



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA

INTERACCIÓN ESTÁTICA ESTRUCTURA – SUELO SENSITIVO

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO

PRESENTA:

JOSÉ CARLOS VÁZQUEZ LIZÁRRAGA

TUTOR PRINCIPAL:

M.I. AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA, DICyG

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2019.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Roberto Magaña del Toro  
Secretario: Dr. Rivera Constantino Rigoberto  
Vocal: M.I. Deméneghi Colina Agustín  
1er Suplente: M.I. Sangines García Héctor  
2do Suplente: M.I. Zea Constantino Carmelino

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, Ciudad de México, México.

**TUTOR DE TESIS:**

AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA

---

**FIRMA**



## AGRADECIMIENTOS

Hace cuatro años me enamoré de la disciplina de geotecnia y desde ese momento fue mi sueño continuar preparándome académicamente con un posgrado en la Universidad Nacional Autónoma de México. Hoy dos años después de haber ingresado a la máxima casa de estudios, he culminado mi investigación para concluir con la obtención de mi grado, quiero dedicar y agradecer a las siguientes personas:

A mis padres y hermanos;

Ellos me apoyaron de todas las maneras posibles y creyeron en mí desde el primer momento en que les presenté mi propuesta.

A la familia Estrada Lizárraga y Mercado Vázquez;

Estuvieron presente apoyándome tras bambalinas cada que el camino se tornaba difícil.

A mi futura esposa, Mónica Acevedo;

Quien fue parte indispensable al culminar mi trabajo motivándome a sacar adelante mi sueño.

A mi tutor Agustín Deméneghi Colina,

quien estuvo en cada momento en que se me presentaba una duda con la mejor disposición de ayudarme y obsequiando su conocimiento.

A mis sinodales;

Dr. Rigoberto Rivera Constantino

Dr. Roberto Magaña del Toro

M.I. Héctor Sanginés García

M.I. Carmelino Zea Constantino

Gracias por su apoyo y sus observaciones.



# CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN.....	6
1.1 RESUMEN .....	7
1.2 OBJETIVO GENERAL .....	7
1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	8
1.3 HIPÓTESIS.....	8
2. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD .....	10
2.1 LEY DE HOOKE.....	10
2.2 TEORÍA DE LA ELASTICIDAD EN SUELOS .....	14
3. ASENTAMIENTOS EN SUELOS SENSITIVOS.....	7
3.1 ARCILLAS SENSITIVAS.....	7
3.2 HISTORIA GEOLÓGICA DE LA CUENCA DE MÉXICO .....	8
3.3 MICRO ESTRUCTURA DE LA ARCILLA EN LA CUENCA DE MÉXICO ....	9
3.4 LA COMPRESIBILIDAD EN SUELOS SENSITIVOS.....	10
3.5 COMPORTAMIENTO DEL SUELO EN EL TIEMPO .....	13
4. ASENTAMIENTOS.....	16
4.1 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN LOS SUELOS .....	16
4.2 ASENTAMIENTOS INMEDIATOS .....	19
4.2.1 Módulo de elasticidad corto plazo en los suelos.....	22
4.3 ASENTAMIENTOS A LARGO PLAZO .....	23
4.3.1 Esfuerzos efectivos y disipación de presión de poro .....	24
4.3.2 Compresión en arcillas sensitivas .....	26
4.3.3 Esfuerzo de pre-consolidación.....	27
4.3.4 Índices de compresión y re-compresión .....	28
4.3.5 Relación de pre-consolidación. ....	28
4.3.6 Módulo de deformación a largo plazo o módulo edométrico .....	28
4.4 TEORÍA DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL PRIMARIA .....	30
4.5 TEORÍA DE CONSOLIDACIÓN SECUNDARIA .....	32
4.5.1 Unidad Z.....	34
4.5.2 Estado de esfuerzos en la consolidación secundaria .....	36
5. ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	39
5.1 Método Matricial .....	39

5.2	Método de Rigideces .....	39
5.3	Formación de la matriz de rigidez de la estructura. ....	41
	Ejemplo.....	48
6.	INTERACCIÓN SUELO- ESTRUCTURA .....	53
6.1	ANTECEDENTES .....	53
6.2	DESARROLLO DEL PROBLEMA INTERACCIÓN – SUELO ESTRUCTURA. 56	
6.3	ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	58
6.3.1	Corto plazo.....	58
6.3.2	Largo plazo .....	60
6.4	MATRIZ DE FLEXIBILIDAD; DEFORMACIONES DEL SUELO .....	60
6.4.1	Corto Plazo .....	60
6.4.2	Largo plazo .....	62
	Ejemplo.....	64
7.	EJEMPLO DE APLICACIÓN.....	69
7.2	ESTADO LÍMITE DE SERVICIO .....	71
7.2.1	Asentamientos inmediatos.....	71
7.2.2	Asentamientos a largo plazo .....	71
7.3	INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA .....	74
7.3.1	Método directo.....	74
7.3.2	Elementos finitos.....	81
7.4	DISEÑO ESTRUCTURAL .....	87
7.4.1	Método directo.....	87
7.4.2	Elemento finito.....	94
8.	CONCLUSIONES .....	98
	ANEXO 1: Resultados a corto plazo del programa Cciseblx06.FOR.....	100
	ANEXO 2: Resultados a largo plazo del programa Cciseblx06.FOR.....	110
	REFERENCIAS.....	121

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Elemento sometido a fuerzas axiales. ....	12
Figura 2.2 (a) Espécimen perfectamente elástico sometido a fuerzas axiales; (b) resultados de la prueba; (c) orientación de los esfuerzos principales. (Terzaghi, 1943). .....	14
Figura 2.3 Comportamiento de un material elasto-plástico en una prueba de compresión.....	15
Figura 3.1.1 Arreglo de la arcilla en estado sedimentado. ....	7
Figura 3.1.2 Zonificación geotécnica de la Ciudad de México. ....	9
Figura 3.1.3 Componentes de la micro-estructura de la arcilla. ....	10
Figura 3.1.4 Compresibilidad de arcillas de distintas ubicaciones con respecto a su contenido de humedad (Shelley,2011). ....	11
Figura 3.1.5 Concepto de asentamiento instantáneo, delayed, consolidación primaria y secundaria para Bjerrum. ....	12
Figura 3.1.6 Fenómeno de Hardening en suelos sensitivos (Zeevaer,1983). ....	13
Figura 4.1 Esfuerzos en un punto P producidos por una carga puntual Q en la superficie (Das, 2014).. ....	17
Figura 4.2 Estado de esfuerzos de un elemento. ....	18
Figura 4.3 Esfuerzos en las direcciones x, y, z provocados por una carga lineal en la superficie. ....	20
Figura 4.4 Módulo tangente inicial, tangente elástico y secante elástico (Budhu, 2011) .....	22
Figura 4.5 Valores de permeabilidad para suelos con granulometría diferente (Juarez y Rico, 1972). ....	23
Figura 4.6 (a) Suelo en una prueba de odómetro; (b) modelo de la representación del fenómeno de consolidación (Lambe y Whitman, 2004). ....	25
Figura 4.7 Deformación debida a un esfuerzo en una muestra de suelo montada en una prueba de odómetro. ....	26
Figura 4.8 Determinación del esfuerzo crítico con el método de Zeevaert (1972) para arcillas sensitivas. ....	27
Figura 4.9 Variación del módulo de deformación en consolidación primaria con respecto al esfuerzo vertical en arcillas sensitivas. ....	29
Figura 4.10 Variación del módulo de deformación en consolidación secundaria con respecto al esfuerzo vertical en arcillas sensitivas. ....	29
Figura 4.11 Unidades reológicas que representan el fenómeno de viscosidad intergranular (Zeevaert, 1986). ....	34
Figura 4.12 Esfuerzo de consolidación y esfuerzo de pre-consolidación. ....	36
Figura 4.13 Curva Tipo I (Zeevaert, 1986). ....	37
Figura 5.1 Elemento deformado debido a aplicación de fuerzas P. ....	40
Figura 5.2 Desplazamiento introducido en el elemento produciendo fuerzas. ....	41
Figura 5.3 Barra con rigidez EI con una carga distribuida. ....	43
Figura 5.4 Convención de signos en el análisis estructural: método de rigideces. ....	43
Figura 5.5 Fuerzas al aplicar una deformación; giro (a y b); desplazamiento(c y d); acortamiento(e y f); torsión (g y h). ....	44

Figura 5.6 Marco con datos para ejemplo.....	48
Figura 5.7 Ejemplo: grados de libertad de la estructura.....	48
Figura 6.1 Diagrama de deformaciones en una zapata flexible.....	54
Figura 6.2 Diagrama de reacciones en una zapata rígida.....	54
Figura 6.3 Zapata corrida .....	56
Figura 6.4 Reacciones $r_n$ debidas a la carga de la estructura. ....	57
Figura 6.5 Cargas impuestas al terreno .....	57
Figura 6.6 Influencia de las reacciones en el vector de cargas de empotramiento.....	59
Figura 6.7 Formación del vector de cargas concentradas de acuerdo a su ubicación..	60
Figura 6.8 División de áreas de la estructura para el análisis .....	61
Figura 6.9 Esfuerzos en el suelo debido a una carga $r_k$ .....	62
Figura 6.10 Ejemplo: Interacción suelo-estructura. ....	64
Figura 6.11 Grados de libertad en la barra de cimentación.....	64
Figura 7.1 Estratigrafía y datos del problema .....	69
Figura 7.2 Geometría de la zapata .....	69
Figura 7.3 Ejemplo de aplicación: puntos de análisis .....	74
Figura 7.4 Ejemplo de aplicación: grados de libertad.....	74
Figura 7.5 Ejemplo de aplicación: puntos de análisis para el cálculo de valores de influencia.....	76
Figura 7.6 Resultados método directo a corto plazo. ....	78
Figura 7.7 Resultados método directo a largo plazo.....	80
Figura 7.8 Ejemplo de aplicación: Malla de elementos finitos y condiciones de frontera.....	81
Figura 7.9 Ejemplo de aplicación: Geometría del modelo y asignación de materiales.	82
Figura 7.10 Ejemplo de aplicación: Distribución de la presión de poro. ....	83
Figura 7.11 Ejemplo de aplicación: Cargas en el elemento viga.....	83
Figura 7.12 Ejemplo de aplicación: Desplazamientos en dirección z a corto plazo.....	84
Figura 7.13 Ejemplo de aplicación: deformaciones en dirección x a corto plazo.....	84
Figura 7.14 Ejemplo de aplicación: Elementos mecánicos obtenidos con modelado numérico a corto plazo.....	85
Figura 7.15 Ejemplo de aplicación: deformaciones en dirección z a largo plazo.....	86
Figura 7.16 Ejemplo de aplicación: desplazamientos en dirección x a largo plazo.....	86
Figura 7.17 Ejemplo de aplicación: Elementos mecánicos obtenidos con modelado numérico a largo plazo. ....	87
Figura 7.18 Refuerzo de la trabe; método directo.....	90
Figura 7.19 Sección crítica para tensión y flexión.....	91
Figura 7.20 Refuerzo de la losa de la zapata; método directo. ....	94
Figura 7.21 Refuerzo de la contratrabe; método de elementos finitos.....	95
Figura 7.22 Refuerzo de la losa; método de elementos finitos .....	97

## LISTA DE TABLAS

Tabla 5.1 Grados de libertad.....	49
Tabla 5.2 Arreglo matricial para barra horizontal.....	49
Tabla 5.3 Arreglo matricial para barra vertical .....	49
Tabla 7.1 Ejemplo de aplicación: Matriz de rigidez.....	75
Tabla 7.2 Ejemplo de aplicación: Vector de cargas de empotramiento .....	75
Tabla 7.3 Propiedades a corto plazo; modelado numérico.....	82
Tabla 7.4 Propiedades para análisis a largo plazo. ....	85
Tabla 7.5 Ejemplo de aplicación: momentos y cortantes máximos método directo .....	87

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUCCIÓN**

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1 RESUMEN

La ingeniería civil, una de las ingenierías más antiguas se ha centrado en satisfacer las necesidades de la sociedad en la búsqueda de vivienda, servicios e infraestructura. En los últimos años esta ingeniería se ha encargado de mover al mundo, proteger a la sociedad e impulsar el desarrollo entre ella.

El diseño de elementos estructurales para la edificación, ha sido en los últimos dos siglos acreedora de bastas investigaciones, los objetivos principales de esta búsqueda de conocimientos han sido principalmente la seguridad y la economía. En el área geotécnica la exploración del subsuelo y el entendimiento del comportamiento de este ente tan incierto y con gran amplitud de errores permanece en una escasa clarificación debido a la poca inversión para el reconocimiento de los suelos analizados.

El suelo es una creación de la naturaleza, éste no se ha producido por un proceso único; rocas víctimas del intemperismo y desintegraciones químicas han variado el proceso de creación del suelo. Las más de 5300 especies de minerales existentes se combinan para el desarrollo de suelos con distintas propiedades mecánicas. La disminución de la incertidumbre en el desarrollo de un proyecto, puede considerarse acoplando ambas disciplinas ingenieriles.

La interacción suelo – estructura, ha sido la solución para la disminución de las incertidumbres en los asentamientos de las edificaciones. La consideración de la rigidez de la estructura, en algunas investigaciones se ha encontrado una directa relación con los asentamientos totales que se tienen en el subsuelo.

En este trabajo se hará una comparación entre el método de elementos finitos y la interacción suelo-estructura con un método iterativo haciendo las consideraciones correspondientes acerca de los asentamientos y la rigidez de la estructura.

## 1.2 OBJETIVO GENERAL

Analizar los esfuerzos y deformaciones que se tiene al momento de diseñar una cimentación en este caso una zapata corrida, considerando las propiedades de la estructura y el suelo, para así, aportar al gremio ingenieril una razón más por la cual es importante la consideración del análisis de la interacción estática suelo-estructura y la factibilidad de los métodos estudiados en esta tesis.

### 1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Examinar el comportamiento entre una zapata y el suelo de cimentación considerando una condición a largo plazo para los asentamientos en un suelo sensitivo.
- Comparación entre el cálculo del método directo con fundamentos del profesor Chamecki (1956) (Deméneghi, 1996) y un método numérico (Método de los elementos finitos).
- Comprobar la divergencia o convergencia de cada método para la formulación de recomendaciones.

### 1.3 HIPÓTESIS

Al llevar a cabo este trabajo de investigación se espera obtener conocimientos en la liga de estas dos áreas entre el suelo y la estructura, la comprobación del método y la adición de nuevos parámetros como la consolidación secundaria, va a tener un efecto más cercano de la realidad, reduciendo así las incertidumbres en el diseño y aumentando la capacidad de diseñar para el mejoramiento del comportamiento en las zapatas corridas. Además, se considerará al suelo como un medio estratificado en el plano horizontal, dicha hipótesis será aplicable para una gran cantidad de medios en la vida real, si bien, no todos los suelos tratan este tipo de estratificación (estratificación horizontal) pues comúnmente cuentan con inclinaciones y los estratos son irregulares, sin embargo, se tienen resultados bastante aplicables a la realidad.

Se espera que en la comparación del método iterativo y el método de los elementos finitos haya una diferencia de un orden aceptable. No serán completamente iguales en consecuencia a la refinación que se le dé a la malla de los elementos finitos, debido a que en los elementos finitos estamos hablando de solucionar una ecuación diferencial en cada elemento sometido al análisis.

# **CAPÍTULO II**

## **TEORÍA DE LA ELASTICIDAD**

## 2. TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

La mayoría de los materiales utilizados en los proyectos de ingeniería civil se caracterizan por tener comportamientos que se encuentran de cierta manera regidos por el principio de la teoría de la elasticidad. ¿Esto qué significa? Un material se considera elástico, cuando al momento de llevarlo al proceso de deformación al ser sometido a una fuerza axial, esta deformación se vuelva nula al ceder la aplicación de la fuerza, siempre y cuando no sobre pase el límite del material, este límite es llamado límite elástico.

Esta ley obedece cierta hipótesis, como que el material es isótropo, es decir, sus propiedades son diferentes en diferentes direcciones, además, de cumplir una condición de homogeneidad. En los suelos se ha demostrado que la teoría de la elasticidad puede ser aplicable y tiene resultados bastante convincentes para las aplicaciones en la geotecnia, a pesar de no cumplir con las hipótesis de una manera eficaz. Sin embargo, de acuerdo a los ensayos e investigaciones realizadas a lo largo de la historia, han demostrado que el suelo tiene un comportamiento hasta cierto punto elasto-plástico.

### 2.1 LEY DE HOOKE

El físico y astrónomo inglés Robert Hooke, egresado de la universidad de Oxford, en 1660 establece la relación entre los componentes de esfuerzo y los componentes de deformaciones y da pie a la Ley que lleva su propio nombre, la afamada Ley de Hooke. Sus experimentos mostraron que cuando se le aplica un esfuerzo a un rectángulo paralelepípedo con características isotrópicas, los esfuerzos normales no producen distorsión en los ángulos del elemento, por tal, la magnitud de la elongación producida está dada por la siguiente ecuación:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (1.1)$$

Siendo  $\epsilon_x$  la deformación producida por el esfuerzo  $\sigma_x$ , y E es conocido como el módulo de elasticidad. Las deformaciones producidas por alargamiento en el elemento en la dirección equis producen acortamientos en sus otras direcciones:

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (1.2)$$

Para representar estas contracciones se hace uso de la variable  $\nu$  la cual es una constante conocida como relación de Poisson. Esta es una constante elástica que proporciona una medida del estrechamiento de sección de un prisma de material elástico lineal e isótropo cuando se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares a la de estiramiento y al

comprimirse el fenómeno es inverso. En el caso de los suelos cuando este se deforma a volumen constante como las arcillas de la ciudad de México esta relación llega a valer .5, dicho valor físicamente supone que es un material que no tiene pérdida de volumen.

Si el elemento en análisis llegara a tener influencia de los esfuerzos  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , uniformemente distribuidos a los lados de este, los componentes resultantes de las deformaciones se pueden obtener con las ecuaciones 3, 4 y 5. Para ello se utiliza el principio de superposición y se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\tag{1.3}$$

Con estas ecuaciones se pueden obtener las deformaciones totales producidas por fuerzas ortogonales en los tres sentidos. Como se mencionó en párrafos anteriores este método es aplicable para deformaciones relativamente pequeñas, lo que la hace una herramienta útil para la ingeniería. Las fuerzas axiales producen solamente esfuerzos de tensión y compresión, sin embargo, tienen un efecto las cuales producen una especie de deformación en sentido angular.

Las ecuaciones 6, 7 y 8, son de utilidad para obtener las deformaciones y los esfuerzos, los cuales se encuentran identificados por dos constantes físicas, las cuales ya se definieron, estas son el módulo de elasticidad E y la relación de Poisson  $\nu$ , estas constantes pueden ser utilizadas para la obtención de una relación entre los esfuerzos cortantes y las deformaciones angulares.

Si consideramos el caso de la deformación de un paralelepípedo rectangular el cual está sometido a  $\sigma_y = -\sigma_z$  y  $\sigma_x = 0$ , teniendo un elemento abcd como en la Figura 1 en un plano paralelo a x-y con un ángulo de  $45^\circ$  al eje de las y y z, y asumiendo que las fuerzas perpendiculares a bc, además que los esfuerzos normales en los lados del elemento son cero y que el esfuerzo cortante en los lados se tiene:

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_y) = \sigma_z\tag{1.4}$$

Esa condición es llamada cortante puro (Timoshenko, 1955). Las elongaciones verticales del elemento Ob es igual a los acortamientos en los elementos horizontales Oa y Oc, entonces se dice que las longitudes ab y bc del elemento no cambian durante la deformación. El ángulo entre estos lados cambian y estos

tienen la magnitud de la deformación angular  $\gamma$ , después de la deformación se tiene:

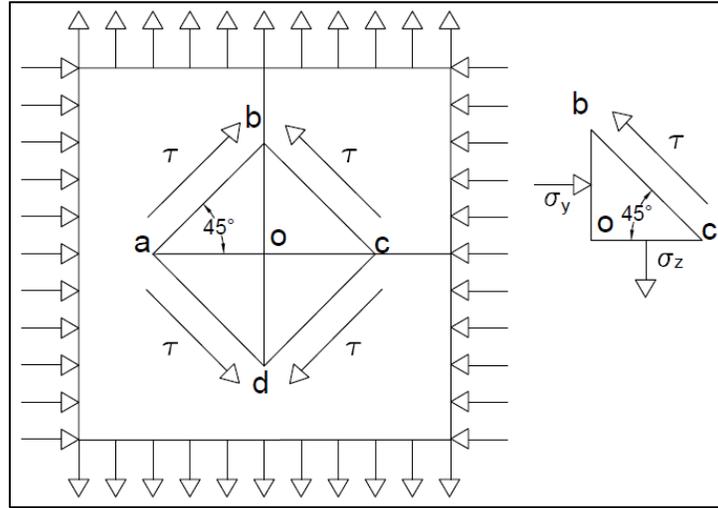


Figura 2.1 Elemento sometido a fuerzas axiales.

$$\frac{Oc}{Ob} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_z} \quad (1.5)$$

Sustituyendo de las ecuaciones 6, 7 y 8:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_y) = -\frac{(1 + \nu)\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{(1 + \nu)\sigma_z}{E}$$

Si se tiene una deformación angular pequeña podremos obtener la siguiente formación:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} \quad (1.6)$$

$$\gamma = \frac{2(1 + \nu)\sigma_z}{E} = \frac{2(1 + \nu)\tau}{E}$$

Finalmente podemos demostrar que las relaciones entre esfuerzos cortantes y deformaciones angulares están también definidas por los parámetros del módulo de elasticidad ( $E$ ) y la relación de Poisson ( $\nu$ ).

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.7)$$

Por lo tanto las deformaciones se pueden expresar como una relación entre el esfuerzo cortante y el módulo  $G$ , este es conocido como el módulo de rigidez.

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (1.8)$$

Los alargamientos y los movimientos angulares son independientes uno del otro. Al igual que las componentes de deformación se pueden obtener como funciones de las componentes de esfuerzos, las de esfuerzos se obtienen de manera análoga. Es cuestión de establecer una relación entre el volumen de expansión y la suma de los esfuerzos normales:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.9)$$

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (1.10)$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} \Theta \quad (1.11)$$

En el caso de que la presión fuera hidrostática, estamos hablando de una fuerza ortogonal, es decir que se presenta con la misma magnitud y sentido, por lo tanto, las fuerzas normales en x, y, y z serían iguales.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p \quad (1.12)$$

Entonces la Ecuación 1.11 quedaría de la siguiente manera:

$$e = -\frac{(1 - 2\nu)p}{E} \quad (1.13)$$

La cual representa la relación entre la expansión de volumen y la presión hidrostática. Sustituyendo las ecuaciones 6 en la Ecuación 1.9 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_z \end{aligned} \quad (1.14)$$

El primer factor es conocido como el parámetro de Lamé, en honor a Gabriel Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e \quad (1.15)$$

De esta manera se puede simplificar las Ecuaciones 1.14 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda + 2G\varepsilon_x \\
 \sigma_y &= \lambda + 2G\varepsilon_y \\
 \sigma_z &= \lambda + 2G\varepsilon_z
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

## 2.2 TEORÍA DE LA ELASTICIDAD EN SUELOS

El suelo es un material producto de la desintegración de rocas y del intemperismo, al tratarse de materiales compuestos de combinaciones de minerales es caracterizado por ser impredecible. En la teoría de la elasticidad las principales consideraciones que se toman en cuenta, es principalmente que se trata de un elemento homogéneo e isótropo. El término isótropo hace referencia a un material el cual tiene las mismas propiedades en todas las direcciones a través de él y el concepto de homogeneidad se basa en el comportamiento similar en cada punto del material. A pesar de ello no significa que un material homogéneo es únicamente isótropo.

La teoría de la elasticidad aplicada a suelos está basada principalmente en el principio que define al material como isótropo y homogéneo, por lo tanto, este se rige por la ley de Hooke la cual se discutió en la sección anterior. Las deformaciones producidas por un esfuerzo axial pueden ser analizadas en una prueba triaxial o de compresión simple. Los desplazamientos verticales positivos, están asociados con una deformación negativa en sentido horizontal, esta relación se probó en la sección anterior y es la ya mencionada relación de Poisson.

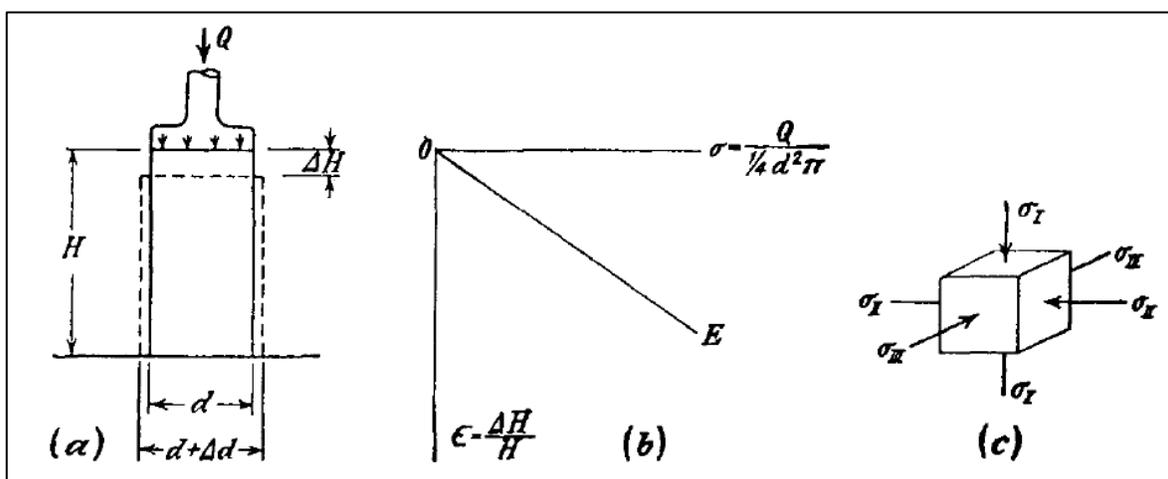


Figura 2.2 (a) Espécimen perfectamente elástico sometido a fuerzas axiales; (b) resultados de la prueba; (c) orientación de los esfuerzos principales. (Terzaghi, 1943).



es el tramo de recuperación de la deformación al cesar la carga; y la segunda parte es la llamada etapa plástica, en esta etapa las deformaciones en el suelo no son recuperables. Esto, entonces, define al suelo como un ente con un comportamiento elasto-plástico.

El módulo elástico o módulo de Young es la pendiente de la línea de la gráfica esfuerzo-deformación de un material linealmente elástico. Para un material elástico no lineal, tenemos los módulos de elasticidad tangente y el módulo secante, ambos se encuentran determinados con una relación de esfuerzo y deformación.

Los módulos elásticos tanto el secante como el tangente, tienden a ser menores cuando las deformaciones tangenciales aumentan. Comúnmente los módulos para un material elasto-plástico son obtenidos con la tangente inicial haciendo una descarga y calculando la pendiente inicial de la línea de descarga como la tangente inicial del módulo elástico. En la sección IV se abordará el tema de los módulos elásticos en los suelos y su uso en la práctica.

# **CAPÍTULO III**

## **SUELOS SENSITIVOS**

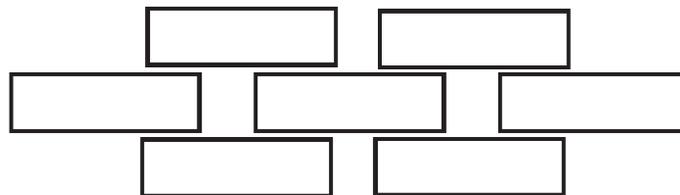
### 3. ASENTAMIENTOS EN SUELOS SENSITIVOS

La ingeniería de cimentaciones tiene especial interés en el comportamiento mecánico del suelo, al hablar de este, principalmente se hace mención al estado de esfuerzos y deformaciones que sufre debido a una carga o alteración en el sistema. Las alteraciones que sufre el suelo son variables debido a la naturaleza amorfa con la cual se concibieron en algún tiempo determinado en la existencia del planeta tierra.

La variable combinación de minerales, reacciones químicas y acciones físicas, dieron paso a la creación de los suelos, sedimentándolos y obteniendo estratigrafías tan variables que hace necesaria la indeterminada exploración del subsuelo. El capítulo 3 de este trabajo de investigación estará centrado en la descripción del comportamiento conflictivo en suelos sensitivos.

#### 3.1 ARCILLAS SENSITIVAS

La arcilla es un suelo fino con un diámetro menor de 0.0039 mm la cual es producida principalmente por procesos químicos como oxidación, reacciones químicas debido a la presencia de materiales como carbonatos, etc. Tienen una extensa composición mineralógica, sin embargo, los principales minerales que las componen, son las ilitas, caolitas y montmorilonitas, estos minerales conceden a la arcilla una naturaleza dipolar, debido a los iones libres de oxígeno que existen en ellas. Los primeros dos minerales son los más nobles, pues en estos tenemos menor absorción del agua y una plasticidad menor. En cambio, los minerales de montmorilonita son muy plásticos, los cuales causan conflictos en la construcción, pues son muy inestables, debido a que son muy sensibles a los cambios de contenido de agua especialmente cuando hay intercambio de cationes. La microestructura de la arcilla está caracterizada por la formación de plaquetas, la cual tiene un acomodo similar a un castillo de naipes o a un arreglo similar a ladrillos en un estado sedimentado (Figura 3.1), esto propicia una compresibilidad mayor que en los suelos granulares como los limos o arenas.



*Figura 3.1 Arreglo de la arcilla en estado sedimentado.*

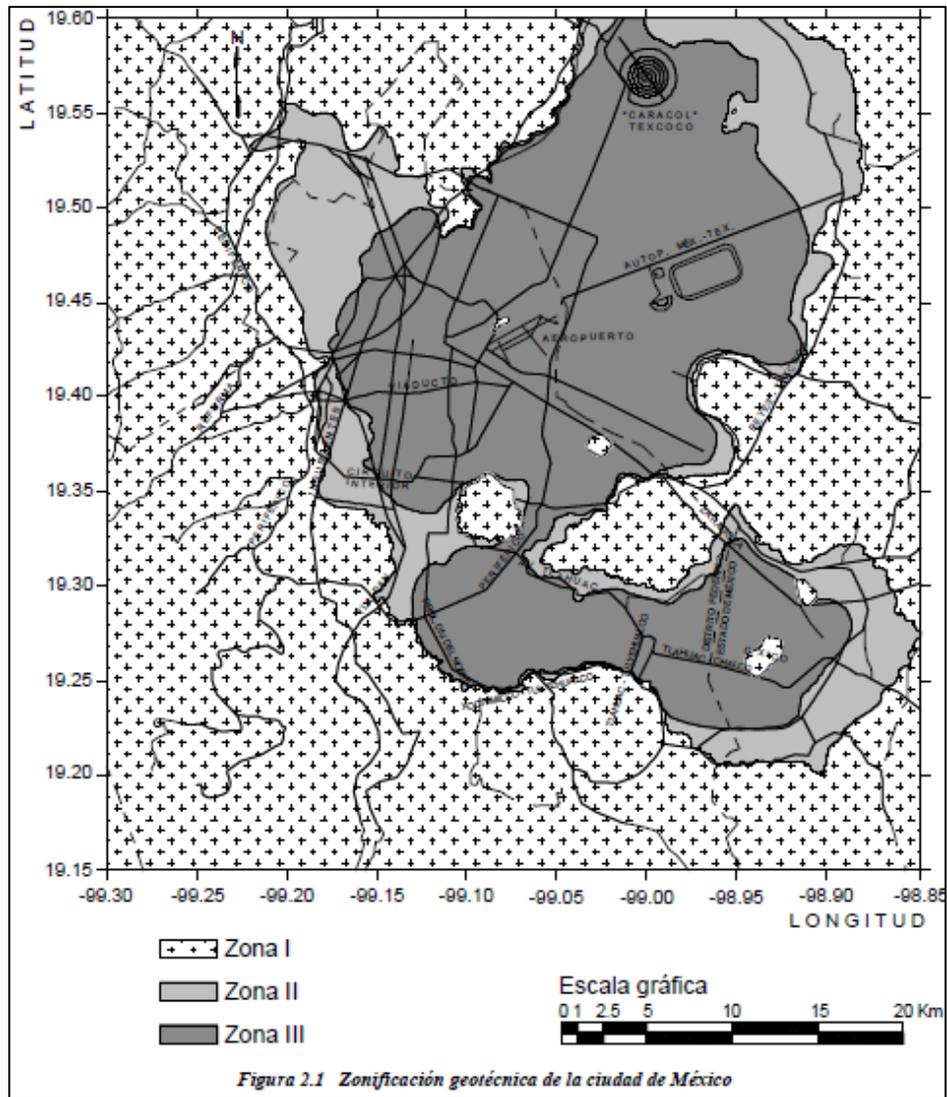
En un estado ordinario, es decir, donde los suelos arcillosos son poco problemáticos se puede trabajar sin problemas con este tipo de suelos con diversas técnicas de mejoramiento y cimentaciones que son costeables, pues se cuenta con información previa, la cual ha sido útil en la práctica durante muchos años. Sin embargo, el problema se torna complicado cuando se tienen características especiales obtenidas de acuerdo al entorno e historia geológica en que estos se dieron.

Un claro ejemplo de suelos con ciertas características mecánicas singulares son los suelos de Ciudad de México, Noruega y este de Canadá. Estos han sido víctimas de fenómenos esporádicos, los cuales han contribuido en estas zonas a tener suelos con altas relaciones de vacíos y un comportamiento extremo a la compresibilidad. Las arcillas de Noruega y Canadá, son caracterizadas por haber sido originadas mediante un proceso glacial hace aproximadamente 20,000 años, la mezcla del agua de mar y el agua dulce fue también participante del producto de estas. En estudios físico-químicos en investigaciones posteriores se han encontrado los principales minerales que componen a las arcillas de Canadá y Noruega, los cuales son: plagioclasa, cuarzo, microclina, hornblenda, dolomita y calcita con porciones de mica e ilita (Locat & Lefebvre, 1984). Sin embargo, el origen de la arcilla que se encuentra en Ciudad de México se debe a una peculiar historia geológica.

### 3.1 HISTORIA GEOLÓGICA DE LA CUENCA DE MÉXICO

El antiguo valle de México tendió a cerrarse debido a la intensa actividad sísmica y tectónica en la placa de cocos, cerrando el valle, produciendo la ahora conocida Cuenca de México. En el periodo del Mioceno el basamento volcánico se vio afectado por fracturas y fallas provocando hundimientos en fosas tectónicas, generándose posteriormente estructuras volcánicas en las áreas oriente y poniente obstruyendo así los ríos predominantes en esa época.

En el Plioceno la actividad volcánica se hizo presente con la expulsión de andesitas basálticas cerrando la cuenca, surgiendo así, la sierra de las Cruces. Posterior a ello se genera la sierra de Chichinautzin, produciendo una represa la cual representó una barrera para el drenaje de la parte sur, cerrando completamente el sistema de ríos de la zona, produciendo estancamientos. En la Figura 3.2 se puede observar la zonificación geotécnica de la Cuenca de México, en el cual se encuentra delimitadas la zona de lomas y la zona del lago, en esta última se cuenta con los suelos de origen lacustre.



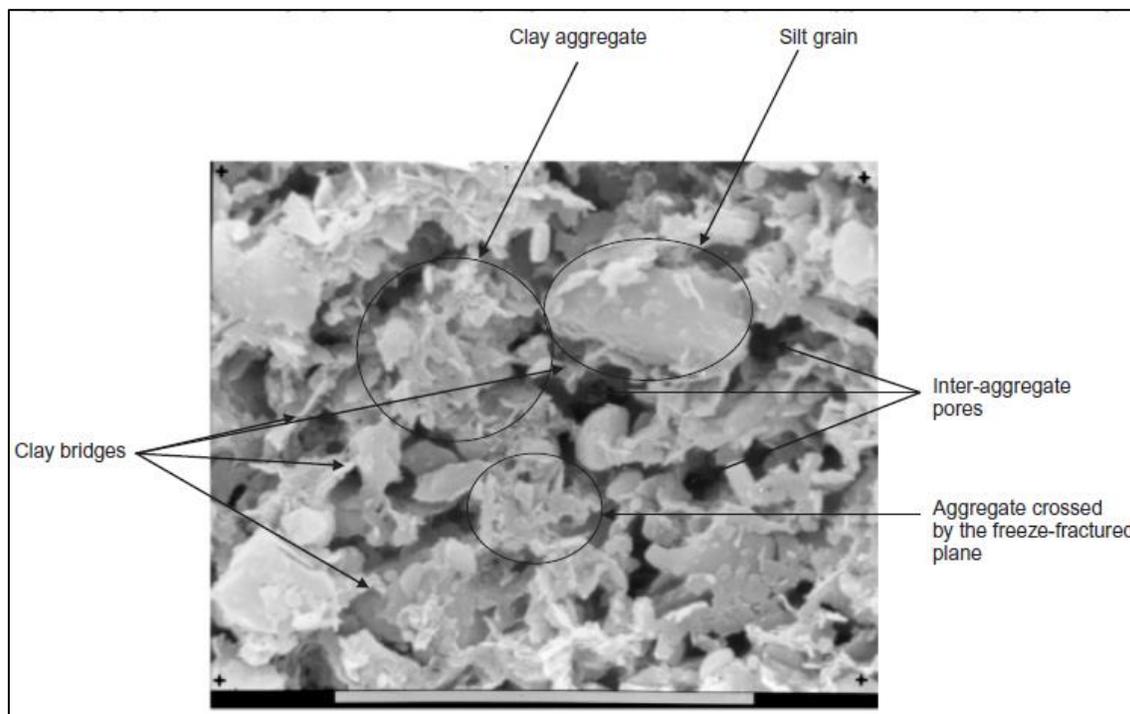
*Figura 3.2 Zonificación geotécnica de la Ciudad de México.*

El cierre del valle dio origen a lagos (Texcoco, Xochimilco, Chalco, etc.) los cuales se llenaban sólo en temporada de lluvias, acumulándose en ellos materiales de origen lacustre como limos, arcillas, microfósiles, ceniza volcánica y clastos producto del acarreo de los ríos.

### 3.2 MICRO ESTRUCTURA DE LA ARCILLA EN LA CUENCA DE MÉXICO

La arcilla de la Cuenca de México, entonces, fue producto de la erupción de los volcanes los cuales provocaban grandes nubes de una muy fina ceniza volcánica, la cual se descomponía formando minerales característicos de la arcilla, estos materiales se sedimentaron creando partículas con una micro estructura floculenta. Esta estructura en conjunto con sus componentes minerales, generan deformaciones relativamente grandes en estos suelos. De

acuerdo con investigaciones en arcillas de Canadá, esta estructura (Figura 3.3) formada por conexiones de arcilla que unen núcleos de este mismo material y granos de limos, forman poros entre los agregados contribuyendo a los altos niveles de sensibilidad (Delage, 2010).



*Figura 3.3 Componentes de la micro-estructura de la arcilla (Delage, 2010).*

La micro-estructura es principalmente la causa de la sensibilidad, sin embargo, hay otros factores que se unen produciendo un suelo altamente sensible. De acuerdo con Díaz Rodríguez (et al, 2009) componentes químicos del suelo de la Ciudad de México fueron víctimas del fenómeno de lixiviación, esto al igual que las arcillas de Canadá y Noruega (Delage, 2010), este proceso tendió a aumentar su capacidad de absorción y por ende aumentar el contenido de agua y su compresibilidad.

### 3.3 LA COMPRESIBILIDAD EN SUELOS SENSITIVOS

Los suelos sensitivos de la Ciudad de México son caracterizados por ser problemáticos debido a sus grandes relaciones de vacíos, altos contenidos de agua, historia de esfuerzos y la presencia de materiales amorfos y de microfósiles con grandes poros (Shelley, 2011). En la Figura 3.4 se aprecia una serie de pruebas de compresibilidad aplicadas a muestras de suelo obtenidas en diferentes ubicaciones, evidentemente se puede observar la singularidad de los suelos de Ciudad de México, como se dijo anteriormente su gran relación de

vacíos y sus altos contenidos de agua, hacen de este suelo un ente demasiado compresible, existiendo una sensibilidad notoria al superar el esfuerzo crítico  $\sigma_c$ .

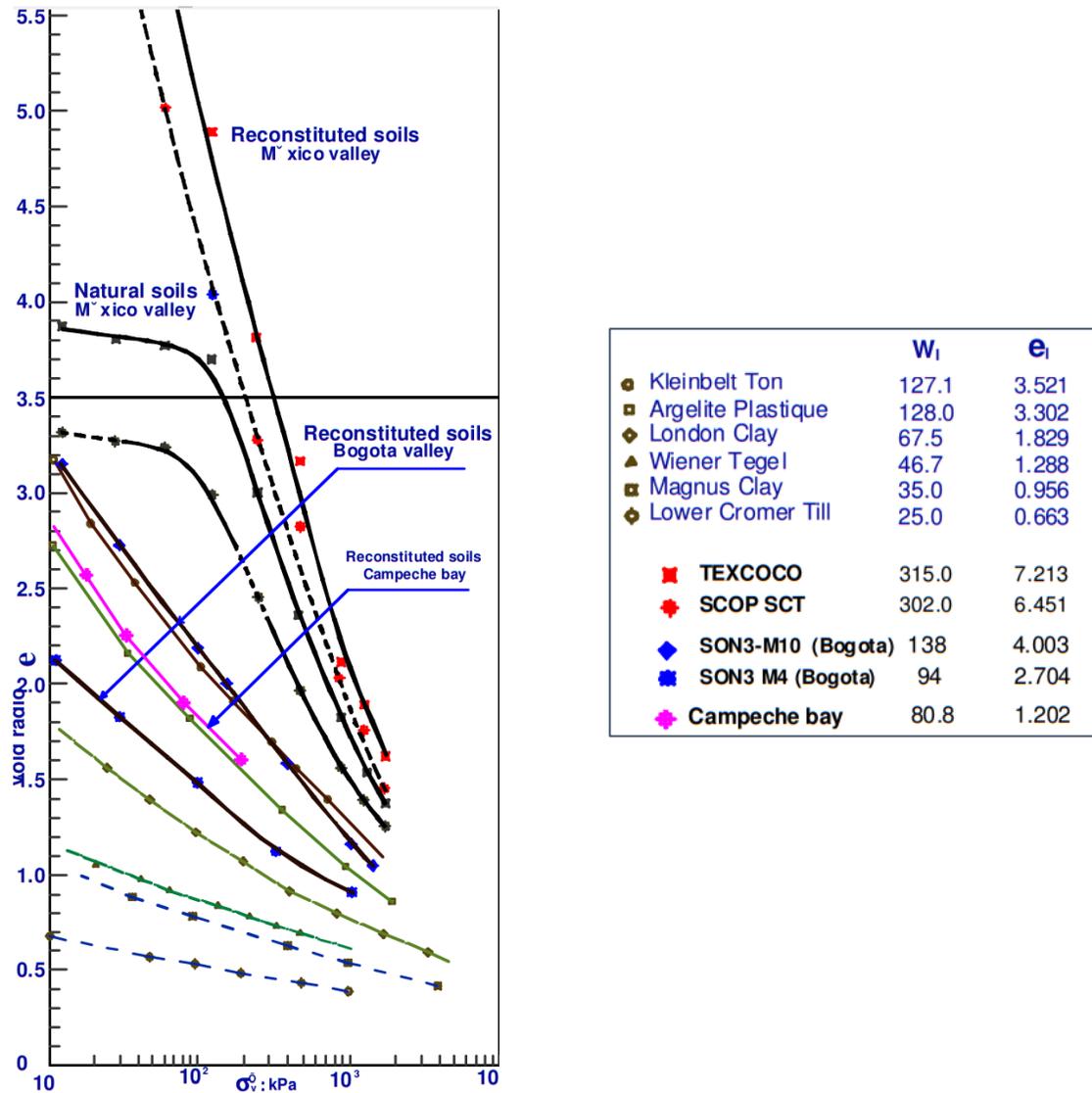


Figura 3.4 Compresibilidad de arcillas de distintas ubicaciones con respecto a su contenido de humedad (Shelley,2011).

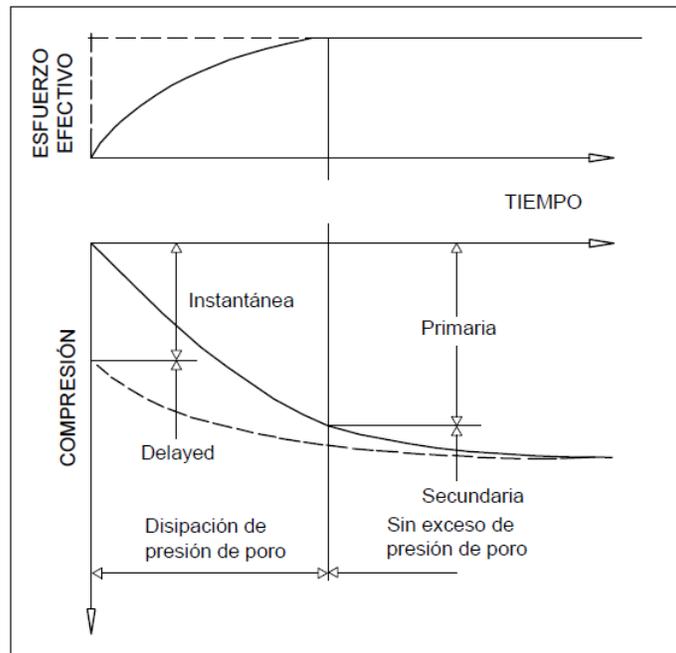
La compresión en un suelo sensitivo de acuerdo con Bjerrum (1967) se lleva a cabo en dos etapas; una de ellas es llamada compresión instantánea y la siguiente es la compresión retardada o a largo plazo. La compresión instantánea ocurre cuando el suelo está sometido a un aumento en la presión vertical causando una reducción en la relación de vacíos produciendo una deformación a volumen constante, esto indica que al deformarse el volumen continúa siendo el mismo, es decir:

$$\Delta\sigma \rightarrow \Delta e$$

$$\Delta V = 0$$

La compresión retardada representa una reducción del volumen sin cambio en los esfuerzos efectivos. Por lo cual, el concepto de compresión primaria y secundaria no son análogos a los conceptos presentados con anterioridad. En la Figura \* se pueden observar ilustrados ambos conceptos, la compresión retardada representa una condición a largo plazo en donde se tiene una disipación total de excesos de presión de poro.

Las arcillas analizadas en la Figura 3.5, son arcillas de Noruega con relativamente bajos contenidos de agua y menor plasticidad a comparación de las arcillas del Valle de México, sin embargo, los conceptos que utiliza Bjerrum en ese estudio, son útiles en la elaboración de este trabajo.



*Figura 3.5 Concepto de asentamiento instantáneo, delayed, consolidación primaria y secundaria para Bjerrum.*

La arcilla de la Ciudad de México tiene valores muy bajos de permeabilidad, por lo tanto, como en la figura en la compresión instantánea no existe una disipación de presión de poro, se puede decir que inicia al imponer la carga total y presentar deformaciones elásticas. En este trabajo, la acción que ocurre después de la compresión instantánea se llamará comportamiento a largo plazo, los cuales estarán comprendidos por la teoría de la consolidación unidimensional del doctor Karl Terzaghi y la teoría de la consolidación secundaria o viscoelasticidad del doctor Leonardo Zeevaert. En el siguiente capítulo se explicarán

ambas teorías y las consideraciones que se tomarán en cuenta para el cálculo de los asentamientos en suelos sensitivos.

### 3.4 COMPORTAMIENTO DEL SUELO EN EL TIEMPO

Cuando la arcilla se encuentra sometida a una sobrecarga, el esfuerzo de contacto entre las partículas aumenta, produciendo mayor estabilidad en la estructura, aumentando directamente su resistencia al corte y propiedades mecánicas. Cuando se disipa completamente la presión de poro, se inicia el comportamiento visco-intergranular, el cual le brinda un reacomodo adicional que continúa gradualmente, esto, produce una mayor rigidez y resistencia en la arcilla en el paso del tiempo. Cuando una sobrecarga es aplicada en una arcilla la cual ha sido pre-consolidada a cierto nivel de esfuerzos durante un largo tiempo, se presentará un cambio en el esfuerzo crítico inicial debido al reacomodo de la estructura, obteniendo un esfuerzo crítico mayor (Bjerrum, 1967). En 1972 el Dr. Leonardo Zeevaert hace mención de este fenómeno llamándolo hardening o solidificación en la arcilla, en su libro explica un concepto similar al de Bjerrum.

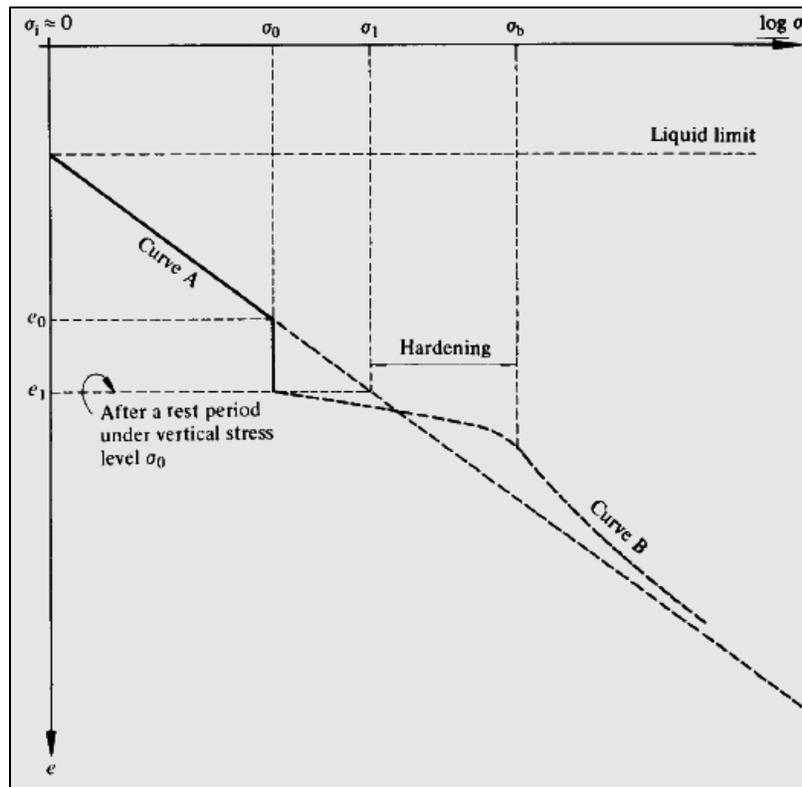


Figura 3.6 Fenómeno de Hardening en suelos sensitivos (Zeevaert, 1983).

En la Figura 3.6 se observa cómo el material adquiere cierta consistencia al disminuir su relación de vacíos, disminuyendo la compresibilidad del material, esto como se mencionó anteriormente se da después de un periodo relativamente extenso de tiempo. En el fenómeno de hardening se evidencia el cambio de estado normalmente consolidado a pre-consolidado después de un tiempo, obteniéndose un esfuerzo crítico en el caso de arcillas normalmente consolidadas o un esfuerzo crítico mayor en el caso de las arcillas pre-consolidadas. En los cuerpos floculentos típicos de las arcillas sensitivas, el esfuerzo crítico define la desintegración del esqueleto estructural, disminuyendo el coeficiente de consolidación de 10 hasta 100 veces en este tipo de suelos(Zeevaert,1972).

Este comportamiento será de importancia en las consideraciones para imponer un estado a largo plazo en el suelo, pues, como ya se dijo, este fenómeno es directamente proporcional al tiempo. Mientras más tiempo esté impuesta la carga el suelo, este tenderá a rigidizarse aún más, teniendo un módulo de rigidez más alto que el inicial, por lo tanto, será menos compresible. Este comportamiento definirá en los siguientes capítulos el uso adecuado de un módulo de rigidez del suelo en el caso a largo plazo.

# **CAPÍTULO IV**

## **ASENTAMIENTOS**

## 4. ASENTAMIENTOS

El cálculo de asentamientos es una de las principales razones por la cual se estudian las propiedades de los suelos, la influencia que tiene en la estabilidad de la estructura es altamente considerada debido a los daños que los asentamientos diferenciales pueden diferir. Estos problemas se pueden ver evidenciados en algunos monumentos históricos como, la torre de pisa en Italia, la pagoda Huzhu en China, entre otros. Sin embargo, en los últimos dos siglos el hombre ha mitigado a una menor escala estos efectos estudiando el suelo.

El método de Winkler (1867) es uno de los métodos más antiguos para el cálculo de asentamientos en el suelo, su teoría se basa en la sustitución de la interfaz suelo-estructura por resortes, teniendo esa similitud con el método empleado en este trabajo de investigación; sin embargo, éste método es simplista al momento de tomar las consideraciones del suelo, a pesar de haber tenido buenos resultados en el último siglo tiene bastantes limitantes, como lo es la ausencia del factor tiempo en el asentamiento, considera el suelo sin ángulo de fricción y sin cohesión aparente. En pocas palabras, el método de Winkler era sólo caracterizado por las constantes de los resortes, obtenidas del cálculo estructural. Con la estrecha y rara relación entre el diseño práctico de ideas “Winklerianas” y el concurrente estado de geo-mecánica, este modelo puede dar excelentes resultados en un caso de un modelo eficiente de subsuelo, por no decir un modelo perfecto (V. Kolář, 1989). Sin embargo, en la práctica en pocas ocasiones tenemos la dicha de trabajar con un suelo que naturalmente es cien por ciento eficiente. Actualmente se hacen cálculos con información puntual de campo, la cual permite con ciertas teorías desarrolladas a lo largo de los dos últimos siglos disminuir las incertidumbres.

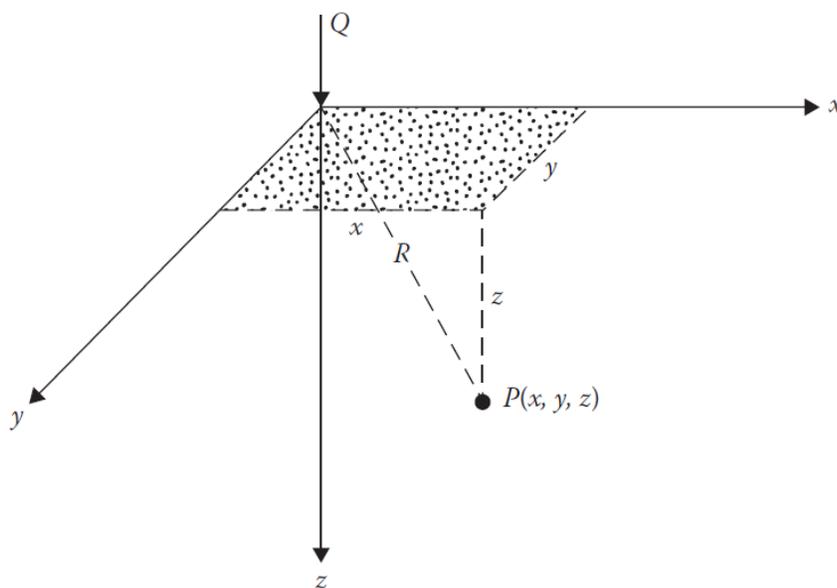
El fenómeno de asentamientos se genera cuando existen esfuerzos, así que, para calcular las deformaciones en los estratos subyacentes, es necesario tener información acerca de las propiedades mecánicas del suelo y como es que se transmite el esfuerzo hasta ese punto. Para ello es necesario saber la presión que hay entre los granos del suelo, esta es llamada presión o esfuerzo efectivo. Durante este capítulo se expondrán fundamentos y el cálculo de los asentamientos enfocados a trabajo de investigación.

### 4.1 DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN LOS SUELOS

Uno de los principales desafíos para el cálculo de las deformaciones de la masa de suelo, se basan en las distribuciones de esfuerzos a la cual está sometido. Es

sabido que el esfuerzo en la superficie no es igual al esfuerzo a cierta profundidad, por tanto, para la determinación de los asentamientos inducidos en un estrato de suelo es necesario cuestionarse qué ocurre en él. Las soluciones aplicadas se encuentran desarrolladas en base a la Teoría de la Elasticidad.

La distribución de los esfuerzos, entonces, recae en la hipótesis principal que la base de la cimentación está apoyada en un material elástico isotrópico, sin embargo, en la realidad se es bien sabido que esta hipótesis carece de certeza. La labor constitutiva del suelo es aproximada a un ente linealmente elástico, por lo tanto, la rigidez puede variar con el esfuerzo de confinamiento (Craig, *et al*, 2012). Al aplicarse una carga se producen esfuerzos que pueden ser determinados con las propiedades elásticas y de compresibilidad del material.



*Figura 4.1 Esfuerzos en un punto P producidos por una carga puntual Q en la superficie (Das, 2014)..*

Ecuación de Boussinesq (1885) en el año 1885 el matemático Joseph Boussinesq teniendo como estandarte la Teoría de la Elasticidad, presentó una de las primeras soluciones a este problema para una carga puntual actuando en la dirección normal a la superficie de un semi-espacio linealmente elástico (Figura 4.1).

Teniendo consideradas en la solución hipótesis simplistas en las que se considera que el medio en que se transmite el esfuerzo, es un medio elástico, por tanto, obedece la ley de Hooke, además, el medio se considera anisótropo y semi-infinito. Otra de las hipótesis consideradas es que la distribución de esfuerzos se

considera independiente del tipo de material del medio y en éste se considera válida una distribución de esfuerzos lineal.

Las ecuaciones obtenidas por Boussinesq en 1885 se basan en la hipótesis de que el esfuerzo se presenta en un espacio elástico semi-infinito. La distribución de esfuerzos en el centro de una carga circular, de radio  $r$ , a una profundidad  $z$ , se encuentra dada por la siguiente ecuación:

$$\sigma_z = q \left[ 1 - \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (4.1)$$

El incremento de esfuerzo radial horizontal está dado por (Yoder, 1959):

$$\sigma_r = \frac{q}{2} \left[ 1 + 2\nu - \frac{2(1 + \nu)z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (4.2)$$

En este trabajo de investigación se analizará la zapata corrida como una figura rectangular uniformemente cuadrada, los cuales se obtienen de la esquina del elemento. Se incluirá el efecto de los esfuerzos laterales causados por la carga en estudio, teniendo entonces un efecto tridimensional en la masa de suelo (Figura 4.2).

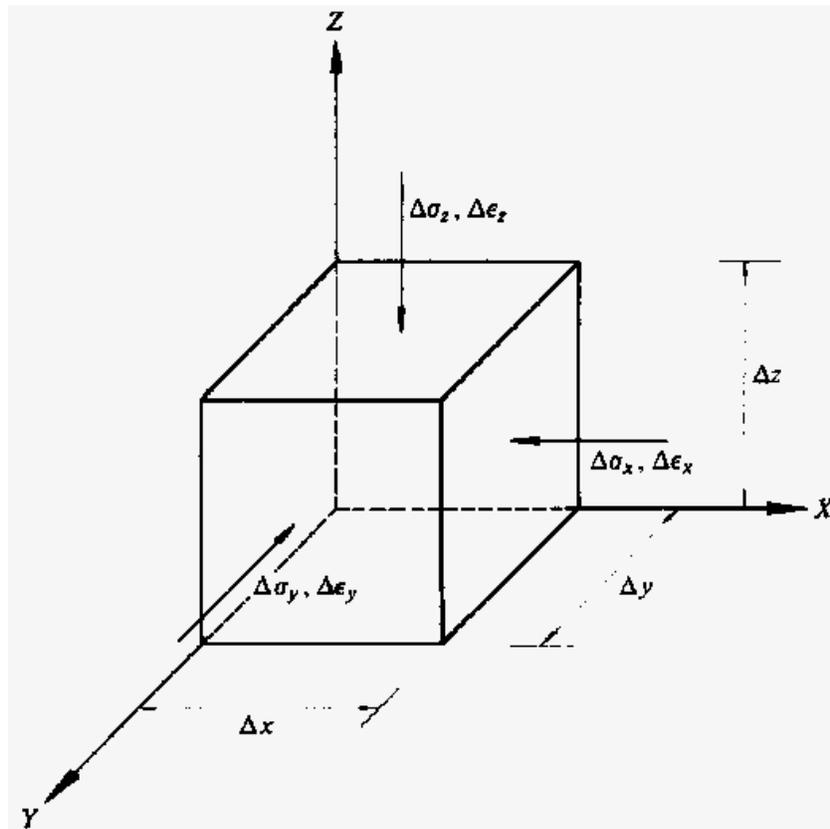


Figura 4.2 Estado de esfuerzos de un elemento (Zeevaert, 1973).

Se proponen las deformaciones laterales como nulas considerando un confinamiento infinito, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_x &= \Delta\varepsilon_y = 0 \\ \Delta\varepsilon_z &\neq 0\end{aligned}\tag{4.3}$$

Una vez habiendo hecho la simplificación anterior, usamos la ecuación formulada por Damy (et al 1985), la cual es para obtener los esfuerzos en la dirección  $z$  para una carga vertical.

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{xyz}{B} + \tan^{-1} \frac{xy}{zB} \right]\tag{4.4}$$

Para la obtención de los esfuerzos laterales debido a un esfuerzo vertical en la superficie se tiene (Dashkó y Kagán,1980):

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{yB}{yz} \right) \right]\tag{4.5}$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yB}{xz} \right) \right]\tag{4.6}$$

En donde,  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las coordenadas donde se encuentra el punto de estudio y  $B$  es una constante que está definida de la siguiente manera:

$$B = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

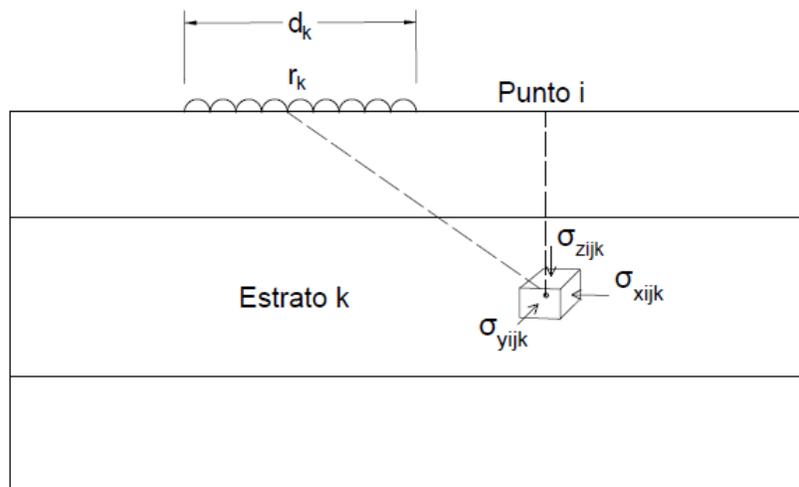
Estas ecuaciones serán utilizadas para la obtención de los esfuerzos en el suelo y estos posteriormente propiciarán a los cálculos para la adquisición de los asentamientos inmediatos producidos mediante el fenómeno de la elasticidad y asentamientos por consolidación primaria y secundaria para las soluciones analíticas. En las siguientes secciones se definirán los diferentes asentamientos que se analizarán en el problema tratado en esta investigación.

#### 4.2 ASENTAMIENTOS INMEDIATOS

En la práctica se han adoptado conceptos de la teoría de la elasticidad, los cuales han tenido buenos resultados en el diseño de cimentaciones. En los suelos sensitivos de naturaleza lacustre se tienen estructuras complejas y una permeabilidad bastante baja, la cual propicia a dividir los cálculos en las deformaciones en un caso elástico-plástico a corto plazo y en un caso visco-elasto-plástico el cual está en función del tiempo. Un suelo en condiciones moderadas de esfuerzos, puede ser estudiado con la teoría de la elasticidad, mientras el suelo no entre en un estado de flujo plástico, no habrá problema en el cálculo elástico. Esto se podría traducir que mientras los esfuerzos en el suelo no excedan su historia de cargas, los cálculos pueden ser suficientemente certeros.

Entonces los desplazamientos verticales pueden ser determinados considerando el cambio de esfuerzos por medio de soluciones aproximadas de la Teoría de la Elasticidad (Zeevaert, 1973). Las deformaciones inmediatas o a corto plazo se obtienen considerando la baja permeabilidad de los suelos lacustres típicos de la Ciudad de México, entonces, sabemos que la deformación que se tiene en el suelo es a volumen constante. No tenemos pérdida de volumen debido a que no se tiene expulsión de agua en la masa de suelo, encontrándose principalmente deformaciones debido al reacomodo de partículas y a la naturaleza elasto-plástica del material.

El cálculo de las deformaciones para este trabajo de investigación estará regido de acuerdo a la tercera ley de Newton, pues al momento de aplicar una carga al terreno de desplante de la cimentación, estas serán iguales en magnitud y sentido contrario a las reacciones del suelo sobre la estructura (Deméneghi, 1996). Por lo tanto, si se aplica una carga  $r_k$  en la superficie de un terreno (Figura 4.3). La presión vertical valdrá  $r_k d_k / a_k$  donde las magnitudes  $d_k$  y  $a_k$  son la longitud y el área en las que actúa dicha carga.



*Figura 4.3 Esfuerzos en las direcciones x, y, z provocados por una carga lineal en la superficie.*

Se calculan los esfuerzos normales ocasionados por una carga. El cual el esfuerzo normal vertical tiene un valor de

$$\sigma_{zijk} = I_{zijk} r_k d_k / a_k \quad (4.7)$$

En donde  $I_{zijk}$  es el valor influencia vertical, este es el esfuerzo vertical en el punto ij producido por una carga unitaria, este valor se obtiene con las ecuaciones obtenidas en la sección posterior.

El esfuerzo normal vertical a causa de las cargas  $r_k$  se representa como la suma de los esfuerzos en las diferentes áreas en la cual estas actúan.

$$\sigma_{zijk} = \sum_{k=1}^{nr} I_{zijk} r_k d_k / a_k \quad (4.8)$$

De igual manera se representan los esfuerzos que actúan horizontalmente

$$\sigma_{xijk} = \sum_{k=1}^{nr} I_{xijk} r_k d_k / a_k \quad (4.9)$$

$$\sigma_{yijk} = \sum_{k=1}^{nr} I_{yijk} r_k d_k / a_k \quad (4.10)$$

La deformación inmediata (a volumen constante) de un elemento de arcilla totalmente saturada se puede calcular con la Ley de Hooke (Deméneghi, 20). Para ello se tiene la siguiente ecuación:

$$\delta_{ij} = (H_j / E_{ij}) [\sigma_{zij} - \nu(\sigma_{xij} + \sigma_{yij})] \quad (4.11)$$

En donde  $E_{ij}$  es el módulo de rigidez no drenado del suelo y  $\nu$  la relación de Poisson.

Sustituyendo las ecuaciones en la siguiente ecuación se obtienen los desplazamientos considerando los valores de influencia verticales y perpendiculares al plano vertical.

$$\delta_{ij} = \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} [I_{zijk} - \nu(I_{xijk} + I_{yijk})] r_k d_k / a_k \quad (4.12)$$

El elemento de los valores de influencia y  $\nu$  se llamará  $I_{ijk}$

$$I_{ijk} = I_{zijk} - \nu(I_{xijk} + I_{yijk}) \quad (4.13)$$

Sustituyendo la ecuación 4.13 en la ecuación 4.12

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{nr} \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} I_{ijk} r_k d_k / a_k \quad (4.14)$$

En el caso de los desplazamientos a corto plazo, de acuerdo al tipo de suelo y condiciones de nula disipación de poro, se considerará una deformación a volumen constante. Por lo tanto, la relación de Poisson será considerada como 0.5, recreando el comportamiento incompresible del agua bajo condiciones no drenadas y a esfuerzos relativamente bajos.

#### 4.2.1 Módulo de elasticidad corto plazo en los suelos

En capítulos anteriores se afirma la idea de que el módulo elástico o módulo de rigidez es la relación entre el esfuerzo y la deformación en un material linealmente elástico. Al graficarse los esfuerzos y las deformaciones, el módulo de rigidez se define como la pendiente de una línea recta, esta línea recta identifica la naturaleza elástico-lineal. Sin embargo, para materiales que no son de naturaleza elástico lineal se obtienen ya sea el módulo de rigidez secante o el módulo rigidez tangente. El módulo tangente se obtiene de un punto de interés o de un grado de esfuerzo de interés. Por otra parte, el modulo secante es la pendiente de la línea del origen de cero a un punto de interés (Figura 4.4).

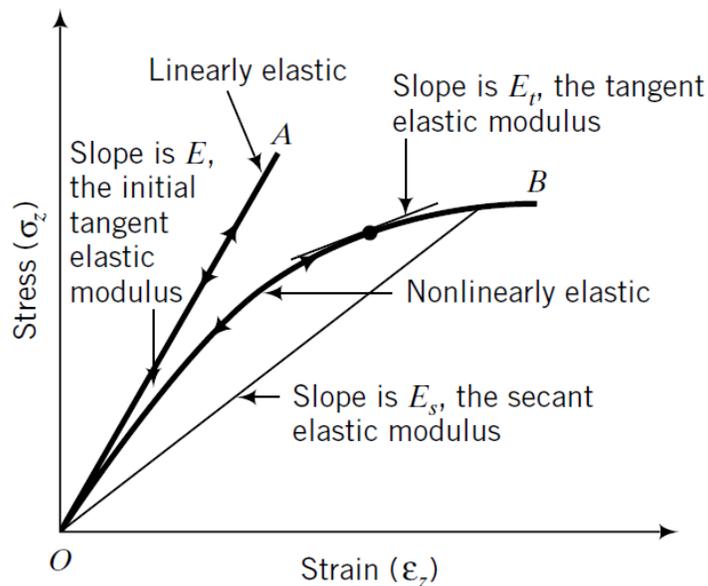
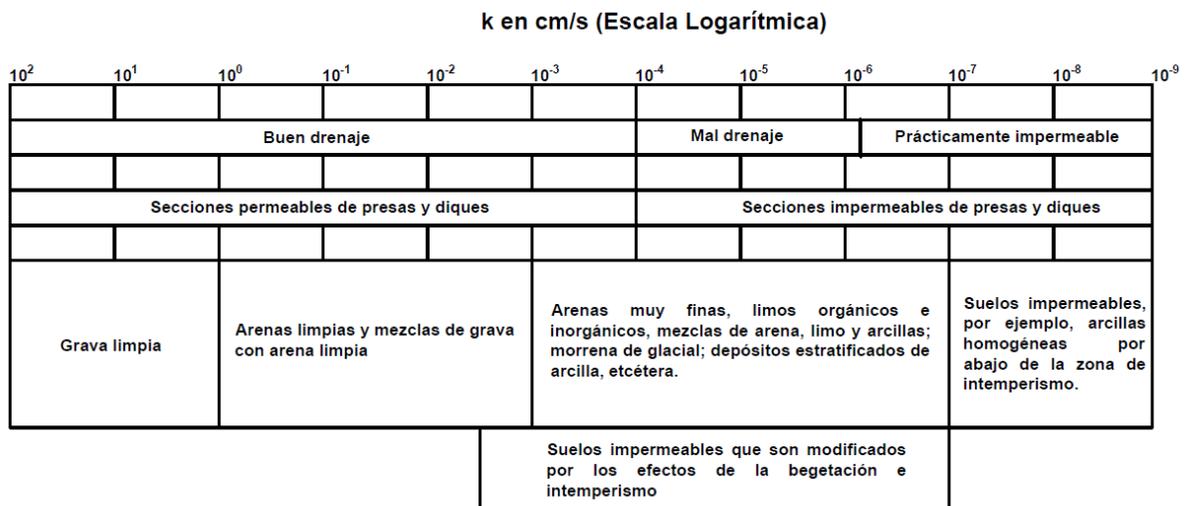


Figura 4.4 Módulo tangente inicial, tangente elástico y secante elástico (Budhu, 2011)

En el caso de la obtención de las deformaciones elásticas se utiliza el módulo no drenado, el cual se obtiene de pruebas triaxiales rápidas con deformación controlada. En la práctica, los profesionales de la ingeniería suelen tomar el módulo secante en la parte media del esfuerzo máximo registrado, este es el llamado  $E_{u50}$  el cual será utilizado en este trabajo de investigación. Esto es debido a que el material no es elástico lineal, pues en el caso de asentamientos inmediatos es considerado para mitigar las incertidumbres de la naturaleza elasto-plástica.

#### 4.3 ASENTAMIENTOS A LARGO PLAZO

El comportamiento a largo plazo de un suelo se debe principalmente a la expulsión de agua en los poros del suelo, por lo tanto, esto estará en función de las características hidráulicas de este. De acuerdo con investigaciones en el último siglo, los suelos que tienen una buena permeabilidad y con una relación de vacíos baja estos asentamientos tienen una menor influencia en los asentamientos, esto es principalmente en los suelos granulares, el flujo de agua en estos suelos propicia a un comportamiento hasta cierto punto más predecible. El caso contrario sucede en los suelos con baja permeabilidad y grandes relaciones de vacíos como en los suelos sensitivos de la Ciudad de México.



*Figura 4.5 Valores de permeabilidad para suelos con granulometría diferente (Juárez y Rico, 1972).*

En los suelos sensitivos (véase Capítulo III) la estructura mineralógica y su composición química favorecen a la absorción del agua, y debido a su cantidad de poros y tamaños microscópicos el drenaje en ellos es poco eficiente, por lo

tanto, considerados casi impermeables. En la figura 4.5 se puede observar los valores de permeabilidad típicos para cierta clase de suelos. De acuerdo con información probabilista, el suelo de la ciudad de México en la zona lacustre tiene una permeabilidad entre  $1 \times 10^{-8}$  a  $1 \times 10^{-9}$  con una relación de vacíos de hasta 8, lo cual representa un comportamiento desfavorable a largo plazo, pues la disipación de la presión de poro se disipa en cuestión de años.

Para obtener la deformación a largo plazo e las arcillas, se procederá utilizando los parámetros elásticos a largo plazo, para ello será necesario definir algunos conceptos antes. Así, entonces, la deformación a largo plazo estará dada por:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E'} \sigma_z \quad (4.15)$$

Donde  $E'$  es el módulo de deformación o rigidez del suelo a largo plazo, el cual, está dado por los esfuerzos efectivos, y  $\sigma_z$  es el incremento de esfuerzo sobre la matriz de suelo.

#### 4.3.1 Esfuerzos efectivos y disipación de presión de poro

La deformación de los suelos es dependiente a la presión a la cual se encuentra sometido, mientras mayor sea la presión sometida en el suelo, mayor será su desplazamiento relativo de partículas. Sin embargo, esta presión puede encontrarse afectada por el exceso de presión que se genera en un suelo saturado en su fase líquida, generando un menor contacto entre partículas. Esta distribución de esfuerzos en la fase sólida se llama presión efectiva.

En la Figura 4.6 se puede ver ilustrada la analogía mecánica que utilizó Karl Terzaghi para el entendimiento de la presión efectiva. Como se puede ver en el inciso (a) cuando se induce una carga externa  $\Delta\sigma_1$  en la muestra de suelo, se registra un exceso de presión de poro  $\Delta u$ . Esto indica que la carga aplicada está siendo tomada por la fase líquida. En la figura (b) se tiene un recipiente el cual se encuentra lleno de un fluido incompresible el cual representa el agua en el suelo y un resorte el cual representa al esqueleto mineral del suelo. Cuando la carga  $W$  se aplica en el recipiente y el pistón se encuentra cerrado, es decir no existe flujo de agua y está confinado, la mayor parte de la carga  $W$  será recibida por el líquido y sólo una pequeña parte será interceptada por el resorte. Generándose un exceso de presión de poro de magnitud similar a la carga  $W$ .

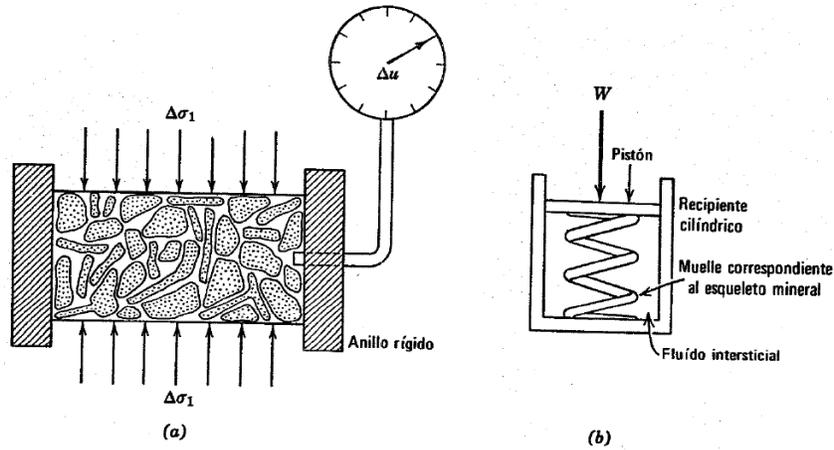


Figura 4.6 (a) Suelo en una prueba de odómetro; (b) modelo de la representación del fenómeno de consolidación (Lambe y Whitman, 2004).

El esfuerzo o presión total se genera con la presión entre partículas más la presión de poro, la cual se genera al no existir drenaje en el medio (Terzaghi, 1943). Esta presión de poro es igual a la presión ejercida en el plano normal, por lo tanto, es una distribución uniforme que afecta el contacto entre partículas. Para suelos saturados los esfuerzos efectivos se definen como:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma' + u \\ &\therefore \\ \sigma' &= \sigma - u \end{aligned} \tag{4.16}$$

Para suelos no saturados los esfuerzos efectivos se definen de la siguiente manera (Bishop et al, 1960):

$$\sigma' = \sigma - u_a + \chi(u_a - u) \tag{4.17}$$

En donde  $u_a$  es la presión del aire,  $u$  es la presión de poro, y  $\chi$  es un factor de grado de saturación. El cual es  $\chi = 0$  y  $\chi = 1$ , para suelos secos y saturados respectivamente.

El principio de los esfuerzos efectivos, es uno de los principios más importantes en la mecánica de suelos. Pues las deformaciones a largo plazo en los suelos sensitivos, se encuentran en función de los esfuerzos efectivos y no de los esfuerzos totales, en cambio las deformaciones a corto plazo en suelos con baja permeabilidad se encuentran en función de los esfuerzos totales, debido a que durante la construcción y recién terminada la aplicación de la carga no hay pérdida de volumen, por lo tanto, no hay disipación del exceso de presión de poro.

#### 4.3.2 Compresión en arcillas sensitivas

En efecto de tener las deformaciones a largo plazo en arcillas sensitivas, se ejecuta mediciones de la compresibilidad, para así tener parámetros de su deformación en el tiempo, siendo necesario someter al suelo a pruebas de laboratorio, tales como el odómetro o el consolidómetro. En estos se labra una muestra de 25.4 mm de grosor y un diámetro de 63.5 mm, se coloca en un anillo el cual confina la muestra evita los desplazamientos laterales, se colocan dos piedras porosas saturadas para cumplir con todas las condiciones para que se cumpla el principio de los esfuerzos efectivos (Figura 4.7). La muestra se somete a cargas las cuales aumentan de acuerdo al criterio del ingeniero.

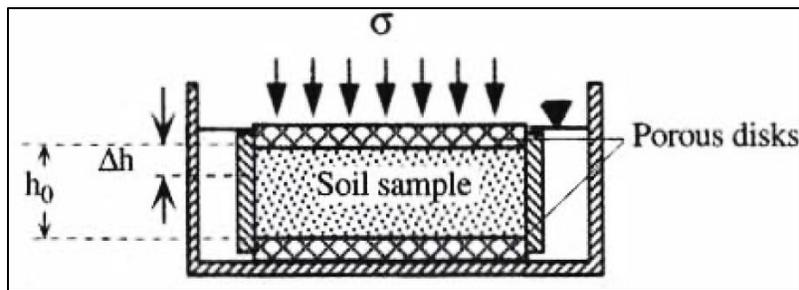


Figura 4.7 Deformación debida a un esfuerzo en una muestra de suelo montada en una prueba de odómetro (Jean-Pierre, 1997).

Debido a la rigidez del anillo las deformaciones laterales están restringida, por lo tanto, la deformación volumétrica es igual a la deformación axial:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h_0} \quad (4.18)$$

La deformación volumétrica también se puede representar como:

$$\varepsilon_v = \frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{\frac{V_0}{V_s} - \frac{V}{V_s}}{\frac{V_0}{V_s}} = \frac{e_0 - e}{1 + e_0} \quad (4.19)$$

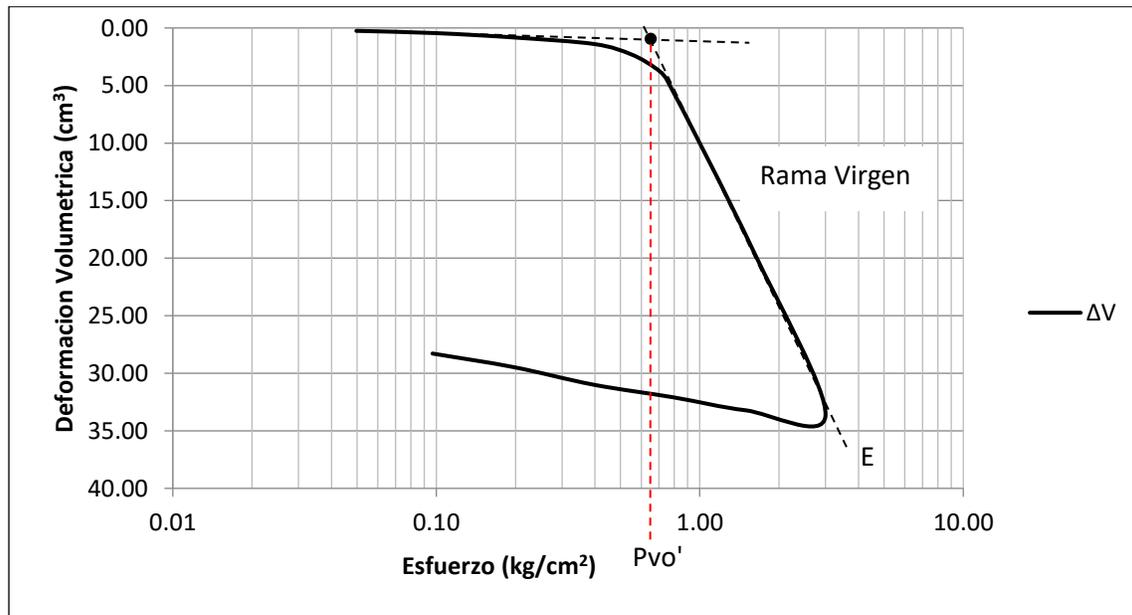
En donde  $e_0$  y  $e$  son la relación de vacíos inicial y final, respectivamente,  $V$  es el volumen presente,  $V_0$  es el volumen inicial, y  $V_s$  es el volumen total de partículas sólidas.

La prueba de consolidación nos proporciona parámetros para el cálculo de los asentamientos a largo plazo, entre ellos el esfuerzo de pre-consolidación, la relación de pre-consolidación, coeficiente de compresibilidad, coeficiente de consolidación, etc. Algunos de estos parámetros serán necesarios para el cálculo de los asentamientos a largo plazo en este trabajo de investigación, en la siguiente sección se definirán.

### 4.3.3 Esfuerzo de pre-consolidación

En una gráfica típica de compresibilidad la parte de arriba se muestra curva, esto es para esfuerzos inicialmente pequeños y cambios de relación de vacíos bajas. Sin embargo, a grandes presiones,  $e$  y  $\sigma'$  tiene una correlación aparentemente lineal. Esto se debe a que el espécimen estaba sujeto a un esfuerzo de campo, es decir, tiene una historia de esfuerzos previa. Al momento de extraer la muestra, debido a la descompresión y la naturaleza elasto-plástica existe un aumento en relación de vacíos, esto implicará que, al momento de ejecutar la prueba, habrá pequeñas variaciones en la relación de vacíos en función a la historia previa de cargas, esto se le llama esfuerzo crítico o esfuerzo de pre-consolidación. Cuando la presión efectiva aumenta y sobre pasa este esfuerzo se tendrá en la gráfica una porción recta, la cual es conocida como la rama virgen.

Los suelos de características sensitivas con una estructura mineralógica flocluenta produce una curva de compresibilidad como la siguiente (Figura 4.8). La presión vertical efectiva crítica  $P_{vo}'$  es la presión última o crítica que soporta el suelo antes de que las partículas colapsen.



*Figura 4.8 Determinación del esfuerzo crítico con el método de Zeevaert (1972) para arcillas sensitivas.*

Mientras la presión inducida en el suelo sea menor que la presión crítica, se garantizará la estabilidad del suelo. Sin embargo, mientras la presión se acerca a la presión crítica, entonces la deformación en el suelo será mayor. La determinación del esfuerzo crítico se encuentra extendiendo las líneas de la

curva, tanto de la rama consolidada, como la rama virgen, en el cruce de ambas, se encuentra el esfuerzo crítico de compresión (Zeevaert, 1972).

#### 4.3.4 Índices de compresión y re-compresión

El índice de compresión  $C_c$  matemáticamente es la pendiente de la rama virgen de la curva de compresión en una prueba de consolidómetro, mientras que el índice de recompresión se representa como la pendiente del tramo de recompresión en la misma prueba.

$$C_c = \frac{e_1 - e_2}{\log(\sigma'_2/\sigma'_1)} \quad (4.20)$$

$$C_s = \frac{e_1 - e_2}{\log(\sigma'_2/\sigma'_1)} \quad (4.21)$$

Los puntos B y C se encuentra ubicados en la rama virgen de la curva de compresibilidad y los puntos D y C representan la sección de expansión al ceder la carga de compresión.

#### 4.3.5 Relación de pre-consolidación.

Cuando se ejecuta una prueba de consolidación, como se ha visto anteriormente, se puede observar que el suelo se encontró sometido a una historia de cargas, el cual le ha dado cierta rigidez y estabilidad en el esqueleto mineralógico del suelo. La relación de pre-consolidación permite determinar el nivel de esfuerzos al que el suelo está sometido, esta se encuentra definida como:

$$OCR = \frac{\sigma'_{zc}}{\sigma'_{zo}} \quad (4.22)$$

Donde,  $\sigma'_{zc}$  es el esfuerzo al cual el suelo se encuentra sometido en la actualidad y  $\sigma'_{zo}$  es el esfuerzo vertical crítico del suelo, es decir, si  $OCR=1$ , se trata de un suelo normalmente consolidado. Se ha observado, que la relación de pre-consolidación disminuye gradualmente hasta llegar al valor que caracteriza a un suelo normalmente consolidado.

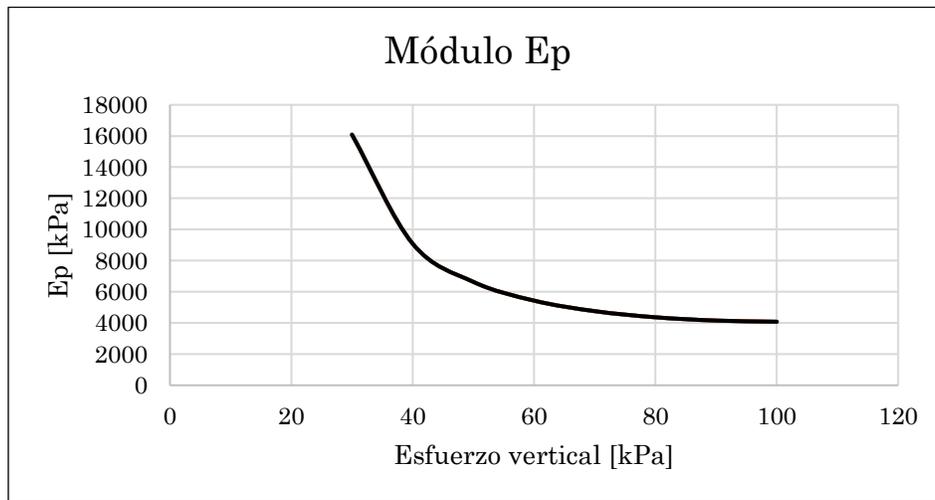
#### 4.3.6 Módulo de deformación a largo plazo o módulo edométrico

Este se obtiene de un ensayo edométrico o de consolidación, de acuerdo al nivel de esfuerzo en el que se esté trabajando, se obtendrá el módulo de deformación. En las pruebas de consolidación como ya se ha visto, se trabaja con esfuerzos efectivos, debido a la presencia de drenaje.

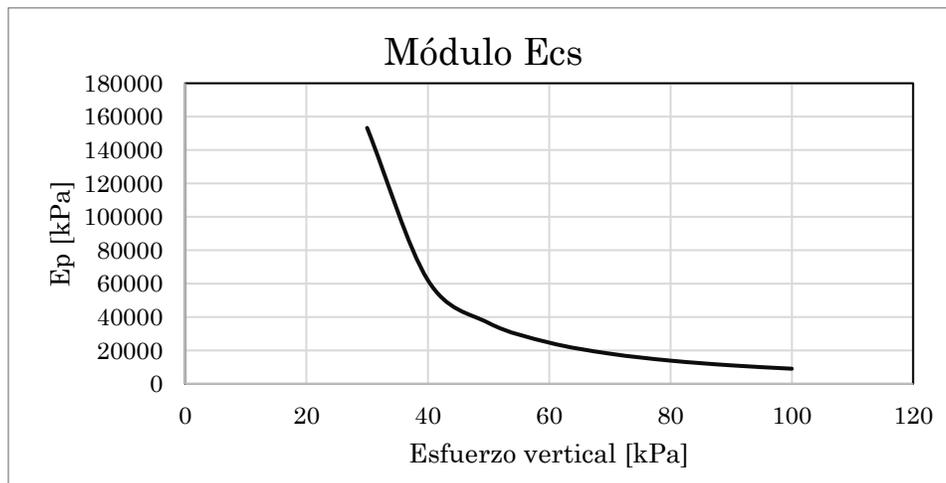
$$E' = \frac{\sigma'_v}{\varepsilon}$$

En arcillas sensitivas como las de la Ciudad de México, el comportamiento del módulo varía de acuerdo al nivel de esfuerzos Figura 4.9 y 4.10.

En la Figura se observa el comportamiento del módulo de deformación con respecto al esfuerzo vertical en una prueba de consolidación en una arcilla sensitiva típica de la ciudad de México, se puede observar que aproximadamente a los 50 kPa se observa un cambio de trayectoria en la curva. Esto sucede cuando el esfuerzo aplicado sobre pasa el esfuerzo crítico y la estructura floculenta colapsa.



*Figura 4.9 Variación del módulo de deformación en consolidación primaria con respecto al esfuerzo vertical en arcillas sensitivas.*



*Figura 4.10 Variación del módulo de deformación en consolidación secundaria con respecto al esfuerzo vertical en arcillas sensitivas.*

#### 4.4 TEORÍA DE LA CONSOLIDACIÓN UNIDIMENSIONAL PRIMARIA

La teoría de la consolidación de Terzaghi ha sido utilizada para el cálculo de los asentamientos por expulsión de agua, esta teoría considera las deformaciones en función del tiempo, el cual, estará en función de la permeabilidad del suelo y de sus propiedades de compresibilidad. Esta teoría está regida por ciertas hipótesis, que se tienen que considerar para funcionar de una manera correcta, las asunciones son las siguientes:

- Los vacíos del suelo se encuentran completamente llenos de agua. Esto quiere decir que el suelo se encuentra en un estado saturado.
- La fase líquida como la fase sólida del suelo se consideran perfectamente compresibles.
- La ley de Darcy es válida, cumpliendo la condición de flujo laminar, el cual se encuentra regido por el gradiente hidráulico.
- El coeficiente de permeabilidad es constante.
- El tiempo de consolidación depende de la baja permeabilidad del suelo.

La arcilla se encuentra perfectamente confinada, por lo tanto, los esfuerzos efectivos y los esfuerzos totales son los mismos en cada punto de la sección horizontal a través de la arcilla. Uno de los parámetros necesarios en la teoría de la consolidación es el coeficiente de compresibilidad, este es la relación de un valor de relación de vacíos inicial a un valor final entre un valor de presión inicial a u valor de presión final.

$$a_v = \frac{e_0 - e}{\bar{p} - \bar{p}'} \text{ cm}^2 / \text{g} \quad (4.23)$$

De acuerdo con las hipótesis se tiene que el flujo de agua en el suelo cumple con la ley de Darcy, debido a que se cumple esta ley, el flujo tridimensional se rige con la ecuación de Laplace:

$$\left( k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \frac{dV}{dt} \quad (4.24)$$

Para el flujo unidimensional, se desechan los primeros dos términos y se conserva el flujo en dirección z, por lo tanto,  $k_z = k$  y la ecuación que define el flujo volumétrico quedaría :

$$k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dx dy dz = \frac{dV}{dt} \quad (4.25)$$

Las diferenciales  $dx dy dz$  representan el volumen de la muestra y la fase porosa del suelo se define por  $(dx dy dz)[e/(1 + e)]$ . Debido que a los elementos

sólidos y líquidos se consideran incompresibles, el cambio de volumen toma la siguiente forma:

$$k \frac{\partial}{\partial t} (dx dy dz \frac{e}{1+e}) = \frac{dV}{dt} \quad (4.26)$$

Debido a que la fase porosa se representa como  $r (dx dy dz)[e/(1+e)]$ , en la Ecuación 4.26 se puede hacer la siguiente formulación  $[(dx dy dz)/(1+e)](\partial e/\partial t)$ . Eliminando los términos diferenciales que representan el elemento de volumen  $(dx dy dz)$  y haciendo una equivalencia con la ecuación 4.25 se obtiene:

$$k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (4.27)$$

Para que el flujo de agua se lleve a cabo debe de haber una presión, esta presión será el exceso de presión de poro  $u$ ; Por lo tanto  $h = \Delta u/\gamma_w$ , tomando en cuenta esta condición:

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (4.28)$$

Debido a que se trata de un suelo saturado y no hay disipación de poro en ese momento, entonces  $de = du$ . En la curva de compresibilidad obtenidas en las pruebas de consolidación la pendiente de la parte lineal se encuentra dada por  $a_v = \Delta e/\Delta p \therefore a_v = de/dp$ , llamando a este elemento como coeficiente de compresibilidad. Con lo dicho, la Ecuación 4.28 se puede escribir como:

$$\left[ \frac{k(1+e)}{a_v \gamma_w} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.29)$$

En el cual el elemento que se encuentra entre corchetes, es conocido como el coeficiente de consolidación,  $c_v$ :

$$c_v = \frac{k(1+e)}{a_v \gamma_w} \quad (4.30)$$

De la Ecuación 4.29 también podemos encontrar otra relación, este es conocido como coeficiente volumétrico  $m_v$  (este se obtiene introduciendo la relación de vacíos inicial).

$$m_v = \frac{a_v}{1+e_0} \quad (4.31)$$

De acuerdo a las unidades por las cuales se rige el coeficiente volumétrico, se podría, este se puede definir también, como la inversa del módulo de deformación o módulo odométrico:

$$m_v = \frac{1}{E'} \quad (4.32)$$

La ecuación de la teoría de la consolidación unidimensional primaria, se escribe de la siguiente manera:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.33)$$

En la Ecuación 4.33 se tiene una ecuación diferencial parcial que cuenta con dos variables, las cuales son el tiempo  $t$  y la posición  $z$ . La variable de interés en esta ecuación es el exceso de presión de poro,  $u$ , el cual está en función de la posición y el tiempo. La siguiente expresión numérica, representa la condición en la cual el suelo se encuentra totalmente drenado:

$$u(0, t) = u(H, t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0 \quad (4.34)$$

En donde  $H$  es el espesor del estrato analizado. Las condiciones iniciales, es decir cuando existe una presión de poro, se representa de la siguiente manera:

$$u(z, 0) = u_i \quad \text{para } 0 < z < H \quad (4.35)$$

La solución para el sistema de ecuaciones 8, 9 y 10 es la siguiente, la cual resuelve la disipación de poro en función del tiempo y la posición:

$$u(z, t) = u_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin \left[ (2n+1)\pi \frac{z}{H} \right] e^{-(2n+1)^2 \pi^2 T_v / 4} \quad (4.36)$$

En el cual se agrega un parámetro, un factor de tiempo adimensional el cual aplica cuando las condiciones se asemejan a las de la prueba de consolidación, es decir, las fronteras inferior y superior existe drenaje.

$$T_v = \frac{c_v t}{H/2} \quad (4.37)$$

#### 4.5 TEORÍA DE CONSOLIDACIÓN SECUNDARIA

Los suelos creados en un ambiente lacustre, en depósitos de sal o en ambientes marinos, son caracterizados por contar con sedimentos altamente compresibles y como se ha mencionado con baja permeabilidad. Cuando se impone una carga a estos suelos, se lleva a cabo el proceso de consolidación, el cual implica una retardación de las deformaciones elasto-plásticas y posteriormente se lleva a cabo el comportamiento regido por la viscosidad intergranular. Estas condiciones se observan en la arcilla sensitiva de la Ciudad de México.

El Dr. Leonardo Zeevaert (1986) se encargó de estudiar el comportamiento fenomenológico en suelos bastante compresibles. Teniendo como base el modelo

reológico de la teoría de la consolidación primaria de Terzaghi y un segundo modelo reológico el cual representa la labor de la viscosidad intergranular llamado Unidad Z, ambos representan al suelo en condiciones confinadas, trabajando con las siguientes hipótesis:

1. El suelo se está estructurado con dos modelos reológicos diferentes, los cuales representan una estructura primaria y el otro una estructura secundaria.
2. La estructura primaria está formada por granos estructurando un esqueleto el cual es capaz de tomar los esfuerzos efectivos. De acuerdo con la teoría de Terzaghi esto se dará cuando la disipación de presión de poro se lleve a cabo. Los poros de la estructura primaria se encuentran saturados y la deformación volumétrica es de naturaleza elasto-plástica.
3. La estructura secundaria está constituida por suelos muy finos, formando grumos entre los granos de mayor tamaño, acomodándose continuamente a través de la estructura primaria. Los poros de la estructura secundaria se encuentran saturados, los cuales serán drenados bajo la aplicación de una carga en el proceso de consolidación. Debido a que la estructura está conformada por granos minerales de arcillas de un tamaño microscópico, el desplazamiento relativo entre estos se considera un fenómeno de alta viscosidad debido a la absorción de agua entre las láminas de mineral de arcilla.

Entonces la deformación volumétrica total la podríamos considerar como la suma aritmética de la deformación volumétrica debido a la consolidación primaria y a la consolidación secundaria

$$\Delta\epsilon_v = \Delta\epsilon_{v1} + \Delta\epsilon_{v2} \quad (4.37)$$

En la Figura 4.11 se puede analizar los dos modelos reológicos. El primero de ellos, la unidad Kelvin, está compuesta de un elemento de resistencia simulado por un resorte en paralelo con un amortiguador el cual tiene un líquido que representa el flujo de agua en la estructura primaria. La unidad Z se encuentra formada por un elemento de alta viscosidad que va incrementando su viscosidad, dicho, representa la compresión entre los granos de arcilla, este se encuentra en paralelo con un amortiguador con un flujo lineal el cual representa el retraso de la deformación volumétrica debido al fluido en la estructura secundaria. Si ambos modelos se combinan obtenemos un modelo que se adapta al comportamiento del suelo.

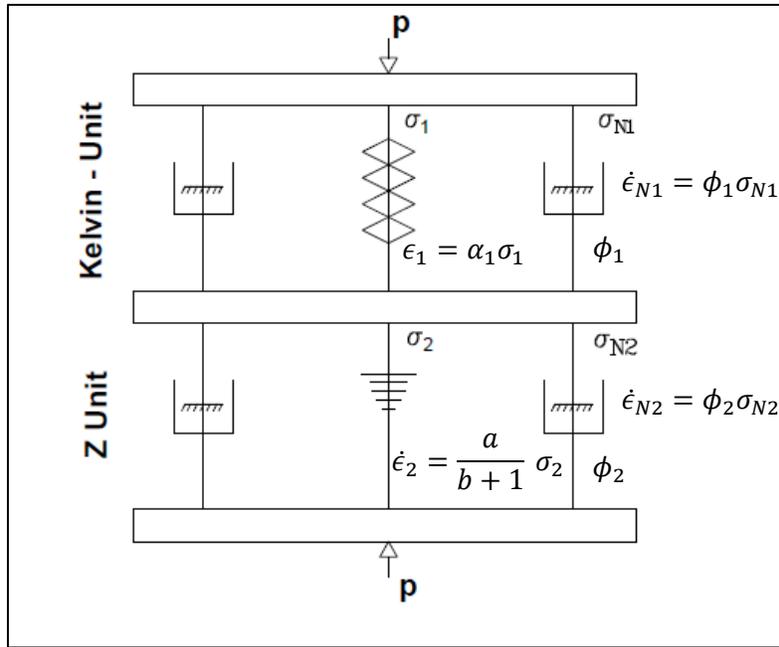


Figura 4.11 Unidades reológicas que representan el fenómeno de viscosidad inter-granular (Zeevaert, 1986).

#### 4.5.1 Unidad Z

De acuerdo con las condiciones en la Figura (reológico). Se establece una condición de equilibrio con los elementos que conforman el modelo reológico:

$$\Delta p = \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_{N2} \quad (4.38)$$

Las deformaciones volumétricas se considerarán de la siguiente forma:

$$\Delta \epsilon_{v2} = \Delta \epsilon_2 = \Delta \epsilon_{N2} \quad (4.39)$$

Por lo tanto, las relaciones entre esfuerzo y deformación de líquidos newtonianos con una fluidez no lineal y lineal se presentan como en las siguientes ecuaciones, respectivamente:

$$\Delta \epsilon_2 = \frac{a}{b+t} \Delta \sigma_2 \quad (4.40)$$

$$\Delta \epsilon_{N2} = \phi_2 \Delta \sigma_{N2} \quad (4.41)$$

En donde  $a$ ,  $b$  y  $\phi_2$  son parámetros constantes y  $t$  es el parámetro del tiempo. Al combinar las ecuaciones, entonces, se obtiene la ecuación diferencial de la unidad Z:

$$\Delta \epsilon_{v2} = \frac{a}{b + a/\phi_2 + t} \cdot \Delta p \quad (4.42)$$

Cuando la Ecuación 4.42 integra y se aplica incremento de una carga unitaria esta quedaría como:

$$\Delta\epsilon_{v2} = a\Delta p \ln \frac{b + a/\phi_2 + t}{b + a/\phi_2} \quad (4.43)$$

La presión que será recibida por el amortiguador se encuentra dada por la ecuación 123, por lo tanto, esta presión será:

$$\Delta\sigma_{N2} = \frac{1}{\phi_2} \Delta\dot{\epsilon}_{N2} \quad (4.44)$$

Por lo tanto:

$$\Delta\sigma_{N2} = \frac{a/\phi_2}{b + a/\phi_2 + t} \cdot \Delta p \quad (4.45)$$

Para un  $t = 0$ ,  $\Delta\sigma_{N2} = \Delta p$ , obteniendo  $b = 0$  y la deformación volumétrica como:

$$\Delta\epsilon_{v2} = 2.31 a\Delta p \log\left(1 + \frac{a}{\phi_2} \cdot t\right) \quad (4.46)$$

Debido a que la representación reológica se encuentra formada en paralelo, se considera la suma de las unidades Z, las cuales están representadas por la Ecuación 4.46, entonces se tiene la siguiente formación:

$$\Delta\epsilon_{v2} = 2.31 \bar{\alpha}\Delta p \log\left\{1 + \frac{\bar{\phi}_2}{\bar{\alpha}} \frac{\alpha}{\phi_1} \left(\frac{\phi_1}{\alpha}\right) \cdot t\right\} \quad (4.47)$$

De acuerdo con Terzaghi, se tiene que:

$$\alpha = m_v \quad \text{y} \quad \phi_1/\alpha = 2C_v/H^2 \quad (4.48)$$

De acuerdo con el Dr. Zeevaert,  $2.31 \bar{\alpha} = m_t$ , entonces sustituyendo en la Ecuación 4.47 se obtiene:

$$\Delta\epsilon_{v2} = m_t\Delta p \log\left\{1 + 4.61 \frac{m_v}{m_t} \frac{\bar{\phi}_2}{\phi_1} \left(\frac{C_v t}{H^2}\right)\right\} \quad (4.49)$$

El término  $C_v t/H^2$ , de acuerdo con la teoría de Terzaghi es conocido como el factor tiempo  $T_v$ . El término  $m_t/m_v = \beta$ , entonces con estas asunciones, se tiene:

$$\Delta\epsilon_{v2} = m_t\Delta p \log\left\{1 + \frac{4.6 \bar{\phi}_2}{\beta \phi_1} T_v\right\} \quad (4.50)$$

Considerando las variables  $\beta$ ,  $\bar{\phi}_2$  y  $\phi_1$  como constantes promedios de un nivel de esfuerzos específico de  $p + \Delta p/2$  y llamando los términos:

$$\frac{4.6 \bar{\phi}_2}{\beta \phi_1} = \xi \quad (4.51)$$

Es obtenida la ecuación que representa la labor deformación volumétrica y tiempo en la fase visco-elástica (Ecuación 4.52).

$$\Delta\epsilon_{v2} = m_t \cdot \Delta\sigma_z \log(1 + \xi T_v) \quad (4.52)$$

$$m_t = \frac{C_t}{2H \Delta\sigma_z} \quad (4.53)$$

Donde,  $\xi$  es un parámetro adimensional y se puede determinar con curvas obtenidas en pruebas de odómetro.

El valor  $C_t$  es determinado seleccionando dos puntos en un ciclo de escala logarítmica en la parte recta de la curva, por lo tanto:

$$\delta_2 - \delta_1 = C_t \log(T_{v2}/T_{v1}) \quad (4.54)$$

Al momento de tomar un ciclo de la escala logarítmica entonces  $T_{v2}/T_{v1} = 1$ , por lo tanto:

$$C_t = \delta_2 - \delta_1 \quad (4.55)$$

#### 4.5.2 Estado de esfuerzos en la consolidación secundaria

La Ecuación 4.51 será sometida a cambios de acuerdo al nivel de esfuerzos en el cual se esté diseñando. El Dr. Leonardo Zeevaert propone una correlación entre ambas condiciones en las pruebas de odómetros. En la Figura 4.12 observamos una configuración típica de una curva obtenida de una prueba de odómetro, esta cuenta con una historia previa de cargas, contando con un esfuerzo crítico, esta curva es típica de un suelo pre-consolidado. En este tipo de suelos una vez que la presión aplicada al suelo sobrepasa los niveles de esfuerzo crítico se producirá el colapso de la estructura mineralógica del suelo, produciendo grandes deformaciones.

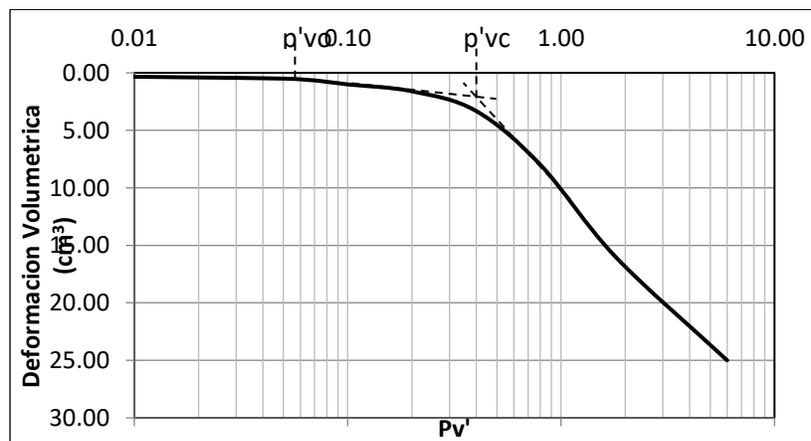


Figura 4.12 Esfuerzo de consolidación y esfuerzo crítico.

En los suelos sensitivos como los de la Ciudad de México, no es muy recomendable utilizar esfuerzos muy altos en los suelos. En la práctica el ingeniero busca trabajar a un nivel bajo de compresión buscando que el suelo se encuentre en la porción relativamente recta de la curva de compresión, por abajo del esfuerzo crítico, esto, evitando tener grandes deformaciones. Su teoría se basa en distintas soluciones de acuerdo al nivel de esfuerzos en que se esté trabajando de acuerdo a la compresibilidad del suelo.

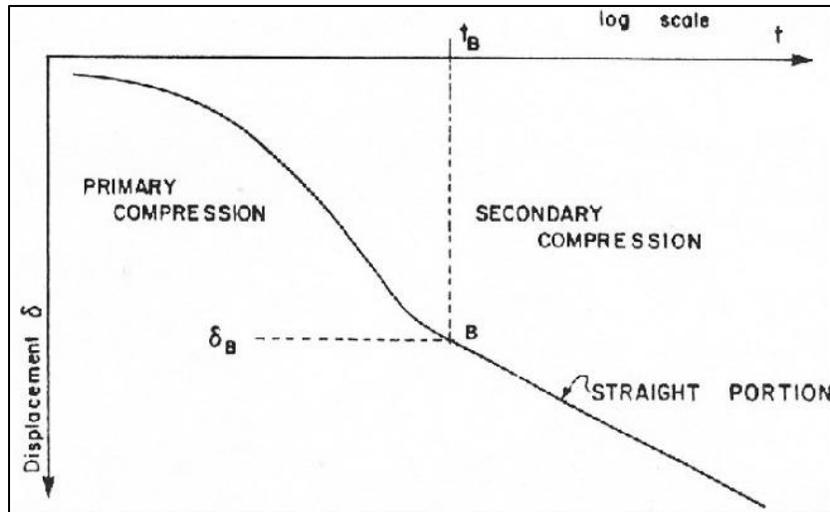


Figura 4.13 Curva Tipo I (Zeevaert, 1986).

El Dr. Zeevaert propone tres tipos de curvas de acuerdo al nivel de esfuerzos, sin embargo, en la práctica se utiliza la curva Tipo I para los esfuerzos que están por debajo del esfuerzo crítico. Para esfuerzos bajos de re-compresión la curva toma la siguiente forma Figura 4.13. A partir del punto B la disipación de presión de poro ya se ha efectuado, convirtiéndose en una línea recta la cual identifica el fenómeno de la viscosidad intergranular.

La ecuación que rige las deformaciones debido a la consolidación primaria y secundaria en este estado de esfuerzos es la siguiente:

$$\delta = \delta_v F(T_v) + C_t \log(1 + 5T_v) \quad (4.56)$$

El primer término de la suma de la ecuación, representa la deformación vertical en el fenómeno de consolidación primaria, el cual se rige por la elasto-plasticidad.

# **CAPÍTULO V**

## **ANÁLISIS ESTRUCTURAL**

## 5. ANÁLISIS ESTRUCTURAL

### 5.1 Método Matricial

Los métodos de análisis matricial, son métodos formulados en el siglo XIX, estos se encargan de organizar la información estructural en forma de matrices. Estos métodos permiten todas las relaciones entre las distintas partes de una estructura, las cuales dan lugar a un sistema de ecuaciones con un gran número de variables, las simplificaciones que se toman en cuenta, permiten que no se ignore información relevante. La ecuación de la estructura se da en forma de matriz permitiendo que su planteamiento y solución sean ejecutados en un ordenador.

En este capítulo se desarrollará uno de los métodos de Análisis Matricial (Método de las Rigideces) aplicado a estructuras bidimensionales, estas a su vez se pueden discretizar con vigas o barras el cuál será útil para alcanzar los objetivos de este trabajo de investigación.

En el análisis estructural matricial existen dos métodos que son genéricos en mecánica de medio continuo de sólidos deformables, el método utilizado dependerá del orden en que se vaya a aplicando. Las ecuaciones que se tienen en la solución son las ecuaciones de equilibrio, las de comportamiento y las de compatibilidad. Cuando se parte de las ecuaciones de equilibrio para incorporar estas en las ecuaciones de comportamiento y finalmente el resultado en las ecuaciones de compatibilidad estamos hablando del método de flexibilidad. Si el procedimiento es inverso, se utiliza el método de rigideces.

### 5.2 Método de Rigideces

El método de las rigideces está diseñado para primeramente determinar los desplazamientos en ciertos puntos de la estructura y luego las fuerzas internas. Por ejemplo, si se considera un cuerpo elástico, sometido a fuerzas  $P$  (Figura 5.1), los desplazamientos en el punto  $i$  ocasionados por la fuerza  $P_i$  estarán representados por  $\Delta_i$ . Si en esta condición el principio de linealidad se cumple, el trabajo que realizaron estas fuerzas durante la deformación, está estipulado por:

$$U = \frac{1}{2} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + \dots + P_n \Delta_n) \quad (5.1)$$

Si se introduce una variación diferencial a uno de los desplazamientos, en este caso a  $\Delta_1$ , entonces la variación de la energía de deformación será:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{1}{2} \left[ P_1 + \left( \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} \Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \Delta_n \right) \right] \quad (5.2)$$

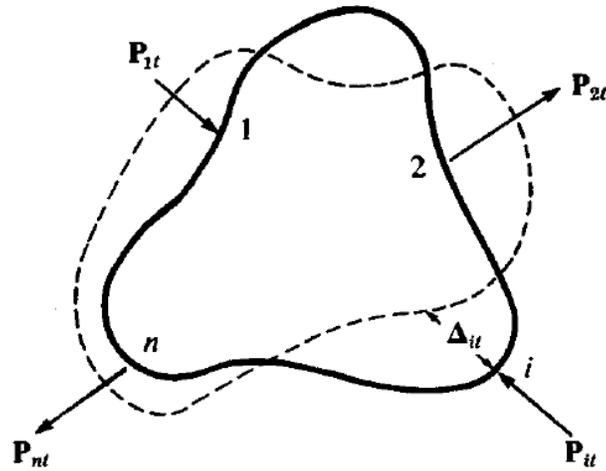


Figura 5.1 Elemento deformado debido a aplicación de fuerzas  $P$ .

Con el primer teorema de Castigliano se obtiene:

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial \Delta_1} \quad (5.3)$$

Si igualamos las Ecuaciones 5.2 y 5.3 de manera general se obtendría:

$$P_i = \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} \Delta_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \Delta_n \quad (5.4)$$

Tomando en consideración cada punto se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_1} \\ \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_2} \\ \frac{\partial P_1}{\partial \Delta_n} & \frac{\partial P_2}{\partial \Delta_n} & \frac{\partial P_n}{\partial \Delta_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

En un elemento de longitudes  $i$  y  $j$ , la representación matemática de  $\partial P_i / \partial \Delta_j$  representa la variación de  $P_i$  con respecto a  $\Delta_j$  considerando que los demás desplazamientos  $\Delta$  permanecen constantes. Por otro lado, físicamente representa la fuerza necesaria en el punto  $i$  para producir un desplazamiento unitario en el punto  $j$ . Si la deformación  $\Delta_1$  introducida en el objeto es igual a la unidad, el fenómeno se podría ilustrar como en la Figura 5.2. Entonces así designando los valores de  $\partial P_i / \partial \Delta_j$  por  $K_{ij}$ , entonces la Ecuación 5.5 quedaría como la ecuación 5.6.

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{2n} \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

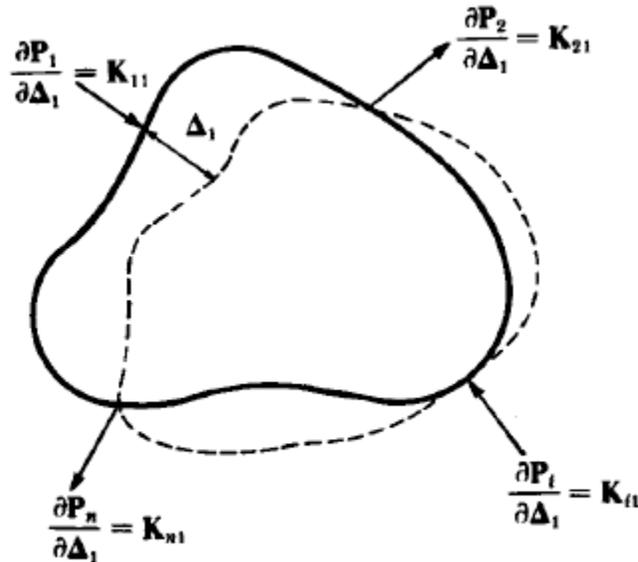


Figura 5.2 Desplazamiento introducido en el elemento produciendo fuerzas.

La matriz de rigideces de una estructura, se genera por las matrices de rigideces de los elementos individuales de la estructura. Esto implicará que los desplazamientos unitarios sean introducidos uno cada vez en cada nudo en la dirección en cada eje coordenado y con esto, el cálculo de las fuerzas necesarias en cada nudo.

### 5.3 Formación de la matriz de rigidez de la estructura.

La rigidez de un elemento estructural se entiende como la magnitud de la fuerza requerida para producir cierta deflexión (Kardenstuncer, 1975). El método de rigideces trabaja con la hipótesis afirmando que la estructura es lineal, por lo tanto, todos los desplazamientos y cada uno de los esfuerzos son funciones lineales de las cargas. Otra de las hipótesis es que se trabaja con pequeñas deformaciones, las barras son rectas y con sección constante. Este método consta de las siguientes etapas (Beaufait, *et al.*, 1970):

- La estructura se empotra y se determinan los elementos mecánicos.

- Los nudos de la estructura se liberan y se obtienen los elementos mecánicos producto de los desplazamientos lineales y angulares.
- Las condiciones de equilibrio se tienden a establecer en cada uno de los puntos donde se tengan desplazamientos diferentes a cero.
- Teniendo las ecuaciones de equilibrio, entonces se resuelven y se obtienen los desplazamientos que sufrió la estructura.
- El último paso es la obtención de los elementos mecánicos en los puntos (nudos) en estudio de la estructura.
- El equilibrio de la estructura se encuentra definido por la siguiente ecuación:

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (5.7)$$

En donde  $\underline{K}$  es la matriz de rigideces de la estructura,  $\underline{\delta}$  el vector de desplazamientos,  $\underline{P}^e$  es el vector de cargas de empotramiento y  $\underline{P}^c$  se conoce como el vector de cargas concentradas.

Para estudiar una estructura por el método de rigidez, se dispone de tres ecuaciones las cuales deben de cumplirse, estas son: Ecuaciones de compatibilidad, ecuaciones constitutivas y ecuaciones de equilibrio.

La función de las ecuaciones de compatibilidad es relacionar las deformaciones de las barras con los desplazamientos de los nudos. Al introducir estas ecuaciones, en las ecuaciones constitutivas se relacionan las fuerzas en los extremos de las barras con desplazamientos nodales. Introduciendo estas ecuaciones en las ecuaciones de equilibrio se obtiene un conjunto de fuerzas nodales que están en función de desplazamientos, estas son ecuaciones de equilibrio de la estructura en función de desplazamientos.

Este procedimiento se lleva a cabo en barras o vigas por separado, sin embargo, la matriz de rigideces de toda una estructura se puede obtener mediante la suma de las matrices de todas de las barras o vigas, llamándose matriz global.

La matriz de rigideces que relaciona fuerzas y desplazamientos en un extremo del elemento puede obtener en algunos casos seis filas y seis columnas, estos sin considerar las torsiones. Se evalúa las rigideces de los elementos individualmente en el sistema de coordenadas general, introduciendo desplazamientos en la dirección de cada eje de coordenadas y se calculan las fuerzas desarrolladas en los extremos del elemento. Para obtener la matriz de

rigidez y los vectores de carga de empotramiento a una barra con apoyos continuos, se considera una barra con una carga uniformemente repartida (Figura 5.3).

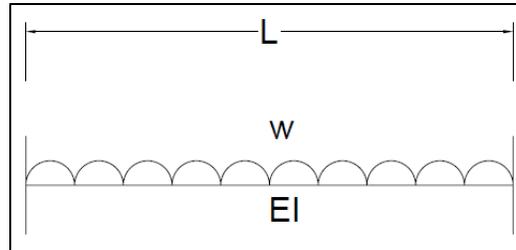


Figura 5.3 Barra con rigidez  $EI$  con una carga distribuida.

Antes de continuar, es necesario definir la convención de signos en la barra analizada, por ello se debe de considerar lo siguiente en el diagrama de desplazamientos (Figura 5.4a):

- Los giros se consideran positivos en sentido anti-horario
- Los desplazamientos verticales son positivos si van hacia abajo
- Desplazamientos horizontales son positivos si van hacia la izquierda

En los elementos mecánicos la convención de signos es la siguiente (Figura 5.4b):

- Los momentos flexionantes son positivos en sentido horario
- Los cortantes verticales son positivos si van hacia arriba
- Los cortantes horizontales son positivos si van a la derecha

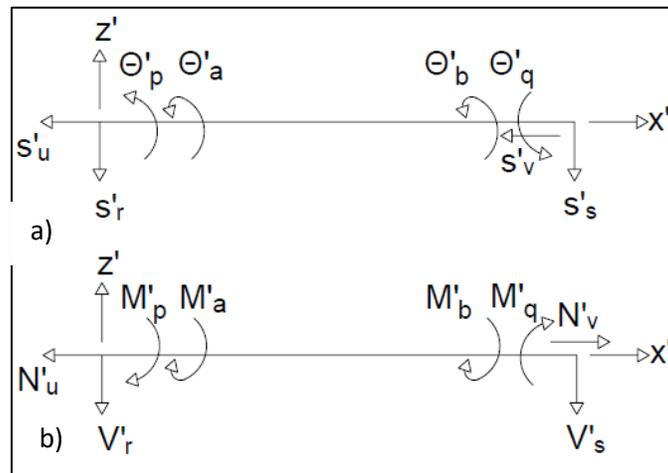


Figura 5.4 Convención de signos en el análisis estructural: método de rigideces.

Una vez definida la convención de signos, hay que establecer el sistema de ecuaciones, las cuales estarán dadas por ecuaciones de equilibrio. Al aplicar un

giro  $\theta'_p$  en el extremo izquierdo de la barra, se producen elementos mecánicos que son producto de este giro (Figura 5.5a). Posteriormente se da un giro  $\theta'_q$  en el extremo derecho de la barra produciéndose elementos mecánicos en el elemento estructural (Figura 5.5b). En las figura 5.5c y 5.5d se puede observar los elementos mecánicos producidos por un desplazamiento vertical en el nodo izquierdo  $\delta'_r$  y en el nodo derecho  $\delta'_s$ .

Para obtener los elementos mecánicos de los desplazamientos horizontales (Figura 5.5e y 5.5f), se imponen desplazamientos en los nudos izquierdo  $\delta'_u$  y derecho  $\delta'_v$ . Por último, para considerar los efectos de torsión, se obtienen los elementos mecánicos que produce una torsión  $\theta'_a$  en el extremo izquierdo de una barra (Figura 5.5g) y una torsión  $\theta'_b$  en el extremo derecho de la misma barra.

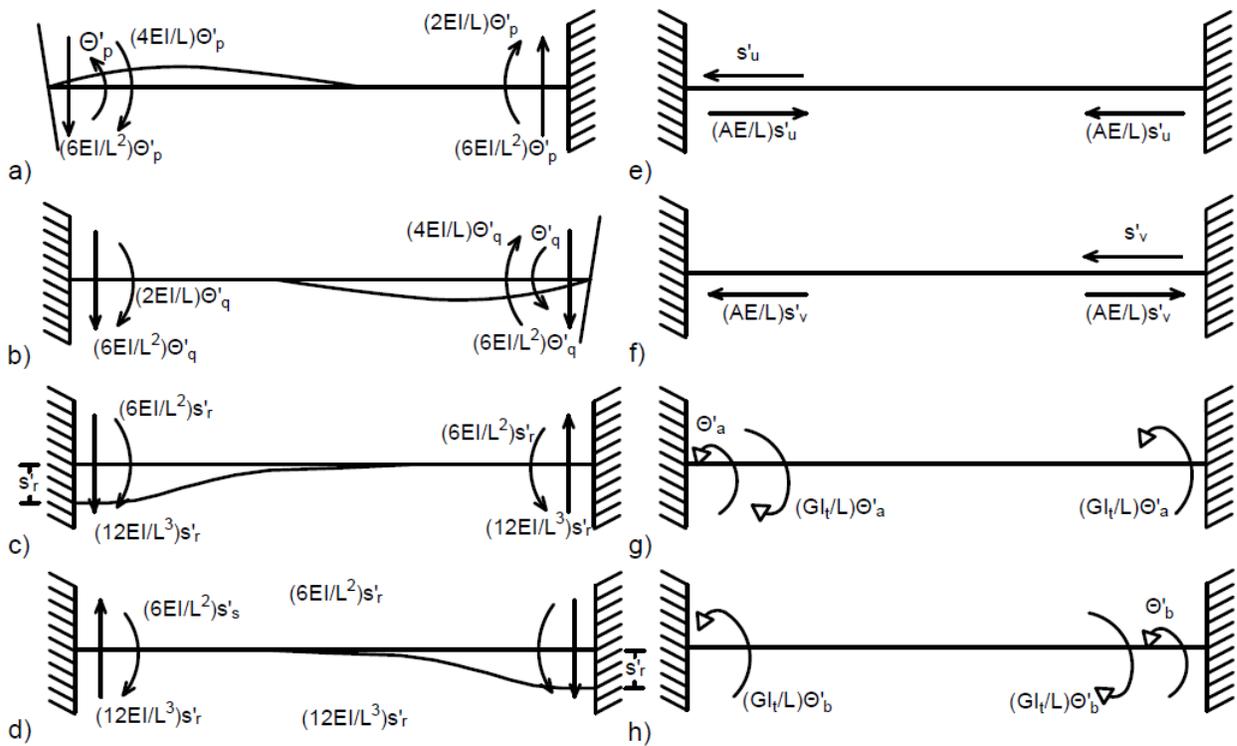


Figura 5.5 Fuerzas al aplicar una deformación; giro (a y b); desplazamiento (c y d); acortamiento (e y f); torsión (g y h).

Los elementos mecánicos que están en la barra están representados por las Ecuaciones 5.8a a la 5.8h.

Las ecuaciones de los elementos mecánicos para un elemento de barra con ocho grados de libertad quedarían de la siguiente forma:

$$M'_p = wL^2/12 + (4EI/L)\theta'_p + (2EI/L)\theta'_q - (6EI/L^2)\delta'_r + (6EI/L^2)\delta'_s \quad (5.8 \text{ a})$$

$$M'_q = -wL^2/12 + (2EI/L)\theta'_p + (4EI/L)\theta'_q - (6EI/L^2)\delta'_r + (6EI/L^2)\delta'_s \quad (5.8 \text{ b})$$

$$V'_r = -wL/2 - (6EI/L^2)\theta'_p - (6EI/L^2)\theta'_q + (12EI/L^3)\delta'_r - (12EI/L^3)\delta'_s \quad (5.8 \text{ c})$$

$$V'_s = -wL/2 + (6EI/L^2)\theta'_p + (6EI/L^2)\theta'_q - (12EI/L^3)\delta'_r + (12EI/L^3)\delta'_s \quad (5.8 \text{ d})$$

$$N'_u = (AE/L)\delta'_u - (AE/L)\delta'_v \quad (5.8 \text{ e})$$

$$N'_v = -(AE/L)\delta'_u + (AE/L)\delta'_v \quad (5.8 \text{ f})$$

$$M'_a = (GI_t/L)\theta'_a - (GI_t/L)\theta'_b \quad (5.8 \text{ g})$$

$$M'_b = -(GI_t/L)\theta'_a + (GI_t/L)\theta'_b \quad (5.8 \text{ h})$$

Para los elementos mecánicos que se producen por torsión en una viga de sección rectangular, el momento polar de inercia se evalúa de manera aproximada con la siguiente ecuación (Beaufait *et al*, 1970):

$$I_t \cong \frac{hb^3}{3} \left[ 1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.052 \left( \frac{b}{h} \right)^5 \right] \quad (5.9)$$

Los elementos mecánicos están dados por:

$$\underline{P}_m = \underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e \quad (5.10)$$

Las Ecuaciones 5.2 obtenidas de los elementos mecánicos se acomodan de tal forma que se forma la matriz de rigidez del elemento:

$$\underline{K}^e = \begin{array}{cccccccc|c} \theta'_p & \theta'_q & \delta'_r & \delta'_s & \delta'_u & \delta'_v & \theta'_a & \theta'_b & \\ \hline 4EI/L & 2EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta'_p \\ 2EI/L & 4EI/L & -6EI/L^2 & 6EI/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \theta'_q \\ -6EI/L^2 & -6EI/L^2 & 12EI/L^3 & -12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta'_r \\ 6EI/L^2 & 6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 12EI/L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta'_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & AE/L & -AE/L & 0 & 0 & \delta'_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -AE/L & AE/L & 0 & 0 & \delta'_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_t/L & -GI_t/L & \theta'_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI_t/L & GI_t/L & \theta'_b \end{array}$$

El término  $\underline{P}^e$  en la Ecuación 5.10 es conocido como el vector de cargas de empotramiento global, el cual se expresa de la siguiente forma:

$$\underline{P}^e = \begin{array}{|c} wL^2/12 \\ -wL^2/12 \\ -wL/12 \\ -wL/12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

El término  $\underline{\delta}$  es conocido como el vector de desplazamiento de la matriz de rigidez, el cuál es igual a:

$$\underline{\delta'_m} = \begin{pmatrix} \theta'_p \\ \theta'_q \\ \delta'_r \\ \delta'_s \\ \delta'_u \\ \delta'_v \\ \theta'_a \\ \theta'_b \end{pmatrix}$$

### Ejemplo

Obtener los desplazamientos correspondientes a la siguiente estructura (Figura 5.6), ignorando los efectos de torsión y acortamiento de las barras.

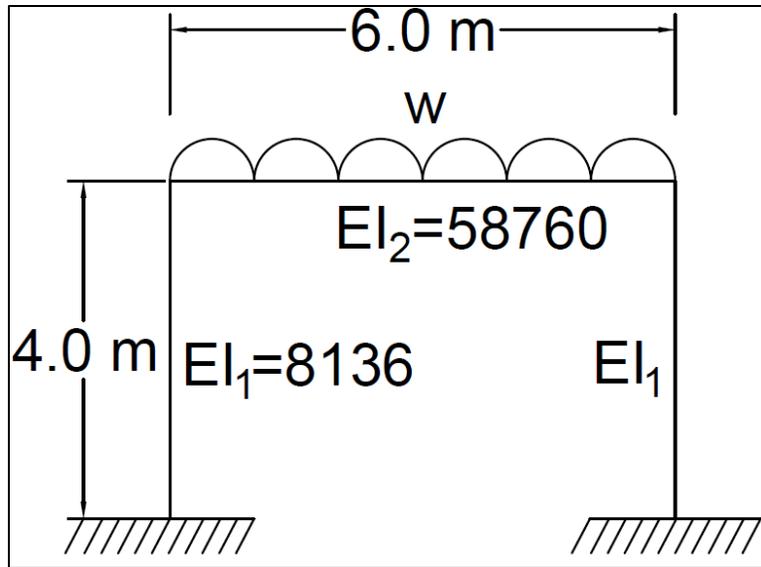


Figura 5.6 Marco con datos para ejemplo.

- Primeramente, se procede a definir los grados de libertad de la estructura, los cuales se encuentran en la siguiente Tabla 5.1 y en la Figura 5.7.

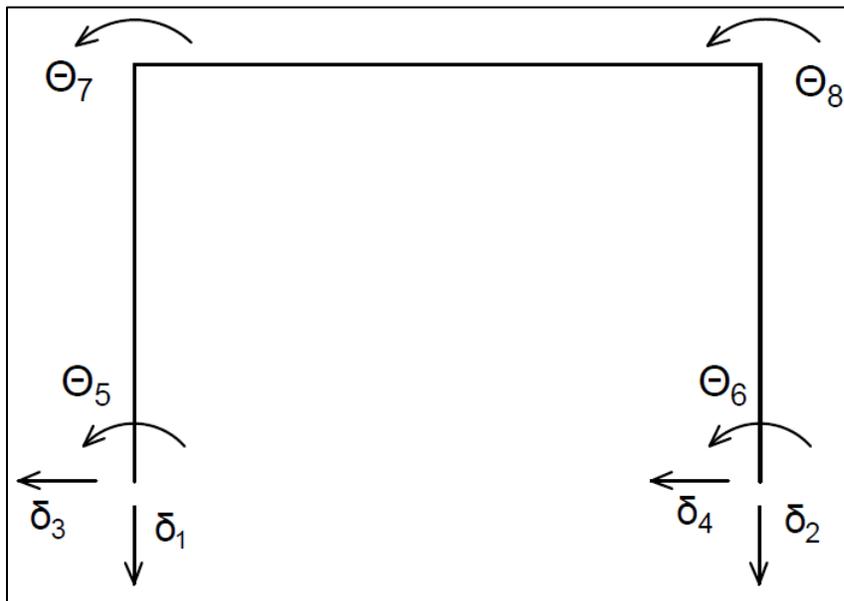


Figura 5.7 Ejemplo: grados de libertad de la estructura

Tabla 5.1 Grados de libertad

Grados de libertad					
	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	$\delta_u$
Barra 1	$\theta_5$	$\theta_7$	$\delta_1$	$\delta_1$	$\delta_3$
Barra 2	$\theta_7$	$\theta_8$	$\delta_1$	$\delta_2$	-
Barra 3	$\theta_6$	$\theta_8$	$\delta_2$	$\delta_2$	$\delta_4$

- De acuerdo con lo expuesto en este capítulo la matriz de rigidez de las barras horizontales y verticales quedan de la siguiente forma (Tabla 5.2 y 5.3):

Tabla 5.2 Arreglo matricial para barra horizontal

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	
$EI/L$	$2EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_q$
$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$\delta_r$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$\delta_s$

Tabla 5.3 Arreglo matricial para barra vertical

$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_u$	
$4EI/L$	$2EI/L$	$6EI/L^2$	$\theta_p$
$2EI/L$	$4EI/L$	$6EI/L^2$	$\theta_q$
$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$\delta_u$

Donde, E es el módulo de rigidez del material, en este caso se trata de concreto, I es la inercia de la sección de la barra y L la longitud de la barra.

- La matriz de rigidez de cada barra se encuentra en las siguientes tablas:

BARRA 1			
$\theta_5$	$\theta_7$	$\delta_3$	
8136	4068	3051	$\theta_5$
4068	8136	3051	$\theta_7$
3051	3051	1525.5	$\delta_3$

BARRA 3			
$\theta_6$	$\theta_8$	$\delta_4$	
8136	4068	3051	$\theta_6$
4068	8136	3051	$\theta_8$
3051	3051	1525.5	$\delta_4$

BARRA 2				
$\theta_7$	$\theta_8$	$\delta_1$	$\delta_2$	
39173.333	19586.667	-9793.33	9793.333	$\theta_7$
19586.667	39173.333	-9793.33	9793.333	$\theta_8$
-9793.33	-9793.33	19586.67	-19586.7	$\delta_1$
9793.333	9793.333	-19586.7	19586.67	$\delta_2$

- Ahora se obtiene la matriz de rigidez global, vector de empotramiento y cargas concentradas (en este caso el vector de cargas concentradas tiene un valor de cero) con el fin de tener los elementos necesarios de la Ecuación 5.7.

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (5.7)$$

- Como se dijo anteriormente, la matriz de cada barra se unen para formar la matriz de rigidez global de la estructura:

MATRIZ GLOBAL								
$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	$\theta_7$	$\theta_8$	
19586.67	-19586.67	0	0	0	0	-9793.33	-9793.33	$\delta_1$
-19586.67	19586.67	0	0	0	0	9793.33	9793.33	$\delta_2$
0	0	1525.50	0	3051.00	0	3051.00	0	$\delta_3$
0	0	0	1525.50	0	3051	0	3051	$\delta_4$
0	0	3051.00	0	8136.00	0	4068.00	0	$\theta_5$
0	0	0	3051.00	0	8136	0	4068	$\theta_6$
-9793.33	9793.33	3051.00	0	4068.00	0	47309.33	19586.67	$\theta_7$
-9793.33	9793.33	0	3051.00	0	4068	19586.67	47309.33	$\theta_8$

Vector global desplazamiento	
$\underline{\delta} =$	$\delta_1$
	$\delta_2$
	$\delta_3$
	$\delta_4$
	$\theta_5$
	$\theta_6$
	$\theta_7$
	$\theta_8$

Vector de cargas de empotramiento		
$\underline{P}^e =$	75	$\delta_1$
	75	$\delta_2$
	0	$\delta_3$
	0	$\delta_4$
	0	$\theta_5$
	0	$\theta_6$
	-75	$\theta_7$
	-75	$\theta_8$

Una vez teniendo la matriz global y los vectores necesarios para satisfacer la Ecuación 5.7, se procede a resolver el sistema de ecuaciones. Debido a la característica simétrica del problema, este se puede simplificar, haciendo las siguientes consideraciones,  $\delta_1 = \delta_2, \delta_3 = \delta_4, \theta_5 = \theta_6, \theta_7 = \theta_8$ , por lo tanto:

$\delta_1$	$\delta_3$	$\theta_5$	$\theta_7$		$\underline{P_e}$
19586.67	0	0	-9793.33	=	-75.00
0	1525.50	3051.00	3051.00	=	0
0	3051.00	8136.00	4068.00	=	0
-9793.33	3051.00	4068.00	47309.30	=	75.00

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los desplazamientos en el sistema:

Desplazamientos		
$\delta_1$	-0.0033	m
$\delta_3$	-0.0044	m
$\theta_5$	0.0011	rad
$\theta_7$	0.0011	rad

**CAPÍTULO VI**  
**INTERACCIÓN**  
**SUELO-ESTRUCTURA**

## 6. INTERACCIÓN SUELO- ESTRUCTURA

Las deformaciones en los suelos ha sido una de las principales causales del nacimiento de la mecánica de suelos moderna, el estudio de esta ha tomado lugar en los últimos 100 años, con miles de investigaciones, se han logrado obtener técnicas de instrumentación, leyes y métodos para evaluar los comportamientos adversos del suelo.

Hasta hace algunos años la labor del ingeniero estructurista y geotecnista eran tomadas si no por separado, pero sí con ciertas brechas ingenieriles, como dos disciplinas que se complementan, pero que no llegan a fusionar sus labores, tratando al suelo separado de la estructura y no como parte de ella. Como parte de la labor del estructurista se basa en obtener la bajada de cargas de la estructura, misma que es proporcionada al geotecnista para el cálculo de los asentamientos en el suelo, sin nociones de la influencia de la estructura en estas deformaciones.

Tomar en cuenta las reacciones que se producen en el suelo para el análisis estructural tiene importancia al momento de calcular el diagrama de deformaciones en la estructura para la evaluación de su estado límite. El método de interacción utilizado en esta investigación, se desarrollará en el transcurso de este capítulo.

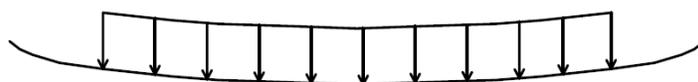
### 6.1 ANTECEDENTES

Es de importancia establecer el conocimiento de algunas de las investigaciones que se han hecho en el último siglo y el siglo actual para valorar la importancia de la interacción entre el suelo y la estructura. El auge de la investigación acerca de la interacción se desarrolló a mediados del siglo pasado y se amplificó con el uso de los elementos finitos. En 1952 el profesor de ingeniería de la Universidad de Paraná en Brasil, Samuel Chamecki, presentó uno de los primeros métodos para considerar la interacción entre la estructura y el suelo en presencia de marcos y vigas estructurales. El problema fue resuelto en un estrato de arcilla compresible; resolviendo el problema utilizando coeficientes de transferencia de carga en la viga.

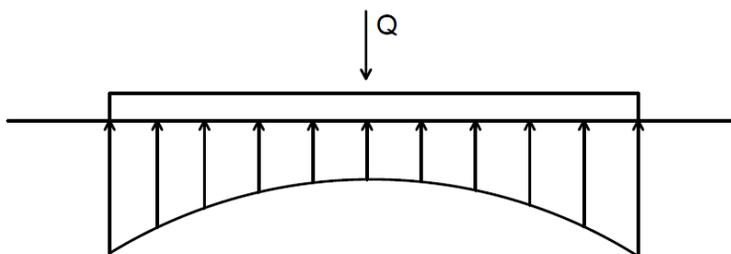
Estableciéndose la compatibilidad de deformaciones entre viga y suelo, se resuelve el problema proponiendo un método iterativo, usando coeficientes de transferencia de carga en la estructura los cuales calcula estableciendo una relación entre el suelo y la estructura en las reacciones. Este es el principio por

el cual está regido este trabajo de investigación, este principio se verá con más detalle a continuación.

Al calcular los asentamientos en los suelos se consideran ciertas simplificaciones tales, como que la zapata es infinitamente flexible o infinitamente rígida (Figura 6.1). Tales simplificaciones fueron objeto de estudio de Sowers en 1962, donde ambos casos; En donde expone un diagrama de una zapata 100% flexible y tomándose que las reacciones son igual a las cargas que actúan en la estructura, es decir una reacción uniforme y el segundo caso es analizar las reacciones en una placa infinitamente rígida, la cual no tendrá deformaciones en toda su extensión y por lo tanto tendría un asentamiento uniforme, el diagrama de reacciones tendría la configuración mostrada en la Figura 6.2:



*Figura 6.1 Diagrama de deformaciones en una zapata flexible*



*Figura 6.2 Diagrama de reacciones en una zapata rígida.*

En el cálculo de una estructura de cimentación real con una rigidez finita, se obtienen configuraciones diferentes a estas, los diagramas de reacciones y deformaciones dependen del tipo de suelo y de la rigidez de la estructura. En este trabajo de investigación se analizará un caso con condiciones prácticas, con secciones y módulos de rigidez en la estructura tales que lograrán demostrar la diferencia en los cálculos con condiciones simples como considerar totalmente flexible o rígida una estructura.

Investigaciones más actuales han demostrado la utilidad e importancia del cálculo de interacción suelo-estructura. En 1971 Los investigadores J. DeJong y N.R. Morgenstern hicieron una detallada observación de los asentamientos durante la construcción de la torre CN en Edmonton, Canadá, en esta investigación analizaron la importancia de la consideración de la interacción

suelo-estructura. Los cálculos fueron realizados en un programa que tiene los fundamentos del profesor Chamecki. Se consideró necesario obtener información acerca del cambio de rigidez que se presenta en la estructura durante la construcción.

Encontrándose en las mediciones de la dicha torre que la rigidez estructural aumenta con la carga completa. En conjunto se mostró que el 80% de los asentamientos que se tuvieron en la torre CN fueron al momento de la construcción. Los cambios de rigidez en la estructura no se deben dejar de considerar debido a que estos dominan en cierta forma la historia de asentamientos de la estructura. Las distorsiones de la estructura pueden ocasionar pequeños asentamientos diferenciales que pueden generar reacciones de apreciable magnitud.

En 1980 el doctor Zeevaert en su libro de Interacción Suelo – Estructura, propone un método para la determinación de la interacción suelo estructura con el acoplamiento de la Ecuación Matricial de Asentamientos (EMA) y con la Ecuación Matricial de Interacción (EMI). La primera se produce obteniendo los valores de influencia los cuales se ven afectados con los parámetros del suelo y una carga unitaria en un segmento de la cimentación.

La segunda considera una viga la cual es dividida en un número n de segmentos los cuales tienen un área tributaria y en cada una de estas actúan reacciones R teniendo un problema hiperestático, por lo tanto, estas reacciones son cero (R=0) para considerarla estáticamente determinada en la cual se podrán obtener los asentamientos ocasionados en cada punto. Después dando a las reacciones R se consideran como un valor unitario y se hace un análisis con esa condición obteniendo las deformaciones en la viga. Por lo tanto, la ecuación matricial de interacción queda:

$$|R_i| = [\bar{S}_{ji}]^{-1} \cdot |\Delta_{io}| \quad (6.1)$$

$|R_i|$  : Reacciones incógnitas

$[\bar{S}_{ji}]$ : Desplazamiento de la estructura y suelo considerando el comportamiento de las reacciones (R =1)

$|\Delta_{io}|$ : Desplazamiento de la viga con una condición (R = 0)

La interacción de la estructura de cimentación y el suelo se obtiene utilizando las reacciones obtenidas por la ecuación EMI, en la ecuación matricial de asentamientos EMA, obteniendo los desplazamientos verticales que

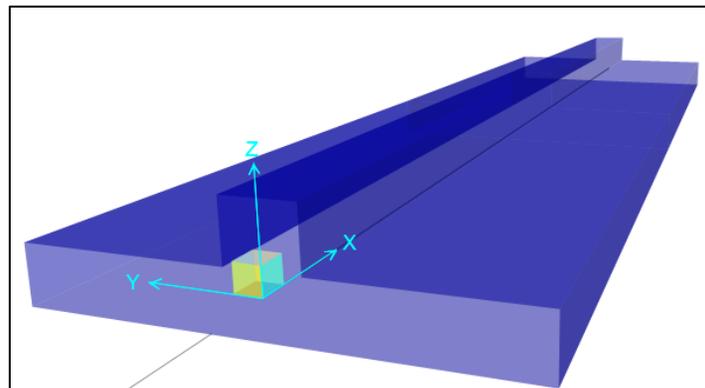
proporcionan valores de módulo de cimentación iguales a los utilizados en la ecuación matricial de interacción EMI.

Zheng-Wen Yang and Wen-Da Lu (1992) se dieron a labor de combinar dos métodos para la solución de la interacción de una torre de enfriamiento, estos fueron el método de elementos finitos y el método de elementos de frontera. Dividiendo estos métodos de acuerdo a la estructura, en la interfaz cimentación – suelo se consideró usar el método de elementos frontera, mientras que en la estructura de la torre se utilizó el método de los elementos finitos considerándose esta combinación como una solución semi-analítica. La interacción estática entre el suelo y el soporte de la torre hiperbólica de enfriamiento tienen una fuerte influencia en la respuesta de la estructura de la torre.

Respecto a los artículos y libros consultados podemos deducir que la influencia que tienen ambos elementos en el cálculo son de importancia. Los estados del sistema tienden a cambiar, tendiendo a arrojar valores diferentes a un análisis convencional de asentamiento en suelos, además, estas consideraciones en el diseño de los elementos mecánicos de las sub-estructuras se pueden optimizar para tener mayor seguridad y economía en estas.

## 6.2 DESARROLLO DEL PROBLEMA INTERACCIÓN – SUELO ESTRUCTURA.

El desarrollo de esta investigación tiene pie en el problema de resolver la compatibilidad de deformaciones entre un medio de origen lacustre totalmente saturado (suelo sensitivo) y una cimentación superficial, la cual está encargada de transmitir las cargas sobre un elemento que consta de una losa rectangular y un elemento trabe que se encarga de distribuir la carga en la losa (zapata corrida) (Figura 6.3). El método directo (Deméneghi, 1996) trata de obtener los diagramas de asentamientos y de reacciones del terreno de cimentación.



*Figura 6.3 Zapata corrida*

La forma de las reacciones finales en toda la estructura es diferente a una reacción uniforme como la que se da en el caso de la cimentación 100% flexible. Por lo tanto, el primer paso en el método es asignar una serie de reacciones uniformes en el terreno, las cuales vienen dadas por  $r_1, r_2 \dots r_n$  (Figura 6.4); El análisis estructural será llevado a cabo utilizando el método de las rigideces, considerando las reacciones como incógnitas.

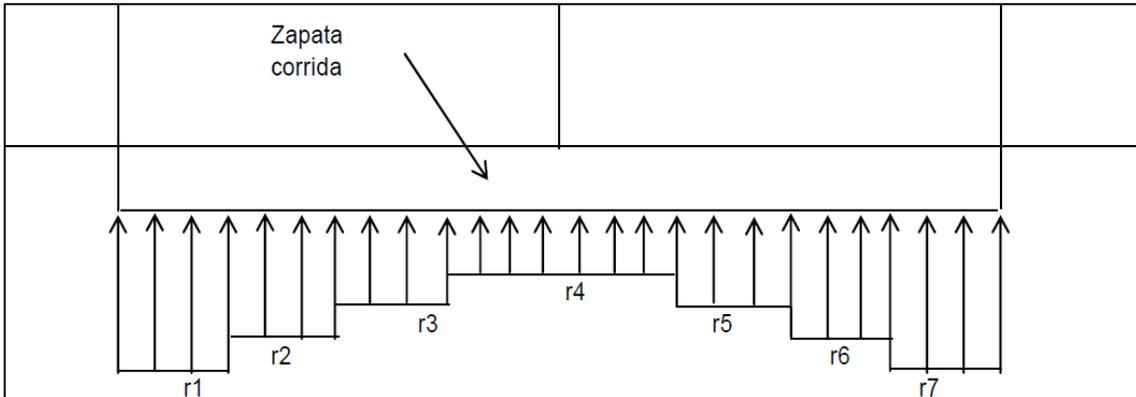


Figura 6.4 Reacciones  $r_n$  debidas a la carga de la estructura.

Posteriormente se utiliza la tercera ley de Newton, esto implica que las cargas sobre el terreno estarán representadas al igual por reacciones, que serán representadas en la misma dirección y sentido que las reacciones, cumpliendo la tercera ley de Newton (Figura 6.5). Aplicando cargas  $r_i$  en el terreno, se obtienen los hundimientos de este en función de las reacciones  $r_i$ , empleando el método de Chamecki (1956). Una vez que la compatibilidad de deformaciones entre suelo y estructura quede resuelta, se dice que se está llevando a cabo el proceso de interacción suelo-estructura.

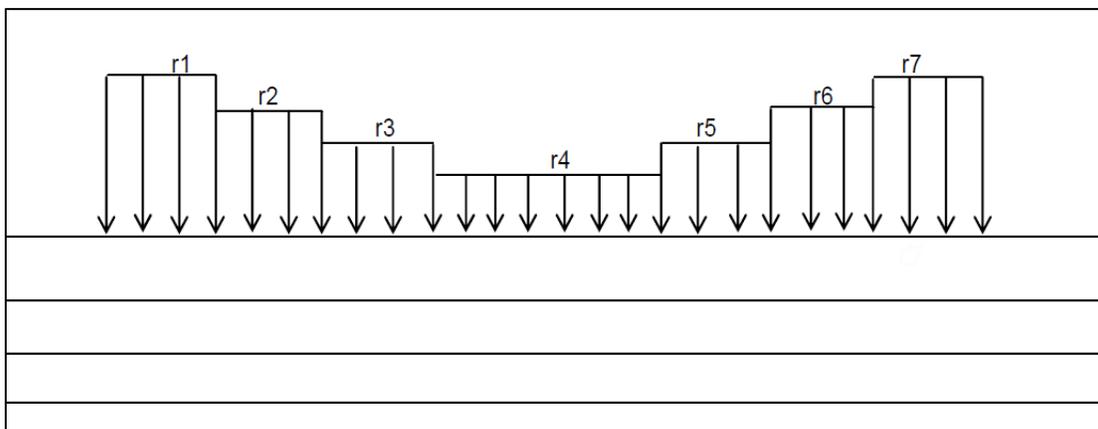


Figura 6.5 Cargas impuestas al terreno

## 6.3 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

### 6.3.1 Corto plazo

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo anterior, la parte del análisis estructural para el proceso de interacción, será estudiado con un método matricial; método de las rigideces (Ecuación 5.7). El cual será de utilidad para formar un sistema de ecuaciones en el que podemos incluir la variable función de las deformaciones, las reacciones  $r_i$ .

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (5.7)$$

En donde  $\underline{K}$  es la matriz de rigideces de la estructura,  $\underline{\delta}$  el vector de desplazamientos,  $\underline{P}^e$  es el vector de cargas de empotramiento y  $\underline{P}^c$  se conoce como el vector de cargas concentradas.

El elemento estructural en análisis entonces, será una zapata, esta será dividida formando elementos independientes, elementos que tendrán una matriz de rigidez local, sin embargo, será necesario formar la matriz global de la estructura como se vio en el ejemplo del capítulo anterior, sumando cada elemento. Cada elemento estará definido por la siguiente matriz que, de acuerdo al problema, es una matriz que representa una barra horizontal en la que se desprecian los acortamientos y las rotaciones, esto para analizar en condiciones estáticamente determinada.

$\underline{K} \underline{\delta} =$	$\theta_p$	$\theta_q$	$\delta_r$	$\delta_s$	
	$4EI/L$	$2EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_p$
	$2EI/L$	$4EI/L$	$-6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$\theta_q$
	$-6EI/L^2$	$-6EI/L^2$	$12EI/L^3$	$-12EI/L^3$	$\delta_r$
	$6EI/L^2$	$6EI/L^2$	$-12EI/L^3$	$12EI/L^3$	$\delta_s$

(6.1)

En el Capítulo 5, se definió que el vector de cargas de empotramiento  $\underline{P}^e$  está dado en la Ecuación 5.7. Para establecer la compatibilidad entre el suelo y la estructura, es necesario entonces establecer una relación entre ambos, el enlace entre ambos son las reacciones del suelo, para ello hay que hacer que ambos sistemas de ecuaciones estén en función de las reacciones.

Para ello, entonces establecemos la relación entre el vector de cargas de empotramiento y las reacciones (Figura 6.6). Obteniendo el vector de cargas de empotramiento la siguiente configuración:

$$\underline{P}^e = \begin{vmatrix} wL^2/12 & \theta_p \\ -wL^2/12 & \theta_p \\ -wL/12 & \delta_r \\ -wL/12 & \delta_s \end{vmatrix} \quad (6.2)$$

$$\underline{P}^e = \begin{vmatrix} wL^2/12 - (11/192) L^2 r_r - (5/192) L^2 r_s & \theta_p \\ -wL^2/12 + (5/192) L^2 r_r - (11/192) L^2 r_s & \theta_p \\ -wL/12 + (13/32) L r_r - (3/32) L r_s & \delta_r \\ -wL/12 + (3/32) L r_r - (13/32) L r_s & \delta_s \end{vmatrix} \quad (6.3)$$

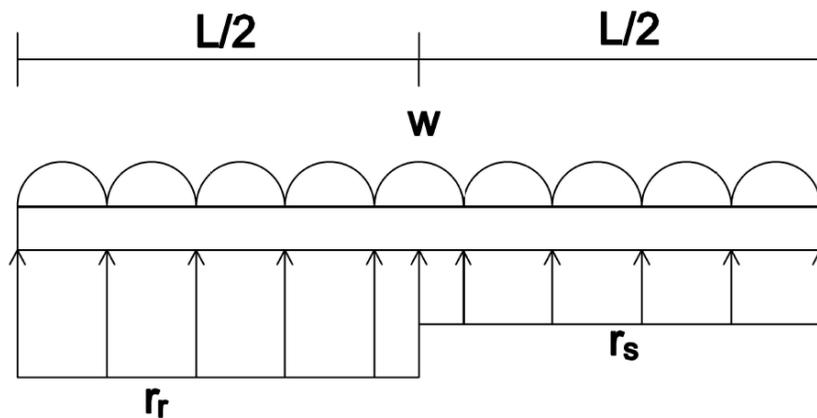
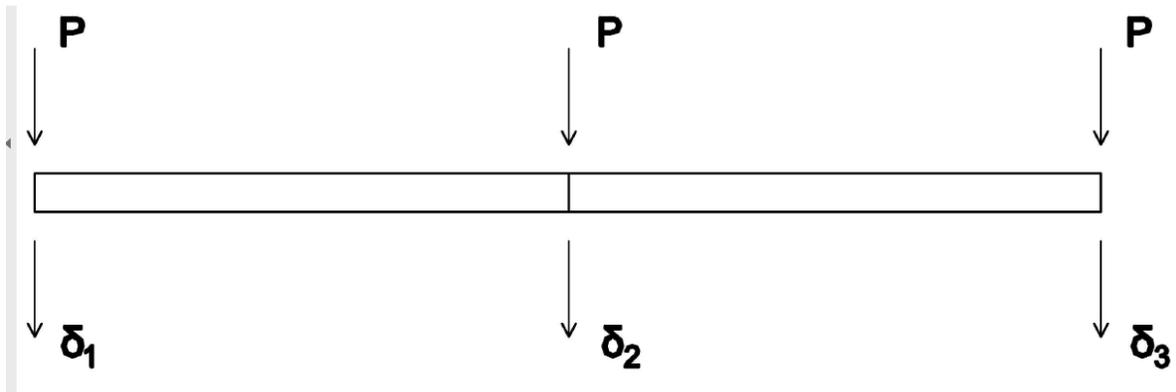


Figura 6.6 Influencia de las reacciones en el vector de cargas de empotramiento

El vector de cargas concentradas estará definido de acuerdo al problema y en qué nodo estén ubicadas estas. Ejemplo: en la Figura 6.7 se pueden observar los nudos en los que las fuerzas actúan, con los cuales se formará el siguiente vector de cargas concentradas:

$$\underline{P^c} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} P \\ P \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{array} \end{array}$$



*Figura 6.7 Formación del vector de cargas concentradas de acuerdo a su ubicación*

### 6.3.2 Largo plazo

Para evaluar la influencia de la estructura en la interacción a largo plazo, los módulos de deformación se afectan por una constante  $\alpha$  que es igual a 0.7. Esto quiere decir que la estructura a lo largo de 50 años, habrá perdido el 30% de su rigidez, por lo tanto, la influencia de la estructura en el suelo será menor.

## 6.4 MATRIZ DE FLEXIBILIDAD; DEFORMACIONES DEL SUELO

### 6.4.1 Corto Plazo

La matriz de flexibilidades es la representación matemática del vínculo entre el suelo y la estructura, la cual tiene como incógnitas las deformaciones producidas por las cargas en el terreno, que como ya se dijo, estas cargas son iguales a las reacciones. Esto quiere decir que la matriz de flexibilidades al igual que la matriz de rigidez, estará en función de las reacciones  $r_k$ .

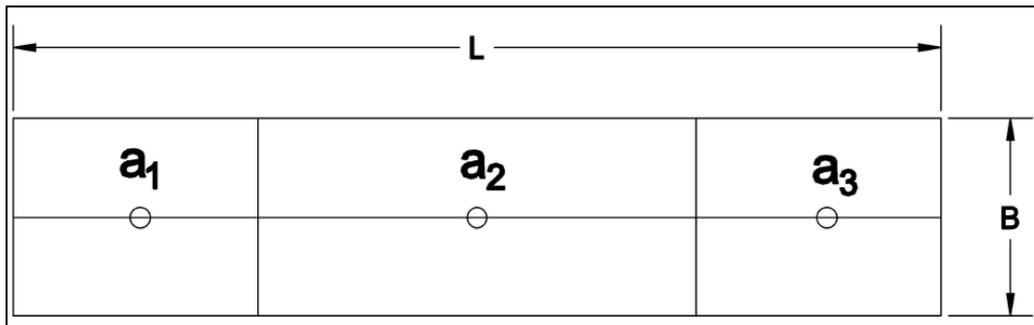
La solución principal para la determinación de los asentamientos, estará dada por la ley de Hooke. Para incluir los efectos de la deformación a largo plazo, se utilizan las ecuaciones constitutivas de las teorías de la consolidación primaria

del profesor Terzaghi y consolidación secundaria del profesor Zeevaert, tales ecuaciones permiten obtener un módulo de deformación que nos permita trabajar con la teoría de la Elasticidad, es decir (Ecuación 4.11):

$$\delta_{ij} = (H_j/E_{ij})[\sigma_{zij} - \nu(\sigma_{xij} + \sigma_{yij})] \quad (4.11)$$

Donde el módulo E, cambiaría de acuerdo a la situación que se esté analizando. Es decir, al tratarse de un asentamiento inmediato o a corto plazo, el módulo que se utilizaría sería el módulo no drenado secante al 50% de deformación  $E_{U50}$  con una relación de Poisson de 0.5. En el caso de tratarse de un asentamiento a largo plazo, debido a que se están analizando arcillas sensitivas, se utilizaría el módulo de deformación a largo plazo  $E'$ , que se obtendrá de acuerdo a las ecuaciones constitutivas anteriormente mencionadas y en base a resultados de una prueba de consolidación unidimensional.

Para obtener la matriz de flexibilidades del suelo, la estructura se dividirá en n áreas en donde estarán actuando las cargas  $r_k$  las cuales son la incógnita en el sistema de ecuaciones del suelo y la estructura y están dadas en kN/m (Figura 6.8). Se debe de contar con los valores de influencia de una carga unitaria, para obtener la distribución de esfuerzos en cada punto de cada estrato (Figura 6.9). Para ello se utilizarán las Ecuaciones 4.4 y 4.5.



*Figura 6.8 División de áreas de la estructura para el análisis*

Una vez habiendo obtenido los valores de influencia de cada estrato y de cada punto, entonces se sustituyen los valores en la Ecuación 4.14.

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{nr} \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} I_{ijk} r_k d_k / a_k \quad (4.14)$$

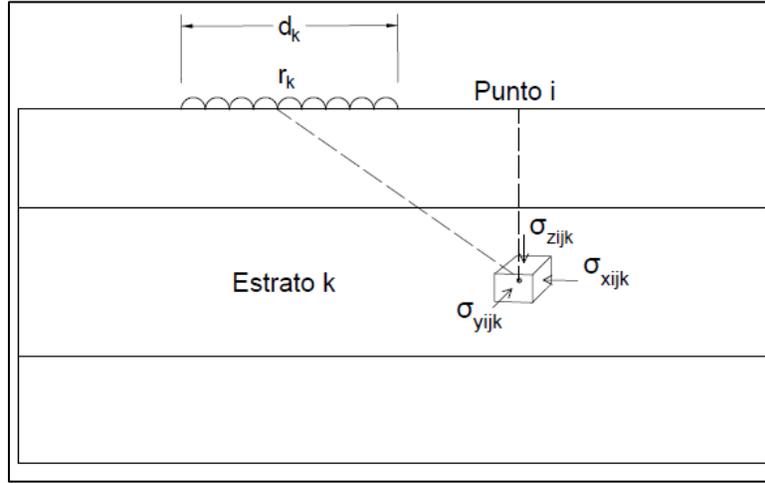


Figura 6.9 Esfuerzos en el suelo debido a una carga \$r\_k\$

#### 6.4.2 Largo plazo

La deformación a largo plazo es la suma aritmética de la deformación a corto plazo, más la deformación que se debe a los fenómenos de consolidación primaria y secundaria. Para obtener la matriz de flexibilidades a largo plazo es un procedimiento similar al que se llevó a cabo en la condición a corto plazo, esta vez en la Ecuación 4.14 se toma en cuenta una deformación inicial \$\delta\_{oi}\$ que se obtiene anteriormente. Sin embargo, los parámetros utilizados, serán obtenidos de pruebas realizadas en un consolidómetro para obtener el módulo de deformación a largo plazo \$E'\$, además, la relación de Poisson debido a que se debe a una deformación a largo plazo, será considerada como cero.

$$\delta_i = \delta_{oi} + \sum_{k=1}^{nr} \left( \frac{H_j}{E'_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} I_{ijk} r_k d_k / a_k \quad (6.0)$$

En donde \$E'\$ es el módulo de deformación a largo plazo. Tal módulo se obtiene con las deformaciones totales \$\Delta\delta\_t\$, es decir la suma de las deformaciones debido al asentamiento inmediato, consolidación primaria y la consolidación secundaria.

$$E' = \frac{\sigma_z \Delta z}{\Delta \delta_t} \quad (6.1)$$

$$\Delta \delta_t = \Delta \delta_{inm} + \Delta \delta_{pt} + \Delta \delta_{st} \quad (6.2)$$

Las deformaciones por consolidación primaria y secundaria se obtienen con las siguientes ecuaciones:

$$\Delta\delta_{pt} = \Delta\delta_{cp}U \quad (6.3)$$

Donde U es el grado de consolidación que está en función del factor tiempo  $T_v$ . Cuando  $T_v$  es mayor a 2, se dice que la consolidación es del 100% por lo tanto  $U=1$ .

$$T_v = \frac{C_v t}{(\Delta z)^2} \quad (6.4)$$

Donde  $C_v$  es el coeficiente de consolidación

Los módulos de deformación en ambos casos se encuentran definidos con las siguientes ecuaciones

$$E_{cp} = \frac{\sigma_z \Delta z_0}{\Delta\delta_{cp}} \quad (6.5)$$

$$E_{cs} = \frac{\sigma_z \Delta z_0}{C_t} \quad (6.6)$$

También los módulos pueden definirse como la inversa del coeficiente de compresibilidad volumétrica de cada etapa:

$$E_{cp} = \frac{1}{m_v} \quad (6.7)$$

$$E_{cs} = \frac{1}{m_t} \quad (6.8)$$

Obtenidos los módulos de deformación, entonces se pueden obtener los asentamientos por consolidación secundaria y primaria:

$$\Delta\delta_{pt} = \frac{\sigma_z \Delta z_0}{E_{cp}} U \quad (6.9)$$

$$C_t = \frac{\sigma_z \Delta z_0}{E_{cs}} \quad (6.10)$$

$$\Delta\delta_{cs} = C_t \log(1 + \xi T_v) \quad (6.11)$$

## Ejemplo

Obtener los asentamientos de la estructura de la Figura 6.10. Para fines de aclarar el método será analizado en una condición a corto plazo y en sólo tres puntos de la estructura, al inicio, centro y al final de ella. Se aplicará el método directo (Deméneghi, 2011).

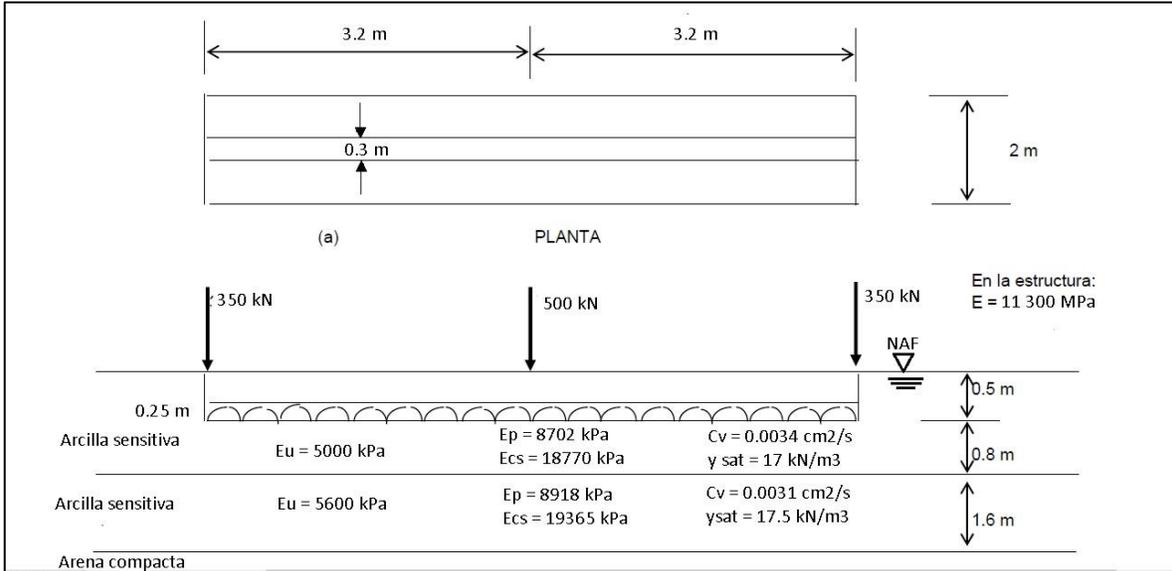


Figura 6.10 Ejemplo: Interacción suelo-estructura.

## Análisis estructural

La estructura entonces, tendrá tres nudos, tales tienen dos grados de libertad cada uno (Figura 6.11). Para el análisis estructural se aplica la Ecuación 5.7:

$$\underline{K} \underline{\delta} + \underline{P}^e + \underline{P}^c = 0 \quad (5.7)$$

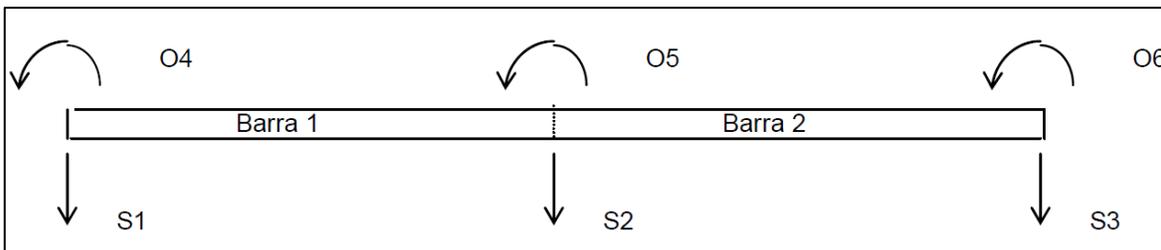


Figura 6.11 Grados de libertad en la barra de cimentación.

De acuerdo con el arreglo matricial la Ecuación 6.1, la matriz de rigidez es:

K						
$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$	
85036.5	-85036.5	0.0	-136058.5	-136058.5	0.0	$\delta_1$
-85036.5	170073.1	-85036.5	136058.5	0.0	-136058.5	$\delta_2$
0.0	-85036.5	85036.5	0.0	136058.5	136058.5	$\delta_3$
-136058.5	136058.5	0.0	290258.0	145129.0	0.0	$\theta_4$
-136058.5	0.0	136058.5	145129.0	580516.1	145129.0	$\theta_5$
0.0	-136058.5	136058.5	0.0	145129.0	290258.0	$\theta_6$

El ensamble del vector cargas de empotramiento se da con el arreglo de la Ecuación 6.2 quedando como incógnitas las reacciones:

Pe				
	r1	r2	r3	
-59.200	1.300	0.300	0.000	$\delta_1$
-118.400	0.300	2.600	0.300	$\delta_2$
-59.200	0.000	0.300	1.300	$\delta_3$
31.573	-0.587	-0.267	0.000	$\theta_4$
0.000	0.267	-0.853	-0.267	$\theta_5$
-31.573	0.000	0.267	-0.267	$\theta_6$

En el vector de cargas concentradas se integrarán las cargas puntuales que se apliquen a la estructura, entonces el vector ya armado tiene la siguiente configuración:

Pc	
-350	$\delta_1$
-500	$\delta_2$
-350	$\delta_3$
0	$\theta_4$
0	$\theta_5$
0	$\theta_6$

Aplicando la ecuación 5.7 el sistema de ecuaciones de la estructura es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 29260.5939\delta_1 - 29260.5939\delta_2 - 46816.9503\theta_4 + 1.3r_1 + 0.3r_2 &= 409.2 \\
 -58521.1878\delta_1 + 58521.1878\delta_2 + 93633.9005\theta_4 + 0.6r_1 + 2.6r_2 &= 618.4 \\
 -46816.9503\delta_1 + 46816.9503\delta_2 + 99876.1606\theta_4 - 0.58r_1 - 2.6r_2 &= 618.4
 \end{aligned} \quad (E.1)$$

## Deformaciones en el suelo

Las deformaciones en el suelo estarán definidas con la matriz de flexibilidades, las cuales estarán en función de las reacciones, siendo ambas, incógnitas en el sistema global. Para esto será necesaria la Ecuación 4.14:

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{nr} \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} I_{ijk} r_k d_k / a_k \quad (4.14)$$

Primeramente, es necesario obtener los valores de influencia de las cargas para una estructura rectangular, estos se obtienen con las ecuaciones de Damy, Dashko y Kágan (Ecuaciones 4.4 y 4.5). Aplicando las ecuaciones, el resultado de los valores de influencia se tienen en la siguiente tabla:

VALORES DE INFLUENCIA				
Punto	$I_{zijk}$	$I_{xijk}$	$I_{yijk}$	$I_{ijk}$
1,1,1	0.4869	0.2659	0.3182	0.195
1,1,2	0.0017	0.0031	0.0527	-0.026
1,1,3	0.0000	0.0000	0.0035	-0.002
1,2,1	0.2791	0.0298	0.0579	0.235
1,2,2	0.0402	0.0048	0.0912	-0.008
1,2,3	0.0010	0.0001	0.0115	-0.005
2,1,1	0.0016	0.0029	0.0431	-0.021
2,1,2	0.9737	0.5319	0.6363	0.390
2,1,3	0.0016	0.0029	0.0431	-0.021
2,2,1	0.0356	0.0042	0.0650	0.001
2,2,2	0.5583	0.0595	0.1159	0.471
2,2,3	0.0356	0.0042	0.0650	0.001
3,1,1	0.0000	0.0000	0.0035	-0.002
3,1,2	0.0017	0.0031	0.0527	-0.026
3,1,3	0.4869	0.2659	0.3182	0.195
3,2,1	0.0010	0.0001	0.0115	-0.005
3,2,2	0.0402	0.0048	0.0912	-0.008
3,2,3	0.2791	0.0298	0.0579	0.235

Donde  $I_{ijk}$

$$I_{ijk} = I_{zijk} - \nu(I_{xijk} + I_{yijk}) \quad (4.13)$$

Aplicando la ecuación 4.14, se obtiene la matriz de flexibilidades del suelo:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 0.000048371r_1 - 0.0000032065r_2 \\ \delta_2 &= 0.000003143r_1 - 0.000098398r_2\end{aligned}\tag{E.2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones E.1 y E.2, se obtienen los asentamientos en los puntos 1, 2 y 3, además de las reacciones en dichos puntos, necesarios para la obtención de los elementos mecánicos.

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 0.0156 \text{ m} & r_1 &= 329.73 \text{ kN/m} \\ \delta_2 &= 0.0107 \text{ m} & r_2 &= 119.30 \text{ kN/m} & \theta_4 &= 0.0042 \text{ kN.m}\end{aligned}$$

# **CAPÍTULO VII**

## **EJEMPLO DE APLICACIÓN**

## 7. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Obtener los asentamientos y los elementos mecánicos de una zapata corrida, considerando los efectos de la interacción entre el suelo y la estructura, en una arcilla sensitiva típica de la Ciudad de México.

Las deformaciones deben cumplir los estados límites de servicio estipulados en el las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Cimentaciones (NTC). La cimentación debe de cumplir por capacidad de carga y los asentamientos no deben de ser mayores a 10 cm.

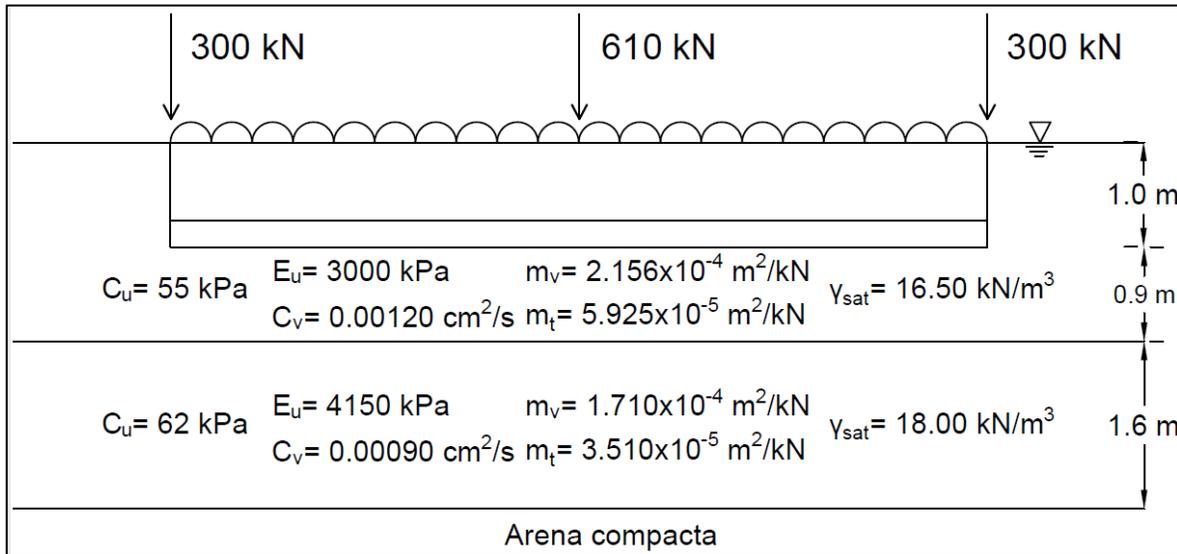


Figura 7.1 Estratigrafía y datos del problema

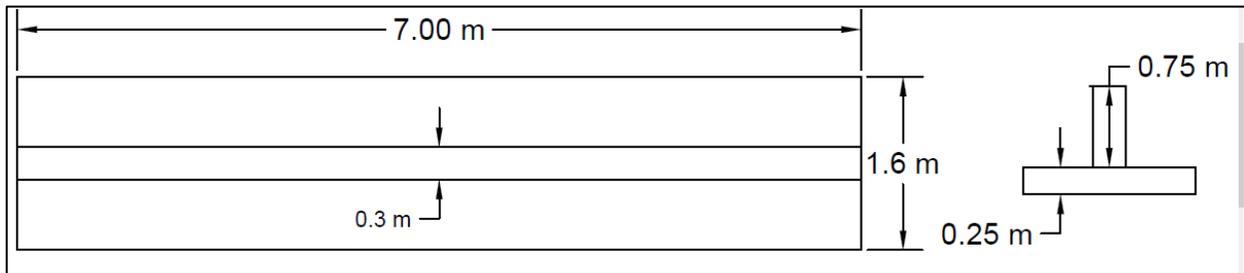


Figura 7.2 Geometría de la zapata

### 7.1 VERIFICACIÓN POR CAPACIDAD DE CARGA

$$q_{ult} \leq q_R \quad (7.1)$$

En donde  $q_R$  para un suelo cohesivo como el de la ciudad de México es:

$$q_R = 5.14c_u F_c F_R + p_v \quad (7.2)$$

De acuerdo con la zonificación geotécnica en las Normas Técnicas Complementarias de la Ciudad de México, se deberá de usar un factor de reducción  $F_R = 0.65$ .

Se procede a calcular la capacidad de carga última, esta es la carga a la que el suelo está impuesto (considerando que el peralte de la zapata es de 0.25 m). Con ello se hará la suma de todas las cargas:

$$q_{ult} = \frac{\sum Q F_c}{A} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \sum Q &= (600) + (610) + (140) + (0.25)(1.6)(7)(24) + (0.75)(0.37)(24) + (1.3)(0.75)(7)(16.5) \\ \sum Q &= \overbrace{600 + 610 + 140}^{\text{Cargas}} + \overbrace{67.2 + 37.8}^{\text{Estructura}} + \overbrace{112.6}^{\text{Suelo}} = 1567.61 \text{ kN} \\ q &= \frac{\sum Q}{A} = \frac{1567.61}{1.6 \times 7} = 139.97 \text{ kPa} \end{aligned}$$

El total de las cargas se modifica con un factor  $F_c$ , el cual para cargas muertas tendrá un valor  $F_c = 1.4$  y para suelos un valor de  $F_c = 1.1$ .

$$\begin{aligned} \sum Q F_c &= (1455)(1.4) + (112.61)(1.1) = 2160.87 \text{ kN} \\ q_{ult} &= \frac{\sum Q F_c}{A} = \frac{2160.87}{1.60 \times 7} = 192.935 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Para obtener la capacidad de carga resistente se utiliza la fórmula E.2 la cual, como ya se mencionó, es para suelos cohesivos totalmente saturados. Pero antes, obtenemos un promedio pesado de la resistencia al corte no drenado considerando un área de influencia de la zapata de  $0.7B$ , además será necesario obtener un factor  $F_c$  que depende de la geometría de la zapata, por lo tanto:

La cohesión promedio sería:

$$c_{um} = \frac{0.7B = 0.7(1.6) = 1.12}{(0.99)(55) + (1.12 - 0.9)(62)} = 56.38 \text{ kPa}$$

El factor de forma  $F_c$  se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_c &= 1 + 0.25 \frac{B}{L} + 0.25 \frac{D}{B} \quad \text{para} \quad \frac{D}{B} < 2 \quad \text{y} \quad \frac{B}{L} < 1 \\ F_c &= 1 + 0.25 \frac{1.6}{7.0} + 0.25 \frac{1}{1.6} = 1.213 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ahora se obtiene carga resistente:

$$q_R = 5.14(56.38)(1.213)(0.65) + (1 \times 16.5) = 245.156$$

Por lo tanto, se cumple la condición de la Ecuación 7.1:

$$192.935 \leq 245.156$$

De acuerdo con las Normas Técnicas Complementarias, sí pasa por capacidad de carga.

## 7.2 ESTADO LÍMITE DE SERVICIO

### 7.2.1 Asentamientos inmediatos

Se trabaja donde la zapata tendrá la mayor deformación, es decir en el centro de ella. Para ello se utilizará la Ley de Hooke.

$$\delta_{ij} = (H_j/E_{ij})[\sigma_{zij} - \nu(\sigma_{xij} + \sigma_{yij})] \quad (4.11)$$

Con los datos proporcionados del primer estrato, se tiene:

$$\nu = 0.5 \quad E_u = 3,000 \text{ kPa} \quad q = 139.97 \text{ kPa} \quad H = .9 \text{ m} \quad z = 0.45$$

La distribución de los esfuerzos a la profundidad de  $z$  es de:

$$\sigma_z = 132.27 \text{ kPa} \quad \sigma_x = 56.20 \text{ kPa} \quad \sigma_y = 90.54 \text{ kPa}$$

La deformación del primer estrato es:

$$\delta_{u1} = \left( \frac{0.90}{3000} \right) [132.27 - 0.5(56.20 + 90.54)]$$

$$\delta_{u1} = 0.01766 \text{ m}$$

Para el segundo estrato se sigue el mismo procedimiento:

$$\nu = 0.5 \quad E_u = 4150 \text{ kPa} \quad q = 139.97 \text{ kPa} \quad H = 1.6 \text{ m} \quad z = 1.70$$

$$\delta_{u1} = \left( \frac{1.6}{4150} \right) [73.55 - 0.5(4.78 + 27.97)]$$

$$\delta_{u1} = 0.01665 \text{ m}$$

El asentamiento total en el punto centro de la zapata, considerando las deformaciones de ambos estratos es:

$$\delta_{ut} = 0.01766 \text{ m} + 0.01665 \text{ m} = 0.03431 \text{ m}$$

### 7.2.2 Asentamientos a largo plazo

Para obtener los asentamientos que la estructura obtendrá a largo plazo, son necesarias las deformaciones totales dadas por los módulos de consolidación primaria y consolidación secundaria, los cuales se encuentran definidos con las Ecuaciones 6.7 y 6.8.

$$E_{cp} = \frac{1}{m_v} \quad (6.7)$$

$$E_{cs} = \frac{1}{m_t} \quad (6.8)$$

$$E_{cp1} = \frac{1}{0.0002156} = 4638.22$$

$$E_{cs1} = \frac{1}{0.00005925} = 16877.64$$

Estrato 1: Consolidación primaria

$$\Delta\delta_{pt} = \Delta\delta_p U \quad (6.3)$$

$$\Delta\delta_{p1} = \frac{\sigma_z \Delta Z}{E_{cp1}} \quad (6.5)$$

$$\Delta\delta_{p1} = \frac{(132.267)(0.9)}{4638.22} = 0.0257 \text{ m}$$

$$T_v = \frac{C_v t}{(\Delta Z)^2} \quad (6.4)$$

$$T_v = \frac{(0.00120)(1577880000)}{(90)^2} = 233.76 > 2$$

$\therefore$

$$U = 100\% = 1$$

$$\Delta\delta_{pt1} = 0.0257(1) = 0.0257 \text{ m}$$

Consolidación secundaria

De acuerdo con la teoría del Dr. Zeevaert (1980):

$$C_t = \frac{\sigma_z \Delta Z_0}{E_{cs}} \quad (6.10)$$

$$\Delta\delta_{cs} = C_t \log(1 + \xi T_v) \quad (6.11)$$

Primeramente, se obtiene el parámetro  $C_t$ , que físicamente representa la deformación en un intervalo de escala logarítmica en la porción de la curva de consolidación donde se presenta la consolidación secundaria:

$$C_t = \frac{(132.267)(0.9)}{(16877.64)} = 0.00705 \text{ m}$$

Debido a que estamos trabajando en condiciones de una curva tipo 1, es decir, con esfuerzos menores a los esfuerzos de pre-consolidación,  $\xi = 5$ , entonces:

$$\Delta\delta_{st} = C_t \log(1 + 5T_v)$$

$$\Delta\delta_{cs1} = (0.00705) \log[1 + 5(233.76)] = 0.0216 \text{ m}$$

El asentamiento total debido a los módulos de rigidez de consolidación y consolidación primaria en el primer estrato es:

$$\Delta\delta_{lp1} = 0.0257 + 0.0216 = 0.0473 \text{ m}$$

Estrato 2: Consolidación primaria

$$E_{cp2} = \frac{1}{0.0001710} = 5847.95$$

$$E_{cs2} = \frac{1}{0.00003510} = 28490.03$$

$$\Delta\delta_{p2} = \frac{(73.55)(1.6)}{5847.95} = 0.0201 \text{ m}$$

$$T_v = \frac{C_v t}{(\Delta z)^2}$$

$$T_v = \frac{(0.00090)(1577880000)}{(160)^2} = 55.47 > 2$$

∴

$$U = 100\% = 1$$

$$\Delta\delta_{p2} = 0.0257(1) = 0.0257 \text{ m}$$

Consolidación secundaria

$$C_{t2} = \frac{(73.55)(1.6)}{(28490.03)} = 0.00413 \text{ m}$$

La condición de esfuerzos nos permite trabajar con una curva tipo 1, por lo tanto,  $\xi = 5$ .

$$\Delta\delta_{cs} = C_t \log(1 + 5T_v)$$

$$\Delta\delta_{cs2} = (0.00413) \log[1 + 5(55.47)] = 0.0100 \text{ m}$$

El asentamiento total debido a los módulos de rigidez de consolidación y consolidación primaria en el estrato 2 es:

$$\Delta\delta_{lp2} = 0.0201 + 0.0100 = 0.0301 \text{ m}$$

El asentamiento total en el punto de análisis debido al fenómeno de corto y largo plazo:

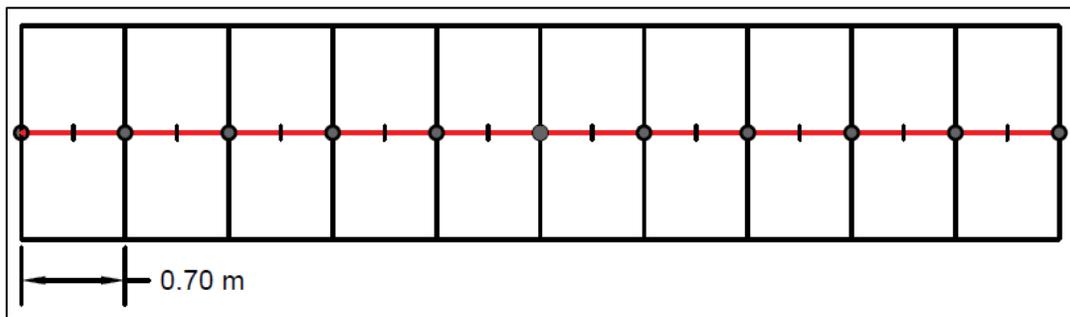
$$\Delta\delta_{inm+lp} = 0.0343 + 0.0473 + 0.0301 = 0.1117 \text{ m}$$

## 7.3 INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

### 7.3.1 Método directo

Corto plazo

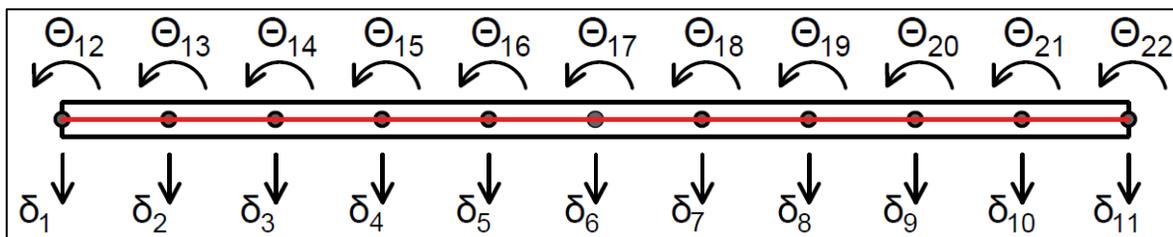
En el Capítulo 6 se argumentó la importancia de la interacción en el diseño de cimentaciones, cómo puede influir la rigidez en cada uno de los elementos en las deformaciones y los esfuerzos del otro. Para iniciar con el método es fundamental fragmentar el elemento para obtener resultados tenues en el diagrama de deformaciones y de elementos mecánicos. Para ello nuestro elemento de 7 metros se fragmenta en 10 áreas, las cuales tendrán una longitud de .7 m, teniendo 11 puntos de análisis en el problema (Figura 7.3). Para la solución se utilizará un código en fortran llamado [Cciseblx06.For] creado por el M.I. Agustín Deméneghi.



*Figura 7.3 Ejemplo de aplicación: puntos de análisis*

Análisis estructural

La cimentación se encuentra dividida por 10 barras, cada una de las barras las unen dos nodos, teniendo un total de 11 nodos. Para trabajar en una condición estáticamente determinada, se tendrán dos grados de libertad por cada nodo, despreciando las torsiones y los acortamientos, los grados de libertad corresponderán a desplazamientos y giros en cada uno de los nodos (Figura 7.4).



*Figura 7.4 Ejemplo de aplicación: grados de libertad*

Debido a la simetría del problema, la matriz de rigidez y el vector de cargas de empotramiento se representan en este caso como en la Tabla 7.1 y 7.2. Sin

embargo, para mayor claridad la matriz de rigidez y vectores obtenidos con el programa Cciseblx06.For se encuentran en el Anexo 1.

*Tabla 7.1 Ejemplo de aplicación: Matriz de rigidez*

$K\delta$											
	$\delta_1$	$\delta_3$	$\delta_5$	$\delta_7$	$\delta_9$	$\delta_{11}$	$\theta_{13}$	$\theta_{15}$	$\theta_{17}$	$\theta_{19}$	$\theta_{21}$
$\delta_1$	1E+07	0	0	0	0	0	-4E+06	0	0	0	0
$\delta_3$	0	2E+07	0	0	0	0	4E+06	-4E+06	0	0	0
$\delta_5$	0	0	2E+07	0	0	0	0	4E+06	-4E+06	0	0
$\delta_7$	0	0	0	2E+07	0	0	0	0	4E+06	-4E+06	0
$\delta_9$	0	0	0	0	2E+07	0	0	0	0	4E+06	-4E+06
$\delta_{11}$	0	0	0	0	0	1E+07	0	0	0	0	4E+06
$\theta_{13}$	-4E+06	4E+06	0	0	0	0	4E+06	0	0	0	0
$\theta_{15}$	0	-4E+06	4E+06	0	0	0	0	4E+06	0	0	0
$\theta_{17}$	0	0	-4E+06	4E+06	0	0	0	0	4E+06	0	0
$\theta_{19}$	0	0	0	-4E+06	4E+06	0	0	0	0	4E+06	0
$\theta_{21}$	0	0	0	0	-4E+06	4E+06	0	0	0	0	4E+06

El vector de empotramiento, de acuerdo a la sección 6.3, quedaría como:

*Tabla 7.2 Ejemplo de aplicación: Vector de cargas de empotramiento*

$P_e$			
$V_e$	$r_r$	$r_s$	
-7	0.2844	0.0656	$\delta_1$
-14	0.0656	0.0656	$\delta_3$
-14	0.0656	0.0656	$\delta_5$
-14	0.0656	0.0656	$\delta_7$
-14	0.0656	0.0656	$\delta_9$
-7	0.0656	0.2844	$\delta_{11}$
0	0.0128	-0.0128	$\theta_{13}$
0	0.0128	-0.0128	$\theta_{15}$
0	0.0128	-0.0128	$\theta_{17}$
0	0.0128	-0.0128	$\theta_{19}$
-0.82	0.0128	-0.0128	$\theta_{21}$

Se sustituyen en la fórmula 5.7 la matriz de rigidez y los vectores de carga y empotramiento, al sustituir tendremos un sistema de ecuaciones que se resolverá junto con la matriz de rigideces del suelo.

#### Matriz de flexibilidades del suelo

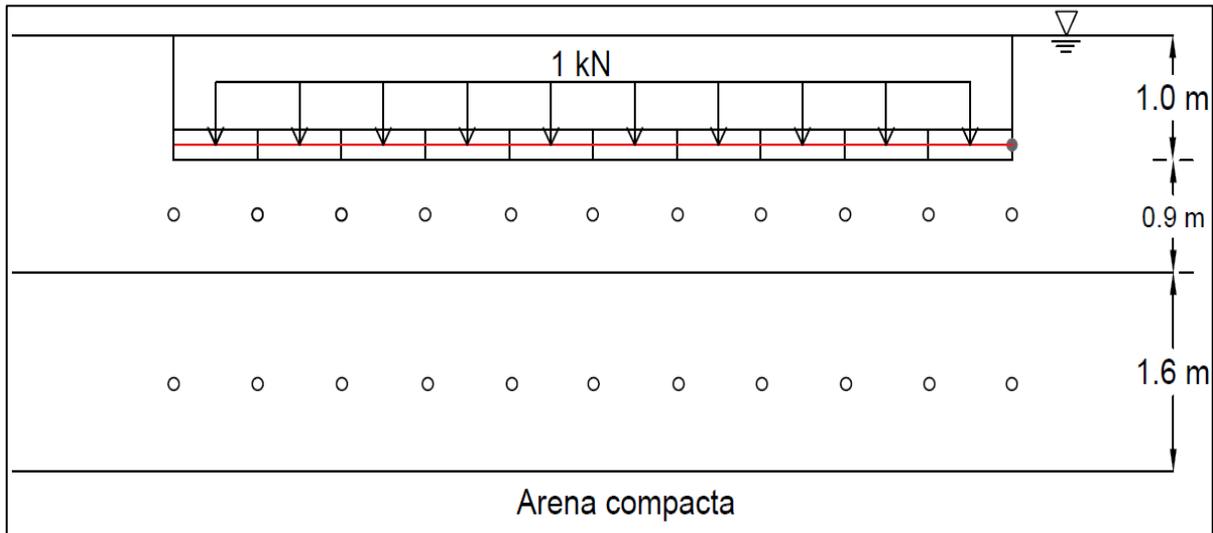
La matriz de flexibilidad del suelo se obtiene con la Ecuación 4.14, para el desarrollo de esta fórmula es necesario obtener los valores de influencia (Ecuación 4.13).

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{nr} \left( \frac{H_j}{E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{nr} I_{ijk} r_k d_k / a_k \quad (4.14)$$

Donde  $I_{ijk}$  es:

$$I_{ijk} = I_{zijk} - \nu(I_{xijk} + I_{yijk}) \quad (4.13)$$

Para obtener los valores de influencia, se aplica una carga unitaria en cada una de las áreas fragmentadas de la estructura, obteniendo un valor para cada uno de los puntos de análisis en cada estrato (Figura).



*Figura 7.5 Ejemplo de aplicación: puntos de análisis para el cálculo de valores de influencia.*

Los valores de influencia se obtienen mediante las ecuaciones de distribución de esfuerzos para un elemento rectangular de Damy (1985) y los esfuerzos perpendiculares a z, se calculan con las ecuaciones de Dashko y Kágan (1980). En el Anexo 2 se muestran los valores de influencia para el caso a corto plazo.

$$\sigma_z = \frac{q}{2\pi} \left[ \left( \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) \frac{xyz}{B} + \tan^{-1} \frac{xy}{zB} \right] \quad (4.4)$$

$$\sigma_x = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(y^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{x}{y} - \tan^{-1} \frac{yB}{yz} \right) \right] \quad (4.5)$$

$$\sigma_y = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{xyz}{(x^2 + z^2)B} - \tan^{-1} \frac{zB}{xy} + (1 - 2\nu) \left( \tan^{-1} \frac{y}{x} - \tan^{-1} \frac{yB}{xz} \right) \right] \quad (4.6)$$

Tomaremos como ejemplo el punto 1 para obtener la ecuación de flexibilidad de ese punto:

$$\delta_1 = \left( \frac{0.9}{3000} \right) \left[ \left( \frac{0.261137}{1.6} \right) r_1 - \left( \frac{0.008351}{1.6} \right) r_2 - \left( \frac{0.025472}{1.6} \right) r_3 + \dots - \left( \frac{0.0001846}{1.6} \right) r_{11} \right] \\ + \left( \frac{1.6}{4150} \right) \left[ \left( \frac{0.07316}{1.6} \right) r_1 - \left( \frac{0.09592}{1.6} \right) r_2 - \left( \frac{0.03065}{1.6} \right) r_3 + \dots - \left( \frac{0.000536}{1.6} \right) r_{11} \right]$$

Ejecutando las operaciones algebraicas:

$$\delta_1 = 0.00006659r_1 + 0.00002155r_2 + 0.000002609r_3 + \dots - 0.0000001638r_{11}$$

Repitiendo el proceso, se obtiene la matriz de flexibilidad del suelo. En el Anexo 3 está ubicada la matriz de flexibilidades de todo el problema. Resolviendo el sistema de ecuaciones del Anexo 1 y Anexo 2, se obtienen los asentamientos para una condición a corto plazo.

Resultados método directo a corto plazo:



Figura 7.6 Resultados método directo a corto plazo.

## Largo plazo

La condición a largo plazo en el problema se resuelve de una manera sistemáticamente similar a la condición a corto plazo, sin embargo, es necesario el cambio de las propiedades tanto como en el suelo como en la estructura. Debido que el suelo es altamente sensitivo y tiene propiedades permeables bastante bajas se agrega el efecto de la consolidación primaria y secundaria.

En la sección del cálculo geotécnico analítico se hizo el cálculo de las deformaciones en el suelo con las ecuaciones constitutivas de los profesores Terzaghi y Zeevaert, con ello y con la deformación inmediata, se puede obtener un módulo a largo plazo, el cual estará representado por la siguiente ecuación:

$$E_{lp} = \frac{\sigma_z \Delta_z}{\delta_{total}}$$

Donde:

$$\delta_{total} = \delta_{inm} + \delta_{cp} + \delta_{cs}$$

Sustituyendo los valores en las ecuaciones anteriores:

Estrato 1

$$\delta_{1total} = 0.0176 + 0.0257 + 0.0216 = 0.0650$$

$$E_{lp1} = \frac{(132.267)(0.9)}{(0.0650)} = 1831.39$$

Estrato 2

$$\delta_{2total} = 0.0167 + 0.0201 + 0.0100 = 0.0468$$

$$E_{lp2} = \frac{(73.55)(1.6)}{(0.0468)} = 2514.53$$

Una vez obtenidos los módulos se procede a obtener la matriz de rigideces, en condición a largo plazo, tomando en cuenta el comportamiento del suelo en un estado de deformación tal que  $\nu = 0$ .

Para la estructura el procedimiento es exactamente el mismo, con la singularidad de que debido al fenómeno de creep, el concreto disminuye su rigidez, por ello se afecta con un factor de reducción  $\alpha = 0.7$ . Con estas modificaciones en las propiedades se obtienen las matrices para su solución, estas se pueden encontrar en el Anexo 1.

Resultados obtenidos con el método directo:



*Figura 7.7 Resultados método directo a largo plazo.*

### 7.3.2 Elementos finitos

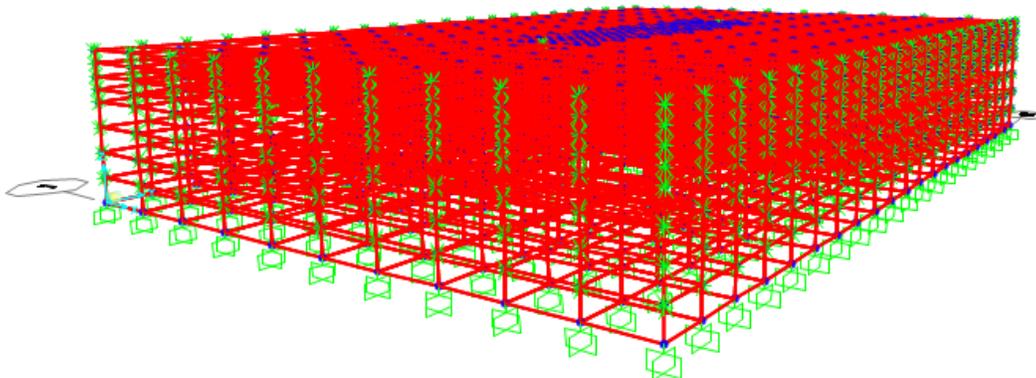
El análisis de elementos finitos ha generado una evolución en la ingeniería geotécnica y en general. Consiste en modelar la geometría del problema y discretizarla en elementos triangulares o poligonales, los cuales representan ecuaciones que son resueltas mediante soluciones matriciales. El comportamiento se rige de acuerdo al modelo constitutivo y con el número de elementos con el que se esté trabajando. La solución del modelo se basa en la mecánica del medio continuo y resolviéndose un problema elástico, en geotecnia, se puede modelar una situación visco-elástica, haciéndola apta para analizarse con leyes elásticas.

La solución dada a este problema es presentada con el programa SAP2000, a pesar de ser conocido comercialmente como un software de ingeniería estructural, contiene herramientas con las que se es posible modelar y discretizar un suelo para el análisis de esfuerzos y deformaciones. Para ello, es necesario modelar el suelo como un sólido aplicándole propiedades elásticas del suelo.

#### Corto plazo

En el caso a corto plazo, se trazó y discretizó la geometría en 3D con 1600 elementos sólidos para modelar el suelo. Las condiciones de frontera se modelaron con restricciones en los nodos, en toda la periferia del modelo se tienen sólo movimientos en  $z$  y en la parte inferior del modelo se tienen empotramientos, evitando desplazamientos y rotaciones en  $x, y$  y  $z$  (Figura 7.8).

La losa de la zapata fue modelada con un elemento de área de acuerdo a la geometría del problema con un peralte de 0.25 m y la trabe con un elemento de barra con las dimensiones de la trabe, ambas con propiedades del concreto (Tabla 7.5).

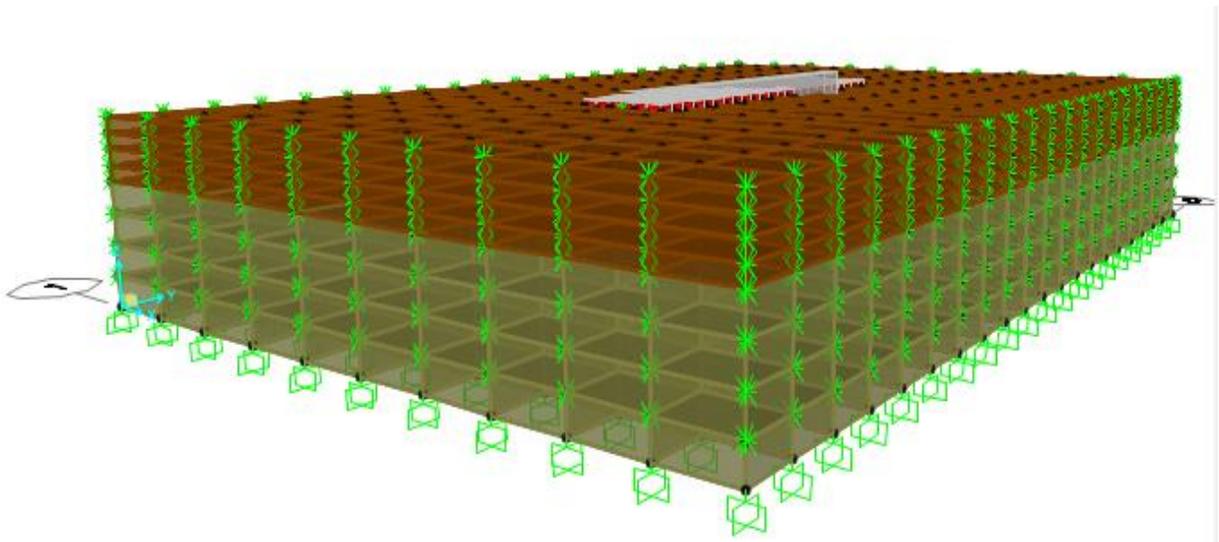


*Figura 7.8 Ejemplo de aplicación: Malla de elementos finitos y condiciones de frontera.*

*Tabla 7.3 Propiedades a corto plazo; modelado numérico.*

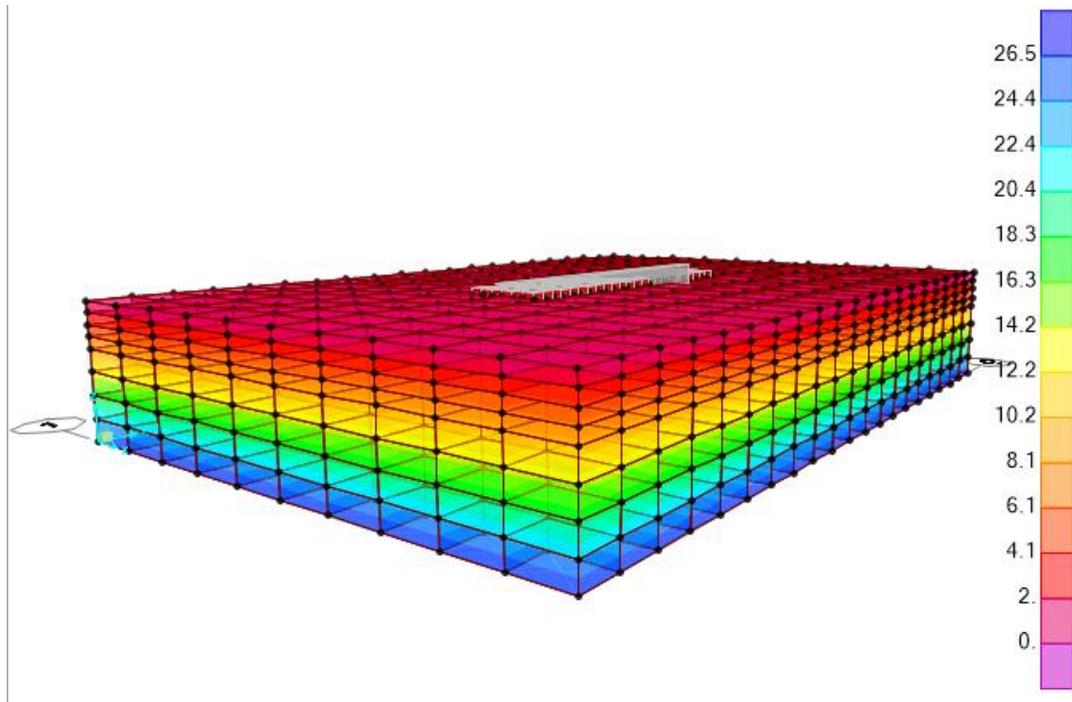
PROPIEDADES CORTO PLAZO			
	$\gamma$	E	$\nu$
MATERIAL	[kN/m <sup>3</sup> ]	kPa	-
Concreto	24	23763737	0.2
E1	16.5	3000	≈ 0.5
E2	18	4150	≈ 0.5

Los materiales del elemento sólido son definidos con los parámetros elásticos a corto plazo, es decir, parámetros en condiciones no drenadas, obtenidos como se especificó en el Capítulo 4 (Tabla 7.5). En la Figura 7.9 se muestra la geometría con los materiales ya asignados.



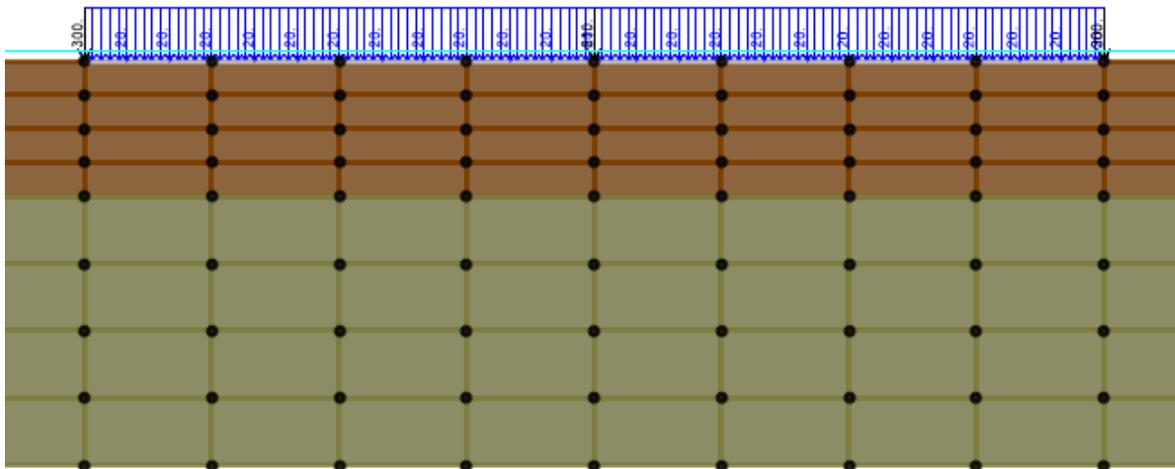
*Figura 7.9 Ejemplo de aplicación: Geometría del modelo y asignación de materiales.*

Para el análisis a corto plazo se impone a los elementos sólidos una presión de poro, la cual actuará desde la superficie superior hasta la superficie inferior del suelo, esto para simular la condición no drenada. En la Figura 7.10 se puede mostrar cómo se encuentra distribuida esta presión en todo el suelo.



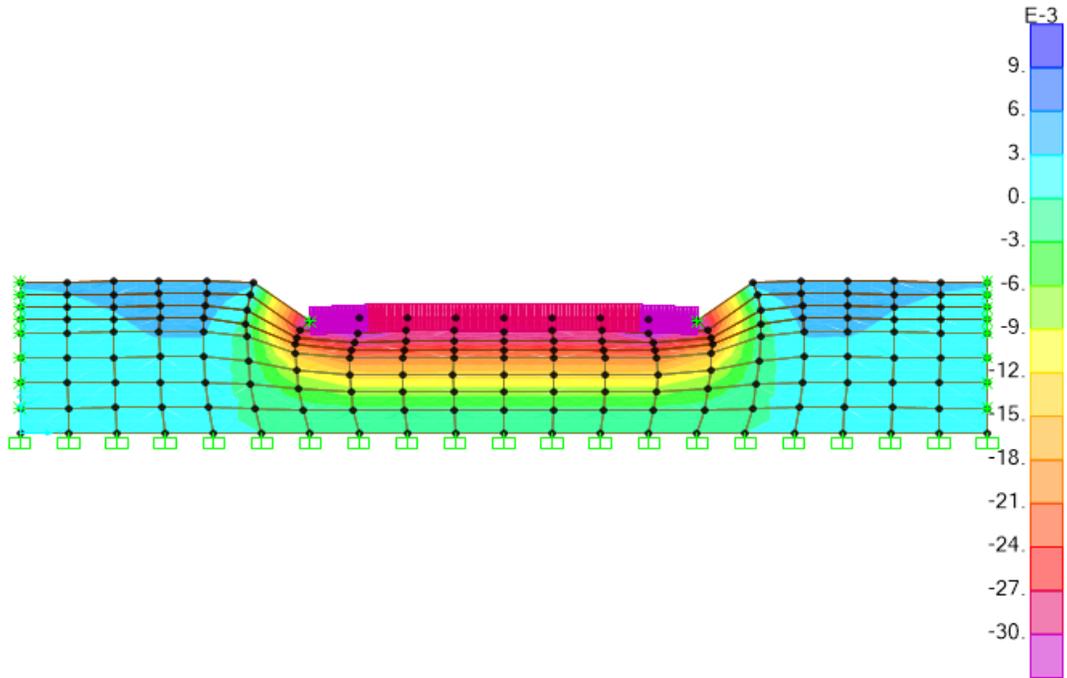
*Figura 7.10 Ejemplo de aplicación: Distribución de la presión de poro.*

Las cargas fueron aplicadas en el elemento barra, se asignaron como una carga distribuida y tres cargas puntuales (Figura 7.11).



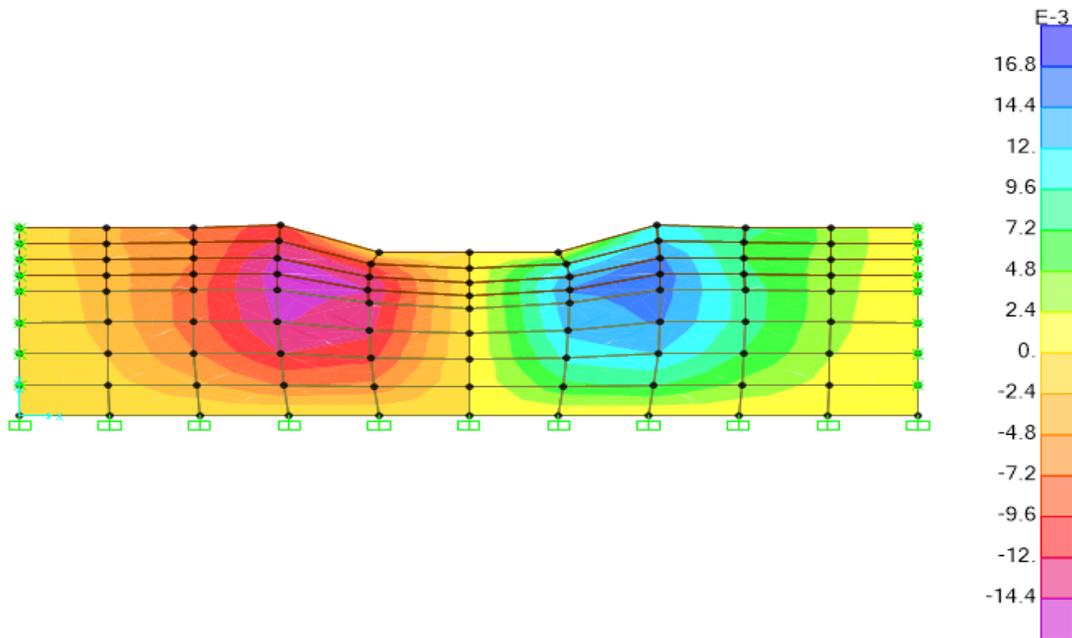
*Figura 7.11 Ejemplo de aplicación: Cargas en el elemento viga.*

Al momento de correr el análisis los resultados en las deformaciones se muestran en la Figura 7.12. En el centro de la zapata se tiene un asentamiento de 3.05 cm, mientras que en las orillas se tienen asentamientos de 3.28 cm.



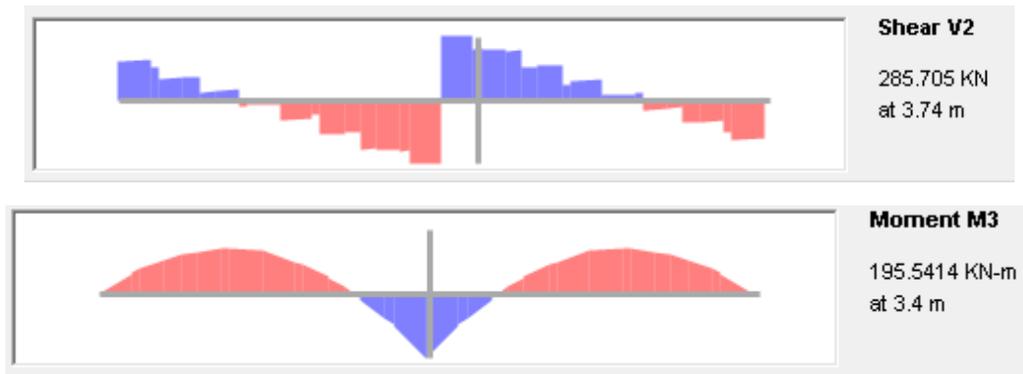
*Figura 7.12 Ejemplo de aplicación: Desplazamientos en dirección z a corto plazo.*

Los desplazamientos en x, se pueden observar en la Figura 7.13, donde la geometría favorece a la simetría, teniendo desplazamientos de misma magnitud en diferentes sentidos.



*Figura 7.13 Ejemplo de aplicación: deformaciones en dirección x a corto plazo.*

Los elementos mecánicos obtenidos con el programa de modelación numérica se muestran en la Figura 7.14. En ellos observamos que el esfuerzo cortante máximo es ligeramente menor al cálculo de la interacción con el método directo esta diferencia es de un 6.3%. Por otro lado, el momento máximo en el método de los elementos finitos es ligeramente mayor por un 11.5% con respecto al método directo.



*Figura 7.14 Ejemplo de aplicación: Elementos mecánicos obtenidos con modelado numérico a corto plazo.*

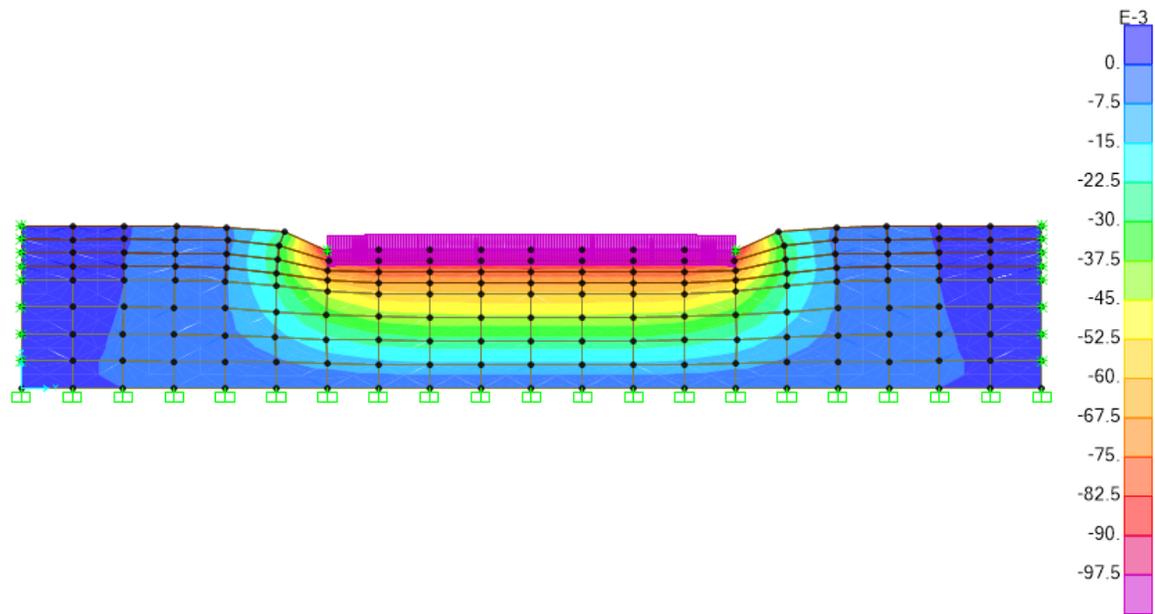
#### Largo plazo

La modelación geométrica a largo plazo es exactamente igual, para simular el efecto de la consolidación eliminamos la presión de poro en los sólidos, además se utilizaron los parámetros a largo plazo que obtuvimos en la sección anterior, los parámetros a corto plazo se presentan en la Tabla 7.4.

*Tabla 7.4 Propiedades para análisis a largo plazo.*

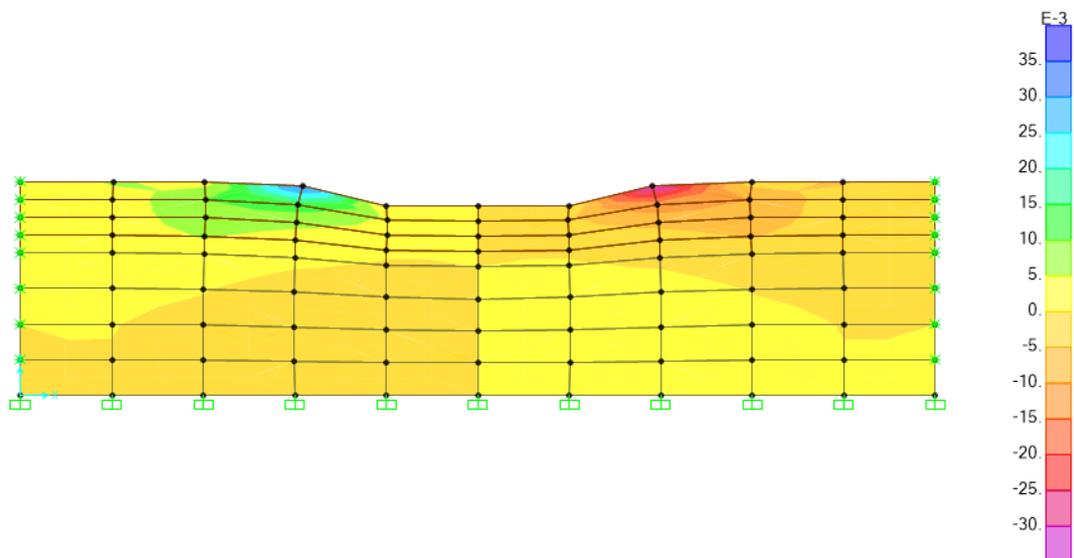
PROPIEDADES LARGO PLAZO			
	$\gamma$	E	$\nu$
MATERIAL	[kN/m <sup>3</sup> ]	kPa	-
Concreto	24	16634620	0.2
E1	16.5	1831.39	≈ 0.0
E2	18	2514.53	≈ 0.0

Se calcularon deformaciones de hasta 10.34 cm en los extremos del elemento estructural, mientras que en el centro se tienen deformaciones de 10.08 cm. En la Figura 7.15 se puede observar la configuración y la distribución de la deformación en el suelo.



*Figura 7.15 Ejemplo de aplicación: deformaciones en dirección z a largo plazo.*

Las deformaciones horizontales debido a la condición a largo plazo son despreciables, sin embargo, es importante tomar en cuenta que estas deformaciones son más significativas en la condición a corto plazo. En la Figura 7.16 se observa que las deformaciones mayores son de 3 cm en la superficie y al lado de la estructura, al contrario del caso a corto plazo, más que un desplazamiento de tierras producto de la aplicación de cargas, es un desplazamiento del suelo debido a la deformación vertical.



*Figura 7.16 Ejemplo de aplicación: desplazamientos en dirección x a largo plazo.*

Los diagramas de elementos mecánicos en el caso a largo plazo están representados en la Figura 7.17. El esfuerzo cortante que se presenta a largo plazo es menor al que se presenta en corto plazo, en comparación al método directo tenemos una diferencia del 11.14% y en el momento máximo una diferencia con respecto al método directo de 5.62%.

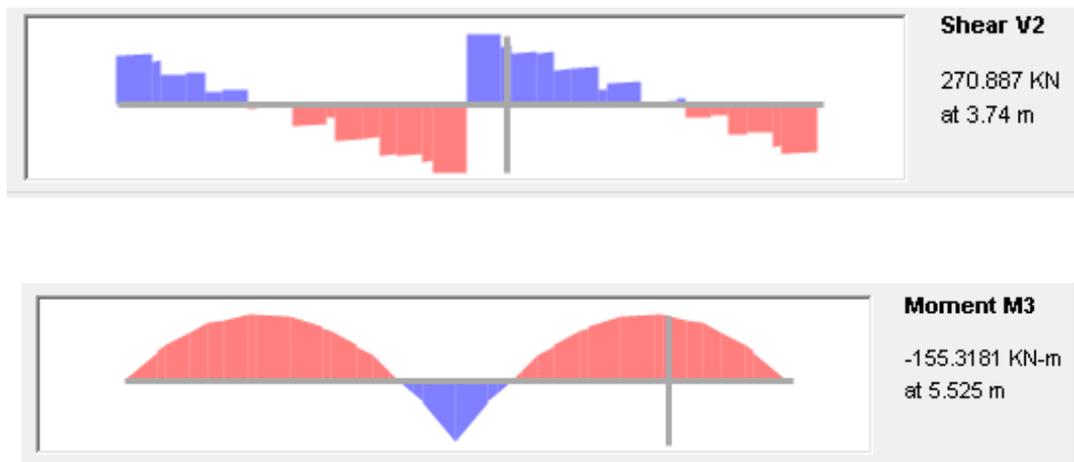


Figura 7.17 Ejemplo de aplicación: Elementos mecánicos obtenidos con modelado numérico a largo plazo.

## 7.4 DISEÑO ESTRUCTURAL

### 7.4.1 Método directo

Con los valores máximos y mínimos obtenidos de los elementos estructurales con el método directo se hará el diseño estructural Tabla 7.5.

Tabla 7.5 Ejemplo de aplicación: momentos y cortantes máximos método directo

ELEMENTO MECÁNICO		Corto plazo	Largo plazo	
MOMENTO	MAX	133.0094	164.57	kN/m
	MIN	-172.8167	-154.27	
CORTANTE	CENTRO	305.0123	304.85	kN
	EXTREMOS	-299.9944	-299.93	

Para la contratrabe se utilizarán los valores críticos, en este caso será el momento negativo, este se da en una condición a largo plazo con un valor de  $M_{cri} = 172.82 \text{ kN/m}$  y el cortante en el centro con un valor de  $V_{cri} = 305.012 \text{ kN/m}$ , estos serán utilizados para el diseño estructural en flexión y por cortante, respectivamente.

Cálculo por momento flexionante

Se calcula la resistencia a la flexión la siguiente ecuación:

$$M_R = F_R b d^2 f_c'' q (1 - 0.5q)$$

Donde  $q$  es el índice de refuerzo a tensión:

$$q = \frac{p f_y}{f_c''}$$

$p$  cuantía de refuerzo longitudinal

$$p = qbd$$

Despejando  $q$  de la Ecuación \*, se obtiene:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{f_R b d^2 f_c''}}$$

De acuerdo con las normas técnicas complementarias las secciones sin acero de compresión tienen falla balanceada cuando su área de acero es:

$$A_s = \frac{f_c''}{f_y} \frac{6000 \beta_1}{f_y + 6000} b d$$

La cuantía mínima y máxima de refuerzo está dada por las siguientes ecuaciones:

$$p_{min} = 0.7 \frac{\sqrt{f_c'}}{f_y}$$

$$p_{max} = 0.75 p_b$$

Para obtener  $p_b$  se utiliza la ecuación del área cuando se produce una falla balanceada:

$$p_b = \frac{A_s}{b d}$$

∴

$$p_b = \frac{f_c''}{f_y} \frac{6000 \beta_1}{f_y + 6000}$$

Se sustituye en las ecuaciones anteriores y se tiene:

$$p_{min} = 0.7 \frac{\sqrt{f_c'}}{f_y}$$

$$p_{min} = 0.7 \frac{\sqrt{300}}{4200} = 0.00289$$

$$p_{max} = 0.75 \left( \frac{f'_c}{f_y} \frac{6000 \beta_1}{f_y + 6000} \right)$$

De acuerdo con el manual técnico de obras complementarias el factor para la obtención de resistencias a flexión  $\beta_1$  si un concreto es mayor a 280 kg/cm<sup>2</sup>, es igual a:

$$\beta_1 = 1.05 - \frac{f'_c}{1400}$$

$$\beta_1 = 1.05 - \frac{300}{1400} = 0.84$$

$$p_{max} = 0.75 \left( \frac{204}{2400} \left[ \frac{6000 (0.84)}{2400 + 6000} \right] \right) = 0.0315$$

Para el cálculo del momento resistente,  $M_R = M_U$ , por consiguiente:

$$M_U = 1.6 M_{cri}$$

$$M_U = 1.6 (172.82) = 276.512 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Debido a que las ecuaciones que han sido utilizadas están dadas en kg y cm, se hace una conversión del momento último  $M_U$ :

$$M_U = 276.512 \left( \frac{1}{9.8} \right) (1000)(100) = 2,821,551.02 = 282.155 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Por lo tanto, con la Ecuación \* obtenemos el índice de refuerzo a tensión

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2 (282.155 \times 10^4)}{(0.90) (30) (75)^2 (204)}} = 0.095643$$

$$p = q \frac{f'_c}{f_y}$$

$$p = 0.095643 \frac{204}{4200} = 0.00465$$

$$A_s = 0.00465 (30) (75) = 10.45 \text{ cm}^2$$

$$\text{N}^\circ 8 - a_s = 5.07 \text{ cm}^2 \quad \text{N}^\circ 4 - a_s = 2.85 \text{ cm}^2 \quad A_s = 2(5.07) + 1(2.85) = 12.92 \text{ cm}^2$$

Refuerzo para fuerza cortante de la contra-trabe

La separación del refuerzo transversal estará en función de la relación entre  $V_u$  y  $V_{CR}$ .

$$s = \frac{F_R A_v f_y d (\sin\theta + \cos\theta)}{V_{SR}}$$

Donde,  $A_v$  es el área transversal del refuerzo para fuerza cortante en una distancia  $s$ ,  $\theta$  es el ángulo que el refuerzo forma con el eje de la pieza y  $V_{SR}$  fuerza cortante de diseño que toma el acero transversal, calculada como:

$$V_{SR} = V_u - V_{CR}$$

$$\theta = 90^\circ$$

De acuerdo con las Normas Técnicas para cortante:

$$F_R = 0.8$$

Debido a que  $p < 0.015$  tenemos que:

$$V_{CR} = F_R b d (0.2 + 20p) \sqrt{f'_c}$$

Sustituyendo:

$$V_{CR} = (0.75)(30)(75)[0.2 + 20(0.00465)]\sqrt{240} = 7659.79 \text{ kg}$$

$$V_u = 1.6(305.012) = 488.091 \text{ kN} \left( \frac{1}{9.8\text{N}} \right) (1000\text{kg}) = 49797.88 \text{ kg}$$

$$V_{SR} = 49797.88 - 7659.79 = 42138.9 \text{ kg}$$

Las varillas transversales del N°4 tienen un área de  $1.27 \text{ cm}^2$ , por lo tanto:

$$A_v = 2(1.27) = 2.54 \text{ cm}^2$$

$$s = \frac{(0.75)(2.54)(4200)(75)(1)}{(42138.9)} = 14.24 \text{ cm} \approx 15 \text{ cm}$$

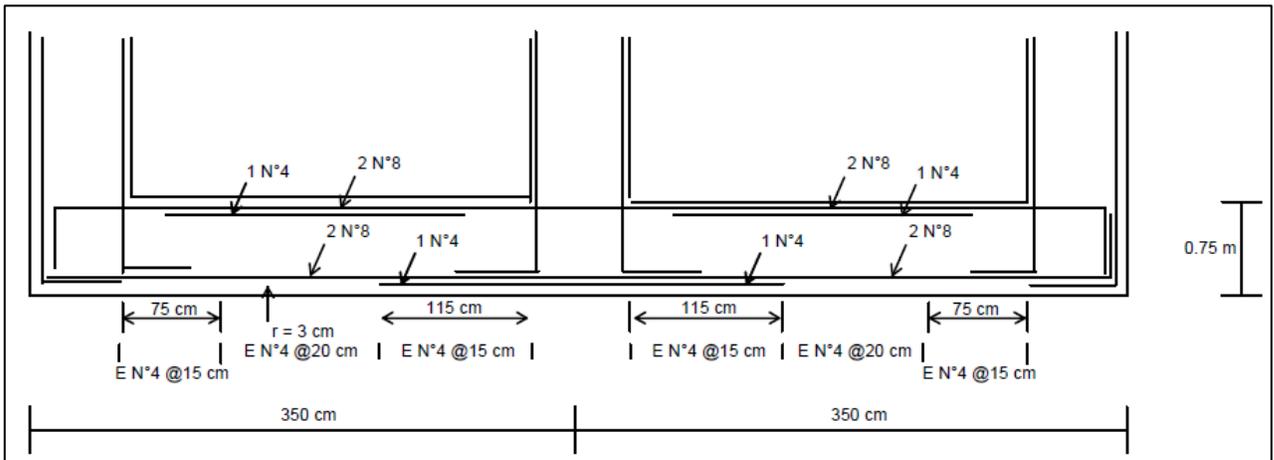


Figura 7.18 Refuerzo de la trabe; método directo.

## Losa de la Zapata

En los diagramas de reacciones se considera el más desfavorable, sin embargo, debido a que las reacciones aumentan bajo las columnas de la estructura, por esta razón para fines de diseño no es conveniente tomar las reacciones en los extremos, por lo tanto, se utilizará una reacción de 172.49 ubicada en el centro.

La presión vertical equivale a:

$$\frac{172.49}{1.6} = 107.81 \text{ kPa}$$

La reacción neta debido a tan solo las cargas es:

$$q_n = 107.81 - (0.25)(24) - (0.75)(16.5) = 89.44 \text{ kPa}$$

## Tensión diagonal

Se revisa el peralte de 0.25 m de la losa para cumplir con la seguridad estructural. La sección crítica por tensión diagonal se presenta a una distancia  $d$  (donde  $d$  es el peralte efectivo) del pie de la trabe Figura \*. Para definir el peralte efectivo es necesario tener en cuenta el proceso constructivo; se cuela una plantilla de concreto pobre en el terreno de aproximadamente 4 cm, el recubrimiento del acero llega a ser de por lo menos 3 cm, es decir, el peralte efectivo de la zapata es de:

$$d = 25 - 3.4 = 21.6 \text{ cm}$$

Por lo tanto, la sección crítica está a:

$$.8 - .15 - .216 = .434 \text{ m}$$

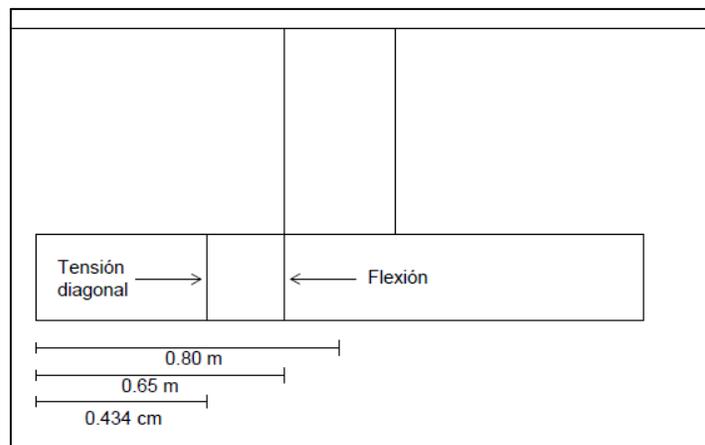


Figura 7.19 Sección crítica para tensión y flexión.

Se calculará el cortante y el momento en la sección crítica con un ancho efectivo de 120 cm.

$$V = 89.44 (0.434) = 38.82 \text{ kN}$$

$$M = 89.44 \frac{(0.434)^2}{2} = 7.48 \text{ kN} - m$$

$$V_u = 1.6 (38.82) = 62.112 \text{ kN} - m = 6337.96 \text{ kg}$$

De acuerdo con las normas de construcción en concreto de la Ciudad de México en elementos donde el peralte  $d$  no sea mayor de 60 mm, el ancho  $B$  no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo  $d$ , es decir,  $B \geq 4d$  y la relación  $M/V_d$  no exceda de 2.0, la fuerza cortante resistente,  $V_{CR}$  deberá calcularse como:

$$V_{CR} = F_R 0.5 \sqrt{F'_c} b d$$

En este caso:

$$B = 1.2 \text{ m} \quad 4d = 0.80 \text{ m}$$

$$1.2 > 0.80$$

$$7.48/46.55 < 2$$

Para cortante:

$$F_R = 0.75$$

Entonces:

$$V_{CR} = (0.75)0.5 \sqrt{300} (120)(21.6) = 14026.61 \text{ kg}$$

$$14026.61 \text{ kg} > 6337.96 \text{ kg} \quad \text{Cumple}$$

Flexión

La sección crítica para el momento flexionante se encuentra justamente en el pie de la trabe. Por lo tanto, el momento flexionante en la sección crítica es:

$$M = 89.44 \frac{(0.65)^2}{2} = 18.89 \text{ kN} \cdot m$$

$$M_u = 1.4(18.89) = 26.45 \text{ kN} \cdot m = 269670 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

El acero mínimo y máximo para flexión en la zapata es de:

$$p_{min} = 0.00289$$

$$p_{max} = 0.0315$$

La cantidad de acero necesario para soportar el momento último es de:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(269670)}{(0.90)(120)(21.6)^2(204)}} = 0.0266$$

$$p = 0.0266 \frac{204}{4200} = 0.00129 < p_{min}$$

Como es menor que la cuantía de acero mínimo, entonces, calculamos con  $p_{min}$ :

$$A_s = (0.00289)(120)(21.6) = 7.49 \text{ cm}^2$$

$$s = a_s \frac{b}{A_s} = \frac{(0.712)(120)}{7.49} = 11.41$$

### Temperatura

En la Sección 6.7 de las normas de construcción en concreto de la Ciudad de México estipula que en toda dirección en que la dimensión de un elemento estructural sea mayor que 1.5 m, el área de esfuerzo que se suministre no será menor que:

	$a_{s1} = \frac{660x_1}{f_y(x_1 + 100)}$	
--	--	--

Donde,  $a_{s1}$  es el área transversal del refuerzo colocado en la dirección que se considera, por unidad de ancho de la pieza,  $\text{cm}^2/\text{cm}$ .  $x_1$  es la dimensión mínima del miembro medida perpendicularmente al refuerzo, cm.

Si  $x_1$  no excede de 15 cm, se puede aplicar en sólo una capa, por lo tanto el refuerzo aplicado será a la mitad del peralte de la losa, es decir 12.5 cm.

$$a_{s1} = \frac{660(12.5)}{f_y(12.5 + 100)} = .017 \text{ cm}^2/\text{cm}$$

Debido a que se están analizando 1.20 m de ancho y en las Normas Técnicas de Concreto dice que cuando el elemento está en contacto directo con la intemperie, el área transversal se multiplica por 1.5.

$$A_s = (0.017)(120)(1.5) = 3.06$$

Tomando en cuenta que se usarán varillas de N° 3 ( $a_s = 0.712$ ) la siguiente ecuación la separación de las varillas será de:

$$s = a_s \frac{b}{A_s} = \frac{(0.712)(120)}{3.06} = 27 \text{ cm}$$

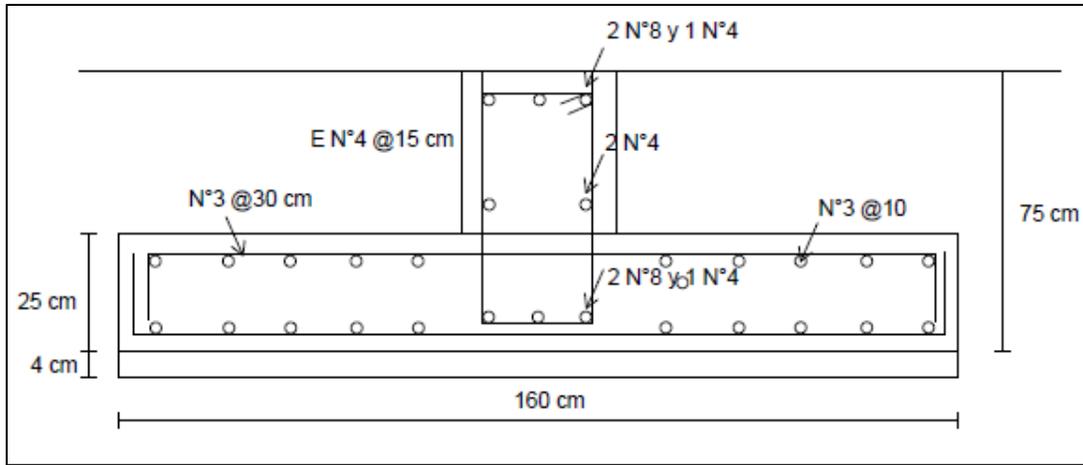


Figura 7.20 Refuerzo de la losa de la zapata; método directo.

#### 7.4.2 Elemento finito

El cortante y momento máximo obtenidos están representados por los siguientes valores:

$$V = 285.705 \text{ kN}$$

$$M = 195.541 \text{ kN.m}$$

Trabe

Diseño por flexión

El procedimiento es el mismo, solamente se modificarán datos que relacionan el cortante y el momento máximo. Obtenemos el momento último:

$$M_u = (1.6)(195.541 \text{ kN.m}) = 312.87 \text{ kN.m} = 319.255 \times 10^4 \text{ kg.cm}$$

Posteriormente obtenemos la cantidad de acero:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(319.255 \times 10^4)}{(0.90)(30)(75)^2(204)}} = 0.109$$

$$p = 0.109 \frac{204}{4200} = 0.00529$$

$$A_s = (0.00529)(30)(75) = 11.90 \text{ cm}^2$$

$$\text{N}^\circ 8 - a_s = 5.07 \text{ cm}^2 \quad \text{N}^\circ 6 - a_s = 2.85 \text{ cm}^2 \quad A_s = 2(5.07) + 1(2.85) = 12.92 \text{ cm}^2$$

Refuerzo para fuerza cortante de la contra-trabe

La separación del refuerzo transversal estará en función de la relación entre  $V_u$  y  $V_{CR}$ .

De acuerdo con las Normas Técnicas para cortante:

$$F_R = 0.8$$

Debido a que  $p < 0.015$  tenemos que:

$$V_{CR} = F_R b d (0.2 + 20p) \sqrt{f_c^*}$$

Sustituyendo:

$$V_{CR} = (0.75)(30)(75)[0.2 + 20(0.00529)]\sqrt{240} = 7994.42 \text{ kg}$$

$$V_u = 1.6(285.705) = 467.128 \text{ kN} \left( \frac{1}{9.8\text{N}} \right) (1000\text{kg}) = 46645.71 \text{ kg}$$

$$V_{SR} = 46645.71 - 7994.42 = 38651.29 \text{ kg}$$

Las varillas transversales del N°4 tienen un área de  $1.27 \text{ cm}^2$ , por lo tanto:

$$A_v = 2(1.27) = 2.54 \text{ cm}^2$$

$$s = \frac{(0.75)(2.54)(4200)(75)(1)}{(38651.29)} = 15.52 \text{ cm} \approx 15 \text{ cm}$$

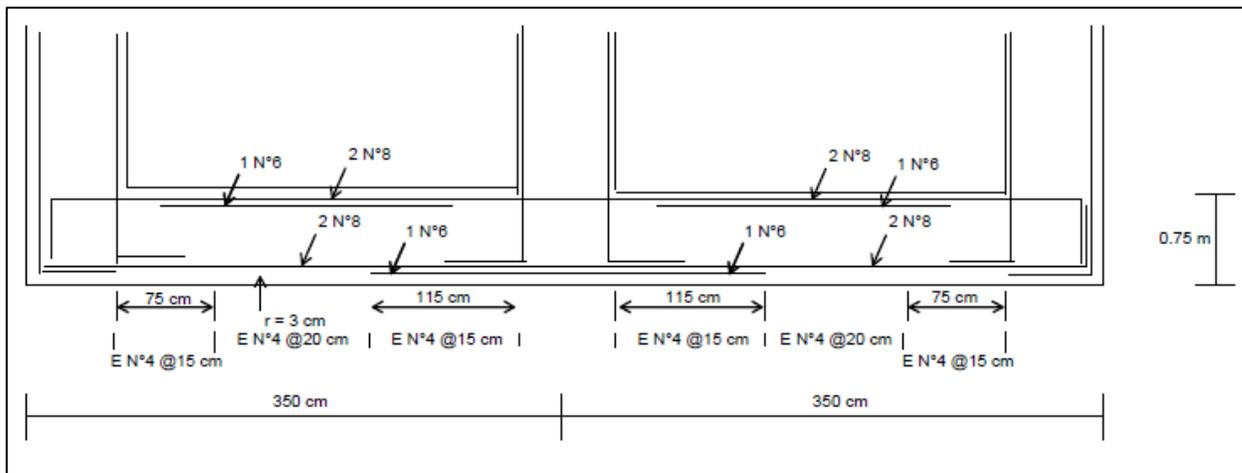


Figura 7.21 Refuerzo de la contratrabe; método de elementos finitos.

### Losa de la Zapata

Para fines de diseño no es conveniente tomar las reacciones en los extremos, por lo tanto, el programa nos arroja la reacción neta la cual es de  $75.73 \text{ kN}$  ubicada al centro de la carga del extremo y de la carga del medio.

### Tensión diagonal

Se revisa el peralte de 0.25 m de la losa para cumplir con la seguridad estructural. Para ello calculará el cortante y el momento en la sección crítica con un ancho efectivo de 1.20 m y con el peralte efectivo calculado anteriormente.

$$V = 75.73 (0.434) = 32.87 kN$$

$$M = 75.73 \frac{(0.434)^2}{2} = 7.13 kN - m$$

$$V_u = 1.6 (32.87) = 52.60 kN = 5366.53 kg$$

De acuerdo con las normas de construcción en concreto de la Ciudad de México en elementos donde el peralte  $d$  no sea mayor de 60 mm, el ancho  $B$  no sea menor que cuatro veces el peralte efectivo  $d$ , es decir,  $B \geq 4 d$  y la relación  $M/V_d$  no exceda de 2.0, la fuerza cortante resistente,  $V_{CR}$  deberá calcularse como:

$$V_{CR} = F_R 0.5 \sqrt{F'_c} b d$$

En este caso:

$$B = 1.2 m \quad 4d = 0.80 m$$

$$1.2 > 0.80$$

$$7.13/32.87 < 2$$

Para cortante:

$$F_R = 0.75$$

Entonces:

$$V_{CR} = (0.75)0.5 \sqrt{300} (120)(21.6) = 14026.61 kg$$

$$14026.61 kg > 5366.53 kg \quad \text{Cumple}$$

### Flexión

La sección crítica para el momento flexionante se encuentra justamente en el pie de la trabe. Por lo tanto, el momento flexionante en la sección crítica es:

$$M = 75.73 \frac{(0.65)^2}{2} = 16.00 kN.m$$

$$M_u = 1.4(16.00) = 22.4 \text{ kN.m} = 228571.43 \text{ kg.cm}$$

El acero mínimo y máximo para flexión en la zapata es de:

$$p_{min} = 0.00289$$

$$p_{max} = 0.0315$$

La cantidad de acero necesario para soportar el momento último es de:

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2(228571.43)}{(0.90)(120)(21.6)^2(204)}} = 0.0224$$

$$p = 0.0224 \frac{204}{4200} = 0.00109 < p_{min}$$

Como es menor que la cuantía de acero mínimo, entonces, calculamos con  $p_{min}$ :

$$A_s = (0.00289)(120)(21.6) = 7.49 \text{ cm}^2$$

$$s = a_s \frac{b}{A_s} = \frac{(0.712)(120)}{7.49} = 11.41$$

Temperatura

El refuerzo por temperatura es similar que el caso anterior.

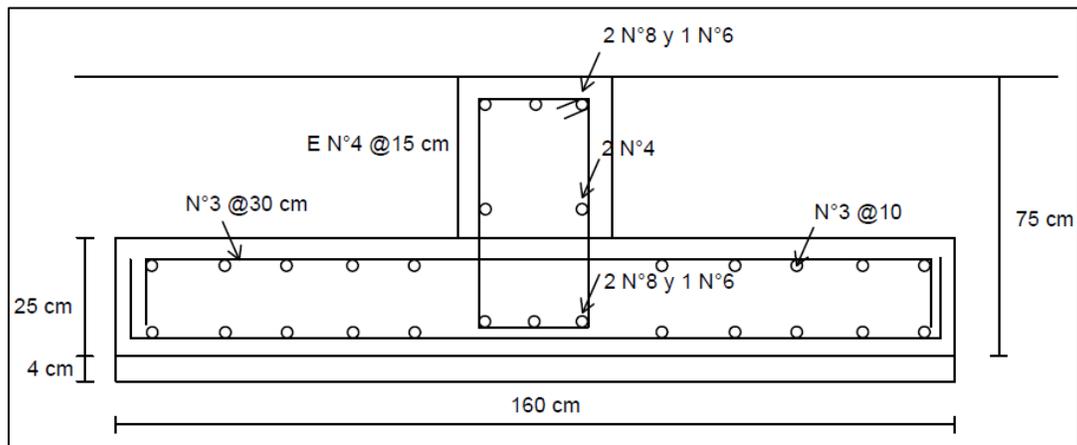


Figura 7.22 Refuerzo de la losa; método de elementos finitos

## 8. CONCLUSIONES

Como consecuencia a lo expuesto en este trabajo de investigación, se demuestra una vez más que el peculiar problema de sensibilidad del suelo de la Ciudad de México es parte responsable de los hundimientos diferenciales que se tienen en las estructuras. La composición mineralógica y la naturaleza electrolítica de estos suelos, juegan un papel fundamental en su comportamiento, sin embargo, aún con esta peculiaridad el diseño de cimentaciones enfrenta más factores como el bombeo regional que existe en la Ciudad de México, el cual no fue abordado en este trabajo.

La sensibilidad de las arcillas de la Ciudad de México, limita la aplicación de cargas en estos suelos, como se definió en el capítulo IV, para los suelos sensitivos el esfuerzo máximo es llamado esfuerzo crítico, este es el esfuerzo que puede ser aplicado sin que la estructura de los minerales colapse, es decir, es importante que el ingeniero geotecnista y estructural tengan consciencia de este comportamiento y se diseñe con esfuerzos menores a éste con fin de evitar asentamientos diferenciales de gran magnitud.

Con respecto al tiempo que se necesita para la disipación de presión de poro son necesarios dos análisis, por lo tanto, es importante analizar la estructura a corto y largo plazo, esto se da:

Corto plazo: Debido a la baja permeabilidad el agua no puede filtrarse lo suficientemente rápido por lo tanto se tiene parámetros afectados por la presión de poro.

Largo plazo: Consecuente a que la disipación de presión de poro está en función de la permeabilidad, cuando hay disipación de presión de poro, hay cambio de volumen, por lo tanto, hay consolidación, la cual se encuentra en función del tiempo.

Debido a que en suelos sensitivos la consolidación puede continuar debido al fenómeno de la viscosidad intergranular, es importante incluir este fenómeno en el análisis a largo plazo. Es crucial saber que la consolidación primaria termina cuando existe una disipación total en el exceso de poro, posterior a esta disipación las deformaciones son debidas al comportamiento viscoso entre las partículas. Es importante al analizar la condición a largo plazo tener en cuenta la vida útil de la estructura, es por eso que los cálculos se hicieron a un plazo de 50 años.

Con respecto al problema de la interacción en el suelo, llego a la conclusión que un análisis de asentamientos tradicional, es decir, sin considerar el efecto de

la estructura se asemeja a una solución conservadora. En ambos casos donde se hizo un análisis de interacción se obtuvo asentamientos menores al cálculo tradicional, siendo este resultado un tanto elemental, pues la estructura impone una resistencia a la deformación y modifica los asentamientos diferenciales de una manera favorable.

El diseño estructural en ambos casos se mantuvo relativamente similar, aunque se tuvo que colocar un poco más de refuerzo a flexión en la trabe en la solución con el programa de elementos finitos (SAP2000). Sin embargo, los cálculos, tanto el método directo (Demeneghi, 2011) y el método de elementos finitos se encuentran en el mismo orden de magnitud, es decir, el método con fundamentos del profesor Chamecki se encuentra a la par de una solución de elementos finitos para una cimentación superficial.

El uso del programa SAP 2000 a pesar de que es un programa que originalmente se creó para estructuras, tienen un uso aplicable en el suelo, resuelve de una manera satisfactoria el problema, la cuestión es tener el conocimiento de los parámetros que hay que introducir en él. Por ello es necesario una comunicación constante y un entendimiento claro entre el ingeniero estructurista y geotecnista, para un diseño óptimo, con los parámetros de cálculo que con nitidez representen físicamente al suelo.

En los últimos años se han introducido gran variedad de programas de elementos finitos para la geotecnia, la mayoría de los programas de elementos finitos son completos y capaces de darnos diagramas de elementos mecánicos, la diferencia de SAP2000 es que es posible diseñar toda una estructura con la acción el suelo en un solo programa. En la actualidad los programas de elementos finitos son muy utilizados, pero no son una herramienta definitiva, en un futuro, una vez que se tengan suficientes antecedentes, los programas de elemento finito podrían ser la principal herramienta de cálculo.

El análisis de la interacción suelo-estructura, es un análisis más completo que el tradicional, puede mitigar los efectos de la incertidumbre, tanto para el mal diseño como para el sobre-diseño, intentando siempre estar del lado de la seguridad.

Por último, el análisis estructural y geotécnico se han tratado con ciertas brechas en los últimos años, sin embargo, es fundamental la relación entre ambas disciplinas, esto ayudará a entender mejor lo que sucede físicamente en el análisis

ANEXO 1: Resultados a corto plazo del programa Cciseblx06.FOR  
VALORES DE INFLUENCIA

PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA	PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA
1	1	1	2.61E-01	3	1	1	-1.57E-02
1	1	2	-8.35E-03	3	1	2	-8.35E-03
1	1	3	-2.55E-02	3	1	3	5.22E-01
1	1	4	-1.03E-02	3	1	4	-8.35E-03
1	1	5	-4.82E-03	3	1	5	-2.55E-02
1	1	6	-2.59E-03	3	1	6	-1.03E-02
1	1	7	-1.53E-03	3	1	7	-4.82E-03
1	1	8	-9.81E-04	3	1	8	-2.59E-03
1	1	9	-6.64E-04	3	1	9	-1.53E-03
1	1	10	-4.69E-04	3	1	10	-9.81E-04
1	1	11	-1.85E-04	3	1	11	-3.62E-04
1	2	1	7.32E-02	3	2	1	2.08E-02
1	2	2	9.59E-02	3	2	2	9.59E-02
1	2	3	3.06E-02	3	2	3	1.46E-01
1	2	4	4.19E-03	3	2	4	9.59E-02
1	2	5	-2.41E-03	3	2	5	3.06E-02
1	2	6	-3.25E-03	3	2	6	4.19E-03
1	2	7	-2.80E-03	3	2	7	-2.41E-03
1	2	8	-2.19E-03	3	2	8	-3.25E-03
1	2	9	-1.69E-03	3	2	9	-2.80E-03
1	2	10	-1.30E-03	3	2	10	-2.19E-03
1	2	11	-5.36E-04	3	2	11	-8.99E-04
2	1	1	1.31E-02	4	1	1	-6.21E-03
2	1	2	5.22E-01	4	1	2	-2.55E-02
2	1	3	-8.35E-03	4	1	3	-8.35E-03
2	1	4	-2.55E-02	4	1	4	5.22E-01
2	1	5	-1.03E-02	4	1	5	-8.35E-03
2	1	6	-4.82E-03	4	1	6	-2.55E-02
2	1	7	-2.59E-03	4	1	7	-1.03E-02
2	1	8	-1.53E-03	4	1	8	-4.82E-03
2	1	9	-9.81E-04	4	1	9	-2.59E-03
2	1	10	-6.64E-04	4	1	10	-1.53E-03
2	1	11	-2.54E-04	4	1	11	-5.41E-04
2	2	1	5.81E-02	4	2	1	3.66E-03
2	2	2	1.46E-01	4	2	2	3.06E-02
2	2	3	9.59E-02	4	2	3	9.59E-02
2	2	4	3.06E-02	4	2	4	1.46E-01
2	2	5	4.19E-03	4	2	5	9.59E-02
2	2	6	-2.41E-03	4	2	6	3.06E-02
2	2	7	-3.25E-03	4	2	7	4.19E-03
2	2	8	-2.80E-03	4	2	8	-2.41E-03
2	2	9	-2.19E-03	4	2	9	-3.25E-03
2	2	10	-1.69E-03	4	2	10	-2.80E-03
2	2	11	-6.91E-04	4	2	11	-1.17E-03

PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA	PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA
5	1	1	-2.81E-03	7	1	1	-8.59E-04
5	1	2	-1.03E-02	7	1	2	-2.59E-03
5	1	3	-2.55E-02	7	1	3	-4.82E-03
5	1	4	-8.35E-03	7	1	4	-1.03E-02
5	1	5	5.22E-01	7	1	5	-2.55E-02
5	1	6	-8.35E-03	7	1	6	-8.35E-03
5	1	7	-2.55E-02	7	1	7	5.22E-01
5	1	8	-1.03E-02	7	1	8	-8.35E-03
5	1	9	-4.82E-03	7	1	9	-2.55E-02
5	1	10	-2.59E-03	7	1	10	-1.03E-02
5	1	11	-8.59E-04	7	1	11	-2.81E-03
5	2	1	-9.13E-04	7	2	1	-1.48E-03
5	2	2	4.19E-03	7	2	2	-3.25E-03
5	2	3	3.06E-02	7	2	3	-2.41E-03
5	2	4	9.59E-02	7	2	4	4.19E-03
5	2	5	1.46E-01	7	2	5	3.06E-02
5	2	6	9.59E-02	7	2	6	9.59E-02
5	2	7	3.06E-02	7	2	7	1.46E-01
5	2	8	4.19E-03	7	2	8	9.59E-02
5	2	9	-2.41E-03	7	2	9	3.06E-02
5	2	10	-3.25E-03	7	2	10	4.19E-03
5	2	11	-1.48E-03	7	2	11	-9.13E-04
6	1	1	-1.47E-03	8	1	1	-5.41E-04
6	1	2	-4.82E-03	8	1	2	-1.53E-03
6	1	3	-1.03E-02	8	1	3	-2.59E-03
6	1	4	-2.55E-02	8	1	4	-4.82E-03
6	1	5	-8.35E-03	8	1	5	-1.03E-02
6	1	6	5.22E-01	8	1	6	-2.55E-02
6	1	7	-8.35E-03	8	1	7	-8.35E-03
6	1	8	-2.55E-02	8	1	8	5.22E-01
6	1	9	-1.03E-02	8	1	9	-8.35E-03
6	1	10	-4.82E-03	8	1	10	-2.55E-02
6	1	11	-1.47E-03	8	1	11	-6.21E-03
6	2	1	-1.65E-03	8	2	1	-1.17E-03
6	2	2	-2.41E-03	8	2	2	-2.80E-03
6	2	3	4.19E-03	8	2	3	-3.25E-03
6	2	4	3.06E-02	8	2	4	-2.41E-03
6	2	5	9.59E-02	8	2	5	4.19E-03
6	2	6	1.46E-01	8	2	6	3.06E-02
6	2	7	9.59E-02	8	2	7	9.59E-02
6	2	8	3.06E-02	8	2	8	1.46E-01
6	2	9	4.19E-03	8	2	9	9.59E-02
6	2	10	-2.41E-03	8	2	10	3.06E-02
6	2	11	-1.65E-03	8	2	11	3.66E-03

PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA	PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA
9	1	1	-3.62E-04	11	1	1	-1.85E-04
9	1	2	-9.81E-04	11	1	2	-4.69E-04
9	1	3	-1.53E-03	11	1	3	-6.64E-04
9	1	4	-2.59E-03	11	1	4	-9.81E-04
9	1	5	-4.82E-03	11	1	5	-1.53E-03
9	1	6	-1.03E-02	11	1	6	-2.59E-03
9	1	7	-2.55E-02	11	1	7	-4.82E-03
9	1	8	-8.35E-03	11	1	8	-1.03E-02
9	1	9	5.22E-01	11	1	9	-2.55E-02
9	1	10	-8.35E-03	11	1	10	-8.35E-03
9	1	11	-1.57E-02	11	1	11	2.61E-01
9	2	1	-8.99E-04	11	2	1	-5.36E-04
9	2	2	-2.19E-03	11	2	2	-1.30E-03
9	2	3	-2.80E-03	11	2	3	-1.69E-03
9	2	4	-3.25E-03	11	2	4	-2.19E-03
9	2	5	-2.41E-03	11	2	5	-2.80E-03
9	2	6	4.19E-03	11	2	6	-3.25E-03
9	2	7	3.06E-02	11	2	7	-2.41E-03
9	2	8	9.59E-02	11	2	8	4.19E-03
9	2	9	1.46E-01	11	2	9	3.06E-02
9	2	10	9.59E-02	11	2	10	9.59E-02
9	2	11	2.08E-02	11	2	11	7.32E-02
10	1	1	-2.54E-04				
10	1	2	-6.64E-04				
10	1	3	-9.81E-04				
10	1	4	-1.53E-03				
10	1	5	-2.59E-03				
10	1	6	-4.82E-03				
10	1	7	-1.03E-02				
10	1	8	-2.55E-02				
10	1	9	-8.35E-03				
10	1	10	5.22E-01				
10	1	11	1.31E-02				
10	2	1	-6.91E-04				
10	2	2	-1.69E-03				
10	2	3	-2.19E-03				
10	2	4	-2.80E-03				
10	2	5	-3.25E-03				
10	2	6	-2.41E-03				
10	2	7	4.19E-03				
10	2	8	3.06E-02				
10	2	9	9.59E-02				
10	2	10	1.46E-01				
10	2	11	5.81E-02				

## MATRIZ DE RIGIDEZ Y VECTOR DE EMPOTRAMIENTO

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
1	1	1.71E+07	2.84E-01	-7	3	1	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	2	-1.71E+07	6.56E-02	-7	3	2	-1.71E+07	6.56E-02	-14
1	3	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	3	3.42E+07	5.69E-01	-14
1	4	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	4	-1.71E+07	6.56E-02	-14
1	5	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	5	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	6	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	6	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	7	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	7	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	8	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	8	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	9	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	9	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	10	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	10	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	11	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	11	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	12	-5976823	0.00E+00	-7	3	12	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	13	-5976823	0.00E+00	-7	3	13	5.98E+06	0.00E+00	-14
1	14	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	14	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	15	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	15	-5976823	0.00E+00	-14
1	16	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	16	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	17	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	17	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	18	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	18	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	19	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	19	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	20	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	20	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	21	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	21	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	22	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	22	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	1	-1.71E+07	6.56E-02	-14	4	1	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	2	3.42E+07	5.69E-01	-14	4	2	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	3	-1.71E+07	6.56E-02	-14	4	3	-1.71E+07	6.56E-02	-14
2	4	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	4	3.42E+07	5.69E-01	-14
2	5	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	5	-1.71E+07	6.56E-02	-14
2	6	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	6	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	7	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	7	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	8	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	8	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	9	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	9	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	10	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	10	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	11	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	11	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	12	5976823	0.00E+00	-14	4	12	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	13	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	14	-5976823	0.00E+00	-14	4	14	5.98E+06	0.00E+00	-14
2	15	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	15	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	16	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	16	-5976823	0.00E+00	-14
2	17	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	17	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	18	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	18	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	19	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	19	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	20	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	20	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	21	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	21	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	22	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	22	0.00E+00	0.00E+00	-14

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
5	1	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	1	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	2	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	2	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	3	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	3	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	4	-1.71E+07	6.56E-02	-14	7	4	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	5	3.42E+07	5.69E-01	-14	7	5	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	6	-1.71E+07	6.56E-02	-14	7	6	-1.71E+07	6.56E-02	-14.00
5	7	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	7	3.42E+07	5.69E-01	-14.00
5	8	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	8	-1.71E+07	6.56E-02	-14.00
5	9	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	9	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	10	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	10	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	11	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	11	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	12	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	12	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	13	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	14	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	14	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	15	5.98E+06	0.00E+00	-14	7	15	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	16	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	16	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	17	-5976823	0.00E+00	-14	7	17	5.98E+06	0.00E+00	-14.00
5	18	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	18	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	19	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	19	-5.98E+06	0.00E+00	-14.00
5	20	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	20	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	21	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	21	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
5	22	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	22	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	1	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	1	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	2	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	2	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	3	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	3	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	4	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	4	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	5	-1.71E+07	6.56E-02	-14	8	5	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	6	3.42E+07	5.69E-01	-14	8	6	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	7	-1.71E+07	6.56E-02	-14	8	7	-1.71E+07	6.56E-02	-14.00
6	8	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	8	3.42E+07	5.69E-01	-14.00
6	9	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	9	-1.71E+07	6.56E-02	-14.00
6	10	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	10	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	11	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	11	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	12	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	12	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	13	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	14	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	14	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	15	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	15	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	16	5.98E+06	0.00E+00	-14	8	16	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	17	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	17	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	18	-5.98E+06	0.00E+00	-14	8	18	5.98E+06	0.00E+00	-14.00
6	19	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	19	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	20	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	20	-5.98E+06	0.00E+00	-14.00
6	21	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	21	0.00E+00	0.00E+00	-14.00
6	22	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	22	0.00E+00	0.00E+00	-14.00

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
7	1	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	1	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	2	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	2	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	3	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	3	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	4	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	4	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	5	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	5	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	6	-1.71E+07	6.56E-02	-14	9	6	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	7	3.42E+07	5.69E-01	-14	9	7	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	8	-1.71E+07	6.56E-02	-14	9	8	-1.71E+07	6.56E-02	-14
7	9	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	9	3.42E+07	5.69E-01	-14
7	10	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	10	-1.71E+07	6.56E-02	-14
7	11	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	11	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	12	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	12	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	13	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	14	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	14	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	15	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	15	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	16	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	16	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	17	5.98E+06	0.00E+00	-14	9	17	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	18	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	18	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	19	-5.98E+06	0.00E+00	-14	9	19	5.98E+06	0.00E+00	-14
7	20	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	20	0.00E+00	0.00E+00	-14
7	21	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	21	-5.98E+06	0.00E+00	-14
7	22	0.00E+00	0.00E+00	-14	9	22	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	1	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	1	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	2	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	2	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	3	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	3	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	4	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	4	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	5	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	5	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	6	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	6	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	7	-1.71E+07	6.56E-02	-14	10	7	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	8	3.42E+07	5.69E-01	-14	10	8	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	9	-1.71E+07	6.56E-02	-14	10	9	-1.71E+07	6.56E-02	-14
8	10	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	10	3.42E+07	5.69E-01	-14
8	11	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	11	-1.71E+07	6.56E-02	-14
8	12	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	12	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	13	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	14	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	14	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	15	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	15	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	16	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	16	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	17	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	17	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	18	5.98E+06	0.00E+00	-14	10	18	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	19	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	19	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	20	-5.98E+06	0.00E+00	-14	10	20	5.98E+06	0.00E+00	-14
8	21	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	21	0.00E+00	0.00E+00	-14
8	22	0.00E+00	0.00E+00	-14	10	22	-5.98E+06	0.00E+00	-14

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
11	1	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	1	-5.98E+06	1.28E-02	3E-08
11	2	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	2	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
11	3	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	3	5976823	-1.28E-02	3E-08
11	4	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	5	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	6	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	7	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	8	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	9	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	10	-1.71E+07	6.56E-02	-7	13	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	11	1.71E+07	2.84E-01	-7	13	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	12	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	12	1.39E+06	0.00E+00	3E-08
11	13	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	13	5.58E+06	0.00E+00	3E-08
11	14	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	14	1394592	0.00E+00	3E-08
11	15	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	16	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	17	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	18	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	19	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	20	0.00E+00	0.00E+00	-7	13	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	21	5.98E+06	0.00E+00	-7	13	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
11	22	5.98E+06	0.00E+00	-7	13	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	1	-5.98E+06	-2.81E-02	0.81667	14	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	2	5976823	-1.28E-02	0.81667	14	2	-5.98E+06	1.28E-02	3E-08
12	3	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	3	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
12	4	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	4	5976823	-1.28E-02	3E-08
12	5	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	6	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	7	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	8	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	9	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	10	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	11	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	12	2.79E+06	0.00E+00	0.81667	14	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	13	1394592	0.00E+00	0.81667	14	13	1.39E+06	0.00E+00	3E-08
12	14	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	14	5.58E+06	0.00E+00	3E-08
12	15	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	15	1394592	0.00E+00	3E-08
12	16	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	17	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	18	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	19	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	20	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	21	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
12	22	0.00E+00	0.00E+00	0.81667	14	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
15	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	3	-5.98E+06	1.28E-02	3E-08	17	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	4	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	17	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	5	5976823	-1.28E-02	3E-08	17	5	-5976823	1.28E-02	3E-08
15	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	6	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
15	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	7	5976823	-1.28E-02	3E-08
15	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	14	1.39E+06	0.00E+00	3E-08	17	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	15	5.58E+06	0.00E+00	3E-08	17	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	16	1394592	0.00E+00	3E-08	17	16	1394592	0.00E+00	3E-08
15	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	17	5578368	0.00E+00	3E-08
15	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	18	1394592	0.00E+00	3E-08
15	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	4	-5.98E+06	1.28E-02	3E-08	18	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	5	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	18	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	6	5976823	-1.28E-02	3E-08	18	6	-5976823	1.28E-02	3E-08
16	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	7	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
16	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	8	5976823	-1.28E-02	3E-08
16	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	15	1.39E+06	0.00E+00	3E-08	18	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	16	5.58E+06	0.00E+00	3E-08	18	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	17	1394592	0.00E+00	3E-08	18	17	1394592	0.00E+00	3E-08
16	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	18	5578368	0.00E+00	3E-08
16	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	19	1394592	0.00E+00	3E-08
16	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
19	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	7	-5976823	1.28E-02	3E-08	21	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	8	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	21	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	9	5976823	-1.28E-02	3E-08	21	9	-5976823	1.28E-02	3E-08
19	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	10	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
19	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	11	5976823	-1.28E-02	3E-08
19	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	18	1394592	0.00E+00	3E-08	21	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	19	5578368	0.00E+00	3E-08	21	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	20	1394592	0.00E+00	3E-08	21	20	1394592	0.00E+00	3E-08
19	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	21	5578368	0.00E+00	3E-08
19	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	22	1394592	0.00E+00	3E-08
20	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	1	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	2	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	3	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	4	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	5	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	6	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	7	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	8	-5976823	1.28E-02	3E-08	22	8	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	9	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	22	9	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	10	5976823	-1.28E-02	3E-08	22	10	-5976823	1.28E-02	-0.8167
20	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	11	5976823	2.81E-02	-0.8167
20	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	12	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	13	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	14	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	15	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	16	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	17	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	18	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	19	1394592	0.00E+00	3E-08	22	19	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	20	5578368	0.00E+00	3E-08	22	20	0.00E+00	0.00E+00	-0.8167
20	21	1394592	0.00E+00	3E-08	22	21	1394592	0.00E+00	-0.8167
20	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	22	2789184	0.00E+00	-0.8167

NUDO	HUNDIMIENTO [m]
1	3.08E-02
2	3.04E-02
3	3.00E-02
4	2.99E-02
5	2.99E-02
6	2.99E-02
7	2.99E-02
8	2.99E-02
9	3.00E-02
10	3.04E-02
11	3.08E-02

NUDO	REACCIÓN [kN.m]
1	423.3007
2	152.7541
3	170.9819
4	170.6071
5	171.8764
6	172.4876
7	171.8702
8	170.595
9	170.964
10	152.7341
11	423.2288

Momentos	
[m]	[kN.m]
0	0
0.7	-127.776
1.4	-172.8167
2.1	-144.9054
2.8	-43.16675
3.5	133.0094
4.2	-43.20682
4.9	-144.9054
5.6	-172.8167
6.3	-127.776
7	0

Cortantes	
[m]	[kN]
0	-299.9944
0.7	-112.4209
1.4	-13.15011
2.1	92.62032
2.8	198.4098
3.5	305.0123
4.2	-198.5119
4.9	-92.57259
5.6	13.00463
6.3	112.3529
7	299.9944

ANEXO 2: Resultados a largo plazo del programa Cciseblx06.FOR  
VALORES DE INFLUENCIA

PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA	PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA
1	1	1	3.54E-01	3	1	1	5.32E-03
1	1	2	1.10E-01	3	1	2	1.10E-01
1	1	3	7.14E-03	3	1	3	7.08E-01
1	1	4	1.08E-03	3	1	4	1.10E-01
1	1	5	2.68E-04	3	1	5	7.14E-03
1	1	6	8.95E-05	3	1	6	1.08E-03
1	1	7	3.64E-05	3	1	7	2.68E-04
1	1	8	1.69E-05	3	1	8	8.95E-05
1	1	9	8.73E-06	3	1	9	3.64E-05
1	1	10	4.86E-06	3	1	10	1.69E-05
1	1	11	1.61E-06	3	1	11	5.04E-06
1	2	1	7.61E-02	3	2	1	2.93E-02
1	2	2	1.08E-01	3	2	2	1.08E-01
1	2	3	4.74E-02	3	2	3	1.52E-01
1	2	4	1.78E-02	3	2	4	1.08E-01
1	2	5	6.89E-03	3	2	5	4.74E-02
1	2	6	2.93E-03	3	2	6	1.78E-02
1	2	7	1.37E-03	3	2	7	6.89E-03
1	2	8	7.00E-04	3	2	8	2.93E-03
1	2	9	3.83E-04	3	2	9	1.37E-03
1	2	10	2.22E-04	3	2	10	7.00E-04
1	2	11	7.57E-05	3	2	11	2.19E-04
2	1	1	9.10E-02	4	1	1	7.37E-04
2	1	2	7.08E-01	4	1	2	7.14E-03
2	1	3	1.10E-01	4	1	3	1.10E-01
2	1	4	7.14E-03	4	1	4	7.08E-01
2	1	5	1.08E-03	4	1	5	1.10E-01
2	1	6	2.68E-04	4	1	6	7.14E-03
2	1	7	8.95E-05	4	1	7	1.08E-03
2	1	8	3.64E-05	4	1	8	2.68E-04
2	1	9	1.69E-05	4	1	9	8.95E-05
2	1	10	8.76E-06	4	1	10	3.64E-05
2	1	11	2.77E-06	4	1	11	9.95E-06
2	2	1	6.32E-02	4	2	1	1.10E-02
2	2	2	1.52E-01	4	2	2	4.74E-02
2	2	3	1.08E-01	4	2	3	1.08E-01
2	2	4	4.74E-02	4	2	4	1.52E-01
2	2	5	1.78E-02	4	2	5	1.08E-01
2	2	6	6.89E-03	4	2	6	4.74E-02
2	2	7	2.93E-03	4	2	7	1.78E-02
2	2	8	1.37E-03	4	2	8	6.89E-03
2	2	9	7.00E-04	4	2	9	2.93E-03
2	2	10	3.83E-04	4	2	10	1.37E-03

2	2	11	1.25E-04	4	2	11	4.05E-04
PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA	PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA
5	1	1	1.73E-04	7	1	1	2.19E-05
5	1	2	1.08E-03	7	1	2	8.95E-05
5	1	3	7.14E-03	7	1	3	2.68E-04
5	1	4	1.10E-01	7	1	4	1.08E-03
5	1	5	7.08E-01	7	1	5	7.14E-03
5	1	6	1.10E-01	7	1	6	1.10E-01
5	1	7	7.14E-03	7	1	7	7.08E-01
5	1	8	1.08E-03	7	1	8	1.10E-01
5	1	9	2.68E-04	7	1	9	7.14E-03
5	1	10	8.95E-05	7	1	10	1.08E-03
5	1	11	2.19E-05	7	1	11	1.73E-04
5	2	1	4.21E-03	7	2	1	8.08E-04
5	2	2	1.78E-02	7	2	2	2.93E-03
5	2	3	4.74E-02	7	2	3	6.89E-03
5	2	4	1.08E-01	7	2	4	1.78E-02
5	2	5	1.52E-01	7	2	5	4.74E-02
5	2	6	1.08E-01	7	2	6	1.08E-01
5	2	7	4.74E-02	7	2	7	1.52E-01
5	2	8	1.78E-02	7	2	8	1.08E-01
5	2	9	6.89E-03	7	2	9	4.74E-02
5	2	10	2.93E-03	7	2	10	1.78E-02
5	2	11	8.08E-04	7	2	11	4.21E-03
6	1	1	5.55E-05	8	1	1	9.95E-06
6	1	2	2.68E-04	8	1	2	3.64E-05
6	1	3	1.08E-03	8	1	3	8.95E-05
6	1	4	7.14E-03	8	1	4	2.68E-04
6	1	5	1.10E-01	8	1	5	1.08E-03
6	1	6	7.08E-01	8	1	6	7.14E-03
6	1	7	1.10E-01	8	1	7	1.10E-01
6	1	8	7.14E-03	8	1	8	7.08E-01
6	1	9	1.08E-03	8	1	9	1.10E-01
6	1	10	2.68E-04	8	1	10	7.14E-03
6	1	11	5.55E-05	8	1	11	7.37E-04
6	2	1	1.76E-03	8	2	1	4.05E-04
6	2	2	6.89E-03	8	2	2	1.37E-03
6	2	3	1.78E-02	8	2	3	2.93E-03
6	2	4	4.74E-02	8	2	4	6.89E-03
6	2	5	1.08E-01	8	2	5	1.78E-02
6	2	6	1.52E-01	8	2	6	4.74E-02
6	2	7	1.08E-01	8	2	7	1.08E-01
6	2	8	4.74E-02	8	2	8	1.52E-01
6	2	9	1.78E-02	8	2	9	1.08E-01
6	2	10	6.89E-03	8	2	10	4.74E-02
6	2	11	1.76E-03	8	2	11	1.10E-02

PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA	PUNTO	ESTRATO	CARGA	VALOR DE INFLUENCIA
9	1	1	5.04E-06	11	1	1	1.61E-06
9	1	2	1.70E-05	11	1	2	4.83E-06
9	1	3	3.64E-05	11	1	3	8.76E-06
9	1	4	8.95E-05	11	1	4	1.69E-05
9	1	5	2.68E-04	11	1	5	3.64E-05
9	1	6	1.08E-03	11	1	6	8.95E-05
9	1	7	7.14E-03	11	1	7	2.68E-04
9	1	8	1.10E-01	11	1	8	1.08E-03
9	1	9	7.08E-01	11	1	9	7.14E-03
9	1	10	1.10E-01	11	1	10	1.10E-01
9	1	11	5.32E-03	11	1	11	3.54E-01
9	2	1	2.19E-04	11	2	1	7.57E-05
9	2	2	7.00E-04	11	2	2	2.22E-04
9	2	3	1.37E-03	11	2	3	3.83E-04
9	2	4	2.93E-03	11	2	4	7.00E-04
9	2	5	6.89E-03	11	2	5	1.37E-03
9	2	6	1.78E-02	11	2	6	2.93E-03
9	2	7	4.74E-02	11	2	7	6.89E-03
9	2	8	1.08E-01	11	2	8	1.78E-02
9	2	9	1.52E-01	11	2	9	4.74E-02
9	2	10	1.08E-01	11	2	10	1.08E-01
9	2	11	2.93E-02	11	2	11	7.61E-02
10	1	1	2.77E-06				
10	1	2	8.76E-06				
10	1	3	1.69E-05				
10	1	4	3.64E-05				
10	1	5	8.95E-05				
10	1	6	2.68E-04				
10	1	7	1.08E-03				
10	1	8	7.14E-03				
10	1	9	1.10E-01				
10	1	10	7.08E-01				
10	1	11	9.10E-02				
10	2	1	1.25E-04				
10	2	2	3.83E-04				
10	2	3	7.00E-04				
10	2	4	1.37E-03				
10	2	5	2.93E-03				
10	2	6	6.89E-03				
10	2	7	1.78E-02				
10	2	8	4.74E-02				
10	2	9	1.08E-01				
10	2	10	1.52E-01				
10	2	11	6.32E-02				

## MATRIZ DE RIGIDEZ

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
1	1	1.20E+07	2.84E-01	-7	3	1	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	2	-1.20E+07	6.56E-02	-7	3	2	-1.20E+07	6.56E-02	-14
1	3	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	3	2.39E+07	5.69E-01	-14
1	4	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	4	-1.20E+07	6.56E-02	-14
1	5	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	5	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	6	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	6	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	7	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	7	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	8	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	8	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	9	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	9	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	10	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	10	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	11	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	11	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	12	-4183776	0.00E+00	-7	3	12	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	13	-4183776	0.00E+00	-7	3	13	4183776	0.00E+00	-14
1	14	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	14	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	15	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	15	-4183776	0.00E+00	-14
1	16	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	16	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	17	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	17	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	18	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	18	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	19	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	19	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	20	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	20	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	21	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	21	0.00E+00	0.00E+00	-14
1	22	0.00E+00	0.00E+00	-7	3	22	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	1	-1.20E+07	6.56E-02	-14	4	1	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	2	2.39E+07	5.69E-01	-14	4	2	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	3	-1.20E+07	6.56E-02	-14	4	3	-1.20E+07	6.56E-02	-14
2	4	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	4	2.39E+07	5.69E-01	-14
2	5	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	5	-1.20E+07	6.56E-02	-14
2	6	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	6	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	7	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	7	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	8	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	8	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	9	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	9	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	10	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	10	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	11	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	11	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	12	4183776	0.00E+00	-14	4	12	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	13	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	14	-4183776	0.00E+00	-14	4	14	4183776	0.00E+00	-14
2	15	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	15	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	16	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	16	-4183776	0.00E+00	-14
2	17	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	17	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	18	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	18	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	19	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	19	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	20	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	20	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	21	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	21	0.00E+00	0.00E+00	-14
2	22	0.00E+00	0.00E+00	-14	4	22	0.00E+00	0.00E+00	-14

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
5	1	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	1	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	2	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	2	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	3	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	3	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	4	-1.20E+07	6.56E-02	-14	7	4	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	5	2.39E+07	5.69E-01	-14	7	5	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	6	-1.20E+07	6.56E-02	-14	7	6	-1.20E+07	6.56E-02	-14
5	7	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	7	2.39E+07	5.69E-01	-14
5	8	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	8	-1.20E+07	6.56E-02	-14
5	9	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	9	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	10	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	10	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	11	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	11	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	12	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	12	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	13	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	14	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	14	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	15	4183776	0.00E+00	-14	7	15	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	16	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	16	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	17	-4183776	0.00E+00	-14	7	17	4183776	0.00E+00	-14
5	18	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	18	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	19	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	19	-4183776	0.00E+00	-14
5	20	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	20	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	21	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	21	0.00E+00	0.00E+00	-14
5	22	0.00E+00	0.00E+00	-14	7	22	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	1	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	1	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	2	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	2	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	3	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	3	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	4	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	4	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	5	-1.20E+07	6.56E-02	-14	8	5	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	6	2.39E+07	5.69E-01	-14	8	6	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	7	-1.20E+07	6.56E-02	-14	8	7	-1.20E+07	6.56E-02	-14
6	8	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	8	2.39E+07	5.69E-01	-14
6	9	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	9	-1.20E+07	6.56E-02	-14
6	10	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	10	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	11	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	11	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	12	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	12	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	13	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	14	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	14	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	15	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	15	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	16	4183776	0.00E+00	-14	8	16	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	17	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	17	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	18	-4183776	0.00E+00	-14	8	18	4183776	0.00E+00	-14
6	19	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	19	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	20	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	20	-4183776	0.00E+00	-14
6	21	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	21	0.00E+00	0.00E+00	-14
6	22	0.00E+00	0.00E+00	-14	8	22	0.00E+00	0.00E+00	-14

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
9	1	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	1	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	2	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	2	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	3	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	3	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	4	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	4	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	5	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	5	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	6	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	6	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	7	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	7	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	8	-1.20E+07	6.56E-02	-14	11	8	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	9	2.39E+07	5.69E-01	-14	11	9	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	10	-1.20E+07	6.56E-02	-14	11	10	-1.20E+07	6.56E-02	-7
9	11	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	11	1.20E+07	2.84E-01	-7
9	12	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	12	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	13	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	14	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	14	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	15	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	15	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	16	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	16	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	17	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	17	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	18	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	18	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	19	4183776	0.00E+00	-14	11	19	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	20	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	20	0.00E+00	0.00E+00	-7
9	21	-4183776	0.00E+00	-14	11	21	4183776	0.00E+00	-7
9	22	0.00E+00	0.00E+00	-14	11	22	4183776	0.00E+00	-7
10	1	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	1	-4183776	-2.81E-02	0.8167
10	2	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	2	4183776	-1.28E-02	0.8167
10	3	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	3	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	4	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	4	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	5	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	5	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	6	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	6	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	7	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	7	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	8	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	8	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	9	-1.20E+07	6.56E-02	-14	12	9	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	10	2.39E+07	5.69E-01	-14	12	10	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	11	-1.20E+07	6.56E-02	-14	12	11	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	12	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	12	1952429	0.00E+00	0.8167
10	13	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	13	976214.4	0.00E+00	0.8167
10	14	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	14	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	15	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	15	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	16	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	16	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	17	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	17	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	18	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	18	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	19	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	19	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	20	4183776	0.00E+00	-14	12	20	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	21	0.00E+00	0.00E+00	-14	12	21	0.00E+00	0.00E+00	0.8167
10	22	-4183776	0.00E+00	-14	12	22	0.00E+00	0.00E+00	0.8167

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
13	1	-4183776	1.28E-02	3E-08	15	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	2	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	15	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	3	4183776	-1.28E-02	3E-08	15	3	-4183776	1.28E-02	3E-08
13	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	4	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
13	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	5	4183776	-1.28E-02	3E-08
13	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	12	976214.4	0.00E+00	3E-08	15	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	13	3904858	0.00E+00	3E-08	15	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	14	976214.4	0.00E+00	3E-08	15	14	976214.4	0.00E+00	3E-08
13	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	15	3904858	0.00E+00	3E-08
13	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	16	976214.4	0.00E+00	3E-08
13	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
13	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	15	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	2	-4183776	1.28E-02	3E-08	16	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	3	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	16	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	4	4183776	-1.28E-02	3E-08	16	4	-4183776	1.28E-02	3E-08
14	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	5	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
14	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	6	4183776	-1.28E-02	3E-08
14	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	13	976214.4	0.00E+00	3E-08	16	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	14	3904858	0.00E+00	3E-08	16	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	15	976214.4	0.00E+00	3E-08	16	15	976214.4	0.00E+00	3E-08
14	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	16	3904858	0.00E+00	3E-08
14	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	17	976214.4	0.00E+00	3E-08
14	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
14	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	16	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
15	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	3	-4183776	1.28E-02	3E-08	17	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	4	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	17	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	5	4183776	-1.28E-02	3E-08	17	5	-4183776	1.28E-02	3E-08
15	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	6	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
15	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	7	4183776	-1.28E-02	3E-08
15	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	14	976214.4	0.00E+00	3E-08	17	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	15	3904858	0.00E+00	3E-08	17	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	16	976214.4	0.00E+00	3E-08	17	16	976214.4	0.00E+00	3E-08
15	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	17	3904858	0.00E+00	3E-08
15	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	18	976214.4	0.00E+00	3E-08
15	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
15	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	17	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	4	-4183776	1.28E-02	3E-08	18	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	5	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	18	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	6	4183776	-1.28E-02	3E-08	18	6	-4183776	1.28E-02	3E-08
16	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	7	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
16	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	8	4183776	-1.28E-02	3E-08
16	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	9	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	15	976214.4	0.00E+00	3E-08	18	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	16	3904858	0.00E+00	3E-08	18	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	17	976214.4	0.00E+00	3E-08	18	17	976214.4	0.00E+00	3E-08
16	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	18	3904858	0.00E+00	3E-08
16	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	19	976214.4	0.00E+00	3E-08
16	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	20	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
16	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	18	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08

I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)	I,	J,	KR(I,J),	CR(I,J),	VE(I)
19	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	7	-4183776	1.28E-02	3E-08	21	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	8	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	21	8	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	9	4183776	-1.28E-02	3E-08	21	9	-4183776	1.28E-02	3E-08
19	10	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	10	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08
19	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	11	4183776	-1.28E-02	3E-08
19	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	18	976214.4	0.00E+00	3E-08	21	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	19	3904858	0.00E+00	3E-08	21	19	0.00E+00	0.00E+00	3E-08
19	20	976214.4	0.00E+00	3E-08	21	20	976214.4	0.00E+00	3E-08
19	21	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	21	3904858	0.00E+00	3E-08
19	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	21	22	976214.4	0.00E+00	3E-08
20	1	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	1	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	2	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	2	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	3	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	3	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	4	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	4	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	5	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	5	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	6	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	6	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	7	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	7	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	8	-4183776	1.28E-02	3E-08	22	8	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	9	0.00E+00	-1.43E-10	3E-08	22	9	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	10	4183776	-1.28E-02	3E-08	22	10	-4183776	1.28E-02	-0.817
20	11	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	11	4183776	2.81E-02	-0.817
20	12	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	12	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	13	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	13	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	14	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	14	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	15	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	15	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	16	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	16	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	17	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	17	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	18	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	18	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	19	976214.4	0.00E+00	3E-08	22	19	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	20	3904858	0.00E+00	3E-08	22	20	0.00E+00	0.00E+00	-0.817
20	21	976214.4	0.00E+00	3E-08	22	21	976214.4	0.00E+00	-0.817
20	22	0.00E+00	0.00E+00	3E-08	22	22	1952429	0.00E+00	-0.817

## MATRIZ DE FLEXIBILIDAD

I,	K1,	FLE(I,K1)	I,	K1,	FLE(I,K1)	I,	K1,	FLE(I,K1)
1	1	1.39E-04	5	1	1.73E-06	9	1	8.85E-08
1	2	7.70E-05	5	2	7.39E-06	9	2	2.84E-07
1	3	2.10E-05	5	3	2.10E-05	9	3	5.58E-07
1	4	7.39E-06	5	4	7.70E-05	9	4	1.19E-06
1	5	2.82E-06	5	5	2.78E-04	9	5	2.82E-06
1	6	1.19E-06	5	6	7.70E-05	9	6	7.39E-06
1	7	5.58E-07	5	7	2.10E-05	9	7	2.10E-05
1	8	2.84E-07	5	8	7.39E-06	9	8	7.70E-05
1	9	1.55E-07	5	9	2.82E-06	9	9	2.78E-04
1	10	8.99E-08	5	10	1.19E-06	9	10	7.70E-05
1	11	3.06E-08	5	11	3.28E-07	9	11	1.33E-05
2	1	5.31E-05	6	1	7.16E-07	10	1	5.07E-08
2	2	2.78E-04	6	2	2.82E-06	10	2	1.55E-07
2	3	7.70E-05	6	3	7.39E-06	10	3	2.84E-07
2	4	2.10E-05	6	4	2.10E-05	10	4	5.58E-07
2	5	7.39E-06	6	5	7.70E-05	10	5	1.19E-06
2	6	2.82E-06	6	6	2.78E-04	10	6	2.82E-06
2	7	1.19E-06	6	7	7.70E-05	10	7	7.39E-06
2	8	5.58E-07	6	8	2.10E-05	10	8	2.10E-05
2	9	2.84E-07	6	9	7.39E-06	10	9	7.70E-05
2	10	1.55E-07	6	10	2.82E-06	10	10	2.78E-04
2	11	5.07E-08	6	11	7.16E-07	10	11	5.31E-05
3	1	1.33E-05	7	1	3.28E-07	11	1	3.06E-08
3	2	7.70E-05	7	2	1.19E-06	11	2	8.99E-08
3	3	2.78E-04	7	3	2.82E-06	11	3	1.55E-07
3	4	7.70E-05	7	4	7.39E-06	11	4	2.84E-07
3	5	2.10E-05	7	5	2.10E-05	11	5	5.58E-07
3	6	7.39E-06	7	6	7.70E-05	11	6	1.19E-06
3	7	2.82E-06	7	7	2.78E-04	11	7	2.82E-06
3	8	1.19E-06	7	8	7.70E-05	11	8	7.39E-06
3	9	5.58E-07	7	9	2.10E-05	11	9	2.10E-05
3	10	2.84E-07	7	10	7.39E-06	11	10	7.70E-05
3	11	8.85E-08	7	11	1.73E-06	11	11	1.39E-04
4	1	4.61E-06	8	1	1.64E-07			
4	2	2.10E-05	8	2	5.58E-07			
4	3	7.70E-05	8	3	1.19E-06			
4	4	2.78E-04	8	4	2.82E-06			
4	5	7.70E-05	8	5	7.39E-06			
4	6	2.10E-05	8	6	2.10E-05			
4	7	7.39E-06	8	7	7.70E-05			
4	8	2.82E-06	8	8	2.78E-04			
4	9	1.19E-06	8	9	7.70E-05			
4	10	5.58E-07	8	10	2.10E-05			
4	11	1.64E-07	8	11	4.61E-06			

NUDO	REACCIÓN [kN.m]
1	482.2247
2	139.1534
3	169.7115
4	165.3154
5	165.7838
6	165.9738
7	165.7765
8	165.3009
9	169.6882
10	139.1301
11	482.1081

NUDO	HUNDIMIENTO [m]
1	8.34E-02
2	8.29E-02
3	8.26E-02
4	8.25E-02
5	8.25E-02
6	8.26E-02
7	8.25E-02
8	8.25E-02
9	8.26E-02
10	8.29E-02
11	8.34E-02

Momentos	
[m]	[kN.m]
1	0
2	-117.76
3	-154.27
4	-119.42
5	-13.14
6	164.57
7	-13.14
8	-119.42
9	-154.27
10	-117.76
11	0

Cortantes	
[m]	[kN]
1	-299.93
2	-92.46
3	-2.34
4	101.104
5	202.92
6	304.85
7	-202.76
8	-100.89
9	2.18
10	96.43
11	299.93

## REFERENCIAS

- Bjerrum, L. (1967). *Engineering Geology of Norwegian Normally Consolidated Marine Clays as Related to Settlements of Buildings*. Geotechnique, 17, 81-118.
- Braja, M. D. (2012). *Fundamentos de Ingeniería de Cimentaciones, 7ma edición*. México, DF, México: Cengage Learning.
- Budhu, M. (2011). *Soil Mechanics and Foundations 3rd ed.* Massachusetts, United States of America: Hamilton Printing Company.
- Chamecki, S. (1956). *Structural Rigidity in Calculating Settlements*. Journal of Soil Mechanics Foundations, Div. Proc. ASCE, 88(SM1), 1-19.
- DeJong, J. & Morgenstern, N.R. (1971). *The Influence of Structural Rigidity on the Foundation Loads of the CN Tower, Edmonton*. Canadian Geotechnical Journal, Vol. 8, pp. 527-536.
- Delage, (2010). *A microstructure approach to the sensitivity and compressibility of some Eastern Canada sensitive clays*. Géotechnique 60, No.5, pp. 353-368.
- Deméneghi, A. (1983). *Interacción Suelo-Estructura*. Revista Ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM, LIII.
- Deméneghi, A., Avilés, J., López, G., et al. (2017). *Interacción Suelo-Estructura, Estática y Dinámica*. Mexico D.F., México: Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica A.C.
- Díaz-Rodríguez, Martínez-Vasquez & Santamarina, (2009). *Strain-Rate Effects in Mexico City Soil*. Journal of Geotechnical and Geo-environmental Engineering Vol 135; pp.300-305.
- Knappett, J.A. & Craig, R.F. (2012). *Craig's Soil Mechanics 8th Edition*. New York, United States of America: Spon Press.
- Krizek, Jaromir, (2011). *Soil-Structure Interaction of Integral Bridges* Czech Technical University in Prague, Czech Republic. Structural Engineering International 2 pp. 169-174.
- Lambe & Whitman, (1991). *Mecánica de suelos*. Distrito Federal, México: Limusa.
- Locat, J., Lefebvre, G. & Ballivy, G. (1984). *Mineralogy, chemistry, and physical properties interrelationships of some sensitive clays from Eastern Canada*. Candian Geotechnique Journal VOL. 21. pp. 530-540.
- Manual de Normas Técnicas Complementarias para Diseño Y Construcción de Cimentaciones de la Ciudad de México (2017)*.
- Manual de Normas Técnicas Complementarias para Diseño Y Construcción de Estructuras de Concreto de la Ciudad de México (2017)*.
- Shelley, (2011). *Some Geotechnical Properties to Characterize Mexico City Clay*. XIV Pan-Am CGS Geotechnical Conference, Octubre 2011, Toronto, Canada.
- Stavridis L. T. (2002) *Simplified Analysis of Layered Soil – Structure Interaction*. ASCE, Journal of Structural Engineering. Vol. 128, No. 2, Pp. 224-230.
- Terzaghi, K.V. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc.

Terzaghi, K.V. & Peck, R. (1996). *Soil Mechanics in Engineering Practice, Third Edition*. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc.

Viladkar, M.N. (1993), *Soil – Structure Interaction in the Time Domain*. Computers & Structures Vol. 46, No. 3, pp. 429-442.

Zeevaert, L. (1973). *Foundation engineering for difficult subsoil conditions*. New York, United States of America: Van Nostrand Reinhold Company.

Zeevaert, L. (1980). *Interacción Suelo – Estructura de Cimentaciones Superficiales y Profundas, Sujetas a Cargas Estáticas y Sísmicas*. Distrito Federal, México: LIMUSA.

Zeevaert, L. (1986). *Consolidation in the Intergranular Viscosity of Highly Compressible Soils Consolidation of Soils Testing and Evaluation ASTM STP 892*. R.N. Yong and F.C. Townsendm, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1986, pp. 257-281.

Zheng-Wen Yang and Wen-Da Lu, (1992). *Static Soil-Structure Interaction Analysis by FE-BE Coupling Method* Shangai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Appl. Math Modelling, Vol. 16 pp 384-389.