Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Un modelo de riesgo de crédito vía cadenas de Markov a tiempo continuo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

PRESENTA:

Fernando Rojas Linares

DIRECTOR DE TESIS:

M. en C. Daniel Cervantes Filoteo

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno	
Apellido paterno	Rojas
Apellido materno	Linares
Nombre(s)	Fernando
Teléfono	54859830
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Actuaría
Número de cuenta	310707028
2. Datos del tutor	
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Daniel
Apellido paterno	Cervantes
Apellido materno	Filoteo
3. Datos del sinodal 1	
Grado	Dra.
Nombre(s)	María Asunción Begoña
Apellido paterno	Fernández
Apellido materno	Fernández
4. Datos del sinodal 2	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Ana
Apellido paterno	Meda
Apellido materno	Guardiola
5. Datos del sinodal 3	
Grado	Dra.
Nombre(s)	María Clara
Apellido paterno	Fittipaldi
Apellido materno	-
6. Datos del sinodal 4	
Grado	Act.
Nombre(s)	Alejandro
Apellido paterno	Santoyo
Apellido materno	Cano
7.Datos del trabajo escrito.	
Título	Un modelo de riesgo de crédito vía cadenas de Markov
Subtitulo	a tiempo continuo
Número de páginas	118 p
Año	2019

Índice general

Introducción

En el entorno cotidiano, cuando uno habla de temas como las finanzas, el ahorro o las inversiones, automáticamente piensa en una institución bancaria: en las cuentas de ahorro, los bonos, los intereses asociados a cada institución, etc.

En cuestiones de inversión uno pensaría en acudir a un banco, darle cierta cantidad de dinero a la institución y regresar en una fecha posterior para reclamar el dinero depositado más un porcentaje de interés a nuestro favor, quizá sin preocuparnos en gran medida de los eventos que pudieran suceder entre el depósito y el retiro del capital: rápido y sencillo. Pero ¿realmente podría despreocuparme en todo ese periodo de tiempo?, o mejor aún, ¿qué pasaría si yo quisiera eliminar a la institución bancaria en todo este proceso y acudir directamente con la(s) entidad(es) para prestar mi dinero?

Consideremos el siguiente problema: supongamos que una persona tiene una cantidad X de capital que desea invertir para generar más dinero, sin embargo se ha dado cuenta que los rendimientos que ofrecen los productos derivados de algunas empresas son mayores a los rendimientos que le ofrecen las entidades bancarias. Esta persona decide entrar entonces a un mercado financiero para negociar un contrato con una empresa.

Dado que esta persona no quiere tener relación con algún banco u otra entidad que sirva como contacto entre su dinero y la empresa, supondremos que entra directamente en un mercado en el cual no existan intermediarios que puedan involucrarse. Sin embargo, la persona se hace las siguientes preguntas: ¿en cuál empresa debería invertir? ¿cuál es la empresa más confiable? ¿qué le garantiza que volverá a ver su dinero?

Este trabajo surge a partir de estas preguntas para proporcionar un modelo de riesgo de incumplimiento de crédito que le permita a los prestamistas encontrar una empresa de buena reputación que tenga poca probabilidad de incumplimiento de la deuda contraída. Se enfoca en la medición del riesgo de crédito de las empresas con el fin de obtener probabilidades de incumplimiento de la deuda basado en el rating de las compañías prestatarias, haciendo uso de un modelo matemático que involucre cadenas de Markov a tiempo continuo.

En el Capítulo 1 empezaremos por establecer las definiciones básicas de los términos usuales en un entorno de mercados financieros y las características necesarias que deben cumplir. Se hablará de la estructura de un mercado financiero, los productos que se pueden negociar dentro de estos y la clasificación de los mismos, haciendo un hincapié en los mercados OTC y en los productos financieros derivados, en especial las opciones.

En el Capítulo 2 hablaremos de los procesos estocásticos; se darán las definiciones y estudiaremos las cadenas de Markov a tiempo continuo, mencionando sus características y diferencias con respecto a un modelo a tiempo discreto. También se definirá el concepto de martingala, las características que tiene y la medida de probabilidad inducida por esta.

El Capítulo 3 introducirá el modelo de Jarrow-Turnbull para los riesgos de incumplimiento de las instituciones de crédito. Veremos la historia del modelo y su aplicación a casos discretos y continuos. Mencionaremos las características que se deben de cumplir para poder aplicar de forma correcta el modelo y la relación entre la probabilidad de incumplimiento de una empresa con el rating de crédito que tenga en el mercado.

En el Capítulo 4 trataremos el tema de la estimación de los parámetros, mencionaremos cuales parámetros son necesarios estimar para el funcionamiento del modelo, los métodos matemáticos usados para las estimaciones de los parámetros del proceso de bancarrota y la tasa de recuperación, y la obtención de las primas de riesgo, las probabilidades de supervivencia y las de incumplimiento. Asimismo veremos una aplicación del modelo de riesgo de incumplimiento. Estudiaremos la capacidad de cumplimiento de un contrato de algunas empresas basados en los ratings, obtendremos las probabilidades de incumplimiento y evaluaremos que tan factible sea la decisión de invertir en distintas empresas con distintas calificaciones crediticias.

Capítulo 1

Mercados financieros

1.1. Definición y características

Un mercado financiero es un espacio, no necesariamente físico, en el que se realiza la compraventa del dinero en todas sus formas, usualmente en forma de instrumentos financieros, como acciones, bonos y metales preciosos, y derivados, como futuros u opciones, y se definen sus precios, basado en la ley de la oferta y la demanda. Los mercados pueden ser tanto un espacio físico, como la Bolsa de Valores de Nueva York (NYSE), la Bolsa de Valores de Londres (LSE) o la Bolsa de Valores de Bombay (BSE); o un espacio virtual, como el sistema electrónico NASDAQ.

Estos mercados son un mecanismo para canalizar el ahorro de las familias y empresas a la inversión, de tal manera que las personas que ahorran tengan una buena remuneración por prestar ese dinero y las empresas puedan disponer ahora de ese dinero para realizar otras inversiones.

Los mercados financieros deben tener las siguientes características:

- **Amplitud:** Tienen una buena cantidad de instrumentos para negociar.
- **Profundidad:** Manejan la existencia de instrumentos financieros que cubran diversas eventualidades en un mercado.
- **Libertad:** Permiten la entrada y salida del mercado sin tener alguna imposición o barrera.
- **Flexibilidad:** Los precios de los instrumentos se negocian dentro del mercado ante un cambio en la economía.
- **Transparencia:** Permiten obtener la información del precio del activo.

1.2. Composición de un mercado financiero

La finalidad de un mercado financiero es atraer fondos de los inversores y canalizarlos a las corporaciones, para permitirles a las empresas financiar sus operaciones y lograr un crecimiento. Sin un mercado financiero los prestatarios tendrían cierta dificultad de encontrar un prestamista ellos mismos.

En general, un mercado financiero está compuesto por lo siguiente:

- **Inversionista**: entidad que le da dinero temporalmente a otra, con la condición de recuperar el monto de capital prestado junto con algún interés, ganancia o cargo. Los prestamistas pueden ser personas o empresas.

- **Emisor**: entidad que pide un préstamo monetario a otra, con la finalidad de realizar alguna inversión y tener crecimiento. Estos pueden ser personas, pidiendo prestado dinero a través de algún préstamo bancario; empresas pidiendo dinero prestado para ayudar a los flujos de efectivo a corto o largo plazo; y los gobiernos, a menudo pidiendo prestado, usualmente a través de emisión de bonos, para compensar la diferencia entre sus requisitos de gasto y sus ingresos fiscales.

- **Intermediario**: haciendo presencia en los mercados organizados, un intermediario, tales como bancos o aseguradoras, es una entidad que ayuda en el proceso de encontrar un prestamista a algún prestatario. Un banco, por ejemplo, toma los depósitos de aquellos que tienen dinero y el deseo de ahorrarlo, y después prestar ese dinero depositado a aquellos que busquen un préstamo.

1.3. Clasificación de los mercados financieros

Los mercados financieros se pueden clasificar en diferentes categorías:

- **Por tipo de activos:**
  - *Mercado de dinero*: en donde se negocia con dinero o con activos financieros de corto plazo (plazos menores o iguales a un año) y con gran liquidez.
    Una característica de estos mercados son que la mayoría de los instrumentos que se ofrecen son gubernamentales, por lo que se considera que, en general, que estos instrumentos son de bajo riesgo y alta liquidez, aunque no forzosamente todos los instrumentos ofrecidos en estos mercados satisfacen ello.

- *Mercado de capitales*: en donde se negocia con activos financieros de mediano (plazos mayores a 1 año y menores a 10 años) y largo plazo (plazos mayores a diez años). A su vez, el mercado de capitales se subdivide en *mercado de deuda a mediano y largo plazo* y *mercado accionario*.
  En el caso de los mercados de capitales, estos se consideran mercados de mayor riesgo, menor liquidez y generalmente mayor rendimiento.

- **Por el momento de la compra:**
  - *Mercados primarios*: son los mercados en donde se lleva a cabo la venta de los instrumentos financieros por primera vez, es decir, estos se compran directamente a los emisores. La finalidad de este tipo de mercados es dar financiamiento a las entidades.
  - *Mercados secundarios*: son los mercados donde se revenden los instrumentos financieros, es decir, estos se comprar a otros inversionistas. La finalidad de estos mercados es dar liquidez a las entidades.

- **Por estructura del mercado:**
  - *Mercados organizados*: son mercados en donde intervienen 3 participantes en la realización de las transacciones: el inversionista, el emisor y el intermediario financiero, comúnmente una *cámara de compensación*, que garantizan la liquidez y el pago de las obligaciones. Este tipo de mercado es autorizado por el gobierno y está regulado, por lo que los contratos están estandarizados.
  - *Mercados no organizados (mercados Over The Counter u OTC)*: son mercados donde las transacciones se realizan entre el inversionista y el emisor sin la necesidad de contar con un intermediario financiero, que en caso de existir, solo cumple la función de ser un enlace entre el inversionista y el emisor. A diferencia de los mercados organizados, los contratos no están estandarizados y no se cuenta con cámaras de compensación que aseguren liquidez o depósitos en garantía.

- **Por la región:**
  - *Mercados nacionales*: un mercado se considera nacional cuando la transacción se realiza entre dos entidades residentes de un mismo país y a la vez, esta se realiza en la moneda de jurisdicción de ese país.
  - *Mercados internacionales*: un mercado se considera internacional cuando la transacción se realiza entre dos entidades residentes de distintos países.

1.4. Intrumentos financieros

Según las *Normas Internacionales de Información Financiera*, conocidas como NIIF o por sus siglas en inglés IFRS, los instrumentos financieros son contratos que dan origen a un *activo financiero* en una empresa y un *pasivo financiero* o un *instrumento de patrimonio* en otra.

Dicho de otra forma, os instrumentos financieros son contratos monetarios entre dos entidades o partes. Se pueden crear, intercambiar, modificar y liquidar. Pueden ser efectivo (monedas), evidencia de un interés de propiedad de una entidad (acción) o un derecho contractual de recibir o entregar efectivo (fianza).

Los instrumentos financieros son vitales en la gestión financiera ya que forman parte de todo el engranaje del sistema financiero de cada país.

1.4.1. Tipos de instrumentos

Los instrumentos financieros se pueden dividir en dos subgrupos: los instrumentos en efectivo o instrumentos derivados.

- **Instrumentos en efectivo:** Son instrumentos cuyo valor está determinado directamente por los mercados. Pueden ser valores, que son fácilmente transferibles, e instrumentos tales como préstamos y depósitos, donde tanto el emisor como el inversionista deben acordar una transferencia.
- **Instrumentos derivados:** Son instrumentos que obtienen su precio del valor y las características de una o más entidades subyacentes, como algún activo, índice (como la inflación) o tasa de interés. Estos instrumentos a su vez se dividen en:
    - *Derivados cotizados en la bolsa*: son aquellos instrumentos derivados que se negocian a través de bolsas de derivados especializadas u otras bolsas.
    - *Derivados Over-the-counter (OTC)*: son aquellos contratos que se negocian en privado y se intercambian directamente entre dos entidades, sin la necesidad de acudir ante un intermediario. Productos como los *swaps*, los *forward rate agreement (FRA's)*, las *opciones exóticas* y en general otros *derivados exóticos*, son casi siempre negociados de esta manera.

De manera alternativa, los instrumentos financieros puede ser clasificados por su *clase de activo* dependiendo si están basados en capital, lo que refleja la propiedad del emisor; o en deuda, que refleja un préstamo que el inversionista ha otorgado al emisor. Es decir, si el instrumento es de deuda, se puede clasificar como a *corto plazo* (menos de un año) o a *largo plazo* (más de un año).

Clase de activo	Tipo de Instrumentos			
	Valores	*Efectivo*	*Derivados negociados en la bolsa*	*Derivados OTC*
Deuda a largo plazo (Mayor a un año)	Bonos.	Préstamos.	Bonos de futuros. Opciones sobre bonos de futuros.	Swaps de tasa de interés. Opciones de tasa de interés. Derivados exóticos.
Deuda a corto plazo (Menor a un año)	Papel comercial. *Treasury Bills.* CETES.	Cuentas de depósitos. Certificados de depósitos.	Futuros en tasa de interés a corto plazo.	FRA's.
Acciones	Acciones	N/A	Opciones de renta variable de futuros.	Opciones sobre acciones. Derivados exóticos.
Divisas	N/A	Spot de cambios de divisas (*Foreign Exchange spot*).	Futuros de divisas.	Opciones en cambios de divisas. Intercambio de divisas.

Figura 1.1: Instrumentos financieros por clase de activo.

1.4.2. Opciones

En términos de finanzas, una opción es un contrato que otorga al comprador (el propietario de la opción), el derecho, mas no la obligación de comprar o vender un activo o instrumento subyacente a un precio y fecha de ejercicio específicas. El precio del ejercicio puede establecerse por referencia al precio de mercado (precio spot) del valor subyacente o del producto básico al día que se toma la opción, o puede fijarse con un descuento o una prima. El vendedor tiene la obligación correspondiente de cumplir con la transacción, vender o comprar, si el comprador (propietario) hace válida la opción. Una opción que transmite al propietario el derecho a comprar a un precio específico se conoce como un *call*; una opción que transmite el derecho del propietario a vender a un precio específico se conoce como un *put*.

Una opción de compra normalmente se ejercería solo cuando el precio de ejercicio sea inferior al valor de mercado del activo subyacente, mientras que una opción de venta normalmente se ejercería solo cuando el precio de ejercicio sea superior al valor de mercado. Cuando se ejerce una opción, el costo para el comprador del activo adquirido es el precio de ejercicio más la prima, si corresponde. Cuando transcurre la fecha de vencimiento de la opción sin que se ejerza la opción, la opción expira y el comprador pierde la prima para el vendedor. En cualquier caso, la prima es un ingreso para el vendedor, y normalmente una pérdida de capital para el comprador.

Comercio de opciones

- **Opciones negociadas en la bolsa**
  Las opciones negociadas en bolsa (también llamadas *opciones listadas*) son una clase de derivados negociados en bolsa. Las opciones negociadas en bolsa tienen contratos estandarizados y se liquidan a través de una cámara de compensación con cumplimiento garantizado. Dado que los contratos están estandarizados, a menudo están disponibles modelos de precios precisos. Las opciones negociadas en bolsa incluyen:

  - Opciones de bonos.
  - Opciones de acciones.
  - Opciones de índices del mercado accionario.
  - Opciones de contratos de futuros.

- **Opciones Over-the-counter**
  Las opciones *over-the-counter* (opciones OTC, también llamadas *opciones de distribuidor*) se negocian entre dos partes privadas, y no se enumeran en un intercambio. Los términos de una opción OTC no están restringidos y pueden personalizarse individualmente para satisfacer cualquier necesidad comercial. En general, el emisor de opciones es una institución bien capitalizada (para evitar el riesgo de crédito). Los tipos de opciones comúnmente negociados en el mostrador incluyen:

  - Opciones de tasa de interés.
  - Opciones de tasa de cambio de divisas.
  - Opciones de swaps.

  Las transacciones de opciones extrabursátiles generalmente no necesitan anunciarse en el mercado y tienen pocos o ningún requisito reglamentario. Sin embargo, las contrapartes de OTC deben establecer líneas de crédito entre sí y cumplir con los procedimientos de liquidación y compensación de cada uno.

1.5. Riesgo de crédito

1.5.1. Definición

La definición de *riesgo* es variada, según el diccionario de la Real Academia Española, el riesgo es una "*contingencia o proximidad de un daño*"; mientras que Banxico, en el documento

Definiciones básicas de Riesgos, nos dice que "*la palabra riesgo proviene del latín 'risicare' que significa 'atreverse'. En finanzas, el concepto de riesgo está relacionado con la posibilidad de que ocurra un evento que se traduzca en pérdidas para los participantes en los mercados financieros(...)*". De manera general, el riesgo se define como la probabilidad o amenaza de daño, lesión, responsabilidad, pérdida o cualquier otro acontecimiento negativo causado por vulnerabilidades externas o internas, y que se puede evitar mediante una acción preventiva.

Dependiendo del contexto que se estudie, la definición de riesgo es distinta, sin embargo, el elemento en común que comparten todas las definiciones es el de la incertidumbre de resultados, donde cada uno de los resultados se diferencia por la magnitud y alcance que tengan. En el caso de una empresa, esta puede estar expuesta a diversos riesgos de distintos orígenes y diferentes consecuencias, donde algunos de estos riesgos pueden ser evitados elaborando una estrategia correcta para tal fin. En este trabajo se estudiará un riesgo específico al que puede estar expuesto una entidad: *el riesgo de crédito.*

Para poder definir lo que es el *riesgo de crédito*, es necesario tener claro el concepto de *riesgo de contraparte*. Según Banxico, "*el riesgo de contraparte existe cuando se da la posibilidad de que una de las partes de un contrato financiero sea incapaz de cumplir con las obligaciones financieras contraídas, haciendo que la otra parte del contrato incurra en una pérdida. El riesgo de crédito es el caso particular cuando el contrato es uno de crédito, y el deudor no puede pagar su deuda*"; por lo que el riesgo de crédito se refiere a la posibilidad de que, al momento del vencimiento, una entidad no haga frente, total o parcialmente, a su obligación de devolver una deuda o rendimiento acordado sobre un instrumento financiero, debido a quiebra, falta de liquidez, fraudes, situaciones sociales o alguna otra razón; a este concepto también se le conoce como *riesgo de incumplimiento*. Este concepto se relaciona usualmente con las instituciones financieras y los bancos, pero afecta también a las empresas y organismos de otros sectores, así como a las personas.

El crédito tiene dos posturas importantes, la postura del *deudor*, o emisor, y la postura del *prestamista* o inversionista. En primera instancia, el riesgo es del prestamista, aquí se incluye pérdidas de capital e intereses, interrupción de un flujo de efectivo y aumentos de los costos de los cobros. Las pérdidas pueden surgir por ciertas circunstancias:

- Es posible que un consumidor no realice el pago de un préstamo hipotecario, de tarjeta de crédito, de linea de crédito o cualquier otro préstamo.
- Una compañía no puede pagar una deuda adquirida.
- Una empresa no paga los salarios ganados de un empleado a su vencimiento.
- Una empresa o emisor de bonos del gobierno no realiza un pago con un cupón o pago de capital a fecha de vencimiento.
- Una compañía de seguros insolvente no paga la obligación adquirida.

- Un banco insolvente no devuelve los fondos a un depositante.
- Un gobierno otorga protección de quiebra a un consumidor o negocio insolvente.

De manera general, se puede clasificar el riesgo de crédito de acuerdo a que entidad lo soporte:

- **Soportado por particulares**
  Los particulares se enfrentan a un riesgo de crédito cuando depositan su dinero en un banco, lo prestan, o firman contratos en los que se les obliga a realizar un depósito. También al ser empleado de una empresa se está expuesto al riesgo de que la misma no haga efectivo su salario. Este riesgo afecta el futuro financiero de un individuo.

- **Soportado por empresas**
  Las empresas están expuestas al riesgo de crédito cuando venden a plazos. Muchas compañías cuentan con departamentos de riesgo cuya labor consiste en estimar la salud financiera de sus clientes para determinar si es posible venderles a crédito o no.

- **Soportado por instituciones financieras frente a clientes particulares**
  Las entidades financieras soportan un riesgo de crédito cuando prestan dinero a sus clientes particulares a través de productos tales como tarjetas de crédito, hipotecas, líneas de crédito o préstamos personales.

- **Soportado por instituciones financieras frente a clientes corporativos**
  Las entidades financieras también se enfrentan a un riesgo de crédito cuando prestan dinero a otras empresas u organismos. Usualmente, los bancos ofrecen distintos tipos de interés, exigen garantías o imponen otro tipo de restricciones, todo esto dependiendo de la probabilidad de incumplimiento del deudor.

Dentro del riesgo de crédito existe dos probabilidades de incumplimiento: la *probabilidad real* y la *probabilidad implícita*. La probabilidad real, también conocida como la *probabilidad de incumplimiento o fallo* en fianzas, consiste en las observaciones directas de los valores; mientras que la probabilidad implícita se refiere a la probabilidad de incumplimiento derivado de factores del mercado como son la especulación, rendimientos de bonos, rendimientos de acciones, etc.

En general, un prestamista puede reducir el riesgo de crédito pidiendo ciertas garantías a los deudores, como solicitar una *verificación de crédito*, buscar seguridad sobre algunos activos, requisitando la contratación de un seguro, como un seguro hipotecario, o pidiendo una garantía de un tercero, asimismo el prestamista puede contratar un seguro contra el riesgo o vender la deuda a otra compañía. En general, cuanto mayor sea el riesgo de crédito, mayor será la tasa de interés que el prestamista le pedirá al deudor.

1.5.2. Tipos de riesgo de crédito

Un riesgo de crédito puede ser de uno de los siguientes tipos:

- **Riesgo de incumplimiento de crédito**: también conocido como *riesgo de contraparte*, es el riesgo de pérdida que surge a partir de un deudor que es probable que no cumpla con la obligación del pago de un bono, un derivado, una póliza de seguro u otro contrato de préstamo en su totalidad o si el deudor tiene más de 90 días de vencimiento en cualquier obligación de crédito importante.

  Este tipo de riesgo puede afectar a todas las transacciones sensibles al créditos, incluídos préstamos, valores y derivados. El riesgo de incumplimiento no siempre es posible compensarlo, por ejemplo, debido a problemas de liquidez temporales o razones sistemáticas a largo plazo.

  Este riesgo aumenta debido a factores de riesgo positivamente correlacionados. Esta contabilización de la correlación entre los factores de riesgo de la cartera y el incumplimiento de la contraparte no es trivial.

- **Riesgo de concentración**: es el riesgo asociado con cualquier exposición individual o grupo de exposiciones con el potencial de producir pérdidas suficientemente grandes para amenazar las operaciones centrales de un banco. Puede surgir en forma de concentración de la industria.

- **Riesgo de país**: este tipo de riesgo está asociado prominentemente con el desempeño maroeconńico del país y su estabilidad política. El riesgo de país se subdivide a la vez en dos tipos de riesgo:

  - *Riesgo de transferencia o conversión*: es el riesgo de pérdida que surge de un estado soberano que congela los pagos en moneda extranjera.
  - *Riesgo de crédito soberano*: es el riesgo de que un gobierno no quiera o no pueda cumplir con sus obligaciones de préstamo, o que no cumpla con los préstamos que garantiza. Muchos países se han enfrentado ante esto en la recesión mundial de finales del 2000.

  En este riesgo influyen cinco variables macroeconómicas que afectan la probabilidad de la reprogramación de la deuda soberana:

  - Relación de servicio de deuda.
  - Relación de importación.
  - Ratio de inversión.
  - Variación de los ingresos de exportación.
  - Crecimiento de la oferta monetaria nacional.

1.5.3. Evaluación del riesgo

Para un inversionista es muy importante el poder evaluar la magnitud de las pérdidas que pueda tener ante un posible incumplimiento de la deuda; para esto utiliza recursos significativos y programas sofisticados para poder analizar y gestionar el riesgo de crédito.

Algunas compañías tienen a su disposición un departamento de riesgo crediticio cuyo trabajo es evaluar la capacidad financiera de sus clientes y, en consecuencia, otorgar o no un crédito. La propia compañía puede usar programas internos para aconsejar sobre como evitar, reducir y transferir riesgos, aunque también puede auxiliarse por inteligencia proporcionada por terceros.

Existen compañías, tales como *Standard & Poors*, *Moody,s*, *Fitch Ratings*, *DBRS*, *Rapid Ratings International* entre otras, que proporcionan información crediticia y financiera a cambio de una tarifa.

Para poder hacer una valuación del riesgo correcta, es necesario contar con un buen modelo matemático como base; dicho modelo matemático contará con una variable aleatoria de pérdidas, comunmente denotada como $\widetilde{L}$, la cual considera distintos factores como:

- **Probabilidad de incumplimiento (PD)**, o también conocida como *probability of default*, que es la probabilidad de que la entidad deudora deje de cumplir con sus obligaciones contractuales; comúnmente denotada como $(P_t)_{t\geq 0}$ donde t es un punto de tiempo. La función de las probabilidades de incumplimiento son conocidas como *curvas de crédito*.
- **Exposición al incumplimiento (EAD)**, o también conocida como *exposure at default*, que es la cantidad que deben las entidades deudoras al momento del incumplimiento.
- **Severidad de la pérdida (LGD)**, o también conocida como *loss given default*, que es la cantidad monetaria que pierde la entidad inversora en caso de incumplimiento de las entidades deudoras.

Haciendo uso de estos factores se puede definir a la variable de pérdida L de la siguiente forma:

$$L = \begin{cases} EAD \times LGD, & \text{si hay incumplimiento} \\ 0 & \text{si no hay incumplimiento} \end{cases}$$

y con esto se puede calcular la **pérdida esperada (EL)**, o *expected loss*, que es la esperanza de que los deudores de un portafolio no cumplan con sus obligaciones con el inversionista. En este caso, la pérdida esperada se refiere a la media de la variable aleatoria de pérdidas por riesgo de crédito $\widetilde{L}$.

En este trabajo se aborda de manera general los distintos modelos de medición del riesgo, sin embargo, si se desea conocer con mayor detalle los supuestos que están involucrados en cada modelo así como una explicación más detallada acerca del funcionamiento de cada uno, el lector puede consultar la tesis *Cálculo de medidas de riesgo para crédito personal vía análisis de supervivencia*, de Rita Soriano, disponible en el portal *TESIUNAM*.

Existen diversas formas para medir el riesgo en el mercado de un portafolio. Una de ellas es utilizando una función de distribución de pérdidas a la cual es posible calcular propiedades como *cuantiles* y *medidas de dispersión*. Entre las distintas medidas de riesgo se encuentran:

- **Valor en Riesgo (VaR)**, que es un modelo surgido de la idea de encontrar el peor escenario de pérdida de una empresa en cuestión al riesgo con respecto al cambio de precios y su intensidad. En este contexto, se puede definir al VaR como la máxima pérdida en un intervalo de tiempo definido que puede ocurrir con un cierto nivel de confianza. Es decir, el VaR de un portafolio se puede definir como el umbral tal que la pérdida sea menor o igual a $\alpha \in (0,1)$ con un nivel de confianza de $(1-\alpha)$, o expresado matemáticamente:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) = \text{ínf}\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[L > l] \leq 1-\alpha\}$$

  donde L es una variable de pérdida.

- **Momentos parciales superiores (UPM)**, que es un modelo que calcula las pérdidas de la empresa haciendo uso de la cola superior de la distribución de pérdida, conocido comunmente como *upper partial moment*. Matemáticamente podemos definir el UPM como:

$$UPM_{(n,r)}(L) = \int_r^\infty (l-r)^n dF_L(l)$$

  donde $F_L(l)$ es la función de distribución de una variable de pérdida L, $n \geq 0$ es un grado y r es un punto de referencia, que puede ser la media, la mediana o el VaR. Se puede ver que esa medida es igual a $\mathbb{E}[(l-r)^n]$

- **Expected Shortfall (ES)**, modelo que surge para realizar el cálculo del *déficit* esperado de la pérdida esperada que no pueda ser cubierta por la medida del VaR. De manera matemática, considerando una variable de pérdida L con $\mathbb{E}[\mid L \mid] < \infty$ y función de distribución F_L, el ES se puede definir, para un nivel de confianza $\alpha \in (0,1)$, como:

$$ES_\alpha[L] = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(F_L)du$$

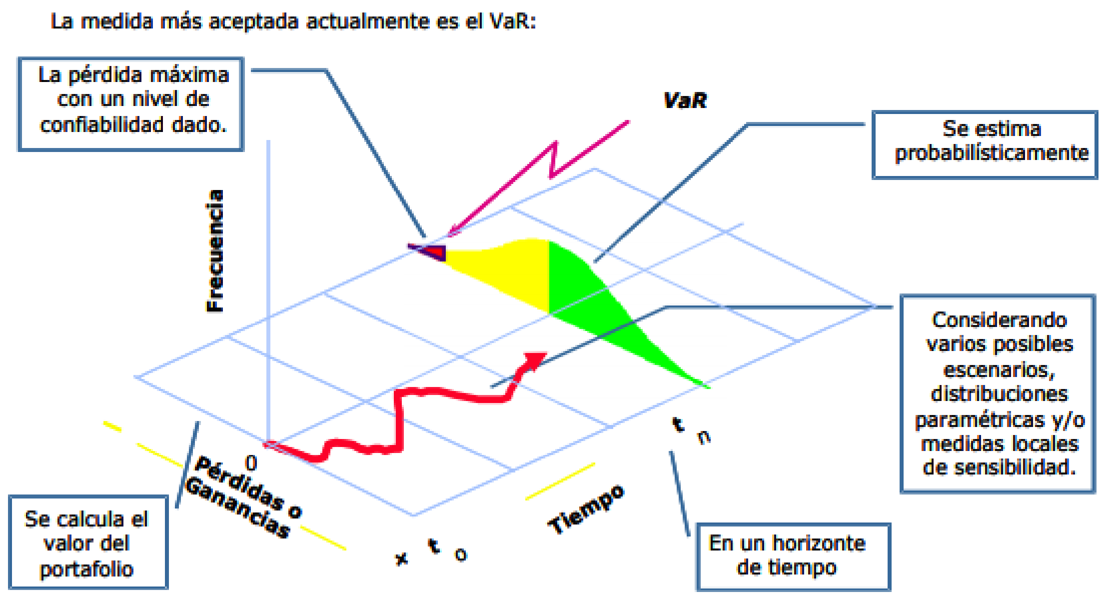


Figura 1.2: Representación gráfica del VaR obtenida de *Definiciones básicas de Riesgo, Banxico, pág. 4.*

con $q_u(\bullet)$ la función cuantil. Es fácil demostrar (ver *Cálculo de medidas de riesgo para crédito personal vía análisis de supervivencia* sección 1.9, pág. 29.) que la relación que guarda el ES con el VaR es:

$$ES_\alpha[L] \geq VaR_\alpha(L).$$

1.5.4. Gestión de riesgo de crédito

La gestión de riesgos de crédito es la práctica de mitigar las pérdidas, que se llegaran a generar por el incumplimiento, al comprender la adecuación del capital de la entidad y las reservas para pérdidas crediticias en un momento dado.

La crisis financiera global y la crisis crediticia que le siguió pusieron a la gestión del riesgo de crédito en el centro de atención regulatorio. Como resultado, los reguladores comenzaron a exigir más transparencia.

Para la gestión del riesgo de crédito suelen utilizarse los conceptos de pérdidas esperadas e inesperadas. La pérdida esperada en una transacción es la esperanza matemática del posible quebranto. Generalmente, suele calcularse como el producto de:

- La probabilidad de incumplimiento, es decir, la probabilidad de que el deudor no cumpla con sus obligaciones.
- Exposición en riesgo, o tamaño de la deuda.
- Pérdida en caso de incumplimiento, que es una estimación de la parte que realmente se pierde en caso de incumplimiento tras ejecutarse las garantías.

Los inversionistas pueden mitigar el riesgo de crédito de varias maneras, como:

- **Fijación de precios basado en el riesgo**: es decir, los inversionistas pueden cobrar una tasa de interés más alta a los emisores que tienen más probabilidades de incumplimiento, considerando factores relacionados con el préstamo: *el propósito del crédito*, *la calificación crediticia* y *la relación del préstamo con el valor*.
- **Pactos**: es decir, los inversionistas pueden establecer estipulaciones sobre el emisor en los acuerdos de préstamo, tales como:
  - Informar periódicamente su condición financiera.
  - Abstenerse de pagar dividendos, recomprar acciones, pedir préstamos adicionales u otras acciones voluntarias específicas que afecten negativamente la posición financiera de la compañía.
  - Reembolsar el préstamo en su totalidad, a solicitud del inversionista, en ciertos eventos, como cambios en la relación de la deuda con el capital del emisor, o cobertura de interés.
- **Seguros de crédito y derivados de crédito**: los inversionistas y los tenedores de bonos pueden cubrir su riesgo de crédito mediante la compra de *seguros de crédito* o *derivados de crédito*. Estos contratos transfieren el riesgo del inversionista al asegurador a cambio de un pago. El derivado de crédito más común es el *swap de incumplimiento crediticio*.
- **Ajuste**: los inversionistas pueden reducir la cantidad del crédito otorgado, ya sea en general o para ciertos emisores,
- **Diversificación**: consiste en la inversión en una amplia variedad de activos para reducir el riesgo total de una cartera o disminuir su volatilidad.
- **Seguro de depósito**: los gobiernos pueden establecer seguros de depósito para garantizar depósitos bancarios en caso de insolvencia y para alentar a los consumidores a mantener sus ahorros en el sistema bancario en lugar de hacerlo efectivo.

Dentro de la gestión de riesgos, es posible encontrar métodos para modelar los posibles escenarios en los que se puede presentar riesgo, y así posteriormente poder hacer frente a los posibles riesgos que puedan presentarse. Entre los modelos de modelación de riesgos más utilizados se encuentran los siguientes dos:

- **Método de varianzas y covarianzas**, este modelo, utilizado de forma condicional o incondicional, asume que el vector de factores de riesgo $\mathbb{X}_{t+1}$ sigue una distribución normal multivariada $\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$; además de suponer el hecho que la combinación lineal en términos de los factores de riesgo es una aproximación suficientemente exacta de la pérdida real, de manera que calcula la media y la varianza de un factor de riesgo, asumido como normal univariado, como combinación lineal de las variables aleatorias, es decir

$$l_{[t]}^{\Delta}(\mathbb{X}_{t+1}) \sim N(-c_t - b_t'\mu, b_t'\Sigma b_t),$$

donde $l_{[t]^{\Delta}}(x) := -\left(f_t(t, Z_t) + \sum_{i=1}^{d} f_{Z_t}(t, Z_t)X_i\right)$.

Este modelo es débil por el hecho de que la linealización no siempre ofrece una buena aproximación de la relación entre la distribución de pérdida y los cambios de factores de riesgo.

- **Simulación histórica**, modelo de fácil implementación que busca la estimación de la distribución del operador de pérdida, $L = l_{[t]}(X_s)$, con la distribución empírica de los datos, construyendo una base de datos univariados aplicando un operador de riesgo a cada uno de los datos históricos del vector de cambio de factores de riesgo para obtener pérdidas históricas simuladas, es decir,

$$\hat{L}_s = l_{[t]}(X_s) \text{ con } s = t - n + 1, t - n + 2, \ldots, t.$$

El éxito del modelo radica en la recolección de datos para el cálculo de los factores de riesgo.

1.5.5. Calificaciones de crédito

Una *calificación crediticia*, o *credit rating*, es una evaluación de la solvencia de crédito con la que cuenta un emisor, o prestatario, de manera general o con respecto a una deuda u obligación financiera en particular. Estas calificaciones se pueden otorgar o asignar a cualquier entidad que busque un préstamo: una persona, una empresa, una autoridad estatal o un gobierno.

Esta evaluación de crédito para empresas y gobiernos generalmente se realiza a través de empresas privadas, conocidas como *agencias de calificación crediticia* o simplemente *calificadoras*, tales como *Standard & Poor's (S& P)*, *Moody's* o *Fitch*. Estas calificadoras son contratadas por una empresa que busca una calificación de crédito propia o para una de sus emisiones de deuda.

Ya que un préstamo es esencialmente una promesa de pago futuro, la calificación de crédito es un dato que determina la probabilidad de que el emisor pague un préstamo dentro de los límites de acuerdo establecidos sin faltar a su obligación, o en otras palabras, sin recurrir al *incumplimiento*. Una calificación alta indica una alta probabilidad que la entidad cumpla con su obligación de deuda en su totalidad y sin problemas, mientras que una calificación baja o mala sugiere que la entidad deudora ha tenido problemas para liquidar sus deudas anteriores y que es posible que este comportamiento persista en el futuro.

Históricamente, la calificadora *Moody's* fue la primera agencia en emitir calificaciones de crédito, siendo las calificaciones crediticias de bonos las primeras publicadas de manera pública en 1909. A partir de ese momento, otras agencias siguieron su ejemplo en las décadas posteriores. Sin embargo, las calificaciones crediticias no tuvieron un impacto profundo en los mercados hasta 1936, cuando se emitió una regla que prohibía a los bancos invertir en bonos con calificaciones de crédito bajas, o *especulativos*, para que de esa forma se evitara el riesgo de incumplimiento que pudiera generar pérdidas financieras. Estas prácticas fueron adoptadas rápidamente por otras compañías e instituciones financieras, haciendo que, eventualmente, el confiar en las calificaciones de crédito fuera establecido como norma general.

La importancia de la calificación crediticia radica en que afecta las posibilidad de que a una entidad le sea aprobado un préstamo determinado o reciba términos favorables en cuestiones del mismo, principalmente en la determinación de la tasa de interés a la que se deberá pagar el préstamo. Dado que las empresas dependen de los préstamos en gran medida para solventar gastos iniciales, la negación de un préstamo podría resultar perjudicial para estas, mientras que una tasa de interés demasiado alta podría implicar que la deuda será más difícil de pagar. Es por esto que las empresas emisoras buscan posicionarse en el mercado con la calificación de crédito más alta posible, para así atraer más y mejores inversiones.

Las calificaciones de crédito se pueden clasificar esencialmente de la siguiente manera:

- **Por entidad calificada:**
    - La *Calificación crediticia*, o *credit rating*, son las calificaciones que se le otorgan exclusivamente a las empresas y gobiernos, derivadas del historial crediticio que mantienen las agencias de informes crediticios, como *Equifax*, *Experian* y *TransUnion*. Estas calificaciones generalmente son representadas por letras e indica la capacidad de solvencia de cada empresa o gobierno. Cada calificadora tiene una escala de calificación crediticia diferente.
    - El *Puntaje crediticio*, o *credit score*, los cuales se otorgan a personas y son derivadas del historial crediticio que mantienen las agencias de informes crediticios, como *Equifax* o *Experian*. Los puntajes generalmente son números que varía generalmente entre 300 y 850.
- **Por temporalidad:**

- Las calificaciones *a corto plazo* reflejan la probabilidad de incumplimiento por parte del emisor dentro de un año. Este tipo de calificación crediticia se ha utilizado como norma en los últimos años.

- Las calificaciones *a largo plazo* reflejan la probabilidad de incumplimiento por parte del emisor en un momento dado en un futuro extendido a más de un año. En el pasado las calificaciones a largo plazo fueron más consideradas como norma.

Existen varios factores que las calificadoras toman en cuenta para poder asignar una calificación de crédito. La calificadora considera el historial de endeudamiento pasado de la entidad, así como el historial de pagos de deudas. La calificadora además analiza el potencial económico de la entidad: si el futuro económico se visualiza bueno la calificación tiende a ser más alta; de lo contrario la calificación caerá.

Para el caso de las personas, los factores que se toman en cuenta para su puntaje son el historial de crédito de la persona, su historial de pagos, las cantidades de endeudamiento, la duración del historial de crédito y los tipos de crédito. Algunos de estos factores tienen más peso que otros, y los detalles de cada factor se pueden encontrar en un informe de crédito.

Cabe mencionar que las calificaciones de crédito nunca son estáticas, cambian todo el tiempo según los datos más recientes, por lo que cualquier incumplimiento de pago, ya sea por parte de una persona, empresa o gobierno, tiene una repercusión negativa hasta en la calificación más alta. Asi mismo un cambio en la calificación de crédito puede tener un impacto significativo en los mercados financieros, un buen ejemplo de esto es la reacción negativa que tuvo el mercado ante la baja de calificación del gobierno federal de Estados Unidos, por parte de la calificadora *Standard & Poor's*, el 5 de agosto de 2011, donde los mercados accionarios globales se desplomaron durante semanas después de la baja de calificación.

El tema de las calificaciones de crédito es uno de los pilares centrales de este trabajo: en el capítulo 3 se verá como las calificaciones forman parte de un espacio de estados de una cadena de Markov y posteriormente, en el capítulo 4, podremos ver como un cambio en la calificación de crédito puede repercutir de manera importante en la probabilidad de incumplimiento de una empresa a largo plazo.

NIVEL	CORTO PLAZO	LARGO PLAZO	SIGNIFICADO
Grado de inversión segura.	Prime-1	Aaa	Máxima calidad crediticia.
		Aa1 Aa2 Aa3	Alta calidad crediticia.
	Prime-2	A1 A2 A3	Buena calidad crediticia.
	Prime-3	Baa1 Baa2 Baa3	Calidad crediticia satisfactoria. Existen tensiones a largo plazo.
Grado de inversión con especulación.	No Prime	Ba1 Ba2 Ba3	Calidad crediticia cuestionable. Futuro incierto, pero capacidad actual.
		B1 B2 B3	Calidad crediticia pobre o nula. La capacidad a largo plazo es baja.
Grado de especulación con alto riesgo.		Caa1 Caa2 Caa3	Calidad crediticia muy pobre. Hay posibilidad de impagos.
		Ca	Alta probabilidad de un impago.
		C	Situación de impago inminente.

Figura 1.3: Calificaciones de crédito otorgadas por la empresa *Moody's* obtenida de https://www.moodys.com/ratings-process/Ratings-Definitions/002002

NIVEL	CORTO PLAZO	LARGO PLAZO	SIGNIFICADO
Grado de inversión segura.	A-1+	AAA	*Máxima calidad crediticia.*
	A-1	AA+ AA AA-	*Alta calidad crediticia.*
	A-2	A+ A A-	*Buena calidad crediticia.*
	A-3	BBB+ BBB BBB-	*Calidad crediticia satisfactoria. Existen tensiones a largo plazo.*
Grado de inversión con especulación.	B	BB+ BB BB-	*Calidad crediticia cuestionable. Futuro incierto, pero capacidad actual.*
		B+ B B-	*Calidad crediticia pobre o nula. La capacidad a largo plazo es baja.*
Grado de especulación con alto riesgo.	C	CCC+ CCC CCC-	*Calidad crediticia muy pobre. Hay posibilidad de impagos.*
	R	CC	*Alta probabilidad de un impago.*
		C	*Situación de impago inminente.*
	SD	SD	*Impago selectivo o parcial.*
	D	D	*Impago general.*
	NR	NR	*Sin clasificar.*

Figura 1.4: Calificaciones de crédito otorgadas por la empresa *Standard* & *Poors* obtenida de https://www.standardandpoors.com/en_US/web/guest/article/-/view/sourceId/504352

NIVEL	CORTO PLAZO	LARGO PLAZO	SIGNIFICADO
Grado de inversión segura.	F1+	AAA	*Máxima calidad crediticia.*
	F1	AA+ AA AA-	*Alta calidad crediticia.*
	F2	A+ A A-	*Buena calidad crediticia.*
	F3	BBB+ BBB BBB-	*Calidad crediticia satisfactoria.* *Existen tensiones a largo plazo.*
Grado de inversión con especulación.	B	BB+ BB BB-	*Calidad crediticia cuestionable.* *Futuro incierto, pero capacidad actual.*
		B+ B B-	*Calidad crediticia pobre o nula.* *La capacidad a largo plazo es baja.*
Grado de especulación con alto riesgo.	C	CCC	*Calidad crediticia muy pobre.* *Hay posibilidad de impagos.*
		CC	*Alta probabilidad de un impago.*
		C	*Situación de impago inminente.*
	RD	RD	*Impago selectivo o parcial.*
	D	D	*Impago general.*
	NR	NR	*Sin clasificar públicamente.*

Figura 1.5: Calificaciones de crédito otorgadas por la empresa *Fitch* obtenida de https://www.fitchratings.com/site/definitions

Capítulo 2

Cadenas de Markov a tiempo continuo

2.1. Definición y propiedades

2.1.1. Definición

Consideremos un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t \ : \ t \geq 0\}$, que toma valores de un conjunto $\mathcal{E}$, el cual, a tiempo $t = 0$, inicia en un estado arbitrario $j_1 \in \mathcal{E}$. Este proceso permanecerá en el estado j_1 un cierto tiempo aleatorio que llamaremos $T_{j_1,1}$, para después saltar a un nuevo estado arbitrario j_2, $j_2 \neq j_1$. Ahora, el proceso permanecerá en el estado j_2 un tiempo aleatorio $T_{j_2,2}$. Pasado este tiempo, el proceso volverá a saltar a un estado $j_3 \neq j_2$, y así sucesivamente.

Consideremos un ejemplo un poco más concreto: supongamos que el proceso inicia a $t = 0$ en el estado $u \in \mathcal{E}$, entonces permanecerá ahí un tiempo $T_{u,1}$; pasado ese tiempo, el proceso debe saltar a otro estado distinto de u, sin pérdida de generalidad supongamos que el proceso salta al estado v y permanece ahí un tiempo $T_{v,2}$. Dado que el proceso debe de saltar de nuevo a otro estado, el proceso aquí tiene dos escenarios en general, puede regresar al estado $u \neq v$ o puede irse a otro estado $j \in \mathcal{E}$, con $j \neq v$. Supongamos que el proceso salta al estado $w \neq v$ y permanece ahí un tiempo $T_{w,3}$ para luego saltar al estado u de nuevo, permaneciendo ahí un tiempo $T_{u,4}$ y así sucesivamente.

Con este ejemplo podemos notar que el proceso tiene asociados los tiempos $T_{u,1}, T_{v,2}, T_{w,3}, T_{u,4}, \ldots$, por lo que es fácil notar que los tiempos $T_{u,2}$ y $T_{u,3}$, así como $T_{v,1}, T_{v,3}, T_{v,4}, T_{w,1}, T_{w,2},$ y $T_{w,4}$ no están definidos en este ejemplo. Esto es importante ya que con esto podemos notar que no es necesario que todos los tiempos $T_{j,n}$ para $j \in \mathcal{E}$ y $n \geq 1$ esten siempre definidos para cada proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$.

Entonces, nos interesá analizar el comportamiento de este proceso estocástico, y que propiedades debe de cumplir para que podamos hablar de el como una cadena de Markov a tiempo continuo.

Definición 1. *Los **tiempos de estancia**, denotados por $T_{j,n}$, son los tiempos aleatorios en los que el proceso permanece constante en alguno de sus estados.*

Definición 2. *Los **tiempos de salto**, comunmente denotados por W, son los tiempos en donde el proceso cambia de un estado a otro,*

$$W_n = T_{j_1,1} + T_{j_2,2} + \ldots + T_{j_n,n}, \;\; \textit{para } n \geq 1$$

Por lo tanto, el proceso, que denotaremos como X_t, puede escribirse de la siguiente forma:

$$X_t = \begin{cases} j_1, & \text{si } 0 \leq t < W_1 \\ j_2, & \text{si } W_1 \leq t < W_2 \\ j_3, & \text{si } W_2 \leq t < W_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Definición 3. *A un proceso que cumple las características anteriores, se le llama **proceso de saltos**.*

Un proceso de saltos podría ser una buena aproximación a una cadena de Markov a tiempo continuo, sin embargo, un proceso de este estilo debe cumplir algunas condiciones para que pueda estar definido para todo tiempo $t \geq 0$ y, además, cumplir la propiedad de Markov, ya que, hasta ahora, no tenemos garantizado que ninguna de estas dos cosas se cumpla.

Analicemos el siguiente caso: supongamos que $\lim_{n\to\infty} W_n$ converge a un número θ para n arbitraria, eso quiere decir que el límite de $\sum_{i=1}^{n} T_{j_i,i}$ es igual a θ cuando n tiende a infinito; por criterios de convergencia, eso implica que la suma es finita y entonces los términos de esa suma son considerablemente más pequeños, es decir, el proceso tiene tiempos de estancia $T_{j,k}$ cada vez más cortos, por lo que podemos afirmar que, para tiempo θ, el proceso ha realizado una infinidad de saltos.

Definición 4. *Se dice que un proceso de saltos **explota en un tiempo finito** si*

$$\lim_{n\to\infty} W_n < \infty$$

Cuando un proceso de saltos explota en un tiempo finito, entonces el proceso no estaría bien definido para todo tiempo $t \geq 0$, ya que, para $t > lim_{n\to\infty} W_n$, no podemos definir a X_t. Por lo tanto, para evitar un comportamiento de ese tipo, se supondrá que:

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \infty \text{ c.s.}$$

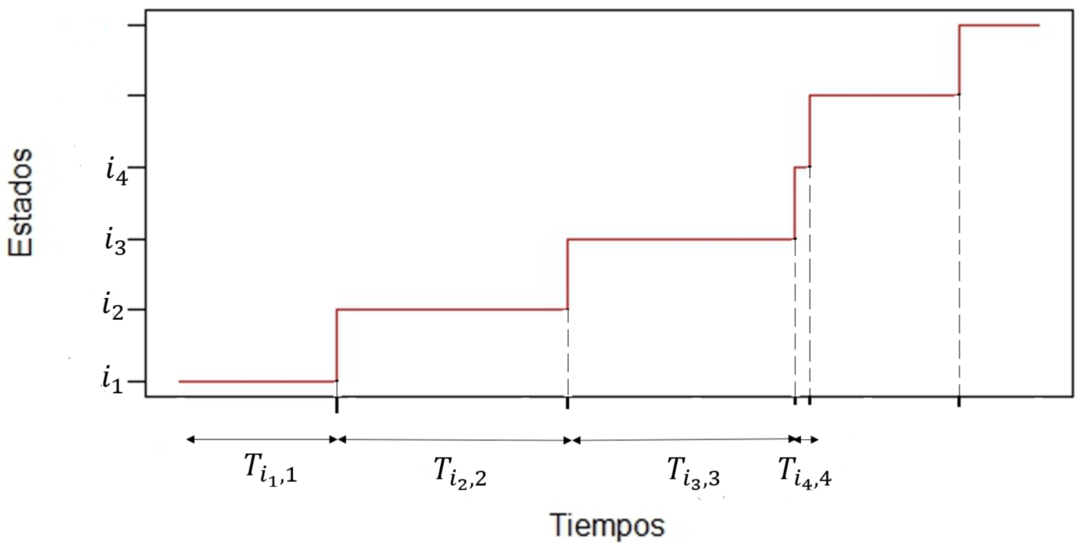


Figura 2.1: El proceso se mantiene en un estado i_j un tiempo aleatorio $T_{i_j,j}$

de esta forma, para cada valor $t \geq 0$ el valor de X_t es finito casi seguramente.

Al igual que en las cadenas de Markov a tiempo discreto, tiene sentido suponer un conjunto $\mathcal{E}$ que denotará al espacio de posibles valores que puede tomar el proceso de saltos, también conocido como *espacio de estados*. Sin pérdida de generalidad, tomaremos $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Definición 5. *A la probabilidad de que el proceso efectúe un salto del estado i al estado j se le llama* ***probabilidad de salto*** *p_{ij} y debe satisfacer las siguientes propiedades:*

1. $p_{ii} = 0$.

2. $p_{ij} \geq 0$.

3. $\sum_j p_{ij} = 1$.

Hay que notar que a un proceso de saltos a tiempo continuo se le pide que $p_{ii} = 0$, porque no tiene sentido definir una probabilidad de saltar de un estado a él mismo, ya que en realidad lo que estaría pasando sería una prolongación del tiempo de estancia $T_{i,n}$.

Viéndolo de forma matricial, las probabilidades de salto constituyen una matriz estocástica $\mathcal{P}$ que se ve de la siguiente forma:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & 0 & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Asímismo, vamos a suponer que los tiempos de estancia $T_{j_1,1}, T_{j_2,2}, \dots$ son independientes entre sí. Estos tiempos son finitos con probabilidad uno, o bien, infinitos con probabilidad uno. Lo que se quiere es no tener variables con probabilidad positiva, distinta de uno, de ser infinito.

Una variable $T_{j,n} = \infty$ quiere decir a que el proceso deja de saltar y permanece en el estado j el resto del tiempo, lo que nos guía a las siguientes definiciones.

Definición 6. *Un estado i en un proceso de saltos es* ***no absorbente*** *si para la variable $T_{i,n}$*

$$\mathbb{P}[T_{i,n} < \infty] = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Un estado i en un proceso de saltos es ***absorbente*** *si para la variable $T_{i,n}$*

$$\mathbb{P}[T_{i,n} = \infty] = 1, \ \textit{para algún } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, se puede llegar a suponer que un estado ahora solo puede pertenecer a uno de los dos tipos: absorbente o no absorbente.

Definición 7. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$, una filtración sobre este, para algún conjunto de índices I. Un proceso estocástico $\boldsymbol{X} = \{X_t : \ t \in I\}$, definido en este espacio, $\mathcal{F}-$ adaptado con valores en un espacio medible (S, σ) se dice que posee la* ***propiedad de Markov*** *si, para cada $A \in \sigma$ y cada $s, t \in I, s < t$*

$$\mathbb{P}[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{P}[X_t \in A \mid X_s].$$

En caso de que S sea un conjunto discreto e $I = \mathbb{N}$ la propiedad de Markov se puede escribir como

$$\mathbb{P}[X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] = \mathbb{P}[X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}]$$

para $x_0, x_1, x_2, \dots \in S$.

Se tiene entonces, el siguiente resultado:

Teorema 1. *Sea* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso de saltos con tiempos de estancia* $T_{j,n}$ *independientes, tiempos de salto* W_n *y probabilidades de salto* p_{ij}*, que cumple que* $lim_{n\to\infty} W_n = \infty$ *c.s. , entonces, el proceso satisface la propiedad de Markov si, y sólo si, los tiempos de estancia en los estados no absorbentes tienen distribución exponencial.*

Demostración. Para la demostración de este teorema, es necesario verificar que la distribución de las $T_{j,n}$ cumplen la propiedad de pérdida de memoria, y por lo tanto su distribución es exponencial ya que las variables $T_{j,n}$ son continuas.

El lector puede revisar la página 225 de las *Notas de Clase 5* de Glen Takahara [19], para ver una demostración a este resultado. □

Tal propiedad ayuda a calcular probabilidades con cierta facilidad, por lo que se supondra que el tiempo de estancia en un estado no absorbente i tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda_i > 0$, es decir,

$$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \quad \text{para } t > 0$$

.

Nota. *Cuando* $T_i = \infty$ *podemos considerar que* $\lambda_i = 0$*.*

Definición 8. *Las* ***probabilidades de transición****,* $p_{ij}(t)$ *para una cadena de Markov a tiempo continuo homogénea en el tiempo se definen como*

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}[X_t = j \mid X_0 = i]$$

Notemos que para cada par de estados $i, j \in S$ las probabilidades de transición $p_{ij}(t)$ son funciones continuas de t.

Definición 9. *Se dice que las probabilidades de transición son* ***estacionarias*** *en el tiempo, si, para cualesquiera* i, j *enteros no negativos y para cada* $s, t \geq 0$*, se tiene que*

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}[X_{t+s} = j | X_s = i] = \mathbb{P}[X_t = j | X_0 = i].$$

Si $t = 0$*, es decir,* $\mathbb{P}[X_0 = j \mid X_0 = i]$ *entonces*

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{si } i = j \\ 0, & \textit{en otro caso,} \end{cases}$$

Si se varian los índices i y j en el espacio de estados, se podrá obtener la matriz de probabilidades de transición P_t al tiempo t, denotada como:

$$\mathcal{P}_t = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \dots \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots \\ p_{20}(t) & p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Nota. *Cuando el espacio de estados es finito, esta matriz es siempre estocástica, es decir, cada renglón suma uno. Sin embargo, cuando el espacio de estados es infinito, no siempre se cumple esa propiedad.*

Definición 10. *A un proceso de saltos, con tiempos de estancia $T_{j,n} \sim Exp(\lambda_j)$ independientes, tiempos de salto W_n, espacio de estados $\mathcal{E}$, probabilidades de salto p_{ij} y probabilidades de transición $p_{ij}(t)$ se le llama* ***cadena de Markov a tiempo continuo****.*

De aquí, cabe resaltar que existen tres elementos con los cuales una cadena de Markov a tiempo continuo queda completamente especificada:

- Una distribución inicial, π_0, en el espacio de estados $\mathcal{E}$.
- Un conjunto de parámetros no negativos λ_i.
- Las probabilidades de saltos p_{ij}.

Observación. *En un proceso de Markov a tiempo continuo las probabilidades de saltos p_{ij} y las probabilidades de transición $p_{ij}(t)$ representan cosas distintas:*

- *Las probalidades p_{ij} son las probabilidades de cambio al estado j cuando el proceso se encuentra en el estado i y tiene un salto.*
- *Las probabilidades $p_{ij}(t)$ son las probabilidades de encontrar al proceso en el estado j, partiendo del estado i, al término de un intevalo de tiempo t.*

Ejemplo 1. *El proceso Poisson es una cadena de Markov a tiempo continuo especificado de la siguiente forma:*

- *Su distribución inicial es $\pi_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots)$.*
- *Sus tiempos de estancia son exponenciales de párametro λ.*
- *Sus probabilidades de saltos entre los estados son*

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ j = i + 1 \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

2.1.2. Probabilidades de transición

Como ya se mencionó, $p_{ij}(t)$ denotan las probabilidades de transición en una cadena de Markov a tiempo continuo. Sin embargo, uno de los problemas que se pueden plantear es el encontrar una expresión general para estas probabilidades, para cada par de estados i, j y para cada $t \geq 0$, siendo este, un problema muy general.

Proposición 1. *Sea i y j dos estados, entonces, $\forall\ t \geq 0$:*

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i s} (\sum_{k \neq i} p_{ik} p_{kj}(s)) ds. \tag{2.1}$$

Demostración. Para esta demostración hay que considerar los casos en los que i es un estado absorbente y no absorbente.

Si un estado i es absorbente, quiere decir que $\mathbb{P}[T_{i,n} = \infty] = 1$, y por la nota de la página 25, podemos considerar que $\lambda_i = 0$, por lo que

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

es decir

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \delta_{ij} \\ &= \delta_{ij} e^{-0t} + 0 e^{-0t} \int_0^t e^{-0s} (\sum_{k \neq i} p_{ik} p_{kj}(s)) ds \\ &= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i s} (\sum_{k \neq i} p_{ik} p_{kj}(s)) ds. \end{aligned}$$

Ahora, considerando el caso que i es no absorbente, entonces

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \mathbb{P}[X_t = j \mid X_0 = i] \text{ y para n arbitrario} \\ &= \mathbb{P}[X_t = j, T_{i,n} > t \mid X_0 = i] + \mathbb{P}[X_t = j, T_i \leq t \mid X_0 = i] \\ &= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t f_{X_t, T_{i,n} | X_0}(j, u \mid i) du \\ &= \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \int_0^t \sum_{k \neq i} f_{X_t, X_u, T_{i,n} | X_0}(j, k, u \mid i) du \end{aligned}$$

Analizando cada sumando dentro de la integral, notamos que, por propiedad de Markov e independencia,

$$\begin{aligned} f_{X_t, X_u, T_{i,n} | X_0}(j, k, u \mid i) &= f_{X_t | X_u, T_{i,n}, X_0}(j \mid k, u, i) \cdot f_{X_u | T_{i,n}, X_0}(k \mid u, i) \cdot f_{T_{i,n} | X_0}(u \mid i) \\ &= p_{kj}(t-u) p_{ik} \lambda_i e^{-\lambda_i u} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} e^{-\lambda_i t} + \lambda_i e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i u} \left(\sum_{k \neq i} p_{ik} p_{kj}(t-u) \right) ds.$$

Finalmente, haciendo un cambio de variable $s = t - u$, se obtiene el resultado propuesto. $\square$

Podemos observar que las probabilidades de transición en una cadena de Markov a tiempo continuo, satisfacen una versión continua de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, que en este caso se conoce como *propiedad de semigrupo.*

Proposición 2. *Para cualesquiera dos estados* i, j *y para todos* $t, s \geq 0$

$$p_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t) \cdot p_{kj}(s). \tag{2.2}$$

En forma matricial, se tiene que $\mathcal{P}_{t+s} = \mathcal{P}_t \mathcal{P}_s$.

Demostración. Desarrollando la expresión de $p_{ij}(t+s)$ tenemos que

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+s) &= \mathbb{P}[X_{t+s} = j \mid X_0 = i] \\ &= \sum_k \mathbb{P}[X_{t+s} = j, X_t = k \mid X_0 = i] \\ &= \sum_k \mathbb{P}[X_{t+s} = j \mid X_t = k]\mathbb{P}[X_t = k \mid X_0 = 0] \text{ por propiedad de Markov} \\ &= \sum_k p_{ik}(t) \cdot p_{kj}(s) \end{aligned}$$

□

Observación. *La ecuación de Chapman-Kolmogorov permite expresar a las* $p_{ij}(t), \forall t > 0$*, en términos de probabilidades de transición en intervalos de tiempo de longitud muy pequeña.*

La observación anterior nos dice que es suficiente conocer el comportamiento de las $p_{ij}(t)$ en tiempos t muy pequeños para conocer su comportamiento para cualquier $t > 0$.

Nota. *La colección* $\{\mathcal{P}_t : t \geq 0\}$ *constituye un semigrupo de matrices, i.e. la colección cumple:*

- $\mathcal{P}_0 = \mathcal{I}$*, con* $\mathcal{I}$ *la matriz identidad.*
- $\mathcal{P}_{t+s} = \mathcal{P}_t \mathcal{P}_s, \ \forall \ t, \ s \geq 0.$

2.1.3. El generador infinitesimal

De la fórmula de la proposición 1 podemos concluir que las probabilidades de transición $p_{ij}(t)$ son funciones continuas en t y por lo tanto la función $t \to p_{ij}(t)$ es diferenciable.

Proposición 3. *Para cualesquiera dos estados* i, j *y para cualquier* $t > 0$*,*

$$p'_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i \sum_{k \neq i} p_{ik} \cdot p_{kj}(t). \tag{2.3}$$

Demostración. Basta con derivar la expresión (2.1) con respecto de t para obtener el resultado.

□

Observación. *La ecuación anterior constituye todo un sistema de ecuaciones diferenciales para las probabilidades de transición, donde su derivada puede depender de todas las probabilidades de transición* $p_{kj}(t)$, *con* $k \neq i$.

Dado que la derivada $p'_{ij}(t)$ es una función continua en el tiempo, podemos tomar el límite cuando $t \to 0$, obteniendo lo siguiente.

Definición 11. *A las cantidades* $p'_{ij}(0)$ *se les conoce como* ***parámetros infinitesimales*** *del proceso, y se les denota como*

$$p'_{ij}(0) = g_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i, & si\ i = j \\ \lambda_i p_{ij}, & si\ i \neq j \end{cases} \tag{2.4}$$

Haciendo variar los índices de g_{ij} podemos obtener una nueva matriz cuyas entradas son justamente estos parámetros infinitesimales.

Definición 12. *Se le denota como* ***el generador infitesimal del proceso de Markov*** *a la matriz* G *que esta conformada por los parámetros infinitesimales del proceso, es decir,*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 p_{01} & \lambda_0 p_{02} & \dots \\ \lambda_1 p_{10} & -\lambda_1 & \lambda_1 p_{12} & \dots \\ \lambda_2 p_{20} & \lambda_2 p_{21} & -\lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

La matriz G determina el comportamiento de la cadena de Markov a tiempo continuo de manera única, además, el generador infinitesimal es equivalente a la matriz de probabilidades de transición en un paso para cadenas de Markov a tiempo discreto.

Proposición 4. *El generador infinitesimal del proceso de Markov cumple con las siguientes propiedades:*

- $g_{ij} \geq 0$, *si* $i \neq j$.
- $g_{ii} \leq 0$.
- $\sum_j g_{ij} = 0$.

Demostración. Las primeras dos propiedades se obtienen directamente de la definición de g_{ij} en la expresión (2.4), particularmente, para la segunda propiedad, $g_{ii} = 0$ si $\lambda_i = 0$, es decir, si i es absorbente. Para la última propiedad tenemos que

$$\sum_j g_{ij} = -\lambda_i + \sum_{j \neq i} \lambda_i p_{ij} = -\lambda_i + \lambda_i(1 - p_{ii}) = -\lambda_i + \lambda_i = 0$$

ya que, por definición, $p_{ii} = 0$. □

Ejemplo 2. *El generador infinitesimal para el proceso Poisson de parámetro* λ *esta dado por:*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Proposición 5. *El generador infinitesimal determina de manera única a una cadena de Markov a tiempo continuo.*

Demostración. Notemos que por la definición de las g_{ij} en la expresión (2.4), se pueden obtener los parámetros iniciales que definen a una cadena de Markov, de la siguiente forma:

$$\lambda_i = -g_{ii}, \tag{2.5}$$

$$\text{y } p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ -\dfrac{g_{ij}}{g_{ii}}, & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{2.6}$$

□

2.1.4. Proceso de nacimiento y muerte

Definición 13. *Un **proceso de nacimiento y muerte** es una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ y con generador infinitesimal dado por:*

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

*con $\lambda_i,\ \mu_i > 0$ son las **tasas instantáneas de nacimiento y muerte**, respectivamente, sus tiempos de estancia, en cualquier estado i, tienen distribución $Exp(\lambda_i + \mu_i)$, con $\mu_0 = 0$ y sus probabilidades de saltos están dadas por:*

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, & \textit{si } j = i + 1 \\ \dfrac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, & \textit{si } j = i - 1 \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, un proceso de nacimiento y muerte permanece en sus estados un tiempo exponencial, pasado ese tiempo, salta en una unidad, hacia arriba o hacia abajo, con probabilidad p_{ij}. Un salto hacia arriba se interpreta como un nacimiento, mientras que uno hacia abajo se interpreta como una muerte. Suponga que queremos estudiar una población con cierto número de individuos en donde se pueden presentar nacimientos y muertes, ocurriendo una de estas a la vez. Como $\lambda_0 > 0$ y $\mu_0 = 0$, en el estado cero la población puede crecer, pero nunca decrecer.

Ejemplo 3. *Un proceso Poisson es un proceso de nacimiento y muerte donde* $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda > 0$ *y* $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = 0$ *y su generador infinitesimal está dado por la matriz* G *del ejemplo 2.*

Asimismo podemos dar una definición alternativa para los procesos de nacimiento y muerte a través de lo siguientes postulados.

Definición 14. *Un proceso de nacimiento y muerte, es un proceso de Markov a tiempo continuo que cumple lo siguiente:*

- *Tiene incrementos independientes y estacionarios.*
- *Sus probabilidades de transición son estacionarias, i.e.*

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}[X_{t+s} = j | X_s = i].$$

- *Cuando* $h \searrow 0,\ p_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h),\ i \geq 0.$
- *Cuando* $h \searrow 0,\ p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h),\ i \geq 1.$
- *Cuando* $h \searrow 0,\ p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h),\ i \geq 0.$

2.1.5. Ecuaciones de Kolmogorov

Para una cadena de Markov a tiempo continuo se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales en términos de los parámetros infinitesimales. Para llegar a estos resultados, tomando el caso particular de un proceso de nacimiento y muerte, se hace el siguiente análisis.

Considere el intervalo de tiempo $[0, t+h]$ para todo $t \geq 0$ y para $h > 0$ pequeño, entonces, se puede descomponer ese intervalo de la siguiente forma:

$$[0, t+h] = [0, h] \cup (h, t+h].$$

Suponga que se quiere determinar la probabilidad $p_{ij}(t+h)$. Tomando el intervalo $[0, h]$, a partir del estado i pueden ocurrir 3 cosas: que haya un nacimiento, que haya una muerte, o que no nazca ni muera nadie. Cuando $h \searrow 0$, se tiene lo siguiente:

$$p_{ij}(t+h) = \lambda_i h p_{i+1,j}(t) + \mu_i h p_{i-1,j}(t) + (1 - \lambda_i h - \mu_i h) p_{ij}(t) + o(h)$$

Realizando unos cuantos despejes, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{h}(p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)) = \lambda_i p_{i+1,j}(t) + \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Tomando el límite cuando $h \searrow 0$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$p'_{0j}(t) = \lambda_0 p_{ij}(t) - \lambda_0 p_{0j}(t).$$

$$p'_{ij}(t) = \lambda_i p_{i+1,j}(t) + \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)p_{ij}(t), \ i \geq 1.$$

Y se puede llegar a la siguiente conclusión a partir de lo que sucede en un intervalo infinitesimal, al inicio del intervalo: para el coeficiente (λ_i) hay un nacimiento y el proceso debe saltar de $i+1$ a j, para el coeficiente (μ_i) hay una muerte y el proceso debe saltar de $i-1$ a j, o bien, para el factor ($-\lambda_i - \mu_i$) no hay nacimientos ni muertes, por lo que el proceso debe saltar de i a j. A este sistema de ecuaciones diferenciales se le llama *retrospectivo*, ya que, para calcular la probabilidad $p_{ij}(t+h)$ analiza lo que ocurre en el intervalo $[0,h]$ de longitud muy pequeña h.

Definición 15. *En términos infinitesimales, el sistema de ecuaciones diferenciales mostradas en la proposición 3,*

$$p'_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i \sum_{k \neq i} p_{ik} p_{kj}(t).$$

puede escribirse de la siguiente forma:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k g_{ik} p_{kj}(t).$$

En términos matriciales, se puede escribir como:

$$P'(t) = GP(t).$$

A este sistema de ecuaciones se le llama ***ecuaciones retrospectivas de Kolmogorov****.*

Ejemplo 4. *El sistema de ecuaciones retrospectivas de Kolmogorov para el proceso Poisson de parámetro λ está dado por:*

$$p'_{ii}(t) = \lambda p_{ii}(t).$$

$$p'_{ij}(t) = \lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i+1,j}(t), \ i < j.$$

Y su solución es:

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, \quad i \leq j.$$

Ahora bien, consideremos el mismo intervalo $[0, t+h]$ pero con la siguiente descomposición:

$$[0, t+h] = [0, t] \cup (t, t+h].$$

Ahora el intervalo de longitud infinitesimal h se encuentra en la parte final del intervalo de tiempo completo. Nuevamente, cuando $h \searrow 0$,

$$p_{ij}(t+h) = \lambda_{j-1} h p_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1} h p_{i,j+1}(t) + (1 - \lambda_j h - \mu_j h) p_{ij}(t) + o(h).$$

Reescribiendo la fórmula para que quede una prederivada, dándole condiciones de convergencia y tomando el límite cuando $h \searrow 0$ se obtiene:

$$p'_{i0}(t) = -\lambda_0 p_{i0}(t) + \mu_0 p_{i1}(t)$$

.

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1} p_{i,j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_{ij}(t).$$

Su interpretación es similar a la anterior, la cadena pasa del estado i al $j-1$ e instantáneamente hay un nacimiento (λ_{j-1}), la cadena pasa de i a $j+1$ e instantáneamente hay una muerte (μ_{j+1}) o bien, la cadena va de i a j sin que haya nacimientos ni muertes ($-\lambda_j - \mu_j$). A este nuevo sistema de ecuaciones se le llama *prospectiva*.

Definición 16. *En términos infinitesimales, el sistema de ecuaciones diferenciales mostradas en la proposición 3,*

$$p'_{ij}(t) = -\lambda_i p_{ij}(t) + \lambda_i \sum_{k \neq i} p_{ik} p_{kj}(t).$$

puede escribirse de la siguiente forma:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k} p_{ik}(t) g_{kj}.$$

En términos matriciales, se puede escribir como:

$$P'(t) = P(t)G.$$

A este sistema de ecuaciones se le llama ***ecuaciones prospectivas de Kolmogorov****.*

Ejemplo 5. *El sistema de ecuaciones retrospectivas de Kolmogorov para el proceso Poisson de parámetro λ está dado por:*

$$p'_{ii}(t) = -\lambda p_{ii}(t).$$

$$p'_{ij}(t) = -\lambda p_{ij}(t) + \lambda p_{i,j-1}(t), \ i < j.$$

Y su solución es:

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, \quad i \leq j.$$

En algunos casos, los dos sistemas de ecuaciones son equivalentes y su solución produce las mismas probabilidades de transición $p_{ij}(t)$.

2.2. Estadística de cadenas de Markov

Cuando se habla acerca de la estadística de cadenas de Markov, específicamente en el caso de cadenas de Markov a tiempo continuo, se puede dividir en dos pasos esenciales: la *estimación de los tiempos de llegada exponenciales* y la *estimación de las probabilidades de transición.*

Mientras que la estimación de las variables aleatorias de los tiempos de llegada resulta una metodología sencilla puesto que, por hipótesis de cadenas de Markov a tiempo continup, estas son variables aleatorias exponenciales y su estimación es un trabajo sencillo que implica técnicas básicas de inferencia estadística, esta sección estará enfocada al planteamiento general de la estimación de las probabilidades de transición en una cadena de Markov de orden arbitrario, vía estimadores de máxima verosimilitud y distribuciones asintóticas cuando se tiene un buen número de observaciones repetidas de la cadena. Asi mismo se utilizarán pruebas de *cociente de verosimilitudes* y pruebas de *chi-cuadrada.* Para ver con más detalle los calculos aquí expresados se recomienda al lector consultar el artículo *Statistical Inference about Markov Chains* (Anderson y Goodman, 1957).

2.2.1. Introducción

Una cadena de Markov a menudo es un modelo de probabilidad adecuado para ciertas series de tiempo donde la observación en un tiempo dado es la categoría en la cual un individuo cae. La cadena de Markov más simple es aquella que tiene un espacio de estados $\mathcal{E}$ finito y un número finito de puntos equidistantes en el tiempo donde las observaciones son realizadas; la cadena es de primer orden y las probabilidades de transición son las mismas en cada intervalo de tiempo, es decir, la cadena es estacionaria en el tiempo. Esta cadena está definida por su estado inicial y el conjunto de probabilidades de transición. Se considerarán, entonces, métodos de inferencia estadística para este modelo cuando se tienen muchas observaciones en cada uno de los distintos estados iniciales y conjuntos de probabilidades de transición, asimismo, también se deberán considerar métodos de inferencia para modelos más generales, por ejemplo, donde la cadena no sea necesariamente estacionaria.

2.2.2. Estimación de los parámetros de una cadena de Markov de primer orden

El modelo

Sea $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ el espacio de estados de la cadena, y $t = 0, 1, 2, \ldots, \mathcal{T}$ los tiempos de observación. Definimos entonces a $p_{ij}(t)$ como la probabilidad de estar en el estado j a tiempo t dado que se encontraba en el estado i a tiempo $t-1$, para $i, j = 1, \ldots, m$ y $t = 1, \ldots, \mathcal{T}$. Se estudiará entonces considerando dos escenarios:

1. Cuando las probabilidades de transición son estacionarias, es decir, cuando $p_{ij}(t) = p_{ij}$ para toda $t = 1, \ldots, \mathcal{T}$.

2. Cuando las probabilidades de transición son no estacionarias, es decir, cuando las probabilidades de transición no necesariamente son las mismas para cada intervalo de tiempo.

Definimos entonces a $n_i(0)$ como la cantidad de individuos que se encuentran en el estado i a tiempo $t = 0$. En esta sección se considerará a este número como constante, analizando posteriormente que pasa cuando este número es una variable aleatoria.

Supongamos entonces que al realizar una observación sobre un individuo arbitrario, esta consiste de una secuencia de estados en los cuales el individuo se encuentra a tiempo $t = 0, 1, 2, \ldots, \mathcal{T}$. Llamándole $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{\mathcal{T}-1}, i_{\mathcal{T}}$ al estado en el que se encuentra el individuo a tiempo $t = 0, 1, \ldots, \mathcal{T}$ respectivamente, se puede observar fácilmente que, dado el estado inicial i_0, hay $m^{\mathcal{T}}$ distintas secuencias para el individuo. Estas secuencias son eventos mutuamente exclusivos con probabilidades

$$p_{i_0,i_1} \cdot p_{i_1,i_2} \cdot p_{i_2,i_3} \cdot p_{i_3,i_4} \cdots p_{i_{\mathcal{T}-2},i_{\mathcal{T}-1}} \cdot p_{i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}, \tag{2.7}$$

donde las probabilidades de transición son estacionarias.

Sea $n_{ij}(t)$ el número de individuos que se encuentran en el estado j a tiempo t y que estaban en el estado i a tiempo $t-1$. Se puede observar fácilmente que el conjunto de $n_{ij}(t)$ para $i, j = 1, 2, \ldots, m$ y $t = 1, 2, \ldots, \mathcal{T}$ es un conjunto de $m^2\mathcal{T}$ números, y debemos de mostrar que este conjunto forma un conjunto de estadísticas suficientes para las secuencias observadas.

Sea $n_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}$ el número de individuos cuya secuencias de estados es $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{\mathcal{T}-1}, i_{\mathcal{T}}$. Entonces

$$n_{gj}(t) = \sum_{g,j} n_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}, \tag{2.8}$$

donde $g = i_{t-1}$ y $j = i_t$ y la suma corre sobre todos los valores de las i. Entonces, la probabilidad de un conjunto de secuencias dado para los n individuos, en un espacio de dimensión $nm\mathcal{T}$ que describe todas las secuencias para todos los n individuos, es

$$
\begin{aligned}
&\prod[p_{i_0,i_1}(1)p_{i_1,i_2}(2)p_{i_2,i_3}(3)p_{i_3,i_4}(4)\cdots p_{i_{\mathcal{T}-2},i_{\mathcal{T}-1}}(\mathcal{T}-1)p_{i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}(\mathcal{T})]^{n_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}}\\
&=\left(\prod[p_{i_0,i_1}(1)]^{n_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}}\right)\cdots\left(\prod[p_{i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}(\mathcal{T})]^{n_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}}\right)\\
&=\left(\prod_{i_0,i_1} p_{i_0,i_1}(1)^{n_{i_0},n_{i_1}(1)}\right)\cdots\left(\prod_{i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}} p_{i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}(\mathcal{T})^{n_{\mathcal{T}-1},n_{i_{\mathcal{T}}}(\mathcal{T})}\right)\\
&=\prod_{t=1}^{\mathcal{T}}\prod_{g,j} p_{g,j}(t)^{n_{g,j}(t)},
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

donde el producto en las primeras dos lineas son sobre todos los valores de los $\mathcal{T}+1$ índices. Con esto, podemos ver que el conjunto de números $n_{ij}(t)$ forman un conjunto de estadísticas suficientes.

Sea $n_i(t-1)=\sum_{j=1}^{m} n_{ij}(t)$. Entonces la distribución condicional de $n_{ij}(t)$ para $j=1,\ldots,m$, dado $n_i(t-1)$ (o en general, dado $n_k(s)$ para $k=1,\ldots,m$ y $s=0,\ldots,t-1$) es:

$$
\left(\frac{n_i(t-1)!}{\prod_{j=1}^{m} n_{ij}(t)!}\right)\prod_{j=1}^{m} p_{ij}(t)^{n_{ij}(t)}. \tag{2.10}
$$

Esta es la misma distribución que uno obtendría si se tienen $n_i(t-1)$ observaciones en una distribución multinomial con probabilidades $p_{ij}(t)$ con $n_{ij}(t)$ números resultantes. La distribución de los $n_{ij}(t)$ condicionado a $n_i(0)$ es

$$
\prod_{t=1}^{\mathcal{T}}\left\{\prod_{i=1}^{m}\left[\left(\frac{n_i(t-1)!}{\prod_{j=1}^{m} n_{ij}(t)!}\right)\prod_{j=1}^{m} p_{ij}(t)^{n_{ij}(t)}\right]\right\}. \tag{2.11}
$$

Para una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias, se tiene un resultado más fuerte en cuestión de suficiencia a partir de la ecuación (2.5); si el conjunto $n_{ij}=\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_{ij}(t)$ forman un conjunto de estadísticas suficientes. Esto se sigue del hecho que, cuando las probabilidades de transición son estacionarias, la ecuación (2.5) se puede escribir como

$$
\prod_{t=1}^{\mathcal{T}}\prod_{g,j} p_{g,j}^{n_{g,j}(t)}=\prod_{i,j} p_{ij}^{n_{ij}}. \tag{2.12}
$$

Cabe recalcar que para las probabilidades de transición no necesariamente estacionarias $p_{ij}(t)$, los $n_{ij}(t)$ son un conjunto minimal de estadísticas suficientes.

Estimadores máximo verosímiles

Las probabilidades de transición estacionarias p_{ij} pueden ser estimadas al maximizar la ecuación (2.9) con respecto a p_{ij}, sujeto a las restricciones que, para cada $i = 1, \ldots, m$, se cumpla

$$\begin{aligned} p_{ij} &\geq 0, \\ \sum_{j=1}^{m} p_{ij} &= 1, \end{aligned}$$

cuando las n_{ij} son las observaciones. Esta probabilidad es de la misma forma, excepto por un factor que no depende de p_{ij}, obtenido de m muestras independientes, donde la *i-ésima* muestra consiste de $n_i^* = \sum_j n_{ij}$ pruebas multinomiales con probabilidades p_{ij}. Para tales muestras, es fácil verificar que los estimadores máximo verosímiles para las p_{ij} son

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{ij} &= \frac{n_{ij}}{n_i^*} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_{ij}(t)}{\sum_{k=1}^{m} \sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_{ik}(t)} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_{ij}(t)}{\sum_{t=0}^{\mathcal{T}-1} n_i(t)}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

por lo tanto, esto es cierto para cualquier otra distribución cuya probabilidad elemental es de la misma forma excepto por factores libres de parámetros y cuyas restricciones sobre p_{ij} son las mismas. En particular, se cumple para las estimaciones de los parámetros p_{ij} de la ecuación (2.9).

Cuando las probabilidades de transición no son estacionarias, la aproximación general del párrafo anterior puede seguir aplicándose, y los estimadores máximo verosímiles para las $p_{ij}(t)$ resultan ser

$$\begin{aligned} \widetilde{p}_{ij}(t) &= \frac{n_{ij}(t)}{n_i(t-1)} \\ &= \frac{n_{ij}(t)}{\sum_{k=1}^{m} n_{ik}(t)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Comportamiento asintótico de las $n_{ij}(t)$

Para encontrar el comportamiento asintótico de las p_{ij} primero consideremos las $n_{ij}(t)$. Primero se supondrá que

$$\frac{n_k(0)}{\sum n_j(0)} \to \eta_k \text{ cuando } \sum n_j(0) \to \infty,$$

con $\eta_k > 0$ y $\sum \eta_k = 1$. Entonces, para cada i_0, el conjunto $n_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}$ son variables multinomiales con tamaño de muestra de $n_{i_0}(0)$ y parámetros $p_{i_0,i_1}, p_{i_1,i_2}, \ldots p_{i_{\mathcal{T}-2},i_{\mathcal{T}-1}}, p_{i_{\mathcal{T}-1},i_{\mathcal{T}}}$, y por lo tanto, también son asintóticamente distribuidas normal.

Definimos a la matriz $P = (p_{ij})$ y sean $p_{ij}^{(t)}$ los elementos de la matriz P^t. Entonces $p_{ij}^{(t)}$ es la probabilidad de encontrarse en el estado j a tiempo t dado que a tiempo 0 se encontraba en el estado i. Sea $n_{k;ij}(t)$ el número de secuencias que incluyen el estado k a tiempo 0, el estado i a tiempo $t-1$ y el estado j a tiempo t. Entonces buscaremos los momentos de bajo orden de

$$n_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} n_{k;ij}(t)$$

La probabilidad asociada con las $n_{k;ij}(t)$ es $p_{ki}^{(t-1)} \cdot p_{ij}$ con un tamaño de muestra de $n_k(0)$. Entonces

$$\mathbb{E}[n_{k;ij}(t)] = n_k(0)p_{ki}^{(t-1)}p_{ij},$$

$$Var(n_{k;ij}(t)) = n_k(0)p_{ki}^{(t-1)}p_{ij}[1 - p_{ki}^{(t-1)}p_{ij}],$$

$$Cov(n_{k;ij}(t), n_{k;gh}(t)) = -n_k(0)p_{ki}^{(t-1)}p_{ij}p_{kg}^{(t-1)}p_{gh} \text{ con } (i,j) \neq (g,h)$$

ya que el conjunto de las $n_{k;ij}(t)$ sigue una distribución multinomial. Para estudiar el comportamiento de las covarianzas entre otras variables el lector puede consultar *Probability models for analyzing time changes in attitudes* (Anderson, 1951).

Resta examinar los momentos de la variable $n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij}$, donde $n_{k;i}(t-1) = \sum_j n_{k;ij}(t)$; estos se necesitarán para obtener la teoría asintótica para los procedimientos de la prueba. La distribución condicional de $n_{k;ij}(t)$ dado $n_{k;i}(t-1)$ es multinomial con las probabilidades p_{ij}, entonces

$$\mathbb{E}[n_{k;ij}(t) \mid n_{k;i}(t-1)] = p_{ij}n_{k;i}(t-1),$$

$$\mathbb{E}[n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij}] = 0,$$

$$Var(n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij}) = \mathbb{E}[(n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij})^2] = n_k(0)p_{ki}^{(t-1)}p_{ij}(1-p_{ij}),$$

$$\mathbb{E}[(n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij})(n_{k;ih}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ih})] = -n_k(0)p_{ki}^{(t-1)}p_{ij}p_{ih}, \text{ para toda } j \neq h,$$

$$\mathbb{E}[(n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij})(n_{k;gj}(t) - n_{k;g}(t-1)p_{gj})] = 0, \text{ para toda } i \neq g,$$

$$\mathbb{E}[(n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij})(n_{k;ij}(t+r) - n_{k;i}(t+r-1)p_{ij})] = 0 \text{ para toda } r > 0.$$

Para resumir, las variables aleatorias $n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij}$, para $j = 1, \ldots, m$ tienen esperanza 0 y varianzas y covarianzas correspondientes a variables multinomiales con probabilidades p_{ij} y tamaño de muestra $n_k(0)p_{ki}^{(t-1)}$. Las variables $n_{k;ij}(t) - n_{k;i}(t-1)p_{ij}$ y $n_{k;gh}(s) - n_{k;g}(s-1)p_{gh}$ no están correlacionadas si $t \neq s$ o $i \neq g$.

Ya que asumimos que $n_k(0)$ es fijo, entonces $n_{k;ij}(t)$ y $n_{l;gh}(t)$ son independientes si $k \neq l$. Entonces

$$\mathbb{E}[n_{ij}(t) - n_i(t-1)p_{ij}] = 0, \tag{2.15}$$

$$Var(n_{ij}(t) - n_i(t-1)p_{ij}) = \mathbb{E}[(n_{ij}(t) - n_i(t-1)p_{ij})^2] = \sum_{k=1}^{m} n_k(0)p_{ki}^{(t-1)}p_{ij}(1-p_{ij}), \tag{2.16}$$

$$\mathbb{E}[(n_{ij}(t) - n_i(t-1)p_{ij})(n_{ih}(t) - n_i(t-1)p_{ih})] = -\sum_{k=1}^{m} n_k(0)p_{ki}^{(t-1)}p_{ij}p_{ih} \text{ para toda } j \neq h, \tag{2.17}$$

$$\mathbb{E}[(n_{ij}(t) - n_i(t-1)p_{ij})(n_{gh}(s) - n_g(s-1)p_{gh})] = 0 \text{ para toda } i \neq g \text{ o } t \neq s. \tag{2.18}$$

Para consultar a mayor detalle el cáculo de estos momentos, se sugiere revisar la sección 2.3 de *Statistic inference abour Markov chains* (Anderson y Goodman, 1957).

La distribución asintótica de los estimadores

En esta parte se mostrará que, cuando $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(\widetilde{p}_{ij} - p_{ij}) &= \sqrt{n}\left[\frac{\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_{ij}(t)}{\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_i(t-1)} - p_{ij}\right] \\
&= \sqrt{n}\left[\frac{\sum_{t=1}^{\mathcal{T}}(n_{ij}(t) - p_{ij}n_i(t-1))}{\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_i(t-1)}\right] \\
&= \sqrt{n}\left[\frac{\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{\mathcal{T}}(n_{k;ij}(t) - p_{ij}n_{k;i}(t-1))}{\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_i(t-1)} - p_{ij}\right],
\end{aligned} \tag{2.19}$$

tiene una distribución límite normal, y sus medias, varianzas y covarianzas pueden ser encontradas. Ya que $n_{k;ij}(t)$ sigue una distribución multinomial, se sabe que

$$n_{k;ij}(t) \approx \left[\frac{n_{k;ij}(t)}{n_k(0)}\right] n_k$$

converge en probabilidad a su valor esperado cuando $\frac{n_k(0)}{n} \to \eta_k$. Es decir,

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_i(t-1)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_i(t-1)\right] = \sum_{k=1}^{m} \eta_k \sum_{t=1}^{\mathcal{T}} p_{ki}^{(t-1)} \tag{2.20}$$

Entonces, $\sqrt{n}(\widetilde{p}_{ij} - p_{ij})$ tiene la misma distribución que

$$\frac{\sum_{t=1}^{\mathcal{T}}[n_{ij}(t) - p_{ij}n_i(t-1)]/\sqrt{n}}{\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} \eta_k p_{kj}^{(t-1)}}. \tag{2.21}$$

Por los resultados obtenidos en la sección anterior, el numerador de la ecuación (2.21) tiene esperanza 0 y varianza

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_k(0) p_{ki}^{(t-1)} p_{ij}(1-p_{ij})/n \tag{2.22}$$

Además, la covarianza entre dos numeradores distintos es

$$-\delta_{ig}\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_k(0) p_{ki}^{(t-1)} p_{ij}p_{gh}/n, \tag{2.23}$$

donde δ_{ig} representa la función *delta de Kronecker*.

Definiendo

$$\phi_i = \sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{\mathcal{T}} \eta_k p_{ki}^{(t-1)}$$

entonces la varianza límite del numerador de la ecuación (2.18) se puede reescribir como $\phi_i p_{ij}(1-p_{ij})$ y la covarianza límite entre dos numeradores distintos se reescribe como $-\delta_{ig}\phi_i p_{ij}p_{gh}$. Ya que los numeradores de la ecuación (2.21) son combinaciones lineales de variables multinomiales normalizadas, con probabilidades fijas y un tamaño de muestra creciente, entonces tienen una distribución límite normal y por lo tanto sus varianzas y covarianzas de esta distribución límite resultan ser las respectivas varianzas y covarianzas límite.

Ya que $\sqrt{n}(\widetilde{p}_{ij}-p_{ij})$ tiene la misma distribución límite que (2.21), las variables $\sqrt{n}(\widetilde{p}_{ij}-p_{ij})$ tienen una distribución conjunta límite normal con esperanza 0, varianza $\sqrt{n}(p_{ij}(1-p_{ij})/\phi_i$ y covarianzas $(-\delta_{ig}p_{ij}p_{ij})/\phi_i$. Es decir, que las variables $\sqrt{n\phi_i}(\widetilde{p}_{ij}-p_{ij})$ tienen una distribución conjunta límite normal de media 0, varianza $p_{ij}(1-p_{ij})$ y covarianzas $-\delta_{ig}p_{ij}p_{gh}$, que resulta ser la misma distribución de $\sqrt{n_i^*}(\widetilde{p}_{ij} - p_{ij})$, donde $n_i^* = \sum_{t=0}^{\mathcal{T}-\infty} n_i(t)$.

En otras palabras, las variables $\sqrt{n\phi_i}(\widetilde{p}_{ij} - p_{ij})$ para una i dada tienen la misma distribución límite que los estimadores de las probabilidades multinomiales p_{ij} con tamaño de muestra $n\phi_i$, que es el valor esperado del número total de observaciones n_i^* en el estado i para $t = 0, 1, \ldots, \mathcal{T} - 1$. Además estas variables $\sqrt{n\phi_i}(\widetilde{p}_{ij} - p_{ij})$, para m distintos valores de $i = 1, 2, \ldots, m$, son asintóticamente independientes y por lo tanto tienen la misma distribución conjunta límite que la obtenida para funciones similares de los estimadores de las probabilidades multinomiales p_{ij} para m muestras independientes con tamaños de muestra $n\phi_i$ con $i = 1, 2, \ldots, m$.

2.2.3. Pruebas de hipótesis

Pruebas de hipótesis acerca de probabilidades específicas y regiones de confianza

Usando como base la teoría de la distribución asintótica de la sección anterior, se pueden derivar ciertos métodos de inferencia estadística. En esta sección se supondrá que $p_{ij} > 0$.

Primero se considerará probar la hipótesis de que ciertas probabilidades de transición p_{ij} tienen valores específicos p_{ij}^e. Usando el hecho de que, bajo la hipótesis nula, $\sqrt{n_i^*}(\widetilde{p}_{ij} - p_{ij})$ tiene una distribución límite normal con esperanza 0 y cuyas varianzas y covarianzas dependen de p_{ij}^e en la misma manera de las obtenidas en los estimadores asintóticos, se puede usar la teoría asintótica estándar para distribuciones multinomiales o normales para probar la hipótesis acerca de una o más p_{ij}, o para determinar sus regiones de confianza.

Tomando como ejemplo un caso específico, consideremos probar la hipótesis que $p_{ij} = p_{ij}^e$, para $j = 1, 2, \ldots, m$ para un i dado. Bajo la hipótesis nula

$$\sum_{j=1}^{m} n_i^* \frac{(\widetilde{p}_{ij} - p_{ij}^e)^2}{p_{ij}^e} \tag{2.24}$$

tiene una distribución asintótica χ^2 con $m-1$ grados de libertad. Entonces la región crítica de una prueba de esta hipótesis, con un nivel de significancia α, consiste en el conjunto de las $\widetilde{p}_{ij}$ para las cuales la ecuación anterior es mayor que α. Una región de confianza del coeficiente de confianza α consiste del conjunto de las p_{ij}^e para las cuales la ecuación (2.24) es menor a α.

De manera general, una prueba para todas las p_{ij} con $i, j = 1, \ldots, m$, se puede obtener al sumar la ecuación (2.24) sobre todos los posibles valores de i, resultando en una variable χ^2 con $m(m-1)$ grados de libertad.

Prueba de hipótesis acerca de si las probabilidades de transición son constantes

En una cadena de Markov estacionaria, las p_{ij} son la probabilidad de que un individuo que se encuentra en el estado i a tiempo $t-1$ se mueva al estado j a tiempo t. Una alternativa general a esta suposición es que las probabilidades de transición dependan de t, en este caso $p_{ij}(t)$. Se procede a probar la hipótesis nula $H_0 : p_{ij}(t) = p_{ij}$ para $t = 1, \ldots, \mathcal{T}$. Bajo la hipótesis alternativa H_1, las estimaciones de las probabilidades de transición a tiempo t son

$$\widetilde{p}_{ij} = \frac{n_{ij}(t)}{n_i(t-1)} \tag{2.25}$$

La función de máxima verosimilitud bajo la hipótesis nula es

$$\prod_{t=1}^{\mathcal{T}} \prod_{i,j} \widetilde{p}_{ij}^{\,n_{ij}(t)}, \tag{2.26}$$

y bajo la hipótesis alternativa la máxima verosimilitud es

$$\prod_{t=1}^{\mathcal{T}} \prod_{i,j} \widetilde{p}_{ij}(t)^{n_{ij}(t)}, \tag{2.27}$$

por lo tanto, el cociente de verosimilitudes se ve como

$$\lambda = \prod_{t} \prod_{i,j} \left[\frac{\widetilde{p}_{ij}}{\widetilde{p}_{ij}(t)} \right]^{n_{ij}(t)} \tag{2.28}$$

Además, se puede demostrar mediante una extensión del teorema de Cramer o el de Neyman, que $-2\log\lambda \sim \chi^2$ con $(\mathcal{T}-1)[m(m-1)]$ grados de libertad, cuando la hipótesis nula es cierta. Se recomienda al lector consultar *Mathematical Methods of Statistics* (Cramer 1946) o *Contribution to the theory of the* χ^2 *test* (Neyman, 1949), para observar con más detalle los cálculos que derivan este resultado.

Haciendo un análisis posterior podemos encontrar una similitud entre el cociente de verosimilitudes de la ecuación (2.28) a los procedimientos usuales en las tablas de contingencias. Sea una i fija, entonces el conjunto de las $\widetilde{p}_{ij}(t)$ tiene la misma distribución asintótica que los estimadores de las probabilidades multinomiales $p_{ij}(t)$ para $\mathcal{T}$ muestras independientes. Una tabla de $m \times \mathcal{T}$, la cual tiene la misma apariencia que una tabla de contingencia, se puede usar para representar las estimaciones conjuntas $\widetilde{p}_{ij}(t)$ para una i dada y para $j = 1, \ldots, m$, $t = 1, \ldots, \mathcal{T}$.

$t \setminus j$	1	2	$\cdots$	m
1	$\widetilde{p}_{i1}(1)$	$\widetilde{p}_{i2}(1)$	$\cdots$	$\widetilde{p}_{im}(1)$
2	$\widetilde{p}_{i1}(2)$	$\widetilde{p}_{i2}(2)$	$\cdots$	$\widetilde{p}_{im}(2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mathcal{T}$	$\widetilde{p}_{i1}(\mathcal{T})$	$\widetilde{p}_{i2}(\mathcal{T})$	$\cdots$	$\widetilde{p}_{im}(\mathcal{T})$

La hipótesis que interesa es la cual dice que las variables aleatorias representadas por las $\mathcal{T}$ filas tienen la misma distribución, es decir, que los datos son homogéneos. Esta hipótesis es equivalente a la hipótesis de que hay m constantes $p_{i1}, p_{i2}, \dots p_{im}$, con $\sum_i p_{ij} = 1$, tal que la probabilidad asociada con la *j-ésima* columna es igual a p_{ij}, en todas las $\mathcal{T}$ filas; esto es, $p_{ij}(t) = p_{ij}$ para $t = 1, 2, \dots, \mathcal{T}$. Entonces, para probar la hipótesis se puede recurrir a una prueba de χ^2 para homogeneidad, donde primero calculamos

$$\chi_i^2 = \sum_{t,j} n_i(t-1) \left[\frac{(\widetilde{p}_{ij}(t) - \widetilde{p}_{ij})^2}{\widetilde{p}_{ij}} \right]; \tag{2.29}$$

si la hipótesis nula es cierta, entonces χ_i^2 tiene la distribución límite usual con $(m-1)(\mathcal{T}-1)$ grados de libertad.

Alternativamente se puede hacer una prueba de homogeneidad para las $\mathcal{T}$ muestras independientes usando el criterio de cociente de verosimilitudes, calculando, dada la información de la tabla,

$$\lambda_i = \prod_{t,j} \left[\frac{\widetilde{p}_{ij}}{\widetilde{p}_{ij}(t)} \right]^{n_{ij}(t)}, \tag{2.30}$$

por lo que la distribución asintótica de $-2 \log \lambda_i$ es χ^2 con $(\mathcal{T}-1)(m-1)$ grados de libertad.

Estos cálculos se realizan dado un valor fijo para i, por lo que la hipótesis se puede probar para cada valor de i por separado.

Consideremos entonces la hipótesis conjunta que $p_{ij}(t) = p_{ij}$ para toda $i, j = 1, \dots, m$ y $t = 1, \dots, \mathcal{T}$. Una prueba de esta hipótesis conjunta nula se sigue directamente del hecho que las variables aleatorias $\widetilde{p}_{ij}(t)$ y $\widetilde{p}_{ij}$ son asintóticamente independientes para dos distintos valores de i. Entonces, bajo la hipótesis nula, el conjunto de las χ_i^2 calculadas para cada $i = 1, \dots, m$ son asintóticamente independientes, y la suma

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \chi_i^2 \tag{2.31}$$

tiene la distribución límite usual con $(m-1)(\mathcal{T}-1)$ grados de libertad. Similarmente, por la prueba basada en la ecuación (2.28) puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^{m} -2 \log \lambda_i = -2 \log \lambda \tag{2.32}$$

Prueba de hipótesis acerca de si la cadena es de un orden dado

Consideremos una cadena de Markov de segundo orden. Dado que un individuo se encuentre en el estado i a tiempo $t-2$ y se mueva a j a tiempo $t-1$, y sea $p_{ijk}(t)$ la probabilidad de estar en el estado k a tiempo t, para $i,j,k=1,\ldots,m;\ t=2,3,\ldots,\mathcal{T}$. Cuando la cadena de segundo orden es estacionaria, $p_{ijk}(t)=p_{ijk}$ para $t=2,\ldots,\mathcal{T}$. Una cadena de Markov de primer orden es un caso particular de una cadena de segundo orden en donde la probabilidad $p_{ijk}(t)$ no depende de i. Por otro lado una cadena de segundo orden puede ser representada como una cadena de primer orden más compleja; para ello, definimos un estado compuesto (i,j) definido a su vez por un par de estados sucesivos i y j. Entonces, la probabilidad de que un individuo se encuentre en el estado compuesto (j,k) a tiempo t dado que estaba en el estado compuesto (i,j) a tiempo $t-1$ es representada por $p_{ijk}(t)$; donde la probabilidad de que se encuentre en el estado (h,k) a tiempo t dado que se encuentra en el estado (i,j) a tiempo $t-1$ es cero cuando $h\neq j$. Los estados compuestos definidos forman a su vez una cadena de Markov cuyo espacio de estados $\mathcal{E}$ tiene m^2 estados, donde algunas de sus probabilidades de transición son cero. Cabe aclarar que el definir de esta forma las cadenas de segundo orden es de gran importancia ya que algunos resultados importantes de la sección anterior pueden ser aplicados a estas cadenas.

Sea $n_{ijk}(t)$ el número de individuos que se encuentran en el estado i a tiempo $t-2$, en j a tiempo $t-1$ y en k a tiempo t, y definimos a $n_{ij}(t-1)=\sum_k n_{ijk}(t)$. En este apartado supondremos que $n_i(0)$ y $n_{ij}(1)$ son constantes dadas, extendiendo la idea anterior en donde $n_i(0)$ era constante y $n_{ij}(1)$ era una variable aleatoria. Entonces, las $n_{ijk}(t)$ forman un conjunto de estadísticas suficientes para las distintas secuencias de estados. Por lo tanto, la distribución de $n_{ijk}(t)$ dado $n_{ij}(t-1)$ es

$$\left(\frac{n_{ij}(t-1)!}{\prod_k n_{ijk}(t)!}\right)\prod_{k=1}^{m} p_{ijk}^{n_{ijk}(t)} \tag{2.33}$$

mientras que la distribución conjunta de $n_{ijk}(t)$ cuando el conjunto de $n_{ij}(1)$ es dado, es el producto de la ecuación anterior sobre todos los valores de i,j y t.

Cuando se tienen cadenas con probabilidades de transición estacionarias se puede obtener un resultado fuerte como con las cadenas de primer orden, esto es, que los números $n_{ijk}=\sum_{t=2}^{\mathcal{T}} n_{ijk}(t)$ forman un conjunto de estimadores suficientes. Entonces, el estimador máximo verosímil para las cadenas estacionarias es

$$\widetilde{p}_{ijk}=\frac{n_{ijk}}{\sum_{f=1}^{m} n_{ijf}}=\frac{\sum_{t=2}^{\mathcal{T}} n_{ijk}(t)}{\sum_{t=2}^{\mathcal{T}} n_{ij}(t-1)} \tag{2.34}$$

Consideremos ahora el probar la hipótesis nula que la cadena es de primer orden contra la hipótesis alternativa que la cadena es de segundo orden; es decir, la hipótesis nula nos dice que

$p_{1jk} = p_{2jk} = \ldots = p_{mjk} = p_{jk}$ para $j, k = 1, \ldots, m$. Entonces el cociente de verosimilitudes para probar la hipótesis se puede ver como

$$\lambda = \prod_{i,j,k}^{m} \left(\frac{\widetilde{p}_{jk}}{\widetilde{p}_{ijk}} \right)^{n_{ijk}} \tag{2.35}$$

donde

$$\widetilde{p}_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_{ijk}}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{f=1}^{m} n_{ijf}} = \frac{\sum_{t=2}^{\mathcal{T}} n_{jk}(t)}{\sum_{t=1}^{\mathcal{T}-1} n_j(t)} \tag{2.36}$$

es el estimador máximo verosímil para $\widetilde{p}_{jk}$. Podemos observar además que el cociente de verosimilitudes de la ecuación (2.33) se parece a los cocientes obtenidos de los problemas relacionados a las tablas de contingencia, por lo que podemos desarrollar un procedimiento similar al de la anterior sección.

Dado un estado j, las $\sqrt{n}(\widetilde{p}_{ijk} - p_{ijk})$ tienen la misma distribución asintótica que las estimaciones de las probabilidades multinomiales para m muestras independientes. Una tabla de $m \times m$ puede ser utilizada para representar las estimaciones de las $\widetilde{p}_{ijk}$ para un j dado y para $i, k = 1, \ldots, m$. La hipótesis nula nos dice que $p_{ijk} = p_{jk}$ para $i = 1, \ldots, m$, y la prueba de χ^2 para la homogeneidad parece ser apropiada. Para probar la hipótesis es necesario calcular

$$\chi_j^2 = \sum_{i,k} n_{ij}^* \left(\frac{(\widetilde{p}_{ijk} - \widetilde{p}_{jk})^2}{\widetilde{p}_{jk}} \right) \tag{2.37}$$

donde

$$n_{ij}^* = \sum_{k} n_{ijk} = \sum_{k} \sum_{t=2}^{\mathcal{T}} n_{ijk}(t) = \sum_{t=2}^{\mathcal{T}} n_{ij}(t-1) = \sum_{t=1}^{\mathcal{T}-1} n_{ij}(t) \tag{2.38}$$

si la hipótesis es cierta, χ_j^2 tiene la distribución límite usual con $(m-1)^2$ grados de libertad.

De manera análoga con la sección anterior, podemos hacer pruebas de hipótesis para la homogeneidad de m muestras independientes de intentos multinomiales usando el criterio de cociente de verosimilitudes, calculando

$$\lambda_j = \prod_{i,k} \left(\frac{\widetilde{p}_{jk}}{\widetilde{p}_{ijk}} \right)^{n_{ijk}}, \tag{2.39}$$

que es similar al criterio de cociente de verosimilitudes. La distribución asintótica de $-2 \log \lambda_j$ es χ^2 con $(m-1)^2$ grados de libertad.

Asimismo, los resultados anteriores relacionados a las tablas de contingencia utilizaban un valor dado de j, por lo que la hipótesis se puede probar para cada valor de j por separado.

Consideremos la hipótesis conjunta que $p_{ijk} = p_{jk}$ para toda $i, j, k = 1, \dots, m$. Una prueba para esta hipótesis conjunta se puede obtener calculando la siguiente suma

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \chi_j^2 = \sum_{i,j,k} n_{ij}^* \left(\frac{(\widetilde{p}_{ijk} - \widetilde{p}_{jk})^2}{\widetilde{p}_{jk}} \right) \tag{2.40}$$

la cual tiene la distribución límite usual con $m(m-1)^2$ grados de libertad. De manera similar, el criterio de la prueba basada en la ecuación (2.51) se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{m} -2 \log \lambda_j = -2 \log \lambda = 2 \sum_{i,j,k} n_{ijk} \log \left(\frac{\widetilde{p}_{ijk}}{\widetilde{p}_{jk}} \right). \tag{2.41}$$

Como observación final de la sección cabe resaltar que todos los cálculos y resultados obtenidos pueden ser generalizados directamente para una cadena de orden r. Para esto, definimos $p_{ijk\dots df}$ la probabilidad de transición al estado f a tiempo t, dado el estado d a tiempo $t-1, \dots$, el estado k a tiempo $t-r+2$, el estado j a tiempo $t-r+1$ y el estado i a tiempo $t-r$. En este caso la hipótesis nula consiste en probar que el proceso es una cadena de orden $r-1$, contra la hipótesis alternativa que el proceso en realidad es una cadena de orden r.

Definiendo de manera análoga como en los casos anteriores, sea $n_{ijk\dots hf}(t)$ la frecuencia observada de los estados $i, j, k, \dots, h, f$ a los respectivos tiempos $t-r, t-r+1, t-r+2, \dots, t-1, t$, y sea $n_{ijk\dots h}(t-1) = \sum_{f=1}^{m} n_{ijk\dots hf}(t)$. Ahora supondremos que $n_{ijk,\dots h}(t-1)$ son constantes dadas. Por lo tanto, el estimador máximo verosímil de $p_{ijk\dots hf}$ es

$$p_{ijk\dots hf} = \frac{n_{ijk\dots hf}}{n_{ijk\dots h}^*} \tag{2.42}$$

con

$$n_{ijk\dots hf} = \sum_{t=r}^{\mathcal{T}} n_{ijk\dots hf}(t) \tag{2.43}$$

y

$$n_{ijk\dots h}^* = \sum_{f} n_{ijk\dots hf} = \sum_{t=r-1}^{\mathcal{T}-1} n_{ijk\dots h}(t) \tag{2.44}$$

Análogamente el conjunto de las $\widetilde{p}_{ijk\dots hf}$ tienen una distribución asintótica como las estimaciones de las probabilidades multinomiales de m muestras independientes que pueden ser representadas por una tabla de tamaño $m \times m$, por lo que si la hipótesis nula es cierta, la prueba de χ^2 es apropiada y por lo tanto

$$\chi^2_{jk\ldots h} = \sum_{i,f} n^*_{ijk\ldots h} \left(\frac{(\widetilde{p}_{ijk\ldots hf} - \widetilde{p}_{jk\ldots hf})^2}{\widetilde{p}_{jk\ldots hf}} \right) \tag{2.45}$$

y el cual tiene una distribución límite usual con $(m-1)^2$ grados de libertad.

Mientras que bajo el criterio de cociente de verosimilitudes podemos calcular

$$\lambda_{jk\ldots h} = \prod_{i,f} \left(\frac{\widetilde{p}_{jk\ldots hf}}{\widetilde{p}_{ijk\ldots h}} \right)^{n_{ijk\ldots hf}} \tag{2.46}$$

Y por lo tanto $-2\log\lambda_{jk\ldots h}$ se distribuye asintóticamente χ^2 con $(m-1)^2$ grados de libertad. Asimismo

$$\sum_{j,k,\ldots,h} (-2\log\lambda_{jk\ldots h}) = 2 \sum_{i,j,k,\ldots,h,f} n_{ijk\ldots hf} \log \left(\frac{\widetilde{p}_{ijk\ldots hf}}{\widetilde{p}_{jk\ldots hf}} \right) \tag{2.47}$$

Para un anális más profundo de esta generalización se recomienda al lector consultar la sección 3.3 de *Statistical Inference about Markov chains* (Anderson y Goodman, 1957).

Pruebas de hipótesis de que varias muestras son de la misma cadena de Markov de un orden dado

La aproximación general presentada en las secciones anteriores se puede utilizar para probar la hipótesis nula que un número $s \geq 2$ de muestras son de la misma cadena de Markov de orden r; es decir, los s procesos son idénticos.

Sea

$$\widetilde{p}^{(h)}_{ij\ldots kl} = \frac{n^{(h)}_{ij\ldots kl}}{n^{*(h)}_{ij\ldots k}} \tag{2.48}$$

el estimador de máxima verosimilitud para las probabilidades de transición, $p^{(h)}_{ij\ldots kl}$, de orden r, del proceso del cual se obtuvo la muestra $h = 1, 2, 3, \ldots, s$. Podemos obtener para la prueba de χ^2 que

$$\chi^2_{ij\ldots k} = \sum_{h,l} n^{*(h)}_{ij\ldots k} \left(\frac{(\widetilde{p}^{(h)}_{ij\ldots kl} - \widetilde{p}^{(\bullet)}_{ij\ldots kl})^2}{\widetilde{p}^{(\bullet)}_{ij\ldots kl}} \right) \tag{2.49}$$

la cual sigue una distribución límite usual con $(s-1)(m-1)$ grados de libertad; donde

$$\widetilde{p}^{(\bullet)}_{ij\ldots kl} = \frac{n^{(\bullet)}_{ij\ldots kl}}{\sum_{c=1}^{m} n^{(\bullet)}_{ij\ldots kc}}, \tag{2.50}$$

y

$$n^{(\bullet)}_{ij\ldots kl} = \sum_h n^{(h)}_{ij\ldots kl}. \tag{2.51}$$

Además, $\sum_{i,j,\ldots,k} \chi^2_{ij\ldots k}$ tiene una distribución límite χ^2 con $m^r(s-1)(m-1)$ grados de libertad.

Cuando $s = 2$, $\chi^2_{ij\ldots k}$ puede ser reescrito de la siguiente forma

$$\chi^2_{ij\ldots k} = \sum_l C_{ij,\ldots k} \left(\frac{(\widetilde{p}^{(1)}_{ij\ldots kl} - \widetilde{p}^{(2)}_{ij\ldots kl})^2}{\widetilde{p}^{(\bullet)}_{ij\ldots kl}} \right) \tag{2.52}$$

donde $\widetilde{p}^{(\bullet)}_{ij\ldots kl}$ es la estimación de las probabilidades $p_{ij\ldots kl}$, y

$$C^{-1}_{ij\ldots k} = \frac{1}{n^{*(1)}_{ij\ldots k}} + \frac{1}{n^{*(2)}_{ij\ldots k}} \tag{2.53}$$

Una prueba considerando dos conjuntos de estados

Sean dos conjuntos de estados $\mathcal{E}_1 = \{1, \ldots, A\}$ y $\mathcal{E}_2 = \{1, \ldots, B\}$, y sea el estado (α, β) tal que $\alpha \in \mathcal{E}_1$ y $\beta \in \mathcal{E}_2$ y se supondrá que la secuencia de estados satisface una cadena de Markov de primer orden con probabilidades de transición $p_{\alpha\beta,\mu\upsilon}$. Lo que queremos preguntarnos es si la secuencia de cambios en una clasificación, o espacio de estados, es independiente a la otra. Por ejemplo, el caso si una persona ve un determinado anuncio publicitario de algún producto, es más probable que esta persona compre el producto en cuestión. La hipótesis nula de la independencia de los cambios es

$$p_{\alpha\beta,\mu\upsilon} = q_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\upsilon} \text{ para } \alpha, \mu = 1, \ldots, A \text{ y } \beta, \upsilon = 1, \ldots, B, \tag{2.54}$$

donde $q_{\alpha\mu}$ representa la probabilidad de transición para el primer espacio de estados y $\gamma_{\beta\upsilon}$ la probabilidad de transición para el segundo espacio de estados. Debemos encontrar entonces el criterio de cociente de verosimilitudes para probar la hipótesis nula.

Sea $n_{\alpha\beta,\mu\upsilon}(t)$ el número de individuos en el estado (α, β) a tiempo $t-1$ y que pasaron al estado (μ, υ) en tiempo t. De los resultados anteriores, el estimador máximo verosímil para $p_{\alpha\beta,\mu\upsilon}$, cuando no se asume la hipótesis nula es

$$\widetilde{p}_{\alpha\beta,\mu\upsilon} = \frac{n_{\alpha\beta,\mu\upsilon}}{\sum_{s=1}^{A}\sum_{h=1}^{B} n_{\alpha\beta,sh}} \tag{2.55}$$

donde $n_{\alpha\beta,\mu\upsilon} = \sum_{t=1}^{\mathcal{T}} n_{\alpha\beta,\mu\upsilon}(t)$. Por el contrario, cuando se asume la hipótesis nula, la estimación máximo verosímil para $p_{\alpha\beta,\mu\upsilon}$ es $\widetilde{q}_{\alpha\mu}\widetilde{\gamma}_{\beta\upsilon}$, donde

$$\widetilde{q}_{\alpha\mu} = \frac{\sum_{\beta,\upsilon=1}^{B} n_{\alpha\beta,\mu\upsilon}}{\sum_{\beta,\upsilon=1}^{B} \sum_{s=1}^{A} \sum_{h=1}^{B} n_{\alpha\beta,s\upsilon}}, \tag{2.56}$$

y

$$\widetilde{\gamma}_{\beta\upsilon} = \frac{\sum_{\alpha,\mu=1}^{A} n_{\alpha\beta,\mu\upsilon}}{\sum_{\alpha,\mu=1}^{A} \sum_{h=1}^{A} \sum_{h=1}^{B} n_{\alpha\beta,\mu h}}. \tag{2.57}$$

Mientras que el criterio de cociente de verosimilitudes es

$$\lambda = \prod_{t=1}^{\mathcal{T}} \prod_{\alpha,\mu=1}^{A} \prod_{\beta,\upsilon=1}^{B} \left(\frac{\widetilde{q}_{\alpha\mu} \widetilde{\gamma}_{\beta\upsilon}}{\widetilde{p}_{\alpha\beta,\mu\upsilon}} \right)^{n_{\alpha\beta,\mu\upsilon}(t)} \tag{2.58}$$

Bajo la hipótesis nula, $-2\log\lambda$ tiene una distribución asintótica χ^2 con $(A-1)(B-1)(AB+A+B)$ grados de libertad.

Capítulo 3

Modelo de Jarrow-Turnbull

El modelo que se usará es un modelo de Markov para la estructura de plazos de diferenciales de riesgo de crédito, propuesto por Robert Jarrow, David Lando y Stuart Turnbull en la revista *The Review of Financial Studies* en 1997. El modelo está basado en el modelo de Jarrow y Turnbull propuesto en 1995, con el proceso de bancarrota modelada por una cadena de Markov a tiempo discreto con las calificaciones crediticias.

Este modelo es útil para cotizar y cubrir las deudas corporativas con opciones incorporadas, para cotizar y cubrir los derivados OTC con riesgo de contraparte, cubrir y cotizar bonos gubernamentales sujetos a riesgo de incumplimiento, y entre otras cosas, para gestión de riesgos financieros.

Este modelo de riesgo de crédito se caracteriza por lo siguiente:

- La deuda de antigüedad para una empresa puede ser incorporada vía diferentes tasas de recuperación en el caso de incumplimiento.

- Se puede combinar con cualquier modelo de estructura de términos para deudas libres de incumplimiento.

- Usa transiciones históricas de distintas clases de evaluación de crédito para determinar la probabilidad usada en la valuación.

Para implementar este modelo se hace una suposición en la interacción de la estructura de términos libres de incumplimiento y el proceso de bancarrota de la empresa: se asume que ambos procesos son estadísticamente independientes bajo la probabilidad, así como el proceso de Markov para el rating es independiente del nivel de tasa de interés.

3.1. Definición y conceptos

Consideremos una economía sin fricción, es decir, que existen mercados financieros sin costos de transacción, con un horizonte finito $[0, \tau]$. El comercio puede ser discreto o continuo. La incertidumbre subyacente está representada con un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}_\tau, (\mathcal{F}_\tau)_{0<t<\tau}, \mathbb{P})$. Los detalles de este espacio de probabilidad filtrado se especificarán más adelante. Lo que se negocia dentro de los mercados son bonos de cupón cero libres de incumplimiento en cualquier fecha de vencimiento, una cuenta de mercado de dinero libre de incumplimiento y bonos de cupón cero riesgosos en cualquier fecha de vencimiento.
Asumimos que existe una única medida martingala equivalente, $\widetilde{\mathcal{P}}$, que hace de todos los precios de los cupones, libres y con riesgo de incumplimiento, martingalas, después de una normalización por parte de la cuenta de mercado monetario. Está suposición es equivalente a decir que los mercados de deuda, libre o con riesgo de incumplimiento, son completos y libres de arbitraje. Dada la información a tiempo t, denotaremos a la esperanza condicional y a la probabilidad condicional con respecto a la medida de probabilidad asociada, como $\widetilde{\mathbb{E}}_t(\bullet)$ y $\widetilde{\mathbb{P}}_t(\bullet)$ respectivamente. Para efectos del trabajo, se supondrá la existencia de una medida martingala que nos sirva, sin embargo no se abordará el estudio de estas medidas o su obtención.

Sea $p(t, T)$ el precio, a tiempo t, de un bono de cupón cero libre de incumplimiento, que pagará 1 dólar de manera segura a tiempo T, con $0 \leq t \leq T \leq \tau$. Supondremos que las tasas forward de todas las fechas de vencimiento y que se definiran, para el caso discreto, como:

$$f(t, T) \equiv -\log\left(\frac{p(t, T+1)}{p(t, T)}\right),$$

y para el caso continuo como:

$$f(t, T) \equiv -\frac{\partial}{\partial T} p(t, T).$$

Asumimos que la tasa spot libre de incumplimiento, denotada por $r(t)$, se define como $r(t) \equiv f(t, t)$. No especificamos ningún proceso estocástico en particular para las tasas spot. La cuenta de mercado de dinero acumula rendimientos a la tasa spot y se denota como:

$$B(t) = \exp\left(\sum_{i=0}^{t-1} r(i)\right), \text{ para el caso discreto,}$$

o

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) \text{ para el caso continuo.}$$

Bajo el supuesto de un mercado completo y libre de arbitraje, podemos expresar los precios de los bonos libres de incumplimiento, como el valor esperado descontado de un dólar recibido seguramente a tiempo T, es decir,

$$p(t, T) = \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{B(t)}{B(T)}\right). \tag{3.1}$$

Sea $v(t,T)$ el precio, a tiempo t, de un bono de cupón cero con riesgo de incumplimiento que promete pagar un dólar a tiempo t, donde $t \leq T \leq \tau$. Este dólar puede no ser pagado en su totalidad si la empresa se encuentra en bancarrota, o en general en alguna posición que le impida pagar el monto acordado, a tiempo T. Si es el caso, la empresa solo pagará una cantidad $\delta < 1$ de dólar. El fracción δ, llamada tasa de recuperación, puede depender de la antigüedad de la deuda de cupón cero riesgosa con respecto a otros pasivos de la empresa. Sea τ^* el tiempo aleatorio en el que la bancarrota ocurre. Entonces:

$$v(t,T) = \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{B(t)}{B(T)}(\delta \mathbb{I}_{\{\tau^* \leq T\}} + \mathbb{I}_{\{\tau^* > T\}})\right) \tag{3.2}$$

donde $\mathbb{I}_{\{\tau^* \leq T\}}$ es la función indicadora del evento $\{\tau^* \leq T\}$. El precio del bono de cupón cero riesgoso se nota que es el valor esperado descontado de un dólar "riesgoso" recibido a tiempo T. Notemos que si la bancarrota ha ocurrido antes del tiempo t, supondremos que los propietarios de la deuda recibirán δ de manera segura en la fecha de maduración del contrato. Esto implica que la estructura de plazos de riesgo se simplifica considerablemente, como:

$$v(t,T) = \delta \widetilde{\mathbb{E}}_t\left(\frac{B(t)}{B(T)}\right) = \delta p(t,T).$$

En otras palabras, si la bancarrota ocurre, la estructura de plazos de la deuda riesgosa colapsa a aquellas de los bonos libres de incumplimiento.

Lo siguiente que supondremos es que el proceso estocástico de las tasas spot libres de incumplimiento $\{r(t)\}_{0\leq t\leq \tau}$ y el proceso de bancarrota son estadísticamente independientes bajo la medida $\widetilde{\mathbb{P}}$, es decir, el proceso de bancarrota no está correlacionado con las tasas spot libres de riesgo. Esta suposición será de utilidad para simplificar la implementación del modelo. Bajo estos supuestos el precio $v(t,T)$ se simplifica de la siguiente forma:

$$\begin{align} v(t,T) &= \widetilde{\mathbb{E}}_t\left(\frac{B(t)}{B(T)}\right)\widetilde{\mathbb{E}}_t(\delta \mathbb{I}_{\{\tau^* \leq T\}} + \mathbb{I}_{\{\tau^* > T\}}) \tag{3.3}\\ &= p(t,T)(\delta + (1-\delta)\widetilde{\mathbb{P}}_t(\tau^* > T)). \tag{3.4}\end{align}$$

donde $\widetilde{\mathbb{P}}_t(\tau^* > T))$ es la probabilidad de que el incumplimiento ocurra después de la fecha T. El precio del cupón de bono cero riesgoso es el valor del bono de cupón cero libre de riesgo multiplicado por el pago (*payoff*) esperado (en dólares) a tiempo T.

3.2. Calificación de crédito y probabilidades de incumplimiento

3.2.1. Caso discreto

En esta sección modelaremos la distribución del tiempo de incumplimiento en una economía de intercambio discreto, para que, de esta manera, sea más fácil entender el modelo matemático.

Valuación

La distribución para el tiempo de incumplimiento se modela vía una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto con espacio de estados finito $S = \{1, 2, 3, \ldots, K\}$. El espacio de estados S representa las posibles clases de crédito en los que la empresa puede estar ubicada (su rating crediticio) donde 1 representa la clase más alta (AAA en los ratings de Moody) y $K-1$ la clase más baja (C en los ratings de Moody). Finalmente, el estado K representa la bancarrota.

La cadena de Markov homogénea a tiempo discreto con espacio de estados finito $\{\eta_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ es una matriz de transición de $K \times K$ definida como:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1K} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{K-1,1} & q_{K-1,2} & \cdots & q_{K-1,K} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

donde:

- $q_{ij} \geq 0$ para todo $i \neq j$.
- $q_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}$ para toda i.

La entrada (i, j) de la matriz Q representa la probabilidad de ir del estado i al estado j en un salto de tiempo. Asimismo podemos observar que supondremos que el estado K es absorbente. La homogeneidad en el tiempo de esta matriz de transición se supone para la simplicidad en la estimación.

Usaremos entonces la siguiente notación: sea $q_{ij}(0, n)$ la probabilidad de ir del estado i a tiempo 0 al estado j a tiempo n, es decir, la probabilidad de ir del estado i al estado j en n pasos. Esta probabilidad se puede obtener facilmente de la matriz Q^n.

Bajo la suposición de mercados completos y libres de arbitraje, la matriz de transición de tiempo t a tiempo $t+1$ bajo la medida de probabilidad martingala equivalente está dada por:

$$\widetilde{Q}_{t,t+1} = \begin{pmatrix} \widetilde{q}_{11}(t,t+1) & \widetilde{q}_{12}(t,t+1) & \cdots & \widetilde{q}_{1K}(t,t+1) \\ \widetilde{q}_{21}(t,t+1) & \widetilde{q}_{22}(t,t+1) & \cdots & \widetilde{q}_{2K}(t,t+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{q}_{K-1,1}(t,t+1) & \widetilde{q}_{K-1,2}(t,t+1) & \cdots & \widetilde{q}_{K-1,K}(t,t+1) \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

donde:

- $\widetilde{q}_{i,j}(t,t+1) \geq 0$ para toda $i \neq j$.
- $\widetilde{q}_{i,i}(t,t+1) \equiv 1 - \sum_{j \neq i} \widetilde{q}_{i,j}(t,t+1)$.
- $\widetilde{q}_{i,j}(t,t+1) > 0 \;\Leftrightarrow\; q_{ij} > 0$ para $0 \leq t \leq \tau - 1$.

Sin ninguna otra restricción, las probabilidades martingala $\widetilde{q}_{i,j}(t,t+1)$ pueden depender del historial completo del proceso hasta tiempo t. Aunque, bajo las probabilidades martingalas, el proceso no necesariamente debe ser de Markov.

Para facilitar la implementación empírica, es deseable imponer más estructura a estas probabilidades. En particular, supondremos que los ajustes a la prima de riesgo son tales que el proceso de rating de crédito bajo las probabilidades martingala satisfacen que:

$$\widetilde{q}_{i,j}(t,t+1) = \pi_i(t) q_{ij} \text{ para todo } i \neq j, \tag{3.7}$$

donde:

- $\pi_i(t)$ es una función determinista del tiempo, que representa a las primas de riesgo, tal que,
- $\widetilde{q}_{ij}(t,t+1) \geq 0$ para todo $i \neq j$.
- $\sum_{j \neq i} \widetilde{q}_{ij}(t,t+1) \leq 1$ para $i = 1, 2, \ldots K$.

En notación matricial, esto lo podemos escribir como:

$$\widetilde{Q}_{t,t+1} - I = \Pi(t)[Q - 1],$$

donde:

- I es la matriz identidad de $K \times K$.
- $\Pi(t) = diag(\pi_1(t), \pi_2(t), \ldots, \pi_{K-1}(t), 1)$.

Dada esta estructura, podemos ahora calcular la probabilidad de que el incumplimiento ocurra después de la fecha T, esto es, $\widetilde{Q}_t(\tau^* > T)$. Sea $\widetilde{q}_{ij}(0,n)$ la probabilidad de ir del estado i al estado j en n pasos, entonces, la matriz de transición de n pasos, $\widetilde{Q}_{0,n}$, cuya (i,j) entrada es $\widetilde{q}_{ij}(0,n)$, satisface que:

$$\widetilde{Q}_{0,n} = \widetilde{Q}_{0,1}\widetilde{Q}_{1,2}\cdots\widetilde{Q}_{n-1,n}. \tag{3.8}$$

Lema 1. ***Probabilidad de solvencia en términos de*** $\widetilde{Q}$ *Sea que la empresa se encuentre en el estado i en el tiempo t, denotado por $\eta_t = i$ y definimos $\tau^* = inf\{s \geq t : \eta_s = K\}$, el cual representa el primer tiempo de bancarrota. Entonces la probabilidad que el incumplimiento ocurra después del tiempo T es:*

$$\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T) = \sum_{j\neq K} \widetilde{q}_{ij}(t,T) = 1 - \widetilde{q}_{iK}(t,T)$$

Demostración. Dado que K es un estado absorbente, el evento $(\tau^* > T)$ es equivalente a que η_t no este en el estado K a tiempo T, empezando en i a tiempo t. Al usar la matriz $\widetilde{Q}_{t,T}$ obtenemos el resultado. □

En el lema 1 hacemos explícita la dependencia de la clase de crédito con un superíndice en la probabilidad condicional $\widetilde{Q}_t^i$. Este lema nos da una forma de calcular la probabilidad de solvencia a cualquier fecha futura T, empezando en el estado i en el tiempo t.

Podemos usar esta caracterización de las probabilidades de solvencia para reescribir la valuación del bono de cupón cero riesgoso. Sea $v^i(t,T)$ el valor de un bono de cupón cero emitido por una empresa en clase de crédito i a tiempo t. Entonces:

$$v^i(t,T) = p(t,T)(\delta + (1-\delta)\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T)), \tag{3.9}$$

donde $\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T)$ es la probabilidad que se obtiene del lema 1. Esta ecuación nos da una caracterización para el diferencial del riesgo de crédito.

Dado que la tasa forward para el bono de cupón cero riesgoso en la clase de crédito i está definida por

$$f^i(t,T) \equiv -\log\left(\frac{v^i(t,T+1)}{v^i(t,T)}\right),$$

entonces, gracias a la ecuación (3.9), podemos expresar la tasa forward de la siguiente forma:

$$f^i(t,T) = f(t,T) + \mathbb{I}_{\{\tau^* > t\}} \log\left(\frac{\delta + (1-\delta)\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T)}{\delta + (1-\delta)\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T+1)}\right). \tag{3.10}$$

Esto nos da una representación explícita para el diferencial de riesgo de crédito $f^i(t,T) - f(t,T)$ en términos de la tasa de retorno δ y de la matriz de transición de clases de crédito $\widetilde{Q}$. La ecuación (3.10) nos muestra que los diferenciales de crédito son estrictamente positivos en el modelo, excepto en el caso de bancarrota, donde $f^K(t,T) = f(t,T)$.

Para obtener la tasa spot, fijamos $T = t$ en la ecuación (3.10) y simplificamos:

$$r^i(t) = r(t) + \mathbb{I}_{\{\tau^* > t\}} \log\left(\frac{1}{1-(1-\delta)\widetilde{q}_{iK}(t,t+1)}\right) \tag{3.11}$$

En la bancarrota, $r^K(t) = r(t)$.

Opciones y coberturas

Cubrir los saltos en los ratings de crédito de una empresa es esencial para las aplicaciones prácticas. En esta sección discutiremos como cubrir esos saltos tanto en bonos riesgosos como en opciones vulnerables a la estructura de términos de los diferenciales de crédito, por lo que primero extenderemos nuestra metodología de valuación para aplicarla a estas opciones vulnerables y después procederemos a analizar como cubrir los saltos de los ratings de crédito. Respecto a la valuación de opciones vulnerables a los diferenciales de crédito es una aplicación directa de la tecnología de cotización de martingalas. Dado un payoff aleatorio a una reclamación de crédito riesgosa a tiempo T, C_T, su valuación a tiempo t, denotada por C_t, es

$$C_t = \widetilde{\mathbb{E}}\left(\frac{C_T}{B(T)}\right) B(t). \tag{3.12}$$

Utilizando el lema 1, fórmulas simples para bonos riesgosos, futuros en bonos riesgosos, opciones en riesgo de crédito y opciones vulnerables pueden ser obtenidas mediante sustituciones directas.

Para cubrir los cambios en el rating de crédito, incluyendo la bancarrota, las técnicas usuales de cobertura para opciones son aplicables.

Definamos la función

$$\phi(t,T,i) = \begin{cases} ln\left(\frac{\delta+(1-\delta)\widetilde{Q}_t^i(\tau^*>T)}{\delta+(1-\delta)\widetilde{Q}_t^i(\tau^*>T+1)}\right), & \text{para } i = 1,2,3,\ldots,K-1 \\ 0, & \text{para } i = K \end{cases} \tag{3.13}$$

El cambio en la tasa forward de la empresa en el intervalo $[t, t+1]$ se deduce de la ecuación (3.10). Sea, a tiempo t, el rating de crédito de la empresa $\eta_t = i$, entonces

$$f^{\eta_{t+1}}(t+1,T) - f^i(t,T) = [f(t+1,T) - f(t,T)] + [\phi(t+1,T,\eta_{t+1}) - \phi(t,T,i)] \tag{3.14}$$

para $\eta_{t+1} \in \{1, 2, 3, \dots, K\}$ y probabilidades $\widetilde{q}_{i,\eta_{t+1}}(t, t+1)$. El primer componente del cambio en las tasas forward riesgosas de la empresa es debido a los cambios en la estructura de la tasa forward libre de incumplimiento y una disminución en el tiempo de madurez.
El segundo componente del cambio en las tasas forward riesgosas de la empresa se da debido a los cambios en la probabilidad de incumplimiento que surge de un cambio impredicible en el rating de crédito y un acortamiento predecible en el tiempo de madurez. Este riesgo tiene a lo más K diferentes resultados, suponiendo que $\widetilde{q}_{i,\eta_{t+1}} > 0$ para todos los posibles η_{t+1}. Para poder cubrir este riesgo de clase de crédito, en general, uno necesita, como máximo, K de los valores de riesgo de crédito de la empresa. Como la estructura de término completa del comercio de bonos de cupón cero de la empresa arriesgada, suficientes valores están disponibles para implementar esta estrategia comercial.

Ajustando las curvas cero a la clase de crédito

Dadas las estimaciones para la matriz de transición empírica Q, y la prima de riesgo $(\pi_1(t), \dots, \pi_{K-1}(t)$ para $0 \leq t \leq \tau - 1)$, la ecuación (3.9) provee una fórmula para la valuación teórica de los precios de los bonos riesgosos de cupón cero. Esta fórmula puede ser utilizada para identificar oportunidades de arbitraje a través de las estructuras de términos de riesgo de crédito.

Dadas las estimaciones de los bonos riesgosos de cupón cero, $v^i(t, T)$, los libres de riesgo, $p(t, T)$, y la tasa de recuperación δ, las curvas cero iniciales (a tiempo cero), coincidirán si $\widetilde{Q}_0^i(\tau^* \leq T)$ se selecciona tal que

$$\widetilde{Q}_0^i(\tau^* \leq T) = \frac{p(0, T) - v^i(0, T)}{p(0, T)(1 - \delta)}, \tag{3.15}$$

para $i = 1, 2, \dots, K$ y $T = 1, 2, \dots, \tau$.

Debemos entonces mostrar como seleccionar $(\Pi(t) : t \in 0, 1, 2, \dots, \tau - 1)$ tal que la ecuación anterior se satisfaga. Este procedimiento es recursivo.

Dada la matriz de transición empírica Q, tenemos

$$\widetilde{Q}_{0,1} = I + \Pi(0)(Q - I).$$

De esta matriz y del lema 1 obtenemos

$$\widetilde{Q}_0^i(\tau^* \leq 1) = \pi_i(0) q_{iK}.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.15) y haciendo un poco de álgebra obtenemos

$$\pi_i(0) = \frac{p(0, 1) - v^i(0, 1)}{(1 - \delta) p(0, 1) q_{iK}} \text{ para } i = 1, 2, \dots, K - 1.$$

Dado que ya calculamos la prima de riesgo, podemos utilizar la ecuación (3.7) para calcular $\widetilde{Q}_{0,1}$. Dada la matriz de transición empírica Q y $\widetilde{Q}_{0,t}$ que se calcula en el paso anterior, tenemos

$$\widetilde{Q}_{0,t+1} = \widetilde{Q}_{0,t}[I + \Pi(t)(Q - I)].$$

De esta matriz y del lema 1, tenemos

$$\widetilde{Q}_0^i(\tau^* \leq t+1) = \sum_{j=1}^{K} \widetilde{q}_{ij}(0,t)\pi_j(t)q_{jK}.$$

En notación matricial, después de sustituir en la ecuación (3.15) y haciendo álgebra obtenemos

$$\widetilde{Q}_{0,t} \begin{bmatrix} \pi_1(t)q_{1K} \\ \pi_2(t)q_{2K} \\ \vdots \\ \pi_K(t)q_{KK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [p(0,t+1) - v^1(0,t+1)]/[p(0,t+1)(1-\delta)] \\ \vdots \\ [p(0,t+1) - v^K(0,t+1)]/[p(0,t+1)(1-\delta)] \end{bmatrix}$$

Asumiendo que exista $\widetilde{Q}_{0,1}^{-1}$ cuyas entradas se denoten $\widetilde{q}_{ij}^{-1}(0,t)$, la solución al sistema matricial es

$$\pi_i(t) = \sum_{j=1}^{K} \widetilde{q}_{ij}^{-1}(0,t)[p(0,t+1) - v^i(0,t+1)]/[p(0,t+1)(1-\delta)q_{iK}]. \tag{3.16}$$

Dada esta prima de riesgo, ya podemos calcular $\widetilde{Q}_{0,t+1}$ con la ecuación (3.7).

En la práctica, es importante que uno revise que la prima de riesgo calculada sea no negativa y la matriz resultante en verdad sea una matriz de transición. En caso de no serlo, eso denotaría una falta de consistencia de los datos con el modelo.

Con esto terminamos con el cálculo recursivo. Las ecuaciones (3.15) y (3.16) podrán ser útiles para estimar los parámetros de la cadena de Markov a tiempo continuo introducida en la siguiente sección.

3.2.2. Caso continuo

En la siguiente sección nos enfocaremos en modelar la distribución para el tiempo de incumplimiento en una economía de intercambio continuo. El ajuste del tiempo continuo facilita la derivación de conocimientos adicionales debido a la disponibilidad del cálculo estocástico. También proporciona una parametrización del proceso de bancarrota más adecuada para la estimación.

Valuación

La distribución para el tiempo de incumplimiento se modela via una cadena de Markov a tiempo continuo homogénea en el tiempo con espacio de estados finito $S = \{1, 2, 3, \ldots, K\}$ que, al igual que en el caso discreto, este espacio de estados representa la clase de crédito en la que se encuentra la empresa, donde 1 es la clase de crédito más alta y K es la bancarrota.

Una cadena de Markov a tiempo continuo, $\{\eta_t : 0 \leq t \leq \tau\}$, como se vió en el capítulo 3, está especificada en términos de su matriz generadora, en este caso, la matriz generadora de $K \times K$, está definida de la siguiente manera:

$$G = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \ldots & \lambda_{1K} \\ \lambda_{21} & \lambda_2 & \lambda_{23} & \ldots & \lambda_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \lambda_{K-1,1} & \lambda_{K-1,2} & \lambda_{K-1,3} & \ldots & \lambda_{K-1,K} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

donde

- $\lambda_{ij} \geq 0$ para toda i, j.
- $\lambda_i = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, K$.
- La última fila de ceros implíca que la bancarrota (el estado K) es absorbente.

La matriz de probabilidades de transición a $t-$periodos para η está dada por:

$$Q(t) = \exp(tG) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tG)^k}{k!} \tag{3.18}$$

donde la entrada (i, j) de esta nueva matriz la denotaremos como $q_{ij}(t)$.

Por construcción, el estado 1 representa la mejor calificación de crédito que una empresa puede tener, y $K-1$ es la peor calificación antes del estado de incumplimiento. Para asegurarnos de que la cadena de Markov utilizada para modelar los cambios en la calificación de crédito refleje el hecho de que las "‘clases de crédito más bajas son más riesgosas", existe una condición simple que debemos verificar en la matriz generadora.

Lema 2. ***Calificaciones de crédito frente al riesgo.*** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\sum_{j \geq k} q_{ij}(t)$ *es una función no decreciente de* i *para cada* k *y* t *fijas.*

2. $\sum_{j \geq k} \lambda_{ij} \leq \sum_{j \geq k} \lambda_{i+1,j}$ *para todo* i *y* k *tal que* $k \neq i + 1$.

Demostración. Para ver la demostración a este lema, el lector puede referirse a *Anderson (1991)* con la proposición 7.3.2, el teorema 7.3.4 y la observación de la página 251. $\square$

Hay que notar que en una matriz generadora, en donde la submatriz de $K-1 \times K-1$ de G tiene una estructura de matriz de de nacimiento y muerte donde las intensidades de incumplimiento en la $K-$ésima columna no decrecen como función del número de fila, va a satisfacer las condiciones de este lema.

Supondremos que la matriz generadora bajo la equivalente probabilidad martingala está dada por

$$\widetilde{G}(t) \equiv U(t)G \tag{3.19}$$

donde $U(t) = diag(\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_{K-1}(t), 1)$ es una matriz diagonal de $K \times K$, cuyas primeras $K-1$ entradas son funciones deterministas de t estrictamente positivas que satisfacen

$$\int_0^T \mu_i(t)dt < \infty \text{ para } i = 1, 2, \ldots, K-1.$$

Para un caso más general, la matriz U puede ser dependiente tanto de la historia de la empresa como del tiempo. Esta es una suposición análoga al caso discreto. Las entradas $(\mu_1(t), \ldots, \mu_{K-1}(t), 1)$ se interpretan como las primas de riesgo, esto es, los ajustes por riesgo que transforman las probabilidades actuales en pseudo-probabilidades adecuadas para fines de evaluación.

La matriz de probabilidades de transición de tiempo t a tiempo T para η bajo la equivalente medida martingala se da como la solución a las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov:

$$\frac{\partial \widetilde{Q}(t,T)}{\partial t} = -\widetilde{G}(t)\widetilde{Q}(t,T) \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial \widetilde{Q}(t,T)}{\partial T} = \widetilde{Q}(t,T)\widetilde{G}(t) \tag{3.21}$$

$$\text{Con condición inicial: } \widetilde{Q}(t,t) = I \tag{3.22}$$

Denotamos entonces a la entrada (i,j) de la matriz $\widetilde{Q}(t,T)$ como $\widetilde{q}_{ij}(t,T)$.

Bajo la suposición de la ecuación (3.19), el proceso del rating de crédito aún es de Markov, pero ya no es homogéneo. En la selección de esta restricción, nos enfrentamos a un intercambio entre el cálculo de la matriz de transición $\widetilde{Q}(t,T)$ y la habilidad de coincidir con cualquier estructura inicial de diferenciales de crédito. La ecuación (3.19) nos comprometía. Hay un ejemplo que ilustra este razonamiento. Cuando

$$\widetilde{G} = diag(\mu_1, \ldots, \mu_{K-1}, 1)G$$

para constantes μ_i estrictamente positivas, el proceso de Markov es homogéneo en el tiempo. Entonces la solución a la ecuación (3.20) se calcula facilmente como

$$\widetilde{Q}(t,T) = \exp(diag(\mu_1,\ldots,\mu_{K-1},1)G(T-t)).$$

Sin embargo, esta restricción no permite un modelo que coincida con alguna estructura inicial de diferenciales de crédito. La ecuación (3.19) es la extensión más simple que satisfacen ambos requerimientos.

Análogo al Lema 1 en el caso discreto, tenemos lo siguiente.

Lema 3. ***Probabilidad de solvencia en términos de*** $\widetilde{Q}$***.*** *Sea que la empresa se encuentre en el estado i a tiempo t, es decir, $\eta_t = i$, y definimos $\tau^* = inf\{s \geq t : \eta_s = K\}$. Entonces*

$$\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T) = \sum_{j \neq K} \widetilde{q}_{ij}(t,T) = 1 - \widetilde{q}_{iK}(t,T).$$

Demostración. La demostración a este lema es análoga a la utilizada en el lema 1. □

Las probabilidades de supervivencia condicional se pueden obtener por medio de la siguiente expresión:

$$\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T+1 \mid \tau^* > T) = \frac{\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T+1)}{\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T)} \tag{3.23}$$

Dado el lema, al igual que en caso discreto, podemos evaluar los bonos riesgosos de cupón cero de la siguiente forma:

$$v^i(t,T) = p(t,T)(\delta + (1-\delta)\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T)) \tag{3.24}$$

donde $\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T)$ se obtiene por medio del lema 3.

Dado que, la tasa forward para los bonos riesgosos de cupón cero en la clase de crédito i esta definido por

$$f^i(t,T) \equiv \frac{-\partial}{\partial T} \log(v^i(t,T))$$

la ecuación anterior produce lo siguiente

$$f^i(t,T) = f(t,T) - \mathbb{I}_{\{\tau^* > T\}} \left(\frac{(1-\delta)\frac{\partial}{\partial T}\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T)}{\delta + (1-\delta)\widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T)} \right). \tag{3.25}$$

En bancarrota, $f^i(t,T) = f(t,T)$. Entonces definimos a los diferenciales de riesgo de crédito como $f^i(t,T) - f(t,T)$.

Para obtener la tasa spot, hacemos que $T \to t$ en la ecuación anterior, y obtenemos

$$r^i(t) = r(t) + (1-\delta)\lambda_{iK}\mu_i(t)\mathbb{I}_{\{\tau^* > T\}} \tag{3.26}$$

ya que

$$\frac{\partial \widetilde{Q}_t^i(\tau^* > T)}{\partial T} = \frac{-\partial \widetilde{Q}_t^i(\tau^* \leq T)}{\partial T} = -\lambda_{iK}\mu_i(t).$$

En bancarrota $r^i(t) = r(t)$.

La tasa spot en la bancarrota parece exceder la tasa spot libre de riesgo por un diferencial de riesgo de crédito de $(1-\delta)\lambda_{iK}\mu_i(t)$, donde δ es la tasa de recuperación y $\lambda_{iK}\mu_i(t)$ es la pseudo-probabilidad de incumplimiento.

Opciones y cobertura

Análogo al caso del tiempo discreto, la valuación de opciones es una aplicación directa de tecnología de valuación martingala y corresponde a calcular un valor esperado.

La cobertura ante los cambios en las calificaciones de crédito es igualmente análogo al caso en tiempo discreto. Similar a ese caso, dado el proceso estocástico para las tasas forward riesgosas bien detallado, la cobertura sigue un procedimiento estándar. Todo lo que resta hacer es derivar el proceso estocástico para cambios en las tasas forward. En eso se centrará esta sección.

Sea $N_{ij}(t)$ con $i,j = 1,2,\ldots,K$, procesos Poisson, de intensidad λ_{ij}, independientes bajo la medida de probabilidad Q. El proceso de conteo $N_{ij}(t)$ representa un salto de la clase de crédito i a la clase de crédito j a tiempo t si $N_{ij}(t) - N_{ij}(t-) = 1$ donde $N_{ij}(t-) = \lim_{\epsilon \to 0} N_{ij}(t-\epsilon)$.

Bajo la medida martingala $\widetilde{Q}$, $N_{ij}(t)$ tiene intensidades $\lambda_{ij}\mu_i(t)$ para $i,j = 1,\ldots,K$.

Podemos entonces representar el proceso de la cadena de Markov $\{\eta_t : 0 \leq t \leq \tau\}$ como

$$\eta_t = \eta_0 + \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=1}^{K}\int_0^t (j-i)\mathbb{I}_{\{\eta_{t-}=i,\eta_t \neq K\}} dN_{ij}(t). \tag{3.27}$$

Definimos a la función

$$\phi(t,T,i) = \begin{cases} \dfrac{-(1-\delta)\frac{\partial \widetilde{Q}^i_t(\tau^*>T)}{\partial T}}{\delta + (1-\delta)\widetilde{Q}^i_t(\tau^* > T)}, & \text{para } i = 1,2,3,\ldots,K-1 \\ 0, & \text{para } i = K \end{cases} \tag{3.28}$$

Entonces, haciendo $\eta_0 = i_0$ la calificación de crédito de la empresa a tiempo $t = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} f^{\eta_t}(t,T) - f^{i_0}(0,T) = [f(t,T) - f(0,T)] + \int_0^t \phi'(s,T,\eta_{s-})ds \\ + \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=1}^{K}\int_0^t (\phi(s,T,j) - \phi(s,T,i))\mathbb{I}_{\{\eta_{s-}=i\}} dN_{ij}(s), \end{aligned}$$

donde

$$\phi'(s,T,\eta_{s-}) = \frac{d\phi(s,T,\eta_s)}{ds}.$$

El primer componente del cambio en las tasas forward de la deuda riesgosa es debido a los cambios en las tasas forward libres de riesgo. El segundo componente es un término suavemente variable que surge del acortamiento del tiempo de maduración. Si la cadena de Markov es homogénea en el tiempo, este término siempre es negativo.

El tercer componente es debido a los saltos en las clases de crédito. A cualquier tiempo s en el estado $\eta_{s-} = i$, hay, a lo más, K procesos de saltos que necesitan ser cubiertos, estos son, $N_{i1}(s), \ldots, N_{iK}(s)$. Estos pueden ser cubiertos de manera estándar usando a lo más K bonos riesgosos de cupón cero.

Ejemplos

En esta sección ilustraremos algunos puntos importantes relacionados a los diferenciales de riesgo de crédito.

Ejemplo 6. *Consideremos la siguiente matriz generadora:*

$$G = \begin{pmatrix} -0.11 & 0.10 & 0.01 \\ 0.05 & -0.15 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo, hay tres posibles estados. Examinando la primera fila, la probabilidad de quedarse en la primer clase de crédito durante un pequeño periodo de tiempo Δt *es aproximadamente* $1 - 0.11\Delta t$*. La tasa de transición de la primer clase a la segunda clase es* 0.10*, y la tasa de incumplimiento de la primer clase de crédito es de* 0.01*. Entonces, uno podría hacer una estimación inapropiada que una empresa que se encuentre en la primera clase de crédito tenga una probabilidad de* $1 - \exp(-0.01t)$ *de incumplir antes del tiempo* t *dado que el tiempo* *de espera es exponencial. Esto, además, no toma en cuenta la posibilidad de irse cuesta abajo, lo cual ocurre con tasa de* 0.1*, y tener un subsecuente incumplimiento, lo cual ocurre con una tasa de* 0.1 *en la clase más baja.*

Ejemplo 7. *Ahora, consideremos la siguiente matriz generadora:*

$$G = \begin{pmatrix} -0.13 & 0.10 & 0.02 & 0.01 \\ 0.05 & -0.16 & 0.10 & 0.01 \\ 0 & 0.05 & -0.15 & 0.10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo hay 4 posibles estados. De la primera fila podemos ver que la tasa de incumplimiento es de 0.01*. Notemos que en este ejemplo las dos clases más altas tienen el mismo riesgo de incumplimiento directo, el cual es de* 0.01*, sin embargo, la probabilidad de incumplimiento de la segunda clase es mayor que la de la primera clase, esto se da porque la segunda clase está más cerca de la riesgosa tercera clase, la cual tiene una tasa de incumplimiento más grande.*

3.2.3. Estimación de parámetros

Para utilizar este modelo para cotizar y cubrirse de los bonos de crédito riesgoso y las opciones, es necesario que estimemos los parámetros del proceso estocástico de la ecuación (3.25). El procedimiento de estimación se puede descomponer en dos partes: la primera parte estima los parámetros generando las tasas forward libres de riesgo, $f(t, T)$; la segunda parte estima los parámetros generando los diferenciales de riesgo de crédito, que corresponden al segundo término de la ecuación (3.25).

Estimación de los parámetros libres de riesgo

La problema de la estimación de los parámetros para el proceso estocástico generando las tasas forward libres de riesgo es un problema bien estudiado en el campo de las opciones de las tasas de interés. Se le recomienda al lector revisar *Implied Volatility Functions in Arbitrage Free Term Structure Models* de Amin y Morton 1993, y *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation* de Heath, Jarrow y Morton 1992.

Estimación de los parámetros del proceso de bancarrota

El problema de la estimación de parámetros para el proceso estocástico generando los diferenciales de riesgo de crédito involucra la estimación de la tasa de recuperación δ, la cual puede depender de la antigüedad de la deuda, y estimar la matriz generadora $\widetilde{G}$ definida en la ecuación (3.19).

Estimación de la tasa de recuperación

Una estimación para la tasa de recuperación δ se puede obtener históricamente de los incumplimientos pasados, o implícitamente via los precios de mercado.

Un procedimiento implícito genera una estimación para δ, dadas las estimaciones para los demás parámetros, estableciendo el valor teórico igual a un precio de mercado para algún valor derivado negociado, y luego invirtiendo, de manera numérica de manera usual. El procedimiento implícito puede utilizar precios de bonos de cupón cero, tasas spot, bonos con cupón u opciones.

Estimación de la matriz generadora G

Una estimación de la matriz generadora $\widetilde{G}$ puede ser obtenida también con un histórico o de manera implícita.

El procedimiento implícito estima la matriz generadora $\widetilde{G}$ usando los precios de mercado para los bonos riesgosos de cupón cero. La estimación implícita de la matriz generadora se preferirá sobre la estimación histórica si se cree que la matriz de transición histórica no representa la matriz de transición actual. Esto puede ser debido a la no estacionariedad del proceso de bamcarrota o cambios prematuros en las calificaciones de crédito por la agencia calificadora. Por ejemplo, si los cambios en el rating de crédito retrasan los cambios actuales en las probabilidades de incumplimiento, entonces la matriz generadora de cambios históricos en las calificaciones de crédito no será la matriz de probabilidades relevante.

En un procedimiento de estimación implícito para $\widetilde{G}$, $(K-1)\times(K-1)$ parámetros deben estimarse, tal como se ve en la ecuación (3.17). Este es un gran número de parámetros para implicar de los datos. Entonces se sugiere usar una descomposición de la matriz generadora, bajo la medida martingala, en un producto de la matriz generadora empírica, que puede ser facilmente estimada, y un vector de prima de riesgo de dimensión baja y dependiente del tiempo.

Otros métodos alternativos para estimar $\widetilde{G}$ pueden ser restringir el número de probabilidades de transición estrictamente positivas de un estado a otro, por ejemplo, restringir la transición solo a los estados adyacentes; o también reducir el número de estados en la cadena a tres: *cumplirá seguramente*, *incumplirá especulativamente* e *incumplirá seguramente*. Sin embargo, si el verdadero proceso de ratings con el espacio de estados $K-$dimensional es Markoviano, tipicamente el proceso en el espacio de estados más pequeño no es Markoviano. Aplicar una función que no es *uno a uno* a una cadena de Markov, usualmente destruye la propiedad de Markov.

Estimación de la matriz generadora empírica G

Las estimaciones para la matriz generadora empírica G se puede obtener de las observaciones pasadas de los cambios en las calificaciones de crédito. Desde un punto de vista estadístico, el modelo de Markov que se ha establecido es muy conveniente. Si observamos los tiempos exactos de las transiciones en las clases de crédito y el incumplimiento sobre un periodo de tiempo $[0, T]$, un estimador de los elementos fuera de la diagonal λ_{ij} de la matriz generadora están dados por

$$\lambda_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{\int_0^T Y_i(s)ds}$$

donde

- $N_{ij}(T)$ es el número total de transiciones de i a j sobre el periodo $[0, T]$.
- $Y_i(s)$ es el número de empresas en la clase i a tiempo s.

Estimación de las primas de riesgo

Las estimaciones de la prima de riesgo $(\mu_1(t), \ldots, \mu_{K-1}(t))$ se pueden obtener a partir de los precios de los cupones de bono cero usando la ecuación (3.24).

Usando una aproximación analítica en la ecuación (3.21), se obtiene que sobre un pequeño periodo de tiempo Δt

$$\widetilde{Q}(t, t + \Delta t) \approx I + \widetilde{G}\Delta t = I + U(t)G\Delta t. \tag{3.29}$$

Haciendo $\Pi(t) \equiv U(t)$ y $Q - I \equiv G\Delta t$ en la ecuación (3.16) se puede obtener un procedimiento para estimar la prima de riesgo $U(t)$. $U(t)$ bajo esta aproximación se asume que es continua por la derecha sobre $[t, t + \Delta t)$.

Capítulo 4

Aplicación del modelo

Para finalizar este trabajo, se realizará un ajuste del modelo de Jarrow-Turnbull.

4.1. Matriz generadora

En primera instancia es necesario contar con las matrices de transición de calificaciones de crédito. Estas transiciones son estimaciones a partir del comportamiento de las empresas en un año calendario. Estas matrices se pueden obtener directamente de los estudios que realizan las calificadoras año con año. Usualmente las calificadoras presentan estas matrices por distintas categorías: de manera global, por región o por actividad económica, además, estas estimaciones pueden ser para un año en concreto o un promedio de las transiciones de las calificaciones utilizando un histórico de datos con los que cuenta cada calificadora. Estas matrices nos servirán principalmente para poder obtener una estimación de la matriz generadora, $\widetilde{G}$, para poder hacer un análisis de incumplimiento de las empresas en t años.

Para el planteamiento del problema se ha decidido utilizar los datos que proporciona la calificadora Standard & Poors en el documento *2017 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions* publicado el 5 de Abril del 2018, estos datos reflejan el comportamiento crediticio de las empresas en todo el mundo, divididas en varios rubros, tales como región o actividad comercial; con periodicidad de un año, en este caso, abarcando desde Enero de 2017 a Diciembre de 2017.

Estos datos no reflejan el momento exacto de transición de una calificación a otra, pero incluyen una estimación de las probabilidades de transición a 1 año, las cuales son obtenidas observando las calificaciones de crédito de un grupo de compañías al inicio y al final del año. Con estas transiciones es posible obtener una estimación de la matriz generadora. Dado que estas estimaciones son proporcionadas por la misma calificadora, es factible suponer que la calificadora utilizó una buena medida martingala para poder calcular dichas estimaciones, por lo que no se abordará el tema de que medida martingala es utilizada.

Dada la estimación de $\widetilde{Q}(1)$, se puede estimar la matriz generadora asumiendo que la probabilidad de hacer más de una transición por año es muy pequeña. En otras palabras, se asume que cada empresa hacen a lo más una transición a lo largo del año. Bajo esta hipótesis, tomando que $\lambda_i \neq 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, K-1$, y que si la empresa solo puede cambiar de calificación crediticia a lo más una vez en el año, asumiendo que si la compañía deja la calificación i antes de finalizar el año y va a la calificación j, entonces la calificación j es un estado absorbente, definimos a las variables aleatorias independientes $\tau_{ij} \sim exp(\lambda_{ij})$ el primer tiempo en el que se llega del estado i al estado j. Sea $\tau_i = \text{mín}_j\{\tau_{ij}\}$, entonces $\tau_i \sim exp(-\lambda_i)$, recordando que

$$\lambda_i = -\sum_{j\neq i} \lambda_{ij}$$

Usando que, si tenemos dos variables aleatorias exponenciales, $X \sim Exp(\alpha)$ y $Y \sim Exp(\beta)$, independientes, entonces los eventos $\{X < Y\}$ y $\{min\{X, Y\} > a\}$ son independientes (ver Resnick, *Adventures in Stochastic Processes*, ejercicio 4.45, página 363), se puede demostrar fácilmente que

$$\mathbb{P}[\tau_i = \tau_{ij} \mid \tau_i \leq 1] = \mathbb{P}[\tau_i = \tau_{ij}] = \frac{\lambda_{ij}}{-\lambda_i}$$

Ahora, con esta hipótesis podemos observar lo siguiente: tomando q_{ij} la probabilidad de transición del estado i al estado j para cualquier $i, j = 1, \ldots, K-1$, tenemos que

$$q_{ii} = \mathbb{P}[\tau_i > 1] = \exp(\lambda_1)$$

y

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \mathbb{P}[\text{ir al estado j antes de 1 año}] \\ &= \mathbb{P}[\tau_i = \tau_{ij}, \tau_i \leq 1] \\ &= \mathbb{P}[\tau_i = \tau_{ij} \mid \tau_i \leq 1]\mathbb{P}[\tau_i \leq 1] \\ &= \frac{\lambda_{ij}}{-\lambda_i}(1 - \exp(\lambda_1)) \end{aligned}$$

Es decir, que es posible encontrar una expresión de las entradas de la matriz $\exp(G)$, obteniendo lo siguiente:

$$\exp(G) \approx \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \frac{\lambda_{1,2}(e^{\lambda_1}-1)}{\lambda_1} & \cdots & \frac{\lambda_{1,K}(e^{\lambda_1}-1)}{\lambda_1} \\ \frac{\lambda_{2,1}(e^{\lambda_2}-1)}{\lambda_2} & e^{\lambda_2} & \cdots & \frac{\lambda_{2,K}(e^{\lambda_2}-1)}{\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\lambda_{K-1,1}(e^{\lambda_{K-1}}-1)}{\lambda_{K-1}} & \frac{\lambda_{K-1,2}(e^{\lambda_{K-1}}-1)}{\lambda_{K-1}} & \cdots & \frac{\lambda_{K-1,K}(e^{\lambda_{K-1}}-1)}{\lambda_{K-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para obtener las estimaciones de $\widetilde{G}$, igualamos a $\widetilde{Q}(1)$ a la matriz anterior, por lo que se obtiene lo siguiente

$$\widehat{q}_{ii} = e^{\widetilde{\lambda}_i} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, K-1; \tag{4.1}$$

$$\widehat{q}_{ij} = \widetilde{\lambda}_{ij} \left(\frac{e^{\widetilde{\lambda}_i} - 1}{\widetilde{\lambda}_i} \right) \text{ para } i \neq j \text{ y } i, j = 1, 2, \ldots, K-1. \tag{4.2}$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido anteriormente.

Nota. *Las $\widehat{q}_{ij}$ no deben confundirse con las pseudo-probabilidades definidas en el caso discreto del capítulo 3, estas son elementos de la matriz $\widetilde{Q}(1)$, que es la matriz de las probabilidades de transición obtenidas de los documentos de la calificadora.*

Por lo tanto, tenemos la siguiente solución al sistema de ecuaciones anterior:

$$\widetilde{\lambda}_i = \log(\widehat{q}_{ii}) \text{ para } i = 1, \ldots, K-1; \tag{4.3}$$

$$\widetilde{\lambda}_{ij} = \widehat{q}_{ij} \left(\frac{\log(\widehat{q}_{ii})}{\widehat{q}_{ii} - 1} \right) \text{ para } i \neq j \text{ y } i, j = 1, 2, \ldots, K-1. \tag{4.4}$$

De/Hacia	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	0.6429	0.3571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	0.9256	0.0417	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0327
A	0.0000	0.0044	0.9336	0.0236	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0384
BBB	0.0000	0.0000	0.0233	0.9000	0.0267	0.0011	0.0000	0.0000	0.0489
BB	0.0000	0.0000	0.0008	0.0357	0.8056	0.0463	0.0000	0.0008	0.1109
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0365	0.7568	0.0414	0.0098	0.1554
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0041	0.0000	0.1680	0.3811	0.2623	0.1844

Figura 4.1: Probabilidades de transición de las compañías a un año en el 2017 de manera global, obtenida de *2017 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, tabla 20, pág. 51.

La tabla de la figura 4.1 representa la matriz de probabilidades de transición a un año de una calificación a otra estimadas por la calificadora *Standard & Poors*.

Estas estimaciones se obtuvieron de manera global, aunque en el documento referenciado se pueden obtener las probabilidades de transición de las compañías de acuerdo a su región geográfica e incluso la transición de una empresa emergente, así como también encontrar un promedio de las probabilidades de transición de las empresas de los datos históricos comprendidos desde 1981 hasta 2017. Incluso es posible encontrar las probabilidades de transición de un año, de tres, de cinco e incluso de diez años; para efectos de este trabajo nos enfocaremos a las probabilidades de transición estimadas a un año para el año 2017. Se le recomienda al lector revisar el trabajo citado para encontrar con más detalle las distintas probabilidades de transición obtenidas por la calificadora.

La tabla obtenida, sin embargo, comprende un problema para el análisis posterior: las transiciones al estado "*Not Rated*"(NR) son exhibidas, sin embargo en el documento no se reportan estimaciones de un posible incumplimiento subsecuente o una transición de vuelta a una calificación crediticia, por lo que se decidió eliminar ese obstáculo redefiniendo las probabilidades de transición q_{ij} para i, j estados distintos al NR como lo siguiente

$$q_{ij} = \frac{\text{porcentaje de las compañías que van de } i \text{ a } j}{\text{porcentaje de las compañías que van a otro estado distinto al NR}} \tag{4.5}$$

Con esa modificación propuesta, se obtiene la siguiente matriz de transición:

De/Hacia	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC/C**	**D**
AAA	0.6429	0.3571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	0.9569	0.0431	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0046	0.9709	0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BBB	0.0000	0.0000	0.0245	0.9463	0.0281	0.0011	0.0000	0.0000
BB	0.0000	0.0000	0.0009	0.0401	0.9061	0.0521	0.0000	0.0008
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0433	0.8961	0.0490	0.0116
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0051	0.0000	0.2060	0.4673	0.3216
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Figura 4.2: Probabilidades de transición modificadas.

Usando la matriz de transición modificada de la figura 4.2, es posible encontrar una estimación de la matriz generadora, la cual se expresa en la figura 4.3.

Haciendo el mismo análisis, es posible obtener las matrices generadoras derivadas de las transiciones estimadas a un año por la calificadora para la región de Estados Unidos, la región de Europa y para los mercados emergentes, obteniendo los siguientes resultados.

De/Hacia	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC/C**	**D**
AAA	-0.4418	0.4418	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	-0.0441	0.0441	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0047	-0.0295	0.0249	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BBB	0.0000	0.0000	0.0252	-0.0552	0.0289	0.0011	0.0000	0.0000
BB	0.0000	0.0000	0.0009	0.0421	-0.0986	0.0547	0.0000	0.0008
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0457	-0.1097	0.0517	0.0122
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0073	0.0000	0.2942	-0.7608	0.4593
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Figura 4.3: Estimación de la matriz generadora $\widetilde{G}$.

De/Hacia	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC/C**	**D**	**NR**
AAA	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	0.9459	0.0270	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0270
A	0.0000	0.0076	0.9466	0.0286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0172
BBB	0.0000	0.0000	0.0280	0.9025	0.0174	0.0013	0.0000	0.0000	0.0507
BB	0.0000	0.0000	0.0018	0.0254	0.8279	0.0562	0.0000	0.0018	0.0870
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0292	0.7745	0.0500	0.0113	0.1349
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1342	0.4161	0.2685	0.1812

Figura 4.4: Probabilidades de transición de las compañías a un año en el 2017 para la región de Estados Unidos, obtenida de *2017 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, tabla 20, pág. 52.

De/Hacia	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC/C**	**D**
AAA	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	0.9721	0.0277	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0773	0.9632	0.0291	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BBB	0.0000	0.0000	0.0295	0.9507	0.0183	0.0137	0.0000	0.0000
BB	0.0000	0.0000	0.0197	0.0278	0.9068	0.0616	0.0000	0.0197
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0338	0.8953	0.0578	0.0131
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1639	0.5082	0.3279
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Figura 4.5: Probabilidades de transición modificadas para la región de Estados Unidos.

De/Hacia	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC/C**	**D**
AAA	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	−0.0283	0.0283	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0788	−0.0375	0.0297	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BBB	0.0000	0.0000	0.0303	−0.0506	0.0188	0.0140	0.0000	0.0000
BB	0.0000	0.0000	0.0207	0.0292	−0.0978	0.0647	0.0000	0.0207
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0357	−0.1106	0.0611	0.0138
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2256	−0.6769	0.4513
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Figura 4.6: Estimación de la matriz generadora para la región de Estados Unidos.

De/Hacia	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC/C**	**D**	**NR**
AAA	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	0.9307	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0693
A	0.0000	0.0026	0.9036	0.0234	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0703
BBB	0.0000	0.0000	0.0379	0.8939	0.0202	0.0000	0.0000	0.0000	0.0480
BB	0.0000	0.0000	0.0000	0.0841	0.7897	0.0280	0.0000	0.0000	0.0981
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0404	0.7035	0.0323	0.0027	0.2210
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0204	0.0000	0.1020	0.3878	0.2857	0.2041

Figura 4.7: Probabilidades de transición de las compañías a un año en el 2017 para la región de Europa, obtenida de *2017 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, tabla 20, pág. 52.

De/Hacia	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC/C**	**D**
AAA	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0028	0.9719	0.0252	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BBB	0.0000	0.0000	0.0398	0.9390	0.0212	0.0000	0.0000	0.0000
BB	0.0000	0.0000	0.0000	0.0932	0.8756	0.0310	0.0000	0.0000
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0519	0.9031	0.0415	0.0035
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0256	0.0000	0.1282	0.4872	0.3590
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Figura 4.8: Probabilidades de transición modificadas para la región de Europa.

De/Hacia	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D
AAA	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0029	−0.0285	0.0256	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BBB	0.0000	0.0000	0.0411	−0.0630	0.0219	0.0000	0.0000	0.0000
BB	0.0000	0.0000	0.0000	0.0995	−0.1328	0.0333	0.0000	0.0000
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0546	−0.1020	0.0437	0.0037
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0359	0.0000	0.1798	−0.7191	0.5034
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Figura 4.9: Estimación de la matriz generadora para la región de Europa.

De/Hacia	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	0.3750	0.6250	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	0.7500	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0046	0.9450	0.0229	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0275
BBB	0.0000	0.0000	0.0062	0.8868	0.0556	0.0000	0.0000	0.0000	0.0514
BB	0.0000	0.0000	0.0000	0.0268	0.7938	0.0474	0.0000	0.0000	0.1320
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0511	0.7700	0.0288	0.0064	0.1438
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3939	0.2121	0.1818	0.2121

Figura 4.10: Probabilidades de transición de las compañías a un año en el 2017 para los mercados emergentes, obtenida de *2017 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, tabla 20, pág. 52.

De/Hacia	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D
AAA	0.3750	0.6250	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	0.7500	0.2500	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0047	0.9718	0.0235	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BBB	0.0000	0.0000	0.0065	0.9349	0.0586	0.0000	0.0000	0.0000
BB	0.0000	0.0000	0.0000	0.0309	0.9145	0.0546	0.0000	0.0000
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0597	0.8992	0.0336	0.0075
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4999	0.2694	0.2307
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Figura 4.11: Probabilidades de transición modificadas para los mercados emergentes.

De/Hacia	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D
AAA	−0.9808	0.9808	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AA	0.0000	−0.2876	0.2876	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0000	0.0048	−0.0287	0.0235	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BBB	0.0000	0.0000	0.0067	−0.0673	0.0606	0.0000	0.0000	0.0000
BB	0.0000	0.0000	0.0000	0.0323	−0.0894	0.0571	0.0000	0.0000
B	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0629	−0.1061	0.0354	0.0079
CCC/C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8977	−1.3123	0.4143
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Figura 4.12: Estimación de la matriz generadora para los mercados emergentes.

4.2. Comportamiento a largo plazo

Con la matriz generadora estimada obtenida podemos observar graficamente los comportamientos a largo plazo iniciando en las distintas calificaciones crediticias.

En las siguientes figuras se mostrarán algunas simulaciones del comportamiento a diferentes años, donde se variará el estado inicial de donde inicia la simulación.

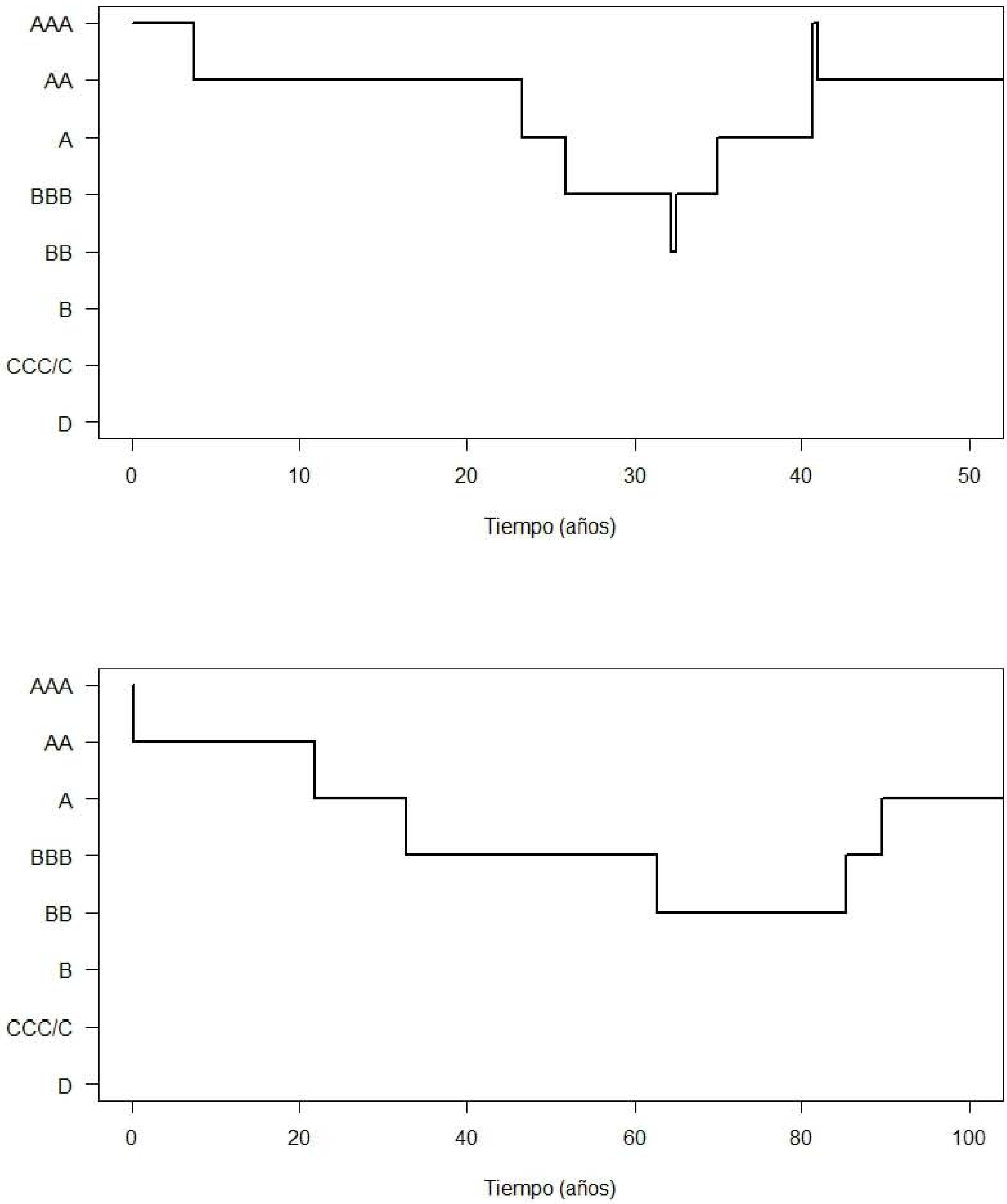


Figura 4.13: Comportamiento a largo plazo iniciando en la calificación AAA.

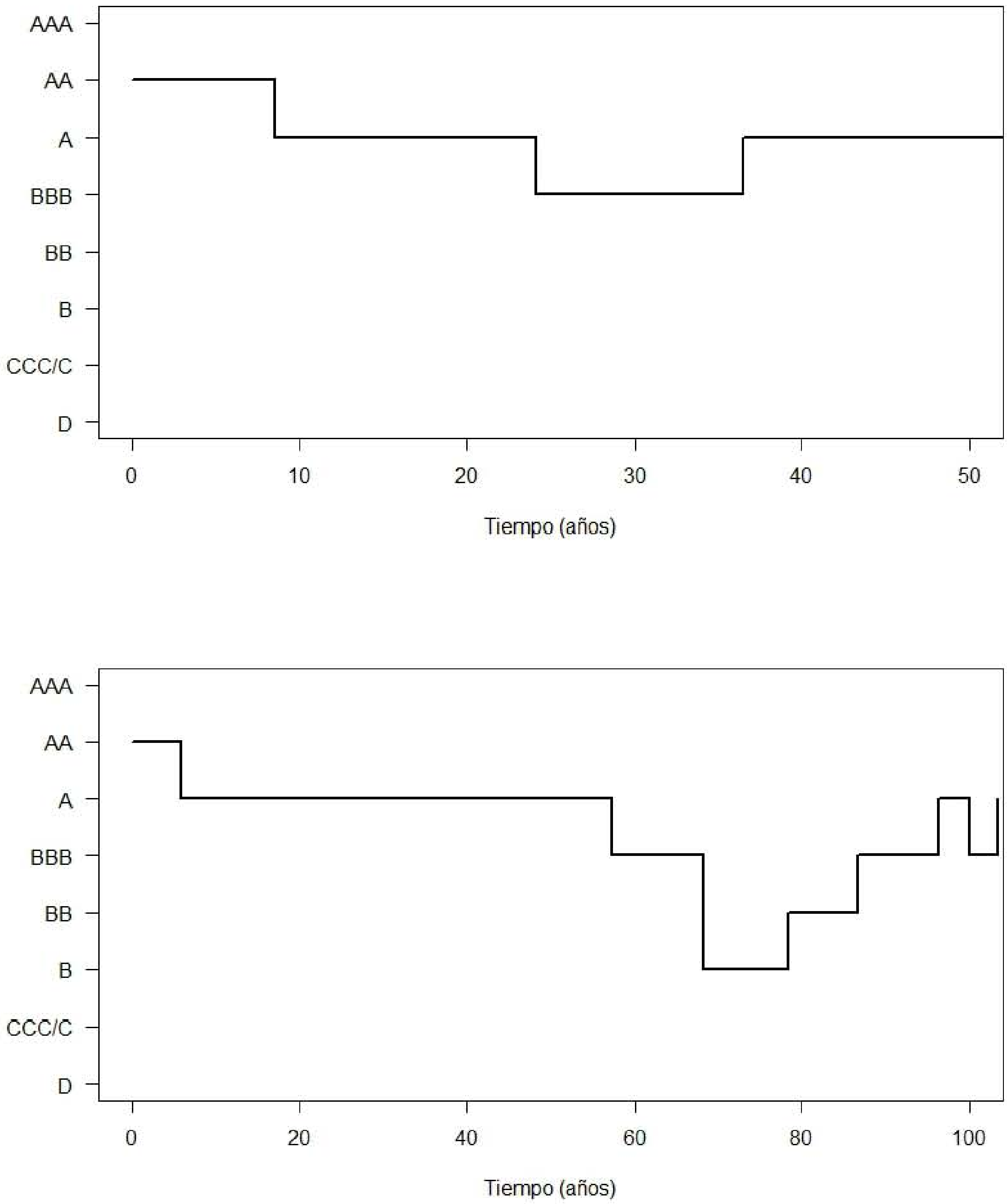
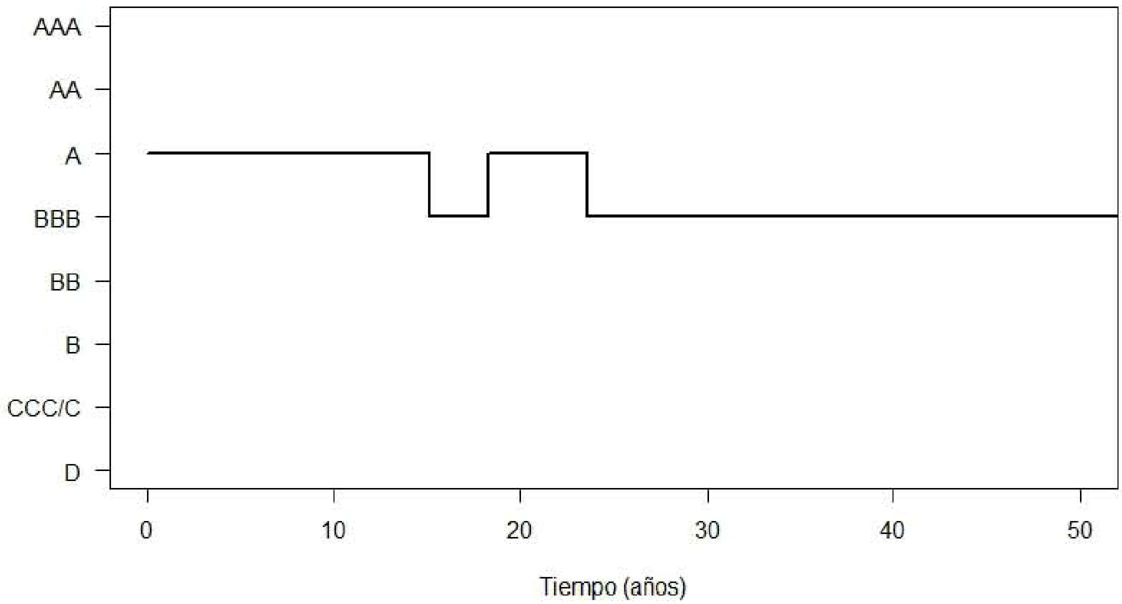


Figura 4.14: Comportamiento a largo plazo iniciando en la calificación AA.



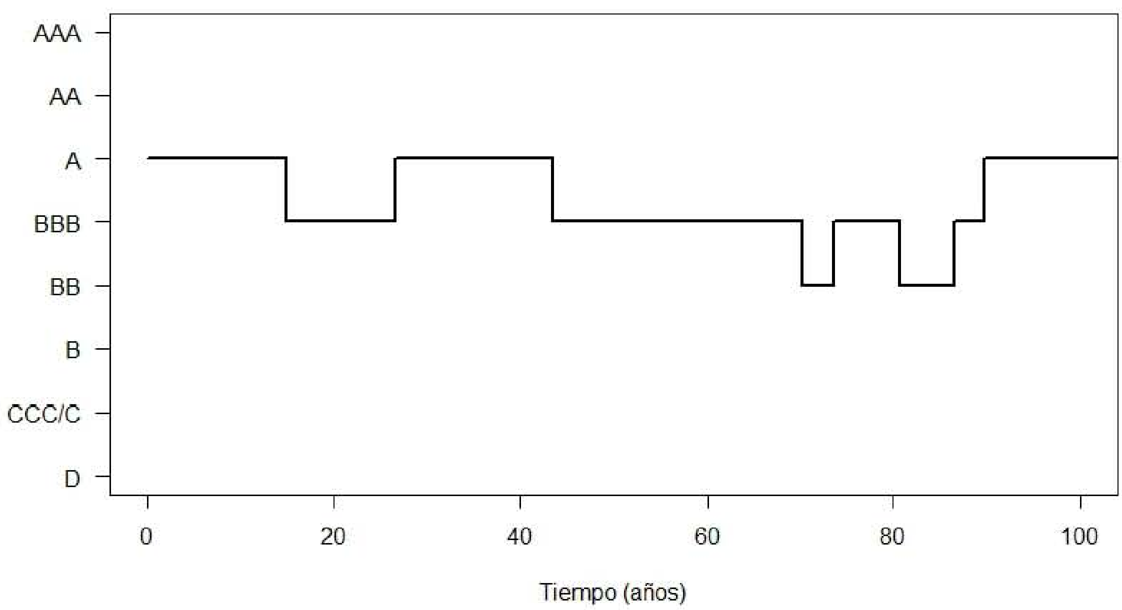


Figura 4.15: Comportamiento a largo plazo iniciando en la calificación A.

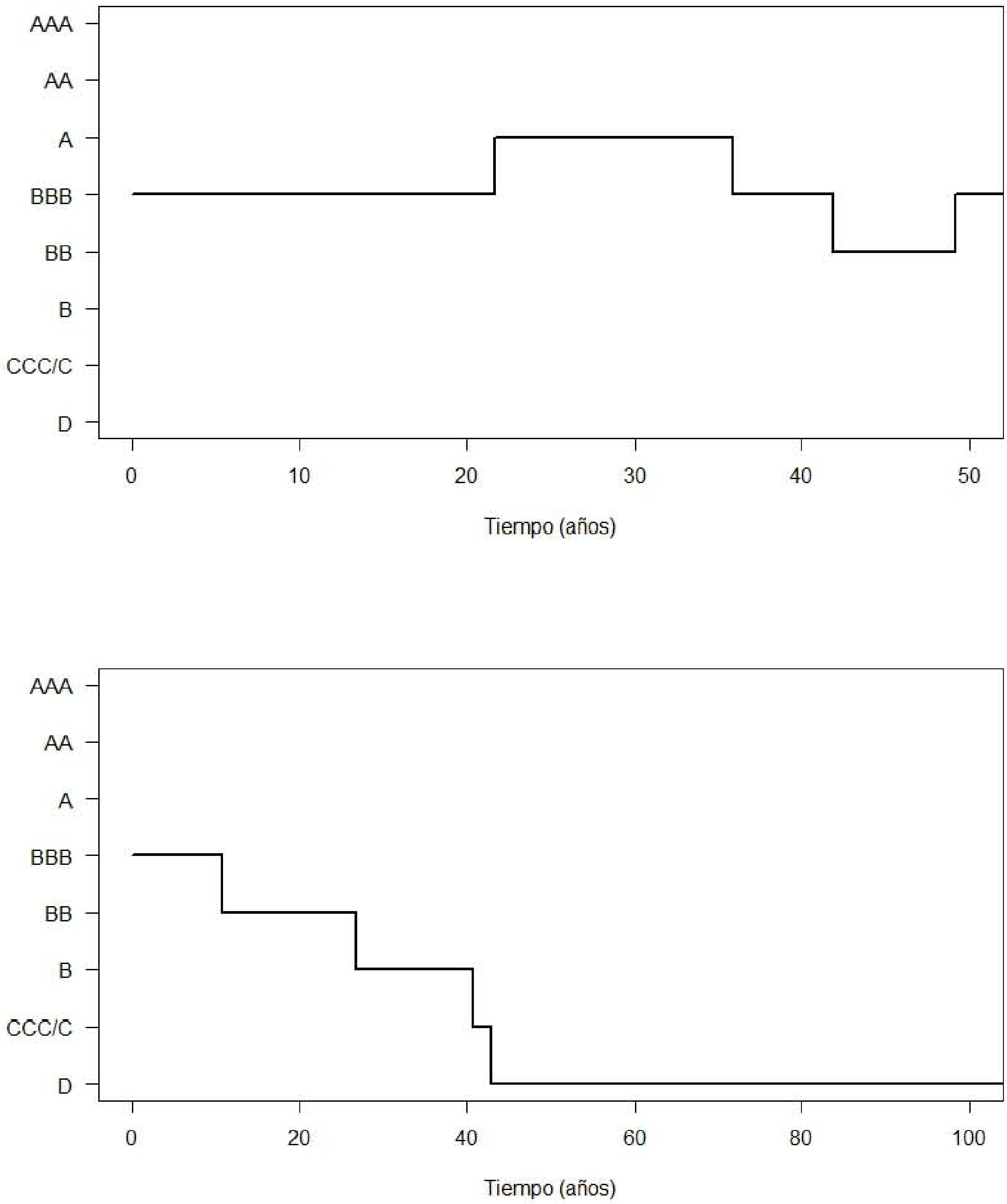


Figura 4.16: Comportamiento a largo plazo iniciando en la calificación BBB.

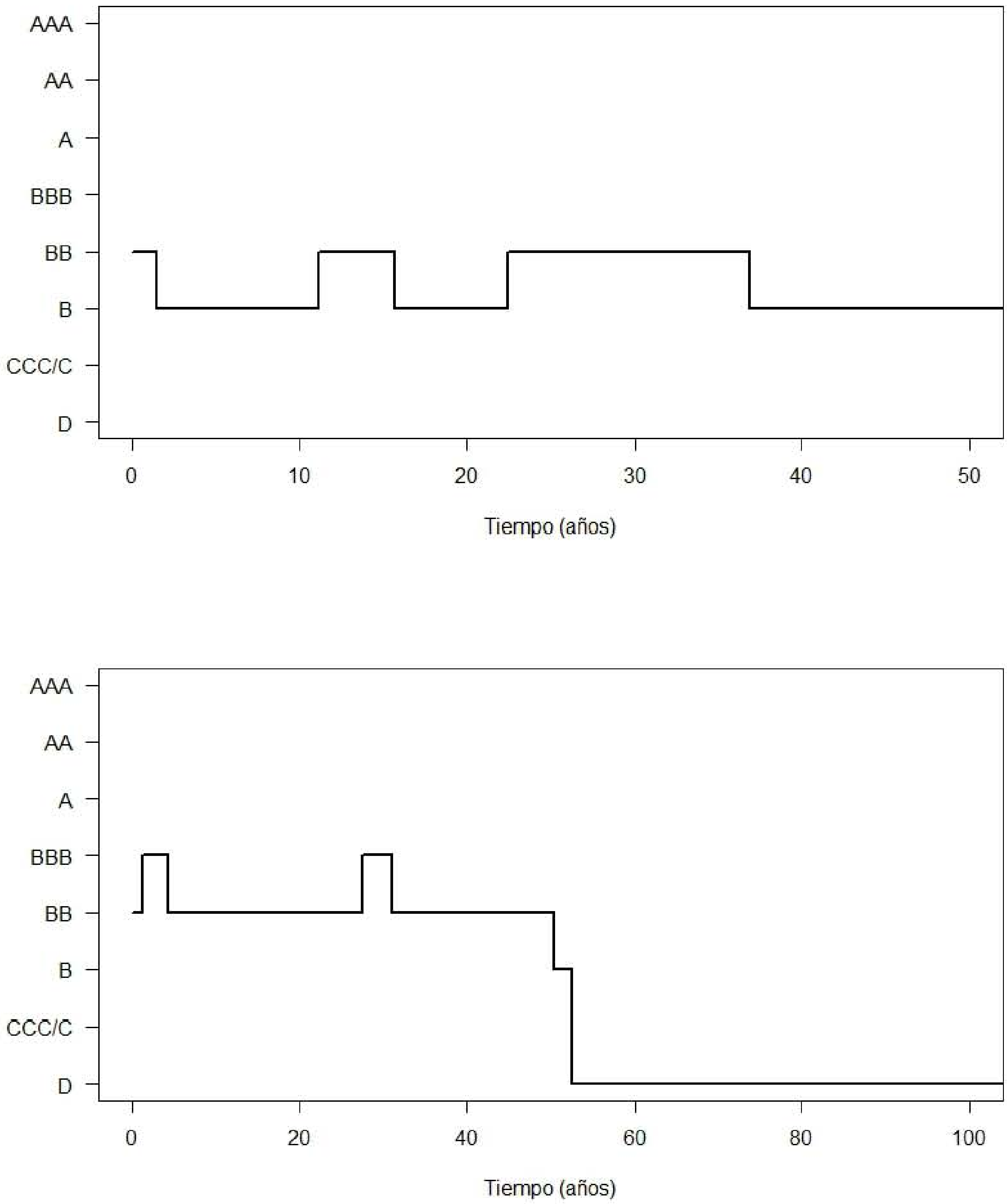


Figura 4.17: Comportamiento a largo plazo iniciando en la calificación BB.

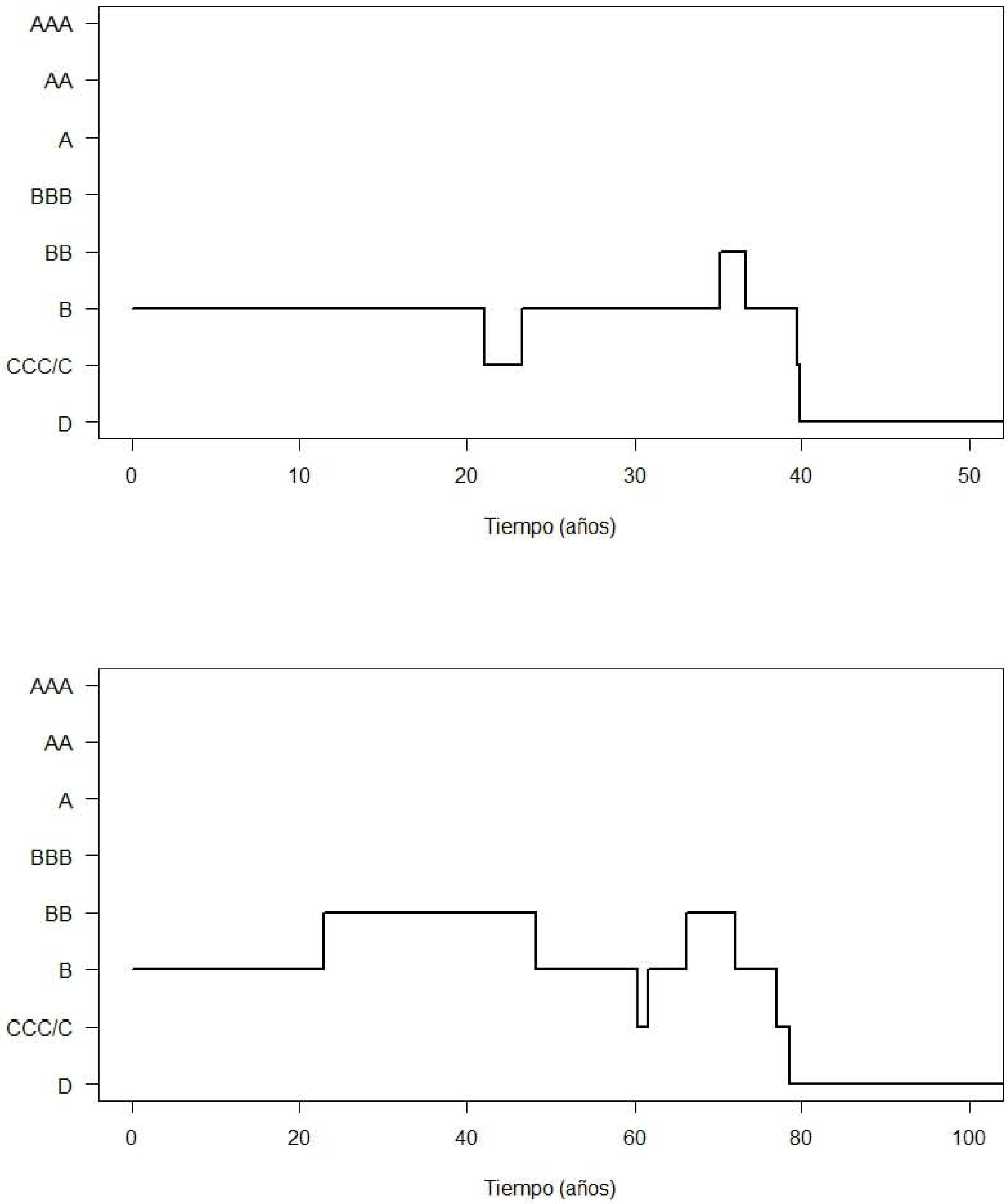


Figura 4.18: Comportamiento a largo plazo iniciando en la calificación B.

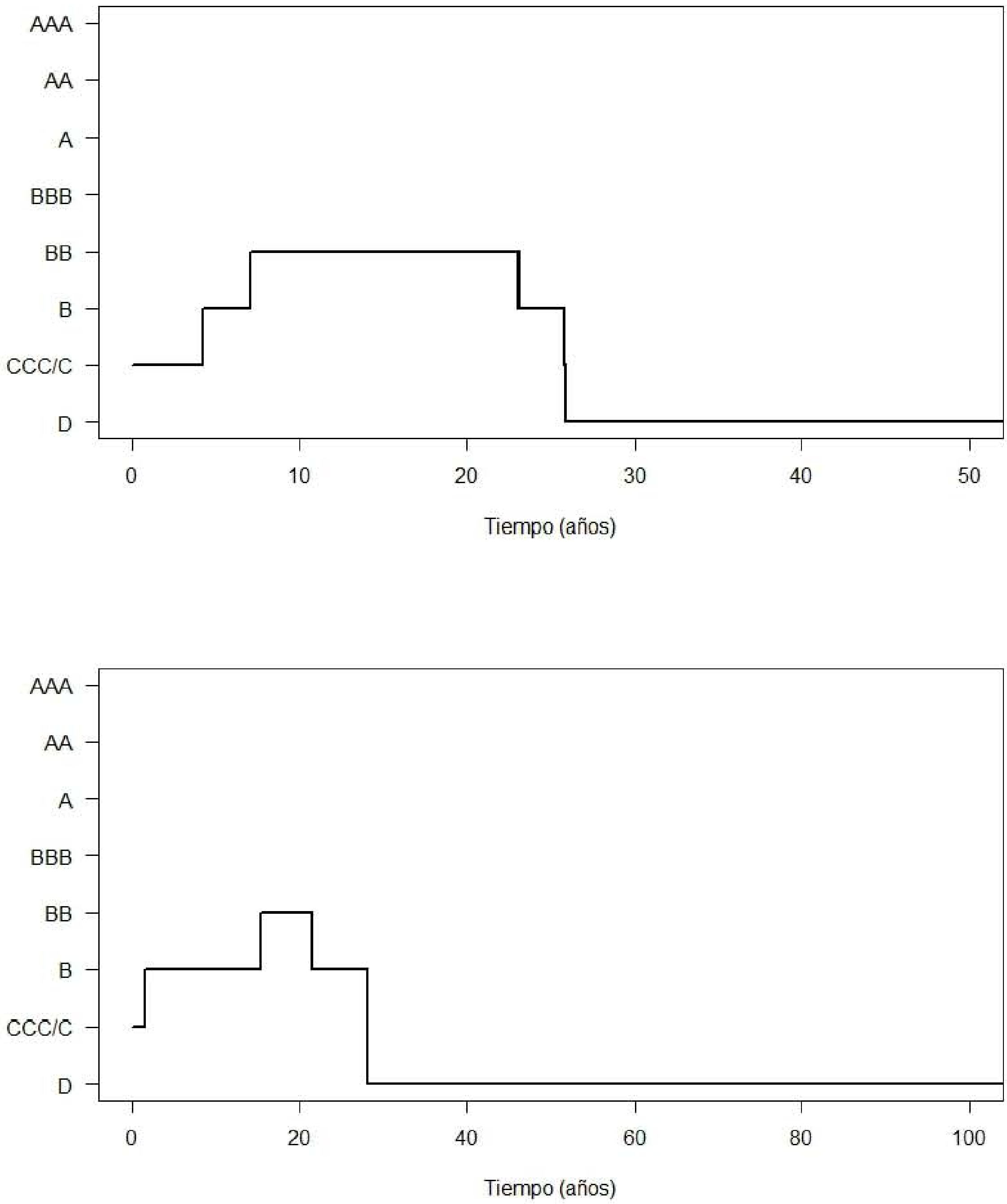


Figura 4.19: Comportamiento a largo plazo iniciando en la calificación CCC/C.

Dado el hecho de como se está tomando el incumplimiento, D, como estado absorbente, se omiten las simulaciones iniciando en este estado.

Se puede observar que a largo plazo, los comportamientos de las distintas calificaciones de crédito varían según lo esperado: mientras que las calificaciones más altas, tienen un comportamiento a largo plazo en donde la calificación oscila entre las AAA y las BB, dando a entender que es muy difícil que una empresa con alta calificación crediticia incurra en un incumplimiento de deuda; mientras que las calificaciones más bajas, corren el riesgo de incurrir en incumplimiento a mediano y largo plazo, como es el caso de las calificaiones B y CCC/C.

4.3. Cálculo del VaR y Expected Shortfall

El siguiente análisis consistirá en estimar un valor en riesgo (VaR) para la pérdida estimada debido al incumplimiento de las empresas. Para este análisis se tomará en cuenta la tasa de rendimiento estimada en el 2017 y la tasa de recuperación global de 2017.

Se realizó una simulación de 10,000 empresas cuya calificación crediticia inicial fue tomada al azar. Una vez simuladas las empresas y su calificación, se supone una transición a 1 año para obtener posteriormente la calificación crediticia de cada empresa al final del periodo, cuya probabilidad de cambiar, o no, de calificación en un año se obtuvo utilizando la matriz generadora estimada global para después calcular la matriz de probabilidades de transición, Q, de la calificación crediticia de la empresa partiendo la siguiente fórmula:

$$G = R(Q - 1) \tag{4.6}$$

donde

- G es la matriz generadora.
- R es una matriz diagonal cuyas entradas son $r_{ii} = -(\lambda_i)^{-1}$.
- Q es la matriz de probabilidades de transición.
- I es la matriz identidad.

Haciendo un despeje es posible encontrar la expresión de la matriz Q de tal forma que la obtenemos a partir de la matriz generadora estimada.

Una vez obtenida la matriz de probabilidades de transición, procedemos a hacer el siguiente análsis: si una empresa no cambia de calificación, o bien, cambia de calificación en un año a cualquier calificación distinta a la D, en donde se da el incumplimiento, se supondrá que la empresa cumplió con sus deudas y que el inversionista obtuvo un factor $(1+i)$ de ganancia, siendo i la tasa de rendimiento en el 2017. Por el contrario, si la empresa cambió de calificación y al final del año se encuentra en la calificación crediticia D, se asume que la empresa no pudo cumplir con sus obligaciones financieras y por lo tanto incumplió, siendo que el inversionista obtuvo un factor δ, que es la tasa de recuperación global en el 2017.

Teniendo esto en cuenta, obtenemos la proporción de empresas simuladas que incurrieron en incumplimiento, siendo

$$\beta = \frac{\text{empresas que incumplieron}}{\text{total de empresas simuladas}}. \tag{4.7}$$

Teniendo el factor β, es posible obtener la proporción de empresas que cumplieron con sus obligaciones financieras en el año transcurrido, siendo

$$\alpha = 1 - \beta \tag{4.8}$$

la proporción de empresas que cumplieron.

Con estos dos factores, es posible analizar la siguiente curva

$$-\left(\alpha(1+i) + \beta(\delta) - 1\right) \tag{4.9}$$

que resulta ser la pérdida esperada del mercado.

El pensamiento detrás de este planteamiento es el siguiente: ya que tenemos 7 calificaciones crediticias distintas a D, la calificación donde ocurre el incumplimiento, en las que un inversionista tiene distintas opciones de inversión (ya que es ilógico pensar que un inversionista prestará dinero a una empresa en calificación D), se puede hacer el siguiente análisis:

Supongamos una empresa en cualquier calificación crediticia en la cual un inversionista busca invertir su dinero, entonces la probabilidad de que esta empresa cualquiera cumpla con sus obligaciones crediticias se puede modelar con una variable aleatoria Bernoulli con soporte en el $\{0, 1\}$, de parámetro $1 - p$, donde p resulta ser la probabilidad de incumplimiento, que se supone la misma para cualquier empresa sin importar su calificación.

Tomando en cuenta que la variable aleatoria toma el valor 0 cuando la empresa incumple, y 1 si cumple, podemos deducir lo siguiente: si la empresa cumple con sus obligaciones crediticias, el inversionista habrá ganado un porcentaje i de interés por cada peso que haya invertido, mientras que si la empresa deudora incumple, el inversionista recuperará un porcentaje δ de su inversión original. Con esto, podemos formar la siguiente función de pérdida para el inversionista, suponiendo realizó una inversión inicial es de \$1 a una empresa:

$$L(X) = -(X(1+i) + (1-X)(\delta) - 1) \tag{4.10}$$

donde $X \sim Ber(1-p)$ es la variable que modela la probabilidad de cumplimiento, siendo p la probabilidad de incumplimiento de la empresa, i la tasa de rendimiento ofrecida y δ la tasa de recuperación.

Siguiendo esa idea, es claro que la decisión de concentrar la inversión en una empresa es arriesgado para cualquier inversionista, por lo que tomando el supuesto que se busca diversificar el riesgo de las inversiones, la entidad que prestará su dinero buscará invertirlo en una cantidad n de empresas distintas. Supongamos entonces que la probabilidad de incumplimiento, p, para cada una de esas n empresas es exactamente la misma, entonces, el cumplimiento o incumplimiento crediticio de la empresa j se va a poder modelar con la variable aleatoria $X_j \sim Ber(1-p)$ idéntica a la definida anteriormente para el caso de una empresa, por lo que ahora se tendría una muestra aleatoria de n variables Bernoulli independientes e idénticamente distribuidas. Dicho esto, la función de pérdida L queda definida como:

$$L(X_1,\ldots,X_n) = -\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{n}(1+i) + \left(1-\sum_{j=1}^{n}\frac{X_j}{n}\right)(\delta) - 1\right) \tag{4.11}$$

por lo que la pérdida esperada del inversionista que invierte 1 peso proporcionalmente en n empresas distintas, se ve como lo siguiente

$$\mathbb{E}[L] = -\left(\frac{\mathbb{E}[Y]}{n}(1+i) + \left(1-\frac{\mathbb{E}[Y]}{n}\right)(\delta) - 1\right) \tag{4.12}$$

donde $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$ es una variable aleatoria binomial de parámetros $(n, 1-p)$.

Sin embargo, sería un error pensar que cada una de las empresas en las que se puede invertir una proporción del capital disponible tiene la misma probabilidad de incumplimiento, ya que la matriz generadora estimada anteriormente nos dice exactamente lo contrario: una empresa mejor calificada tiene muy poca probabilidad de incumplir, mientras que una empresa con calificación crediticia B o CCC/C tiene bastante riesgo de incumplir.

Esto llevaría a suponer, que si cada variable X_j es una Bernoulli de parámetro $(1-p_j)$ con p_j la probabilidad de incumplimiento asociada a la empresa j, entonces el término $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$ podría seguir una distribución quasi-binomial.

La finalidad de esta sección es obtener la pérdida esperada del inversionista suponiendo diversos escenarios en los cuales diversifica el riesgo invirtiendo una proporción de un peso en distintas empresas con calificaciones crediticias asociadas, así como la obtención del VaR y el Expected Shortfall asociado.

Para efectos de este trabajo se trabajó con la tasa de rendimiento obtenida en el 2017 en Estados Unidos, la cual indica que el rendimiento estuvo, en general, por debajo del rendimiento de los bonos del tesoro de Estados Unidos, a una periodicidad de 10 años. En este caso, la tasa de rendmiento i en el 2017 fue del 2.41 %.

En cuanto a la tasa de recuperación esta se obtuvo del estudio anual de incumplimiento "*Annual Default Study: Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2017*" realizado por la calificadora *Moody's* el 15 de Febrero de 2018. En este documento se tiene la siguiente tabla

	Año de emisión		
Producto	2017	2016	1987 – 2017
Bonos garantizados senior	52.3 %	35.9 %	62.3 %
Bonos no garantizados senior	54.1 %	11.7 %	47.9 %
Bonos subordinados	4.5 %	6.6 %	28.0 %

Figura 4.20: Tasas promedio de recuperación de la deuda corporativa medidas por las últimas recuperaciones, 1987-2017, obtenida de *Annual Default Study: Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2017*, exhibit 8, página 9.

que nos muestra las tasas promedio de recuperación de deuda corporativa para los años 2017, 2016 y un promedio de las tasas a 10 años, tomando desde 1987 hasta 2017. La tasa de recuperación que se tomará será el promedio de las tres tasas de recuperación del 2017, considerando los bonos garantizados, no garantizados y subordinados, por lo que la tasa de recuperación δ es igual a 36.967 %.

Una vez obtenidas estas tasas se procedió a hacer el siguiente análsis: tomando la matriz generadora estimada $\widetilde{G}$ de la figura 4.3 la cual corresponde a la región global, se utilizó para obtener la matriz de transiciones de una calificación crediticia, utilizando el método descrito al inicio de la sección. En esta parte se encuentra un problema que involucra directamente al estado de la calificación creditica D, ya que al momento de obtener la matriz R definida como los recíprocos de los elementos diagonales de $\widetilde{G}$ nos encontrábamos con un factor indeterminado $1/0$ que generaba algunos problemas a la hora de simular las empresas, por lo que se decidió hacer un ajuste a la matriz generadora obtenida, siendo que cada elemento $\lambda_{ij} = 0$ fuera reemplazado por la mínima probabilidad distinta de cero, en este caso, los λ_{ij} tomaban el valor de 0.0001, restando el respectivo valor a los elementos λ_i, por lo que la nueva matriz generadora modificada nos daba lo siguiente:

Teniendo la nueva matriz generadora modificada, se realiza el siguiente procedimiento: se realizan simulaciones de 10,000 empresas seleccionando de manera aleatoria la calificación crediticia en la cual inician en el año, obteniendo la matriz de probabilidades de transición Q a partir de la matriz generadora modificada, podemos simular una transición a un año, una vez con esto, sacamos los factores α y β como se describió anteriormente, y procedemos a realizar el mismo procedimiento 10,000 veces.

Para esta sección se ha decidido simular 6 escenarios distintos:

1. Escenario en el cual se elegirá de manera aleatoria uniforme distintas empresas cuya calificación de cada una de las 10,000 empresas simuladas se encontrarán entre AAA

De/Hacia	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D
AAA	-0.4424	0.4418	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
AA	0.0001	-0.0447	0.0441	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
A	0.0001	0.0047	-0.0301	0.0249	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
BBB	0.0001	0.0001	0.0252	-0.0556	0.0289	0.0011	0.0001	0.0001
BB	0.0001	0.0001	0.0009	0.0421	-0.0988	0.0547	0.0001	0.0008
B	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0457	-0.1100	0.0517	0.0122
CCC/C	0.0001	0.0001	0.0001	0.0073	0.0001	0.2942	-0.7612	0.4593
D	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	-0.0007

Figura 4.21: Matriz generadora $\widetilde{G}$ modificada para la región global.

y CCC/C, omitiendo el caso en el cual se elija una empresa en calificación D puesto que no es lógico que un inversionista se decante por invertir en una empresa con esa calificación. En este escenario se hace hincapié en que las empresas se están eligiendo uniformemente por calificación.

2. Escenario en el que se elegirá las empresas con su respectiva calificación inicial usando la distribución estacionaria de la cadena de Markov. Este escenario elige las empresas de manera uniforme por existencia de las empresas.

3. Escenario en el que las empresas se eligen de manera uniforme cuyas calificaciones se encuentran en las tres mejores, AAA, AA y A.

4. Escenario en el que las empresas se eligen de manera uniforme cuyas calificaciones se encuentran entre BBB, BB y B.

5. Escenario en el que las empresas se eligen de manera uniforme cuyas calificaciones se encuentran entres AA, A y BBB.

6. Escenario en el que las empresas se eligen de manera uniforme cuyas calificaciones se encuentran entres A, BBB y BB.

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron de los escenarios simulados.

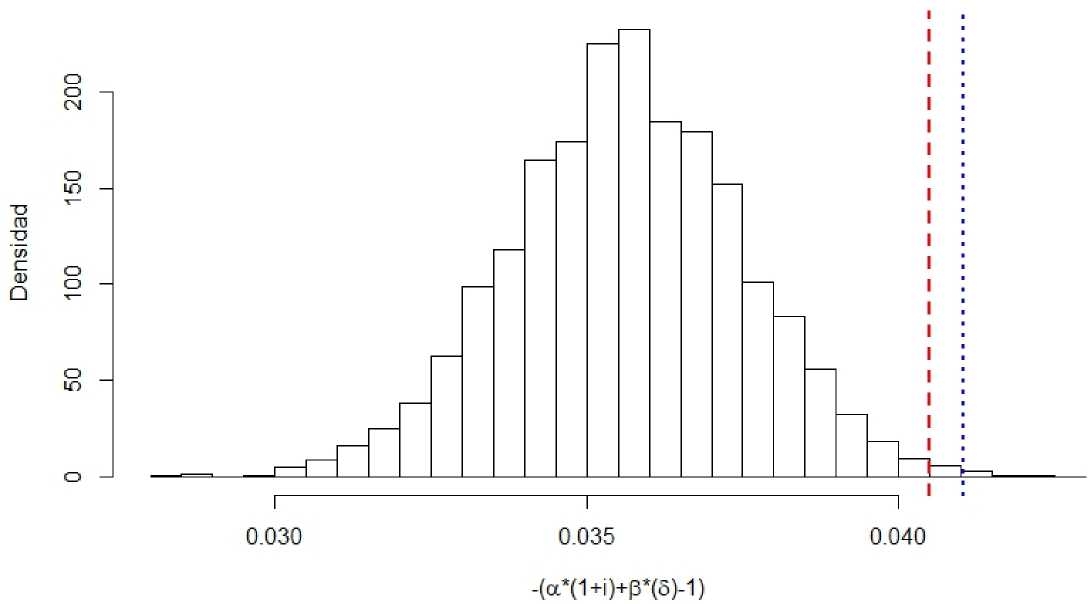


Figura 4.22: Densidad de las ganancias del inversionista para el escenario 1; la línea roja representa el VaR al 99.5 % y la línea azul el expected shortfall.

Escenario 1	Pérdida esperada:	0.03562
Nivel de confianza	**VaR**	**ES**
99 %	0.0400	0.0405
99.5 %	0.0405	0.0410

Podemos observar que para el escenario 1, se tiene definitivamente un escenario de pérdida, donde la pérdida esperada en promedio será de 0.035 por cada peso que se haya invertido. La linea roja representa el VaR al 99.5 % que resulta ser de 0.0405 y la azul representa el expected shortfall de 0.041. De manera general podemos decir que en el escenario en el que se elige invertir de manera uniforme en las empresas, de acuerdo a su calificación inicial, se espera tener una pérdida considerable de dinero, por lo que el inversionista no debería de optar por una estrategia de inversión similar a esta.

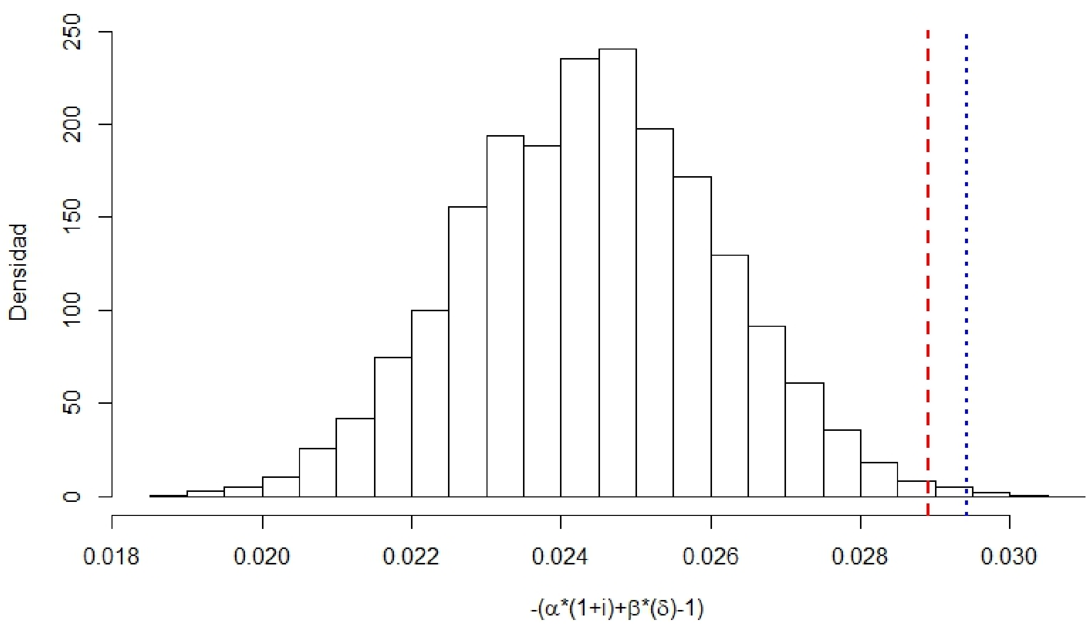


Figura 4.23: Densidad de las ganancias del inversionista para el escenario 2; la línea roja representa el VaR al 99.5 % y la línea azul el expected shortfall.

Escenario 2	Pérdida esperada:	0.02440
Nivel de confianza	**VaR**	**ES**
99 %	0.0285	0.0290
99.5 %	0.0289	0.0294

Para el escenario 2 se observa se tiene otro escenario de pérdida, donde en promedio la pérdida será de 0.0244 por cada peso que se haya invertido. El VaR al 99.5 % es 0.0289 y el expected shortfall de 0.0294. Si bien la pérdida es mejor que el escenario anterior, la estrategia de invertir en empresas de manera uniforme de acuerdo a su existencia en el mercado tampoco es buena.

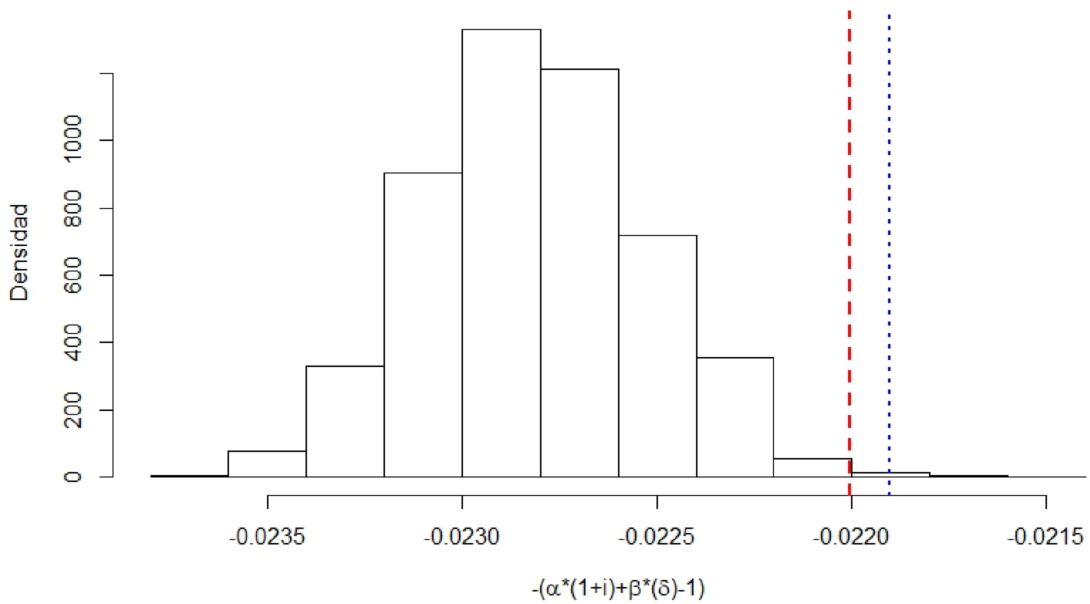


Figura 4.24: Densidad de las ganancias del inversionista para el escenario 3; la línea roja representa el VaR al 99.5 % y la línea azul el expected shortfall.

Escenario 3	Pérdida esperada:	-0.02283
Nivel de confianza	**VaR**	**ES**
99 %	-0.0221	-0.0220
99.5 %	-0.0220	-0.0219

Para el escenario 3 se observa que la pérdida en general es negativa, donde en promedio esta será de -0.0228 por cada peso que se haya invertido, en otras palabras, este escenario tiene un panorama de ganancia promedio de 0.0228. El VaR al 99.5 % es -0.022 y el expected shortfall de -0.0219. En este escenario se tiene un panorama más optimista en cuanto a ganancia, claro esta, ya que se está suponiendo que la inversión se está diversificando entre empresas con calificaciones AAA, AA y A.

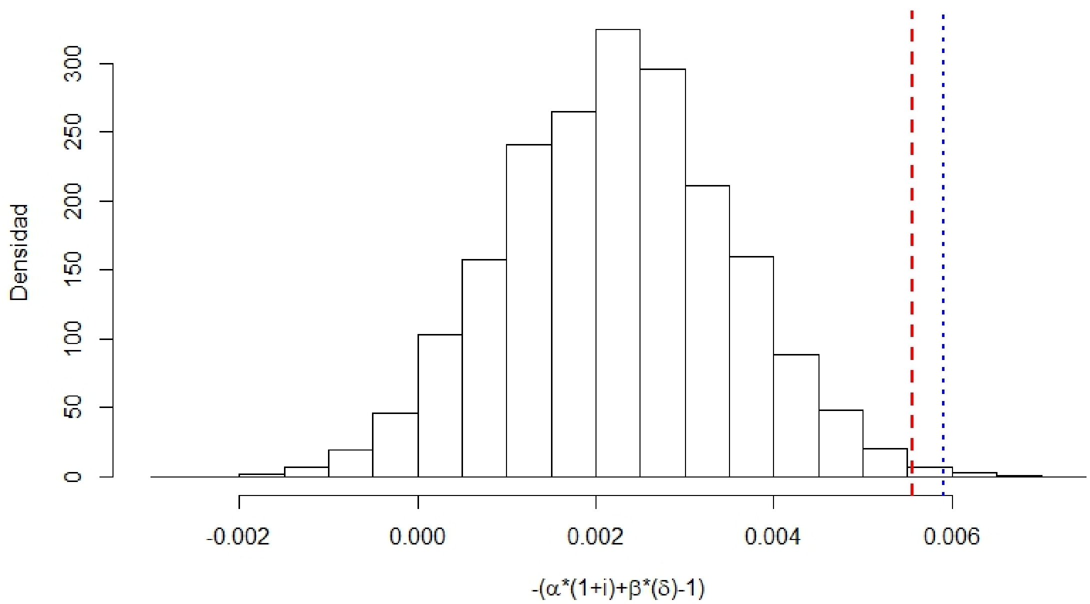


Figura 4.25: Densidad de las ganancias del inversionista para el escenario 4; la línea roja representa el VaR al 99.5 % y la línea azul el expected shortfall.

Escenario 4	Pérdida esperada:	0.00223
Nivel de confianza	**VaR**	**ES**
99 %	0.00516	0.0055
99.5 %	0.00555	0.0059

En el escenario 4 se tiene otro escenario de pérdida en general, salvo algunos casos, donde en promedio la pérdida será de 0.0022 por cada peso que se haya invertido. El VaR al 99.5 % es 0.0055 y el expected shortfall de 0.0059. Se vuelve a tener pérdidas en general por la diversificación del riesgo entre compañías BBB, BB y B. Esto es interesante ya que en el 2017 el 90 % de los incumplimientos que ocurrieron, provinieron de empresas cuyas calificaciones al inicio del año estaban comprendidas en alguna de esas 3, de manera general.

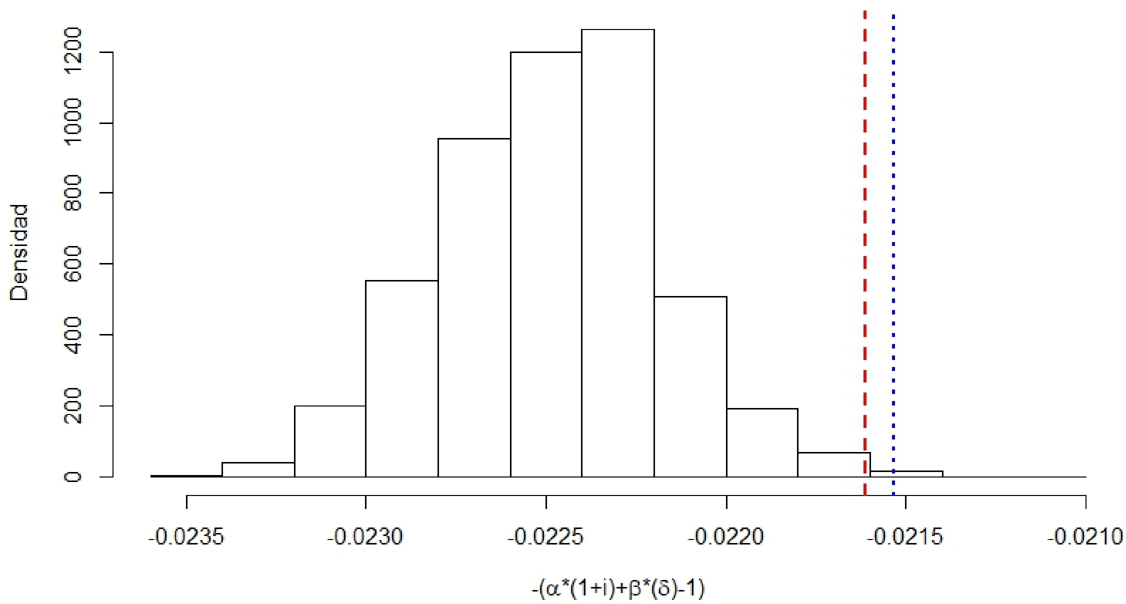


Figura 4.26: Densidad de las ganancias del inversionista para el escenario 5; la línea roja representa el VaR al 99.5 % y la línea azul el expected shortfall.

Escenario 5	Pérdida esperada:	-0.02249
Nivel de confianza	**VaR**	**ES**
99 %	-0.0217	-0.02159
99.5 %	-0.0216	-0.02153

Pasando al escenario 5 volvemos a tener otro escenario de pérdida negativa, o bien, ganancias donde en promedio esta será de 0.0224 por cada peso que se haya invertido. El VaR al 99.5 % es -0.0216 y el expected shortfall de -0.0215. Es lógico pensar que la inversión va a tener ganancias, ya que si bien no estamos invirtiendo en empresas con calificación AAA si se supone una inversión exclusivamente en empresas con las 3 mejores calificaciones del mercado después de la AAA, por ende, la ganancia esperada es menor a la obtenida en el escenario 3.

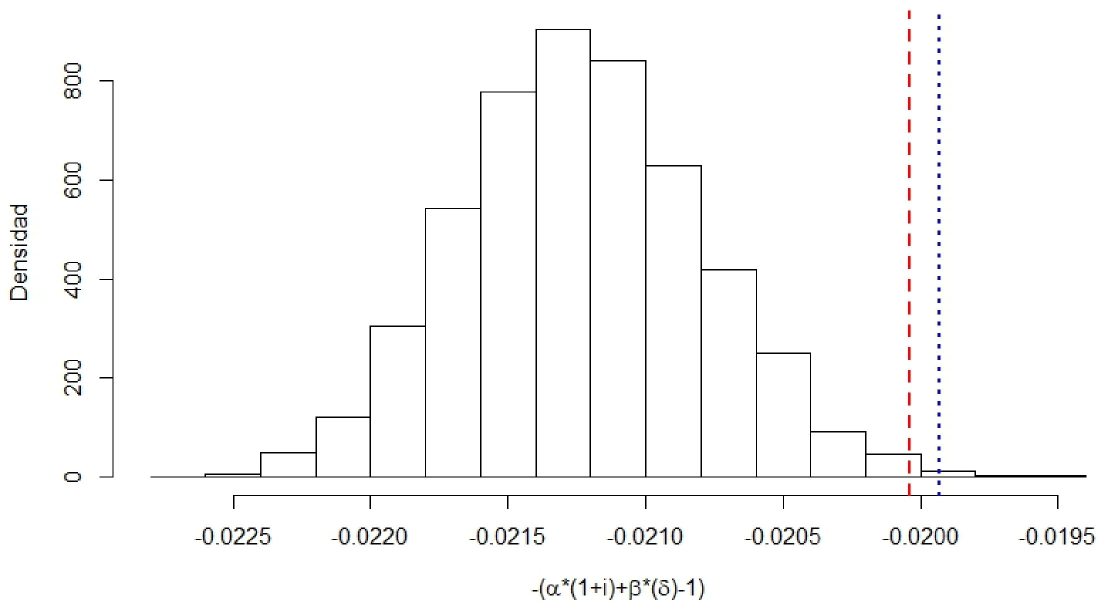


Figura 4.27: Densidad de las ganancias del inversionista para el escenario 6; la línea roja representa el VaR al 99.5 % y la línea azul el expected shortfall.

Escenario 6	Pérdida esperada:	-0.02122
Nivel de confianza	**VaR**	**ES**
99 %	-0.0202	-0.0200
99.5 %	-0.0200	-0.0199

Por último, para el escenario 6 se tiene nuevamente ganancias en la inversión donde será de 0.0212 por cada peso que se haya invertido en promedio, mientras que el VaR al 99.5 % es de -0.02 y el expected shortfall de -0.0199. Esta ganancia de igual forma se espera, lógicamente, menor incluso que las de los escenarios 3 y 5, sin embargo el escenario es lo suficientemente optimista como para asegurar que si un inversionista se dedica a invertir en empresas A, BBB y B seguirá obteniendo ganancias.

4.4. Conclusiones

Podemos observar que el comportamiento de las empresas en el año 2017 en general era el de cumplimiento de deuda contraída; la misma matriz generadora nos da una idea bastante clara de que esperar de una empresa en una determinada calificación crediticia, si es una calificación alta es prácticamente imposible que nos incumplan a largo plazo, tomemos por ejemplo la calificación AAA, las empresas en esta calificación solamente se “mueven” dentro de las calificaciones AAA y AA, y a medida que las calificaciones decrecen, es más probable el incumplimiento como esperaríamos.

Sabemos de igual forma que el VaR_α del pago de deuda es el pago más bajo que un inversionista al financiar a una empresa emisora que podemos observar con un nivel de confianza de $(100 \times \alpha)\,\%$. Considerando esto, podemos ver que con una confianza del 99.5 % la pérdida esperada de un inversionista en 2017 es positivo en tres escenarios de inversión y negativo en los otros 3. Esto nos puede llevar a concluir que, de manera general, como es algo lógico de pensar, es mejor invertir en empresas cuya calificación crediticia ronde el AAA, claro está que el invertir en estas empresas muchas veces no es accesible para toda entidad inversora por la gran cantidad de capital de inversión que estas requieren: a menor riesgo de incumplimiento, mayor capital inicial será el que se solicite.

Sin embargo, observamos en las simulaciones que no es estrictamente necesario que se busque invertir solamente en empresas AAA o AA, en el caso de la simulación 6, vemos que en promedio es posible obtener ganancia a partir de una decisión de inversión en empresas A, BBB y BB.

Por el contrario, el escenario en donde se toman decisiones de invertir en empresas cuya calificación crediticia es seleccionada de manera uniforme puede llevar a una pérdida considerable si es que el capital invertido es considerable. Esto tiene su justificación en un escenario de la vida real: si es posible que un inversionista pueda tener la posibilidad de invertir en ciertas empresas sin importar que calificación creditica tengan, es muy poco probable que la elección de las empresas se decante por aquellas que tengan calificaciones crediticias bajas, por el contrario, uno supondría que la mejor estrategia de inversión sería buscar invertir en empresas con calificaciones altas.

Podemos decir que el modelo propuesto nos proporciona una buena estimación de las matrices generadoras para las calificaciones de crédito, ya que hacen una buena estimación del comportamiento de las empresas en el año estudiado, de acuerdo a los reportes realizados por las calificadoras.

Hay que mencionar que el siguiente reto al que el modelo se enfrenta es el calcular los diferenciales de riesgo de crédito para las empresas; la razón por la que en este trabajo no se abarca de manera práctica el cálculo de los diferenciales es porque se necesita una base de datos que contenga los precios de los bonos emitidos por cualquier empresa, una vez teniendo esos datos, saber en que calificación crediticia se encuentra la empresa y utilizando un activo libre de riesgo, como los bonos del tesoro de Estados Unidos, es posible hacer el cálculo de los diferenciales y posteriormente obtener las primas de riesgo asociadas, sin embargo, derivado de la gran dificultad que presenta el tener acceso a dichas bases de datos, usualmente restringidas a inversionistas de las empresas, el cálculo de las primas de riesgo no pudo ser realizada.

La gran ventaja que tiene el modelo propuesto es que los cálculos son relativamente sencillos de recrear para cualquier año que se desee, teniendo en cuenta el uso de los datos proporcionados por las empresas calificadoras.

Apéndice A

A pesar de que en el trabajo no se incluye la obtención de las primas de riesgo dada la dificultad para obtener los datos necesarios para el procedimiento, el lector puede referirse al artículo de Jarrow y Turnbull para ver un ejemplo explícito del cálculo de estas primas, utilizando los datos de los índices de bonos corporativos de diciembre de 1993, proporcionados por *Lehman Brothers* (Tabla 5, página 511). Una parte importante para el cálculo de dichas primas es la obtención de los precios de los bonos cupón cero riesgosos, en esta sección se incluirá el procedimiento para obtener dichos precios a partir de los datos obtenidos.

En los datos obtenidos por Jarrow y Turnbull, se utilizan las fechas de maduración $T = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10$ y 14 años, los cuales son los puntos medios de los rangos de maduración obtenidos de los datos proporcionados. Sea:

- c el cupón.
- y_T^i el peor rendimiento para la clase i.
- T el tiempo de maduración.
- $\mathcal{B}_T^i$ el precio del bono.

Primero se calcula $\mathcal{B}_T^i$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{B}_T^i = \sum_{j=1}^{T} \frac{c}{(1+y_T)^j} + \frac{100}{(1+y_T)^T}. \tag{4.13}$$

Esto supone que el pago del cupón es realizado una vez por año y que su valor facial es de 100. Entonces, usando un sistema de ecuaciones triangular, se puede calcular $v^i(T)$ de forma recursiva haciendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_1^i = (c+100)v^i(1) \text{ calcula } v^i(1)\\
&\mathcal{B}_2^i = cv^i(1) + (c+100)v^i(2) \text{ calcula } v^i(2)\\
&\vdots\\
&\mathcal{B}_7^i = cv^i(1) + cv^i(2) + \ldots + (c+100)v^i(7) \text{ calcula } v^i(7),
\end{aligned}$$

dado que en los datos no se tiene información para $T = 8, 9$ se utiliza una interpolación lineal para obtenerlos. Por lo que

$$
\begin{aligned}
v^i(8) &\equiv (2/3)v^i(7) + (1/3)v^i(10)\\
v^i(9) &\equiv (1/3)v^i(7) + (2/3)v^i(10).
\end{aligned}
$$

Una vez obtenidas $v^i(8)$ y $v^i(9)$, continuamos con el cálculo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_7^i = {}& cv^i(1) + cv^i(2) + \ldots + cv^i(7) + c[(2/3)v^i(7) + (1/3)v^i(10)]\\
&+ c[(1/3)v^i(7) + (2/3)v^i(10)]\\
&+ (c + 100)v^i(10) \text{ calcula } v^i(10).
\end{aligned}
$$

Ya que para $T = 11, 12$ y 13 tampoco se tienen datos, se procede a hacer una nueva interpolación de tal manera que:

$$
\begin{aligned}
v^i(11) &\equiv (3/4)v^i(10) + (1/4)v^i(14)\\
v^i(12) &\equiv (1/2)v^i(10) + (1/2)v^i(14)\\
v^i(13) &\equiv (1/4)v^i(10) + (3/4)v^i(14).
\end{aligned}
$$

Y por último,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{14}^i = {}& cv^i(1) + \ldots + cv^i(10) + c[(3/4)v^i(10) + (1/4)v^i(14)]\\
&+ c[(1/2)v^i(10) + (1/2)v^i(14)]\\
&+ c[(1/4)v^i(10) + (3/4)v^i(14)]\\
&+ (c + 100)v^i(14) \text{ calcula } v^i(14).
\end{aligned}
$$

Apéndice B

En esta sección se incluye el código de las simulaciones del capítulo 4.

```
# Renglones de la matriz de transicion

Q1 <- c(0.6429,0.3571,0,0,0,0,0,0,0)
Q2 <- c(0,0.9256,0.0417,0,0,0,0,0,0.0327)
Q3 <- c(0,0.0044,0.9336,0.0236,0,0,0,0,0.0384)
Q4 <- c(0,0,0.0233,0.9,0.0267,0.0011,0,0,0.0489)
Q5 <- c(0,0,0.0008,0.0357,0.8056,0.0463,0,0.0008,0.1109)
Q6 <- c(0,0,0,0,0.0365,0.7568,0.0414,0.0098,0.1554)
Q7 <- c(0,0,0,0.0041,0,0.168,0.3811,0.2623,0.1844)

# Se crea la matriz de probabilidades de transicion

Q <- rbind(Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7)

# Se crea la matriz modificada para eliminar el estado NR

Q_Modificada <- function(renglon){
  parametro = round(1 - renglon[length(renglon)], digits = 4)
  Q_Modif <- c(0)
  for(i in 1:length(renglon)-1)
    Q_Modif[i] = round(renglon[i]/parametro,
    digits = 4)
  return(Q_Modif)
}

# Se modifica cada renglon

Q1_Modif = Q_Modificada(Q1)
Q2_Modif = Q_Modificada(Q2)
Q3_Modif = Q_Modificada(Q3)
Q4_Modif = Q_Modificada(Q4)
Q5_Modif = Q_Modificada(Q5)
Q6_Modif = Q_Modificada(Q6)
Q7_Modif = Q_Modificada(Q7)
```

```
# Se crea el ultimo renglon correspondiente al estado D

Q8_Modif <- c(0,0,0,0,0,0,0,1)

# Se crea la matriz de transiciones modificada

Q_Modif <- rbind(Q1_Modif, Q2_Modif, Q3_Modif, Q4_Modif,
 Q5_Modif, Q6_Modif, Q7_Modif, Q8_Modif)

# Estimacion de la matriz generadora

matrizGeneradora <- function(matrizTransicion){
  G <- matrizTransicion
  for(i in 1:ncol(matrizTransicion)){
    for(j in 1:nrow(matrizTransicion)){
      if(i == j)
        G[i,j] = round(log(matrizTransicion[i,i]),
        digits = 4)
      else{
        if(matrizTransicion[i,j] != 0)
          G[i,j] = round(matrizTransicion[i,j]*
          (log(matrizTransicion[i,i])/(matrizTransicion[i,i]-1)),
          digits = 4)
        else
          G[i,j] = 0
      }
    }
  }
  return(G)
}

generadora = matrizGeneradora(Q_Modif)

# Se modifican las probabilidades en la matriz para eliminar las entradas
# cero y asi evitar posibles errores al correr el codigo, se sustituyen por
# el minimo valor posible de 4 decimales: 0.0001, y se modifican a
# la vez las entradas diagonales

generadora2 <- rbind(c(-0.4424,0.4418,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,
0.0001),
                     c(0.0001,-0.0447,0.0441,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,
                     0.0001),
                     c(0.0001,0.0047,-0.0300,0.0248,0.0001,0.0001,0.0001,
                     0.0001),
                     c(0.0001,0.0001,0.0252,-0.0556,0.0289,0.0011,0.0001,
                     0.0001),
```

```
                      c(0.0001,0.0001,0.0009,0.0421,-0.0988,0.0547,0.0001,
                      0.0008),
                      c(0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0457,-0.1101,0.0518,
                      0.0122),
                      c(0.0001,0.0001,0.0001,0.0073,0.0001,0.2942,-0.7612,
                      0.4593),
                      c(0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,
                      -0.0007))

# Simulacion

simulacionCMTC <- function(Generadora, edoIni, tParo, graficar){
  n <- nrow(Generadora) - 1
  tasas <- -diag(Generadora)
  P <- diag(1/tasas) %*% Generadora + diag(1, n+1)
  histEdo <- c(7-edoIni)
  histTiempo <- c(0)
  tiempo <- 0
  edoActual <- edoIni
  salto <- 2

  while (tiempo < tParo){
    tiempo <- tiempo + rexp(1, tasas[edoActual+1])
    histTiempo[salto] <- tiempo
    edoActual <- sample(0:n, 1, prob=P[edoActual+1,])
    histEdo[salto] <- 7-edoActual
    salto <- salto + 1
  }

  if (graficar) {
    plot(histTiempo, histEdo, type="s", lwd = 2, xlab="Tiempo␣(anios)",
     ylab="", ylim=c(0,n), xlim=c(0,tParo), yaxt="n")
    axis(2, at=0:n, labels =
    c("D","CCC/C","B","BB","BBB","A","AA","AAA"),
         las=2, par("usr"))
  }
  return(cbind(histEdo, histTiempo))
}

# Simulacion para la calificacion AAA a largo plazo

simulacionCMTC(generadora2,0,50,TRUE)
simulacionCMTC(generadora2,0,100,TRUE)

# Simulacion para la calificacion AA a largo plazo

simulacionCMTC(generadora2,1,50,TRUE)
```

```
simulacionCMTC(generadora2,1,100,TRUE)

# Simulacion para la calificacion A a largo plazo

simulacionCMTC(generadora2,2,50,TRUE)
simulacionCMTC(generadora2,2,100,TRUE)

# Simulacion para la calificacion BBB a largo plazo

simulacionCMTC(generadora2,3,50,TRUE)
simulacionCMTC(generadora2,3,100,TRUE)

# Simulacion para la calificacion BB a largo plazo

simulacionCMTC(generadora2,4,50,TRUE)
simulacionCMTC(generadora2,4,100,TRUE)

# Simulacion para la calificacion B a largo plazo

simulacionCMTC(generadora2,5,50,TRUE)
simulacionCMTC(generadora2,5,100,TRUE)

# Simulacion para la calificacion CCC/C a largo plazo

simulacionCMTC(generadora2,6,50,TRUE)
simulacionCMTC(generadora2,6,100,TRUE)


# DISTRIBUCION ESTACIONARIA

tasas1 <- -diag(generadora2)
n <- nrow(generadora2) - 1
Q <- diag(1/tasas1) %*% generadora2 + diag(1, n+1)
sumarRenglon(Q[1,])
library(matrixcalc)
matrizLimite <- matrix.power(Q,1000)
distribucionEstacionaria <- matrizLimite[1,]


# Simulacion VaR

# Simulacion de escenarios 1 y 2

simularEmpresas <- function(numEmpresas, Generadora){
  n <- nrow(Generadora) - 1
  tasas <- -diag(Generadora)
  Q <- diag(1/tasas) %*% Generadora + diag(1, n+1)
```

```
  defEmpresa <- c(0)
  for(i in 1:numEmpresas){
    edoIni <- sample(0:n, 1, prob = distribucionEstacionaria)
    edoFin <- sample(0:n, 1, prob = Q[edoIni+1,])
    if(edoFin == 7)
      defEmpresa[i] = 0
    else
      defEmpresa[i] = 1
  }
  return(defEmpresa)
}

# Simulacion de escenario 3

simularEmpresasMejores <- function(numEmpresas, Generadora){
  n <- nrow(Generadora) - 1
  tasas <- -diag(Generadora)
  Q <- diag(1/tasas) %*% Generadora + diag(1, n+1)
  defEmpresa <- c(0)
  for(i in 1:numEmpresas){
    edoIni <- sample(0:2, 1)
    edoFin <- sample(0:n, 1, prob = Q[edoIni+1,])
    if(edoFin == 7)
      defEmpresa[i] = 0
    else
      defEmpresa[i] = 1
  }
  return(defEmpresa)
}

# Simulacion de escenario 4

simularEmpresasMas <- function(numEmpresas, Generadora){
  n <- nrow(Generadora) - 1
  tasas <- -diag(Generadora)
  Q <- diag(1/tasas) %*% Generadora + diag(1, n+1)
  defEmpresa <- c(0)
  for(i in 1:numEmpresas){
    edoIni <- sample(3:5, 1)
    edoFin <- sample(0:n, 1, prob = Q[edoIni+1,])
    if(edoFin == 7)
      defEmpresa[i] = 0
    else
      defEmpresa[i] = 1
  }
  return(defEmpresa)
}
```

```r
# Simulacion de escenario 5

simularEmpresas3 <- function(numEmpresas, Generadora){
  n <- nrow(Generadora) - 1
  tasas <- -diag(Generadora)
  Q <- diag(1/tasas) %*% Generadora + diag(1, n+1)
  defEmpresa <- c(0)
  for(i in 1:numEmpresas){
    edoIni <- sample(1:3, 1)
    edoFin <- sample(0:n, 1, prob = Q[edoIni+1,])
    if(edoFin == 7)
      defEmpresa[i] = 0
    else
      defEmpresa[i] = 1
  }
  return(defEmpresa)
}

# Simulacion de escenario 6

simularEmpresas4 <- function(numEmpresas, Generadora){
  n <- nrow(Generadora) - 1
  tasas <- -diag(Generadora)
  Q <- diag(1/tasas) %*% Generadora + diag(1, n+1)
  defEmpresa <- c(0)
  for(i in 1:numEmpresas){
    edoIni <- sample(2:4, 1)
    edoFin <- sample(0:n, 1, prob = Q[edoIni+1,])
    if(edoFin == 7)
      defEmpresa[i] = 0
    else
      defEmpresa[i] = 1
  }
  return(defEmpresa)
}


# ALFAS Y BETAS

# Proporcion de empresas que pagan

alphaEst <- function(matriz){
  simulaciones <- length(matriz)
  noDefault <- sum(matriz)
  alpha <- noDefault / simulaciones
  return(alpha)
```

```
}

# Proporcion de empresas que incumplen

betaEst <- function(matriz){
  alpha <- alphaEst(matriz)
  beta <- 1 - alpha
  return(beta)
}

vectorBetas <- function(matriz){
  vectorBeta <- c(0)
  for(i in 1:length(matriz))
    vectorBeta[i] = 1 - matriz[i]
  return(vectorBeta)
}

# Matriz de alfa + beta

# Alfas de los escenarios 1 y 2

proporcionRendimiento <- function(empresas, simulaciones,
probabilidad){
  vectorAlphas <- c(0)
  for(i in 1:simulaciones){
    simulTransi <- simularEmpresas(empresas, probabilidad)
    vectorAlphas[i] = alphaEst(simulTransi)
  }
  return(vectorAlphas)
}

# Alfas del escenario 3

proporcionRendimientoMejores <- function(empresas, simulaciones,
probabilidad){
  vectorAlphas <- c(0)
  for(i in 1:simulaciones){
    simulTransi <- simularEmpresasMejores(empresas, probabilidad)
    vectorAlphas[i] = alphaEst(simulTransi)
  }
  return(vectorAlphas)
}

# Alfas del escenario 4

proporcionRendimientoFrecuentes <- function(empresas, simulaciones,
probabilidad){
```

```
  vectorAlphas <- c(0)
  for(i in 1:simulaciones){
    simulTransi <- simularEmpresasMas(empresas, probabilidad)
    vectorAlphas[i] = alphaEst(simulTransi)
  }
  return(vectorAlphas)
}

# Alfas del escenario 5

proporcionRendimiento3 <- function(empresas, simulaciones,
probabilidad){
  vectorAlphas <- c(0)
  for(i in 1:simulaciones){
    simulTransi <- simularEmpresas3(empresas, probabilidad)
    vectorAlphas[i] = alphaEst(simulTransi)
  }
  return(vectorAlphas)
}

# Alfas del escenario 6

proporcionRendimiento4 <- function(empresas, simulaciones,
probabilidad){
  vectorAlphas <- c(0)
  for(i in 1:simulaciones){
    simulTransi <- simularEmpresas4(empresas, probabilidad)
    vectorAlphas[i] = alphaEst(simulTransi)
  }
  return(vectorAlphas)
}

# Empresas elegidas de manera uniforme

simulacionEmpresas1 <- proporcionRendimiento(10000,10000,generadora1)

# Empresas elegidas con la distribucion estacionaria

simulacionEmpresas2 <- proporcionRendimiento(10000,10000,
generadora2)

# Empresas elegidas de las mejores calificaciones de manera uniforme

simulacionEmpresas3 <- proporcionRendimientoMejores(10000,10000,
generadora2)

# Empresas elegidas de las que mas incumplieron de manera uniforme
```

```
simulacionEmpresas4 <- proporcionRendimientoFrecuentes(10000,10000,
generadora2)

# Empresas elegidas entre AA, A y BBB de manera uniforme

simulacionEmpresas5 <- proporcionRendimiento3(10000,10000,generadora2)

# Empresas elegidas entre A, BBB y BB de manera uniforme

simulacionEmpresas6 <- proporcionRendimiento4(10000,10000,generadora2)
simulacionEmpresas6

# Obtener betas para la simulacion 1

simulacionEmpresas1Betas <- vectorBetas(simulacionEmpresas1)
simulacionEmpresas1Betas

# Obtener betas para la simulacion 2

simulacionEmpresas2Betas <- vectorBetas(simulacionEmpresas2)
simulacionEmpresas2Betas

# Obtener betas para la simulacion 3

simulacionEmpresas3Betas <- vectorBetas(simulacionEmpresas3)
simulacionEmpresas3Betas

# Obtener betas para la simulacion 4

simulacionEmpresas4Betas <- vectorBetas(simulacionEmpresas4)
simulacionEmpresas4Betas

# Obtener betas para la simulacion 5

simulacionEmpresas5Betas <- vectorBetas(simulacionEmpresas5)
simulacionEmpresas5Betas

# Obtener betas para la simulacion 6

simulacionEmpresas6Betas <- vectorBetas(simulacionEmpresas6)
simulacionEmpresas6Betas


# Obtencion del VaR

# tasa de rendimiento de EUA en 2017 de acuerdo a los Treasury Bonds
```

```
tasaInteres <- 0.0241

# tasa de recuperacion de Moodys
tasaRecuperacion <- 0.3696

# Obtener la curva de pago de los escenarios

generarCurvas <- function(matrizA, matrizB, tasaRec, tasaInt){
  curvaGenerada <- c(0)
  if(length(matrizA) == length(matrizB))
    for(i in 1: length(matrizA)){
      curvaGenerada[i] = -1*((matrizA[i]*(1+tasaInt))+
      (matrizB[i]*(tasaRec))-1)}
  return(curvaGenerada)
}

# Histograma de las ganancias de la simulacion 1

histogramaSimul1 <- hist(curvaPagos1, main = "", breaks = 50,
                         xlab = expression(paste("-(",alpha, "*(1+i)+",
                                                 beta,
                                                 "*(", delta,")-1)")),
                         ylab = "Densidad", prob = TRUE)

#VaR al 99.5%
varPagos1 <- quantile(curvaPagos1,0.995)
abline(v = varPagos1, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
n1 = length(curvaPagos1[curvaPagos1 >= varPagos1])
#Expected Shortfall al 99.5%
expcShort1 = sum(curvaPagos1[curvaPagos1 >= varPagos1])/n1
abline(v = expcShort1, col = "blue", lty = 3, lwd = 2)
densidadSimul1 <- density(curvaPagos1)
lines(densidadSimul1, lwd = 2, col = "red")
#VaR al 99%
varPagos1_99 <- quantile(curvaPagos1,0.99)
n1_99 = length(curvaPagos1[curvaPagos1 >= varPagos1_99])
#Expected Shortfall al 99%
expcShort1_99 = sum(curvaPagos1[curvaPagos1 >= varPagos1_99])/n1_99


# Histograma de las ganancias de la simulacion 2

histogramaSimul2 <- hist(curvaPagos2, main = "", breaks = 40,
                         xlab = expression(paste("-(",alpha, "*(1+i)+",
                                                 beta,
                                                 "*(", delta,")-1)")),
                         ylab = "Densidad", prob = TRUE)
```

```
varPagos2 <- quantile(curvaPagos2,0.995)
abline(v = varPagos2, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
n2 = length(curvaPagos2[curvaPagos2 >= varPagos2])
expcShort2 = sum(curvaPagos2[curvaPagos2>= varPagos2])/n2
abline(v = expcShort2, col = "blue", lty = 3, lwd = 2)
densidadSimul2 <- density(curvaPagos2)
lines(densidadSimul2, lwd = 2, col = "red")
varPagos2_99 <- quantile(curvaPagos2,0.99)
n2_99 = length(curvaPagos2[curvaPagos2 >= varPagos2_99])
expcShort2_99 = sum(curvaPagos2[curvaPagos2 >= varPagos2_99])/n2_99

# Histograma de las ganancias de la simulacion 3

histogramaSimul3 <- hist(curvaPagos3, main = "", breaks = 10,
                         xlab = expression(paste("-(",alpha, "*(1+i)+",
                          beta,
                          "*(", delta,")-1)")),
                         ylab = "Densidad", prob = TRUE)
varPagos3 <- quantile(curvaPagos3,0.995)
abline(v = varPagos3, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
n3 = length(curvaPagos3[curvaPagos3 >= varPagos3])
expcShort3 = sum(curvaPagos3[curvaPagos3 >= varPagos3])/n3
abline(v = expcShort3, col = "blue", lty = 3, lwd = 2)
densidadSimul3 <- density(curvaPagos2)
lines(densidadSimul3, lwd = 2, col = "red")
varPagos3_99 <- quantile(curvaPagos3,0.99)
n3_99 = length(curvaPagos2[curvaPagos3 >= varPagos3_99])
expcShort3_99 = sum(curvaPagos3[curvaPagos3 >= varPagos3_99])/n3_99

# Histograma de las ganancias de la simulacion 4

histogramaSimul4 <- hist(curvaPagos4, main = "", breaks = 30,
                         xlab = expression(paste("-(", alpha,
                         "*(1+i)+",
                                                 beta,
                                                 "*(", delta,")-1)")),
                         ylab = "Densidad", prob = TRUE)
varPagos4 <- quantile(curvaPagos4,0.995)
abline(v = varPagos4, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
n4 = length(curvaPagos4[curvaPagos4 >= varPagos4])
expcShort4 = sum(curvaPagos4[curvaPagos4 >= varPagos4])/n4
abline(v = expcShort4, col = "blue", lty = 3, lwd = 2)
densidadSimul4 <- density(curvaPagos2)
lines(densidadSimul4, lwd = 2, col = "red")
varPagos4_99 <- quantile(curvaPagos4,0.99)
n4_99 = length(curvaPagos4[curvaPagos4 >= varPagos4_99])
expcShort4_99 = sum(curvaPagos4[curvaPagos4 >= varPagos4_99])/n4_99
```

```
# Histograma de las ganancias de la simulacion 5

histogramaSimul5 <- hist(curvaPagos5, main = "", breaks = 10,
                         xlab = expression(paste("-(", alpha, "*(1+i)+",
                                                 beta,
                                                 "*(", delta,")-1)")),
                         ylab = "Densidad", prob = TRUE)
varPagos5 <- quantile(curvaPagos5,0.995)
abline(v = varPagos5, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
n5 = length(curvaPagos5[curvaPagos5 >= varPagos5])
expcShort5 = sum(curvaPagos5[curvaPagos5 >= varPagos5])/n5
abline(v = expcShort5, col = "blue", lty = 3, lwd = 2)
densidadSimul5 <- density(curvaPagos2)
lines(densidadSimul5, lwd = 2, col = "red")
varPagos5_99 <- quantile(curvaPagos5,0.99)
n5_99 = length(curvaPagos5[curvaPagos5 >= varPagos5_99])
expcShort5_99 = sum(curvaPagos5[curvaPagos5 >= varPagos5_99])/n5_99

# Histograma de las ganancias de la simulacion 6

histogramaSimul6 <- hist(curvaPagos6, main = "", breaks = 20,
                         xlab = expression(paste("-(", alpha, "*(1+i)+",
                                                 beta,
                                                 "*(", delta,")-1)")),
                         ylab = "Densidad", prob = TRUE)
varPagos6 <- quantile(curvaPagos6,0.995)
abline(v = varPagos6, col = "red", lty = 2, lwd = 2)
n6 = length(curvaPagos6[curvaPagos6 >= varPagos6])
expcShort6 = sum(curvaPagos6[curvaPagos6 >= varPagos6])/n6
abline(v = expcShort6, col = "blue", lty = 3, lwd = 2)
densidadSimul4 <- density(curvaPagos2)
lines(densidadSimul4, lwd = 2, col = "red")
varPagos6_99 <- quantile(curvaPagos6,0.99)
n6_99 = length(curvaPagos6[curvaPagos6 >= varPagos6_99])
expcShort6_99 = sum(curvaPagos6[curvaPagos6 >= varPagos6_99])/n6_99
```

Bibliografía

[1] Jarrow, Robert A.; Lando, David; Turnbull, Stuart M., 1997, *A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads*, *The Review of Financial Studies*, Vol. 10, No. 2, pp. 481-523.

[2] Resnick, Sidney, 1992, *Adventures in Stochastic Processes*, Brikhauser, Boston.

[3] Anderson, W. J., 1991, *Continuous-Time Markov Chains*, Springer, Nueva York.

[4] Norris, J. R., 1997, *Markov Chains*, primera edición, Cambridge University Press, Estados Unidos.

[5] Harrison, J. M.; Pliska, Stanley, 1981, *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*, *Stochastic Processes and Their Applications*, Vol. 11, pp. 215-260.

[6] Jarrow, Robert A.; Turnbull, Stuart M., 1995, *Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk*, *Journal of Finance*, Vol. 50, pp. 53-86.

[7] Merton, Robert C., 1974, *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*, *Journal of Finance*, Vol. 2, pp. 449-470.

[8] Rincón, Luis, 2012, *Introducción a los Procesos Estocásticos*, primera edición, Las Prensas de Ciencias, México, D.F.

[9] Rincón, Luis, 2012, *Introducción a la Teoría del Riesgo*, primera edición, Las Prensas de Ciencias, México, D.F.

[10] Standard & Poors, 2017, *Default, Transition, and Recovery: 2017 Annual Global Corporate Default Study and Ratings Transitions.*

[11] Bielecki, Tomasz R.; Crépey, Stéphane; Herbertsson Alexander, Noviembre 2009, *Markov Chain Models of Portfolio Credit Risk.*

[12] Amin, Kaushik I.; Morton, Andrew J., 1994, *Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure models*, *Journal of Financial Economics*, Vol. 35, pp. 141-180.

[13] MOODY'S, *Rating Symbols and Definitions*, $https://www.moodys.com/ratings-process/Ratings-Definitions/002002$.

[14] STANDARD & POORS, *S& P Global Rating Definitions*, $https://www.standardandpoors.com/en\_US/web/guest/article/-/view/sourceId/504352$.

[15] FITCH RATINGS, *Rating Definitions*, $https://www.fitchratings.com/site/definitions$.

[16] BANCO DE MÉXICO, Noviembre 2005, *Definiciones Básicas de Riesgos*.

[17] MOODY'S INVESTOR SERVICE, 2018, *Annual Default Study: Corporate Default and Recovery Rates, 1920-2017*.

[18] D'AURIA, BERNARDO, 2012, *Notes, Stochastic Processes, 2011/12*, $http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/bdauria/1617/Stoc\_Proc\_PhD/Notes/2012-03-20Tu\_Notes.pdf$.

[19] STATISTA, 2019, *Yield on 10-year Treasury bond in the United States from 1987 to 2018.*, $https://www.statista.com/statistics/698047/yield-on-10y-us-treasury-bond/$.

[20] TAKAHARA, GLEN, 2016, *Lecture Notes 5*, $https://mast.queensu.ca/\ stat455/lecturenotes/set5.pdf$.