido a que se trabajará siempre con la frecuencia natural más baja de cada ensamble (la asociada al primer modo normal de vibración), es totalmente aceptable un error de aproximadamente 1.11%.

Capítulo 3

3 MODELADO Y ANÁLISIS DE LA MÁQUINA HERRAMIENTA

En ingeniería resulta común recurrir a los modelos para representar aquello que nos rodea y que se quiera estudiar. Tal es el caso de las máquinas herramienta, las cuales involucran una gran cantidad de áreas de estudio debido a su complejidad.

Las máquinas herramientas convencionales suelen contar con una base o bastidor considerablemente grande y pesado, pero a su vez con una capacidad de amortiguamiento considerable para no propiciar una alta transmisibilidad de vibraciones. Sin embargo, plantear propuestas distintas e innovadoras en cuanto al diseño de nuevas máquinas herramienta, podría repercutir en una mayor transmisión de vibraciones mecánicas a lo largo de su estructura, en función de la disposición y características que esta tenga.

Tal es el caso del presente documento: se analizará la respuesta que tendrán distintas propuestas de diseño de una máquina herramienta paralela para deducir cuál presenta un mejor desempeño en términos de vibraciones mecánicas. La estructura a partir de la cual parten las propuestas de diseño de la máquina herramienta es la mostrada en la Figura 28.

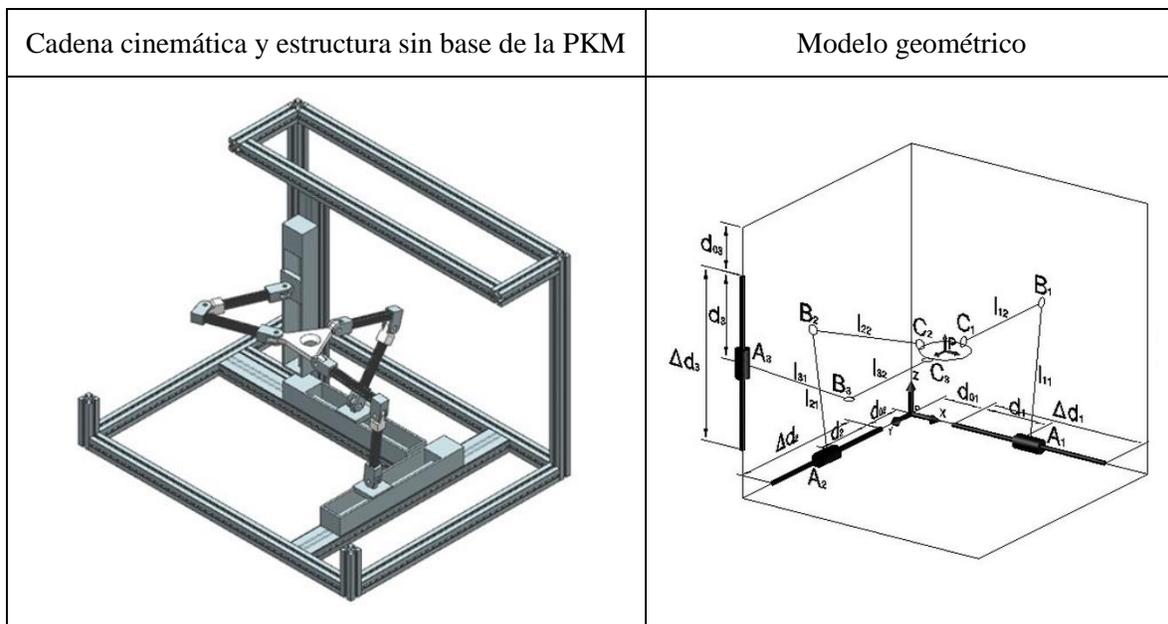


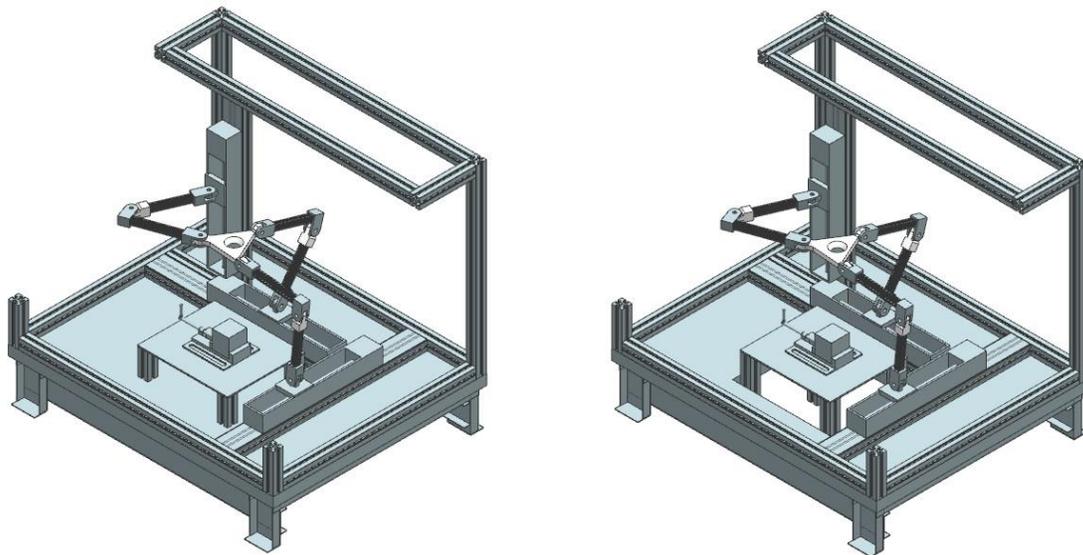
Figura 28: Propuesta de PKM.

Esta tiene una configuración paralela de tres grados de libertad de traslación con una base móvil (círculo definido por C_1 , C_2 y C_3) conectada a una base fija por medio de tres cadenas cinemáticas PRRR (Prismática-Revolución-Revolución-Revolución). Esta base fija está comprendida por tres guías localizadas en A_1 , A_2 y A_3 . Los ejes de las tres juntas de revolución de cada cadena se localizan en los puntos A_i , B_i y C_i ($i = 1, 2, 3$), respectivamente. Los ejes de las tres juntas prismáticas pasan a través del punto A_i y son paralelas a los ejes X, Y y Z, respectivamente. El punto P representa el centro de la plataforma móvil. Las longitudes de los eslabones están denotadas por l_{i1} , l_{i2} y l_{i3} , respectivamente. La distancia a la carrera de las juntas prismáticas está definida por d_{01} , y la carrera de estas está definida por d_i .

La base fija asociada a la pieza de trabajo es el elemento que da pie a la generación de dos propuestas distintas:

- 1) Unir la base fija de las cadenas cinemáticas PRRR con la de la pieza de trabajo.
- 2) Separar la base fija de las cadenas cinemáticas PRRR de la asociada a la pieza de trabajo.

Llegando a las dos propuestas mostradas en la Figura 29:



a) Base conjunta

b) Bases separadas

Figura 29: Comparación de propuestas de diseño para la PKM.

3.1 Modelado de un sistema vibratorio de una máquina herramienta paralela

Tal como se mostró en la Figura 18, se puede modelar cualquier sistema como un conjunto de elementos de masa, rigidez y disipación dispuestos en función del arreglo que tengan los componentes del sistema de estudio. Esta modelización puede generarse de lo complejo a lo sencillo o viceversa, de acuerdo con la finalidad del estudio. Debido a que el análisis de las propuestas de diseño de la máquina herramienta se abordará de una forma no tan elaborada y compleja, se partirá de la modelización sencilla mínima para cada una de estas y, posteriormente, se discutirá si resulta necesario elaborar un modelo más detallado.

A continuación, en la Figura 30 y la Figura 31 podemos observar algunos ejemplos de modelización de máquinas herramienta típicas.

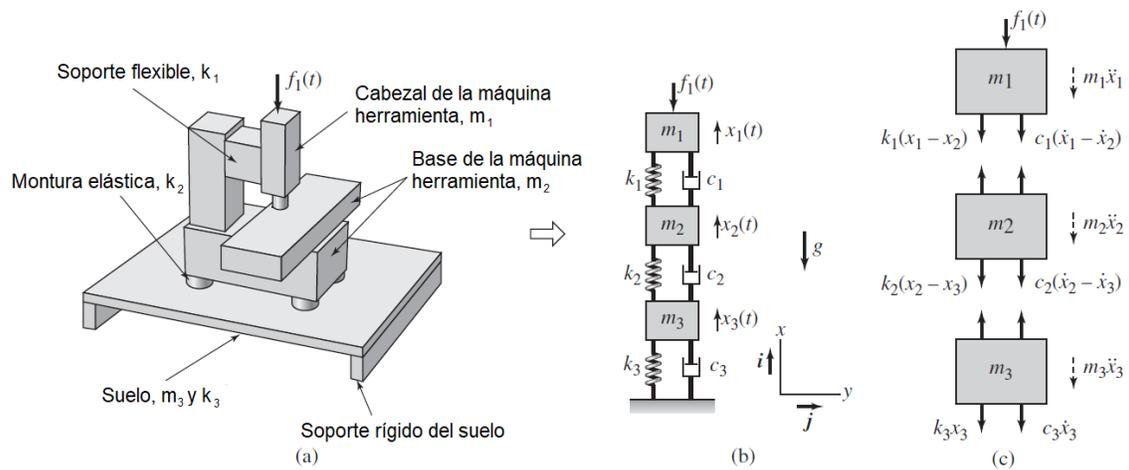


Figura 30: (a) Máquina fresadora; (b) modelo vibratorio; (c) diagrama de cuerpo libre de los elementos inerciales [11].

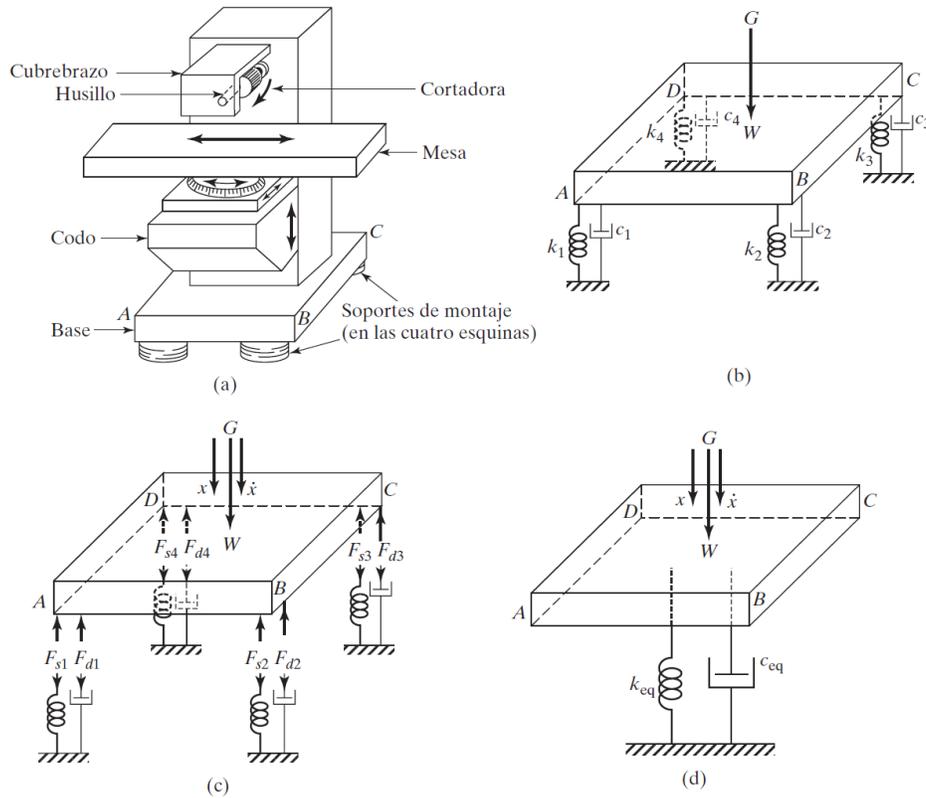


Figura 31: Fresadora horizontal: sistema físico (a) y modelado (b) con descomposición de fuerzas (c) y equivalencia (d) [7].

En la Figura 30 se muestra una modelización que divide la máquina herramienta en tres componentes: cabezal, base y suelo. Estos componentes se encuentran interconectados por monturas y soportes, los cuales desempeñan el papel de elementos de rigidez y amortiguamiento en el sistema. El modelo vibratorio del ejemplo planteado resulta en un sistema de tres grados de libertad x_1 , x_2 y x_3 con disposición en serie.

Por otro lado, en la Figura 31 se muestra una modelización simple de una máquina herramienta, donde esta se representa como una sola masa apoyada en cuatro monturas que la conectan al suelo. Posteriormente se simplifica aún más la propuesta, obteniendo la rigidez y el amortiguamiento equivalente asociados a las cuatro monturas. En este caso el modelo vibratorio resulta en un sistema de un grado de libertad.

Aunado a los ejemplos de formas de modelar una máquina herramienta descritos anteriormente, es preciso considerar también la modelización de la interacción entre la pieza de trabajo y la herramienta de corte. Esto puede ser visualizado en la Figura 32, donde son

considerados elementos de rigidez y amortiguamiento asociados a la herramienta y la pieza de trabajo, así como una masa asociada a la herramienta. Cabe destacar que, aunque no es considerada una masa inherente a la pieza de trabajo, es necesario añadir una si también se estudiará la respuesta que esta tenga a lo largo del proceso de maquinado. De esta forma, y siguiendo la propuesta de modelo planteada, se considerará la fuerza de corte F_c como la fuerza de excitación del sistema, fungiendo también como medio de conexión entre la herramienta y la pieza de trabajo. En esta propuesta de modelización es correcto asumir que el desplazamiento que tendrá la herramienta será el mismo que tendrá la pieza de trabajo, debido a que estos elementos se mantienen en contacto durante todo el proceso de maquinado, resultando así en un sistema vibratorio de un grado de libertad.

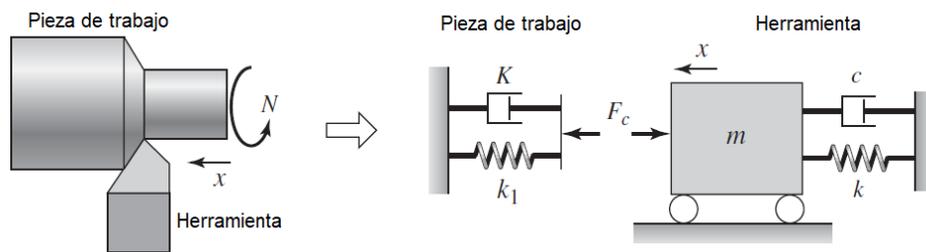


Figura 32: Modelo de una herramienta y pieza de trabajo durante un proceso de corte [11].

Conjugando las formas de modelado propuestas en los anteriores ejemplos, se podrán generar modelos vibratorios a partir de los ensambles realizados en el software de CAD NX, los cuales se analizarán en las siguientes secciones.

3.1.1 Propuesta de bases separadas

3.1.1.1 Sistema de un grado de libertad

Para la propuesta de bases separadas se comenzó a modelizar la estructura de forma muy general, donde todos los elementos que componen la sección inherente a la herramienta son englobados en un sistema masa-resorte-amortiguador, mientras que los elementos que componen la sección de la pieza de trabajo se engloban en otro, siendo conectados por la fuerza de corte presente en la interacción de la herramienta sobre la pieza de trabajo a lo largo del proceso de corte, resultando en el siguiente modelo vibratorio:

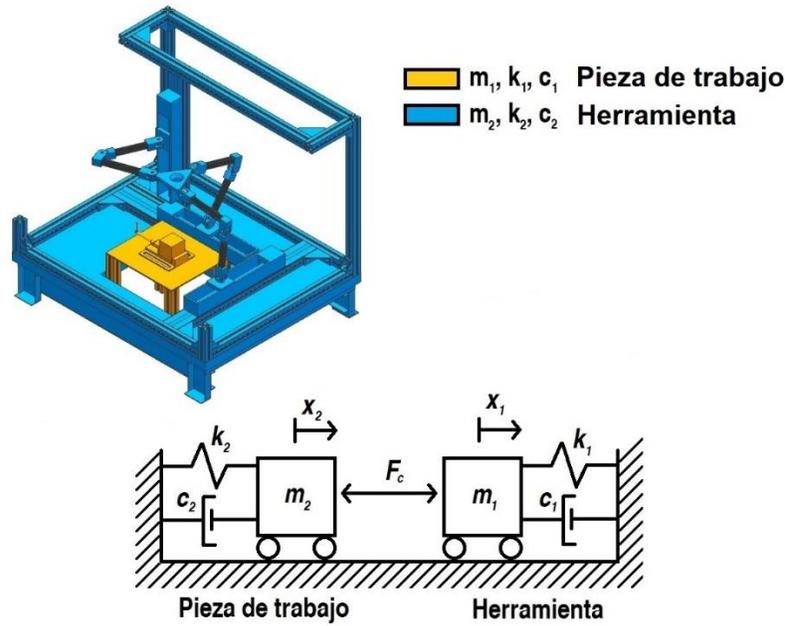


Figura 33: Modelo vibratorio de 1-GDL para PKM (abajo) con asignación de colores (arriba).

En la Figura 33 se puede apreciar una asignación de elementos por colores, en la que los componentes de color azul corresponden a los elementos m_1 , k_1 y c_1 del modelo vibratorio asociado, mientras que, los componentes de color amarillo corresponden a los elementos m_2 , k_2 y c_2 .

Este modelo vibratorio tiene solamente un grado de libertad (descrito por la variable x_1) puesto que, como se mencionó en secciones anteriores, se asume que el desplazamiento que tendrá la herramienta será el mismo que presentará la pieza de trabajo.

La deducción de la ecuación de movimiento para este sistema se realizará por medio de la ecuación de movimiento de Lagrange, con la finalidad de integrar en una sola ecuación ambos subsistemas. Por lo tanto, atendiendo las ecuaciones (2.40) y (2.41), respectivamente:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_1^2 \tag{3.1}$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_1^2 \tag{3.2}$$

Posteriormente se definen las fuerzas no conservativas presentes en el sistema según la ecuación (2.39):

$$W^{nc} = [F_c - c_1\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_1]\delta x_1 \quad (3.3)$$

Finalmente se sustituyen las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) en la ecuación de movimiento de Lagrange (2.42). Desarrollando:

$$\ddot{x}_1(m_1 + m_2) + \dot{x}_1(c_1 + c_2) + x_1(k_1 + k_2) = F_c \quad (3.4)$$

3.1.1.2 Sistema de tres grados de libertad

Separar las bases de cada estructura en el modelo vibratorio surge al plantear una propuesta más compleja del sistema de un grado de libertad, con la finalidad de poder obtener una solución más detallada. De esta forma se obtiene el siguiente modelo vibratorio:

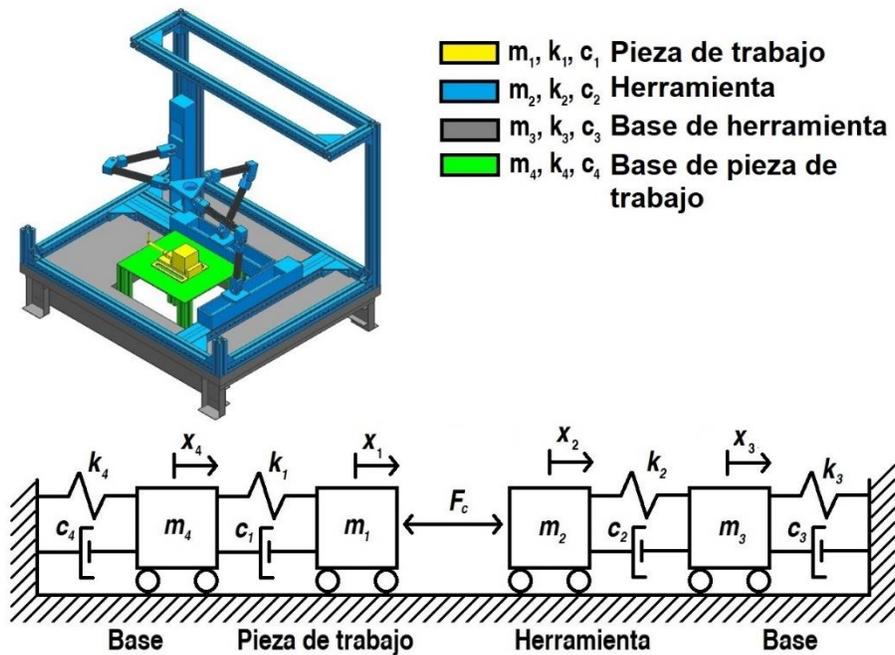


Figura 34: Modelo vibratorio de 3-GDL para la PKM (abajo) con asignación de colores (arriba).

En la Figura 34 se puede apreciar una asignación de elementos por colores, en la que los componentes de color amarillo corresponden a los elementos m_1 , k_1 y c_1 del modelo vibratorio asociado, los componentes de color azul corresponden a los elementos m_2 , k_2 y c_2 , los componentes de color gris corresponden a los elementos m_3 , k_3 y c_3 , y los componentes de color verde corresponden a los elementos m_4 , k_4 y c_4 .

En este modelo vibratorio se tiene un total de cuatro sistemas masa-resorte-amortiguador agrupados de dos en dos. Los pares de masas están conectados por medio de la fuerza de corte, de la misma forma que el sistema de un grado de libertad, por lo que también se considera que x_1 es igual a x_2 , teniendo un total de tres grados de libertad, descritos por las variables x_1 , x_3 y x_4 .

La deducción de las ecuaciones de movimiento para este caso, debido al número de grados de libertad, se realizará por medio de la ecuación de movimiento de Lagrange. Primero se define la energía cinética y potencial del sistema, por medio de las ecuaciones (2.40) y (2.41), respectivamente:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_4)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1 + \dot{x}_4)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_1 + \dot{x}_3 + \dot{x}_4)^2 + \frac{1}{2}m_4\dot{x}_4^2 \quad (3.5)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_4)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_3 + x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3x_3^2 + \frac{1}{2}k_4x_4^2 \quad (3.6)$$

Posteriormente se definen las fuerzas no conservativas presentes en el sistema según la ecuación (2.39):

$$W^{nc} = [F_c - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_4)]\delta x_1 + [-c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) - c_3\dot{x}_3]\delta x_3 \\ + [-c_1(\dot{x}_4 - \dot{x}_1) - c_4\dot{x}_4]\delta x_4 \quad (3.7)$$

Finalmente se sustituyen las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) en la ecuación de movimiento de Lagrange (2.42) para x_1 , x_3 y x_4 . Desarrollando:

$$\ddot{x}_1(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{x}_3m_3 + \ddot{x}_4(m_1 + m_2 + m_3) + \dot{x}_1(c_1 + c_2) + \dot{x}_3(-c_2) \\ + \dot{x}_4(-c_1) + x_1(k_1 + k_2) + x_3(-k_2) + x_4(-k_1) = F_c \quad (3.8)$$

$$\ddot{x}_1m_3 + \ddot{x}_3m_3 + \ddot{x}_4m_3 + \dot{x}_1(-c_2) + \dot{x}_3(c_2 + c_3) + x_1(-k_2) + x_3(k_2 + k_3) = 0 \quad (3.9)$$

$$\ddot{x}_1(m_1 + m_2 + m_3) + \ddot{x}_3m_3 + \ddot{x}_4(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + \dot{x}_1(-c_1) \\ + \dot{x}_4(c_1 + c_4) + x_1(-k_1) + x_4(k_1 + k_4) = 0 \quad (3.10)$$

De forma que se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento de forma matricial:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & m_3 & m_1 + m_2 + m_3 \\ m_3 & m_3 & m_3 \\ m_1 + m_2 + m_3 & m_3 & m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & -c_1 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_1 + c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 + k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

o bien:

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{X}} + \mathbb{C}\dot{\mathbb{X}} + \mathbb{K}\mathbb{X} = \mathbb{F} \tag{3.12}$$

siendo \mathbb{M} , \mathbb{C} , \mathbb{K} , $\ddot{\mathbb{X}}$, $\dot{\mathbb{X}}$, \mathbb{X} y \mathbb{F} las matrices de masa, amortiguamiento, rigidez, aceleración, velocidad, desplazamiento y fuerza, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} &= \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & m_3 & m_1 + m_2 + m_3 \\ m_3 & m_3 & m_3 \\ m_1 + m_2 + m_3 & m_3 & m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \end{pmatrix} & \ddot{\mathbb{X}} &= \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{pmatrix} \\
\mathbb{C} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & -c_1 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_1 + c_4 \end{pmatrix} & \dot{\mathbb{X}} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} \\
\mathbb{K} &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 + k_4 \end{pmatrix} & \mathbb{X} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \mathbb{F} &= \begin{pmatrix} F_c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.1.2 Propuesta de base conjunta

3.1.2.1 Sistema de dos grados de libertad

En el caso de la propuesta de diseño con base conjunta se englobarán por separado en sistemas masa-resorte-amortiguador los elementos que conformen a la estructura de la herramienta, de la pieza de trabajo y de la base, teniendo en cuenta que las primeras dos no están conectadas a tierra directamente, sino a una base común, la cual a su vez sí está conectada a tierra. A partir de lo anteriormente mencionado, se tiene el siguiente modelo vibratorio:

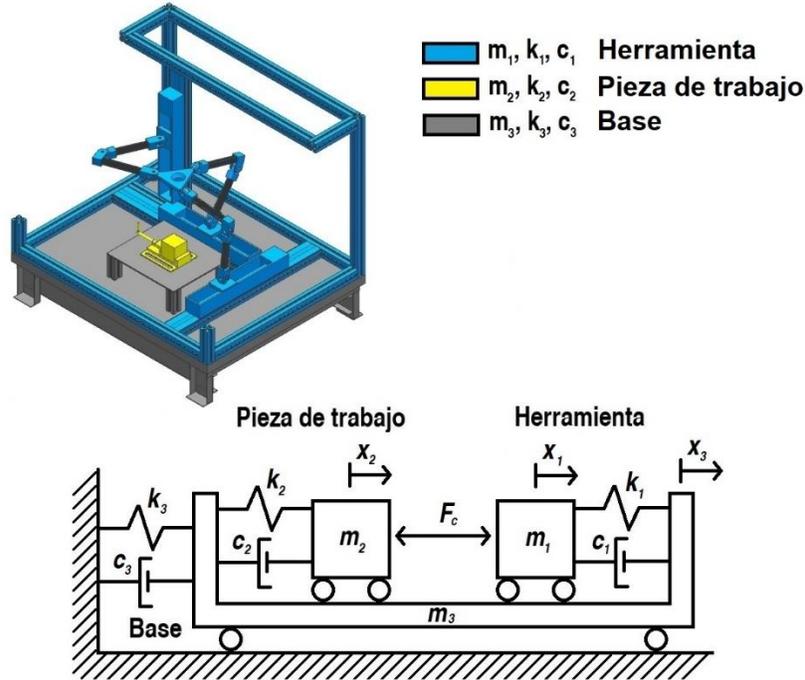


Figura 35: Modelo vibratorio de 2-GDL para la PKM (abajo) con asignación de colores (arriba).

En la Figura 35 se puede apreciar una asignación de elementos por colores, en la que los componentes de color azul corresponden a los elementos m_1 , k_1 y c_1 del modelo vibratorio asociado, los componentes de color amarillo corresponden a los elementos m_2 , k_2 y c_2 , y los componentes de color gris corresponden a los elementos m_3 , k_3 y c_3 .

En este modelo se pueden apreciar tres sistemas masa-resorte-amortiguador, de los cuales dos (m_1 y m_2) están conectados a la misma base (m_3). Manteniendo la misma consideración de igualdad de desplazamientos para la pieza de trabajo y la herramienta ($x_1 = x_2$), se tiene entonces un sistema vibratorio de dos grados de libertad, descritos por las variables x_1 y x_3 .

Al igual que para el modelo vibratorio de 3-GDL se obtendrán las ecuaciones del movimiento por medio de la ecuación de movimiento de Lagrange. Primero se define la energía potencial y cinética de acuerdo con las ecuaciones (2.40) y (2.41), respectivamente:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \tag{3.13}$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_3^2 \tag{3.14}$$

Posteriormente se definen las fuerzas no conservativas dentro del sistema, según la ecuación (2.39):

$$W^{nc} = [F_c - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) - c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)]\delta x_1 + [-c_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) - c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) - c_3\dot{x}_3]\delta x_3 \quad (3.15)$$

Finalmente se sustituyen las ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.15) en la ecuación de movimiento de Lagrange (2.42) para x_1 y x_3 . Desarrollando:

$$\ddot{x}_1(m_1 + m_2) + \ddot{x}_3(m_1 + m_2) + \dot{x}_1(c_1 + c_2) + \dot{x}_3(-c_1 - c_2) + x_1(k_1 + k_2) + x_3(-k_1 - k_2) = F_c \quad (3.16)$$

$$\ddot{x}_1(m_1 + m_2) + \ddot{x}_3(m_1 + m_2 + m_3) + \dot{x}_1(-c_1 - c_2) + \dot{x}_3(c_1 + c_2 + c_3) + x_1(-k_1 - k_2) + x_3(k_1 + k_2 + k_3) = 0 \quad (3.17)$$

De esta forma, se tienen las siguientes ecuaciones de movimiento de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_1 + m_2 \\ m_1 + m_2 & m_1 + m_2 + m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 - c_2 \\ -c_1 - c_2 & c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 - k_2 \\ -k_1 - k_2 & k_1 + k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

o bien:

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{X}} + \mathbb{C}\dot{\mathbb{X}} + \mathbb{K}\mathbb{X} = \mathbb{F} \quad (3.19)$$

siendo \mathbb{M} , \mathbb{C} , \mathbb{K} , $\ddot{\mathbb{X}}$, $\dot{\mathbb{X}}$, \mathbb{X} y \mathbb{F} las matrices de masa, amortiguamiento, rigidez, aceleración, velocidad, desplazamiento y fuerza, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_1 + m_2 \\ m_1 + m_2 & m_1 + m_2 + m_3 \end{pmatrix} & \ddot{\mathbb{X}} &= \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} \\ \mathbb{C} &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 - c_2 \\ -c_1 - c_2 & c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix} & \dot{\mathbb{X}} &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \\ \mathbb{K} &= \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 - k_2 \\ -k_1 - k_2 & k_1 + k_2 + k_3 \end{pmatrix} & \mathbb{X} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mathbb{F} &= \begin{pmatrix} F_c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Determinación de los elementos de rigidez y disipación del sistema vibratorio

Dentro de las ecuaciones de movimiento del sistema de cada propuesta deben ser determinados los valores de los elementos de masa, rigidez y amortiguamiento para posteriormente poder resolver dichas ecuaciones para los desplazamientos de cada sistema.

La manera más exacta de obtener los valores de dichos elementos es por medio de mediciones experimentales. Esto puede resultar sencillo para los elementos de masa, pero para el caso de la rigidez y amortiguamiento se requiere equipos e instrumentación especializada con la que no se puede disponer fácilmente. Es por ello que se utilizarán otros medios para su determinación.

La masa de los elementos puede obtenerse por medio de un software de CAD, generando un modelo sólido de cada pieza y asignándoles el material correspondiente. Por otro lado, el cálculo de los valores de los elementos de rigidez y amortiguamiento requerirá de diversas ecuaciones enunciadas a lo largo del presente documento.

En primera instancia se determinarán por medio de métodos de elemento finito los valores para el sistema de 1-GDL, los cuales a su vez servirán para calcular los valores asociados a los elementos del sistema de 3-GDL por medio de distintas ecuaciones. Finalmente se relacionarán los valores de los sistemas de 3-GDL y 2-GDL para obtener una aproximación de este último.

Para todos los cálculos será necesario considerar los siguientes valores de masa, obtenidos por medio del software NX, a partir de las geometrías y materiales planteados (la asignación de estos materiales se presenta más adelante):

Tabla 3: Valores de masa.

Sistema	Masa	Magnitud [kg]
1-GDL	m_1	305.1013
	m_2	11.8083
2-GDL	m_1	50.208
	m_2	4.2585
	m_3	302.3477
3-GDL	m_1	4.2585
	m_2	50.2080
	m_3	254.8933
	m_4	7.5490

3.2.1 Propuesta de bases separadas

3.2.1.1 Sistema de un grado de libertad

La determinación de los valores de rigidez para el sistema de 1-GDL partirá de la ecuación (2.52), la cual relaciona la frecuencia natural con la masa y rigidez de un sistema masa-resorte-amortiguador de 1-GDL, de esta forma se tendrá entonces una frecuencia natural para cada conjunto masa-resorte-amortiguador del sistema de 1-GDL (Figura 36): herramienta y pieza de trabajo.

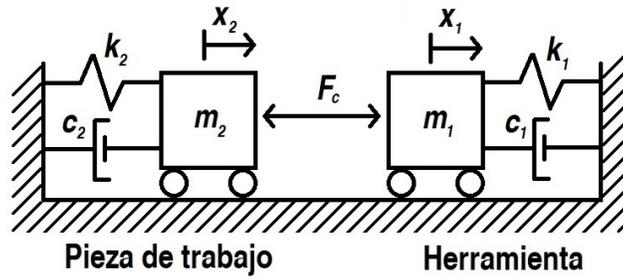


Figura 36: Sistema de 1-GDL.

Una vez teniendo los valores de las masas m_1 y m_2 , sólo resta obtener la magnitud de la frecuencia natural. Esta se calculó por métodos de elemento finito del software NX, en particular haciendo uso del solucionador *NX Nastran* con un análisis de tipo estructural por medio de la solución “*SOL 103 Response Simulation*”.

El mallado de cada subsistema (Figura 37) se realizó por elementos tetraédricos de diez nodos con los parámetros mostrados en la Tabla 4:

Tabla 4: Parámetros de mallado.

Subsistema	Tamaño de elementos [mm]	Componente	Cantidad de cuerpos	Material
Pieza de trabajo	10	Patas (perfiles)	4	Aluminio 6061
	10	Mesa	1	Acero
	10	Prensa	2	Acero
	10	Pieza de trabajo	1	Acero
Herramienta	10	Estructura (perfiles)	16	Aluminio 6061
	15	Guías	3	Acero
	10	Juntas de brazos	16	ABS
	5	Brazos (perfiles)	6	Aluminio 6061
	15	Mesa	1	Latón
	10	Patas (perfiles)	8	Acero

Dentro de NX, las propiedades mecánicas de los materiales acero y latón (a temperatura ambiente de 20 °C) son:

Tabla 5: Propiedades mecánicas del acero y latón.

Material	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	ν [1]	σ_y [MPa]	$\sigma_{m\acute{a}x}$ [MPa]
Acero	7829	206.94	0.288	137.895	276.0
Latón	8409	103.40	0.350	440.0	1100.0

Siendo ρ , E, ν , σ_y y $\sigma_{m\acute{a}x}$ las propiedades de densidad, módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, esfuerzo de cedencia y esfuerzo máximo, respectivamente.

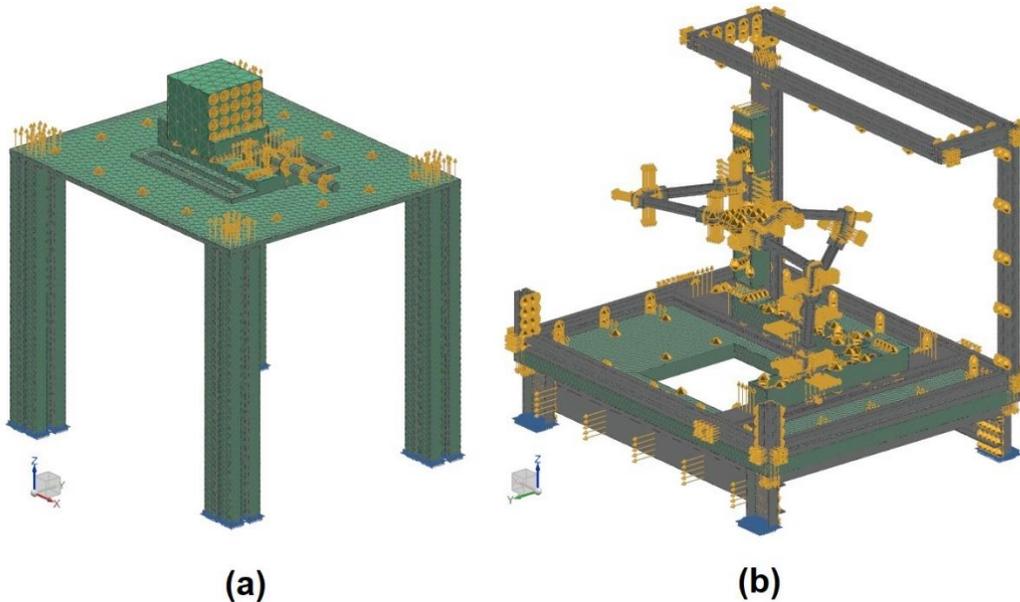


Figura 37: Mallado de subsistemas del sistema de 1-GDL; (a) pieza de trabajo; (b) herramienta.

Para ambos subsistemas se definieron las interacciones entre caras correspondientes de cada cuerpo, obteniendo:

- Herramienta: 50 cuerpos y 71 contactos
- Pieza de trabajo: 8 cuerpos y 10 contactos

Una vez definidos todos los parámetros de las simulaciones, estas demoraron 5 horas 47 minutos para el subsistema herramienta y 2 horas 24 minutos² para el subsistema pieza de trabajo, para obtener los siguientes resultados de frecuencia natural:

- Herramienta: 24.554 [Hz] (Figura 38)
- Pieza de trabajo: 122.73 [Hz] (Figura 39)

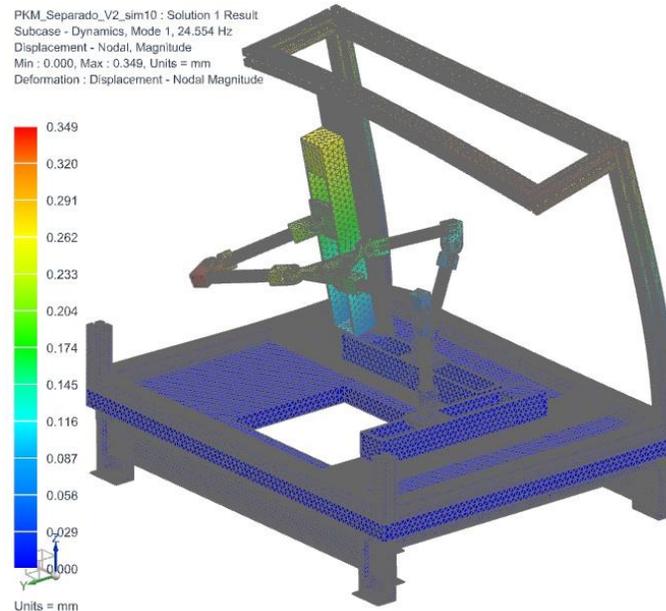


Figura 38: Frecuencia natural del subsistema herramienta para 1-GDL; unidades en milímetros.

² Propiedades del equipo: Procesador Intel® Core™ i5-4570 CPU @ 3.20 GHz, 3201 MHz, con cuatro procesadores principales y cuatro procesadores lógicos, 8.00 GB de RAM.

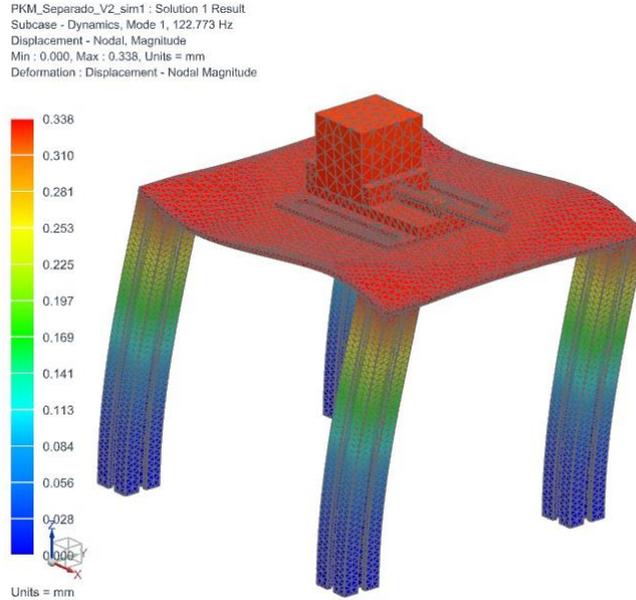


Figura 39: Frecuencia natural del subsistema pieza de trabajo para 1-GDL; unidades en milímetros.

Una vez contando con los valores de frecuencia natural se pueden obtener los valores de rigidez por medio de la ecuación (2.52):

$$k_1 = 183945 [N/m] = 0.183945 [N/\mu m]$$

$$k_2 = 177989 [N/m] = 0.177989 [N/\mu m]$$

Posteriormente se emplean las ecuaciones (2.56) y (2.57) para determinar el valor de los elementos de amortiguamiento del sistema. Para esto se debe proponer una condición de amortiguamiento, así como un factor de amortiguamiento, por lo que se propondrá que el sistema opere bajo una condición subamortiguada con factor de amortiguamiento de 0.5, por lo tanto:

$$c_{c1} = 14982 [N \cdot s/m]$$

$$c_{c2} = 2899 [N \cdot s/m]$$

$$\zeta = 0.5$$

$$c_1 = 7491 [N \cdot s/m] = 0.007491 [N \cdot s/\mu m]$$

$$c_2 = 1449 [N \cdot s/m] = 0.001449 [N \cdot s/\mu m]$$

3.2.1.2 Sistema de tres grados de libertad

Cada subsistema del caso de 3-GDL (Figura 40) es la versión detallada del subsistema correspondiente del caso de 1-GDL, en los cuales las bases son separadas de los elementos que soportan. Dicho de otra forma, los subsistemas del caso de 1-GDL son la simplificación en serie de los subsistemas del caso de 3-GDL, por lo que a partir de los conceptos de rigidez y amortiguamiento equivalente, junto con las ecuaciones (2.45) y (2.48) se puede llegar a lo siguiente:

$$k_{eq1} = k_{1-1GDL} = \left(\frac{1}{k_{2-3GDL}} + \frac{1}{k_{3-3GDL}} \right)^{-1} \quad (3.20)$$

$$k_{eq2} = k_{2-1GDL} = \left(\frac{1}{k_{1-3GDL}} + \frac{1}{k_{4-3GDL}} \right)^{-1} \quad (3.21)$$

$$c_{eq1} = c_{1-1GDL} = \left(\frac{1}{c_{2-3GDL}} + \frac{1}{c_{3-3GDL}} \right)^{-1} \quad (3.22)$$

$$c_{eq2} = c_{2-1GDL} = \left(\frac{1}{c_{1-3GDL}} + \frac{1}{c_{4-3GDL}} \right)^{-1} \quad (3.23)$$

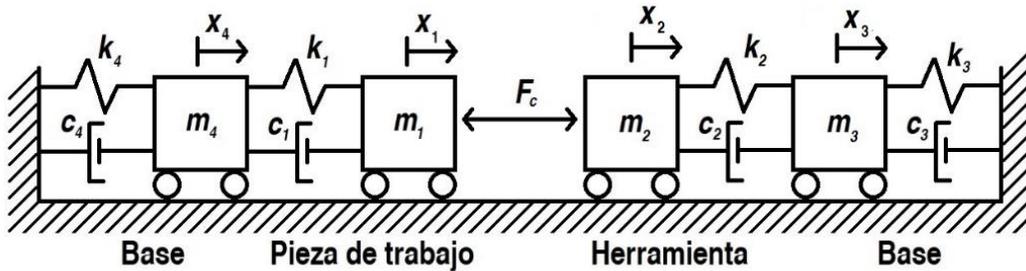


Figura 40: Sistema de 3-GDL.

Siendo k_{i-nGDL} y c_{i-nGDL} el i ésimo elemento de rigidez y amortiguamiento, respectivamente, del sistema de n grados de libertad. De esta forma se tienen dos incógnitas para cada ecuación de valor equivalente, por lo que se propondrán valores de rigidez y amortiguamiento, asumiendo que $k_1 > k_4$, $k_3 > k_2$, $c_1 > c_4$ y $c_3 > c_2$ para el sistema de 3-GDL puesto que la

rigidez y capacidad de amortiguamiento de la base del subsistema herramienta deben ser mayores a la de los elementos que soportan debido a sus geometrías, mientras que para el subsistema pieza de trabajo es lo contrario, también debido a sus respectivas geometrías. Esto puede verse reflejado en los siguientes resultados de cálculo de frecuencia natural, los cuales se realizaron también por métodos de elemento finito del software NX, haciendo uso del solucionador *NX Nastran* con un análisis de tipo estructural por medio de la solución “*SOL 103 Response Simulation*” y considerando los mismos parámetros de la Tabla 4.

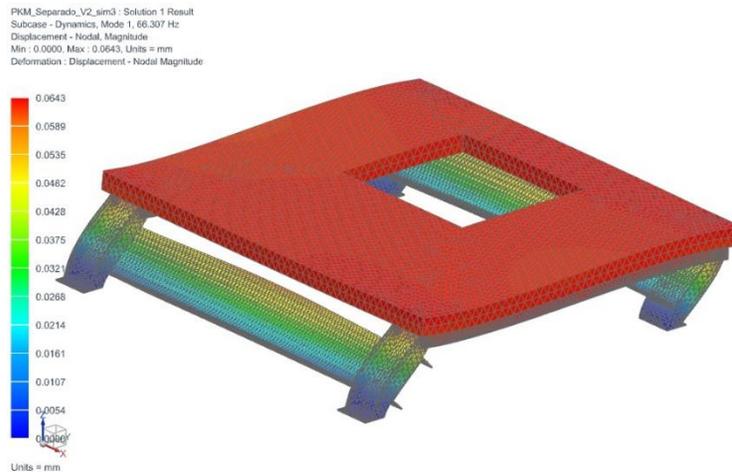


Figura 41: Frecuencia natural del subsistema base de herramienta para 3-GDL; unidades en milímetros.

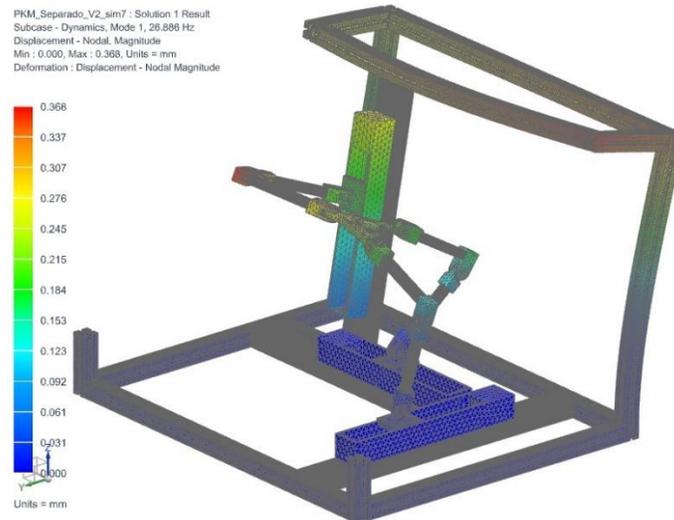


Figura 42: Frecuencia natural del subsistema herramienta para 3-GDL; unidades en milímetros.

En este análisis puede apreciarse que la frecuencia natural asociada a la base de la herramienta (Figura 41), con un valor de 66.307 [Hz], es mayor a la asociada a los elementos

que soporta (Figura 42), que presentan un valor de 26.886 [Hz], lo que significa que la base es más rígida que la estructura.

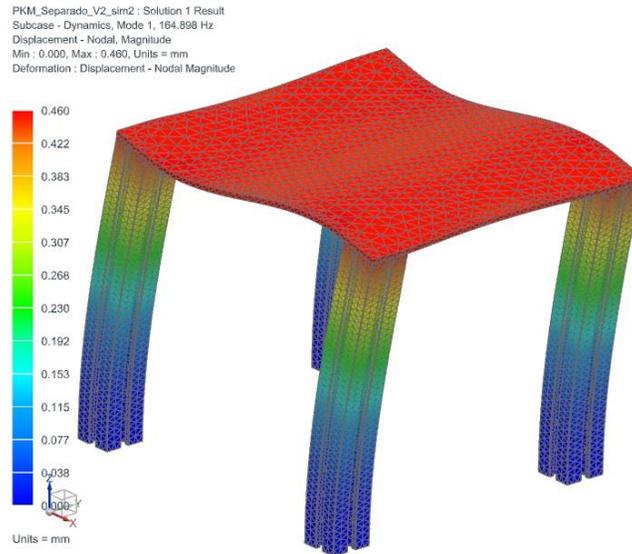


Figura 43: Frecuencia natural del subsistema base de pieza de trabajo para 3-GDL; unidades en milímetros.

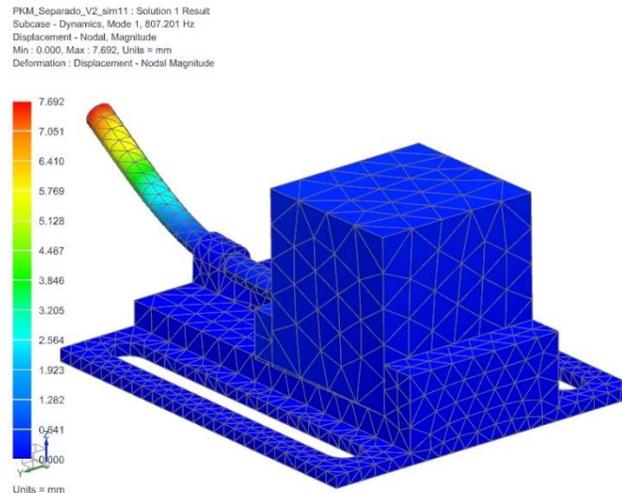


Figura 44: Frecuencia natural del subsistema pieza de trabajo para 3-GDL; unidades en milímetros.

Por otro lado, la frecuencia natural asociada a la base del subsistema pieza de trabajo (Figura 43), con valor de 164.898 [Hz], es menor que dicho subsistema (Figura 44), que presenta un valor de 807.201 [Hz], lo que puede traducirse como una menor rigidez para la base.

Las propuestas de rigidez y amortiguamiento del sistema de 3-GDL mantendrán una proporción similar a la que presentan los valores mencionados de frecuencia natural

asociados a cada subconjunto, de forma que usando las ecuaciones (3.20), (3.21), (3.22) y (3.23) se tiene:

$$k_1 = 1049272[N/m] = 1.049272[N/\mu m] \quad c_1 = 8542[N/m] = 0.008542[N/\mu m]$$

$$k_2 = 258531[N/m] = 0.258531[N/\mu m] \quad c_2 = 10528[N/m] = 0.010528[N/\mu m]$$

$$k_3 = 637595[N/m] = 0.637595[N/\mu m] \quad c_3 = 25965[N/m] = 0.025965[N/\mu m]$$

$$k_4 = 214349[N/m] = 0.214349[N/\mu m] \quad c_4 = 1745[N/m] = 0.001745[N/\mu m]$$

3.2.2 Propuesta de base conjunta

3.2.2.1 Sistema de dos grados de libertad

Puesto que la diferencia entre los sistemas de 3-GDL y 2-GDL son únicamente las bases, mientras que los sistemas sobre estas son los mismos, se tomarán los valores de masa, rigidez y amortiguamiento del sistema de 3-GDL correspondientes a los subsistemas soportados sobre las bases. Por otro lado, debido a que la base del sistema de 2-GDL presenta una gran similitud geométrica con la base de la herramienta del sistema de 3-GDL, los valores de masa, rigidez y amortiguamiento de estas serán igualados, teniendo:

$$k_1 = 258531[N/m] = 0.258531[N/\mu m] \quad c_1 = 10528[N/m] = 0.010528[N/\mu m]$$

$$k_2 = 1049272[N/m] = 1.049272[N/\mu m] \quad c_2 = 8542[N/m] = 0.008542[N/\mu m]$$

$$k_3 = 637595[N/m] = 0.637595[N/\mu m] \quad c_3 = 25965[N/m] = 0.025965[N/\mu m]$$

3.3 Solución de las ecuaciones de movimiento

El cálculo de la solución de las ecuaciones de movimiento asociadas a los sistemas vibratorios propuestos puede resultar sencillo en el caso del sistema de 1-GDL, sin embargo, para los otros casos comienza a resultar complejo debido a que se tienen sistemas de ecuaciones diferenciales. Es por ello que se aplicará el método de Euler para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Retomando la ecuación (2.63) se definirá la posición x de la siguiente forma:

$$x_{i+1} = x_i + h \cdot \dot{x}_i \quad (3.24)$$

con:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (3.25)$$

De igual forma se define la velocidad \dot{x} según:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + h \cdot \ddot{x}_i \quad (3.26)$$

con:

$$\ddot{x}_i = \frac{d^2x_i}{d^2t} \quad (3.27)$$

siendo h el tamaño de paso del método numérico.

De esta forma deberán definirse valores iniciales que alimenten al proceso iterativo, los cuales serán siempre de $0.1 [\mu m]$ para las posiciones y $0 [\mu m/s]$ para las velocidades, definidos ambos para un tiempo $t = 0 [s]$. Por lo tanto, x_i y \dot{x}_i serán definidos por estos valores iniciales, mientras que la aceleración será definida a partir de las ecuaciones diferenciales de cada sistema vibratorio. Cabe destacar que las ecuaciones (3.24) y (3.26) serán matriciales para los sistemas de 2-GDL y 3-GDL debido a que en estos casos se tienen sistemas de ecuaciones diferenciales en lugar de una sola ecuación diferencial, siendo h el único parámetro que se mantendrá como escalar.

3.3.1 Propuesta de bases separadas

3.3.1.1 Sistema de un grado de libertad

La definición de los desplazamientos mantiene la estructura de la ecuación (3.24), mientras que las velocidades para el sistema de 1-GDL requieren que la aceleración sea despejada de la ecuación (3.4) para ser sustituida en la ecuación (3.26):

$$x_{1 \rightarrow i+1} = x_{1 \rightarrow i} + h \cdot \dot{x}_i \quad (3.28)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_c}{(m_1 + m_2)} - \frac{\dot{x}_1(c_1 + c_2)}{(m_1 + m_2)} - \frac{x_1(k_1 + k_2)}{(m_1 + m_2)} \quad (3.29)$$

$$\dot{x}_{1 \rightarrow i+1} = \dot{x}_{1 \rightarrow i} + h \cdot \left(\frac{F_c}{(m_1 + m_2)} - \frac{\dot{x}_{1 \rightarrow i}(c_1 + c_2)}{(m_1 + m_2)} - \frac{x_{1 \rightarrow i}(k_1 + k_2)}{(m_1 + m_2)} \right) \quad (3.30)$$

siendo $x_{1 \rightarrow i}$ y $\dot{x}_{1 \rightarrow i}$ los desplazamientos y velocidades, respectivamente, correspondientes a la i -ésima iteración para la variable x_1 , mientras que $x_{1 \rightarrow i+1}$ y $\dot{x}_{1 \rightarrow i+1}$ corresponden a los desplazamientos y velocidades, respectivamente, inherentes también a la variable x_1 en la siguiente iteración.

Las ecuaciones (3.28) y (3.30) son las que se emplearán en el método numérico.

3.3.1.2 Sistema de tres grados de libertad

Para poder definir el desplazamiento y velocidad en el sistema de 3-GDL se seguirá el mismo procedimiento que el sistema anterior. Despejando la aceleración de la ecuación (3.12) y sustituyéndola en la ecuación (3.26) se tiene:

$$\ddot{\mathbb{X}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{F} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\dot{\mathbb{X}} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{X} \quad (3.31)$$

$$\dot{\mathbb{X}}_{i+1} = \dot{\mathbb{X}}_i + h * (\mathbb{M}^{-1}\mathbb{F} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\dot{\mathbb{X}} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{X}) \quad (3.32)$$

Mientras que, para la matriz de desplazamiento, considerando la ecuación (3.24), se tiene:

$$\mathbb{X}_{i+1} = \mathbb{X}_i + h\dot{\mathbb{X}}_i \quad (3.33)$$

considerando:

$$\mathbb{X}_i = \begin{pmatrix} x_{1 \rightarrow i} \\ x_{3 \rightarrow i} \\ x_{4 \rightarrow i} \end{pmatrix} \quad \mathbb{X}_{i+1} = \begin{pmatrix} x_{1 \rightarrow i+1} \\ x_{3 \rightarrow i+1} \\ x_{4 \rightarrow i+1} \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbb{X}}_i = \begin{pmatrix} \dot{x}_{1 \rightarrow i} \\ \dot{x}_{3 \rightarrow i} \\ \dot{x}_{4 \rightarrow i} \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbb{X}}_{i+1} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{1 \rightarrow i+1} \\ \dot{x}_{3 \rightarrow i+1} \\ \dot{x}_{4 \rightarrow i+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_3 m_4 & -m_3 m_4 & -m_1 m_3 - m_2 m_3 \\ -m_3 m_4 & m_1 m_4 + m_2 m_4 + m_3 m_4 & 0 \\ -m_1 m_3 - m_2 m_3 & 0 & m_1 m_3 + m_2 m_3 \end{pmatrix}$$

con:

$$M = m_1 m_3 m_4 + m_2 m_3 m_4$$

Siendo las ecuaciones (3.32) y (3.33) las que se usarán en el método numérico. Las matrices de masa, rigidez, amortiguamiento, desplazamiento, velocidad y fuerza en estas ecuaciones son las enunciadas en la sección 3.1.1.2.

3.3.2 Propuesta de base conjunta

3.3.2.1 Sistema de dos grados de libertad

Al igual que el proceso de solución de los sistemas de la propuesta separada, para el sistema de 2-GDL se definirán los desplazamientos considerando la ecuación (3.24), mientras que las velocidades requerirán obtener la aceleración de la ecuación (3.19) y sustituirse en la ecuación (3.26). Por lo tanto:

$$\mathbb{X}_{i+1} = \mathbb{X}_i + h \dot{\mathbb{X}}_i \quad (3.34)$$

$$\dot{\mathbb{X}} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{F} - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{C} \dot{\mathbb{X}} - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \mathbb{X} \quad (3.35)$$

$$\dot{\mathbb{X}}_{i+1} = \dot{\mathbb{X}}_i + h * (\mathbb{M}^{-1} \mathbb{F} - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{C} \dot{\mathbb{X}} - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \mathbb{X}) \quad (3.36)$$

considerando:

$$\mathbb{X}_i = \begin{pmatrix} x_{1 \rightarrow i} \\ x_{3 \rightarrow i} \end{pmatrix} \quad \mathbb{X}_{i+1} = \begin{pmatrix} x_{1 \rightarrow i+1} \\ x_{3 \rightarrow i+1} \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbb{X}}_i = \begin{pmatrix} \dot{x}_{1 \rightarrow i} \\ \dot{x}_{3 \rightarrow i} \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbb{X}}_{i+1} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{1 \rightarrow i+1} \\ \dot{x}_{3 \rightarrow i+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{m_1 m_3 + m_2 m_3} \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & -m_1 - m_2 \\ -m_1 - m_2 & m_1 + m_2 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones (3.34) y (3.36) se usarán en el método numérico. Las matrices de masa, rigidez, amortiguamiento, desplazamiento, velocidad y fuerza en estas ecuaciones son las enunciadas en la sección 3.1.2.1.

3.4 Determinación del tamaño de paso

Definir el tamaño de paso para el método numérico de Euler para ecuaciones diferenciales es de suma importancia, puesto que un tamaño de paso grande puede suponer una mala aproximación al resultado matemático directo, mientras que un tamaño de paso pequeño ofrece una mejor aproximación, pero requiere de más tiempo para su resolución.

Una forma de establecer un tamaño de paso apropiado dentro de los sistemas mecánicos es realizar una gráfica de espacio físico con las variables de desplazamiento y velocidad, variando dicho tamaño de paso hasta obtener una gráfica que represente correctamente el fenómeno mecánico a estudiar.

Se sabe que los elementos de disipación en un sistema vibratorio provocan que las velocidades asociadas a las masas dentro de este se reduzcan a lo largo del tiempo, por lo que la ausencia de dichos elementos dará paso a una respuesta cíclica que no llega a presentar una reducción de velocidad ni desplazamientos. Este escenario se presenta siempre que exista una fuerza de excitación presente en el sistema a lo largo del tiempo. Por lo tanto, al graficar el desplazamiento contra la velocidad de un sistema masa-resorte-amortiguador simple de un grado de libertad con ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (3.37)$$

con:

$$m = 1 [kg] \quad c = 0 [N s/m] \quad k = 1 [N/m] \quad F = 1 [N]$$

A partir de las ecuaciones (3.24) y (3.26) se realizarán tres gráficas de desplazamiento contra velocidad para un tiempo total de 200 [s] con condiciones iniciales $x_0 = 0.1 [m]$ y $\dot{x}_0 =$

0.1 [m/s] para un tiempo $t = 0$ [s], variando el tamaño de paso h con los valores: 0.1, 0.01, 0.001. Al no tener un valor mayor a cero para el elemento de disipación c , se espera que la gráfica muestre un comportamiento cíclico no amortiguado o, en otras palabras: una curva cerrada de forma elíptica.

Realizando la gráfica con los distintos valores de h , se tiene:



Figura 45: Gráfica de espacio fásico con $h=0.1$.

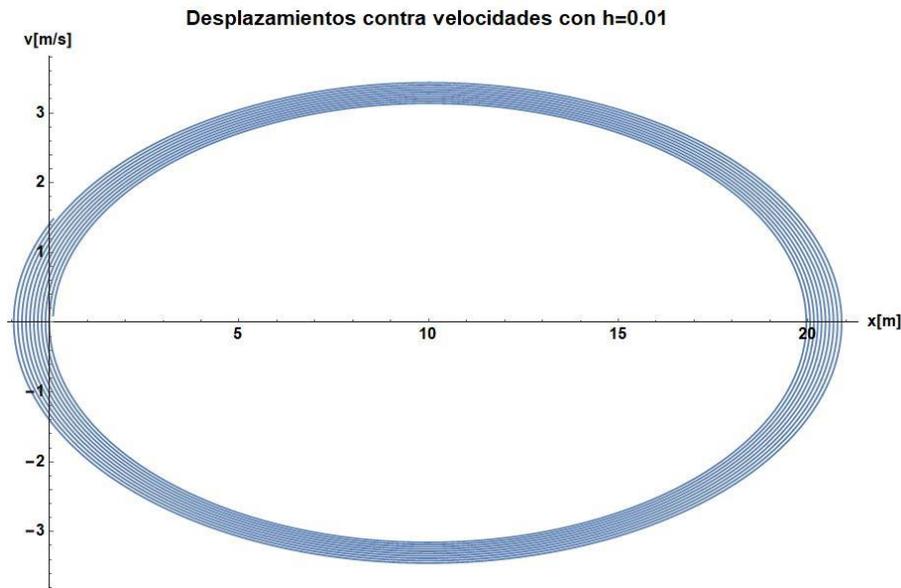


Figura 46: Gráfica de espacio fásico con $h=0.01$.

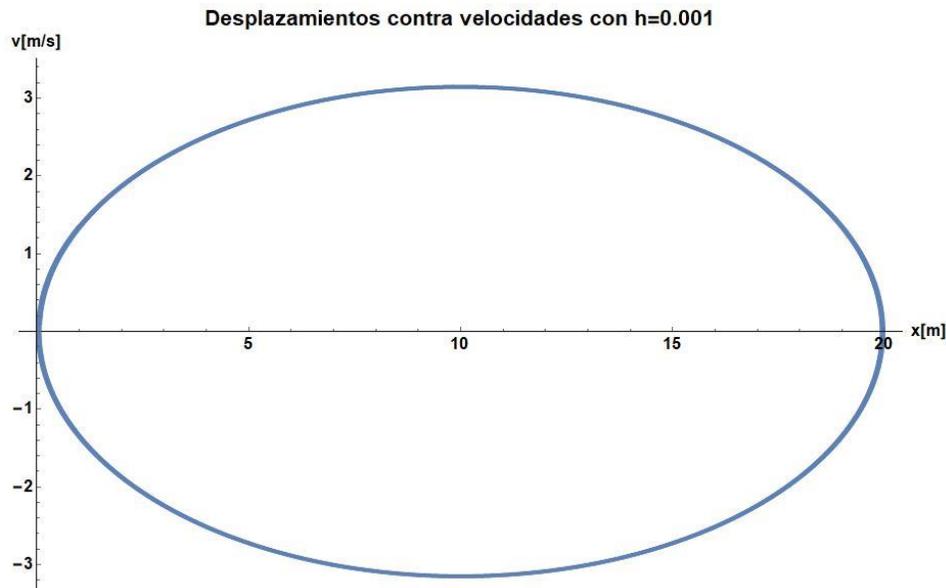


Figura 47: Gráfica de espacio fásico con $h=0.001$.

Se puede observar en la Figura 45 que con un tamaño de paso igual a 0.1 no ofrece un buen acercamiento al comportamiento del sistema, puesto que la magnitud del desplazamiento y de la velocidad aumenta a lo largo del tiempo en lugar de ser cíclico. Es por ello que este valor de tamaño de paso no será suficiente para la resolución de las ecuaciones diferenciales de los sistemas vibratorios propuestos.

Posteriormente se aprecia en la Figura 46 que un tamaño de paso igual a 0.01 resulta en un mejor acercamiento del comportamiento del sistema, sin embargo, también presenta un aumento del desplazamiento y de la velocidad a lo largo del tiempo. Aunque este aumento es mucho menor que en la propuesta anterior, se considera que aún no es suficiente para una buena aproximación de los sistemas vibratorios.

Finalmente, en la Figura 47 se puede apreciar una geometría curva prácticamente cerrada con un aumento poco perceptible en desplazamientos y velocidades. Esta gráfica se obtiene con un tamaño de paso de 0.001, valor que resulta suficiente para una buena aproximación al comportamiento de los sistemas vibratorios propuestos para la PKM.

3.5 Cálculo de la fuerza de corte

Para el cálculo de la solución de las ecuaciones diferenciales asociadas a los sistemas vibratorios propuestos se considerará ecuación (2.31), reescrita de la forma:

$$F_{mt} = \frac{k_s f_z t Z_c (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))}{2\pi} \quad (3.38)$$

siendo f_z el avance por diente.

Al considerar algunos parámetros de corte de potencia media según la tabla 2.4 en [12], así como parámetros estimados para la PKM:

$$\begin{array}{lll} k_s = 2059.4 [N/mm^2]^3 & t = 3.81 [mm] & f_z = 0.2032 [mm] \\ Z_c = 4 [dientes] & \varphi_1 = 45^\circ & \varphi_2 = 135^\circ \end{array}$$

Por lo tanto: $F = 1435 [N]$.

³ Valor obtenido de [13].

Capítulo 4

4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Resultados

En la presente sección se mostrarán los resultados de forma gráfica de las ecuaciones diferenciales (ecuaciones de movimiento) asociadas a los sistemas vibratorios propuestos. Dichos resultados se obtuvieron haciendo uso del método numérico de Euler así como de las consideraciones planteadas en el capítulo anterior.

El método numérico de Euler fue programado en el software *Mathematica* para cada una de las propuestas.

4.1.1 Propuesta de bases separadas

4.1.1.1 Sistema de un grado de libertad

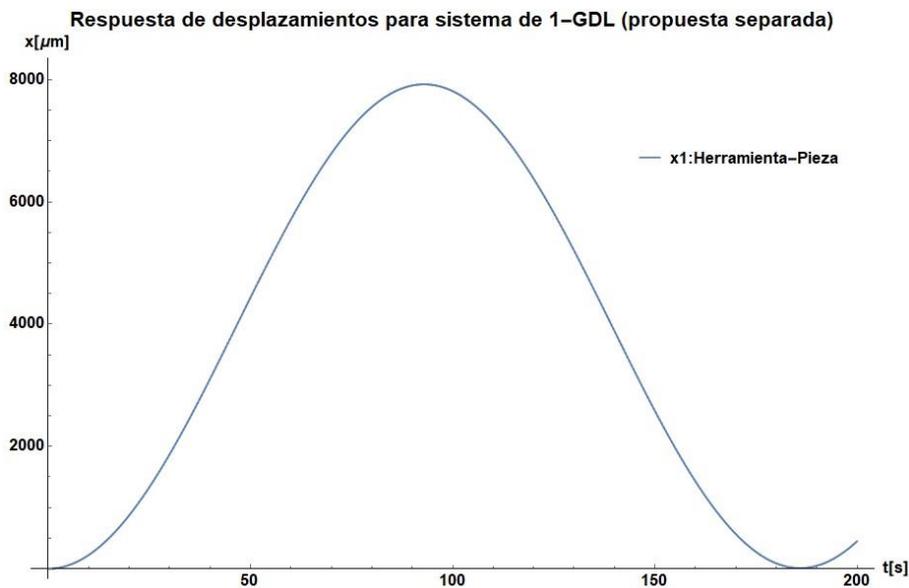


Figura 48: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 1-GDL en 200 [s].

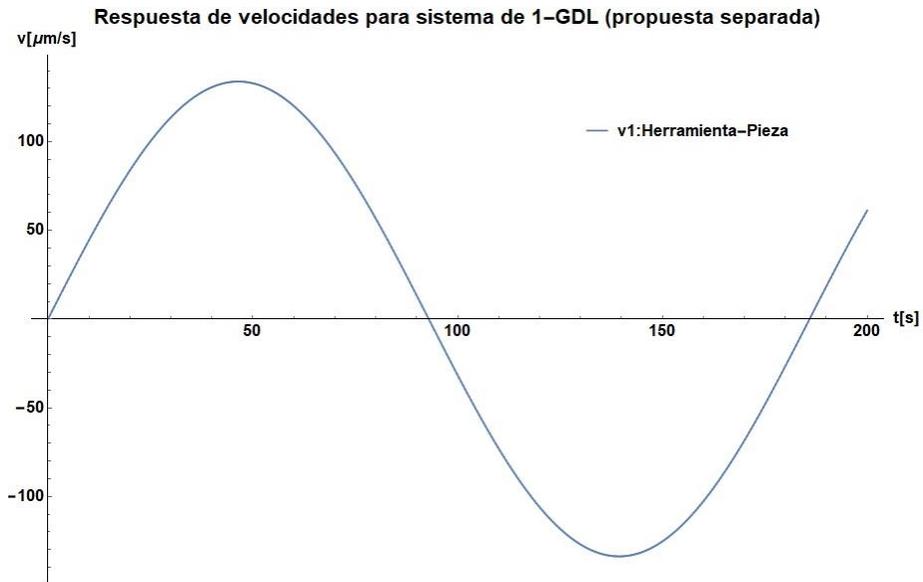


Figura 49: Respuesta de velocidades para el sistema de 1-GDL en 200 [s].

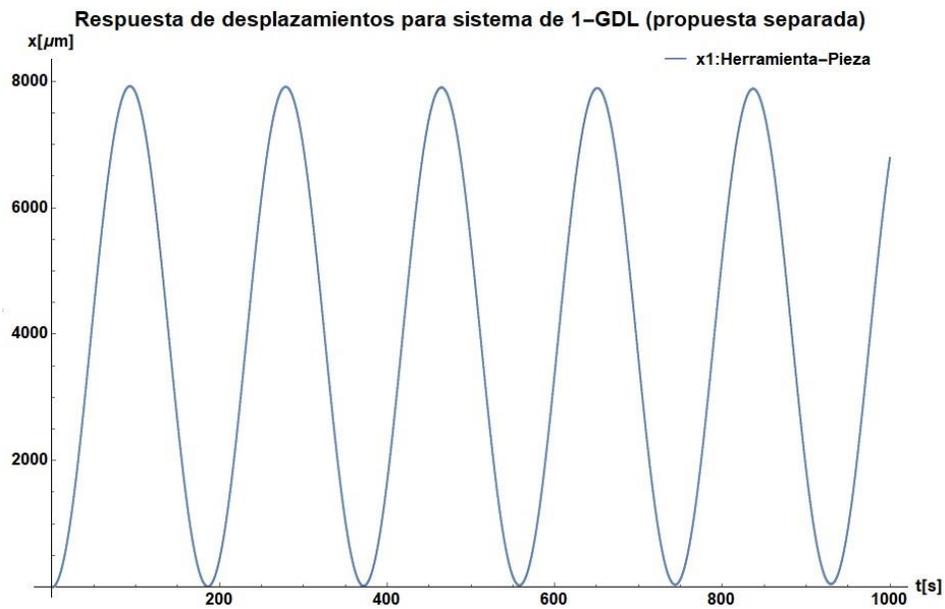


Figura 50: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 1-GDL en 1000 [s].

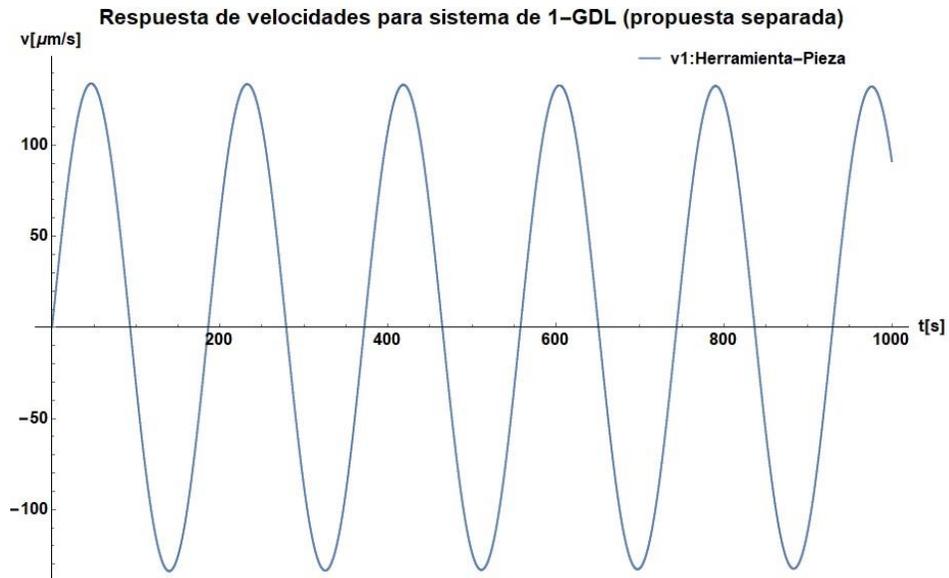


Figura 51: Respuesta de velocidades para el sistema de 1-GDL en 1000 [s].

4.1.1.2 Sistema de tres grados de libertad

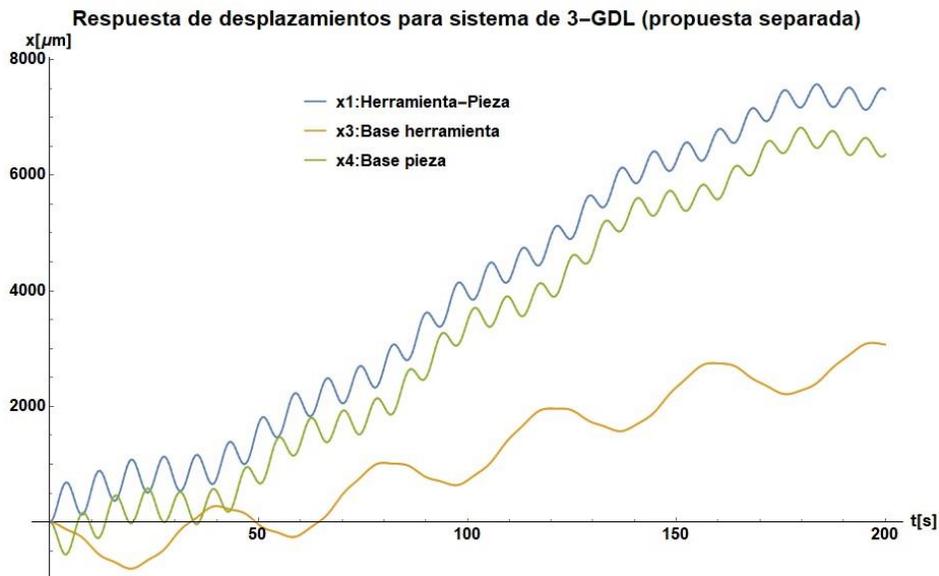


Figura 52: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 3-GDL en 200 [s].

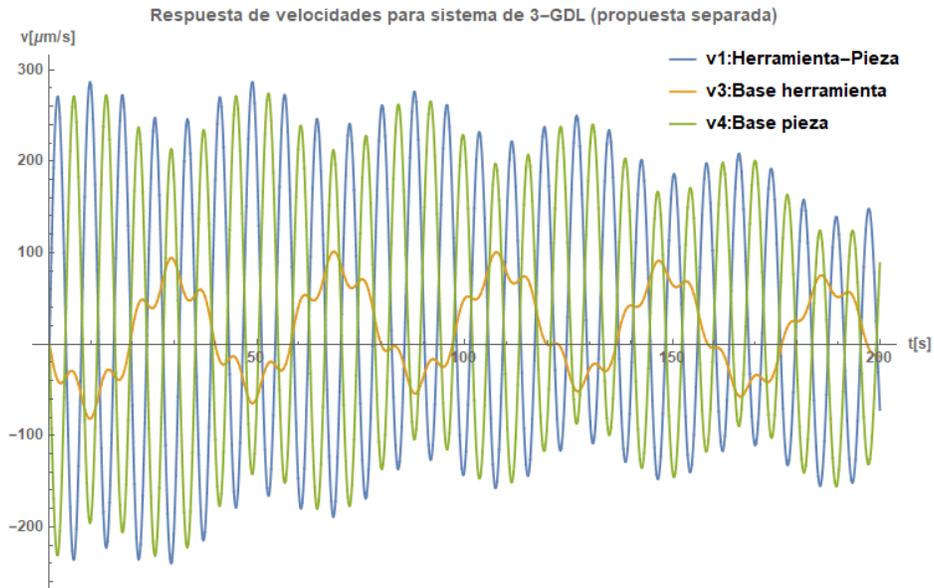


Figura 53: Respuesta de velocidades para el sistema de 3-GDL en 200 [s].

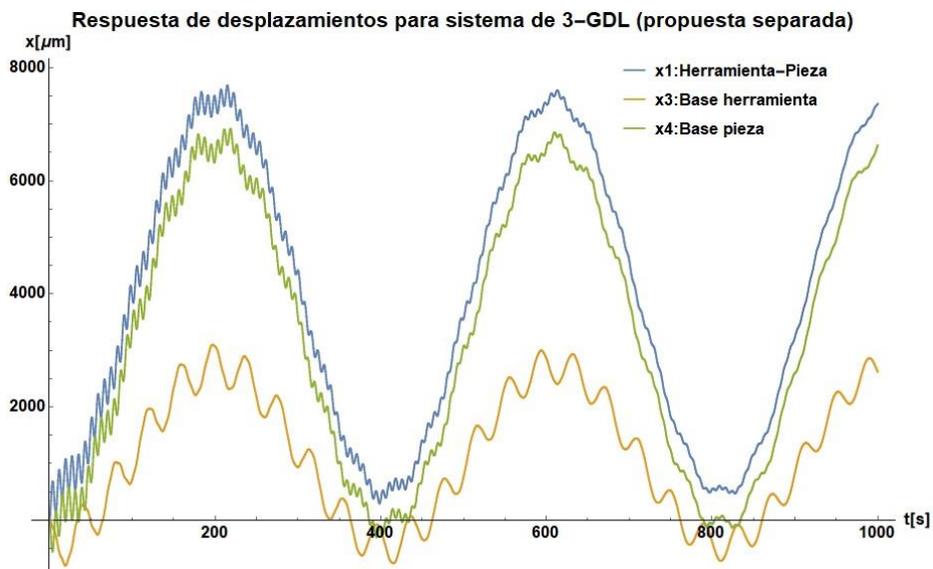


Figura 54: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 3-GDL en 1000 [s].

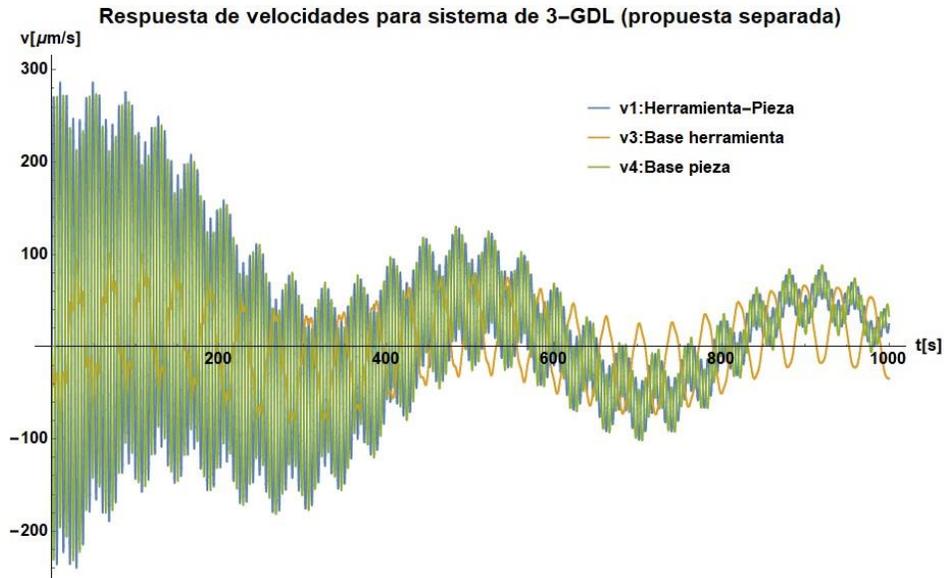


Figura 55: Respuesta de velocidades para el sistema de 3-GDL en 1000 [s].

4.1.2 Propuesta de base conjunta

4.1.2.1 Sistema de dos grados de libertad

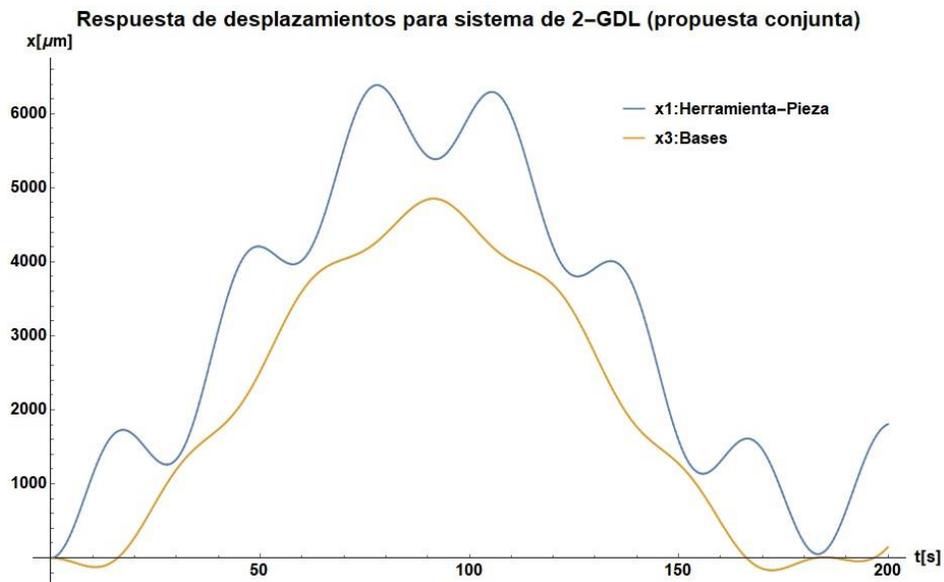


Figura 56: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 2-GDL en 200 [s].



Figura 57: Respuesta de velocidades para el sistema de 2-GDL en 200 [s].

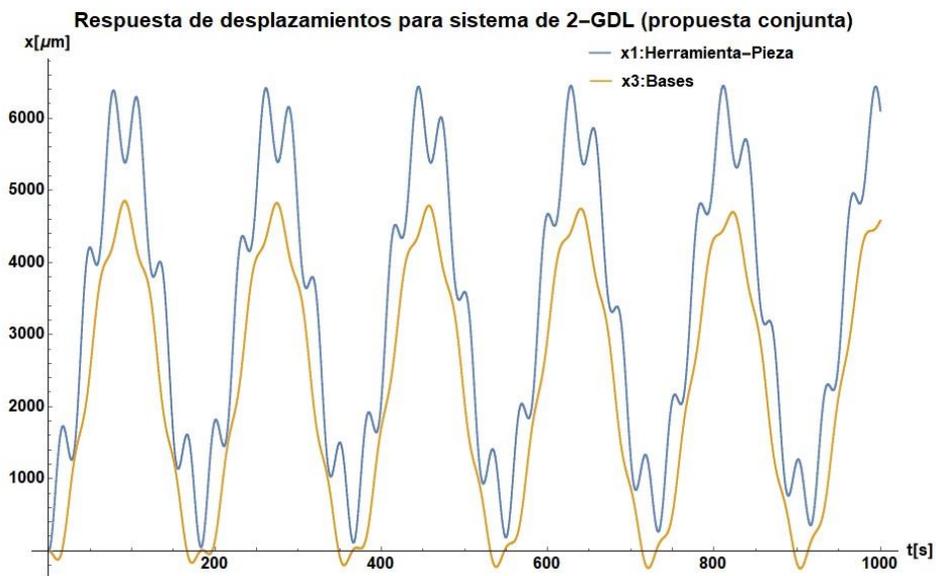


Figura 58: Respuesta de desplazamientos para el sistema de 2-GDL en 1000 [s].

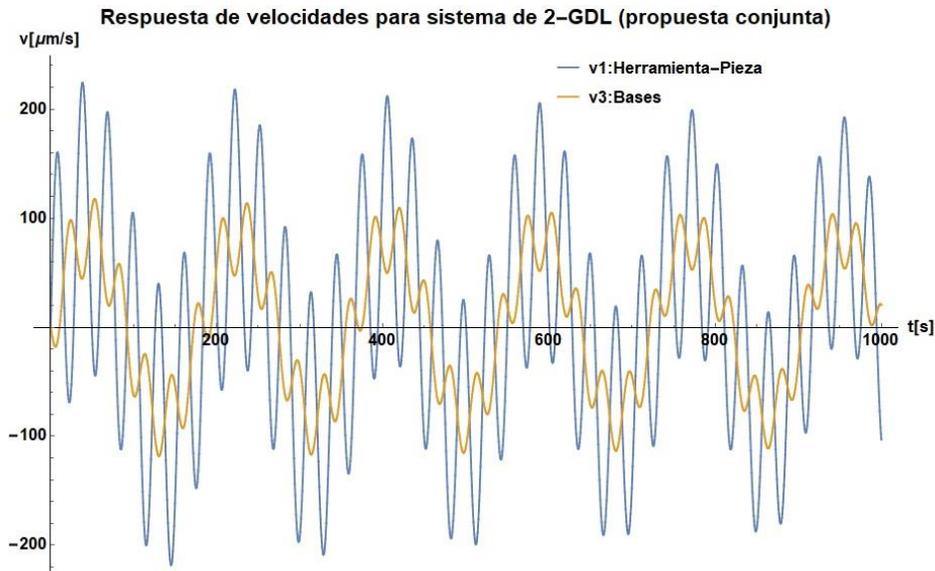


Figura 59: Respuesta de velocidades para el sistema de 2-GDL en 1000 [s].

4.2 Análisis de resultados

Puesto que el sistema de tres grados de libertad presenta un mayor grado de detalle que el de un grado de libertad, debido al seccionamiento de la PKM en el modelo, se compararán los resultados de las gráficas del sistema de tres grados de libertad con los del sistema de dos grados de libertad.

En primera instancia se aprecia que los valores máximos de desplazamiento y velocidad del sistema de 2-GDL son menores que el de 3-GDL, sin embargo, ello no necesariamente significa que sea mejor. Los desplazamientos y velocidades máximas corresponden a la variable asociada a la interacción de los subsistemas herramienta y pieza de trabajo, valores que oscilan los 7600 [μm] y 280 [$\mu\text{m}/\text{s}$] para la propuesta de bases separadas, mientras que para la propuesta de base conjunta oscilan los 6400 [μm] y 220 [$\mu\text{m}/\text{s}$], un 1.57% menos para los desplazamientos y un 21% para las velocidades, ambos respecto al sistema de 3-GDL.

Por otro lado, el comportamiento general de los desplazamientos para el sistema de 3-GDL se repite a periodos más largos (aproximadamente cada 400 segundos), mientras que en el sistema de 2-GDL se repite a periodos más cortos (aproximadamente 200 segundos), lo que

puede traducirse como comportamientos con frecuencias menores para este primer sistema, y mayores para el segundo. Esto significa que la propuesta de bases separadas alcanzará sus desplazamientos máximos en un mayor tiempo que la propuesta de base conjunta, por lo que estos valores de desplazamientos máximos, para el sistema de 3-GDL, podrán evitarse más fácilmente al mantener tiempos de corte constante por debajo de los 200 segundos.

En el caso de las velocidades en cada propuesta, el sistema de 3-GDL presenta un mejor amortiguamiento que el sistema de 2-GDL, por lo que podrán esperarse desplazamientos a menores velocidades conforme el proceso de corte avanza a lo largo del tiempo para este primer sistema, mientras que las velocidades no logran presentar una disminución significativa para el segundo sistema mencionado. Sin embargo, al tomar en cuenta el factor mencionado en el párrafo anterior, referente a mantener operaciones de corte por tiempos debajo de 200 segundos, una reducción de velocidades considerable no podría presentarse, puesto que la primera mayor reducción de velocidades se da hasta los 320 segundos, habiendo velocidades 44% menores respecto a las iniciales.

CONCLUSIONES

El análisis y resolución del cuestionamiento inicial “¿Qué propuesta de diseño presenta un mejor desempeño en términos de vibraciones mecánicas: bases separadas o base conjunta?”

se llevó a cabo siguiendo los siguientes pasos:

- Modelar el sistema asociado a cada propuesta de diseño.
- Deducir las ecuaciones diferenciales asociadas a cada modelo vibratorio.
- Simular los sistemas por medio de elemento finito para la obtención de las frecuencias naturales inherentes a cada uno de estos.
- Calcular los valores de masa, rigidez y amortiguamiento presentes en cada modelo.
- Resolver las ecuaciones de movimiento inherentes a cada modelo.
- Graficar la respuesta de cada modelo para su análisis.

El modelado se llevó a cabo siguiendo los procesos de modelización presentes en [7] y [11], manteniendo un nivel de abstracción suficiente para obtener una buena aproximación a la respuesta de cada sistema, pero al mismo tiempo para no llegar a modelos vibratorios con numerosos grados de libertad que conllevaran procesos de cálculo extensos que requirieran capacidades de cómputo grandes y difíciles de conseguir.

La deducción de las ecuaciones de movimiento se realizó por medio de la ecuación de movimiento de Lagrange, lo cual engloba los conceptos de energía cinética y potencial, así como el de trabajo virtual. El uso de este método se debe a que vuelve más rápida la tarea de la obtención de dichas ecuaciones diferenciales para sistemas de múltiples grados de libertad o con configuraciones elaboradas; esto en comparación con otros métodos como el hacer uso de la segunda y tercera ley de Newton al descomponer un sistema en cuerpos libres.

Por otro lado, el uso de las relaciones existentes entre diversos parámetros presentes en todo sistema vibratorio (como frecuencia natural, amortiguamiento y rigidez equivalente, entre otros) fue fundamental para el cálculo de las magnitudes de los elementos de masa, rigidez y amortiguamiento de cada modelo. De igual forma, la simulación por elemento finito y atender a las características geométricas de cada propuesta resultó sin duda necesario para llevar a cabo estos cálculos.

Finalmente, tener presentes sistemas de ecuaciones diferenciales vuelve casi necesario el uso de métodos numéricos para su resolución, por lo que se decidió usar el método de Euler para ecuaciones diferenciales, manteniendo siempre un tamaño de paso apropiado para garantizar la obtención de una buena aproximación a la respuesta que presentará cada sistema.

La conjunción del procedimiento mencionado y del análisis de resultados realizado en la sección anterior, deriva en las siguientes conclusiones.

Puede afirmarse que la propuesta de bases separadas presenta un mejor desempeño general bajo las consideraciones de tiempos de operación mencionadas, incluso en términos de amortiguamiento. Un modelo sólido de la propuesta puede apreciarse en la Figura 60, donde ya se incluye una versión simple (con la finalidad de ejemplificar) de la disposición del husillo dentro del ensamble completo, el cual se encontrará sobre el efector final (base triangular blanca) de la cadena cinemática.

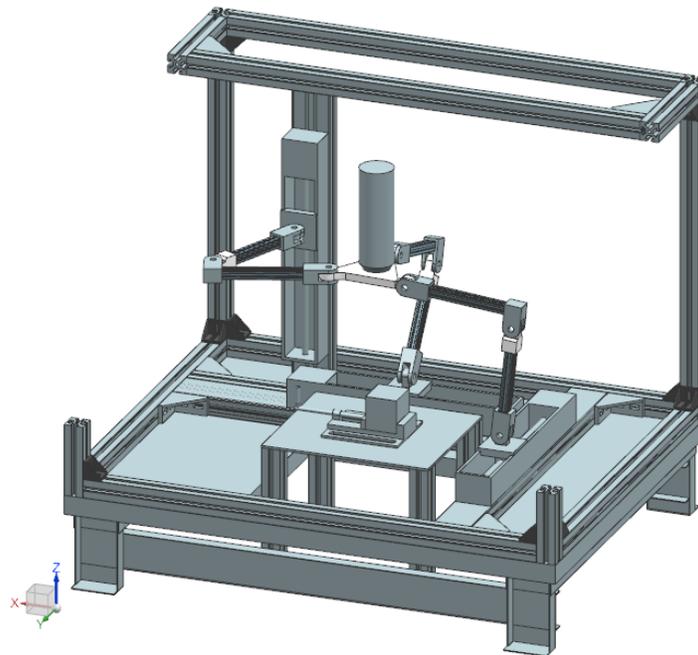


Figura 60: Propuesta de diseño con mejor desempeño general (bases separadas).

Por otro lado, hay que tener presente que los resultados obtenidos para desplazamientos y velocidades en ambas propuestas de diseño son demasiado grandes dentro del terreno de procesos de maquinado, sin embargo, esto se puede atribuir a la modelización de la PKM (por sus siglas en inglés *Parallel Kinematic Machine*), debido a que esta solamente es

representada por dos elementos inerciales en lugar de realizar un modelo que tome en cuenta cada componente del sistema real como un elemento inercial más. Esta respuesta de gran amplitud puede traducirse entonces como la suma de desplazamientos asociados a diversos componentes de cada subsistema, y no solamente como los desplazamientos presentes en la interacción real de la herramienta con la pieza de trabajo.

El análisis se realizó de esta manera debido a que un modelo más refinado de la PKM representa un sistema de muchos más grados de libertad en el espacio, lo cual requeriría capacidades de cómputo superiores para la resolución de las ecuaciones diferenciales asociadas al sistema en cuestión. Este hecho vuelve menos factible llevar a cabo un análisis matemático como el que se realizó en el presente trabajo, siendo mejor un análisis vía simulación por medio de un software de CAD-CAE (por sus siglas en inglés *Computer-Aided Design* y *Computer-Aided Engineering*). No obstante, este tipo de análisis también implica una capacidad de cómputo considerablemente mayor al requerido para desarrollar el análisis del presente trabajo.

De esta forma se confirma de forma parcial la hipótesis inicial, la cual estimaba que la propuesta de diseño de bases separadas presentaría un mejor desempeño. Esto se debe a que, si bien es correcto que dicha propuesta presenta un mejor desempeño, no se debe a que la amplitud máxima de los desplazamientos sea menor a la que presenta la propuesta de base conjunta, sino al hecho de que la propuesta de bases separadas ofrece características más convenientes para el proceso de maquinado, como lo son:

- Posibilidad de mantener una operación de corte sin llegar a picos de desplazamiento por tiempos superiores a los posibles para la propuesta de base conjunta.
- Mejor amortiguamiento de las velocidades presentes en el sistema.

Trabajos futuros

Por todo lo anteriormente mencionado, puede adelantarse que un modelo más detallado de la PKM, o una simulación dinámica por medio de softwares de CAD-CAE, ofrecerán un mejor acercamiento al comportamiento que presentará esta máquina herramienta, siendo la simulación la opción que brindaría un mayor detalle a costa de una capacidad de cómputo grande pero asequible. Mientras que para la elaboración de un modelo vibratorio más detallado será sumamente recomendable obtener los valores de los elementos de masa, rigidez y amortiguamiento de forma experimental o vía simulación, como una opción al procedimiento del presente trabajo. En especial porque este método puede resultar mucho más elaborado y complicado al aumentar la cantidad de elementos dentro del modelo en cuestión.

Referencias

- [1] F. J. Rodríguez Ramírez, *DINÁMICA DE SISTEMAS*, México: Trillas, 1989.
- [2] E.-H. Hassan y Y. Helmi A., *Machining Technology: Machine Tools and Operations*, Florida: Taylor & Francis Group, 2008.
- [3] E.-H. Hassan, *Fundamentals of Machining Processes*, Florida: Taylor & Francis Group, 2007.
- [4] J. P. Merlet, *Parallel Robots*, Dordrecht: Springer, 2006.
- [5] Z. Pandilov, Dominant types of errors at parallel kinematic machine tools. *FME Transactions*, 45(4), pp. 491-495, 2017. DOI: <https://doi.org/10.5937/fmet1704491P>
- [6] R. Yáñez-Valdez, Bases para el desarrollo de micromáquinas herramienta paralelas. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 11(2), pp. 212-223, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.riai.2014.02.004>
- [7] R. Singiresu S., *Mechanical Vibrations*, Nueva Jersey: Pearson, 2011.
- [8] Y. Lei, P. Zengxi, D. Donghong, S. Shuaishuai y L. Weihua, A Review on Chatter in Robotic Machining Process Regarding Both Regenerative and Mode Coupling Mechanism. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 23(5), pp. 2240-2251, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1109/TMECH.2018.2864652>
- [9] R. L. Burden y J. D. Faires, *Análisis Numérico con Aplicaciones*, México: Thomson Learning, 2002.
- [10] W. C. Young y R. G. Budynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain*, Nueva York: McGraw-Hill, 2002.

- [11] B. Balachandran y E. B. Magrab, *Vibrations*, Toronto: Cengage Learning, 2009.
- [12] E. Isakov, *Engineering formulas for metalcutting*, Nueva York: Industrial Press, 2004.
- [13] T. T. Enterprises, «Tool Tech Enterprises,» Tool Tech Enterprises, [En línea]. Available: <http://www.tooltechenterprises.com/formulae.html>. [Último acceso: 12 Marzo 2019].

Anexos

1. Productos generados

El presente trabajo sirvió como apoyo para la generación de un artículo que se encuentra en proceso de envío para someterlo a revisión y posible publicación en una revista con índice JRC (por sus siglas en inglés *Journal Citation Reports*). La portada del mencionado artículo se anexa a continuación.

Dynamic stability of a parallel kinematic machine

R. Yáñez-Valdez, A. I. Luna Díaz, F. Cuenca Jiménez

ABSTRACT

Machine tool chatter causes machining instability, surface roughness, and tool wear in metal cutting processes. A stability lobe diagram based on the theory of regenerative vibration is an effective tool to predict and control the chatter. In this paper, we will present the advances in the mechanical design of a parallel kinematic machine tool whose mechanical configuration is based on a closed-loop configuration. The features that make it ideal for machining tasks, and that make unique in its own way, are highlighted. In addition, the description of the progress of this work will be focused on the analysis of the stability limitation for machining systems to derive the stability lobe diagram with modal analysis of the spindle. A vibratory model is developed by adding cutting forces and including analytical equations for the depth of cut and for the cutting speeds, both depending on the frequency of vibration. A step-by-step procedure provides a stability lobe diagram. The results show that it is relatively easy to provide a relationship between depth of cut and spindle speed. In turn, it makes it easy to compare machining processes under different cutting parameters and conditions.

Keywords: Chatter; Cutting force; Parallel kinematic machine; Parallel mechanism; Stability lobe diagram.

Introduction

In the context of machining operations, the main problems affecting the quality of the machined workpiece are fundamentally the static bending error of the workpiece, the machine-tool setup, the

error owing to the amplitude of the forced vibration of the cutting tool, and the dynamic problem known as “regenerative vibration” or “chatter”.

The first problem, namely the static bending error of the workpiece or cutting tool results in undesirable final geometries; often, there is an excess of material. This problem can be solved by choosing optimized cutting strategies, by increasing the stiffness of the workpiece as much as possible, or, more analytically, by calculating the bending error to compensate the tool path.

Then, the error associated with the amplitude of the forced vibration appears in the same manner as the static error. Assuming that all rotating elements of the machine tool operate in dynamic balance, the only source of forced vibration is the tapping of the blades against the workpiece surface. It can be noticed by observing the wear of the cutting edges or by the misalignment of the cutting tool (run-out).

Finally, the chatter phenomenon is a dynamic problem that results in the occurrence of undesirable vibrations. Such chatter tends to have very high amplitude, which can lead to either damage to the machine tool or to premature tool failure. It results in poor surface finishing in machining operations, tool breakage, and wear on the spindle components. Chatter directly affects the integrity of the machine performance and the workpiece quality. To prevent the undesirable effect of chatter, the structure of the machine tool must contain all components, and at the same time, withstand the forces of the metal cutting process and remain sufficiently stiff, to maintain the required precision.

Many researches have been carried out with the purpose of improving the material removal rates and surface quality, stablishing optimal machining parameters and controlling the machine tool vibrations. Theory of regenerative chatter links the spindle speed with the depth of cut or the critical width of cut. This theory generates a stability lobe, allowing to visualize the largest material removal rate value associated to a certain machining process.

Chatter theory was developed by (Tobias & Fishwick, 1958) in the late 1950s, followed by (Tlustý & Polacek, 1963)