



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ARAGÓN

Simulación de la Cinemática Diferencial de dos Manipuladores
Seriales RRR y PRP

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO MECÁNICO

P R E S E N T A:

Héctor Rubén León Núñez

ASESOR:

Dr. Patricio Martínez Zamudio



Ciudad Nezahualcóyotl, Estado de México,

de 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA), por el apoyo brindado para la realización de este trabajo, a través del proyecto UNAM-DGAPA-PAPIME-PE112319: "Desarrollo de material didáctico y banco de pruebas para el fortalecimiento de la enseñanza en instrumentación y control, aplicando tecnologías IoT y robótica."

Al Dr. Patricio Martínez Zamudio por ser un mentor, excelente mentor y guía.

Al Dr. Jacinto Cortez Pérez, Dr. José Antonio Souza Jiménez, M. en I. María de Lourdes Marín Emilio y al M. en I. Humberto Mancilla Alonso, integrantes del Comité de Sinodales por su tiempo y comentarios en la revisión de esta tesis.

A mis padres, Isabel y Héctor, que han estado conmigo brindándome su apoyo en cada circunstancia.

A mi tía Elizabeth León que me ha brindado su tiempo, confianza y asesoría a lo largo de la carrera para que hoy pueda lograr este objetivo.

A mis abuelos, Felipa Becerril Juárez† y Julio Héctor León Cruz, que en cada momento de mi vida me han proporcionado su cariño y me han ayudado a levantarme cada vez que he tropezado.

A mis amigos por estar incondicionalmente en todo momento.

A Pilar por motivarme a seguir adelante.

Resumen

En este trabajo de investigación se presenta el modelado y la simulación de dos configuraciones de robots seriales del tipo RRR y RPR, aplicando las teorías de cinemática diferencial para obtener la representación de su modelo matemático en una matriz jacobiana que permita su simulación. La cinemática diferencial es la relación entre dos espacios vectoriales que permite el mapeo de velocidades del espacio articular al espacio del efector final

Este modelo se obtiene a partir de agregar sistemas de referencia que permiten la descripción del movimiento, la diferenciación del modelo cinemático de posición mediante técnicas de diferenciación como la matriz asimétrica. La información generada es vaciada en una matriz jacobiana que permite conocer las velocidades articulares que generan una velocidad lineal constante en el efector final. Así, el modelo permite la simulación de los manipuladores, cuando la simulación es correcta se valida el modelo.

A través de la validación de la cinemática diferencial de cadenas seriales simples, los resultados obtenidos del modelo podrán ser aplicados en trabajo a futuro con cadenas virtuales que servirán para manipular robots seriales, paralelos e híbridos introduciendo las restricciones cinemáticas.

CONTENIDO

1.	Introducción	1
1.1	Robótica	1
1.1.1	Robot.....	2
1.1.2	Clasificación de los manipuladores	3
1.2	Cadenas cinemáticas	9
1.3	Planteamiento del problema	10
1.4	Otras investigaciones sobre cinemática diferencial	11
1.5	Trabajo de investigación	12
1.6	Hipótesis	12
1.7	Justificación	12
1.8	Objetivos.....	13
1.9	Metodología	13
2.	Teoría antecedente.....	14
2.1	Cinemática.....	14
2.1.1	Cinemática de manipuladores	14
2.1.2	Matriz de rotación	15
2.1.3	Definición de la matriz de transformación homogénea.....	18
2.2	Cinemática directa de manipuladores.....	19
2.2.1	Método de matriz de transformación homogénea	20
2.2.1	Método Denavit Hartenberg	21
2.3	Cinemática inversa	23
2.3.1	Método geométrico.....	23
2.3.2	Método algebraico	26
2.3.3	Método de matriz de transformación homogénea inversa.....	26
2.3.4	Desacoplo cinemático	26
2.4	Cinemática diferencial	27

2.5	Cinemática diferencial del cuerpo rígido.....	28
2.6	Propagación de velocidades.....	29
2.7	Matriz Jacobiana	29
2.7.1	Jacobiano analítico.....	30
2.7.2	Matriz jacobiana geométrica	31
2.8	Relación entre la matriz jacobiana geométrica y analítica.....	33
2.9	Matriz de variables de estado.....	33
3.	Modelado e implementación de los casos particulares	38
3.1	Definición del caso particular.....	38
3.2	Manipulador serial RRR	39
3.2.1	Postura del manipulador en el plano	40
3.2.2	Modelado cinemático de los manipuladores	41
3.2.3	Metodología de Denavit & Hartenberg	41
3.2.4	Método de matriz de transformación homogénea	50
3.2.5	Cinemática diferencial.....	52
3.2.6	Jacobiano geométrico (matriz omega)	52
3.2.7	Propagación de velocidades	54
3.2.8	Implementación de la matriz del sistema MIMO.....	56
3.3	Manipulador <i>RPR</i>	57
3.3.1	El Manipulador <i>RPR</i>	57
3.3.2	Postura del manipulador	58
3.3.3	Modelado Cinemático del manipulador	59
3.3.4	Metodología de Denavit & Hartenberg (Barrientos).....	59
3.3.5	Matrices de transformación homogéneas	68
3.3.6	Cinemática diferencial	69
3.3.7	Jacobiano geométrico	69
3.4	Propagación de velocidades.....	71
3.5	Implementación de la matriz en sistema MIMO.....	72

Capítulo 4	74
4. Resultados.....	74
4.1 Simulación	74
4.2 Manipulador RRR	77
4.3 Manipulador RPR	81
5. Conclusiones y perspectivas	85
Conclusiones.....	85
Perspectivas	86
Referencias	87
Apéndice I. Mathematica	88
Manipulador RRR	88
Cinemática de posición	88
Cinemática diferencial	90
Manipulador RPR	93
Cinemática de posición	93
Cinemática diferencial	94

Nomenclatura

GDL	Grado de libertad
T	Matriz de transformación homogénea
J	Matriz Jacobiana
Θ	Variable articular de rotación
d	Variable articular prismática
l	Eslabón
Ω	Matriz asimétrica de velocidad angular

Capítulo 1

1. Introducción

En este capítulo se expone una breve historia de la robótica, así como las disciplinas que intervienen en este campo de estudio y se introduce al estudio actual de la robótica en el campo industrial. Se menciona la clasificación de los robots, así como su composición y se delimita el trabajo de investigación.

1.1 Robótica

La robótica es un campo interdisciplinario que abarca el diseño de las partes electrónicas a componentes mecánicos (Figura 1); la robótica surge para satisfacer las necesidades de la sociedad, realizar tareas repetitivas y riesgosas con el objetivo de aumentar la productividad, y en tareas donde la seguridad del ser humano está comprometida. La robótica se relaciona con el objetivo de sintetizar aspectos de la función humana mediante el uso de mecanismos, sensores, actuadores y computadoras [1, 2].

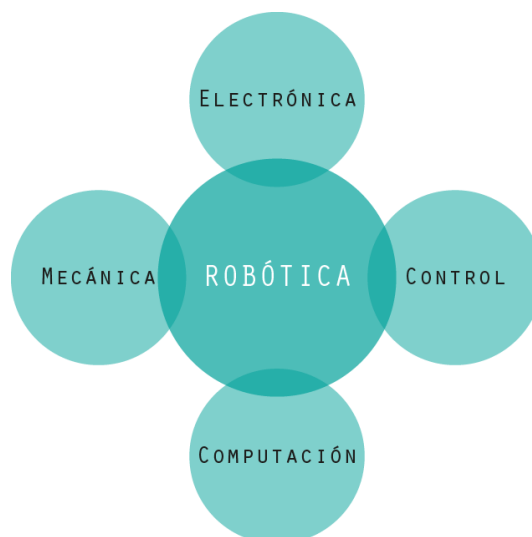


Figura 1. Disciplinas involucradas en la robótica.

Un ejemplo de la necesidad de crear mecanismos para la realización de tareas se remonta al siglo I en Alejandría, en el que se desarrolló un mecanismo animado que permitía abrir puertas (Figura 2). El mecanismo consistía en un depósito subterráneo con agua, que a su vez estaba conectado a un pebetero que calentaba el aire contenido en el depósito. El volumen del aire caliente permitía empujar el agua activando una polea y banda para abrir las puertas [3].

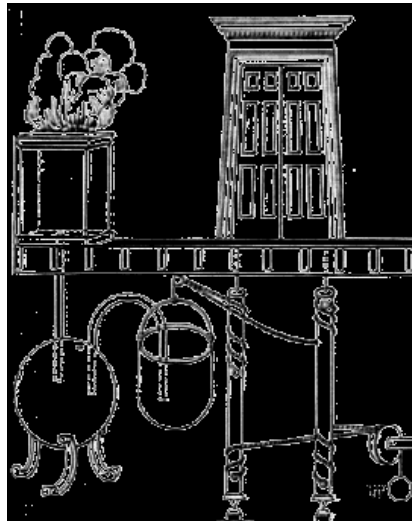


Figura 2. Mecanismo animado de Alejandría [3].

1.1.1 Robot

La palabra robot se entiende como un dispositivo que puede interactuar con el medio de distintas formas, esencialmente con el movimiento y la manipulación de objetos a su alrededor, hay definiciones dependiendo del autor:

- El Instituto de Robótica de América define como robot a un manipulador reprogramable y multifuncional diseñado para mover materiales, herramientas o dispositivos a través de movimientos programados para la realización de tareas [4].
- La Organización Internacional de Estándares (ISO) define al robot industrial en la norma ISO 8373, 2012 como un manipulador multifuncional reprogramable con varios grados de libertad, capaz de manipular materias, piezas, herramientas o dispositivos especiales según trayectorias variables programadas para realizar tareas diversas.

- Es complejo definir un robot, los sensores externos provén de esta inteligencia al robot y ésta les permite la interacción con el medio en el que se desarrollan [5].

1.1.2 Clasificación de los manipuladores

El objetivo de la robótica en el campo de los manipuladores industriales es automatizar tareas, teleoperación de objetos o materiales peligrosos, creando estructuras fuera de la naturaleza que permiten una manipulación adecuada a cada tarea para las que fueron creadas (Figura 3), el campo de estudio es amplio y se han tenido que clasificar de acuerdo a criterios ligados a su estructura [1, 6].



Figura 3. Robots manipuladores industriales seriales.

La Figura 4 muestra un esquema de clasificación de los robots manipuladores basado en el uso de los robots, existen diferentes formas de clasificarlos dependiendo de los autores, por ejemplo, el robot manipulador de 3 GDL (grados de libertad) se encuentra dentro de la clasificación de robots seriales por su configuración de una cadena cinemática abierta [2].

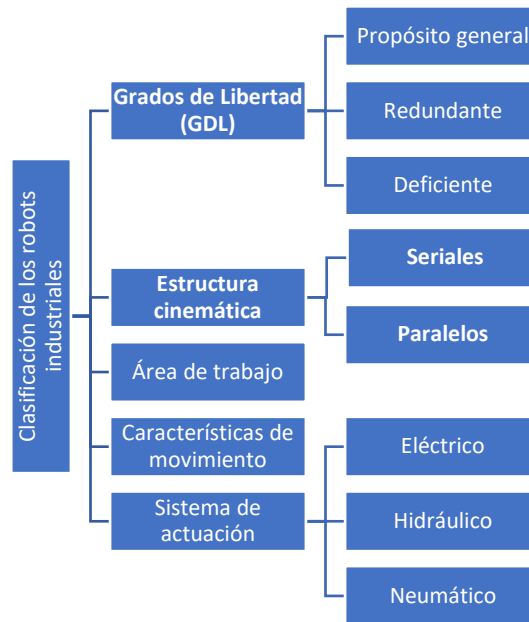


Figura 4. Esquema de clasificación.

Los robots pueden clasificarse de acuerdo con varios criterios como los grados de libertad, estructura cinemática, sistema de actuación, área de trabajo, y características de movimiento [2].

a) Clasificación por grados de libertad

Un grado de libertad es el número de parámetros necesarios para conocer la posición y orientación de un cuerpo en el espacio, la posición de un objeto se mide respecto a un sistema de referencia. A partir de esto, con 3 GDL un manipulador puede posicionar su efector final en cualquier punto del espacio, su orientación estará limitada, cuando posee 6 GDL el efector final del manipulador podrá tomar una orientación respecto a cada eje coordenado (Figura 5). Mientras que la orientación y posición de un cuerpo rígido se muestran en la Figura 6. Un manipulador ideal consta de 6 GDL para manipular un objeto libremente en un espacio de tres dimensiones. Desde este enfoque, se denomina *robot de propósito general* si cuenta con 6 GDL, si posee más de 6 GDL será clasificado como un *robot redundante*; cada robot tiene una aplicación diferente dependiendo del entorno en que se utilice [2].

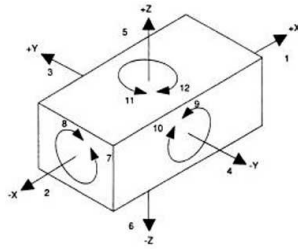


Figura 5. Orientación y posición de un cuerpo.

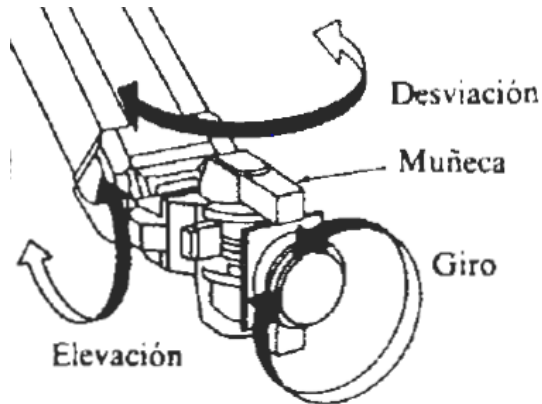


Figura 6. Efector final.

b) Clasificación por estructura cinemática

Se clasifican por su estructura topológica, dependiendo de la cadena cinemática que se maneje ya sea abierta o cerrada (Figura 7). Los robots seriales cuentan con una cadena cinemática cerrada mientras que los robots seriales cuentan con una cadena cinemática abierta además de los híbridos que consisten en la combinación de estas dos estructuras [2].

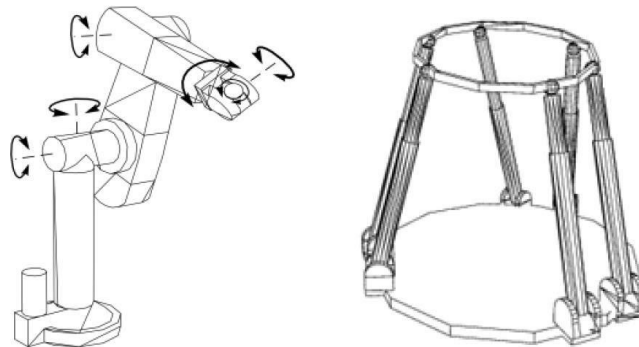


Figura 7. Estructuras cinemáticas a) serial, b) paralela.

c) Clasificación por sistema de actuación

Se clasifican en tres dependiendo de la naturaleza de los actuadores: eléctrico, neumático e hidráulico. Generalmente se usan actuadores eléctricos debido a que el control y el mantenimiento son fáciles, pero en caso de necesitar velocidad o se requieren para una carga pesada recurrimos a actuadores neumáticos o hidráulicos [2, 6].

d) Clasificación por área de trabajo y geometría

El área de trabajo de un manipulador está definida por el volumen de espacio que puede alcanzar su efector final en todas sus posibles orientaciones (Figura 8) [2].

En los manipuladores seriales se acostumbra una configuración donde los primeros tres eslabones conforman una posición más una junta que genere orientación. Esto genera espacios de trabajo diferentes según sean las estructuras. Las geometrías más utilizadas para los robots seriales son: robot cartesiano, robot cilíndrico, robot esférico, SCARA (selective compliance assembly robot arm, por sus siglas en inglés) [2].




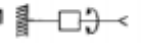

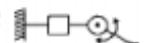

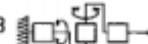
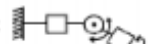
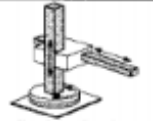


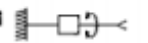



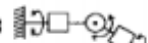

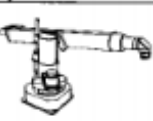


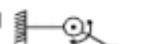
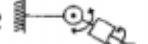
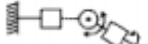

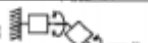
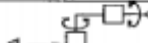

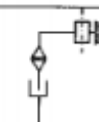



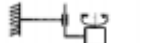
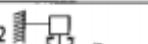
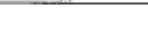


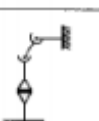

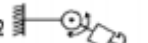
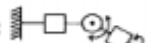
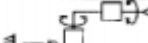
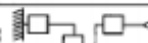

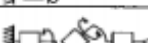
Robot	Axes		Wrist (DOF)		
	Principle	Kinematic Chain			
 cartesian robot			 1	 2	 3
			 2	 3	 4
 cylindrical robot			 1	 2	 3
			 2	 3	 4
 spherical robot			 1	 2	 3
			 2	 3	 4
 SCARA robot			 1	 2	 3
			 2	 3	 4
 articulated robot			 2	 3	 4
			 3	 4	 5

Figura 8. Manipuladores y áreas de trabajo.

e) Clasificación por sus características motrices

Los robots manipuladores pueden ser clasificados de acuerdo con su naturaleza de movimiento, cada clasificación depende del mecanismo, a las juntas con las que está constituido y el movimiento que cada una de estas genera; planar, esférico y espacial (Figura 9) [2].

Los manipuladores seriales se caracterizan por contar con una cadena cinemática abierta, además de esto cuenta con sistemas que permiten llamar robot, como el sistema de movimiento, sistema de reconocimiento, sistema de control [2]. El sistema de movimiento está dividido en 4 (manipulador, efector final, actuador y transmisión), cada subsistema tiene una finalidad común que es el lograr el movimiento del manipulador [2].

El manipulador está constituido por eslabones formados por cuerpos rígidos en la mayoría de los casos y articulaciones, éstas se encargan de unir a dos eslabones en

serie, para generar un movimiento específico según sea la articulación. Además, da la geometría del robot y su área de trabajo, el lugar más lejano al que puede llegar o el más cercano además que mediante de este subsistema se puede ver a grandes rasgos las particularidades del robot [6].

La unión de dos eslabones es llamada articulación, una articulación se encarga de proporcionar restricciones físicas en el movimiento de los elementos de la articulación, las articulaciones se clasifican en dos tipos dependiendo de la superficie de contacto que tiene con los eslabones [1, 2, 6]:

- Par cinemático bajo, se define por una superficie de contacto superficial.
- Par cinemático alto, los elementos están en contacto en un punto o una línea.

Existen seis tipos de pares cinemáticos básicos y dos de pares cinemáticos altos:

Cinemáticos básicos

- Revoltura (R): permite que dos elementos que giran con respecto de otro con referencia de un eje definido generan un grado de libertad (1 GDL).
- Prismática (P): permite que un par de elementos se deslicen con respecto uno del otro a lo largo de un eje definido, genera un grado de libertad (1 GDL).
- Cilíndrica (C): permite la rotación referente un eje y la traslación independiente al largo de un eje, genera dos grados de libertad (2 GDL).
- Helicoidal (H): permite que dos elementos giren alrededor y se trasladen linealmente lo largo de un eje, Genera un grado de libertad (1 GDL).
- Esférica (S): permite que un elemento gire libremente con respecto a otro en referencia con el centro de la esfera en todas las posibles orientaciones, genera tres grados de libertad (3 GDL).
- Planar: permite 2 traslaciones libres a través del plano y un grado de rotación mediante un eje normal al plano, genera tres grados de libertad (3 GDL).

Cinemáticos altos

- Engranaje (G): permite que un engrane ruede y se deslice con respecto al espacio de movimiento de un engranaje resto, helicoidal o cónico. Genera dos grados de libertad (2 GDL).
- Levas (Cp.): Es similar al engranaje excepto que el giro es usado para mantener presionado a los elementos en contacto.

También se puede clasificar al robot mediante los sistemas que generan el movimiento [6]:

Efecto final este es la parte final de nuestro manipulador, se encarga de manipular herramientas o tener la capacidad de sujetar objetos y materiales, la idea nace de emular a la mano humana y su capacidad de manipulación [2].

Actuador. Tiene la tarea de generar la fuerza con la cual el robot generara su movimiento, estos pueden generar su fuerza de diferentes fuentes como eléctrica, neumática o hidráulica [6].

Transmisión. Tiene como tarea la transmisión del movimiento generado por los actuadores para crear así una relación de movimiento con los eslabones [6].

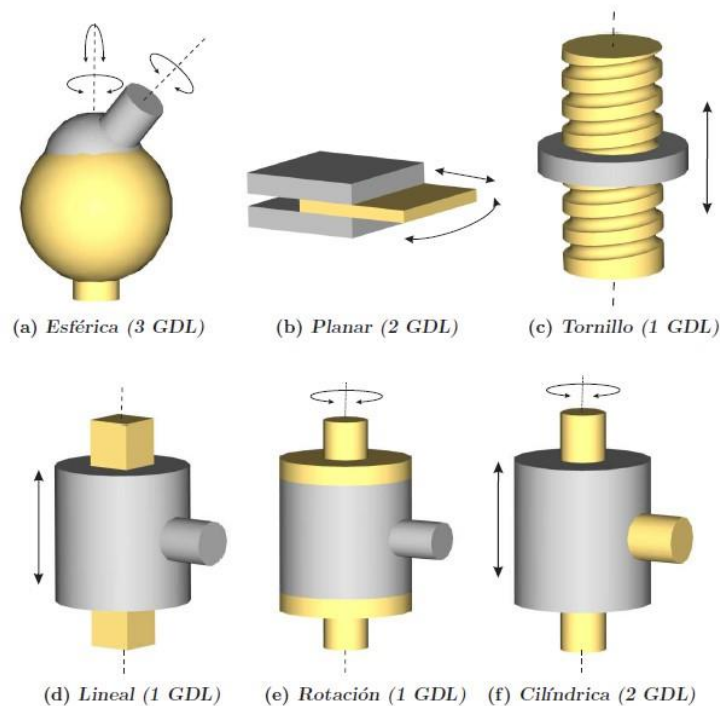


Figura 9. Articulaciones.

1.2 Cadenas cinemáticas

Una cadena cinemática es un ensamble de eslabones que están conectados por articulaciones. Cuando cada uno de los eslabones está conectado con otro por al menos dos caminos distintos se denomina una cadena cinemática cerrada, mientras

que si en una cadena cinemática, los eslabones están conectados sólo por una articulación se denomina como una cadena cinemática abierta (Ver Figura 10.) [2].

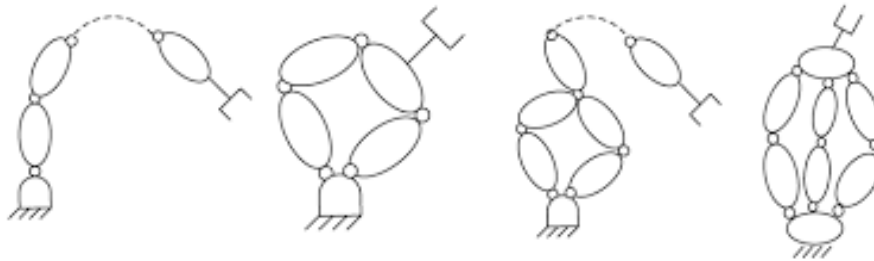


Figura 10. Cadenas cinemáticas en manipuladores.

1.3 Planteamiento del problema

En los últimos años la robótica ha tomado importancia en el campo industrial debido a su flexibilidad y rapidez comparadas con los métodos tradicionales. Los robots industriales pueden ser clasificados como seriales, paralelos e híbridos debido a su estructura cinemática, el estudio de los manipuladores contiene limitantes dependiendo del problema que se aborde, como la posición, velocidad o dinámica de los manipuladores. Los manipuladores requieren de un trazado de trayectorias para realizar tareas como pintado en aerosol, soldadura, *pick and place*, entre otras. Para que un manipulador siga una trayectoria la velocidad debe ser continua en el extremo, esto solo se logra a través de la coordinación de las variables articulares y el efector final, la velocidad que se describe en el efector final es constante, pero esto no ocurre en las variables articulares, es necesario encontrar y desarrollar el modelo cinemático diferencial. Al desarrollar la cinemática diferencial se obtiene una matriz jacobiana, ésta realiza la función de una transformación en espacios vectoriales de las variables articulares y el espacio vectorial de la velocidad en el efector final [2].

La cinemática diferencial aplicada en un modelo de variables de estado brinda la oportunidad de simular en un ambiente controlado e ideal a cualquier manipulador, principalmente demuestra la validez de los modelos obtenidos y de acuerdo con los parámetros de entrada es observable el comportamiento del manipulador sin llevar a cabo la construcción física del manipulador.

Por lo que en este trabajo se propone validar un modelo cinemático diferencial de dos manipuladores obtenido mediante diferentes metodologías, la comparación entre distintas metodologías y la simulación de los manipuladores.

1.4 Otras investigaciones sobre cinemática diferencial

Se han desarrollado distintas metodologías para obtener la cinemática diferencial de los manipuladores, cada una explica el movimiento de los eslabones respecto a un marco de referencia y a partir de él se obtiene una velocidad lineal o angular, esta relación queda plasmada en la matriz jacobiana.

Kong y Gosling (2004) [7] propusieron una teoría con la que desarrollan una arquitectura equivalente de manipuladores paralelos a manipuladores seriales, mediante la síntesis de tipo, configuraciones complejas de manipuladores paralelos reducidos en cadenas cinemáticas seriales simples, propone una serie de cadenas que asimilan el patrón de movimiento de los manipuladores paralelos más usados. Estas cadenas cinemáticas son una manera de simplificar el análisis de los manipuladores paralelos.

Campos y col. (2009) [8] desarrollaron la cinemática diferencial de cadenas virtuales obtenidas por la síntesis de tipo, mediante la teoría de grafos, eliminan las juntas pasivas dentro de la matriz jacobiana para tener un modelo más compacto de la cinemática diferencial de los manipuladores.

Martínez Zamudio (2015) [9] desarrolló la implementación de una cadena virtual RRR en un manipulador paralelo 3RRR haciendo uso de la cinemática diferencial tanto del manipulador como de la cadena virtual para demostrar que es posible la controlabilidad de un sistema físico mediante un sistema virtual.

Boche Lucio (2017) [10] desarrollo la implementación de una cadena virtual haciendo uso de la cinemática diferencial tanto del manipulador a controlar 3RRR_(RRR)v como de la cadena virtual RRR aplicando los modelo diferenciales a un modelo en variables de estado para la controlabilidad del manipulador.

La cinemática diferencial permite conocer la velocidad de las variables articulares y transformarlas al espacio vectorial del efector final, esto con el fin de conocer y así

manipular a un robot en una trayectoria. La síntesis de tipo permite generar una arquitectura sencilla frente a una compleja tomando en cuenta el patrón de movimiento del manipulador complejo, esto permite que a través de una cadena cinemática simple se manipule una estructura más compleja. Cuando se modela una cadena cinemática simple y se valida su comportamiento es posible escalar estos resultados a robots paralelos o llegar hasta robots híbridos.

1.5 Trabajo de investigación

La cinemática diferencial permite el trazado de trayectorias en los manipuladores a través de la coordinación de juntas, el efector final y las configuraciones singulares. La cinemática diferencial de dos robots seriales RRR y RPR permite conocer el comportamiento del manipulador bajo parámetros de trabajo además de observar si los patrones de movimiento permite ejecutar a un manipulador simple como cadena cinemática virtual para aplicarlas en robots paralelos complejos o híbridos donde la síntesis de tipo refleje los parámetros de movimiento.

Se validarán diferentes metodologías de obtención del modelo diferencial y matrices jacobianas de los manipuladores reforzando los conocimientos obtenidos en la materia de robótica. En el apartado teórico los modelos diferenciales pueden ser comparados para observar las diferencias entre ellos. La simulación de las cadenas cinemáticas permite observar si el modelo es válido sin llevarlo a la implementación física.

1.6 Hipótesis

¿Es posible aplicar los modelos de cinemática diferencial de dos robots manipuladores seriales RRR y RPR para su simulación en el seguimiento de una trayectoria y validar los métodos de obtención de éste?

1.7 Justificación

El validar e implementar modelos cinemáticos diferenciales para el seguimiento de trayectorias, permitirá ser una herramienta que facilitará resolver la cinemática inversa

o directa de manipuladores complejos, añadiendo cadenas virtuales en cinemática diferencial, la implementación de restricciones del movimiento mediante una cadena virtual simplifica la tarea de resolver modelos complejos de manipuladores paralelos o híbridos usando como base la cinemática diferencial.

1.8 Objetivos

- Obtener el modelo cinemático diferencial de dos manipuladores seriales mediante diferentes metodologías de cinemática y cinemática diferencial.
- Implementar los modelos de cinemática diferencial obtenidos para simular su comportamiento.
- Comparar las distintas metodologías y sus resultados.
- Validar los modelos matemáticos mediante la simulación.

1.9 Metodología

- Modelar dos manipuladores seriales RRR y RPR para obtener la cinemática de posición mediante diferentes metodologías como: el algoritmo de Denavit & Hartenberg y matrices de transformación homogénea.
- Obtención del modelo cinemático diferencial por medio de diferentes métodos como: matriz asimétrica y propagación de velocidades, mediante su modelo de posición
- Implementación de las variables de estado y en cinemática diferencial
- Implementación del modelo cinemático diferencial para la simulación y validación.

Capítulo 2

2. Teoría antecedente

En este capítulo se introduce al lector a la teoría necesaria para desarrollar este trabajo, en particular la cinemática diferencial. Se presentan las herramientas de posicionamiento en el espacio para la localización del manipulador y el modelado matemático del mismo.

Para conocer la ubicación del manipulador en el espacio es necesario contar con herramientas matemáticas que brinden esa información, la mecánica proporciona estas herramientas en sus ramas, la posición y orientación del manipulador en el espacio son necesarias, la forma de conocer estas variables es principalmente por medio de coordenadas cartesianas [4].

2.1 Cinemática

Es la rama de la mecánica que estudia el movimiento sin atender las causas que lo provocan, esto quiere decir que estudia la trayectoria de un cuerpo en el espacio respecto a un sistema de referencia sin considerar la fuerza o acción que genera el movimiento, su objetivo es estudiar la posición, la velocidad y la aceleración [11].

2.1.1 Cinemática de manipuladores

En la cinemática de los manipuladores se encuentran dos problemas, la cinemática directa y la cinemática inversa del manipulador. Estas dependen directamente de la geometría con la que está construido el manipulador. En 1955 Denavit-Hartenberg propusieron una aproximación sistemática generalizada utilizando una matriz algebraica que describe y representa la geometría espacial de los eslabones del manipulador con respecto a un cuadro de referencia. Este método consiste en una matriz de transformación homogénea de 4×4 , describiendo la relación espacial que

tienen los eslabones reduciendo así el problema de la cinemática directa a una transformación homogénea de una matriz [12].

La cinemática directa estudia el movimiento del efector final de los manipuladores con respecto a un sistema de referencia fijo se encarga de conocer la posición del efector final mediante los valores que proporcionan las variables articulares o juntas. Es el estudio de la posición y orientación del efector final, conociendo las variables articulares [2, 11].

Para posicionar un cuerpo en el espacio son necesarios 6 parámetros:

- $[X, Y, Z]$ tres parámetros para definir la posición con respecto al origen de un sistema de referencia.
- $[\theta_x, \theta_y, \theta_z]$ tres parámetros para definir la orientación con respecto a un sistema de referencia.

2.1.2 Matriz de rotación

Las matrices de rotación se conocen mediante los cosenos directores del sistema inercial y sistema móvil. La representación de los giros y las proyecciones de los respectivos ejes del sistema móvil con los del sistema inercial se definen de la siguiente manera [4]:

- Los cosenos directores son la representación del giro de dos sistemas uno fijo y otro móvil (Figura 11) de los cuales el fijo es la referencia para medir el giro o ángulo del sistema móvil con referencia a los ejes [4].

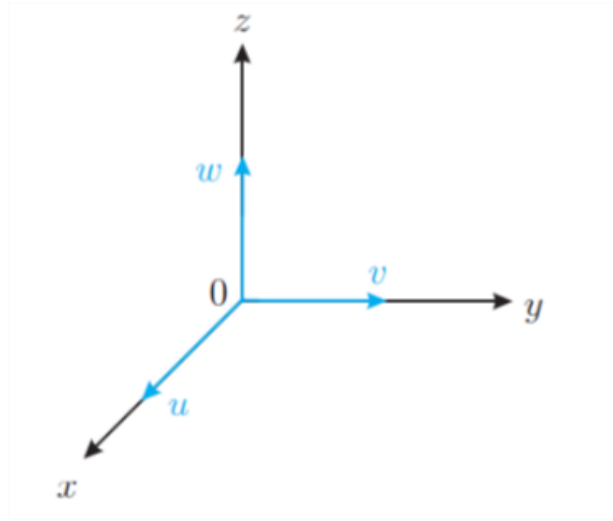


Figura 11. Sistemas de referencia.

Las Figuras 11 y 12 muestran dos ejemplos de sistemas, uno donde el origen y la orientación de los ejes de las bases coinciden Figura 11, donde la matriz de rotación es igual a la matriz identidad (Ecuación 1).

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

La matriz identidad de la Ecuación 1, se puede considerar como la representación de la matriz de rotación del sistema uvw con respecto a xyz , debido a la operación del producto punto de los vectores unitarios de los ejes de los sistemas. El sistema xyz es la base inercial y el sistema uvw se considera la base móvil donde se toma el ángulo que existe del sistema inercial y se realiza el producto punto de los ejes de las bases [4]. Los vectores unitarios de cada sistema se definen como se muestra en las siguientes expresiones [Ecs. 2,3]:

$$p_{xyz} = [i_x \ j_y \ k_z] \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = p_x i_x + p_y j_y + p_z k_z \quad (2)$$

$$p_{uvw} = [i_u \ j_v \ k_w] \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = p_u i_u + p_v j_v + p_w k_w \quad (3)$$

$$Q = \begin{bmatrix} (i_x \cdot i_u) & (i_x \cdot j_v) & (i_x \cdot k_w) \\ (j_y \cdot i_u) & (j_y \cdot j_v) & (j_y \cdot k_w) \\ (k_z \cdot i_u) & (k_z \cdot j_v) & (k_z \cdot k_w) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Al ser sistemas ortogonales, la diferencia de ángulos de los ejes que forman el sistema es de 90° y al ser coincidentes, los ejes se toman con una diferencia de 90° y cuando los del sistema coinciden, el ángulo que medir es igual a 0° .

$$Q = \begin{bmatrix} (\text{Cos } 0^\circ) & (\text{Cos } 90^\circ) & (\text{Cos } 90^\circ) \\ (\text{Cos } 90^\circ) & (\text{Cos } 0^\circ) & (\text{Cos } 90^\circ) \\ (\text{Cos } 90^\circ) & (\text{Cos } 90^\circ) & (\text{Cos } 0^\circ) \end{bmatrix} \quad (5)$$

La Figura 12 representa el caso donde el origen de los sistemas es coincidente pero el sistema móvil se encuentra girado un ángulo α sobre un eje que coincide con el sistema inercial.

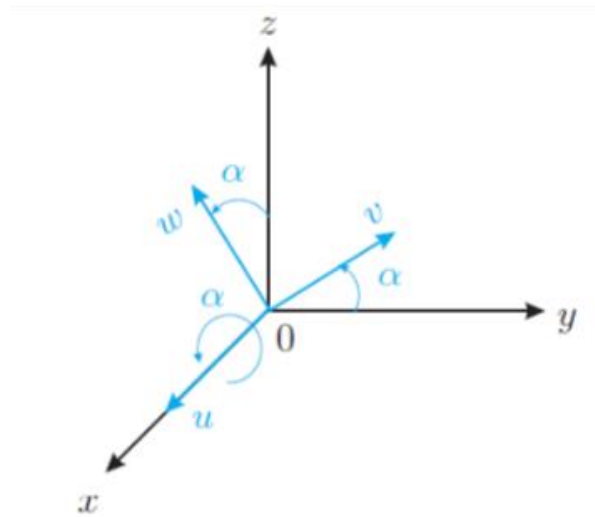


Figura 12. Sistemas de referencia en rotación.

Este caso origina la matriz de rotación correspondiente a un solo eje, lo cual proporcionara la matriz de rotación en la Ec. (6).

$$Q(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos } \alpha & \text{Sen } \alpha \\ 0 & -\text{Sen } \alpha & \text{Cos } \alpha \end{bmatrix} \quad (6)$$

Se definen las matrices de rotación con respecto a los otros dos ejes como:

$$Q(y, \phi) = \begin{bmatrix} \text{Cos } \phi & 0 & \text{Sen } \phi \\ 0 & \text{Cos } \alpha & 0 \\ -\text{Sen } \phi & 0 & \text{Cos } \phi \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$Q(z, \theta) = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta & -\text{Sen } \theta & 0 \\ \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Cada matriz (Ecs. 6, 7) representa un giro del sistema respecto a un eje de un ángulo cualquiera y muestra la orientación de los ejes de cada sistema.

2.1.3 Definición de la matriz de transformación homogénea

La matriz homogénea Ec. (9) es una herramienta de la cual la robótica hace uso para poder observar el cambio de posición y orientación con respecto a una base inercial, la matriz de transformación homogénea es una matriz de 4x4 que provee la información de orientación, traslación, escalado y perspectiva teniendo en cuenta que es necesario una base fija o inercial que dada su definición es una base compuesta de tres ejes que se tomarán como referencia para las demás bases móviles que se ubicarán en las articulaciones del manipulador, para ubicar en el espacio cada eslabón del manipulador esto vuelve a la matriz de transformación homogénea una herramienta para la robótica [1, 4, 6].

$$T_b^a = \begin{bmatrix} R_b^a(3x3) & P(3x1) \\ \gamma(1x3) & p(1x1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

De acuerdo con la constitución de la matriz, las primeras tres filas y tres columnas que comprenden los valores de n, o, a son nueve parámetros que indican la orientación,

representan el giro de los ejes u, v, w de un sistema móvil con respecto a un sistema inercial x, y, z . Figura 11 representa en producto punto entre las matrices de orientación, el producto punto es igual a coseno del ángulo entre dos ejes o también llamado coseno director [1], recordando que la multiplicación no es conmutativa se obtiene que el sistema de referencia se multiplica por el sistema móvil dando así la orientación del sistema con respecto al inercial, o dependiendo del caso se toma el orden del producto, si la operación es con respecto al sistema inercial se premultiplica y si es con respecto al sistema móvil se posmultiplica [4].

La posición del sistema se localiza en la columna 4 con los valores de las 3 primeras filas de la matriz de transformación homogénea, dando la traslación en referencia a cada uno de los ejes del sistema inercial. Es el vector P que indica el valor de la traslación de los sistemas, cuanto está desfasado el sistema con respecto a los ejes coordenados del sistema inercial [13].

En el elemento con valor 1 de la Ec. (10) indica el escalamiento se maneja por lo general en 1 para poder proporcionar la distancia de la traslación del sistema sin alterar el modelo. Los elementos a_{41}, a_{42}, a_{43} de la Ec. (10) corresponden a la perspectiva, esto indica el punto de vista desde la cual se ve el sistema a través de los ejes coordenados del sistema inercial, se puede ubicar la vista de nuestro sistema en un gran número de posiciones para visualizar el manipulador, normalmente el sistema se observa desde el origen por esto está en 0,0,0.

Al realizar las operaciones de traslación y rotación de los sistemas de referencia se debe identificar en función de que sistema se requiere realizar los movimientos para poder efectuar las operaciones con las matrices, donde se toma a "Q" como una matriz de rotación para el sistema inercial y estará dada en función del eje que se desee rotar [4].

2.2 Cinemática directa de manipuladores

Para la obtención de la cinemática directa se emplearon dos métodos, el algoritmo de Denavit-Hartenberg [4] y matrices de transformación homogénea [4]. Para el desarrollo de los dos métodos se consideran las matrices de rotación y de traslación para poder ubicar en el espacio a las transformaciones que ocurren al pasar de base en base, y

controlar los movimientos [5]. Estas nos indican las transformaciones que ocurren en el sistema, cada una implica una metodología propia de como visualizar el problema y resolverlo.

2.2.1 Método de matriz de transformación homogénea

- Se obtiene el diagrama del robot, representando articulaciones y eslabones (incluido el eslabón de tierra).
- Se enumeran ejes y eslabones comenzando la numeración con 0 al eslabón de tierra.
- Se identifica la línea de acción de las articulaciones en el manipulador y se dibuja una línea punteada a lo largo de la línea de acción
- Se coloca el eje z en la línea de acción de las articulaciones.
- Se coloca el origen del sistema a lo largo de el eje z para hacer que coincida con el centro de la articulación
- Se coloca el sistema inercial en la base con el eje “x” a lo largo del eslabón con la numeración 0.
- Los sistemas locales se colocarán a partir de cada eje enumerando cada uno de ellos para tomar referencia de posición.
- Cada sistema es completado con el eje y para formar un sistema dextrógiro
- Con los sistemas de posición colocados en las articulaciones se calculan las transformaciones que cada uno tiene sufrir para colocarse como el sistema siguiente con el uso de matrices de traslación y orientación que representan estas transformaciones.

Cada sistema se establecerá con referencia al primer sistema o sistema inercial, y a partir de él se orientarán y trasladarán los demás sistemas obteniendo en la matriz. Estos datos con las restricciones se efectúa con referencia al sistema inercial ésta se premultiplica, por ser una multiplicación de matrices se conoce que no es conmutativo, esta regla nos da una jerarquía de operaciones [1].

De esta forma las matrices indican las transformaciones que se realizan para que los sistemas puedan alinearse con respecto al sistema inercial. Las ecs. (6,7,8)s anteriores indican los “movimientos” que realizan los sistemas locales para orientarse y posicionarse con el sistema inercial con esto y un punto en el espacio de trabajo se

llega a la determinación de los valores que las variables articuladas deben de tener para alcanzar esa posición [1].

2.2.1 Método Denavit Hartenberg

Se trata de un procedimiento sistemático para describir la estructura cinemática de una cadena articulada constituida por articulaciones con un solo grado de libertad [4]. El algoritmo está dado por los siguientes pasos:

D-H 1. Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.

D-H 2. Numerar las articulaciones comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n.

D-H 3. Localizar el eje de cada articulación. Si esta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.

D-H 4. Para i de 0 a n-1 situar el eje z_1 sobre el eje de la articulación $i+1$.

D-H 5. Situar el origen del sistema de la base en cualquier punto del eje z_0 . Los ejes x_0 y y_0 se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con z_0 .

D-H 6. Para i de 1 a n-1, situar el sistema (soldado al eslabón i) en la intersección del eje z_1 con la línea normal común a z_{i-1} y z_i . Si ambos ejes se cortasen se situaría en el punto de corte. Si fuesen paralelos se situaría en la articulación $i+1$.

D-H 7. Situar x_i en la línea normal común a z_{i-1} y z_i .

D-H 8. Situar y_i de modo que forme un sistema dextrógiro con x_i y z_i .

D-H 9. Situar el sistema (S_n) en el extremo del robot de modo que z_n coincida con la dirección de z_{n-1} y x_n sea normal a z_{n-1} y z_n .

D-H 10. Obtener θ_i como el ángulo que hay que girar en torno a z_{i-1} para que x_{i-1} y x_i queden paralelos.

D-H 11. Obtener d_i como la distancia, medida a lo largo de z_{i-1} que habría de desplazar (S_{i-1}) para que x_i y x_{i-1} quedasen alineados.

D-H 12. Obtener \mathbf{a}_i como la distancia medida a lo largo de \mathbf{x}_i (que ahora coincidirá con \mathbf{x}_{i-1}) que habría que desplazar al nuevo (S_{i-1}) para que su origen coincidiese con (S_i).

D-H 13. Obtener α_i como el ángulo que habría que girar en torno a \mathbf{x}_i (que ahora coincidiría con \mathbf{x}_{i-1}), para que el nuevo (S_{i-1}) coincida totalmente con (S_i)

D-H 14. Obtener las matrices de transformación A_{n-1}^n .

D-H 15. Obtener la matriz de transformación que relaciona al sistema de la base con el extremo del robot $\mathbf{T} = A_1^0, A_2^1 \dots A_{n-1}^n$

D-H 16. La matriz \mathbf{T} define la orientación (sub matriz de rotación) y posición (sub matriz de traslación) del extremo referido a la base en función de la n coordenadas articulares.

θ_i Es el ángulo que forman los ejes x_{i-1} y x_i medido en un plano perpendicular al eje z_{i-1} , utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.

d_i Es la distancia a lo largo del eje z_{i-1} desde el origen del sistema de coordenadas ($i-1$)-esimo hasta la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i . Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

a_i Es a la distancia a lo largo del eje x_i que va desde la intersección del eje z_{i-1} con el eje x_i hasta el origen del sistema i -esimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes z_{i-1} y z_i .

α_i Es el ángulo de separación del eje z_{i-1} y el eje z_i , medido en un plano perpendicular al eje x_i , utilizando la regla de la mano derecha [4] [10].

El algoritmo D-H consta de 4 transformaciones básicas que van desde la base inercial generada en la primer articulación o variable articular, hasta la base ubicada en el efector final [4]. La representación del algoritmo es:

$$D - H = Q_z(\theta) * T_z(d) * T_x(a) * Q_x(\alpha) \quad (11)$$

Se construye una matriz de transformación homogénea con los parámetros de Denavit-Hartenberg.

2.3 Cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa consiste en determinar las variables articulares correspondientes a la orientación y posición del efector final [6]. Este es un estudio más complejo con respecto a la cinemática directa de los manipuladores seriales por las siguientes razones:

- Por lo general, las ecuaciones son no lineales, y no siempre es posible encontrar una solución explícita. Entonces, pueden existir múltiples soluciones.
- Pueden existir soluciones infinitas como en los manipuladores redundantes.
- Las soluciones pueden ser no admisibles debido a la arquitectura con la que está constituido el manipulador.

Cuando se conoce la posición del efector final entonces, la cinemática inversa es el estudio de la orientación y la posición de las articulaciones del robot, manipulador, en la literatura hay varios métodos propuestos para resolver la cinemática inversa [2].

- Geométrico
- Algebraico
- Sustitución polinomial
- Matriz de transformación homogénea inversa
- Desacople cinemático

2.3.1 Método geométrico

Es recomendable utilizarlo en robots con menos de tres grados de libertad o para el caso donde solo se necesiten los tres primeros grados de libertad, este se basa en encontrar el suficiente número de relaciones geométricas en las que intervienen la posición del efector final, la longitud de sus eslabones y sus variables articulares [4].

Se utilizan métodos de resolución de triángulos ya sean rectángulos u oblicuos donde las identidades trigonométricas y otras herramientas como la ley de senos y cosenos y las de identidades trigonométricas [4].

- Ley de cosenos: Es usada para encontrar las partes faltantes de un triángulo oblicuo (no rectángulo) depende de dos lados y de un ángulo interno, o

las longitudes de tres lados. En cualquiera de estos casos, es imposible usar la ley de los senos porque no se puede establecer una proporción que pueda resolverse.

La ley de los cosenos establece (Ec. 13):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos \gamma \quad (12)$$

La ley de los cosenos también puede establecerse como:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 ac \cos \beta \quad (13)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos \alpha \quad (14)$$

- Ley de senos: Es la relación entre los lados y ángulos de triángulos no rectángulos u oblicuos. Simplemente, establece que la relación de la longitud de un lado de un triángulo al seno del ángulo opuesto a ese lado es igual para todos los lados y ángulos en un triángulo dado. Entonces:

$$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C} \quad (15)$$

Para usar la ley de los senos se necesita conocer dos ángulos y un lado del triángulo o dos lados y un ángulo opuesto de uno de ellos. El primero de los dos casos se usa las mismas partes que utilizó para probar la congruencia de triángulos en geometría, pero en el segundo caso no podríamos probar los triángulos congruentes dadas esas partes. Esto es porque las partes faltantes podrían ser de diferentes tamaños [13].

Las identidades trigonométricas Algunas de las identidades trigonométricas más usadas son derivadas del teorema de Pitágoras, con estas identidades trigonométricas es posible encontrar los valores de ángulos y largo de los lados para resolver como triángulos los problemas de la cinemática inversa.

$$\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1 \quad (16)$$

$$1 + \text{Tan}^2 x = \text{Sec}^2 \quad (17)$$

$$1 + \text{Cot}^2 x = \text{Csc}^2 \quad (18)$$

Identidades recíprocas:

$$\text{Sen } x = \frac{1}{\text{Csc } x}, \text{Cos } x = \frac{1}{\text{Sec } x}, \text{Tan } x = \frac{1}{\text{Cot } x} \quad (19)$$

$$\text{Csc } x = \frac{1}{\text{Sen } x}, \text{Sec } x = \frac{1}{\text{Cos } x}, \text{Cot } x = \frac{1}{\text{Tan } x} \quad (20)$$

Identidades cocientes:

$$\text{Tan } x = \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x} \quad (21)$$

$$\text{Cot } x = \frac{\text{Cos } x}{\text{Sen } x} \quad (22)$$

Fórmulas de ángulo doble:

$$\text{Sin}(2x) = 2 \text{Sin } x \text{Cos } x \quad (23)$$

$$\text{Cos } (2x) = \text{Cos}^2 x - \text{Sin}^2 x \quad (24)$$

$$\text{Tan } (2x) = \frac{2 \text{Tan } x}{1 - \text{Tan}^2 x} \quad (25)$$

Fórmulas del ángulo medio o de reducción de potencias:

$$\text{Sin}^2 x = \frac{1 - \text{Cos}(2x)}{2} \quad (26)$$

$$\text{Cos}^2 x = \frac{1 + \text{Cos}(2x)}{2} \quad (27)$$

$$\text{Tan}^2 x = \frac{1 - \text{Cos}(2x)}{1 + \text{Cos}(2x)} \quad (28)$$

2.3.2 Método algebraico

Se toma la función de la cinemática directa donde la suma de las variables articulares con sus respectivos eslabones de manera consecutiva proporcionan la posición y orientación del efector final. La posición del efector final puede ser definida como la posición de un punto "Q" con la orientación de un Angulo " Φ ". En este caso teniendo la posición final quedan como incógnitas el valor de las variables articulares y se efectúan las operaciones pertinentes para encontrar el valor de las variables articulares haciendo uso de herramientas geométricas [4].

2.3.3 Método de matriz de transformación homogénea inversa

Se plantea la cinemática inversa que se obtiene a través de la matriz de transformación homogénea (MTH), al conocer los parámetros articulares la posición del efector final, mediante la manipulación de estos parámetros [4].

Mediante las ecuaciones de orientación y posición obtenidas a partir de la cinemática directa se plantea la resolución de estas para haya el valor de las variables articulares del robot, el problema fundamental de este método incide en la complejidad del manipulador y sus grados de libertad, cuando un manipulador contiene 6 grados de libertad contiene doce ecuaciones de las cuales se debe partir para encontrar los valores de las seis variables articulares.

Se inicia obteniendo el modelo de las relaciones de los sistemas desde $[s_0]$ hasta $[s_n]$ en una matriz de relación \mathbf{T} donde $[s_n]$ es el sistema último en el manipulador. Cuando se obtiene las matrices que de los sistemas se procede a sacar la matriz inversa de cada sistema [4].

2.3.4 Desacoplo cinemático

El método de desacoplo cinemático divide el problema en dos, la orientación y la posición del efector final para esto, divide la cadena cinemática del robot donde los primeros tres grados de libertad o articulaciones de la cadena cinemática del manipulador definirán la posición del manipulador y las articulaciones siguientes definirán la orientación del efector final [4].

Se obtiene la matriz T que contiene a los vectores: n, o, a, p , con la primera parte de la cadena que contiene las variables articulares q_1, q_2, q_3 que dejaremos en función de las componentes del vector px, py, pz además que se conocen las constantes que generan la longitud de los eslabones del manipulador. Usando las matrices inversas de la relación de los sistemas obtenidos por la metodología de Denavit-Hartenberg y el punto medio de las componentes del vector de posición.

Se resuelve para encontrar el valor aislado de cada una de las variables articulares mediante el algebra de matrices y métodos geométricos usando el punto medio de la matriz T definiendo a este como corresponde a la segunda parte de la división de la cadena cinemática del manipulador que se realizó al inicio de este método. Esto solo ilustra a P como un vector de posición resultante de la suma del de los dos vectores que representan la orientación demostrado como la matriz T_0^4 y T_4^5 que define la orientación del efector final con estos procedimientos realizados se obtiene el valor de las variables articulares para cada posición y orientación del efector final deseada [14].

2.4 Cinemática diferencial

El modelo cinemático de un robot relaciona las variables articulares y la posición del efector final, así como su orientación, en esta relación no se tiene en cuenta la fuerza o pares que produce el cambio o que actúan sobre el robot. Este sólo relaciona las velocidades en el espacio articular del robot que después se ven reflejadas en el espacio cartesiano, con el modelo cinemático diferencial, el sistema de control del robot establece la velocidad que debe imprimir en cada articulación para que el efector final desarrolle una trayectoria, por ejemplo, una línea recta a velocidad constante [4].

El modelo cinemático diferencial puede ser expresado en una matriz jacobiana ya que relaciona el vector de velocidades articulares con el vector de velocidades cartesianas o el vector de velocidades angulares y lineales, estos espacios se pueden definir, a la primera relación se le llama jacobiano analítico mientras que a la segunda relación se le llama jacobiano geométrico [13].

2.5 Cinemática diferencial del cuerpo rígido

Velocidad lineal

la velocidad lineal es la representación del cambio de posición en un lapso, tomando en cuenta a partir de que sistema se requiera encontrar la velocidad, ésta será diferente por el movimiento relativo a cada base, es por ese motivo que se debe especificar con respecto a que sistema de referencia se requiere calcular la velocidad, mientras que la derivada de la posición indique que no se está realizando un cambio con respecto al sistema elegido se dice que su velocidad es cero aunque para otro sistema no sea así [1].

$$v_{i+1}^i = v_i^i + \omega_i^i \times p_{i+1}^i \quad (29)$$

La velocidad lineal de un sistema se compone de un movimiento rotacional de la junta donde se ubica el sistema (1) añadiendo el movimiento del siguiente sistema contado como una constante a P_{i+1}^i , se describe con la siguiente ecuación:

$$v_{i+1}^i = v_i^i + \omega_i^i \times p_i^i \quad (30)$$

Las ecuaciones generales para la propagación de velocidades son:

$${}_{i+1}^{i+1}\omega = {}^{i+1}_i R {}_i^i \omega + \dot{\theta}_{i+1} {}_{i+1}^{i+1} \dot{Z} \quad (31)$$

$${}_{i+1}^{i+1}v = {}^{i+1}_i R ({}_i^i v + {}_i^i \omega \times {}_{i+1}^i P) \quad (32)$$

Velocidad angular

Describe el atributo de un cuerpo por lo que se comprende que describe el movimiento giratorio de un sistema y como en la velocidad lineal, se debe especificar el sistema de referencia al derivar para poder conocer la velocidad con respecto a estos sistemas [1].

2.6 Propagación de velocidades

Un manipulador es una cadena de cuerpos, cada uno capaz de movimiento relativo con respecto a los cuerpos vecinos; por lo tanto, es posible numerar en orden comenzando desde la base ver figura 13, hasta el extremo del efector final. La velocidad angular $i+1$ es la misma que la velocidad i más un nuevo componente causado por el giro en la junta $i+1$. Esto puede ser descrito en términos del sistema (1) por la Ec. (32) [1].

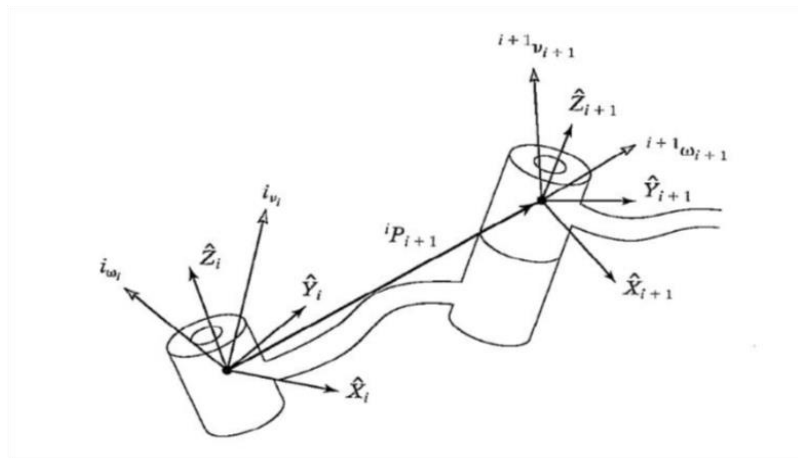


Figura 13. Asignación de sistemas de referencia en un eslabón.

2.7 Matriz Jacobiana

La matriz jacobiana es un elemento crítico para la descripción de los manipuladores y la generación de trayectorias prescritas en el efector final. La mayoría de los softwares industriales utilizan la derivación analítica para obtener las matrices jacobianas de los manipuladores, así como sus inversas para poder variar las velocidades en las bases y causar un cambio en la trayectoria del efector final. Las primeras apariciones de los métodos para elaborar una matriz jacobiana aparecieron en 1983 y desde ese entonces se han desarrollado más metodologías por diferentes autores para:

- Encontrar configuraciones singulares.
- Analizar redundancias.
- Determinar algoritmos de cinemática inversa para el análisis de velocidad.
- Describir la relación entre las fuerzas aplicadas en el efector final y los pares de torsión de las articulaciones.

- Derivar algoritmos de dinámica.

Una de las utilidades de la matriz jacobiana es la de visualizar las configuraciones singulares, cuando el determinante de la matriz jacobiana es igual a cero. Esto significa que el manipulador se encuentra en una singularidad, es decir que el manipulador pierda o gane un grado de libertad [1, 4, 6].

2.7.1 Jacobiano analítico

Cuando la posición y orientación del efector final del manipulador es conocida, la matriz jacobiana analítica relaciona las velocidades articulares con el extremo del robot. Es el método más directo para obtener las relaciones entre velocidades articulares y las del extremo del robot. Este método consiste en la diferenciación de las ecuaciones correspondientes al modelo cinemático directo. Se necesitan definir como coordenadas cartesianas desde coordenadas articulares:

$$X = f_x(q_1, q_2, \dots, q_n); Y = f_y(q_1, q_2, \dots, q_n); Z = f_z(q_1, q_2, \dots, q_n); \quad (33)$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n); \beta = f_\beta(q_1, q_2, \dots, q_n); \gamma = f_\gamma(q_1, q_2, \dots, q_n); \quad (34)$$

El sistema se diferencia en cada uno de los términos $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ con respecto a q_i mediante la regla de la cadena y se obtiene la velocidad en la articulación para pasar de una configuración a otra hablando de las posiciones [4].

$$\dot{x} = \sum_1^n \frac{dx}{dq_i} \dot{q}_i; \dot{y} = \sum_1^n \frac{dy}{dq_i} \dot{q}_i; \dot{z} = \sum_1^n \frac{dz}{dq_i} \dot{q}_i \quad (35)$$

$$\dot{\alpha} = \sum \frac{d\alpha}{dq_i} \dot{q}_i; \dot{\beta} = \sum \frac{d\beta}{dq_i} \dot{q}_i; \dot{\gamma} = \sum \frac{d\gamma}{dq_i} \dot{q}_i \quad (36)$$

Efectuando la derivada parcial de la posición de las articulaciones se obtiene la matriz jacobiana que es la representación de la velocidad de las articulaciones para adoptar una posición nueva o diferente, el valor instantáneo de cada articulación cambia por lo que cada derivada será diferente en el espacio articular [4].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (37)$$

El valor de cada uno de los elementos de la matriz $Jp\dot{q}$ dependerá de los valores de las coordenadas articulares "q", el valor de la matriz jacobiana será diferente en cada uno de los puntos del espacio articular [4].

2.7.2 Matriz jacobiana geométrica

Establece la relación entre las velocidades articulares y la velocidad lineal y angular en el extremo del robot expresadas en el sistema inercial del robot. Para su obtención es necesaria la matriz de transformación homogénea que define el modelo cinemático directo del robot.

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (38)$$

La velocidad lineal del extremo del robot expresada desde el sistema inercial se obtiene mediante las derivadas respecto al tiempo de las coordenadas (x, y, z) obtenidas de la matriz T . Este procedimiento es igual al del jacobiano analítico, para obtener la velocidad angular. Al obtener la matriz T de posición del efector final referido con el sistema inercial del manipulador serial se obtiene una matriz de rotación dentro de la matriz de transformación homogénea, esta es una matriz ortonormal que contiene las rotaciones de los sistemas. Para obtener las velocidades angulares se deriva la matriz de rotación para esto se hace uso de la matriz asimétrica, se dice que una matriz es asimétrica cuando al multiplicarla por su transpuesta el resultado es cero, la diagonal principal es igual a uno, así como simetría de los elementos internos a través de la diagonal principal [4].

La matriz de rotación es una matriz cuadrada y ortonormal, para cada matriz ortonormal, la matriz de rotación se representa con una letra R y R^{-1} se tiene que:

$$RR^{-1} = I_n \quad (39)$$

Donde I_n es la matriz identidad.

Al diferenciar la Ec. (40) se obtiene:

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0_n \quad (40)$$

Que también puede ser escrito como:

$$\dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0_n \quad (41)$$

Se realiza un cambio de variable en la ecuación (42)

$$\Omega = \dot{R}R^T \quad (42)$$

La matriz Omega proporciona las velocidades angulares del efector final referido al sistema inercial.

La notación de los vectores i, j, k es:

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Dentro de la matriz asimétrica la ubicación de las componentes de la velocidad angular cambia a la siguiente manera, debido a que una de sus propiedades es que la diagonal principal está formada por ceros. Otra propiedad de la matriz asimétrica es que sus componentes se encontrarán con su inverso aditivo en una simetría dada por la diagonal principal, estas dos propiedades permiten la verificación de ésta [4, 13].

$$a)\Omega(i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; b)\Omega(j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; c)\Omega(k) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \dot{\theta} \\ k_y \dot{\theta} \\ k_z \dot{\theta} \end{bmatrix} = \dot{\theta} \hat{k} \quad (46)$$

2.8 Relación entre la matriz jacobiana geométrica y analítica

Se basa en la propagación de velocidades, este método permite la obtención de las columnas de la matriz jacobiana que relacionan las velocidades articulares con las velocidades lineales del efector final del robot. Las matrices de transformación de los sistemas en el robot según la metodología de Denavit & Hartenberg proporcionan la información de los vectores directores y origen del sistema, en el origen se posiciona un vector orientado al eje de la articulación, la información del vector está contenida en la tercera columna de la matriz que define al sistema [4].

2.9 Matriz de variables de estado

Para definir una matriz de variables de estado, es necesario definir ciertos puntos de la teoría de control moderno y como a través de esta es posible la simulación para comprobar la cinemática diferencial de los manipuladores propuestos en esta tesis.

La teoría de control moderno se enfoca en sistemas complejos que pueden contener múltiples entradas, así como múltiples salidas además de ser variantes con el tiempo, es esencialmente una aproximación en el dominio temporal, en la teoría tradicional de control es una aproximación en el dominio de la frecuencia compleja, para puntualizar el control moderno, se tienen definir ciertos términos: estado, variables de estado, vector de estado y espacio de estados [15].

Estado

En un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables de forma que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$ [15].

VARIABLES DE ESTADO

En un sistema dinámico constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema. Se necesitan al menos n variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ para describir completamente el comportamiento del sistema, de tal manera que una vez que la entrada para $t \geq t_0$ está dada y el estado inicial $t = t_0$ está especificado, el sistema está determinado completamente. Las, n variables son las variables de estado, las variables de estado pueden ser elementos físicamente no medibles o cantidades observables pero en la práctica es recomendable que puedan ser medibles [15].

VECTOR DE ESTADO

Si un sistema necesita de n variables para describir su comportamiento, estas variables pueden ser las componentes del vector x , este vector se denomina vector de estado y posee las propiedades de las variables de estado donde; la entrada para $t \geq t_0$ está dada y el estado inicial $t = t_0$ está especificado, el sistema está determinado completamente [15].

ESPACIO DE ESTADOS

En un espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenado conformado por $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ donde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son las variables de estado, se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar como un punto en el espacio de estados [15].

Ecuaciones en el espacio de estados

El análisis en el espacio de estados se centra en el estudio de tres tipos de variables: entrada, salida y de estado [15].

Representación en el espacio de estados

A partir de la cinemática diferencial de los manipuladores es posible obtener un sistema de ecuaciones diferenciales. El estado de un sistema es la mínima cantidad de información necesaria en un instante que, conociendo la entrada en ese instante, es posible determinar el estado del sistema en cualquier instante posterior.

Una forma de encontrar una representación de la cinemática del sistema MIMO es mediante la realización de un mapeo de las velocidades de entrada r_m , donde $\eta(t) = [\eta_1, \dots, \eta_2]$ [16].

Siendo el espacio nulo $N(ATp)$, puede ser utilizado para encontrar un conjunto de vectores suaves de r_m , donde $\sigma_{m1}(q), \dots, \sigma_{mr_m}(q)$. Estableciendo $\Sigma(q) = [\sigma_{m1}(q), \dots, \sigma_{mr_m}(q)]$ es una matriz con los vectores de velocidades, parametrizada por las coordenadas angulares $\theta_{i,j}$, se expresa el espacio de estados de las restricciones cinemáticas como:

$$\dot{q}_p = \sum (\theta_{i,j}) [\eta] \quad (47)$$

Donde η es la matriz que representa la velocidad lineal y angular, del extremo del manipulador. Introduciendo la configuración de la matriz de rotación como una extensión de la matriz de rotación de postura.

$$R_q = \begin{bmatrix} R_p^0(\theta_p) & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (48)$$

Lo anterior se puede expresar de la forma generalizada:

$$\dot{q}_p = \begin{pmatrix} \zeta_p \\ \theta_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma \zeta \\ \Sigma q_k \theta_{i,j} \end{pmatrix} \cdot [\eta] \quad (49)$$

Pre multiplicando por la matriz de rotación R_q en ambos lados la expresión queda de la siguiente manera:

$$\dot{q} = R_q \cdot \dot{q}_p = R_q \cdot \begin{pmatrix} \dot{z}_p \\ \dot{\theta}_{i,j} \end{pmatrix} = R_q \cdot \left(\frac{\sum \zeta}{\sum q_k \dot{\theta}_{i,j}} \right) \cdot [\eta] \quad (50)$$

Siendo la ecuación anterior la representación del sistema MIMO completo del modelo cinemático de la configuración del manipulador.

$$\dot{q} = S_T(q) \cdot u = \begin{pmatrix} \dot{z}_p \\ \dot{\theta}_{i,j} \end{pmatrix} = \left(\frac{R(\theta) \sum \zeta}{\sum q_k \dot{\theta}_{i,j}} \right) \cdot [\eta]$$

$$A_T(q) \dot{q} = 0 \quad (51)$$

Donde, $A_T(q) \in R^{(M.N) \times (3+M.N)}$ es la matriz asociada a la cinemática, $q \in R^{(3+M.N)}$ es el vector de las coordenadas de configuración y $\dot{q} \in R^{(3+M.N)}$ es el vector de las velocidades de configuración.

$$\dot{q}_p = (\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{\theta}_p, \dot{q}_{1,1}, \dot{q}_{1,2}, \dots, \dot{q}_{n,m}) \quad (52)$$

Para solucionar el conjunto es conveniente seleccionar el conjunto de variables generalizadas que mejor convenga, para representar al sistema del sistema MIMO. Las velocidades del punto P expresadas en coordenadas respecto al sistema inercial: v_{xP} y v_{yP} así como la velocidad angular ω_p , del efector final, en este caso describiendo los parámetros para un manipulador plano de 3 GDL.

$$\dot{q}_p = [S_{tn}] [\eta] \quad (53)$$

Donde S_{tn} son vectores columna y $\eta = [v_{xP} \ v_{yP} \ \omega_p]$ es el vector de entradas. Por lo tanto:

$$\dot{q}_p = [S_{t1} \ S_{t2} \ S_{t3}] [\eta] \quad (54)$$

De esta forma se tiene la cinemática del robot expresada en términos de las variables de entrada η .

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta} \\ \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_{t1,1} & \dots & S_{t1,3} \\ S_{t3,1} & \dots & S_{t3,3} \end{pmatrix} \cdot (\eta) \quad (55)$$

De esta manera las variables de velocidad en el robot son representadas del sistema MIMO para pasar a la simulación [16].

Capítulo 3

3. Modelado e implementación de los casos particulares

En el capítulo tres se presenta el desarrollo de los casos particulares mediante las metodologías antes expuestas. Se analizan a dos robots seriales a partir de sus ecuaciones de estado; así como su implementación, el análisis se enfoca a los siguientes manipuladores:

- Robot serial plano (RRR)
- Robot serial plano (RPR)

Se decidió estudiar las configuraciones descritas para comprender el comportamiento y validar la teoría descrita en el capítulo anterior, así como probar la hipótesis de este trabajo, validando que es posible controlar a un manipulador serial a partir de la cinemática diferencial.

3.1 Definición del caso particular

Los manipuladores por modelar son dos, el primero será llamado RRR por la configuración de sus articulaciones, consta de una cadena cinemática con tres articulaciones rotacionales, las rotaciones de las tres articulaciones se efectúan sobre el eje z. El segundo manipulador consta de una articulación rotacional, una articulación prismática seguida de otra articulación rotacional, las articulaciones rotacionales giran sobre el eje z como en el caso anterior pero la articulación prismática genera un desplazamiento que puede ser proyectado en los ejes x, y.

Se decidió estudiar estas dos configuraciones para comprender la teoría antecedente que propone las cadenas virtuales para la simplificación de la cinemática en manipuladores de alta complejidad y las aplicaciones de la cinemática diferencial en la generación de trayectorias y su validación en una simulación. El modelo matemático de la cinemática de posición y la cinemática diferencial serán obtenidos por diferentes metodologías, el objetivo de esto es poder observar y comparar los resultados de cada método.

3.2 Manipulador serial RRR

1. El manipulador (ver Figura 14) posee un movimiento $\{x, y, \theta\}$, donde θ es una rotación del efector final sobre el eje z.
2. Se encuentra compuesto por tres articulaciones rotacionales y tres eslabones.
3. Cada articulación posee un actuador rotacional que genera el movimiento.

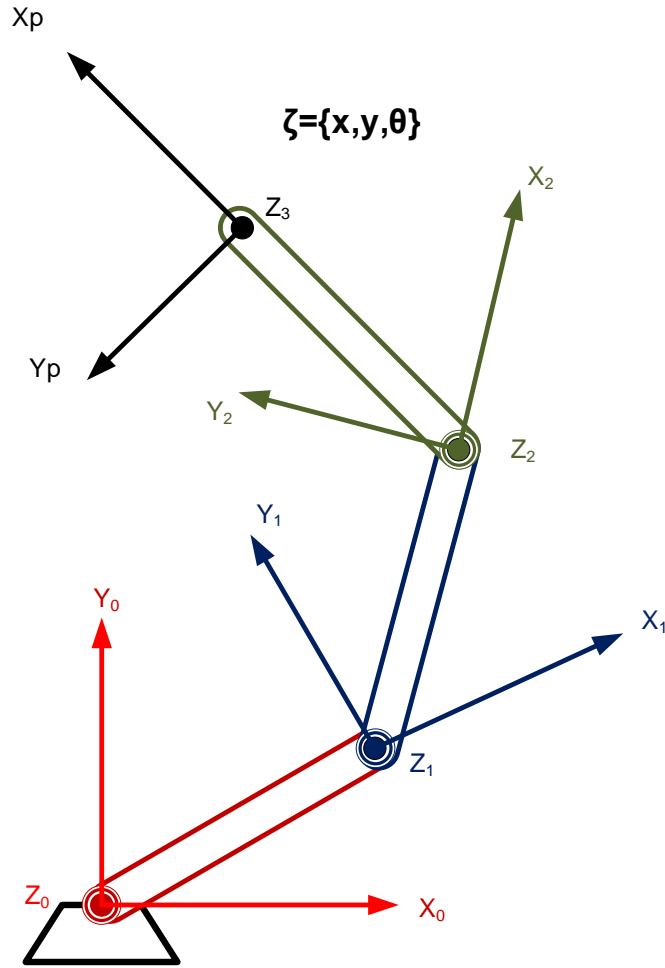


Figura 14. Manipulador RRR.

3.2.1 Postura del manipulador en el plano

Para el análisis de los manipuladores es necesario definir sistemas que permitan describir el desplazamiento a lo largo del plano en el que se mueve el manipulador. Se considera al manipulador serial como redundante y su área de trabajo actúa en el plano, con 3 GDL, de los cuales, dos grados de libertad logran posicionar al efector final a lo largo de los ejes xy y, el tercero es una rotación alrededor del eje Z , esto permite que el manipulador posea la capacidad de manejar una orientación. La Figura 14 muestra la postura del manipulador RRR, que puede ser definida de forma general:

$$\xi = (x \ y \ \theta)^T \quad (56)$$

Donde x, y es la posición del efector final respecto al sistema inercial y $\theta = \theta_p$ es la orientación del efector final referido al sistema absoluto. A partir de esto se obtiene el vector de postura en velocidades que se expresa mediante las ecuaciones 58 y 59

$$\dot{\xi} = R_p^0(\theta)\dot{\xi}_p \quad (57)$$

$$\dot{\xi}_p = {}^0 R_p^T(\theta)\dot{\xi} \quad (58)$$

Donde R es la matriz de rotación que generan los sistemas cuando se avanza de articulación o sistema, esta es una matriz de rotación respecto al eje z , por ser un mecanismo plano la rotación ocurre en el eje z de los sistemas de acuerdo con las metodologías empleadas, esto puede cambiar dependiendo cada criterio.

$$R_p^0 = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta) & -\text{Sen}(\theta) & 0 \\ \text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

3.2.2 Modelado cinemático de los manipuladores

El propósito de conocer la cinemática de posición es poder desarrollar un modelo matemático que describa el comportamiento de cada uno de los elementos del manipulador, este modelo describe la geometría del movimiento en un ambiente estático, es decir; para cada valor en las variables articulares se obtiene un valor de salida en el efector final. Para encontrar las ecuaciones que describen la posición se utiliza la metodología de Denavit & Hartenberg encontrada en [4] esta metodología solo toma en cuenta los giros y traslaciones aplicadas en dos ejes, esto permite que de las 6 transformaciones existentes sólo se ocupen 4, reduce el número de transformaciones basándose en sistemas colocados para solo actuar en el eje x y z .

3.2.3 Metodología de Denavit & Hartenberg

Para el manipulador RRR, la metodología se utilizó según Barrientos[4] y se acortó el desarrolló para obtener la cinemática directa en solo seis pasos, aunque la metodología señale más, la reducción del procedimiento se realizó para simplificar.

1. Se localizan los ejes de acción de las articulaciones y se proyecta una línea punteada que coincida con los ejes de acción, Figura 15.

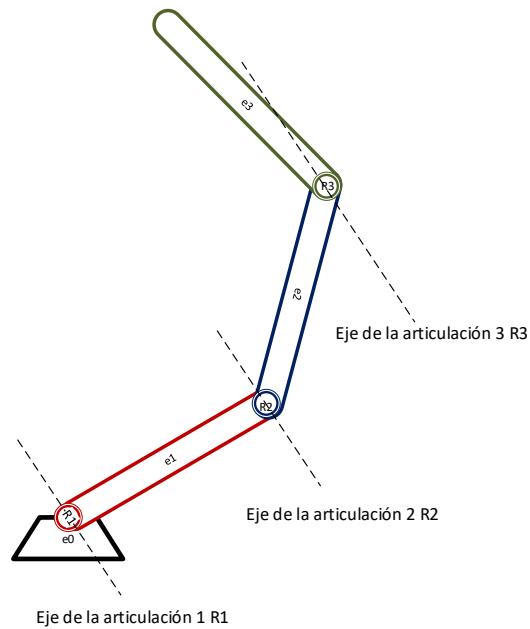


Figura 15. D-H paso 1 manipulador RRR.

2. Enumerar los eslabones móviles comenzando con 1 en el primero y el eslabón de tierra con 0, Figura 16.

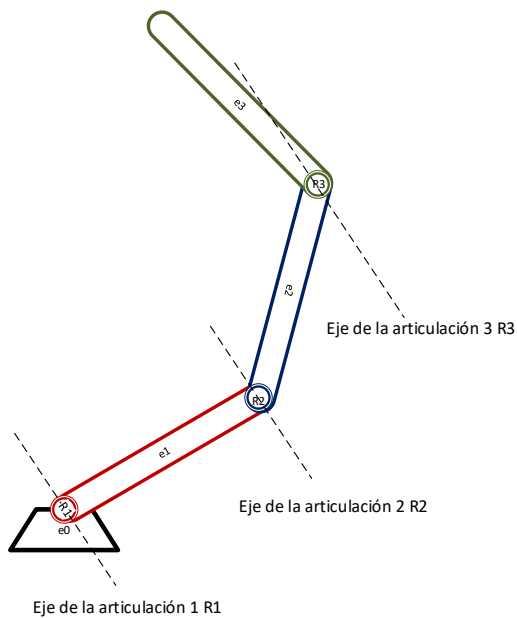


Figura 16. D-H paso 2 manipulador RRR.

- Colocar el eje z comenzando con z_0 en los ejes de acción de las articulaciones Figura 17.

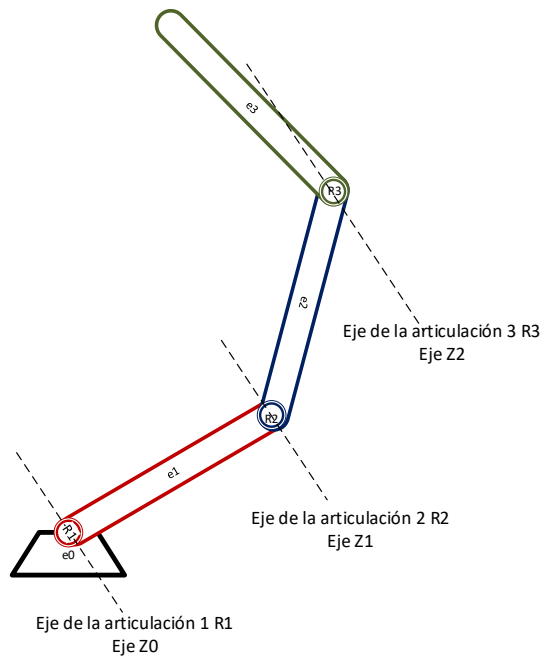


Figura 17. Paso 3 D-H manipulador RRR.

- Colocar el origen de la base o sistema a lo largo del eje Z_0 y para los sistemas se colocarán en los siguientes ejes, pero si los ejes de acción se intersecan el origen se coloca en la intersección (Figura 18).

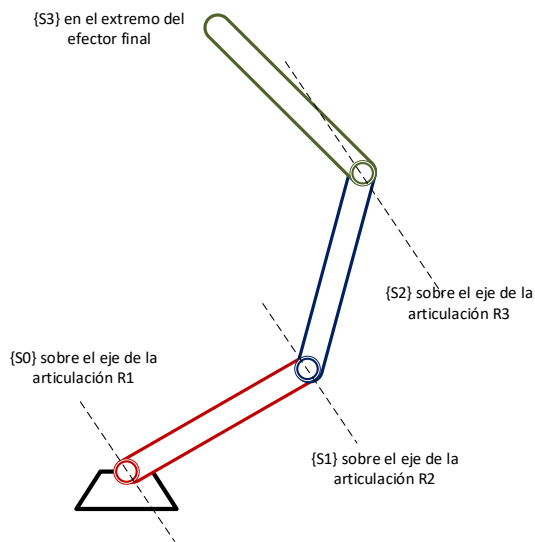


Figura 18. Paso 4 D-H manipulador RRR

- Colocar el eje x a los sistemas de tal manera que forme una línea normal común entre los ejes z o si estos ejes se intersecan el eje x formará una línea normal al plano generado (Figura 19).

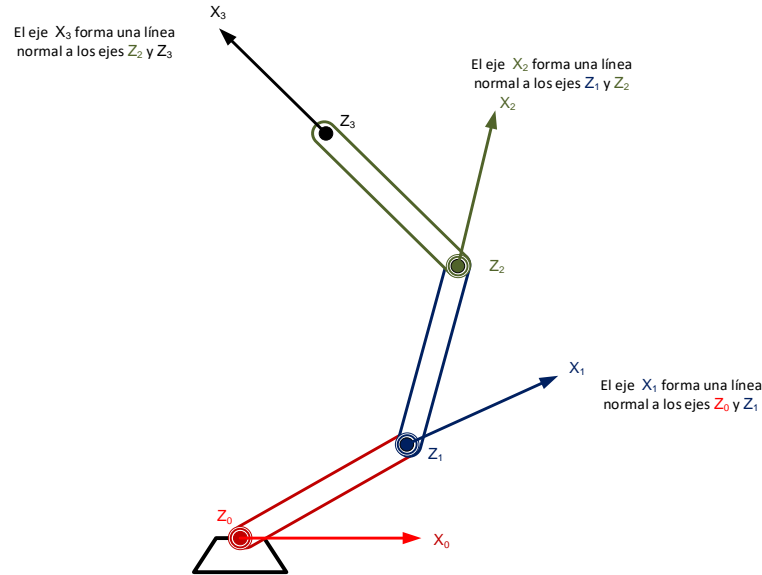


Figura 19. Paso5 D-H manipulador RRR.

- El eje y se coloca de forma que se genere un sistema dextrógiro ver Figura 20.

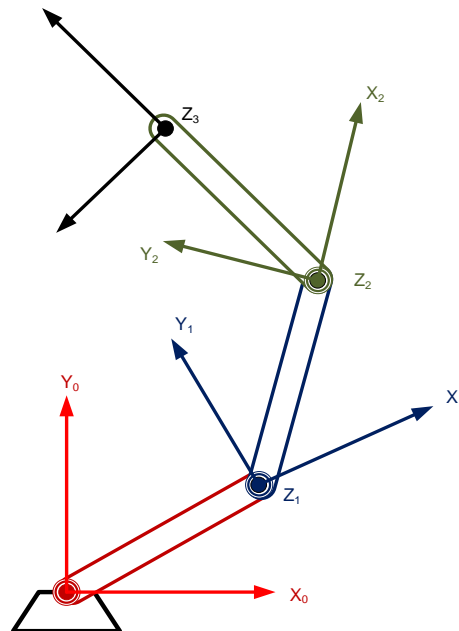


Figura 20. D-H paso 6 manipulador RRR.

De acuerdo con la metodología de Denavit & Hartenberg[4] se enumeran los eslabones incluyendo el eslabón de tierra, enumera el eje de acción de cada articulación y después colocar al eje z en cada uno de esos ejes, el eje x se sitúa en la línea normal que generan el eje z anterior con el eje z siguiente y el eje y se coloca generando un sistema dextrógiro.

Con los sistemas situados se obtienen los parámetros de Denavit & Hartenberg, la Tabla 1 muestra los parámetros.

Tabla 1. Parámetros D-H manipulador RRR por la metodología de A. Barrientos[4]

i	θ	d	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	l_1
2	θ_2	0	0	l_2
3	θ_3	0	0	l_3

Entonces, la matriz de transformación que describe la posición del manipulador es:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & \cos(\theta_1)l_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)l_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & \sin(\theta_1)l_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)l_2 + \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

La matriz de cinemática directa contiene una columna que indica las ecuaciones de posición del efector final respecto al sistema inercial, además de la submatriz de rotación, estos parámetros componen la n, o, a, p .

La metodología de Denavit & Hartenberg tiene variantes donde el análisis de las transformaciones es diferente que la antes mencionada en [1]. Los parámetros de Denavit & Hartenberg así como el posicionamiento de los sistemas es diferente, empezando con 1 en la primera articulación, este cambio en el algoritmo indica que para encontrar los parámetros el sistema de referencia cambia con respecto al sistema siguiente, a diferencia de la metodología que presenta [4]. Este último enfoque del algoritmo de Denavit & Hartenberg es utilizado para enumerar desde el sistema anterior. A continuación se describe en una secuencia de 5 pasos la metodología utilizada en [1], ver Figura 21.

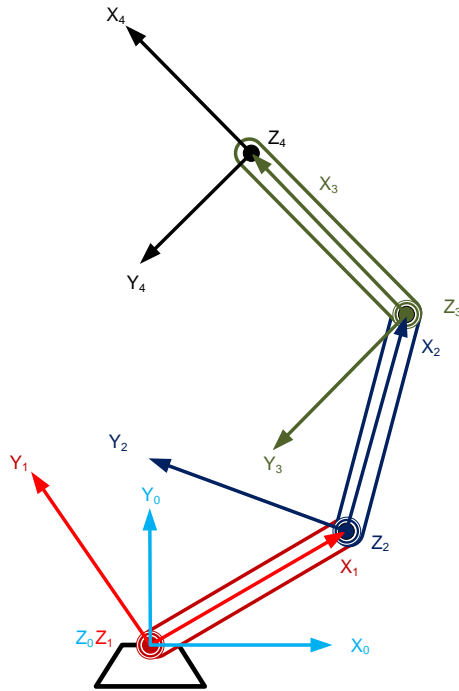


Figura 21. Manipulador RRR con sistemas de referencia según Craig.

1. Se localizan los ejes de acción de las articulaciones y se enumeran los eslabones contando el eslabón de tierra y comenzando con 0, para los ejes de acción comenzar con 1 en la primera articulación (Figura 22).

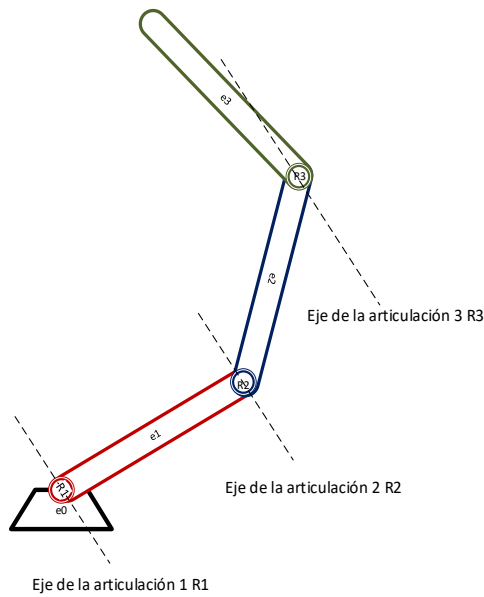


Figura 22. D-H Craig manipulador RRR.

- Se coloca el eje z comenzando con z_1 a lo largo del eje de acción de las articulaciones, Figura 23.

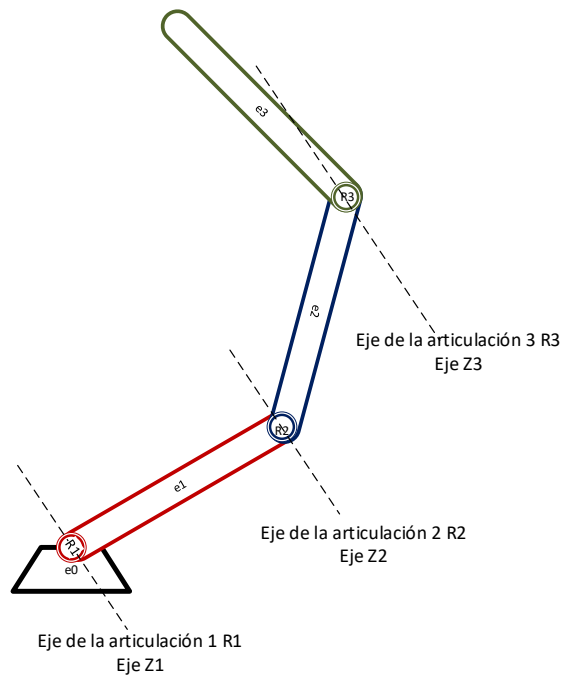


Figura 23. D-H Craig manipulador RRR.

- Colocar el origen de los sistemas en el eje z empezando la numeración con 1, Figura 24.

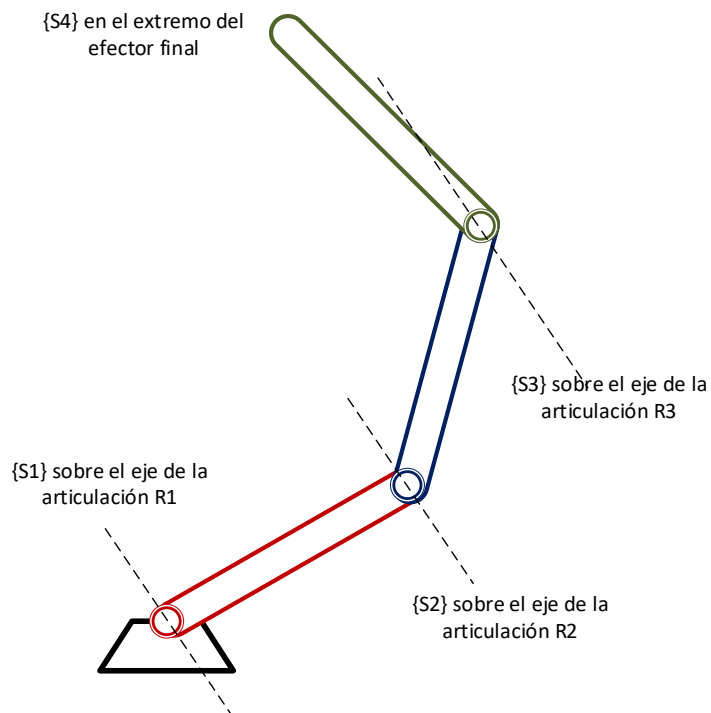


Figura 24. D-H Craig manipulador RRR.

- El eje x se coloca de forma que ese eje forme una línea normal común a los ejes z o en caso de que los ejes z se intersequen el eje x formara una línea normal al plano que genera en la intersección (Figura 25).

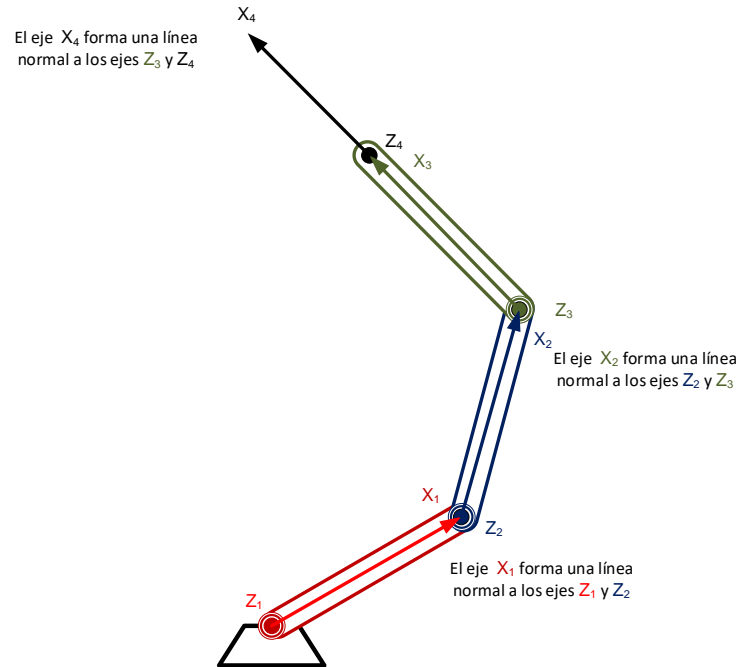


Figura 25. D-H Craig manipulador RRR.

- El sistema se completa con el eje y formando un sistema dextrógiro, el sistema 0 se coloca generando el menor número de parámetros y haciendo que la articulación 1 este en 0, Figura 26.

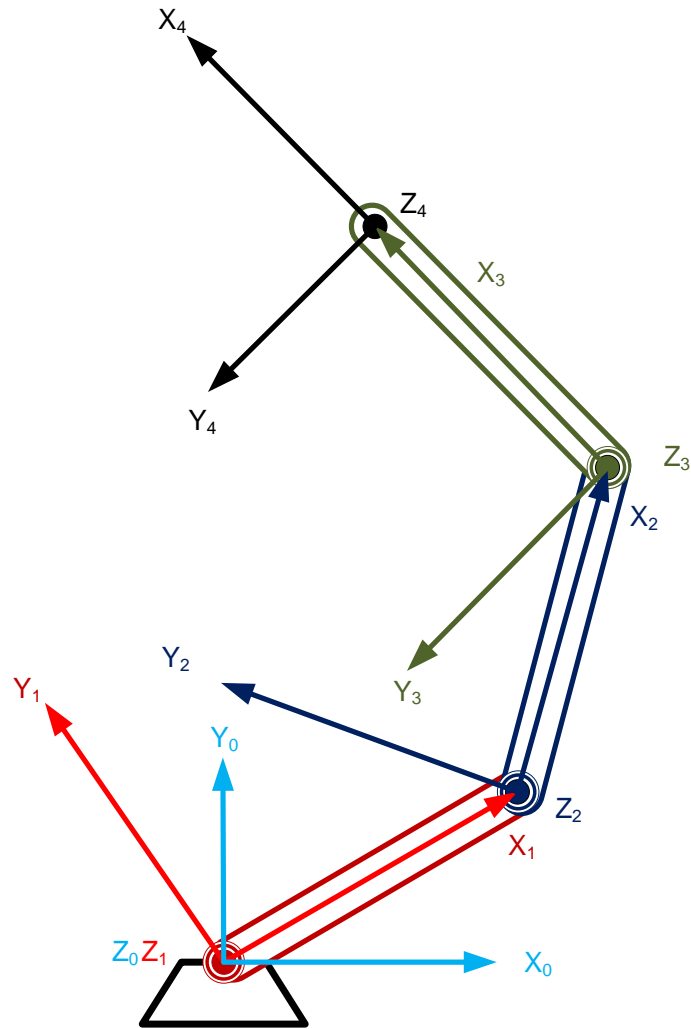


Figura 26. D-H Craig manipulador RRR.

Los sistemas de acuerdo a [1] se muestran en el manipulador, generan la Tabla 2 de parámetros:

Tabla 2. Parámetros D-H de Craig

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d	θ
1	0	0	0	θ_1
2	0	l_1	0	θ_2
3	0	l_2	0	θ_3
4	0	l_3	0	0

Así como la metodología cambia, el orden de las transformaciones dentro de la matriz de Denavit & Hartenberg son en un orden diferente haciendo alusión que en un producto matricial no es conmutativo.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & \cos(\theta_1)\ell_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)\ell_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 \\ \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & \text{Sen}(\theta_1)\ell_1 + \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)\ell_2 + \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

Otra alternativa a esta metodología es el método llamado Matriz de Transformación Homogénea, éste se encarga de obtener una matriz de transformación de un sistema inercial a él efector final del manipulador, mediante matrices de rotación y traslación se encuentra la cinemática de posición. Este método tiene un procedimiento similar a los anteriores, ya que se colocan sistemas locales y un inercial en las articulaciones del manipulador.

3.2.4 Método de matriz de transformación homogénea

Esta metodología se encarga de describir la posición del manipulador colocando bases de referencia en las articulaciones del manipulador y usando los seis parámetros para ubicar un cuerpo en el espacio y su representación en matrices, el eje de actuación en la articulación vuelve a ser tomado como referente para ubicar el eje z de los sistemas locales e inerciales, como segunda referencia este método alinea el eje x con el eslabón para así medir la rotación que tenga el sistema, el eje y es colocado para formar un sistema dextrógiro ver Figura 27.

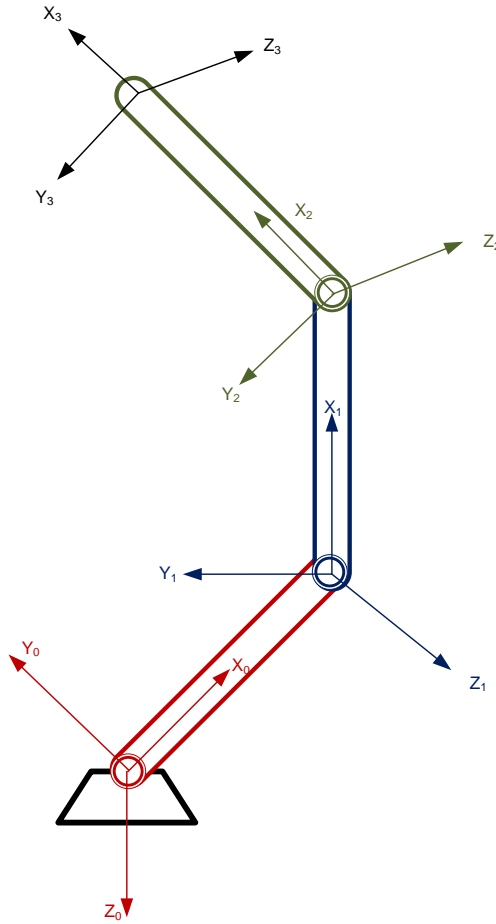


Figura 27. Método de Matrices de Transformación Homogénea.

La secuencia de transformaciones de sistema a sistema se describe de la siguiente manera en las Ecs (63, 64, 65):

$$S_{01} = Q_z(\theta_1) \cdot T_x(l_1) \quad (62)$$

$$S_{12} = Q_z(\theta_2) \cdot T_x(l_2) \quad (63)$$

$$S_{23} = Q_z(\theta_3) \cdot T_x(l_3) \quad (64)$$

Donde Q_z es la matriz de rotación respecto al eje z, estos sistemas giran un ángulo θ , esto quiere decir que la cantidad de giro es variable y representa a la articulación. T_x la matriz que representa una traslación sobre el eje x, esto quiere decir que la distancia entre los sistemas que físicamente están representadas por los eslabones. Realizando

los productos de las matrices que representan a los sistemas obtenemos la matriz de cinemática de posición del manipulador.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & \cos(\theta_1)\ell_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)\ell_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 & \sin(\theta_1)\ell_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)\ell_2 + \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (65)$$

Es importante resaltar que la matriz de posición resulta ser la misma sin importar la metodología que se utilice.

3.2.5 Cinemática diferencial

Cuando se logra modelar la posición del manipulador es posible encontrar la relación entre las velocidades articulares y la velocidad lineal del efector final del manipulador, para esta relación se utiliza la matriz jacobiana. Esta matriz puede ser obtenida de diferentes metodologías, a continuación, se muestran diferentes las metodologías de obtener la matriz jacobiana del manipulador RRR.

3.2.6 Jacobiano geométrico (matriz omega)

La cinemática diferencial está dentro de la matriz jacobiana y será obtenida por el método de la matriz omega. La matriz jacobiana contiene el modelo diferencial de la relación entre la velocidad articular y la velocidad del efector final, para encontrar el vector de velocidades del efector final, el procedimiento comienza derivando la posición que se encuentra en la matriz de cinemática directa del manipulador.

Se utiliza la matriz de posición del manipulador para obtener el modelo diferencial, la columna de posición puede ser fácilmente diferenciada, mientras que la sub matriz de rotación pasa por un procedimiento diferente, la derivada de una matriz ortogonal guarda una relación con una matriz asimétrica, esta propiedad es la que nos permite derivar la matriz de rotación.

Se comienza derivando parcialmente la sub matriz de rotación por cada variable articular, se obtienen 3 matrices de derivadas parciales en este caso, cada una será multiplicado por la matriz transpuesta de la sub matriz de rotación, como proceso final

las tres matrices se multiplican de nuevo obteniendo una matriz asimétrica donde la diagonal principal está conformada por ceros.

La posición del efector final se deriva respecto a cada variable articular para encontrar la velocidad lineal del manipulador.

$$x = \text{Cos}(\theta_1)l_1 + \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2)l_2 + \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \quad (66)$$

$$y = \text{Sen}(\theta_1)l_1 + \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)l_2 + \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \quad (67)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = \text{Sen}(\theta_1)l_1 - \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)l_2 - \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \quad (68)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)l_2 - \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \quad (69)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_3} = \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \quad (70)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \text{Cos}(\theta_1)l_1 + \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2)l_2 + \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \quad (71)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2)l_2 + \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \quad (72)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_3} = \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 \quad (73)$$

El manipulador no tiene una componente de posición en z debido a que es un manipulador plano, esta información también se tiene en cuenta para la construcción de la matriz jacobiana. Para obtener la relación de la velocidad angular con la velocidad articular se considera la sub matriz orientación que se encuentra dentro de la matriz de cinemática directa.

$$\dot{R} = \frac{dR}{d\theta_1} + \frac{dR}{d\theta_2} + \frac{dR}{d\theta_3} \quad (74)$$

$$\frac{dR}{d\theta_1} = \begin{pmatrix} -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta_2} = \begin{pmatrix} -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta_3} = \begin{pmatrix} -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (78)$$

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T = \boldsymbol{\Omega} \quad (79)$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (80)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \quad (81)$$

Cuando se observan los valores que toma la matriz de la ecuación (82) y se compara con la configuración de la matriz y sus componentes, se aprecia que la velocidad angular se encuentra en el eje z.

La matriz jacobiana del manipulador RRR es la siguiente:

$$J = \begin{pmatrix} -\text{Sen}(\theta_1)\ell_1 - \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)\ell_2 - \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)\ell_2 - \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 \\ \text{Cos}(\theta_1)\ell_1 + \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2)\ell_2 + \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 & \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2)\ell_2 + \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 & \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)\ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

3.2.7 Propagación de velocidades

Otro método para obtener la matriz jacobiana es la propagación de velocidades, este método se encarga de encontrar las velocidades angulares y lineales en cada sistema, llevar esa velocidad de sistema en sistema hasta llegar al último sistema, también

puede ser efectuado de una manera inversa, donde la velocidad se puede llevar del efector final a la base inercial del manipulador, por ese motivo el nombre es propagación de velocidades.

Para este procedimiento es necesario un análisis de sistemas en sistema y para eso se utilizan los sistemas colocados en el manipulador para su modelo cinemático. La metodología contiene dos fórmulas para relacionar las velocidades angulares y lineales de sistema en sistema.

$${}^{i+1}{}_{i+1}\omega = {}^{i+1}{}_iR {}^i\omega + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}{}_{i+1}\dot{Z} \quad (84)$$

$${}^{i+1}{}_{i+1}v = {}^{i+1}{}_iR ({}^i v + {}^i\omega \times {}^i P) \quad (85)$$

En el primer sistema se localiza la primera articulación que genera una velocidad angular, la velocidad lineal es cero debido a la colocación del sistema, este análisis se desarrolla del sistema 0 visto desde 1 y para trasladar las velocidades es necesario la matriz de rotación de los sistemas.

$$\omega_1^1 = (0, 0, \dot{\theta}_1) \quad (86)$$

$$v_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (87)$$

El sistema 1 referenciado desde el sistema 2:

$$\omega_2^2 = (0, 0, \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (88)$$

$$v_2^2 = \begin{pmatrix} l1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 \\ l1 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (89)$$

El sistema 2 referenciado en 3

$$\omega_3^3 = (0, 0, \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \quad (90)$$

$$v_3^3 = \begin{pmatrix} (l2\text{Sin}(\theta_3) + l1\text{Sin}(\theta_2 + \theta_3))\dot{\theta}_1 + l2\text{Sin}(\theta_3)\dot{\theta}_2 \\ (l2\text{Cos}(\theta_3) + l1\text{Cos}(\theta_2 + \theta_3))\dot{\theta}_1 + l2\text{Cos}(\theta_3)\dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (91)$$

El sistema 3 referenciado en 4

$$\omega_3^3 = (0, 0, \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \quad (92)$$

$$v_4^4 = \begin{pmatrix} (l2\text{Sen}(\theta_3) + l1\text{Sen}(\theta_2 + \theta_3))\dot{\theta}_1 + l2\text{Sen}(\theta_3)\dot{\theta}_2 \\ (l3 + l2\text{Cos}(\theta_3) + l1\text{Cos}(\theta_2 + \theta_3))\dot{\theta}_1 + (l3 + l2\text{Cos}(\theta_3))\dot{\theta}_2 + l3\dot{\theta}_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (93)$$

Para la construcción del jacobiano se ocupan las dos velocidades lineales encontradas, ya que el movimiento lineal se encuentra en el plano xy mientras que la velocidad angular solo se encuentra en el eje z.

$$J = \begin{pmatrix} -(\ell1\text{Sen}(\theta_1) + \ell2\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) + \ell3\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) - (\ell2\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) + \ell3\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) - \ell3\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ (\ell1\text{Cos}(\theta_1) + \ell2\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + \ell3\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) + (\ell2\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + \ell3\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)) + \ell3\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 1 + 1 + 1 \end{pmatrix} \quad (94)$$

3.2.8 Implementación de la matriz del sistema MIMO

El sistema del manipulador consta de múltiples entradas y múltiples salidas, la matriz del sistema en variables de estado se realiza mediante la selección de variables dentro del sistema, el sistema consta de 3 entradas en los dos casos particulares y con 3 salidas, por tal motivo es necesario definir un vector de entradas para poder resolver el sistema.

Las tres variables que se seleccionan para el vector de entradas son las velocidades en las variables articulares de los manipuladores, con el jacobiano obtenido de los manipuladores, dónde se encuentra la relación de velocidades del extremo del robot con las de las articulaciones se construyen tres ecuaciones que respectivamente cada una representa la velocidad en x, y y la velocidad angular que se encuentra en el Z, estas tres ecuaciones conforman un sistema de ecuaciones el cual se resolvió para hallar a las variables articulare que fue escogido como vector de entradas para la matriz del sistema MIMO.

El sistema de ecuaciones es ordenado de manera matricial de tal forma que se obtiene una matriz de tres columnas por seis filas la cual contiene la información para el mapeo de las velocidades. La implementación de este sistema se basó en las ecuaciones obtenidas por el análisis cinemático diferencial de los manipuladores. La matriz del sistema MIMO del manipulador RRR es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2) \text{Csc}(\theta_2)}{\ell_1} & \frac{\text{Csc}(\theta_2) \sin(\theta_1 + \theta_2)}{\ell_1} & \frac{\text{Csc}(\theta_2) \sin(\theta_3) \ell_3}{\ell_1} \\ \text{Csc}(\theta_2) \left(-\frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\ell_1} - \frac{\cos(\theta_1)}{\ell_2} \right) & \text{Csc}(\theta_2) \left(-\frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\ell_1} - \frac{\sin(\theta_1)}{\ell_2} \right) & -\frac{\text{Csc}(\theta_2) (\sin(\theta_2 + \theta_3) \ell_1 + \sin(\theta_3) \ell_2) \ell_3}{\ell_1 \ell_2} \\ \frac{\cos(\theta_1) \text{Csc}(\theta_2)}{\ell_2} & \frac{\text{Csc}(\theta_2) \sin(\theta_1)}{\ell_2} & 1 + \frac{\text{Csc}(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \ell_3}{\ell_2} \end{pmatrix} \quad (95)$$

Donde ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 es el largo de los eslabones respectivamente al orden en el que están situados en el manipulador y $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ es el valor de las variables articulares.

En la matriz de variables de estados encontramos la matriz unidad debido a que en esta parte de la matriz se colocan las transformación de la sub matriz de la orientación para referenciar el efector final al sistema inercial, debido a que la cinemática fue obtenida refiriendo al efector final del sistema inercial no es necesario hacer otro procedimiento más, la cinemática esta referenciada al sistema inercial y no hay necesidad de trasladar las velocidades del efector final al sistema inercial.

3.3 Manipulador *RPR*

Las metodologías que se emplearon para obtener el modelado cinemático de posición y diferencial del manipulador *RPR* son las mismas al del manipulador *RRR*.

3.3.1 El Manipulador *RPR*

1. El manipular posee un movimiento $\{x, y, \theta\}$, donde θ es una rotación del efector final sobre el eje z.
2. Se encuentra compuesto por dos articulaciones rotacionales y una articulación prismática.

3. Cada articulación del manipulador posee un actuador que permite el movimiento rotacional articulationes y un desplazamiento en la articulación prismática.

3.3.2 Postura del manipulador

Para el análisis de los manipuladores es necesario definir sistemas que permitan describir el desplazamiento a lo largo del plano en el que se mueve el manipulador (Figura 28).

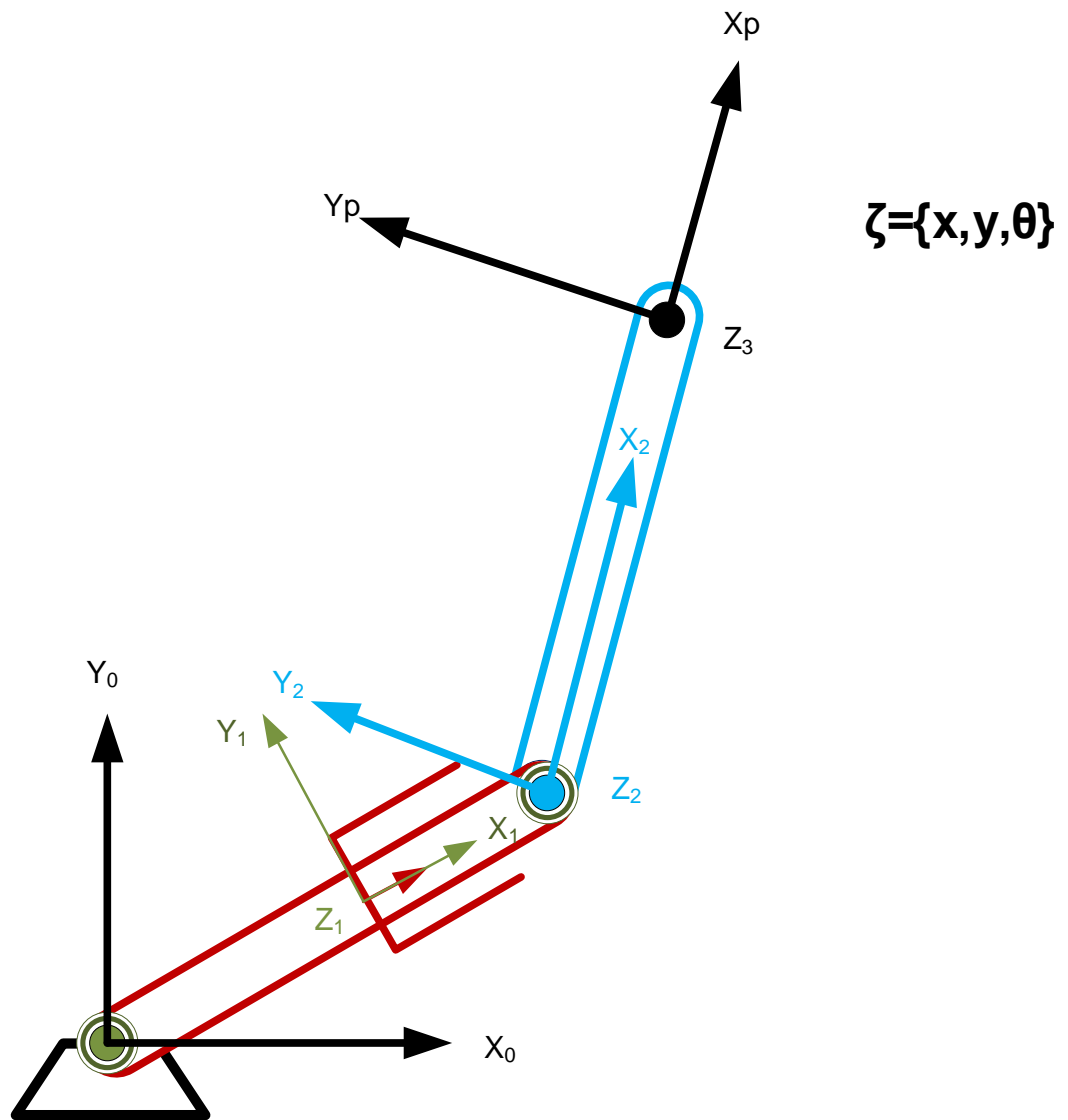


Figura 28. Manipulador RPR.

3.3.3 Modelado Cinemático del manipulador

El modelo matemático de posición es realizado mediante diferentes metodologías, el objetivo es comparar los resultados obtenidos y su convergencia, algunos métodos pueden ser más simples en comparación con otros, dependiendo de la habilidad para situar los sistemas de referencia

3.3.4 Metodología de Denavit & Hartenberg (Barrientos)

La primera herramienta a utilizar es Denavit & Hartenberg encontrada en [4] para su implementación es necesario integrar los sistemas de lo cuales se describen las transformaciones necesarias para el movimiento del manipulador.

Siguiendo los pasos se encuentra que a diferencia del manipulador RRR este manipulador consta de articulación prismática. La asignación de los sistemas se muestra en la Figura 29.

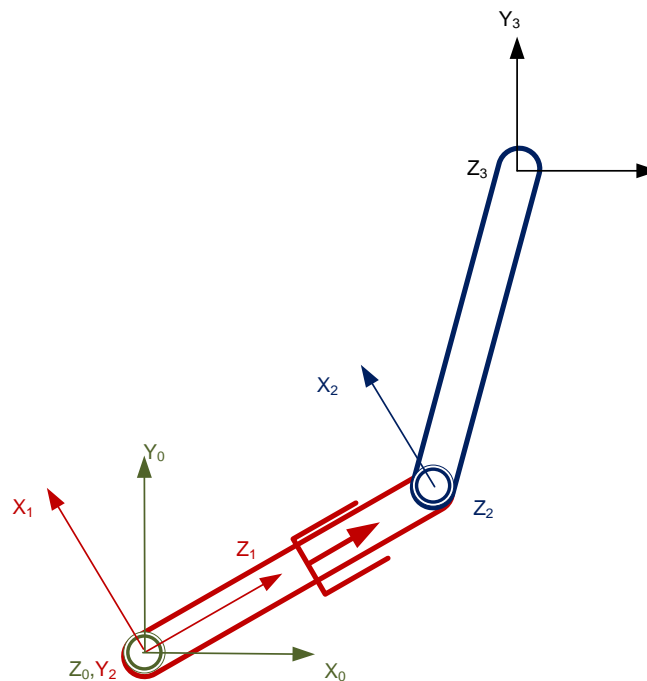


Figura 29. Manipulador RPR.

Para colocar los sistemas dentro de la arquitectura del manipulador se contemplan los siguientes pasos:

1. Se localizan los ejes de acción de las articulaciones y se proyecta una línea punteada.
2. Se enumeran los eslabones móviles comenzando con 1 en el primero y el eslabón de tierra con 0, Figura 30.

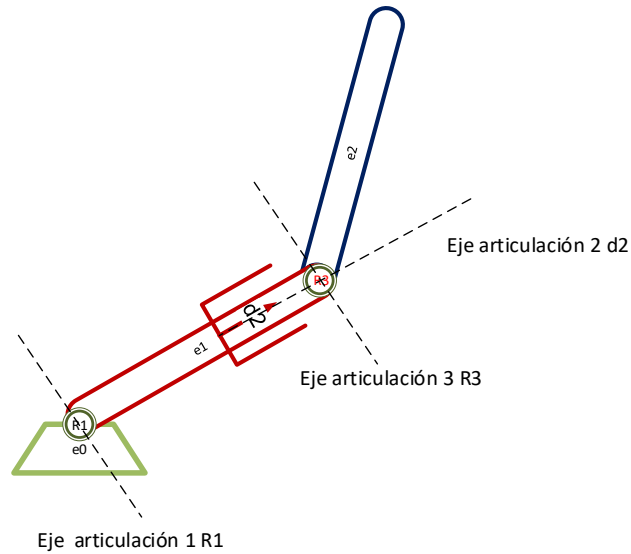


Figura 30. Paso 2 D-H manipulador RPR.

3. Colocar y numerar el eje z comenzando con 0 en el eje de acción de la articulación, Figura 31.

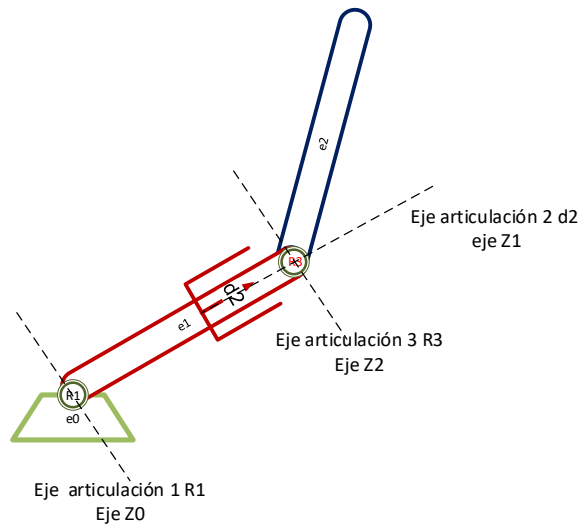


Figura 31. Paso 3 D-H manipulador RPR.

- Colocar el origen de la base o sistema a lo largo del eje Z_0 y para los sistemas siguientes se colocarán en los siguientes ejes, pero si los ejes de acción se intersecan el origen se coloca en la intersección ver Figura 32.

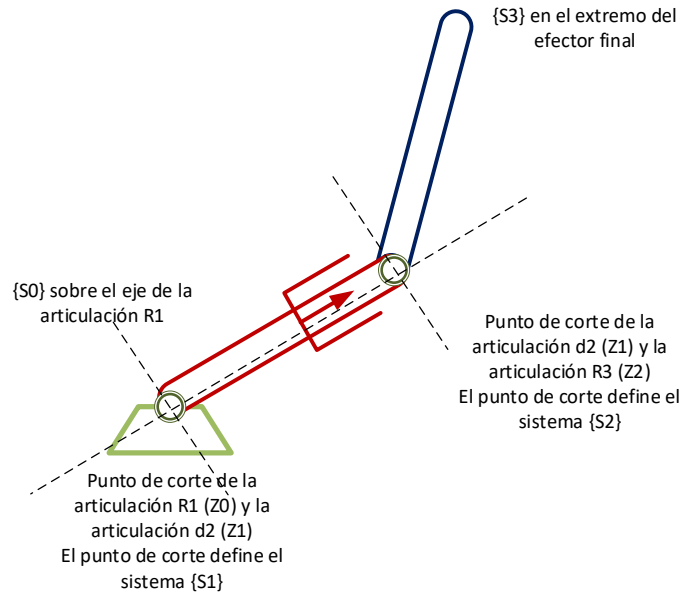


Figura 32. Paso 4 D-H manipulador RPR.

- El eje x se coloca de tal forma que sea una línea normal común a los ejes z o en caso de que los sistemas se intersequen, formara una línea normal al plano que generen los ejes z , ver Figura 33.

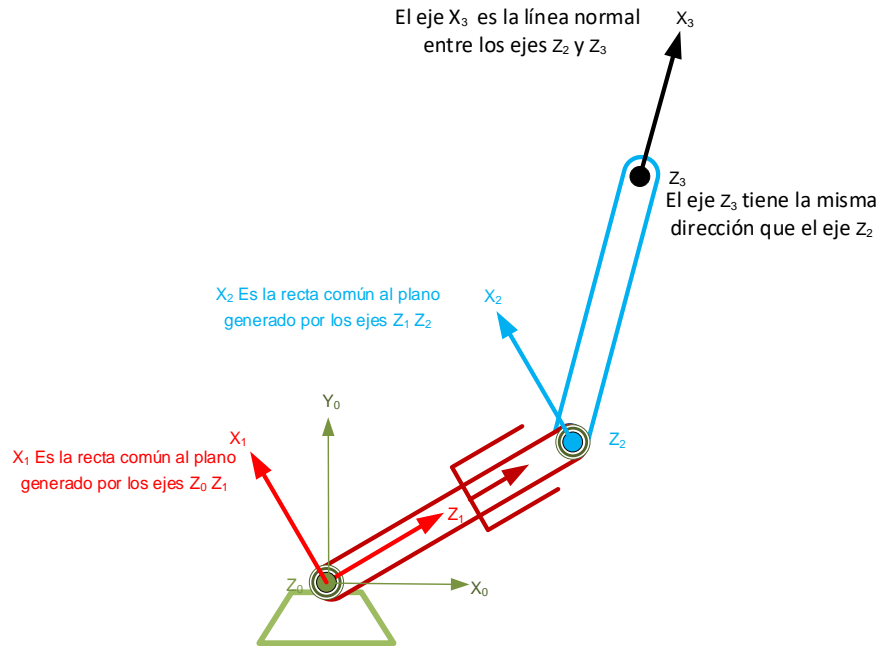


Figura 33. Paso 5 D-H manipulador RPR.

6. El eje y se coloca de forma que se genere un sistema dextrógiro, Figura 34.

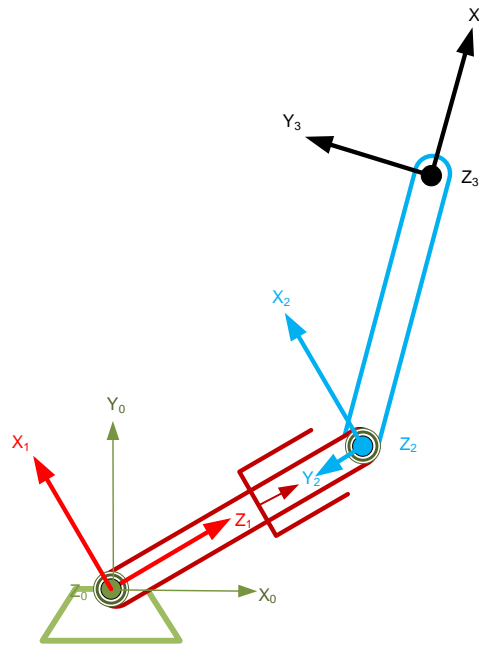


Figura 34. Paso 6 D-H manipulador RPR.

Con los sistemas colocados se obtienen los parámetros de Denavit & Hartenberg que se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3 Parámetros de D-H manipulador RPR

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d	θ
1	90°	0	0	θ_1+90°
2	-90°	0	d_1	0
3	0	l_2	0	θ_2

Con los parámetros se completan las matrices del logaritmo y se procede a obtener la matriz de cinemática directa del manipulador.

$$T = \begin{pmatrix} -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & -\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & d_1\text{Cos}(\theta_1) - l_2\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_2\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + d_1\text{Sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (96)$$

Es la matriz que contiene la posición del efector final en función de las variables articulares. La otra vertiente de esta metodología [1] se desarrolla a continuación en una serie de pasos resumidos esta, tiene como objetivo un posicionamiento del manipulador generado por el final e inicio de los eslabones y como transmiten el movimiento, la matriz de cinemática directa coincide con las obtenidas con otras metodologías, ver Figura 35.

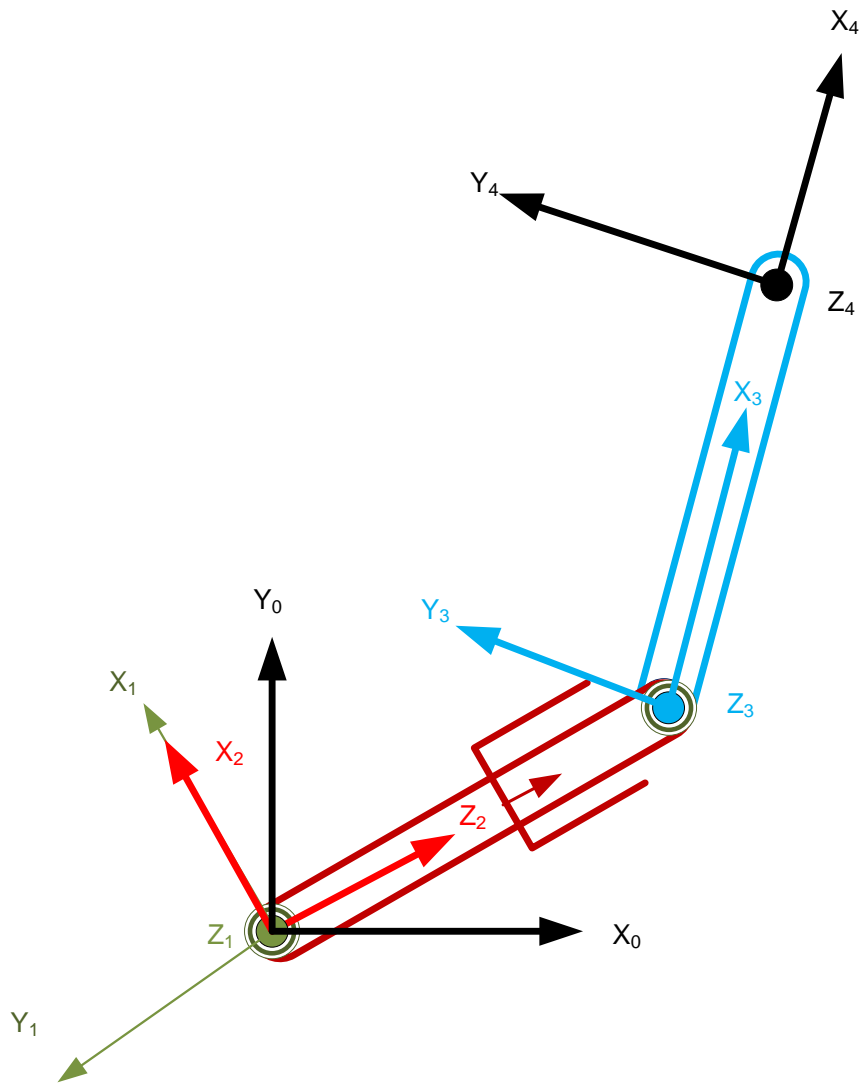


Figura 35. Manipulador RPR.

1. Se localizan los ejes de acción de las articulaciones y se enumeran los eslabones contando el eslabón de tierra y comenzando con 0, para los ejes de acción comenzar con 1 en la primera articulación, Figura 36.

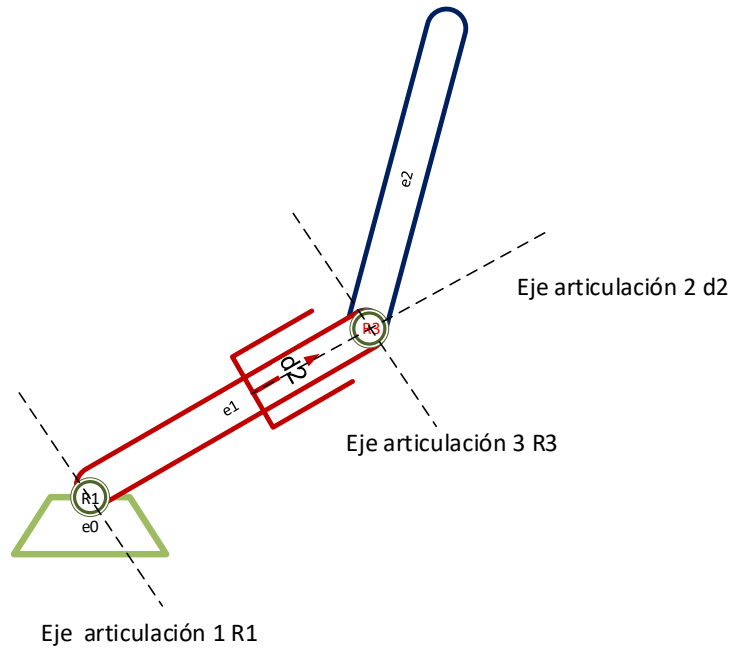


Figura 36. Paso 1 D-H Craig Manipulador RPR.

2. Se coloca el eje z a lo largo del eje de acción de las articulaciones, Figura 37.

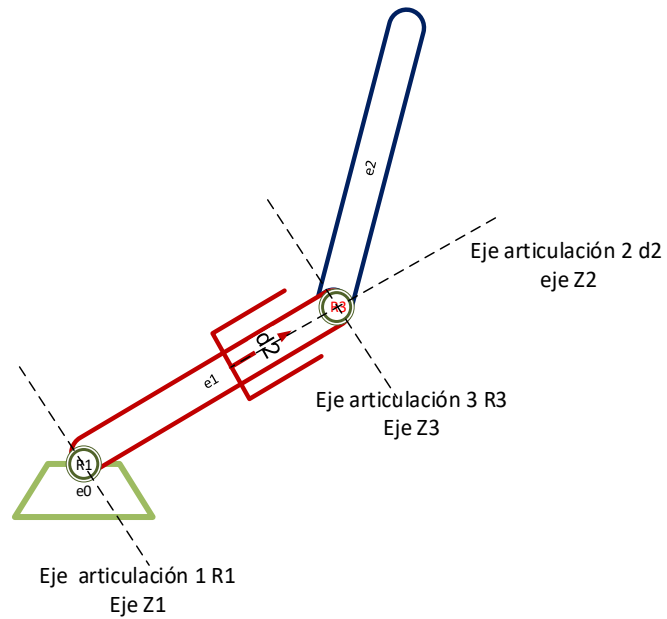


Figura 37. Paso 2 D-H Craig Manipulador RPR.

- Se coloca el origen de los sistemas sobre el eje z empezando la numeración con 1, Figura 38.

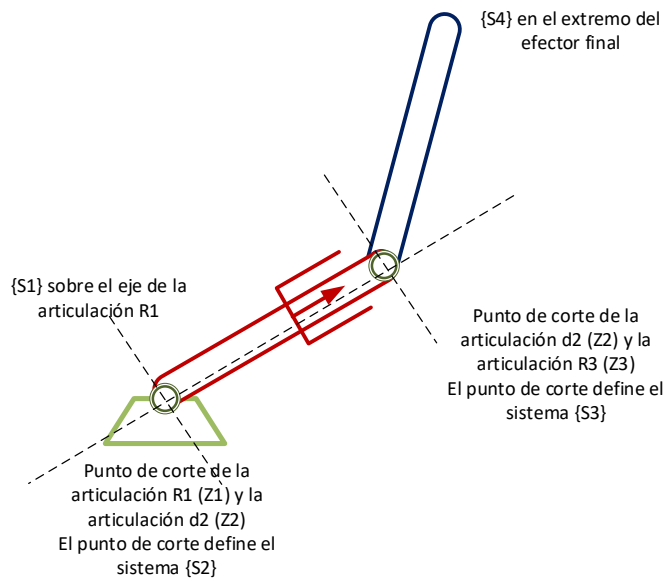


Figura 38. Paso 3 D-H Craig Manipulador RPR.

- El eje x se coloca de forma que ese eje forme una línea normal común a los ejes z o en caso de que los ejes z se intersequen el eje x formara una línea normal al plano que genera en la intersección, Figura 39.

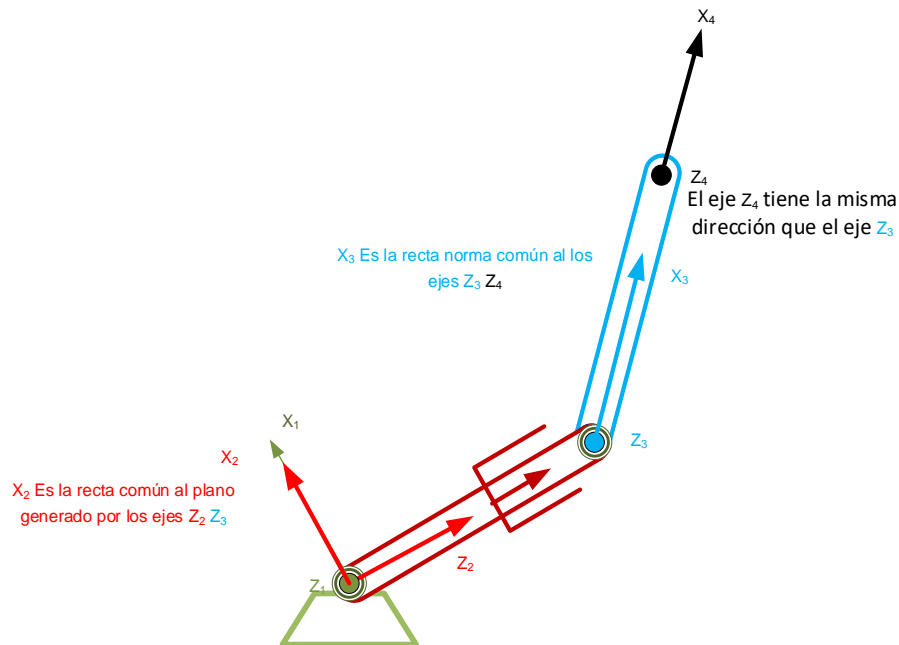


Figura 39. Paso 4 D-H Craig Manipulador RPR.

5. El sistema se completa con el eje y formando un sistema dextrógiro, el sistema 0 se coloca generando el menor número de parámetros y haciendo que la articulación 1 este en un estado donde el valor sea nulo, Figura 40.

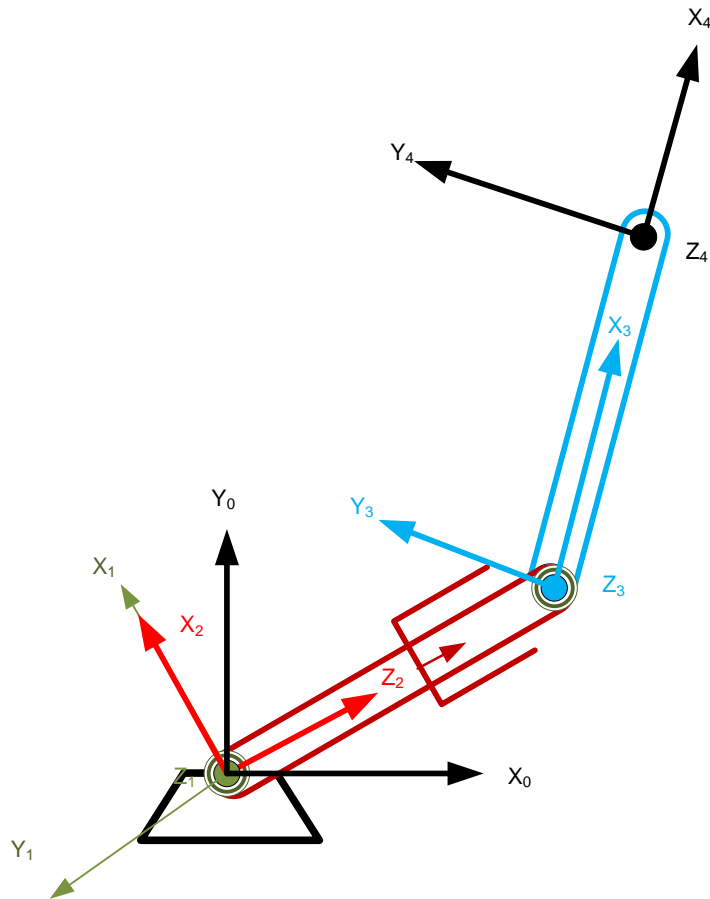


Figura 40. Paso 5 D-H Craig Manipulador RPR.

Con los sistemas de referencia ubicados, obtenemos los parámetros de Denavit & Hartenberg en la Tabla 4.

Tabla 4 Parámetros D-H Craig manipulador RPR

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d	θ
1	0	0	0	$\theta_1 + 90^\circ$
2	90°	0	d_1	0
3	-90°	0	0	θ_2
4	0	l_2	0	0

A partir de la información de la Tabla 4, se completan las matrices de transformación del algoritmo y se obtiene la matriz de posición del manipulador.

$$T = \begin{pmatrix} -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & -\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & d_1\text{Cos}(\theta_1) - l_2\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_2\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + d_1\text{Sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (97)$$

3.3.5 Matrices de transformación homogéneas

Como ultimo método para modelar la cinemática de posición del manipulador se encuentran las matrices de transformación homogéneas, con este método se hace una descripción más sencilla de las transformaciones que sufren los sistemas colocados de acuerdo con la metodología en el manipulador hasta llegar al efector final, Figura 41.

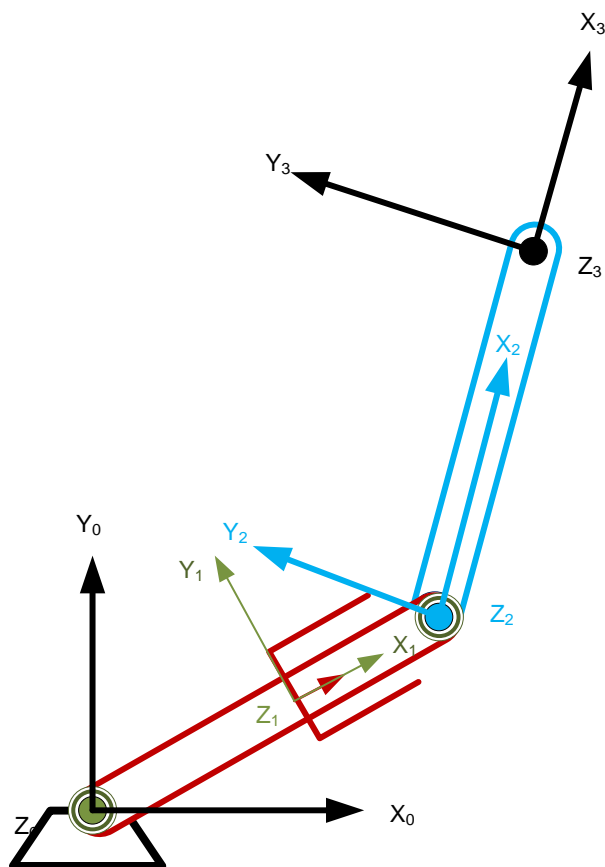


Figura 41. Manipulador RPR.

La secuencia de transformaciones del manipulador son las siguientes:

$$T_0^1 = Qz(\theta_1) \cdot Tx(d_1) \quad (98)$$

$$T_1^2 = Qz(\theta_2) \cdot Tx(l_2) \quad (99)$$

$$T_2^3 = Qz(\theta_3) \quad (100)$$

Realizando las operaciones pertinentes obtenemos la cinemática de posición del manipulador que coincide con los dos métodos anteriores, esto da fiabilidad a los resultados, la matriz de cinemática directa se muestra a continuación.

$$T_0^3 = \begin{pmatrix} -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & -\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & d_1 \text{Cos}(\theta_1) - l_2 \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) & -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_2 \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + d_1 \text{Sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (101)$$

3.3.6 Cinemática diferencial

El objetivo de este análisis es generar la matriz de estados del manipulador, para esto es necesario primero obtener la descripción diferencial del manipulador. Para esto se realiza el análisis desde el sistema inercial al efector final de las velocidades.

3.3.7 Jacobiano geométrico

La cinemática diferencial está dentro de la matriz jacobiana y será obtenida por el método de la matriz omega. La matriz jacobiana contiene el modelo diferencial de la relación entre la velocidad articular y la velocidad del efector final, para encontrar el vector de velocidades del efector final, el procedimiento comienza derivando la posición que se encuentra en la matriz de cinemática directa del manipulador.

$$x = d_1 \text{Cos}(\theta_1) - l_2 \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \quad (102)$$

$$y = l_2 \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + d_1 \text{Sen}(\theta_1) \quad (103)$$

La posición del efector final se deriva respecto a cada variable articular para encontrar la velocidad lineal del manipulador.

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_1} = -\text{Sen}(\theta_1)d_1 - \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)l_2 \quad (104)$$

$$\frac{\partial x}{\partial d_1} = \text{Cos}(\theta_1) \quad (105)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta_2} = -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2)l_2 \quad (106)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1} = \text{Cos}(\theta_1)d_1 + \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2)l_2 \quad (107)$$

$$\frac{\partial y}{\partial d_1} = \text{Sen}(\theta_1) \quad (108)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \text{Cos}(\theta_1 + \theta_2)l_2 \quad (109)$$

El manipulador no tiene una componente de posición en z debido a que es un manipulador plano, esta información también se tiene en cuenta para la construcción de la matriz jacobiana. Para obtener la relación de la velocidad angular con la velocidad articular se considera la sub matriz orientación que se encuentra dentro de la matriz de cinemática directa.

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}}{d\theta_1} + \frac{d\mathbf{R}}{d\theta_2} \quad (110)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta_1} = \begin{pmatrix} -\text{Cos}(\theta_1)\text{Cos}(\theta_2) + \text{Sen}(\theta_1)\text{Sen}(\theta_2) & \text{Cos}(\theta_2)\text{Sen}(\theta_1) + \text{Cos}(\theta_1)\text{Sen}(\theta_2) & 0 \\ -\text{Cos}(\theta_2)\text{Sen}(\theta_1) - \text{Cos}(\theta_1)\text{Sen}(\theta_2) & -\text{Cos}(\theta_1)\text{Cos}(\theta_2) + \text{Sin}(\theta_1)\text{Sen}(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (111)$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\theta_2} = \begin{pmatrix} -\text{Cos}(\theta_1)\text{Cos}(\theta_2) + \text{Sen}(\theta_1)\text{Sen}(\theta_2) & \text{Cos}(\theta_2)\text{Sen}(\theta_1) + \text{Cos}(\theta_1)\text{Sen}(\theta_2) & 0 \\ -\text{Cos}(\theta_2)\text{Sen}(\theta_1) - \text{Cos}(\theta_1)\text{Sen}(\theta_2) & -\text{Cos}(\theta_1)\text{Cos}(\theta_2) + \text{Sin}(\theta_1)\text{Sen}(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} -\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) & \text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ -\text{Sen}(\theta_1 + \theta_2) & -\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (113)$$

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{\Omega} \quad (114)$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ -\cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (115)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (116)$$

Con la información obtenida se construye la matriz jacobiana del manipulador RPR y se muestra a continuación:

$$J = \begin{pmatrix} -\ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - d_1 \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & -\ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ d_1 \cos(\theta_1) - \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1) & -\ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (117)$$

3.4 Propagación de velocidades

Un método alternativo para obtener la cinemática diferencial del manipulador es la propagación de velocidades que se desarrolla encontrando las velocidades angulares de acuerdo a las variables articulares en los sistemas propuestos por la metodología de Denavit & Hartenberg utilizada en [1]. Este método se centra en encontrar las velocidades angulares y lineales de los vínculos del manipulador en relación a sus cuerpos adyacentes. La velocidad se expresa en términos del vínculo en la que esta se desarrolla.

En el primer sistema se localiza la primera articulación que genera una velocidad angular, la velocidad lineal es cero debido a la colocación del sistema, este análisis se desarrolla del sistema 0 visto desde 1 y para trasladar las velocidades es necesario la matriz de rotación de los sistemas.

$$\omega_1^1 = (0, 0, \dot{\theta}_1) \quad (118)$$

$$v_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (119)$$

El sistema 1 referenciado desde el sistema 2:

$$\omega_2^2 = (0, \dot{\theta}_1, 0) \quad (120)$$

$$v_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (121)$$

El sistema 2 referenciado en 3

$$\omega_3^3 = (0, 0, \dot{\theta}_1) \quad (122)$$

$$v_3^3 = \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (123)$$

El sistema 3 referenciado en 4

$$\omega_4^4 = (0, 0, \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (124)$$

$$v_4^4 = \begin{pmatrix} -\dot{d}_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) \dot{d}_1 - \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (125)$$

3.5 Implementación de la matriz en sistema MIMO

El sistema del manipulador consta de múltiples entradas y múltiples salidas, la matriz del sistema en variables de estado se realiza mediante la selección de variables dentro del sistema, el sistema consta de 3 entradas en los dos casos particulares y con 3 salidas, por tal motivo es necesario definir un vector de entradas para poder resolver el sistema.

Las tres variables que se seleccionan para el vector de entradas son las velocidades en las variables articulares de los manipuladores, con el jacobiano obtenido de los manipuladores, dónde se encuentra la relación de velocidades del extremo del robot

con las de las articulaciones se construyen tres ecuaciones que respectivamente cada una representa la velocidad en x, y y la velocidad angular que se encuentra en el Z, estas tres ecuaciones conforman un sistema de ecuaciones el cual se resolvió para hallar a las variables articulare que fue escogido como vector de entradas para la matriz del sistema MIMO.

El sistema de ecuaciones es ordenado de manera matricial de tal forma que se obtiene una matriz de tres columnas por seis filas la cual contiene la información para el mapeo de las velocidades. La implementación de este sistema se basó en las ecuaciones obtenidas por el análisis cinemático diferencial de los manipuladores.

En la matriz de variables de estados encontramos la matriz unidad debido a que en esta parte de la matriz se colocan las transformación de la sub matriz de la orientación para referenciar el efector final al sistema inercial, debido a que la cinemática fue obtenida refiriendo al efector final del sistema inercial no es necesario hacer otro procedimiento más, la cinemática esta referenciada al sistema inercial y no hay necesidad de trasladar las velocidades del efector final al sistema inercial. Donde ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 es el largo de los eslabones respectivamente al orden en el que están situados en el manipulador y $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ es el valor de las variables articulares. Para el manipulador de configuración RPR la matriz del sistema MIMO es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\text{Sin}(\theta_1)}{d1} & \frac{\text{Cos}(\theta_1)}{d1} & \frac{\ell 2 \text{Sin}(\theta_2)}{d1} \\ \text{Cos}(\theta_1) & \text{Sin}(\theta_1) & \ell 2 \text{Cos}(\theta_2) \\ \frac{\text{Sin}(\theta_1)}{d1} & -\frac{\text{Cos}(\theta_1)}{d1} & 1 - \frac{\ell 2 \text{Sin}(\theta_2)}{d1} \end{pmatrix} \quad (126)$$

Capítulo 4

4. Resultados

En este capítulo se muestra el proceso de simulación mediante el modelo diferencial obtenido en el capítulo anterior, el proceso de variables de estado vaciado en Simulink para su aplicación en la simulación, se muestran distintas simulaciones para la validación de los resultados.

4.1 Simulación

En este trabajo se obtiene el modelo cinemático diferencial de dos manipuladores seriales planos de configuraciones RRR y RPR, para llegar al modelo diferencial de los manipuladores se hizo uso de dos metodologías con el fin de comparar la información obtenida de cada una, cuando los resultados convergen en un solo modelo diferencial para cada manipulador, cuando los métodos arrojan el mismo resultado se podría asegurar que los modelos son correctos, pero sin la verificación de estos resultados no es posible asegurar que eso sea verdadero, la simulación de estos modelos mediante software validan los resultados y muestran la convergencia del efector final con una trayectoria fijada.

El modelo del sistema MIMO es generado a partir de las ecuaciones obtenidas por el modelo cinemático diferencial, donde se encuentra la velocidad lineal del efector final en función de las variables articulares así como la velocidad angular de este, estas ecuaciones se igualan a cero y se resuelven para encontrar el valor de las variables articulares, por último los valores obtenidos son extraídos y diferenciados por cada una de las velocidades en el efector final, esto quiere decir que ahora con nueve valores obtenidos se conforma un arreglo matricial.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{\theta} \\ \dot{q}_{n,1} \\ \dot{q}_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_{t1,1} & \dots & S_{t1,3} \\ S_{t3,1} & \dots & S_{t3,3} \end{pmatrix} \cdot (\eta)$$

(127)

La Ec. (127) es una forma general de la matriz de variables de estado, esta matriz puede variar, es decir puede ser diferente aunque el manipulador sea el mismo, esto se debe a la configuración de la cinemática diferencial que se obtiene, la cinemática externa muestra la configuración de movimiento referida al sistema inercial por lo tanto la cinemática diferencial está referida a partir del sistema inercial, cuando se utiliza la cinemática interna el resultado varía ya que la cinemática diferencial está referida desde el sistema ubicada en el efector final, para esto se utiliza la matriz de rotación que va del sistema inercial al sistema final, lleva la velocidad desde el extremo al sistema inercial.

En esta tesis se utilizó la cinemática externa para desarrollar el modelo matemático, por lo cual no se necesitó la matriz rotación del sistema inercial al efector final, y en su lugar solo se colocó la matriz identidad.

La simulación del modelo diferencial no sería posible sin la aplicación de este a un modelo de MIMO que permite conocer la respuesta de los sistemas dinámicos conociendo las entradas de éste. La simulación se llevó a cabo utilizando diferentes parámetros de entrada en el manipulador generando así diferentes patrones de movimiento o trayectorias a seguir, se utilizaron velocidades senoidales, constantes y variaciones dentro de estas, las pruebas en proporcionaron que el comportamiento del extremo del robot coincidía con la trayectoria generada, esto valida los modelos diferenciales.

Una vez obtenidas las matrices del sistema MIMO de los manipuladores, se realizan simulaciones buscando comprobar los cálculos hechos, y si los resultados son coherentes, y que cada manipulador responde de la manera esperada. Las simulaciones también sirven para tener una forma de comparación de los resultados de manera ideal y los resultados de la implementación.

La simulación se llevó a cabo en simulink con un diagrama de bloques que representa a cada elemento del manipulador y despliega en una forma gráfica el comportamiento del manipulador y la trayectoria generada por las velocidades que se propongan como entrada, el diagrama de bloques se muestra en la Figura 42.

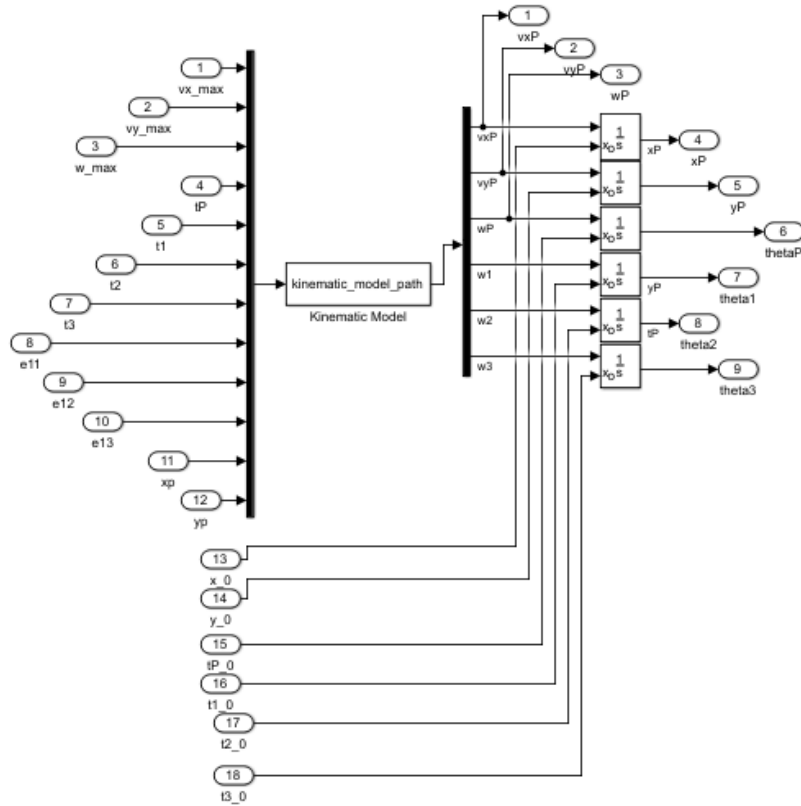


Figura 42. Kinematic_Model_Path, diagrama de bloques

El bloque de kinematic_model_path, es el bloque de programación donde se especifica la matriz del sistema MIMO, resolviendo las salidas mediante integración numérica.

4.2 Manipulador RRR

La matriz del sistema MIMO del manipulador RRR es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)\text{Csc}(\theta_2)}{\ell_1} & \frac{\text{Csc}(\theta_2)\text{Sin}(\theta_1 + \theta_2)}{\ell_1} & \frac{\text{Csc}(\theta_2)\text{Sin}(\theta_3)\ell_3}{\ell_1} \\ \text{Csc}(\theta_2)\left(-\frac{\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\ell_1} - \frac{\cos(\theta_1)}{\ell_2}\right) & \text{Csc}(\theta_2)\left(-\frac{\text{Sin}(\theta_1 + \theta_2)}{\ell_1} - \frac{\text{Sin}(\theta_1)}{\ell_2}\right) & -\frac{\text{Csc}(\theta_2)(\text{Sin}(\theta_2 + \theta_3)\ell_1 + \text{Sin}(\theta_3)\ell_2)\ell_3}{\ell_1\ell_2} \\ \frac{\cos(\theta_1)\text{Csc}(\theta_2)}{\ell_2} & \frac{\text{Csc}(\theta_2)\text{Sin}(\theta_1)}{\ell_2} & 1 + \frac{\text{Csc}(\theta_2)\text{Sin}(\theta_2 + \theta_3)\ell_3}{\ell_2} \end{pmatrix} \quad (128)$$

Donde ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 representan la longitud de los eslabones respectivamente y θ_1, θ_2 y θ_3 a las variables articulares.

La trayectoria seleccionada para este manipulador es una lemniscata creada con funciones senoidales, esto quiere decir que se selecciona un módulo de velocidad lineal en las dos componentes que responda a una función senoidal y una velocidad angular nula.

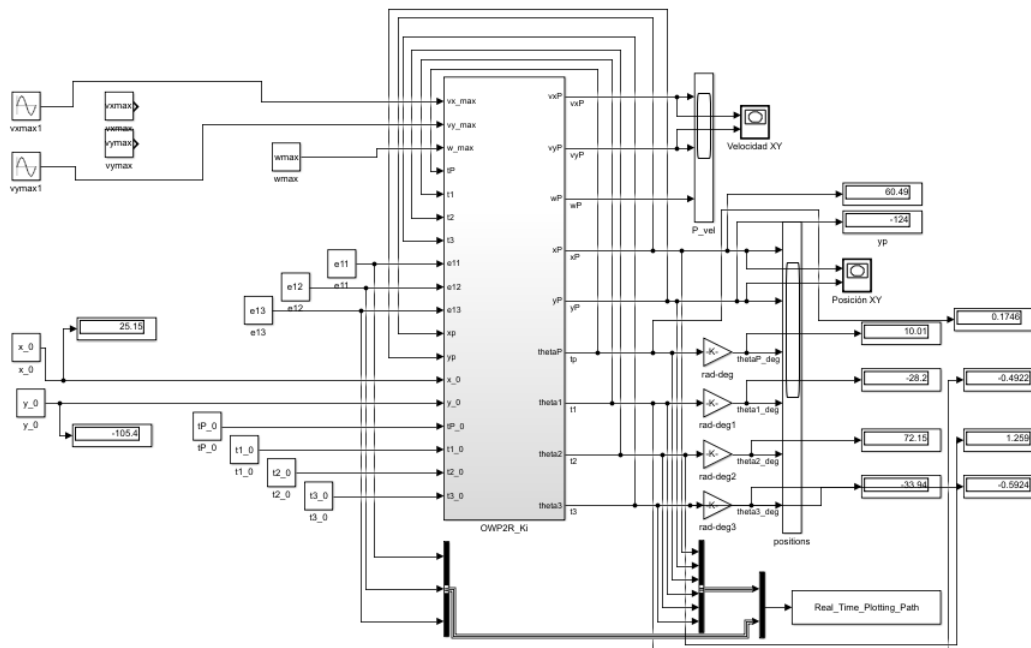


Figura 43. Diagrama de bloques de la simulación

La longitud de los eslabones del manipulador no necesitan una medida exacta para alguna tarea ya que solo se necesita validar el modelo a continuación, la Tabla 5 muestra las medidas de los eslabones.

Tabla 5. Parámetros de los eslabones del manipulador RRR

Eslabón	Longitud (cm)
<u>1</u>	125
<u>2</u>	100
<u>3</u>	44

En la simulación se muestra el manipulador y su trayectoria, los eslabones son presentados en diferentes colores, la trayectoria esta simbolizada por puntos negros donde el efector final coincide y se valida el modelo cinemático diferencial en la Figura 44.

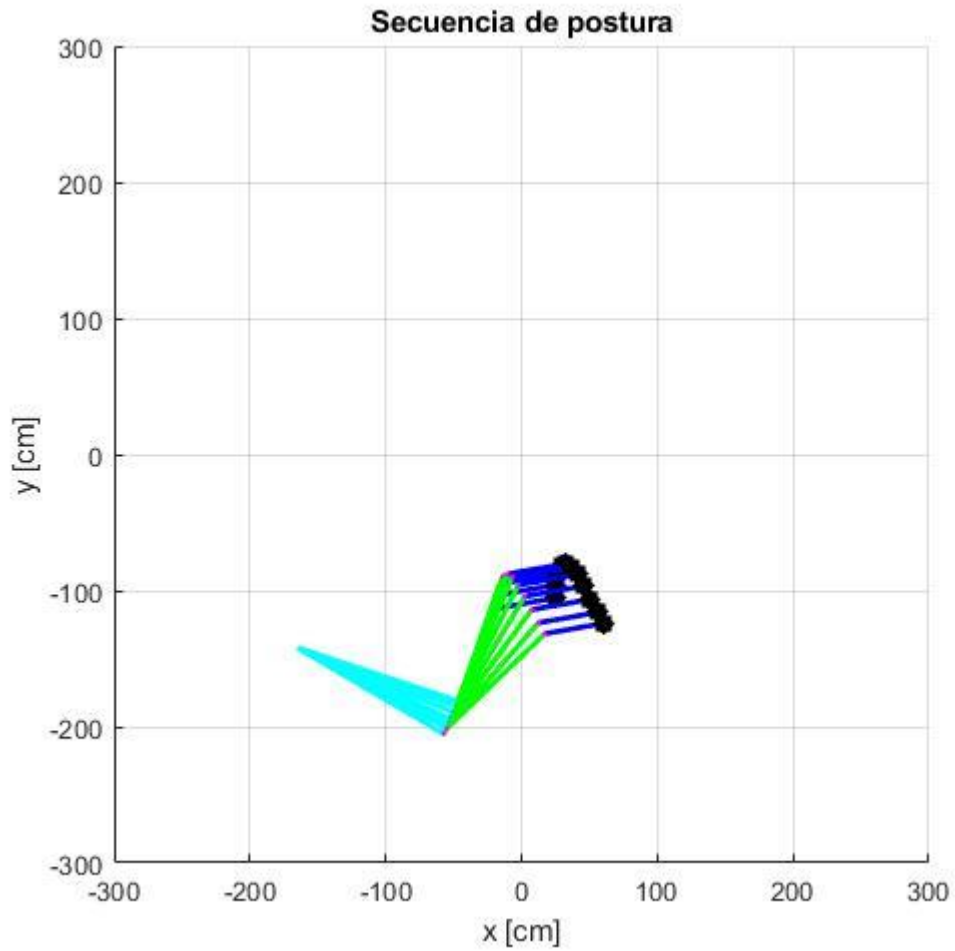


Figura 44. Simulación de la trayectoria del manipulador RRR

En la segunda simulación el parámetro a cambiar es la velocidad, la entrada se compone de velocidades lineales representadas por los bloques V_{xmax} y V_{ymax} con una velocidad angular nula, la segunda prueba se realiza para dar más confiabilidad en los resultados, los parámetros de los eslabones son los mismos que los de la primera prueba que se muestra en la Figura 45.

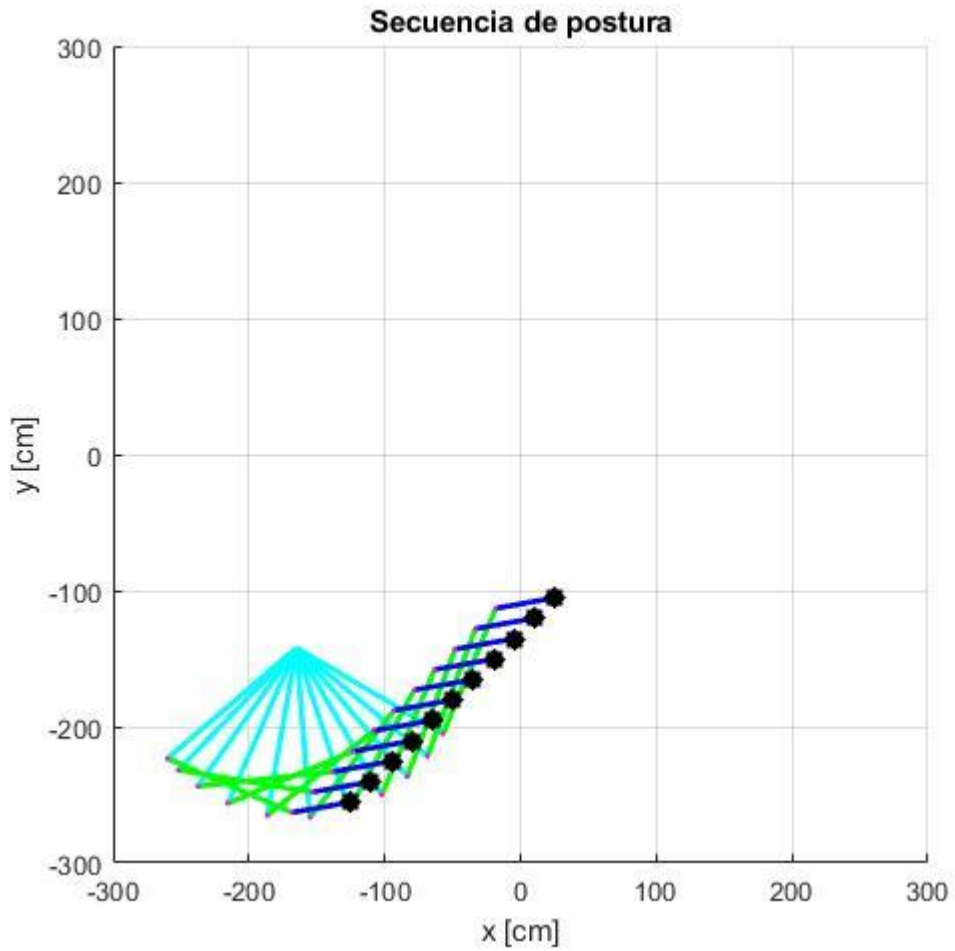


Figura 45. Simulación de la trayectoria del manipulador RRR

La segunda prueba confirma que el modelo cinemático diferencial es válido, así como el modelo del sistema MIMO.

4.3 Manipulador RPR

La matriz del sistema MIMO del manipulador RPR es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sin(\theta_1)}{d_1} & \frac{\cos(\theta_1)}{d_1} & \frac{\ell_2 \sin(\theta_2)}{d_1} \\ \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & \ell_2 \cos(\theta_2) \\ \frac{\sin(\theta_1)}{d_1} & -\frac{\cos(\theta_1)}{d_1} & 1 - \frac{\ell_2 \sin(\theta_2)}{d_1} \end{pmatrix} \quad (129)$$

Donde ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 representan la longitud de los eslabones respectivamente y θ_1, d_1 y θ_3 a las variables articulares.

La trayectoria seleccionada para este manipulador es una lemniscata creada con funciones senoidales, esto quiere decir que se selecciona un módulo de velocidad lineal en las dos componentes que responda a una función senoidal y una velocidad angular nula.

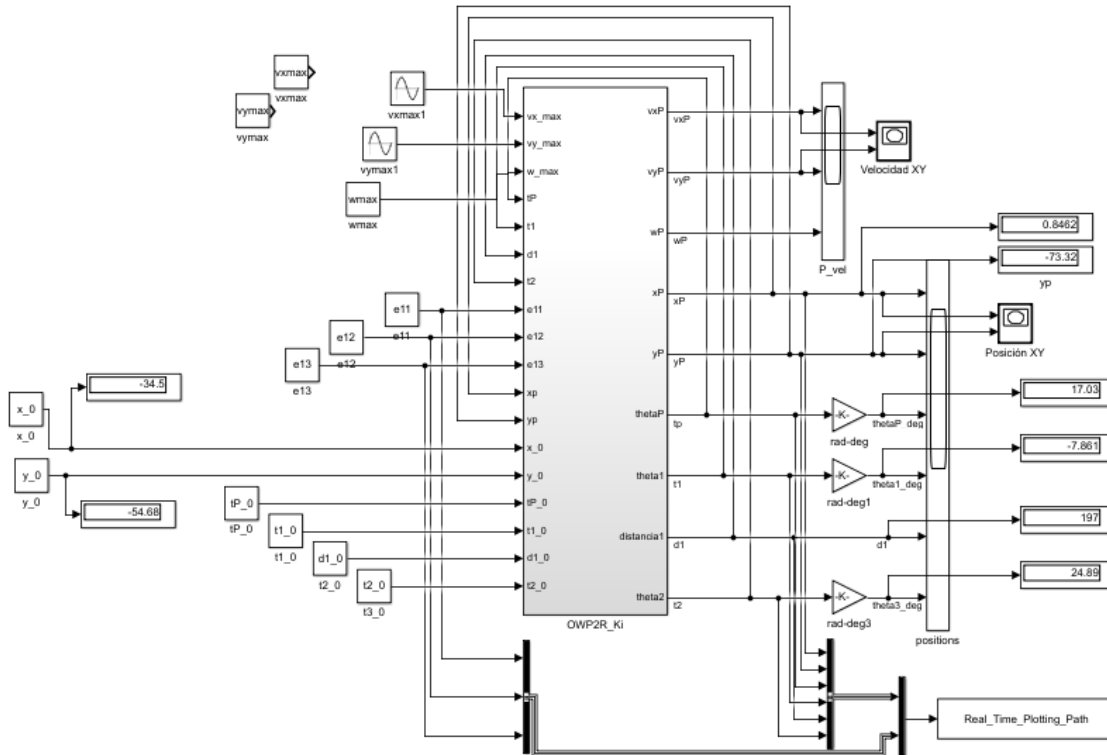


Figura 46. Diagrama de bloques de la simulación

La longitud de los eslabones del manipulador no necesitan una medida exacta para alguna tarea ya que solo se necesita validar el modelo a continuación, se muestra la Tabla 6 con sus medidas.

Tabla 6. Parámetros de eslabón manipulador RPR

Eslabón	Longitud (cm)
<u>1</u>	125
<u>2</u>	100
<u>3</u>	44

La simulación muestra el manipulador y su trayectoria, los eslabones son presentados en diferentes colores para no confundirse, la trayectoria esta simbolizada por puntos negros donde el efector final coincide y validamos el modelo cinemático diferencial en la Figura 47.

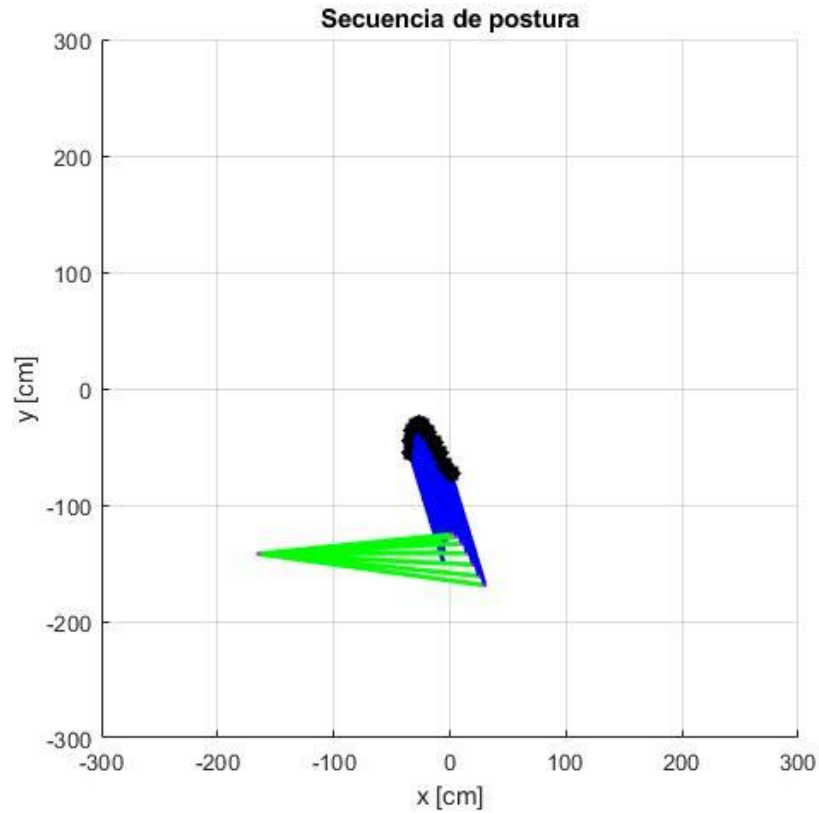


Figura 47. Simulación de la trayectoria del manipulador RPR

El efector final del manipulador coincide con los puntos de la trayectoria, esto quiere decir que el modelo diferencial es válido, así como la matriz del sistema MIMO.

En la segunda prueba los parámetros de entrada son reemplazados para obtener una velocidad constante en la parte lineal pero la velocidad angular es establecida como nula, el manipulador tiene que describir una línea recta como trayectoria, los parámetros de los eslabones son los mismos, ya que esto no afecta en los resultados, ver Figura 48.

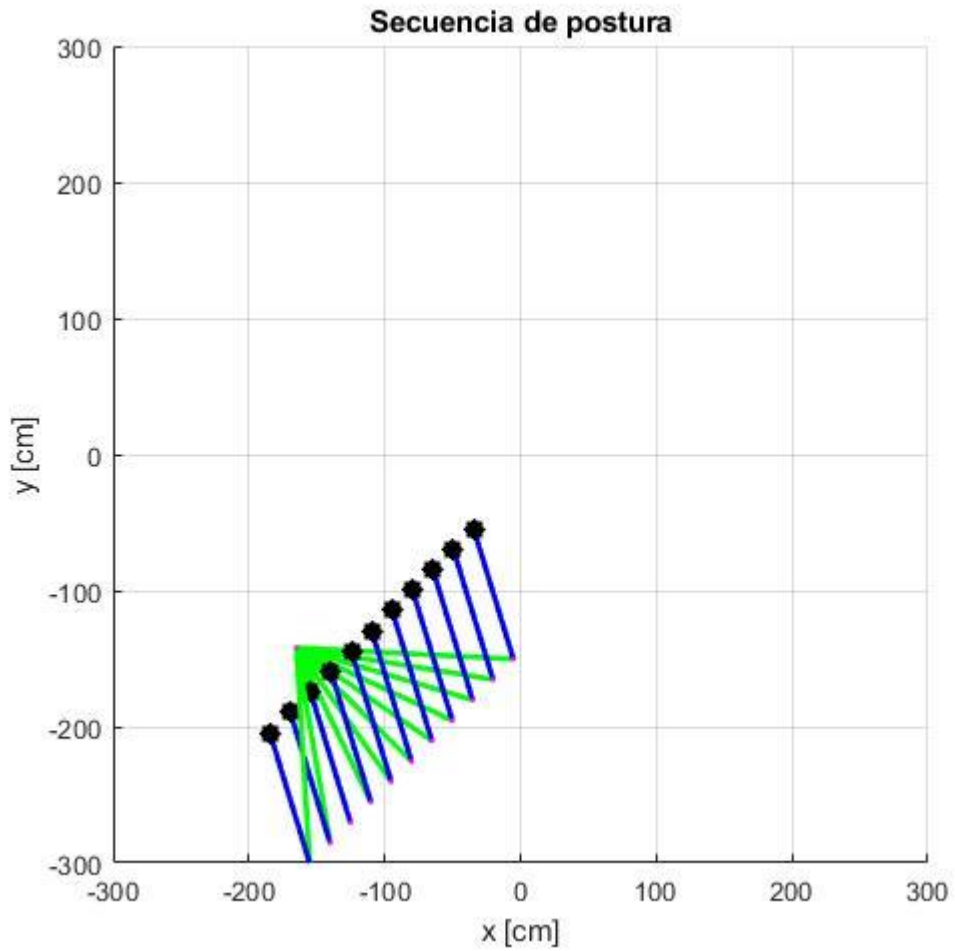


Figura 48. Simulación de la trayectoria del manipulador RPR

Los modelos han sido validados mediante la simulación, son aplicables a cualquier configuración de este tipo de manipuladores.

5. Conclusiones y perspectivas

Conclusiones

Los resultados obtenidos fueron comparados, cuando el modelo diferencial converge sin importar la metodología el modelo diferencial es correcto, comparando los métodos para este, se considera como más útil el método de jacobiano geométrico, proporciona una matriz de velocidades angulares la cual debe ser asimétrica, esto permite visualizar algún error si en la matriz no encontramos neutro aditivo de la velocidad por componente.

En cambio, la propagación de velocidades tiene una desventaja, si ocurre algún error al inicio del desarrollo por la visualización se arrastra con este error ya que este método lleva la velocidad generada de sistema en sistema.

La teoría para la matriz de sistema MIMO depende de la definición de nuestras entradas y salidas, la selección de las variables de entrada son definidas mediante la el jacobiano se llega a la configuración de velocidad en las juntas, el trazado de trayectorias es la aplicación principal de la cinemática diferencial pero la aplicación del sistema MIMO permite la simulación.

En la literatura no se encuentra un modelo que permita el desarrollo de la cinemática diferencial y su simulación, como ventaja en el ambiente estudiantil permite que la teoría sea verificada y aplicada sin la necesidad de la construcción del manipulador, además que permite comprender el fenómeno de la velocidad en el efector final y el comportamiento de las juntas.

Perspectivas

La aplicación de configuraciones simples de cadenas cinemáticas como los manipuladores modelados permite en conjunto con otras herramientas matemáticas como el álgebra de Lie generar las restricciones en los manipuladores para que este obedezca a la cadena virtual, mediante el análisis del patrón de movimiento del manipulador y de la cadena virtual resulta como la aplicación del movimiento de la cadena virtual al manipulador, esto en concreto proporciona un modelo en el que las juntas pasivas y activas de los manipuladores paralelos son contempladas en la matriz del sistema MIMO del manipulador y no se limita a solo las juntas activas, los modelos cinemáticos de los manipuladores paralelos contienen la complejidad de la cinemática directa, cuando se implementa una cadena virtual la velocidad lineal y angular del manipulador es igual al de la cadena virtual haciendo que sea posible validar el modelo cinemático.

Referencias

1. Craig, J.J., *Robótica*. 2006: Pearson Educación de México.
2. Tsai, L.W., *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. 1999: Wiley.
3. Alexandria, H.H. and B. Woodcroft, *Pneumatica: The Pneumatics of Hero of Alexandria*. 2015: CreateSpace Independent Publishing Platform.
4. Cruz, A.B., *Fundamentos de robótica*. 2007: McGraw-Hill.
5. Fu, K.S., R.C. González, and C.S.G. Lee, *Robótica, control, detección, visión e inteligencia*. 1994: McGraw-Hill.
6. Saha, S.K., *Introduction to Robotics*. 2014: McGraw Hill Education (India) Private Limited.
7. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type Synthesis of Three-Degree-of-Freedom Spherical Parallel Manipulators*. The International Journal of Robotics Research, 2004. **23**(3): p. 237-245.
8. Campos, A., R. Guenther, and D. Martins, *Differential kinematics of parallel manipulators using Assur virtual chains*. Vol. 223. 2009. 1697-1711.
9. Martínez Zamudio, P., *Manipulador paralelo plano 3rrr (rrr)v con actuación virtual indirecta*. 2015: p. 135.
10. Boche Lucio, A.S., *Cinematica diferencial de un robot paralelo con una cadena virtual tesis que para obtener el titulo de Licenciatura en Ingenieria Mecatronica, in Facultad de Mecatronica*. 2017, Universidad Nacional Autónoma de México,: Ciudad de México. p. 146.
11. Beer, F.P., E.R. Johnston, and M. de los Ángeles Izquierdo Castañeda, *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*. 2005: McGraw-Hill.
12. Lee, K.S.F.R.G.C.S.G., *Robotics: Control Sensing. Vis.* 1987: McGraw-Hill.
13. Spong, M.W., S. Hutchinson, and M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*. 2005: Wiley.
14. REYES, F., *Robótica - control de robots manipuladores*. 2011: Alfaomega Grupo Editor.
15. Ogata, K., *Ingeniería de control moderna*. 2003: Pearson Educación.
16. Martínez-Zamudio, P., et al., *Cinemática Diferencial de un Manipulador Paralelo Plano 3RRR-(RRR)v con Actuación Virtual Indirecta*. Ingeniería mecánica, tecnología y desarrollo, 2015. **5**: p. 321-331.

Apéndice I. Mathematica

En este Apéndice se muestra parte de la programación en el software Mathematica para desarrollar la cinemática de posición de los manipuladores RRR y RPR, así como la cinemática diferencial.

Manipulador RRR

Cinemática de posición

```
at = Qz[θ1[t1]].Tx[l1];
1
at = Qz[θ2[t2]].Tx[l2];
2
at = Qz[θ3[t3]].Tx[l3];
3
at = at.at;
2 0 1
1 1 2
at = at.at.at;
3 0 1 2
1 1 2 3
at // MatrixForm // Simplify;
1
at // MatrixForm // Simplify;
2
at // MatrixForm // Simplify;
3
```

$$\text{Out[63]=} \begin{pmatrix} \cos[\theta_1[t1]] & -\sin[\theta_1[t1]] & 0 & \cos[\theta_1[t1]] f_1 \\ \sin[\theta_1[t1]] & \cos[\theta_1[t1]] & 0 & \sin[\theta_1[t1]] f_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos[\theta_2[t2]] & -\sin[\theta_2[t2]] & 0 & \cos[\theta_2[t2]] f_2 \\ \sin[\theta_2[t2]] & \cos[\theta_2[t2]] & 0 & \sin[\theta_2[t2]] f_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[66]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos[\theta_1[t1]] & -\sin[\theta_1[t1]] & 0 & \cos[\theta_1[t1]] f_1 \\ \sin[\theta_1[t1]] & \cos[\theta_1[t1]] & 0 & \sin[\theta_1[t1]] f_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos[\theta_2[t2]] & -\sin[\theta_2[t2]] & 0 & \cos[\theta_2[t2]] f_2 \\ \sin[\theta_2[t2]] & \cos[\theta_2[t2]] & 0 & \sin[\theta_2[t2]] f_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{\partial}{\partial t} \llbracket 1, 4 \rrbracket // \text{FullSimplify}$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} \llbracket 2, 4 \rrbracket // \text{FullSimplify}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} \llbracket 3, 4 \rrbracket // \text{FullSimplify}$$

$$\cos[\theta_1[t1]] f_1 + \cos[\theta_1[t1] + \theta_2[t2]] f_2 + \cos[\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]] f_3$$

$$\sin[\theta_1[t1]] f_1 + \sin[\theta_1[t1] + \theta_2[t2]] f_2 + \sin[\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]] f_3$$

$$0$$

Out[17]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos[\theta_1[t1] + \theta_2[t2]] & -\sin[\theta_1[t1] + \theta_2[t2]] & 0 & \cos[\theta_1[t1]] f_1 + \cos[\theta_1[t1] + \theta_2[t2]] f_2 \\ \sin[\theta_1[t1] + \theta_2[t2]] & \cos[\theta_1[t1] + \theta_2[t2]] & 0 & \sin[\theta_1[t1]] f_1 + \sin[\theta_1[t1] + \theta_2[t2]] f_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

Cinemática diferencial

```

d11 = D[X,  $\theta_1[t1]$ ]
d12 = D[X,  $\theta_2[t2]$ ]
d13 = D[X,  $\theta_3[t3]$ ]
d21 = D[Y,  $\theta_1[t1]$ ]
d22 = D[Y,  $\theta_2[t2]$ ]
d23 = D[Y,  $\theta_3[t3]$ ]
d31 = D[Z,  $\theta_1[t1]$ ]
d32 = D[Z,  $\theta_2[t2]$ ]
d33 = D[Z,  $\theta_3[t3]$ ]

-Sin[ $\theta_1[t1]$ ] l1 - Sin[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2]$ ] l2 - Sin[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]$ ] l3
-Sin[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2]$ ] l2 - Sin[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]$ ] l3
-Sin[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]$ ] l3

Cos[ $\theta_1[t1]$ ] l1 + Cos[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2]$ ] l2 + Cos[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]$ ] l3
Cos[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2]$ ] l2 + Cos[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]$ ] l3
Cos[ $\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]$ ] l3
0
0
0

```

```
TR1 = M3D  $\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{at} \\ 3 \end{bmatrix}$ ;
```

```
TR1 // MatrixForm;
```

```
DTR1 = D[TR1, t1];
```

```
DTR11 = DTR1 /  $\theta_1'[t1]$ ;
```

```
DTR11 // MatrixForm // FullSimplify
```

$$\begin{pmatrix} -\sin[\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]] & -\cos[\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]] & 0 \\ \cos[\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]] & -\sin[\theta_1[t1] + \theta_2[t2] + \theta_3[t3]] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{TR2} = \text{M3D} \begin{bmatrix} 0 \\ \text{at} \\ 3 \end{bmatrix};$$

`TR2 // MatrixForm;`

$$\text{DTR2} = \text{D}[\text{TR2}, \text{t2}];$$

$$\text{DTR22} = \text{DTR2} / \theta_2'[\text{t2}];$$

`DTR22 // MatrixForm // FullSimplify`

$$\begin{pmatrix} -\text{Sin}[\theta_1[\text{t1}] + \theta_2[\text{t2}] + \theta_3[\text{t3}]] & -\text{Cos}[\theta_1[\text{t1}] + \theta_2[\text{t2}] + \theta_3[\text{t3}]] & 0 \\ \text{Cos}[\theta_1[\text{t1}] + \theta_2[\text{t2}] + \theta_3[\text{t3}]] & -\text{Sin}[\theta_1[\text{t1}] + \theta_2[\text{t2}] + \theta_3[\text{t3}]] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{TR3} = \text{M3D} \begin{bmatrix} 0 \\ \text{at} \\ 3 \end{bmatrix};$$

`TR3 // MatrixForm;`

$$\text{DTR3} = \text{D}[\text{TR3}, \text{t3}];$$

$$\text{DTR33} = \text{DTR3} / \theta_3'[\text{t3}];$$

`DTR33 // MatrixForm // FullSimplify`

$$\begin{pmatrix} -\text{Sin}[\theta_1[\text{t1}] + \theta_2[\text{t2}] + \theta_3[\text{t3}]] & -\text{Cos}[\theta_1[\text{t1}] + \theta_2[\text{t2}] + \theta_3[\text{t3}]] & 0 \\ \text{Cos}[\theta_1[\text{t1}] + \theta_2[\text{t2}] + \theta_3[\text{t3}]] & -\text{Sin}[\theta_1[\text{t1}] + \theta_2[\text{t2}] + \theta_3[\text{t3}]] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{TR} = \text{M3D} \begin{bmatrix} 0 \\ \text{at} \\ 3 \end{bmatrix};$$

`TRT = Transpose[TR];`

`TRT // MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[\theta_3[\text{t3}]] (\text{Cos}[\theta_1[\text{t1}]] \text{Cos}[\theta_2[\text{t2}]] - \text{Sin}[\theta_1[\text{t1}]] \text{Sin}[\theta_2[\text{t2}]]) + (-\text{Cos}[\theta_2[\text{t2}]] \text{Sin}[\theta_1[\text{t1}]] \\ \text{Cos}[\theta_3[\text{t3}]] (-\text{Cos}[\theta_2[\text{t2}]] \text{Sin}[\theta_1[\text{t1}]] - \text{Cos}[\theta_1[\text{t1}]] \text{Sin}[\theta_2[\text{t2}]]) - (\text{Cos}[\theta_1[\text{t1}]] \text{Cos}[\theta_2[\text{t2}]] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = (\text{DTR1}.\text{TRT}) + (\text{DTR2}.\text{TRT}) + (\text{DTR3}.\text{TRT});$$

`Ω // MatrixForm // FullSimplify`

$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta_1'[\text{t1}] - \theta_2'[\text{t2}] - \theta_3'[\text{t3}] & 0 \\ \theta_1'[\text{t1}] + \theta_2'[\text{t2}] + \theta_3'[\text{t3}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Wx} = -\Omega[3, 2] // \text{FullSimplify};$$

$$\text{Wy} = -\Omega[1, 3] // \text{FullSimplify};$$

$$\text{Wz} = -\Omega[1, 2] // \text{FullSimplify};$$

```

Wx1 = D[Wx,  $\theta_1'$ [t1]];
Wx2 = D[Wx,  $\theta_2'$ [t2]];
Wx3 = D[Wx,  $\theta_3'$ [t3]];
Wy1 = D[Wy,  $\theta_1'$ [t1]];
Wy2 = D[Wy,  $\theta_2'$ [t2]];
Wy3 = D[Wy,  $\theta_3'$ [t3]];
Wz1 = D[Wz,  $\theta_1'$ [t1]];
Wz2 = D[Wz,  $\theta_2'$ [t2]];
Wz3 = D[Wz,  $\theta_3'$ [t3]];

```

```

J = {{d11, d12, d13}, {d21, d22, d23},
     {d31, d32, d33}, {Wx1, Wx2, Wx3}, {Wy1, Wy2, Wy3}, {Wz1, Wz2, Wz3}};
J // MatrixForm // Simplify

```

$$\begin{pmatrix} \sin \theta_1(t_1) l_1 - \sin \theta_1(t_1) + \theta_1(t_2) l_1 - \sin \theta_1(t_1) + \theta_1(t_2) + \theta_1(t_3) l_1 & \sin \theta_1(t_1) + \theta_1(t_2) l_1 - \sin \theta_1(t_1) + \theta_1(t_2) + \theta_1(t_3) l_1 & \sin \theta_1(t_1) + \theta_1(t_2) + \theta_1(t_3) l_1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta_1(t_1) l_1 + \cos \theta_1(t_1) + \theta_2(t_2) l_1 + \cos \theta_1(t_1) + \theta_2(t_2) + \theta_2(t_3) l_1 & \cos \theta_1(t_1) + \theta_2(t_2) l_1 + \cos \theta_1(t_1) + \theta_2(t_2) + \theta_2(t_3) l_1 & \cos \theta_1(t_1) + \theta_2(t_2) + \theta_2(t_3) l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Manipulador RPR

Cinemática de posición

```
In[10]:= a0 = Qz[θ1] . Tx[l1];  
a1 = Qz[θ2] . Tx[l2];  
a2 = Qz[θ3];  
a0 = a0 . a1;  
a0 = a0 . a1 . a2;  
a0 // MatrixForm // Simplify  
a1 // MatrixForm // Simplify  
a2 // MatrixForm // Simplify
```

Out[5]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos[\theta_1] & \sin[\theta_1] & 0 & \cos[\theta_1] l_1 \\ \sin[\theta_1] & \cos[\theta_1] & 0 & \sin[\theta_1] l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[6]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos[\theta_1 + \theta_2] & -\sin[\theta_1 + \theta_2] & 0 & \cos[\theta_1] l_2 + \cos[\theta_1 + \theta_2] l_1 \\ \sin[\theta_1 + \theta_2] & \cos[\theta_1 + \theta_2] & 0 & \sin[\theta_1] l_2 + \sin[\theta_1 + \theta_2] l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[7]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & -\sin[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & 0 & \cos[\theta_1] l_2 + \cos[\theta_1 + \theta_2] l_1 \\ \sin[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & \cos[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & 0 & \sin[\theta_1] l_2 + \sin[\theta_1 + \theta_2] l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

In[18]=
  X =  $\frac{0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  // FullSimplify
  Y =  $\frac{0}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$  // FullSimplify
  Z =  $\frac{0}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  // FullSimplify
Out[18]=  $\text{Cos}[\theta_1] \ell_1 + \text{Cos}[\theta_1 + \theta_2] \ell_2$ 
Out[19]=  $\text{Sin}[\theta_1] \ell_1 + \text{Sin}[\theta_1 + \theta_2] \ell_2$ 
Out[20]=  $\theta$ 

```

Cinemática diferencial

```

In[21]= d11 = D[X,  $\theta_1$ ]
        d12 = D[X,  $\ell_1$ ]
        d13 = D[X,  $\theta_2$ ]
        d21 = D[Y,  $\theta_1$ ]
        d22 = D[Y,  $\ell_1$ ]
        d23 = D[Y,  $\theta_2$ ]
        d31 = D[Z,  $\theta_1$ ]
        d32 = D[Z,  $\ell_1$ ]
        d33 = D[Z,  $\theta_2$ ]
Out[21]=  $-\text{Sin}[\theta_1] \ell_1 - \text{Sin}[\theta_1 + \theta_2] \ell_2$ 
Out[22]=  $\text{Cos}[\theta_1]$ 
Out[23]=  $-\text{Sin}[\theta_1 + \theta_2] \ell_2$ 
Out[24]=  $\text{Cos}[\theta_1] \ell_1 + \text{Cos}[\theta_1 + \theta_2] \ell_2$ 
Out[25]=  $\text{Sin}[\theta_1]$ 
Out[26]=  $\text{Cos}[\theta_1 + \theta_2] \ell_2$ 
Out[27]=  $\theta$ 
Out[28]=  $\theta$ 
Out[29]=  $\theta$ 
In[30]= TR = M3D  $\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$ ;
        TR // MatrixForm;
        DTR1 = D[TR,  $\theta_1$ ];
        DTR1 // MatrixForm;
        DTR2 = D[TR,  $\ell_1$ ];

```



```

DTR2 // MatrixForm;
DTR3 = D[TR,  $\theta_2$ ];
DTR3 // MatrixForm;
DTRT = (DTR1 + DTR2 + DTR3) / 2;
DTRT // MatrixForm // Simplify
TRT = Transpose[TR];
TRT // MatrixForm // Simplify
 $\Omega$  = DTRT.TR;
 $\Omega$  // MatrixForm // FullSimplify

```

Out[39]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\sin[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & -\cos[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & 0 \\ \cos[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & -\sin[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[41]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \cos[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & \sin[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & 0 \\ -\sin[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & \cos[\theta_1 + \theta_2 + \theta_3] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[43]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[44]=

```

Wx = - $\Omega$ [[3, 2]] * ( $\dot{\theta}_1 + \theta + \dot{\theta}_2$ ) // FullSimplify
Wy = - $\Omega$ [[1, 3]] * ( $\dot{\theta}_1 + \theta + \dot{\theta}_2$ ) // FullSimplify
Wz = - $\Omega$ [[1, 2]] * ( $\dot{\theta}_1 + \theta + \dot{\theta}_2$ ) // FullSimplify

```

```

Wx1 = D[Wx,  $\dot{\theta}_1$ ];
Wx2 = D[Wx,  $\dot{\theta}_2$ ];
Wx3 = D[Wx,  $\dot{\theta}_3$ ];
Wy1 = D[Wy,  $\dot{\theta}_1$ ];
Wy2 = D[Wy,  $\dot{\theta}_2$ ];
Wy3 = D[Wy,  $\dot{\theta}_3$ ];
Wz1 = D[Wz,  $\dot{\theta}_1$ ];
Wz2 = D[Wz,  $\dot{\theta}_2$ ];
Wz3 = D[Wz,  $\dot{\theta}_3$ ];

```

Out[44]= 0

Out[45]= 0

Out[46]= $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$

In[56]=

```
J = {{d11, d12, d13}, {d21, d22, d23},  
      {d31, d32, d33}, {Wx1, Wx2, Wx3}, {Wy1, Wy2, Wy3}, {Wz1, Wz2, Wz3}};  
J // MatrixForm // Simplify
```

Out[57]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\sin[\theta_1] l_1 - \sin[\theta_1 + \theta_2] l_2 & \cos[\theta_1] & -\sin[\theta_1 + \theta_2] l_2 \\ \cos[\theta_1] l_1 + \cos[\theta_1 + \theta_2] l_2 & \sin[\theta_1] & \cos[\theta_1 + \theta_2] l_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
0  
at = Qz[theta1[t1]].Tx[l1];  
1
```

```
1  
at = Qz[theta2[t2]].Tx[l2];  
2
```

```
2  
at = Qz[theta3[t3]].Tx[l3];  
3
```

```
0 0 1  
at = at.at;  
2 1 2
```

```
0 0 1 2  
at = at.at.at;  
3 1 2 3
```

```
0  
at // MatrixForm // Simplify;  
1
```

```
0  
at // MatrixForm // Simplify;  
2
```

```
0  
at // MatrixForm // Simplify;  
3
```