UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Axioma de Martin: Una introducción a la técnica de extensiones genéricas.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Andrea Quintanilla Carranza

TUTOR

Dr. Fidel Casarrubias Segura

Ciudad Universitaria, CD. MX., Agosto 2019

1. Datos del alumno
Quintanilla
Carranza
Andrea
75 79 86 54
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
310203290

2. Datos del tutor
Dr.
Fidel
Casarrubias
Segura

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Fernando
Hernández
Hernández

4. Datos del sinodal 2
Dr.
David
Meza
Alcántara

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Fidel
Casarrubias
Segura

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Reynaldo
Rojas
Hernández

7. Datos del sinodal 5
Dr.
Carlos Gerardo
Paniagua
Ramírez

8. Datos del trabajo escrito.
Axioma de Martin: Una introducción a la técnica de extensiones genéricas
126 p.
2019

De aquestas cosas que sin arte expreso,
que admira el verlas y deleitan tanto,
de que puedo hacer largo proceso,
cuando las considero, bien me espanto,
porque tienen consigo una extrañeza
que a alcanzar lo que son no me levanto.

JUAN DE LA CUEVA, *"Epístola al licenciado Sánchez de Obregón, primer corregidor de México."*

Agradecimientos

Les agradezco profundamente a mis papás, las personas que más han contribuido a cada aspecto de mi vida, en particular, a este trabajo y lo que representa. Sin duda, esta parte ha sido de las partes más difíciles de escribir porque viven tan dentro de mí, que sólo el asomarme a ver todo lo que soy gracias a ustedes, me desborda. Mamá, tu interés íntimo por las personas, el cuidado que dedicas a los que quieres, tu energía inagotable, tu guía sólida cada que dudo, tu valentía y fuerza para sostener lo que crees, son sólo algunas de todas las cualidades con las que me has formado desde que era nada y que me han permitido cruzar y embellecer mi vida. Papá, tu amor sin medida por nosotras, tu devoción por un sin fin de materias, la claridad, la alegría y la libertad con la que navegas la vida gracias a tu razón y a tu mirada profunda, así como tu cuidado en alimentar las mías, cada día me acercan a la vida y me llenan de aliento.

A mi hermana, por alegrar mis días. Por aceptar con gracia ser mi compañera de vida. Por todo lo que inyectas a nuestra familia, tu armonía, tu jovialidad, dulzura, empatía y tantas otras cosas que nos das a diario.

A mi tutor, Fidel Casarrubias. A quien más le debo mi formación como matemática. Su visión amplia, su claridad estricta, su pasión y su interés auténtico en transmitir a sus alumnos tanto su panorama, como razonamientos, técnicas y formas creativas, han cambiado por completo mi manera de concibir la matemática, de entenderla y quererla. Le agradezco por todas las horas que dedicó a este trabajo, por darme oportunidad de enseñar lo que más me gusta, por tantas de clases y por las pláticas amenas. Por ayudarme a cultivar rectitud, sinceridad y seguridad en mi carácter con su ejemplo.

A mis sinodales: el Dr. Fernando Hernández Hernández, el Dr. David Meza Alcántara, el Dr. Carlos Gerardo Paniagua Ramírez y el Dr. Reynaldo Rojas Hernández, pues gracias a su revisión cuidadosa este trabajo mejoró significativamente.

A tantas personas con las que compartí ideas y sentimientos, gracias a la bellísima Facultad de Ciencias. En especial, a Héctor, por ayudarme a superar los primeros semestres, por hacer alquimia y transformar lo arduo en bello, por su fé en mí. A Mario, porque atravesamos de principio a fin esta etapa, porque la hiciste llevadera cuando era difícil y porque sabes explotar en gozo en los demás momentos, por perdonarme tantas burradas y por ser tan guapo. A Nákid, por ser tan chido, tranquilo y tropical, por tantos buenos momentos compartidos, tu buen humor, tantas chelas, y tus ideas -estas últimas tres cosas me inspiran mucho-, sin tus enseñanzas quizás ya estaría desperdiciando mi juventud en el terrible mundo del doctorado (claro que no), y por explicarme varias sutilezas lógicas que no venían en los libros, permitiéndome avanzar en este trabajo. A Diego por tu amistad incondicional, por tus perspectivas sinceras y por compartir conmigo matemáticas, pulque, películas y música. A Itzel por tu dulce presencia, por recibirme de esa manera afable y abierta desde un principio.

A Lucía -mi querida Analu-, que retornó a mis días, por tu entereza, picardía, visión, por tu apoyo que me empodera y por tu dulce, completa y antigua amistad. A León, porque aunque llegaste al final de esta carrera, estar cerca de ti hizo que incluso el limbo de los papeleos se confundiera con días en el paraíso.

Introducción

La preocupación por legitimar los razonamientos matemáticos a través de la deducción sistemática y la transparencia de los axiomas data, al menos, de tiempos tan antiguos como los de Eudoxio y Euclides. En sus tiempos, lo que le daba sustento a la geometría euclidiana era el método axiomático aunado a que los objetos del pensamiento eran una representación de objetos externos con los que se encuentra el intelecto en la cotidianidad.

Sin embargo, durante la explosión del cálculo diferencial e integral en los siglos XVII y XVIII, mucho del desarrollo matemático permaneció ajeno a la formalización de sus herramientas, citando a Courant en [CR41]: «en una verdadera orgía de conjeturas intuitivas, de razonamientos matemáticos convincentes entrelazados con un misticismo sin sentido, conquistaron un mundo matemático de inmensas riquezas». Las matemáticas de los siglos XVII al XIX se distinguieron de las matemáticas anteriores por su progresiva separación de entes cotidianos[1]. En ellas, la legitimidad de los objetos que se estudiaban nacía, ya no de su familiaridad, sino a partir de las riquezas que aportaban y de que su definición los distinguiera claramente de otros objetos del pensamiento. Como ejemplo están la Teoría de Grupos, los espacios vectoriales y el hallazgo de *otras* geometrías.

Este desprendimiento entre la matemática y la *realidad*, despertó diversos puntos de discusión, por ejemplo: las ideas sobre el infinito y los infinitesimales, vitales para el análisis matemático, fueron cuestionadas durante siglos pero el éxito de sus aplicaciones desvanecieron las dudas; el desarrollo de otra geometría, que *se dio por equivocación* buscando una contradicción que nunca llegaría; la definición intuitiva de lo que debería ser un conjunto, propuesta por Cantor, dio pie a la famosa paradoja de Russel.

Para el siglo XX un deseo de consolidación y de revisión de los métodos se había abierto paso, como se refleja en las palabras de Hilbert pronunciadas en una conferencia de 1917 sobre el pensamiento axiomático: [Hil10] «*se requiere* de un estudio a fondo del concepto de demostración matemática, de manera análoga a como un astrónomo está obligado a considerar el movimiento de su punto de referencia, el

[1] Para una breve introducción a dicha etapa recomendamos [Bab67]

físico a preocuparse por la teoría de sus instrumentos y el filósofo a hacer una crítica de la razón».

Entonces, para evitar renunciar a conceptos ubérrimos pero sin cercanía a lo cotidiano y para deshacerse de paradojas, emergen varios estudios sobre la fundamentación de la matemática; se adoptó un lenguaje artificial con el cual tratar conceptos sin ambigüedad y que, al mismo tiempo, tuviera la capacidad expresiva para representar a la teoría matemática. Así, la matemática se traduce en un ente concreto -cadenas finitas de símbolos-, podemos dar un paso atrás y adaptar los procedimientos de la lógica para su estudio. Con el desarrollo de una metamatemática se pueden ofrecer pruebas «fiables»-que descansan tan sólo en configuraciones de signos expuestos y en aritmética elemental- sobre nuestras nociones de verdad, demostración, completud, sistemas axiomáticos, etc.

Una de las conclusiones más sorprendentes de dichos estudios sobre fundamentación, fueron los conocidos *Teoremas de Incompletud* de Gödel. Con ellos se evidenció que jamás habríamos de encontrar un sistema axiomático *útil* del cual se puedan deducir todas las cuestiones que interesen a la comunidad matemática y que sea consistente a la vez, es decir, siempre habrán proposiciones independientes[2] de cualquier sistema axiomático de interés. Aún así, por varias razones se siguen adoptando sistemas axiomáticos; el históricamente más aceptado es el sistema ZFE[3]. No se tardó en demostrar la independencia de ZF[4] de proposiciones polémicas, como por ejemplo, la independencia del Axioma de Elección[5] y la Hipótesis del Continuo. Kurt Gödel mostró que éstas dos últimas proposiciones no se pueden refutar a partir de ZF y Paul Cohen mostró que tampoco es posible probarlas desde ZF.

De las pruebas de consistencia que Cohen realizó en 1963, se extrajó la *técnica de forcing* o *técnica de extensiones genéricas*; ésta ha sido retomada y refinada para mostrar una vasta cantidad de resultados sobre consistencia relativa. Considerando su importancia, este trabajo aspira a tratar de entender y exponer cómo es que funciona dicha técnica y por qué ha sido posible readaptarla en tantas ocasiones.

Como menciona Kenneth Kunen en [Kun80], existen dos nodos, más o menos independientes entre sí, que se deben de estudiar para aplicar y entender la técnica

[2]A saber, que no se puedan probar o refutar a partir de dicho sistema.

[3]O ZFC, por sus siglas en inglés.

[4]Donde ZF es ZFE sin el Axioma de Elección.

[5] El Axioma de Elección que, aunque desde la intuición de la combinatoria es perfectamente plausible -la posibilidad de tomar al menos un elemento de cada conjunto de una familia infinita que no tiene al vacío como elemento-, iba en contra de la tendencia de definibilidad, que abundaba en su época. La definibilidad, en este caso, hubiese exigido que, con base en tal familia infinita, se explicitara la regla de asociación que distinguía a dicho conjunto selectivo. Permanecer apegados estrictamente a la *definibilidad*, nos hubiese obligado a renunciar a -reescribiendo a Hilbert- el paraíso de los distintos infinitos, y a todos los otros conceptos sin referentes en nuestra realidad (cotidiana), y que, sin embargo, nos sirven para pensarla.

de extensiones genéricas. Para utilizarla se deben proponer filtros genéricos -objeto central de la técnica de extensiones genéricas- convenientes para el problema en cuestión; mientras que para entender la innovadora propuesta de Cohen, además de estar familiarizados con filtros, habrá que estudiar varias cuestiones metamatemáticas.

Un camino usual que se toma para lograr nuestro cometido, y que se seguirá en este escrito, es primero estudiar al Axioma de Martin puesto que ayuda familiarizarse con los llamados filtros genéricos y sus riquezas, sin necesidad de trabajar con asuntos metamatemáticos. Y después estudiar propiamente la técnica de *forcing*.

Así, en los capítulos 1, 2 y 3, el Axioma de Martin nos brindará una introducción natural a la teoría de extensiones genéricas. Después, en los capítulos 4 y 5, nos enfocaremos en la técnica de extensiones genéricas.

Más a detalle, nuestro trabajo se desarrollará de la siguiente manera:

En el primer capítulo se definirán los conceptos necesarios para la enunciación del Axioma de Martin acompañados por algunos ejemplos. Además, se harán breves anotaciones sobre la naturaleza de dicho axioma, su historia, limitaciones y modificaciones comunes.

En el capítulo 2 se muestran aplicaciones a Teoría de Conjuntos, categoría de Baire y Teoría de la Medida. Específicamente, se presentarán consecuencias en la caracterización de los siguientes cardinales: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}$, $\mathrm{Cov}(\mu)$ y $\mathrm{Add}(\mu)$.

En el tercer capítulo, que dedicamos a Topología, se concentran la mayor cantidad de aplicaciones. Entre los temas que se tratan están la productividad de la propiedad de Suslin y la versión topológica del Axioma de Martin. También se muestra la inexistencia de S-espacios fuertes, de L-espacios fuertes y de espacios de Luzin. Además, se presentan diferentes condiciones para que un espacio topológico sea: perfectamente normal, hereditariamente Lindelöf, hereditariamente separable o bien, compacto.

Después, en el capítulo 4, se da una breve introducción a Teoría de Modelos y se estudian los llamados *modelos base* de los que parte la técnica de extensiones genéricas. Finalmente, en el capítulo 5 se definen las extensiones genéricas, se estudian algunas de sus propiedades generales. Asimismo, se da una justificación de que dicha técnica efectivamente ofrece pruebas sobre consistencia y se concluye dando un ejemplo clásico[6], a saber, se muestra que la consistencia de ZFE implica la consistencia de ZFE+¬HC.

Andrea Quintanilla Carranza
Diciembre, 2018

[6]Clásico, pues es el fin para el que Cohen creó la técnica de *forcing*.

ÍNDICE GENERAL

1 Preliminares del Axioma de Martin

En 1971, R.M. Solovay y S. Tennenbaum para probar la consistencia de la Hipótesis de Suslin con ZFE, crearon el modelo que buscaban a través de construcciones sucesivas de extensiones genéricas. A la técnica que utilizaron se le conoce ahora como *forcing iterado* o *extensiones iteradas*. Más adelante Donald A. Martin y Robert M. Solovay notaron que tal procedimiento, en algunas ocasiones, se puede simplificar a la existencia de los llamados *filtros genéricos* en ordenes parciales siempre que tales ordenes cumplan algunas condiciones: nace el Axioma de Martin.
Una razón fuerte por la que el Axioma de Martin ha sido utilizado de manera profusa en distintas ramas es que, si decidimos introducir la negación de la Hipótesis del Continuo ($\neg$HC), puede ser difícil decir algo sobre el comportamiento de los ordinales entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$, pero al combinarla con el AM, como veremos en las aplicaciones de los capítulos 2 y 3, resulta una herramienta poderosa para describirlos.
En este capítulo presentamos los conceptos esenciales para el manejo de dicho axioma.

Definición 1.1. i) Un *orden parcial* o un conjunto *preordenado*, es una pareja ordenada $(P, \leqslant)$, donde P es un conjunto y $\leqslant$, subconjunto de $P \times P$, es una relación reflexiva y transitiva. Por lo general, si $p, q \in P$ y $(p, q) \in \leqslant$, diremos que p *extiende* a q y lo denotaremos como $p \leqslant q$.

ii) Diremos que un subconjunto D de $(P, \leqslant)$ es *denso* en $(P, \leqslant)$, si para todo elemento $p \in P$, existe $d \in D$ que extiende a p.

iii) Un subconjunto $F \subseteq P$ será un *filtro* en $(P, \leqslant)$, si para todo par $p, q \in F$ existe $r \in F$ que extiende tanto a p como a q, y para todo elemento $p \in F$, si $q \in P$ y $p \leqslant q$ entonces $q \in F$.

iv) Si D es una familia de densos en P, diremos que $G \subseteq P$ es un filtro D-*genérico* si G es un filtro cuya intersección con cualquier elemento de D no es vacía.

A los elementos de los preordenes se les suele llamar *condiciones*, pues -como estudiaremos en los capítulos dedicados a extensiones genéricas- utilizando filtros especiales podremos crear modelos que confirmen la consistencia de algunas proposiciones con ZFE, estos modelos tendrán la ventaja de que será suficiente con que ciertos elementos del preorden estén en aquellos filtros, es decir, se den ciertas «condiciones», para asegurar que el conjunto, en efecto, modele a la proposición deseada.

El Axioma de Martin nos asegurará la existencia de filtros D-genéricos siempre que $|D| < \mathfrak{c}$ y que el preorden posea la llamada *condición de anticadena contable*:

Definición 1.2. Sea $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$ un preorden.

i) Diremos que dos elementos $p, q \in P$ son *compatibles* en $\mathbb{P}$, si existe $r \in P$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$, a esto lo denotaremos con $p||q$. Si p y q no son compatibles en $\mathbb{P}$, les llamaremos *incompatibles* y lo abreviaremos con $p \perp q$.

ii) $A \subseteq P$ será una *anticadena* de $\mathbb{P}$ si todos sus elementos son incompatibles entre sí. Por otro lado, si sucede que todos sus elementos son compatibles entre sí, diremos que A es un conjunto *enlazado*.

iii) Diremos que $\mathbb{P}$, satisface la *condición de anticadena contable* (*cac*) si y sólo si toda anticadena de él es a lo más numerable.

El nombre de compatibilidad es muy atinado pues lo que buscaremos en general, es dar una definición del orden tal que si algún elemento del preorden cumple con una propiedad P_1, otro cumple con una propiedad P_2, y estos tienen una extensión común r, entonces r guarde las dos propiedades, es decir, que P_1 y P_2 convivan o sean «compatibles». Aún cuando no hemos enunciado al Axioma de Martin, podemos comenzar a advertir su fuerza, pues si logramos codificar las propiedades que nos interesan en una familia de densos D, este axioma se asegurará de hacer compatibles *muchas más* que dos propiedades a través de los filtros D-genéricos.

Ahora veremos algunos preordenes que satisface la cac; antes mostraremos un lema al que recurriremos en varias ocasiones.

Definición 1.3 (Δ-sistema)**.** Una familia de conjuntos A, será un Δ-$\mathit{sistema}$, si existe un conjunto r -al que llamaremos $\mathit{raíz}$ de A-, si para cualesquiera $a,b \in A$ sucede que $a \cap b = r$.

Lema 1.4 (Lema de Sanin o Δ-lema)**.** *Si* A *es una familia no numerable de conjuntos finitos, entonces existe* $B \subseteq A$ *un* Δ*-sistema no numerable.*

Demostración. Sea A una familia como la de la hipótesis. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que su cardinalidad es $\aleph_1$. Para cada $n \in \omega$, definimos a $A_n = \{c \in A : |c| = n\}$. Entonces, como $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, por la regularidad de $\aleph_1$, existe $m \in \omega \setminus \{0\}$ con A_m no numerable. Asimismo, es posible suponer que $A_m \subseteq [\omega_1]^m$ y redefinir $A = A_m$. Para probar que A contiene a un Δ- sistema, procederemos por inducción sobre m:

Si $m = 1$, A sería una familia de conjuntos de un sólo elemento, entonces todos ellos son ajenos entre sí, y por lo tanto A es un Δ-sistema.

Supongamos que para algún $m \in \omega$, y para todo $n < m$, la afirmación es verdadera.
$Caso$ I. Existe $\alpha \in \omega_1$ y $D \subseteq A$, tales que D es no numerable y $\alpha \in \bigcap D$. Por hipótesis de inducción, el conjunto $D' = \{c \setminus \{\alpha\} : c \in D\}$ posee un Δ-sistema B con una raíz J. Luego, el conjunto $\{c \cup \{\alpha\} : c \in B\}$ es un Δ-sistema no numerable contenido en A con raíz $J \cup \alpha$.

$Caso$ II. Para todo $\alpha \in \omega_1$ y para todo $D \subseteq A$ tal que $\alpha \in \bigcap D$, se tiene que D es a lo más numerable. Construiremos por recursión sobre ω_1 a una familia de elementos ajenos por pares contenida en A: fijemos un elemento $C_0 \in A$. Supongamos que $\beta < \omega_1$ y que hemos construido $\{C_\alpha : \alpha < \beta\}$ tal que para cada $\alpha < \gamma < \beta$, se tiene que $C_\alpha \cap C_\gamma = \emptyset$. Como $C = \bigcup\{C_\alpha : \alpha < \beta\}$ es numerable, existe $\delta < \omega_1$ tal que $C \subseteq \delta$. Observe que debe existir $C' \in A$ con la característica de que $C' \cap \delta = \emptyset$; de lo contrario, dado que δ es numerable, existirían $D \subseteq A$ no numerable y $\alpha \in \delta$ tal que $\alpha \in \bigcap D$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Haciendo $C_\beta = C'$, concluimos que es posible construir una familia no numerable y ajena por pares, es decir, un Δ-sistema con la raíz igual al vacío.

□

Ejemplos 1.4.1. Los siguientes son ejemplos de conjuntos preordeados que satisfacen la cac:

I $(P, \leqslant)$ un preorden con $|P| \leqslant \omega$.

II $(\omega, \leqslant)$, donde $\leqslant$ es el orden usual en los ordinales restringido a ω.

III Si (X, τ) es un espacio topológico con la propiedad de Suslin, es decir, si toda familia celular[1] es a lo más numerable entonces el preorden $(\tau^*, \subseteq)$, donde

[1] $C \subseteq \mathcal{P}(\tau)$ es una familia celular si todos sus elementos son abiertos distintos del vacío y es ajena por pares.

$\tau^* = \tau \setminus \{\emptyset\}$ satisface la cac.

IV Si I, J son conjuntos, denotaremos por $\mathrm{Fn}(I,J) = \{p : A \longrightarrow B : p$ es una función, $A \in [I]^{<\omega}$ y $B \in [J]^{<\omega}\}$. Ocuparemos frecuentemente a preordenes de la forma $(\mathrm{Fn}(I,J), \leqslant)$ con $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$, para $p, q \in P = \mathrm{Fn}(I,J)$. Resulta que si J es numerable, entonces P satisface la cac.

V Diremos que $(P, \leqslant)$ es σ-$\mathit{centrado}$ (σ-$\mathit{enlazado}$) si es unión numerable de conjuntos centrados (enlazados; ver definición en 1.2), donde $C \subseteq P$ es *centrado* si todo conjunto $F \subseteq C$ no vacío y finito, tiene una cota inferior en $(P, \leqslant)$. Resulta que todos los conjuntos σ-centrados (σ-enlazados) también satisfacen la cac.

Demostración. Sólo mostraremos IV y V, pues las demás pruebas son bastante directas.
IV. Supongamos que $A \subseteq P = \mathrm{Fn}(I,J)$ no es numerable; considere al conjunto $D = \{\mathrm{dom}(p) : p \in A\}$. Si D es numerable existe $A' \subseteq A$ no numerable tal que para todo $p, q \in A'$, $\mathrm{dom}(p) = \mathrm{dom}(q) := r$. Y si D no es numerable, por el Δ-lema, existen $A' \subseteq A$ no numerable y $r \subseteq I$ tales que para cualesquiera $p, q \in A'$, sucede que $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) = r$. En cualquiera de los casos podemos elegir $r \subseteq I$ finito y $A' \subseteq A$ no numerable, tales que si $p, q \in A'$, entonces $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) = r$. Dado que r es finito y J es numerable, las funciones de r en J son numerables, de donde se sigue que existe $A'' \subseteq A'$ no numerable y tal que para todo $p, q \in A''$ se tiene que $\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) = r$ y $p|_r = q|_r$. Fijemos $p, q \in A''$ y note que $p \cup q \in P$ es una extensión de ambos; por ello, A no es una anticadena. En consecuencia, $(P, \leqslant)$ satisface la cac.
V. Observando que cualquier conjunto σ-centrado es σ-enlazado, bastará con demostrar que estos últimos satisfacen la cac. De nuevo supongamos que $A \subseteq P$ no es numerable y probemos que A no es una anticadena. Fijemos $B \subseteq \mathcal{P}(P)$ numerable, conformado por conjuntos centrados y tal que $P = \bigcup B$. Dadas las cardinalidades de A y de B, debe existir $b \in B$ tal que $b \cap A$ no sea numerable así que, en particular, podemos fijar $p, q \in b \cap A$ distintos entre sí. Como b es enlazado, existe $r \in P$ tal que $p \geqslant r \leqslant q$, y, por ello, A no es una anticadena.

□

Siguiendo la ruta de la demostración anterior, podemos probar que si todo subconjunto no numerable del preorden contiene un conjunto σ-enlazado y no numerable, entonces el preorden satisface la cac. Esa propiedad de preordenes mereció un nombre y se le conoce como *propiedad de Knaster* o *propiedad K*. A su vez, la propiedad K la podemos modificar naturalmente si cambiamos «σ-enlazado» por «σ-centrado»; en ese caso diremos que el preorden tiene *precalibre* $\aleph_1$. Ahora tenemos más ejemplos:

Ejemplos 1.4.2. I Todo preorden con la propiedad K satisface la cac.

II Todo preorden con precalibre $\aleph_1$ satisface la cac.

Estamos en posición de establecer el Axioma de Martin.

Definición 1.5. Sea κ un cardinal infinito, entonces AM(κ) es el siguiente enunciado: *Si* D *está compuesta por densos de un preorden* P *que satisface la cac, y* $|D| \leqslant \kappa$, *entonces existe* G *un filtro* D*-genérico contenido en* P.

AM(κ) con $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$, es consistente con ZFE, la prueba se hizo con *forcing* iterado y se puede consultar en [Ivo].

Definición 1.6. El *Axioma de Martin* (*AM*) es el enunciado siguiente: es verdadero AM(κ) para todo cardinal infinito κ con $\omega < \kappa < 2^{\aleph_0}$.

Las cotas de κ en el Axioma de Martin se postulan puesto que, como a continuación veremos, en ZFE, AM($\aleph_0$) es verdadero, mientras que AM(κ) con $\kappa \geqslant 2^{\aleph_0}$ es falso. El siguiente teorema es conocido como *lema de Rasiowa-Sikorski*.

Teorema 1.7. *AM($\aleph_0$) es verdadero.*

Demostración. Sea $(P, \leqslant)$ un preorden y $D = \{D_\alpha : \alpha \in \omega\}$ una familia de densos en P. Con recursión construiremos una base para un filtro G que sea D-genérico: fijemos $p_0 \in D_0$ y supongamos que para $n \in \omega$ hemos construido a $\{p_m : m \leqslant n\}$ que cumpla con lo siguiente: para todo $m \leqslant n$, $p_m \in D_m$ y para cualesquiera $m \leqslant l \leqslant n$, p_l extiende a p_m. Como D_{n+1} es denso en P, existe $p_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $p_{n+1} \leqslant p_n$. Postulando al conjunto $\{p_m : m \leqslant n+1\}$, concluimos el paso inductivo. Ahora podemos considerar a $B = \{p_n : n \in \omega\}$ una familia tal que si $n, m \in \omega$, entonces $p_n \in D_n$ y $n < m$, implica que $p_m \leqslant p_n$. Definamos a $G = \{p \in P : \exists q \in B(q \leqslant p)\}$; para mostrar que G es un filtro basta con mostrar que es enlazado: sean $p, q \in G$ y $m, n \in \omega$ tales que $p_n \leqslant p$ y $p_m \leqslant q$; así, si $l = \text{máx}\{n, m\}$, $p_l \in G$ y extiende a p y a q. Además, para cada $n \in \omega$, $p_n \in G \cap D_n$, así G es D-genérico. □

Teorema 1.8. *Si $\kappa \geqslant 2^{\aleph_0}$, AM($\kappa$) es falso.*

Demostración. Supongamos, hasta llegar a una contradicción, que $\kappa \geqslant 2^{\aleph_0}$ y que AM(κ) es verdadero. Considere al preorden $(F_n(\omega, \omega), \leqslant)$ donde $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$, para $p,q \in P = F_n(\omega, \omega)$. Por lo visto en el ejemplo 1.4.1, P satisface la cac.

A continuación propondremos una familia conformada por dos tipos de conjuntos densos; los primeros nos ayudarán a construir una función que tenga por dominio a ω y los segundos obligarán a que ésta sea distinta de todas las funciones con esa característica.

Para cada $\alpha \in \omega$ definamos a $D_\alpha = \{p \in P : \alpha \in \mathrm{dom}(p)\}$ y corroboremos su densidad en P: sea $p \in P$, si $\alpha \in \mathrm{dom}(p)$ habríamos concluido, de no ser así, podemos definir $q = \{(\alpha, 0)\} \cup p$, es claro que $q \in D_\alpha$ y que extiende a p. Por otro lado, para cada $h \in \omega^\omega$ definamos a $E_h = \{p \in P : \exists\alpha \in \mathrm{dom}(p)(p(\alpha) \neq h(\alpha))\}$. Sean $p \in P$ y $h \in \omega^\omega$, como $\mathrm{dom}(p)$ es finito, existe $\alpha \in \omega \setminus \mathrm{dom}(p)$, definamos $q = p \cup \{(\alpha, h(\alpha) + 1)\}$, entonces $q \in E_h$ es una extensión de p. Por lo tanto, cada E_h es denso en P.

Consideremos a la colección $D = \{D_\alpha : \alpha \in \omega\} \cup \{E_h : h \in \omega^\omega\}$. Por nuestra suposición y observando que $|D| = 2^{\aleph_0}$, existe G un filtro D-genérico. Primero observe que $f = \bigcup G$ es una función: suponga que $p, q \in G$ y $\alpha \in \omega$ son tales que $(\alpha, m) \in p$ y $(\alpha, n) \in p$, para algunos $m, n \in \omega$. Mostremos que $m = n$; sea $r \in G$ una extensión común de p y q, entonces (α, m) y (α, n) son elementos de r, y como r es una función, necesariamente $m = n$. Por lo tanto f también es una función. Ahora notemos que si $\alpha \in \omega$, como existe $p \in G \cap D_\alpha$, entonces $\alpha \in \mathrm{dom}(f)$, así $f \in \omega^\omega$. Sin embargo, si $h \in \omega^\omega$ es cualquier elemento, como podemos fijar $q \in E_h \cap G$, existen $\alpha \in \omega$ y $n \in \omega$ tal que $(\alpha, n) \in q$ y $n \neq h(\alpha)$, por lo tanto $f(\alpha) \neq h(\alpha)$ y por ello $f \neq h$, pero entonces $f \notin \omega^\omega$ y esto contradice nuestra conclusión anterior. $\square$

Aunque para probar AM($\aleph_0$) no fue necesario considerar que el orden satisfaciera la cac, sí lo es para asegurar la consistencia de AM con ZFE; enseguida estudiaremos un ejemplo que muestra esto. Este ejemplo retoma el método del teorema 1.8, lo que ocuparemos de éste último es su manera de construir funciones de un conjunto I en un conjunto J: siempre que tengamos un filtro F en $(\mathrm{Fn}(I, J), \leqslant)$, donde $p \leqslant q$ si sólo si $q \subseteq p$, dados $p, q \in \mathrm{Fn}(I, J)$, el conjunto $\bigcup F$ será una función. Utilizando el Axioma de Martin, podemos obligar que existan filtros que intersequen a ciertos conjuntos; los elementos en esas intersecciones los podemos pensar como aproximaciones finitas de la función que buscamos construir.

Ejemplo 1.8.1. Notemos primero que si queremos mostrar que la cac es necesaria, por los dos teoremas anteriores, debemos hacerlo con AM(κ) para $\omega < \kappa < \mathfrak{c}$, y por lo tanto, supondremos que la hipótesis del continuo es falsa.

Consideremos pues a $P = \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$, y observe que $A = \{\{(0, \alpha)\} : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena no numerable en P, pues si $p = \{(0, \alpha)\}, q = \{(0, \beta)\} \in A$ son distintos, entonces $(0, \alpha)$ y $(0, \beta)$ no pueden pertencer a ninguna función en D, así que p y q no tienen extensiones comunes en P. Para cada $\alpha \in \omega_1$ considere al conjunto $D_\alpha = \{p \in P : \alpha \in \mathrm{ran}(p)\}$; utilizando el método de 1.8 podemos asegurar que

D_α es denso en P. Sea $D = \{D_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, como $|D| < \mathfrak{c}$, si suponemos que podemos ignorar la hipótesis en AM(ω_1) de que P satisfaga la cac, existe G un filtro D-genérico, y por las observaciones anteriores $\bigcup G : B \longrightarrow \omega_1$ es una función, donde $B \subseteq \omega$. Además, como para cada $\alpha \in \omega_1$, existe $p \in G \cap D_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{ran}(p) \subseteq \mathrm{ran}(f)$, es decir, f es suprayectiva. Esto último contradice el que $\omega < \omega_1$ y, por lo tanto, la cac es necesaria en $AM(\kappa)$.

Tenemos entonces que bajo la HC, el lema de Rasiowa-Sikorski implica que AM es verdadero y que AM($\aleph_1$) implica que la HC es falsa. Así, las implicaciones interesantes del Axioma de Martin se darán sólo cuando supongamos la negación de la Hipótesis del Continuo; así lo haremos a través de este trabajo. La prueba de la consistencia de $AM + \neg HC$ con ZFE la ofrecieron Solovay y Tennenbaum en 1971, utilizando extensiones iteradas (para conocer una prueba de ello, puede consultar [Ivo]).

Se han propuesto varias modificaciones del Axioma de Martin; en general, si $\mathbb{P}$ es una propiedad sobre preordenes, $AM_{\mathbb{P}}$ será la proposición: *Si* $(P, \leqslant)$ *es un preorden que satisface la propiedad* $\mathbb{P}$*, y* D *es una familia de conjuntos densos en* P *y* $|D| < 2^{\aleph_0}$*, entonces existe un filtro* D*-genérico.* Las propiedades que se han utilizado se eligen porque son puntos intermedios entre la cac y la numerabilidad. Algunas aparecen en la figura 1.1; en él, una flecha entre una propiedad $\mathbb{P}_1$ y una propiedad $\mathbb{P}_2$ significa que la propiedad $\mathbb{P}_1$ implica a la propiedad $\mathbb{P}_2$ y no viceversa; además, aparecen todas las flechas posibles. Una prueba de dichas implicaciones se puede encontrar en [**kunen2**].

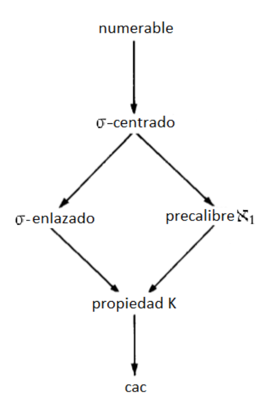

Figura 1.1: William Weiss (1984). Recuperado de [Wei84][p.838]

Luego, si $\mathbb{P}$ es una propiedad que aparece en el diagrama, AM implicará $AM_{\mathbb{P}}$. La única variación que utilizaremos en este trabajo es $\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$.

Definición 1.9. $\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$ será la siguiente proposición: Si $(P, \leqslant)$ es un preorden σ-centrado, D es una familia de conjuntos densos en P y $|D| < 2^{\aleph_0}$, entonces existe un filtro D-genérico.

2 Algunas Aplicaciones del AM

2.1. Aplicaciones a cardinales característicos del continuo

Hemos hablado ya sobre los orígenes del Axioma de Martin, pensando en ello -y en su mera enunciación-, resulta natural que éste tenga abundantes aplicaciones combinatorias. La combinatoria, como reflexiona Lorenz J. Halbeisen en [Hel12], es quizá más una manera de pensar que una teoría homogénea, inclinada principalmente a decidir el tamaño de ciertas colecciones de objetos. Cuando nos ocupen los casos extremos, a saber, el tamaño de la más pequeña o más amplia colección con cierta característica y todas estas colecciones estén contenidas en un conjunto de la cardinalidad del continuo, nos estaremos refiriendo a *cardinales característicos del continuo*. La introducción de HC o de su negación pueden ayudarnos a caracterizar a estos cardinales. Las fuentes de este capítulo las debo principalmente a [JW95] y a [Ort14].

2.1.1. El cardinal $\mathfrak{a}$

En nuestra primera aplicación, a la manera de W. Just y M. Weese en [JW95], partiremos de una prueba por recursión sin capacidad de generalizarse a ordinales mayores que $\aleph_0$ y la transformaremos en una que, utilizando filtros genéricos, sí se pueda amoldar.
Una de las características que más desconciertan a aquellos que comienzan a estudiar el comportamiento del infinito, es que contiene *objetos tan grandes* como él mismo. Entonces, dado un cierto cardinal infinito, nos podemos preguntar cuántos *pedazos* de su misma cardinalidad caben dentro de él. Recordando que si a un cardinal infinito le sustraemos un pedazo de un tamaño menor a él mismo, el conjunto resultante mantiene su cardinalidad, las siguientes definiciones funcionarán para

formalizar nuestro estudio:

Definición 2.1. Sea κ un cardinal infinito.

i) Diremos que x y y son κ *casi ajenos* si y sólo si $x, y \in [\kappa]^\kappa$, y $|x \cap y| < \kappa$.

ii) En general, una familia $A \subseteq [\kappa]^\kappa$ será κ *casi ajena*, si cualesquiera dos de sus elementos son κ casi ajenos. En el caso en que $\kappa = \omega$, simplemente se le llamará una *familia casi ajena*.

iii) Cuando, además, no exista otra familia κ casi ajena en la que A esté contenida, nos referiremos a ella como una *familia* κ *casi ajena maximal*, o si no es ambigüo, maximal. Observe que esto es equivalente a que para cualquier $b \in [\kappa]^\kappa$, exista $a \in A$ tal que $|b \cap a| = \kappa$.

Primero veamos que siempre existen familias κ casi ajenas.

Ejemplo 2.1.1. Sea κ un cardinal infinito.

I Si $A \subseteq [\kappa]^\kappa$ es una familia ajena por pares, también es κ casi ajena.

II Para κ, existe una familia de $\mathcal{P}(A)$, ajena por pares y de cardinalidad κ.

III Existe una familia casi ajena y de cardinalidad igual a $\mathfrak{c}$.

Demostración. Basta con demostrar las últimas dos afirmaciones.

II Dado que κ es infinito, existe $f : \kappa \times \kappa \to \kappa$, una función biyectiva. Al ser f una biyección, la familia $\{f(\kappa \times \{\alpha\}) : \alpha \in \kappa\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es ajena dos a dos y, por lo tanto, de cardinalidad κ.

III Como $\mathbb{Q}$ es numerable, bastará con construir una familia $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ que posea las propiedades buscadas. $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, así que para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, podemos fijar una sucesión $S_r \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $S_r \longrightarrow r$. Ahora, el que $S = \{S_r : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ sea una familia casi ajena, se sigue de que si $r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, y suponemos que $|S_r \cap S_s| = \aleph_0$, podemos construir por recursión una subsucesión de S_r que converge a s, y al ser $\mathbb{R}$ un espacio métrico, lo anterior implicaría que $r = s$. Por lo tanto, si $r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son distintos entre sí, S_r y S_s son casi ajenos. Notemos que si $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dado que $S_r \subseteq \mathbb{Q}$, tenemos que $|S_r| = \aleph_0$, así que lo anterior también implica que A tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.

□

Estos ejemplos nos muestran que la cardinalidad de familias κ casi ajenas puede ser tan grande como la de κ y que en el caso en el que $\kappa = \omega$ pueden tener la cardinalidad de $\mathcal{P}(\kappa)$, inclusive. Permanece la pregunta por la mínima cardinalidad de familias κ casi ajenas maximales. Por la naturaleza del Axioma de Martin, éste nos ayudará a responderla si nos restringimos a $\kappa = \omega$. Es decir, nos ayudará a encontrar una caracterización que nos diga más sobre el siguiente cardinal:

Definición 2.2. $\mathfrak{a} = \min\{|A| : A$ es una familia casi ajena maximal$\}$.

En principio, con el siguiente teorema podemos descartar el que $\mathfrak{a} = \aleph_0$:

Teorema 2.3. *Si* A *es una familia casi ajena y numerable, entonces* A *no es maximal.*

Demostración. Bastará con construir un elemento B de $[\omega]^{\omega} \setminus A$ tal que para cada $a \in A$, $a \cap B$ sea finito. Fijemos una numeración de $A = \{A_n : n \in \omega\}$; sea $b_0 \in A_0$, y supongamos que para algún $n \in \omega$, hemos construido $\{b_m : m \leqslant n\}$ donde para cada $m \leqslant n$, $b_m \in A_m \setminus \bigcup\{A_l : l < m\}$. Que A sea casi ajena implica que $\bigcup\{A_{n+1} \cap A_m : m \leqslant n\}$ es finito, y como A_{n+1} es infinito, entonces $A_{n+1} \setminus \bigcup\{A_m : m \leqslant n\}$ no es vacío, definamos como b_{n+1} a algún elemento de este último conjunto. Por recursión, existe $B = \{b_m : m < \omega\}$ infinito y tal que para cada $n \in \omega$, $A_n \cap B \subseteq \{b_m : m \leqslant n\}$, luego, el conjunto B cumple lo deseado. $\square$

Note que lo que nos permitió seguir agregando elementos para la construcción de B, fue que la unión finita de conjuntos finitos, vuelve a ser finita, es decir, fue posible por la regularidad de ω:

Definición 2.4.

i) Sea $\{\alpha_\beta\}_{\beta<\gamma}$ una sucesión infinita de números ordinales de longitud γ. Diremos que es *creciente* si $\alpha_\beta < \alpha_\delta$ siempre que $\beta < \delta < \gamma$. Si $\{\alpha_\beta\}_{\beta<\gamma}$ es creciente y γ es un ordinal límite, definimos al *límite de la sucesión* como:

$$\alpha = \lim_{\beta \to \gamma} \alpha_\beta = \sup\{\alpha_\beta : \beta < \gamma\}$$

ii) A un cardinal infinito κ se le llama *singular* si existe $\{\alpha_\beta\}_{\beta<\gamma}$, una sucesión infinita creciente de ordinales, con $\gamma < \kappa$, y tal que: para cada $\beta < \gamma$, $\alpha_\beta < \kappa$ y

$$\kappa = \lim_{\beta \to \gamma} \alpha_\beta$$

iii) Si κ no es singular, diremos que es *regular*.

Como resultado fortuito, podemos hacer una prueba casi idéntica para cardinales regulares:

Teorema 2.5. *Si* $\omega < \kappa$ *es un cardinal regular, y* A *es una familia* κ *casi ajena y de cardinalidad igual a* κ*, entonces* A *no es maximal.*

Si admitimos HC, por 2.3 y 2.1.1 obtenemos que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, pero si aceptamos su negación, dado que la clave en las demostración del teorema 2.3, fue que el conjunto B y la familia A son de la misma cardinalidad, no podemos modificarla de una manera tan directa para los otras posibles cardinalidades de A. Sin embargo, observemos que podemos retomar la idea y prescindir del enlistamiento *lineal* de A y de la construcción ordenada de B en la siguiente prueba alternativa:

Demostración alternativa del teorema 2.3 . Sea $\mathfrak{F} = \{F_n : n \in \omega\}$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos de A tal que:

$$A = \bigcup \mathfrak{F} \tag{$*$}$$

y supongamos que para $n \in \omega$, hemos construido $\{B_m \subset \omega : m \leqslant n\}$, una sucesión de subconjuntos finitos de ω, que cumple:

$$\forall m \leqslant n(|B_m| \geqslant m) \tag{$**$}$$

y

$$\forall m < n(B_{m+1} \setminus B_m \subseteq \omega \setminus \bigcup F_m) \tag{$\star$}$$

Como F_n es finito y A es infinita y casi ajena, $\omega \setminus \bigcup F_n$ no es vacío, fijemos un elemento k de éste, y definamos $B_{n+1} = B_n \cup \{k\}$. Por recursión, existe $\mathfrak{B} = \{B_m : m < \omega\}$ compuesta por subconjuntos finitos de ω y tal que para cada $m \in \omega$, $|B_m| \geqslant m$, y $B_{m+1} \cap \bigcup F_m \subseteq B_m$. Sea $B = \bigcup\{B_m : m < \omega\}$. Si $a \in A$, fijemos $m \in \omega$ tal que para todo $k \geqslant m$, $a \in F_k$, así, si $k > m$, $a \cap B_k \subseteq B_m$, y por lo tanto $a \cap B = \bigcup\{B_k \cap a : k \leqslant m\}$, el cuál es finito. □

Se puede decir que lo único que cambiamos en esta segunda prueba fue que *hicimos crecer a B* a través de subconjuntos de más de un elemento, y que, asimismo, *evitamos* a los elementos de A, con *pasos más grandes*. También nos permite observar, que de las familias $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{B}$ sólo necesitamos asegurar que tengan las propiedades $(*)$, $(**)$ y $(\star)$. El siguiente lema es conocido como *lema de Solovay*, en él veremos que la propiedad $(\star)$ posibilitará definir un preorden tal que con los filtros de ese preorden y nuestra nueva notación, se podrá realizar una prueba análoga pero sin necesidad de proceder de una manera *lineal*, y por lo tanto, sin necesitar recursión. El lema de Solovay nos proverá un resultado mucho más general que el que estábamos buscando -caracterizar a $\mathfrak{a}$-, pero podemos tener en mente que en el siguiente lema $B = \{\omega\}$ y que A es una familia casi ajena.

Lema 2.6 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$)**.** *Sean* $A, B \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$, $|A|, |B| < \mathfrak{c}$*, tales que para todo* $b \in B$ *y todo* $F \subset A$ *finito, se tiene que* $b \setminus \bigcup F$ *es infinito, entonces existe un subconjunto* $c \subseteq \omega$ *con las siguientes propiedades:*

i) $\forall a \in A : |a \cap c| < \aleph_0$

ii) $\forall b \in B : |b \cap c| = \aleph_0$

Demostración. Consideremos al conjunto $\mathbb{P}_A = \{(s,F) : s \in [\omega]^{<\aleph_0} \wedge F \in [A]^{<\aleph_0}\}$. Dados $(s_1,F_1),(s_2,F_2) \in \mathbb{P}_A$, $(s_1,F_1) \leqslant (s_2,F_2)$ si y sólo si $s_2 \subseteq s_1$, $F_2 \subseteq F_1$ y $s_1 \setminus s_2 \cap \bigcup F_2 = \emptyset$. Observe que si $(s_0,F_0),(s_1,F_1),(s_2,F_2) \in \mathbb{P}_A$ y $(s_0,F_0) \leqslant (s_1,F_1) \leqslant (s_2,F_2)$, sucede que $s_2 \subseteq s_0$, $F_2 \subset F_0$ y $(s_0 \setminus s_2) \cap \bigcup F_2 = (s_0 \setminus s_1) \cap \bigcup F_2 \cup (s_1 \setminus s_2) \cap \bigcup F_2 \subseteq (s_0 \setminus s_1) \cap \bigcup F_1 \cup (s_1 \setminus s_2) \cap \bigcup F_2 = \emptyset$, y por lo tanto $(\mathbb{P}_A, \leqslant)$ es un orden parcial. Las primeras coordendas de los elementos de nuestro orden serán las aproximaciones al conjunto c que buscamos construir, las definición de $\leqslant$ causará que se cumpla una propiedad semejante a la propiedad $(\star)$.

Para inducir un comportamiento análogo al de la propiedad $(*)$, para cada $a \in A$, definamos a $D_a = \{(s,F) \in P_A : a \in F\}$; como para cada $(s,F) \in P_A$, $(s, F \cup \{a\}) \leqslant (s,F)$, entonces $\{D_a : a \in A\}$ es una familia de densos. También para cada $(n,b) \in \omega \times B$, definamos al conjunto $E^b_n = \{(s,F) \in P_A : |s \cap b| \geqslant n\}$; observe que si $(s,F) \in P_A$, por hipótesis, existe $s' \in [b \setminus \bigcup F]^n$ y por ello, $(s \cup s', F) \in E^b_n$. En consecuencia $\{E^b_n : (n,b) \in \omega \times B\}$ es una familia de densos en P. Ésta obligará a que se satisfaga una propiedad correspondiente a $(**)$. Sea $D = \{D_a : a \in A\} \cup \{E^b_n : (n,b) \in \omega \times B\}$ y observe que $|D| < 2^{\aleph_0}$.

Ahora note que si G es un filtro D-genérico, y $c = \bigcup\{s \in [\omega]^{<\aleph_0} : \exists F \in [A]^{<\aleph_0}((s,F) \in G)\}$, entonces c tiene las cualidades que buscábamos:

i) Sea $a \in A$, como existe $(s,F) \in D_a \bigcap G$, si (s',F') es un elemento arbitrario de G, también hay $(s'',F'') \in G$ que extiende a ambos. En suma: $a \in F$, $s' \subseteq s''$, $s'' \setminus s \cap \bigcup F = \emptyset$, entonces $s' \cap a \subseteq s'' \cap \bigcup F \subseteq s$. Como la única particularidad de (s',F') fue su pertenencia a G, tenemos que $c \cap a \subseteq s$, por ende $c \cap a$ es finito.

ii) Fijemos $b \in B$, y sea $n \in \omega$ cualquiera; ya que G es D-genérico, existe $(s,F) \in E^b_n \bigcap G$, dado que $|s \cap b| \geqslant n$, $|c \cap b| \geqslant n$, y como esto es válido para todo natural n, podemos concluir que $c \cap b$ es infinito.

Para concluir la prueba bastará con asegurar la existencia de algún filtro D-genérico. Para ello, por el $AM_{\sigma-centrado}$, será suficiente con que mostremos que P es σ-centrado: note que $\mathbb{P}_A = \bigcup\{P_s : s \in [\omega]^{<\aleph_0}\}$, donde $P_s = \{(s,F) : F \in [A]^{<\aleph_0}\}$. Luego, como $[\omega]^{<\aleph_0}$ es numerable, bastará con mostrar que si $s \in [\omega]^{<\aleph_0}$, entonces P_s es centrado. Pero si $s \in [\omega]^{<\aleph_0}$, considere $B \subseteq [A]^{<\aleph_0}$ finito, es sencillo verificar que $(s, \bigcup B)$ es una cota inferior de $\{(s,F) : F \in B\}$ en P_s. Por lo tanto P es σ-centrado y por ello existe un filtro D-genérico. $\square$

Corolario 2.7 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$)**.** *Si* A *es una familia casi ajena de cardinalidad* κ*, con* $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$*, entonces* A *no es maximal.*

Demostración. Sea A como en la hipótesis y $B = \{\omega\}$. Veamos que estas familias cumplen con las hipótesis del lema de Solovay. Sea $F \subseteq A$ finito, como A es infinita y casi ajena, existe $a \in A \setminus F$, y éste satisface que $a \setminus \bigcup F$ es infinito, en consecuencia $\omega \setminus \bigcup F$ también lo es. Así que existe $d \subseteq \omega$ tal que $|d \cap \omega| = \aleph_0$, es decir, d es infinito, y es tal que para todo $a \in A$, $|d \cap a| < \aleph_0$. Por ello, $A \cup \{d\}$ es una familia casi ajena, y entonces A no es maximal.

$\square$

Por este último resultado y por 2.1.1, podemos concluir:

Corolario 2.8 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$)**.** $\mathfrak{a} = 2^{\aleph_0}$

Aprovechamos para presentar una similitud importante entre el comportamiento de $\aleph_0$ y los cardinales no numerables menores a $2^{\aleph_0}$, que se desprende también del lema de Solovay[1].

Corolario 2.9 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}+\neg\mathrm{HC}$)**.** *Si* $\kappa < 2^{\aleph_0}$ *es un cardinal infinito, entonces* $2^{\kappa} = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Es suficiente con probar que $2^{\kappa} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Sea A una familia casi ajena de cardinalidad κ, para cada $A' \subset A$ distinto del vacío y del total, definamos $B' = A \setminus A'$. Notando que si $F \subseteq A'$ es finito y $b \in B'$, como $F \cup \{b\} \subseteq A$, entonces $|b \setminus \bigcup F| = \aleph_0$, y que $|A'|, |B'| < 2^{\aleph_0}$, utilizando el lema de Solovay, podemos establecer un conjunto $d_{A'} \subset \omega$ con las características siguientes:

I Para todo $a \in A'$, $|d_{A'} \cap a| < \aleph_0$.

II Para todo $b \in B'$, $|d_{A'} \cap b| = \aleph_0$.

Esto orilla a que si $A', A'' \in \mathcal{P}(\omega) \setminus \{\emptyset\}$, son distintos entre sí, también $d_{A'}$ y $d_{A''}$ lo sean. Luego, la función $\Phi : \mathcal{P}(A)^* \to \mathcal{P}(\omega)$ con $\mathcal{P}(A)^* = \mathcal{P}(A) \setminus \{A, \emptyset\}$, definida como $\Phi(A') = d'_A$, para cada $A' \in \mathcal{P}(A)^*$, es inyectiva. Así que ppodemos concluir que la desigualdad es verdadera.

$\square$

2.1.2. El cardinal $\mathfrak{p}$

Oberve que en la prueba de 2.3, siempre podíamos asegurar que el complemento de la unión finita de elementos de la familia casi ajena fuera infinito, ahora podemos explorar un comportamiento *complementario* en familias del siguiente tipo:

[1]Más adelante, en 3.25, encontraremos una prueba alternativa a través de conceptos topológicos.

Definición 2.10. i) Sean $a, b \in [\omega]^{\aleph_0}$, diremos que a *está casi contenido en* b, y lo simbolizaremos con $a \subseteq^* b$, si $|a \setminus b| < \aleph_0$.

ii) Si $A \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$, una *pseudointersección* de A es un conjunto $a \in [\omega]^{\aleph_0}$, que esté casi contenido en cualquier elemento de A.

Observe que toda familia con una pseudointersección posee la siguiente propiedad:

Definición 2.11. Una familia de conjuntos A, tiene la *propiedad fuerte de intersección finita* (*pfif*), si y sólo si para todo $F \subseteq A$ finito, $\bigcap F$ es infinito.

Sin embargo, no son propiedades equivalentes:

Ejemplo 2.11.1. Los ultrafiltros no principales sobre $(\mathcal{P}(\omega), \subseteq)$[2] satisfacen la pfif y, sin embargo, no poseen pseudointersecciones.

Demostración. Primero veamos que si U es un filtro como el de la hipótesis, entonces U tiene la pfif: supongamos por reducción al absurdo, que existe $F \subseteq U$ finito con $|\bigcap F| < \aleph_0$, denotemos $I = \bigcap F$. Como U es filtro, $\emptyset \neq I \in U$. Fijemos $n \in I$, y observemos que si $m \in I \setminus \{n\}$, debido a que U es ultrafiltro y no es principal, tenemos que $\omega \setminus \{m\} \in U$, pero entonces $\{n\} = \bigcap_{m \in I \setminus \{n\}} \omega \setminus \{m\} \cap I \in U$, contradiciendo el que U no es principal. Ahora supongamos que c es una pseudointersección de U, como c es infinito numerable, podemos fijar a dos conjuntos a y b, infinitos, ajenos entre sí y tales que $a \cup b = c$. Note que como U es un ultrafiltro, $a \in U$, o bien $\omega \setminus a \in U$. Luego, como supusimos que c es pseudointersección de U, tenemos que $c \setminus a = b$ es finito o bien $c \setminus (\omega \setminus a) = a$ es finito, lo cual contradice la elección de a o de b. Por lo tanto U es un conjunto con la pfif y sin pseudointersecciones.

□

Por el ejemplo anterior el conjunto $\{|A| : A \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ tal que A tiene la pfif y no tiene pseudointersecciones$\}$ es distinto del vacío y su máximo es $2^{\aleph_0}$.

Definición 2.12. Definimos al cardinal $\mathfrak{p} = \text{mín}\{|A| : A \subseteq \mathcal{P}(\omega)$: tal que A tiene la pfif y no tiene pseudointersecciones$\}$.

Teorema 2.13. $\mathfrak{p} > \aleph_0$

Demostración. Sea $A = \{A_n : n \in \omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia con la pfif; construyamos por recursión sobre ω, una pseudointersección de ella. Fijemos primero $a_0 \in A_0$ arbitrario. Supongamos que para un $n \in \omega$, hemos construido un conjunto $\{a_m :$

[2] Diremos que F es un ultrafiltro si es un filtro y no existe otro filtro en el cual esté contenido. Un filtro es principal si ningún conjunto singular es elemento de él. Ejemplos de ultrafiltros no principales sobre $(\mathcal{P}(\omega), \subseteq)$ se pueden consultar en [JW95].

$m \leqslant n\}$ de tal manera que para toda $m \leqslant n$, $a_m \in \bigcap\{A_l : l \leqslant m\}$. Debido a que A tiene la pfif, podemos elegir un elemento, digamos a_{n+1}, en $\bigcap\{A_m : m \leqslant n+1\} \setminus \{a_l : l \leqslant n\}$. Por recursión existe $B = \{a_n : n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$, $B \setminus A_n \subseteq \{a_m : m < n\}$ y si $n < m < \omega$, $a_n \neq a_m$. Por lo tanto B es una pseudointersección de A. □

De nuevo, en esta última prueba, utilizamos fuertemente que la cardinalidad de A sea igual a la de la pseudointersección (aunque también funcionaría si fuera menor). En consecuencia, no podemos dar el mismo argumento para otras posibles cardinalidades infinitas de A. Para tratar con esas cardinalidades, presentamos el siguiente resultado conocido como *lema de Booth*.

Teorema 2.14 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$). *Si* $A \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$*, es una familia con la pfif y de cardinalidad menor a* $\mathfrak{c}$*. Entonces existe* $b \in [\omega]^{\aleph_0}$ *tal que* $b \setminus a$ *es finito para todo* $a \in A$.

Demostración. Sea A como en la hipótesis. Consideremos a las familias $B = \{\omega \setminus a : a \in A\}$ y $C = \{\omega\}$ y notemos que cumplen con las hipótesis del lema de Solovay, pues si $F = \{\omega \setminus a_i : i \leqslant n \quad y \quad a_i \in A\}$ para algún $n \in \omega$, $|\omega \setminus \bigcup F| = |\bigcap_{i \leqslant n} a_i| = \aleph_0$. Luego, existe $d \subseteq \omega$ tal que $|d \cap \omega| = \aleph_0$, por lo tanto d es infinito, y tal que para todo $a \in A$, $|d \setminus a| = |(\omega \setminus a) \cap d| < \aleph_0$. □

Corolario 2.15 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$). $\mathfrak{p} = 2^{\aleph_0}$

La igualdad de este último corolario no es sólo una consecuencia de $\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$, sino que resultan ser equivalentes (véase [**klass**]). Como observamos en los preliminares, la cac es la más débil de una rama de propiedades, entre ellas se encuentra la de ser σ-centrado, por lo tanto $\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$ es más débil que el AM. Saber esto puede ser útli si se desean evitar algunas de las consecuencias del AM y conservar otras.

2.1.3. El cardinal $\mathfrak{b}$

Definición 2.16. Si $f,g \in \omega^\omega$. Diremos que g *domina a* f, y lo denotaremos con $f <^* g$, si existe $m \in \omega$ tal que para toda $n \geqslant m$ sucede que $g(n) > f(n)$. En general, si $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$, diremos que g domina a $\mathcal{F}$, si g domina a cada elemento de $\mathcal{F}$.

En la siguiente proposición podremos crear para cualquier familia numerable contenida ω^ω, una función que la domine. También mostraremos que existe una familia de la cardinalidad del continuo, para la cual, tal función no puede existir. Sin embargo, para los cardinales que quedan en medio, no es tan claro. Esto es análogo a las situaciones de los números $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{p}$; introducimos al cardinal de no acotación:

Definición 2.17. El cardinal $\mathfrak{b}$, o *cardinal de no acotación*[3], será el mínimo del conjunto $\{|\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ y no existe una función que domine a $\mathcal{F}\}$.

Teorema 2.18. *Si $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$, con $|\mathcal{F}| = \omega$, entonces existe una función $g \in \omega^\omega$ que domina a $\mathcal{F}$. Además, existe una familia $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$, con $|\mathcal{F}| = 2^{\aleph_0}$, que no es dominada por ninguna función.*

Demostración. Para la primera afirmación, fijemos una numeración $\{f_m : m < \omega\}$ sin repeticiones, de $\mathcal{F}$. Definamos $g \in \omega^\omega$ como $g(l) = \max\{f_m(l) + 1 : m \leqslant l\}$, para cada $l \in \omega$. Así, si $m \in \omega$, y $l \geqslant m$, $g(l) \geqslant f_m(l)$.

Por otro lado, es claro que $\mathcal{F} = \omega^\omega$ no puede ser dominada por alguna función. $\square$

En esta demostración, de nuevo, fue esencial que la cardinalidad del dominio coincidiera con el de la familia $\mathcal{F}$ aunado a que los conjuntos finitos siempre tienen máximo. Recordando que el Axioma de Martin nos permitió construir funciones con ciertas propiedades, bastando con que dichas propiedades se satisficieran en casos finitos, se intuye que podremos construir una función dominante para familias de cardinalidad infinita y menor que $\mathfrak{c}$, usando dicho axioma.

Teorema 2.19 (AM). $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Por el teorema anterior, será suficiente con demostrar que para toda familia contenida en ω^ω, de cardinalidad κ, con $\omega < \kappa < 2^{\aleph_0}$, existe una función que la domine.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones con esas características. Consideremos al orden parcial $P = \{(f, A) : f \in Fn(\omega, \omega) \wedge A \subset [\mathcal{F}]^{<\omega}\}$, donde, si (f, A),$(g, B) \in P$, $(f, A) \leqslant (g, B)$ si y sólo si $g \subseteq f$, $B \subseteq A$ y para cualesquiera $n \in dom(f) \setminus dom(g)$ y $h \in B$, se tiene que $f(n) > h(n)$. Para mostrar que es un orden parcial supongamos que $(f, A), (g, B), (h, C) \in P$ son tales que $(f, A) \leqslant (g, B) \leqslant (h, C)$. Es inmediato que $h \subseteq f$ y que $C \subseteq A$. Además, como $dom(h) \subseteq dom(g) \subseteq dom(f)$ $dom(f) \setminus dom(h) = dom(f) \setminus dom(g) \cup dom(g) \setminus (h)$. Así, si $n \in dom(f) \setminus dom(h)$ e $i \in C$, tenemos dos casos: $n \in dom(f) \setminus dom(g)$, y ya que $i \in B$, $f(n) > i(n)$, o bien, $n \in dom(g) \setminus (h)$ y $f(n) \geqslant g(n) > i(n)$. En cualquier caso, queda asegurado que $(f, A) \leqslant (h, C)$.

Para asegurar que el dominio de la función que deseamos construir sea ω -aunque también nos servirá para otros fines-, observe que si $n \in \omega$, entonces el conjunto $D_n = \{(f, A) \in P : n \in dom(f)\}$ es denso en P. Por otro lado, note que si $f \in \mathcal{F}$ entonces el conjunto $E_f = \{(p, A) \in P : f \in A\}$ también es denso en P. Definamos

[3]La letra $\mathfrak{b}$ proviene *borné*, que significa acotado en francés.

$D = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_f : f \in \mathcal{F}\}$, como $|\mathcal{F}| < 2^{\aleph_0}$, por AM, existe filtro G que es D-genérico. Sabemos ya que el siguiente conjunto $g = \bigcup_{(f,A)\in\mathcal{F}} f$ es una función y que tiene como dominio a ω. Demostremos ahora que, en efecto, domina a $\mathcal{F}$: sea $f \in \mathcal{F}$ arbitraria, fijemos a $(h_1, A_1) \in E_f \cap G$, y $m = \max \mathrm{dom}(h_1) + 1$. Así, si $n \geqslant m$, podemos fijar $(h_2, A_2) \in D_n \cap G$. Ya que G es un filtro, existe (h_3, A_3) que extiende tanto a (h_1, A_1), como a (h_2, A_2). En particular, $n \in \mathrm{dom}(h_3) \setminus \mathrm{dom}(h_1)$ y $g(n) = h_3(n) > f(n)$. Por ello, g domina a $\mathcal{F}$. □

2.2. Aplicaciones en categoría de Baire y Teoría de la Medida

En contraste con varios de los axiomas usuales (ZFE), el AM no se distingue por ser *natural* y *evidente* -lo mínimo que, pensando en las perspectivas esbozadas en la introducción, por lo general se esperaba de un axioma en otros tiempos-. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección (la que dedicaremos a Topología), el Axioma de Martin tiene una versión topológica, ésta, si se acepta la negación de la Hipótesis del Continuo, es una generalización del *Teorema de Categoría de Baire para espacios compactos*[4]. Entonces, aunque en este trabajo hemos estudiado al AM por sus consecuencias y porque desde los enfoques *modernos* es pertinente hacerlo por el simple hecho de su consistencia, pareciera que el que se muestre como una generalización de un teorema con tantos frutos[5], le concede un poco de esa espontaneidad faltante. En esta sección nos dedicaremos a demostrar que el Axioma de Martin generaliza al *Teorema de Categoría de Baire para los reales*; además demostraremos que implica un resultado análogo para conjuntos nulos de $\mathbb{R}$ y también probaremos algunas de las consecuencias de esto último.

Estudiar los *tamaños* de los conjuntos puede ser de importancia por diversas razones, como ejemplo, los cardinales característicos del continuo que recientemente estudiamos nos muestran que simplemente cambiando la cardinalidad de cierta familia -y *dejando todo lo demás igual*- el comportamiento puede distar mucho. Otro ejemplo representativo lo da la Teoría de Probabilidad para la cuál es fundamental la medición de eventos. En Teoría de Conjuntos los tamaños se estudian con el concepto de cardinalidad; los conjuntos numerables se suelen considerar como pequeños, y, ahora que los hemos estudiado con el AM, podemos decir que los no numerables y con cardinalidad menor que el continuo también lo son, sin embargo, a los cardinales restantes los podemos clasificar como grandes. En Teoría de la Me-

[4]En un espacio compacto, la unión numerable de conjuntos nunca densos también es nunca densa.

[5]Si se desean estudiar los teoremas de Baire y una amplia gama de sus consecuencias, recomendamos [Bri11].

dida, los tamaños se investigan con la introducción de, naturalmente, una medida; con ella, los de medida positiva serán abundantes respecto a los de medida nula. Desde la Topología, el estudio de los tamaños de los conjuntos se puede abordar con la noción de categoría de Baire, donde los pertenecientes a la primera categoría de Baire serán escasos comparados con los de segunda categoría. Así, el que un conjunto sea *grande* o *pequeño*, dependerá de la óptica con que se estudia pues a veces coinciden y en otras ocasiones no. Aquí presentaremos una de las coincidencias.

2.2.1. Cov(μ)

Definición 2.20. i) Si X es un espacio topológico, diremos que un conjunto $y \subseteq X$ es *nunca denso*, si $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(y)) = \emptyset$.

ii) Un conjunto es *magro* o de *primera categoría*, si es unión numerable de conjuntos nunca densos.

iii) Un conjunto será de *segunda categoría* si no es de primera categoría.

Por el teorema de categoría de Baire (que puede consultarse en [Bri11]), $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$[6] es de segunda categoría, y dado que la unión numerable de conjuntos magros es magra, tenemos que $\mathbb{R}$ no puede ser cubierto por una colección así. Por otro lado, en $\mathbb{R}$ los conjuntos singulares (es decir, de un sólo elemento) son nunca densos. Por lo tanto, podemos cubrir a $\mathbb{R}$ con $2^{\aleph_0}$ conjuntos magros pero $\aleph_0$ conjuntos magros no son suficientes para cubrirlo. Luego, si aceptamos $\neg$HC, una pregunta natural es ¿cuál es la mínima cantidad de subconjuntos magros que cubren a los reales?

Definición 2.21. $\mathrm{Cov}(\mu) = \mathrm{inf}\{|A| : A$ es una cubierta de subconjuntos magros de $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})\}$.

Por lo comentado anteriormente, $2^{\aleph_0} \geqslant \mathrm{Cov}(\mu) > \omega$.

Teorema 2.22 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}}$+$\neg$HC). *Para toda familia $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de cardinalidad κ, con $\omega < \kappa < 2^{\aleph_0}$, formada por conjuntos de primera categoría en $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, el conjunto $\bigcup\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es también de primera categoría.*

Demostración. Para cada $\alpha < \kappa$, fijemos $\{E_n^\alpha : n \in \omega\}$, una colección de conjuntos nunca densos de $\mathbb{R}$, tal que $M_\alpha = \bigcup\{E_n^\alpha : n \in \omega\}$. Luego, demostrar que existe una familia $\{H_n : n \in \omega\}$ de conjuntos nunca densos tal que $\bigcup\{M_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \bigcup\{H_n : n \in \omega\}$ -observando que un conjunto es nunca denso si y sólo si su cerradura lo es y tomando complementos-, equivale a probar que para toda familia $U = \{u_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de abiertos densos, existe una familia $V = \{v_\gamma : \gamma \in \omega\}$ de abiertos densos tales que

[6] Los reales dotados con su topología usual.

$\bigcap V \subseteq \bigcap U$.

Sea $U = \{u_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de densos abiertos. Consideremos una enumeración $B = \{B_n : n \in \omega\}$ del conjunto de todos los intervalos abiertos con extremos racionales, y note que éste es una base para la topología de $\mathbb{R}$. El camino que tomaremos para construir a la familia V, consistirá, *grosso modo*, en encontrar para cada abierto u de $\mathbb{R}$ y para cualquier colección finita F de U, una colección infinita B' de elementos de la base tal que:

$\diamond$) todos los elementos de B' estén contenidos en u;

$\diamond\diamond$) y que *evada lo que está afuera de* $\bigcup F$.

Con ello -una suerte de paso inductivo- aseguramos que sea lícito que Martin *haga* lo análogo a recursión. La propiedad $\diamond$) provocará que la familia que construyamos, sea de conjuntos densos; mientras que $\diamond\diamond$) está dirigida a que la intersección de V, esté contenida en la intersección de U.

Comencemos la construcción. Para cada $n \in \omega$, definamos a $c_n = \{m \in \omega : B_m \subseteq B_n\}$. Y para cada $\alpha \in \kappa$, hagamos $a_\alpha = \{m \in \omega : B_m \nsubseteq u_\alpha\}$. Veamos que $C = \{c_n : n \in \omega\}$ y $A = \{a_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ cumplen con las hipótesis del lema de Solovay. Sean $n \in \omega$ y $F \subseteq \kappa$ un conjunto finito, entonces $c_n \setminus \bigcup\{a_\alpha : \alpha \in F\} = \{m \in \omega : B_m \subseteq \bigcap_{\alpha \in F}(u_\alpha \cap B_n)\}$. Debido a que $\{u_\alpha : \alpha \in F\}$ es una colección finita de abiertos densos, $\bigcap_{\alpha \in F}(u_\alpha \cap B_n)$ es abierto y no vacío, y dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, obtenemos que $c_n \setminus \bigcup\{a_\alpha : \alpha \in F\}$ es infinito. Por el lema de Solovay, podemos concluir que existe $d \subseteq \omega$ tal que para toda $a \in A$ y para toda $c \in C$, $a \cap d$ es finito y $c \cap d$ es infinito. Por ello, para cada $n \in \omega$ el conjunto $v_n = \bigcup\{B_m : m \in d \wedge m \geqslant n\}$ es abierto y denso en $\mathbb{R}$. Para corroborar esto último, fijemos $n \in \omega$ y sea $W \in \tau^*_{\mathbb{R}}$. Como B es base, existe $m \in \omega$ con $B_m \subseteq W$. Como $d \cap c_m$ es infinito, existe $l \in d \cap c_m$ con $l \geqslant n$, por ello, $B_l \subseteq B_m \cap W \subseteq v_n \cap W$. Finalmente veamos que $\bigcap_{n \in \omega} v_n \subseteq \bigcap U$; sea $\alpha \in \kappa$, como $d \cap a_\alpha$ es finito, existe $n \in \omega$ tal que $d \cap a_\alpha \subseteq n$, así que para toda $m > n$ con $m \in d$ sucede que $B_m \subseteq u_\alpha$, y por lo tanto $v_{n+1} \subseteq u_\alpha$. Luego, $V = \{v_n : n \in \omega\}$ es como buscábamos. $\square$

Corolario 2.23 (AM$_{\sigma-centrado}$+$\neg$HC)**.** $Cov(\mu) = 2^{\aleph_0}$

2.2.2. Add(μ)

Resulta que bajo la HC existe una dualidad[7] entre los subconjuntos de primera categoría y los subconjuntos nulos de $\mathbb{R}$; a continuación mostraremos un resultado sobre aditividad, que bajo $\neg$HC + AM, da un ejemplo de ese comportamiento, pues sucedera algo analógo a nuestro anterior resultado sobre $Cov(\mu)$.

[7]Para abundar en ello se puede consultar el apartado de aplicaciones de HC en [JW95].

Definición 2.24. Sea λ la medida de Lebesgue.

i) $N(\mathbb{R}) = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{existe } B \text{ un conjunto } \lambda \text{ medible tal que } \lambda(B) = 0 \text{ y } A \subseteq B\}$, a los elementos de este conjunto los llamaremos *nulos*.

ii) $\mathrm{Add}(N) = \inf\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq N(\mathbb{R}) \text{ y } \bigcup \mathcal{A} \notin N(\mathbb{R})\}$.

Como λ es σ-aditiva, sucede que $\aleph_0 < \mathrm{Add}(N)$. Por otro lado, como los singulares de $\mathbb{R}$ son nulos, $\mathrm{Add}(N) \leqslant 2^{\aleph_0}$. Entonces, si aceptamos la hipótesis del continuo, tenemos que $\mathrm{Add}(N) = 2^{\aleph_0}$. Con el siguiente teorema veremos que sucede lo mismo si aceptamos la $\neg$HC y al AM.

Lema 2.25. *Sean* $B = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ *y* $C = \{\bigcup F : F \subset B \text{ es finito}\}$. *Si* u *es Lebesgue medible y tiene medida finita, entonces, para todo* $\delta > 0$, *existe* $c \in C$ *tal que* $\lambda(u \triangle c) \leqslant \delta$.

Note que C es una base numerable de $\mathbb{R}$. El lema anterior -que se prueba en [Ran02]- nos habla de una propiedad muy útil, y es que todos los conjuntos abiertos de los reales, pueden ser aproximados por elementos de esta familia.

Teorema 2.26 (AM+$\neg$HC). *Si* $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$, λ *es la medida de Lebesgue, y* $M = \{m_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset N(\mathbb{R})$, *entonces* $\bigcup M$ *también es nulo.*

Demostración. Para probar que $\bigcup M$ tiene medida cero, veremos que para todo $\epsilon > 0$, existe un abierto U que lo contiene y es tal que $\lambda(U) \leqslant \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$, considere al conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P} = (P, \leqslant)$, con $P = \{p \subseteq \mathbb{R} : p \text{ es abierto y } \lambda(p) < \epsilon\}$, donde $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$. Note que por la forma en que $\leqslant$ fue definida, sucede que p y q son compatibles si y sólo si $\lambda(p \cup q) < \epsilon$.

Veamos ahora que $\mathbb{P}$ satisface la cac: supongamos, por reducción al absurdo, que $A = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$. Por la definición de P, sucede que $\epsilon - \lambda(p_\alpha) > 0$, para cada $\alpha < \omega_1$, así que podemos fijar $n_\alpha \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $0 < \frac{1}{n_\alpha} < \epsilon - \lambda(p_\alpha)$, luego: $A = \bigcup_{0<n<\omega}\{p \in A : \lambda(p) < \epsilon - \frac{3}{n}\}$. Entonces, como A no es numerable, existe $m \in \omega$ tal que $A_m = \{\alpha \in \omega_1 : \lambda(p_\alpha) < \epsilon - \frac{3}{m}\}$ es no numerable. Por el lema anterior, para cada $\alpha \in A_m$ y para $\delta = \frac{1}{m}$, podemos fijar $c_\alpha \in C$ tal que $\lambda(p_\alpha \triangle c_\alpha) \leqslant \delta$. A continuación, veremos que si $\alpha, \beta \in A_m$ son distintos entre sí, entonces c_α y c_β también lo son. Sean α y β dos elementos distintos de A_m.

- Observe como $p_\alpha, p_\beta \in A$ son incompatibles, entonces $\lambda(p_\alpha \cup p_\beta) \geqslant \epsilon$. Por otro lado, $\lambda(p_\alpha \cap p_\beta) \leqslant \lambda(p_\alpha) \leqslant \epsilon - 3\delta$. Y así, $\lambda(p_\alpha \triangle p_\beta) = \lambda(p_\alpha \cup p_\beta) - \lambda(p_\alpha \cap p_\beta) \geqslant 3\delta$.

- Además, utilizando la definición de diferencia simétrica, $\lambda(p_\alpha \triangle p_\beta) \leqslant \lambda(p_\alpha \triangle c_\alpha) + \lambda(p_\beta \triangle c_\beta) + \lambda(c_\alpha \triangle c_\beta)$.
- Por los incisos anteriores y por la elección de c_α y de c_β, $\delta \leqslant \lambda(c_\alpha \triangle c_\beta)$.

Por lo tanto c_α es distinto de c_β, pero entonces $|A_m| \leqslant |C|$, lo cual contradice la numerabilidad de C. En consecuencia, dicha anticadena no puede existir y entonces $\mathbb{P}$ tiene la cac.

Ahora definamos a una familia de densos que asegurarán que el abierto que buscamos contenga a cada elemento de M. Para cada $\alpha < \kappa$ definamos al denso $D_\alpha = \{p \in P : m_\alpha \subseteq p\}$ y revisemos su densidad; sea $p \in P$ arbitrario, por definición, $\epsilon - \lambda(p) > 0$, entonces, como $m_\alpha \in N(\mathbb{R})$, existe $V \in \tau_{\mathbb{R}}$, con $m_\alpha \subseteq V$, tal que $\lambda(V) < \epsilon - \lambda(p)$, es decir, $\lambda(V) + \lambda(p) < \epsilon$. Es claro que $V \cup p \in D_\alpha$ y que $V \cup p \leqslant p$.

Considere a $D = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$, por el AM, existe un filtro G que es D-genérico. Sea $U = \bigcup G$; claramente U es abierto, verifiquemos que además contiene a $\bigcup M$ y que tiene medida menor a ϵ: sea $\alpha < \kappa$, como $D_\alpha \cap G \neq \emptyset$, existe $p \in G$ tal que $m_\alpha \subseteq p \subseteq U$; por ello, $\bigcup M \subseteq U$. Ahora notemos que si $n \in \omega$ y $\{p_i : i \leqslant n\} \subseteq G$, por la caracterización de la compatibilidad en $\mathbb{P}$ y debido a que G es un filtro, sucede que $\lambda(\bigcup_{i \leqslant n} p_i) < \epsilon$. Por lo tanto, si $A \subseteq G$ es numerable, ocupando la subaditividad de λ entonces $\lambda(\bigcup A) \leqslant \epsilon$. Finalmente, el que $U \subseteq \mathbb{R}$, implica que U es Lindelöf, y como G es una cubierta abierta de U, existe H una subcubierta numerable de G, podemos concluir que $\lambda(U) \leqslant \epsilon$. Y, por lo tanto, $\bigcup M \in N(\mathbb{R})$. $\square$

Ahora podemos concluir lo siguiente:

Corolario 2.27 (AM $+\neg$ HC)**.** $\mathrm{Add}(N) = 2^{\aleph_0}$.

A continuación expondremos un par de propiedades más sobre la medida de Lebesgue. Éstas también generalizan comportamientos que suceden para $\kappa = \omega$, a cardinales $\omega < \kappa < \mathfrak{c}$.

Definición 2.28. Si κ es un cardinal infinito, diremos que S, una σ-álgebra, es κ-*completa*, si para todo $A = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq S$, $\bigcup A \in S$.

Corolario 2.29 (AM$+\neg$HC)**.** *La σ-álgebra de conjuntos Lebesgue medibles, es κ-completa para todo cardinal $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sean $\kappa < 2^{\aleph_0}$ un cardinal no numerable, y $A = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de conjuntos Lebesgue-medibles. Fijemos c, un conjunto de Borel, tal que

$\bigcup A \setminus c$ tenga medida interior cero. Luego, para cada $\alpha < \kappa$, $\lambda(A_\alpha \setminus c) = 0$. Como hemos visto, $\mathrm{Add}(\nu) = 2^{\aleph_0}$, así que $\lambda(\bigcup_{\alpha<\kappa}(A_\alpha \setminus c)) = 0$. Pero dado que $\bigcup_{\alpha<\kappa}(A_\alpha \setminus c) = (\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha) \setminus c$ y c es medible, podemos concluir que $\bigcup A$ también es Lebesgue medible. □

Definición 2.30. Si κ es un cardinal infinito, diremos que la medida de Lebesgue es κ-aditiva, si para toda familia A conformada por conjuntos medibles y ajenos por pares tal que $|A| < \kappa$, sucede que $\lambda(\bigcup A) = \sum_{a\in A} \lambda(A)$, donde $\sum_{a\in A} \lambda(A) = \sup\{\mu(\bigcup F) : F \in [A]^{<\omega}\}$.

Corolario 2.31 (AM+¬HC)**.** *Para todo $\aleph_0 < \kappa < 2^{\aleph_0}$ cardinal infinito, la medida de Lebesgue es κ-aditiva.*

Demostración. Sean $\kappa < 2^{\aleph_0}$ un cardinal no numerable y A una familia de conjuntos medibles y ajenos dos a dos tal que $|A| < \kappa$.
Por la monotonía de λ sucede que para todo $F \in [A]^{<\omega}$, $\lambda(\bigcup F) \leqslant \lambda(\bigcup A)$, por ello $\sum_{a\in A} \lambda(A) \leqslant \lambda(\bigcup A)$.

Para cerciorarnos de la desigualdad restante, consideremos dos casos. Observe que si $\sum_{a\in A} \lambda(A) = \infty$, habríamos concluido. Entonces exploremos el caso en el que $\sum_{a\in A} \lambda(A) < \infty$. Para ello, consideremos al conjunto $A' = \{a \in A : \lambda(a) > 0\}$. Afirmamos que A' es numerable: supongamos por reducción al absurdo que $|A'| \geqslant \omega_1$. Para cada $n \in \omega$ consideremos al conjunto $A_n = \{a \in A' : \lambda(a) > \frac{1}{n}\}$, como A' no es numerable y $A' \subseteq \bigcup_{n\in\omega} A_n$, existe $m \in \omega$ tal que A_m no es numerable. Sea $n \in \omega$, debido a la cardinalidad de A_m, existe $F \subseteq A_m$, tal que $|F| = m \cdot n$, luego $n = \frac{1}{m} \cdot m \cdot n \leqslant \lambda(F) \leqslant \lambda(\bigcup A)$. Y como $A_m \subseteq A$, lo anterior contradice el que $\sum_{a\in A} \lambda(A)$ sea finito. Por ello, necesariamente A' es numerable.

Ahora, como $|A \setminus A'| < 2^{\aleph_0}$, podemos utilizar el teorema 2.26 y obtener que $\lambda(A \setminus A') = 0$, luego, por la numerabilidad de A': $\lambda(\bigcup A) = \lambda(\bigcup A \setminus A') + \lambda(\bigcup A') = \sum_{a\in A'} \lambda(a) = \sum_{a\in A} \lambda(a)$. □

3 Aplicaciones del AM a Topología General

«The native people of Saskatchewan say that in the old days a boy, upon reaching the threshold of manhood, would undertake a special journey into the forest. After several days of fasting the spirit of an animal would appear to him. This animal spirit would guide him and protect him throughout his adult life. Today, this tradition is no longer observed except by set-theoretic topologist. We search not for the spirits of animals, but of axioms.»

— William Weiss en [Wei84]

Un rasgo que distingue a la topología general de ramas como la geometría, la teoría de números, o ecuaciones diferenciales, es que diversas cuestiones importantes para ella son indiferentes para ZFE, esto es, desde el sistema de axiomas usual no se pueden probar ni refutar. Por ello, si uno está atrapado en un enigma de esta materia, podría ser útil saber sobre la situación de su consistencia (su consistencia con ZFE). Pues, como remarcaremos en la introducción a teoría de modelos, una prueba que resuelva tal enigma podría no existir.

Una de las maneras de proceder en tales situaciones es indirectamente[1]: se agrega a ZFE un principio que ya se sabe consistente (por ejemplo, la HC), y si se logra derivar una prueba a partir de él, al menos se sabe que no es falso. Luego, si en lugar de tal principio agregamos uno *complementario* (para nuestro ejemplo, un candidato sería la $\neg$HC+AM), y demostramos ahora su negación, podemos asegurar que la propiedad es independiente de ZFE. Si se revisa, en las aplicaciones que hemos propuesto, hasta ahora los efectos de la Hipótesis del Continuo y de su negación

[1] Abordaremos una alternativa cuando hablemos de extensiones genéricas.

acompañada por el Axioma de Martin, son los mismos. Sin embargo, en varios de nuestros siguientes ejemplos, su armonía se rompe.

Los objetos que trataremos aquí serán: espacios hereditariamente separables, más no Lindëlof (*S-espacios*), los espacios hereditariamente Lindëlof, empero, no separables (*L-espacios*) y los espacios de Luzin. Bajo la HC, los tres tipos de espacios existen[2], mientras que la ¬HC unida al AM, prohiben la existencia de espacios de Luzin, y, como aquí veremos, estos axiomas también imposibilitan la existencia de espacios S-espacios y de L-espacios fuertes. Las otras aplicaciones que presentaremos, aunque a nosotros no nos llevarán siempre a concluir su independencia (sólo su consistencia), las elegimos por su valor intrínseco y para tener una gama variada de técnicas con filtros genéricos. Este capítulo mayormente se basó en [Tka11]; pero también utilicé otras fuentes como lo son [Ort14] y [Ett08].

3.1. Productividad de la propiedad de Suslin

Ya que una forma usual de construir espacios topológicos es a partir del producto de espacios preexistentes, una pregunta recurrente acerca de propiedades topológicas es cuándo éstas se preservan por productos. Resulta que la separabilidad no es una de ellas (en A.0.1 del apéndice lo mostramos). Por otro lado, todo espacio separable tiene la propiedad de Suslin (puede consultarse la definición en 1.4.1), surge entonces la pregunta sobre lo que sucede al debilitar la hipótesis de separabilidad y cambiarla por la de celularidad numerable. Sucede que esta pregunta no es decidible en ZFE, pues suponiendo HC, es posible construir dos espacios con la propiedad de Suslin cuyo producto no la conserva (la construcción se puede consultar en [Her09]); sin embargo, si agregamos a nuestros axiomas el AM, la propiedad de Suslin sí será productiva. A esto último nos abocaremos en nuestro primer ejemplo.

Lema 3.1. *Si* $\{X_i : i \in I\}$ *es una familia de espacios topológicos tal que para cada* $F \subseteq I$ *finito* $\prod_{i \in F} X_i$ *posee la propiedad de Suslin, entonces* $\prod_{i \in I} X_i$ *también tiene la propiedad de Suslin.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $U = \{u_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia de abiertos en $\prod_{i \in I} X_i$, ajena por pares y no numerable. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U está conformada por abiertos canónicos no vacíos de $\prod_{i \in I} X_i$; para cada $\alpha \in \omega_1$ denotemos al soporte de $u_\alpha = \prod_{i \in J} u_i^\alpha$ como $I_\alpha = \{i \in I : u_i^\alpha \neq X_i\}$. Sea $H = \{I_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

[2]Para una prueba sobre S-espacios y L-espacios, consulte [Tka11], la respectiva para espacios de Luzin se verá en esta sección.

Primero observemos que si $\alpha < \beta < \omega_1$, como $u_\alpha \cap u_\beta = \emptyset$, entonces existe $i \in I$ tal que $u_i^\alpha \cap u_i^\beta = \emptyset$, pues de lo contrario existriría una función selectiva del conjunto $\{u_i^\alpha \cap u_i^\beta : i \in I\}$ y ésta sería un elemento de $u_\alpha \cap u_\beta$; denotemos $i_{\alpha,\beta} = i$. Además, como para cada $j \in I \setminus (I_\alpha \cap I_\beta)$ sucede que $u_j^\alpha = X_j$, o bien $u_j^\beta = X_j$, tenemos que $i_{\alpha,\beta} \in I_\alpha \cap I_\beta$.

Si H no es numerable, el Δ-lema (véase 1.4) asegura la existencia de $A \subseteq \omega_1$ no numerable y $r \subseteq \omega_1$, tales que para todo α, $\beta \in A$, $I_\alpha \cap I_\beta = r$. Por otro lado, si H es numerable, dado que los soportes son finitos, $J = \bigcup H$ también es numerable, entonces existe $A \subseteq \omega_1$ no numerable, tal que para todo α, $\beta \in A$, $r := I_\alpha = I_\beta$.

En cualquiera de los casos $U_r = \{\pi_r(u_\alpha) : \alpha \in A\}$, donde π_r es la proyección natural en $\prod_{i \in r} X_i$, es una familia ajena dos a dos y -por lo tanto- no numerable. Efectivamente, sean α, $\beta \in A$ distintos entre sí; por la observación anterior $i_{\alpha,\beta} \in r$, así que $\pi_r(u_\alpha)(i_{\alpha,\beta}) \cap \pi_r(u_\beta)(i_{\alpha,\beta}) = u_{i_{\alpha,\beta}}^\alpha \cap u_i^\beta = \emptyset$. Pero dado que r es finito, esto contradice el que $\prod_{i \in r} X_i$ tenga la propiedad de Suslin. Así que una familia como U no puede existir. □

El lema anterior nos muestra que dentro de ZFE se puede deducir la productividad arbitraria de la propiedad de Suslin a partir del *paso finito*; como lo remarcamos en los ejemplos 1.4.1, la condición de anticadena contable en ordenes de la forma $(\tau^*, \subseteq)$, con τ una topología, se traduce en la propiedad de Suslin para tal espacio topológico. Intuitivamente, en espacios con dicha propiedad las colecciones no numerables de abiertos *deberían de amontonarse*, podemos pensar en la siguiente definición como ese amontonamiento y, utilizando las cualidades combinatorias del AM, en el teorema que sigue podremos asegurar que, efectivamente, sucede.

Definición 3.2. Diremos que una familia de conjuntos $B = \{B_i : i \in I\}$ posee la *propiedad de intersección finita* (*pif*), si para todo $F \subseteq I$ finito, $\bigcap_{i \in F} B_i$ es distinta del vacío.

Definición 3.3. Recuerde que una familia celular en un espacio topológico es una colección de abiertos no vacíos y ajenos dos a dos. Si X es un espacio topológico, la celularidad de X, que denotaremos por $c(X)$, será el supremo de las cardinalidades de una familia celular en X.

Lema 3.4 (MA($\aleph_1$)+$\neg$HC)**.** *Si X es un espacio topológico con la propiedad de Suslin, y $U = \{u_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia no numerable de $\tau(X)$. Entonces existe $A \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la propiedad de intersección finita.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \omega_1$ definamos a $v_\alpha = \bigcup_{\beta \geqslant \alpha} u_\beta$. Observe que si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $v_\beta \subset v_\alpha$. Afirmamos que

$$\exists \delta < \omega_1 \forall \beta < \omega_1 (\beta > \delta \to \mathrm{cl}(v_\beta) = \mathrm{cl}(v_\delta)) \qquad (*)$$

Supongamos lo contrario; haciendo esto podremos construir una familia no numerable de abiertos ajenos, que podemos pensar como *anillos anidados*: tenemos que para todo $\alpha < \omega_1$, existe $\beta_\alpha > \alpha$ tal que $cl(\nu_\alpha) \setminus cl(\nu_{\beta_\alpha}) \neq \emptyset$. Entonces es posible construir por recursión, una sucesión en ω_1 que sea estrictamente creciente $\{\alpha_\beta\}_{\beta<\omega_1}$ y tal que para todo $\beta < \gamma < \omega_1$, $\nu_{\alpha_\beta} \setminus cl(\nu_{\alpha_\gamma}) \neq \emptyset$. Pero esto resulta en una contradicción, pues el conjunto $\{\nu_{\alpha_\beta} \setminus cl(\nu_{\alpha_{\beta+1}}) : \beta < \omega_1\}$ es una familia celular no numerable de X.

Fijemos $\delta < \omega_1$ que satisfaga $(*)$, esta propiedad asegurará que exista una familia no numerable de U tal que todos sus elementos intersequen a u_δ; el axioma de Martin seleccionará un subconjunto G de esas intersecciones de tal manera que la colección elegida tenga la pif y no sea numerable. A su vez, con ellos elegiremos a una subcolección de $\{u_\alpha : \delta \leqslant \alpha < \omega_1\}$ cuidando que ésta herede la pif.

Definamos en $P = \{p \subseteq u_\delta : p$ es abierto distinto del vacío$\}$ a la relación $\leqslant$, donde si $p,q \in P$, $p \leqslant q$ si y sólo $p \subseteq q$. Note que del hecho de que X tiene la propiedad de Suslin se deriva que P satisface la cac. Para que G no sea numerable, definiremos a los densos de la siguiente manera: para cada $\alpha > \delta$ en ω_1, sea $D_\alpha = \{p \in P : \exists\beta \geqslant \alpha(p \subseteq u_\beta)\}$. Verifiquemos que cada D_α es denso en P: sean $\alpha > \delta$ y $p \in P$ arbitrarios, como $p \subseteq cl(\nu_\delta) = cl(\nu_\alpha)$ y p es abierto no vacío, $p \cap \nu_\alpha$ tampoco es vacío, debido a ello y a que $\nu_\alpha = \bigcup_{\beta\geqslant\alpha} u_\beta$, existe $\beta \geqslant \alpha$ tal que $q = p \cap u_\beta \neq \emptyset$, así $q \in D_\alpha$ y extiende a p.

Sea $D = \{D_\alpha : \delta < \alpha < \omega_1\}$. Por el AM existe G, un filtro D-genérico. En consecuencia, si $A = \{\alpha < \omega_1 : \exists p \in G(p \subseteq u_\alpha)\}$, de que G tiene la pif se desprende que $U = \{u_\beta : \beta \in A\}$ la tiene también, y dado que para cada $\alpha > \delta$, existe $\beta \geqslant \alpha$ tal que $\beta \in A$, U no es numerable.

□

Teorema 3.5. *(MA($\aleph_1$)+¬HC) La propiedad de Suslin se preserva bajo productos arbitrarios.*

Demostración. Por el lema 3.1, bastará con demostrar que esto es cierto para el producto de dos espacios. Sean entonces, (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos con la propiedad de Suslin.

Supongamos, por reducción al absurdo, que U es una familia celular no numerable de $X \times Y$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que es de la forma $U = \{u^1_\alpha \times u^2_\alpha : u^1_\alpha \in \tau(X)$ y $u^2_\alpha \in \tau(Y)$ para cada $\alpha \in \omega_1\}$.

Por el lema 3.4, existe $A \subseteq \omega_1$ no numerable y tal que $\{u^1_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la pif. Pero como para todo $\alpha,\beta \in A$ se tiene que $u_\alpha \cap u_\beta = \emptyset$ y $u^1_\alpha \cap u^1_\beta \neq \emptyset$, por fuerza

$u^2_\alpha \cap u^2_\beta = \emptyset$. Por ello $\{u^2_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia celular no numerable, contradiciendo que Y posee la propiedad de Suslin. Como esto nació de suponer la existencia de U , podemos concluir que la propiedad de Suslin se preserva bajo productos arbitrarios. $\square$

3.2. La versión topológica del Axioma de Martin

Para la siguiente sección necesitaremos la versión topológica del Axioma de Martin, por ello aprovechamos para presentar esta variante. Pero antes, por su similitud, presentaremos otra generalización del teorema de primera categoría de Baire, lo que aporta a lo que ya hemos hecho en el teorema 2.22, es un procedimiento ligeramente distinto y que señalará que las únicas cualidades que necesitábamos de $\mathbb{R}$ en aquél teorema, eran el que sus abiertos son infinitos y que es 2AN, es decir, que posee alguna base numerable.

Teorema 3.6 (AM+¬HC)**.** *Sea* (X, τ) *es un espacio topológico* T_1, 2AN *y denso en sí mismo. Si* $N = \{N_\alpha : \alpha < \kappa\}$*, con* $\omega \leqslant \kappa < \mathfrak{c}$*, es una familia de densos en ninguna parte de* X*, entonces* $\bigcup N$ *es de primera categoría.*

Demostración. Sean (X, τ) y $N = \{N_\alpha : \alpha < \kappa\}$ como en la hipótesis. Consideremos una base numerable $B = \{B_n : n \in \omega\}$ de X. Con el Axioma de Martin podremos fijar un subconjunto B' de B con la propiedad de que para cada $\alpha < \kappa$, N_α sólo intersecará a una cantidad finita de sus elementos y tal que para cualquier $n \in \omega$, habrá una cantidad infinita de elementos de B' contenidos en B_n. Esta última propiedad nos permitirá construir una colección de densos, mientras que la primera se encargará de que la colección $\bigcup N$ esté contenida en el complemento de esos densos. Para ello, si $\alpha < \kappa$ y $m \in \omega$, definimos a $A_\alpha = \{n \in \omega : B_n \cap N_\alpha \neq \emptyset\}$ y a $C_j = \{n \in \omega : B_n \subseteq B_j\}$; consideremos a las colecciones $A = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $C = \{C_j : j \in \omega\}$, notemos que tanto A como C tienen cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$. Además, como X es T_1 y denso en sí mismo, para cada $j \in \omega$, C_j es infinito.

El que X sea denso en sí mismo y que N_α sea denso en ninguna parte, nos permitirá demostrar que las colecciones recientemente definidas, cumplen las premisas del lema de Solovay: sean $n \in \omega$ y $\{\alpha_1, ...\alpha_k\} \subseteq \kappa$, con $k \in \omega$, veamos que $C_n \setminus \bigcup_{i \leqslant k} A_{\alpha_i}$ es infinito. Como para cada $i \leqslant k$, N_{α_i} es denso en ninguna parte, $\bigcup_{i \leqslant k} N_{\alpha_i}$ también lo es. Por lo anterior y porque $B_n \in \tau*$, $W = B_n \setminus cl(\bigcup_{i \leqslant k} N_{\alpha_i})$ es un abierto no vacío. Debido a que B es una base, existe $B_l \subseteq W$. De nuevo, como X es T_1 y denso en sí mismo, $I = \{m \in \omega : B_m \subseteq B_l\}$ es infinito. Finalmente, como $B_l \cap \bigcup_{i \leqslant k} N_{\alpha_i} = \emptyset$ tenemos que $I \subseteq C_n \setminus \bigcup_{i \leqslant k} A_{\alpha_i}$; luego, siendo infinito I, sucede que este último conjunto también es infinito.

Por el lema de Solovay (véase 2.6), podemos concluir que existe $d \subseteq \omega$ tal que para cada $\alpha < \kappa$, $|A_\alpha \cap d| < \aleph_0$ y para cada $n \in \omega$, $|C_n \cap d| = \aleph_0$. Así, la colección $B' = \{B_n : n \in d\}$ es como la buscábamos.

Definamos para cada $m \in \omega$, al abierto $U_m = \bigcup\{B_n \in B' : m < n < \omega\}$, recordemos que B es una base. Sea $B_n \in B$; como $|C_n \cap d| = \aleph_0$, existe $k \in \omega$ tal que $k > m$ y $k \in C_n \cap d$, luego, $\emptyset \neq B_k \subseteq U_m \cap B_n$, y por lo tanto U_m es denso. Denotemos para cada $m \in \omega$, $F_m = X \setminus U_m$, como $X \setminus \mathrm{cl}(F_m) = X \setminus F_m$ es abierto y denso en X, F_m es denso en ninguna parte de X. Como cualquier subconjunto de un dnp también lo es, habremos concluido la demostración si $\bigcup N \subseteq \bigcup\{F_m : m \in \omega\}$: sea $\alpha < \kappa$, $A_\alpha \cap d$ es finito, luego existe $m \in \omega$ tal que $A_\alpha \cap d \subseteq m$, así $N_\alpha \cap B_l = \emptyset$ para cada $l > m$ y por lo tanto $N_\alpha \cap U_m = \emptyset$ y así $N_\alpha \subseteq F_m$. Por lo tanto N es de primera categoría en X. □

El enunciado al que nos referimos en el teorema que sigue es conocido como la *versión topológica del Axioma de Martin*.

Teorema 3.7. *El axioma de Martin implica el siguiente enunciado: «Dado un espacio topológico X, compacto, T_2 y con la propiedad de Suslin, si N es una familia de nunca densos en X y $|N| < \mathfrak{c}$, entonces $\bigcup N \neq X$».*

Demostración. Supongamos que (X, τ) es un espacio compacto y T_2, $c(X) = \omega$ y que $N = \{N_\alpha : \alpha < \kappa\}$, $\aleph_0 < \kappa < \mathfrak{c}$ es una familia de nunca densos en X. Como hemos observado en el ejemplo 1.4.1, el conjunto $(P, \leqslant)$ con $P = \tau^*$ y $p \leqslant q$ si y sólo si $p \subseteq q$, para $p, q \in P$, es un preorden que satisface la cac. Para cada $\alpha < \kappa$, definamos $D_\alpha = \{p \in P : \mathrm{cl}(p) \cap N_\alpha = \emptyset\}$; estos conjuntos son densos pues si $p \in \tau^*$ y $\alpha < \kappa$, entonces existe $q \in \tau*$ tal que $q \subseteq p$ y $q \cap N_\alpha = \emptyset$, porque de lo contrario, $p \subseteq \mathrm{cl}(N_\alpha)$ y esto contradice el que N_α sea nunca denso. Como X es regular, podemos fijar $r \in P$, tal que $\mathrm{cl}(r) \subseteq q$, y así $r \in D_\alpha$ y extiende a p. Sea $D = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$, por el AM, existe G un filtro D-genérico. Al ser un filtro posee la propiedad de intersección finita; debido a ello, $\{\mathrm{cl}(p) : p \in G\}$ es una familia de cerrados con la pif, y dado que X es compacto, $\bigcap\{\mathrm{cl}(p) : p \in G\} \neq \emptyset$. Finalmente, notemos que si $\alpha < \kappa$, entonces existe $p \in G$ tal que $\mathrm{cl}(p) \cap N_\alpha = \emptyset$, y que esto asegura que $\bigcap\{\mathrm{cl}(p) : p \in G\} \subseteq X \setminus \bigcup N$. Por lo tanto el axioma de Martin, implica que el enunciado es verdadero. □

Ahora probaremos la equivalencia entre el Axioma de Martin y su versión topológica; la prueba de que su versión topológica implica al AM será más elaborada que la implicación anterior, por ello, la separaremos en los siguientes lemas. Cada uno de esos lemas cobrará sentido cuando lo utilicemos en la prueba del teorema 3.14.

Lema 3.8. *Si $(P, \leqslant)$ es un orden parcial, y para cada $p \in P$ definimos $N_p = \{q \in P : q \leqslant p\}$, $\{N_p : p \in P\}$ es base de una topología τ de P. Además, el conjunto $R = \{u \in \tau^* : u =$*

$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(u))\}$, *a cuyos elementos llamaremos abiertos regulares, o, si no hay ambigüedad, regulares, tiene las siguientes propiedades:*

i) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(u)) \in R$ *para cualquier* $u \in \tau^*$.

ii) Si $u \in \tau$ *y* $\mathrm{cl}(u) \neq P$, *entonces* $P \setminus \mathrm{cl}(u) \in R$.

iii) Si $u, v \in R$ *y* $u \cap v \neq \emptyset$, *entonces* $u \cap v \in R$.

Demostración. Primero observemos que debido a que $P = \bigcup\{N_p : p \in P\}$ y a que para cualesquiera $p, q, r \in P$, tales que $r \in N_p \cap N_q$ se tiene que $N_r \subseteq N_p \cap N_q$, entonces la colección $\{N_p : p \in P\}$, en efecto, genera una topología τ en P de la cual es una base.

Para verificar que R tiene la propiedad i) fijemos $w \in \tau^*$; es casi inmediato el que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w))))$. Para la otra contención consideremos $u \in \tau$ tal que $u \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w)))$, bastará con mostrar que $u \subseteq \mathrm{cl}(w)$, pero esto sucede pues $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w))) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(w)) = \mathrm{cl}(w)$. Entonces $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w))$ es regular, como deseábamos demostrar.

Verifiquemos ii): debido a que $\mathrm{cl}(u) \neq P$, $w = P \setminus \mathrm{cl}(u) \neq \emptyset$, para mostrar que w es regular bastará con sustentar que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w)) \subseteq w$. Observe que $w = P \setminus \mathrm{cl}(u) \subseteq P \setminus u$, así, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w)) \subset P \setminus u$. Luego, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w)) \cap u = \emptyset$, por ello, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w)) \cap \mathrm{cl}(u) = \emptyset$, es decir $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(w)) \subseteq P \setminus \mathrm{cl}(u) = w$. En consecuencia, w es regular.

Para mostrar iii), sólo note que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(u \cap v)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(u) \cap \mathrm{cl}(v)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(u)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(v)) = u \cap v$. □

Diremos que $F \subseteq R$ es un *filtro en* R si: $F \neq \emptyset$, siempre que $u, v \in F$, entonces $u \cap v \in F$, y si $w \in R$ y $u \subseteq w$, sucede que $w \in F$. Un filtro en R será un *ultrafiltro o un filtro maximal en* R, si no existe otro filtro en R que lo contenga. Por otro lado, si $C \subseteq R$ no es vacía y cualquier intersección finita de sus elementos es distinta del vacío, diremos que C es *centrada*, si, además, C no está contenida propiamente en otra familia centrada, diremos que es *maximal*.

Lema 3.9. *Si* $F \subseteq R$ *son equivalentes las siguientes proposiciones:*

i) F *es un ultrafiltro.*

ii) F *es una familia centrada y maximal.*

iii) F *es centrada y para todo* $u \in R$, $u \in F$ *o bien* $P \setminus \mathrm{cl}(u) \in F$

Demostración. $\mathrm{i}) \Rightarrow \mathrm{ii})$ Como el vacío no es elemento de R, por la definición de filtro en R, todo filtro en R es una familia centrada. Entonces para probar que F es maximal entre las familias centradas bastará con mostrar que toda familia centrada está contenida en un filtro; sea C una familia centrada, proponemos $G = \{u \in R :$ existe $U \subseteq C$ finito y tal que $\bigcap U \subseteq u\}$. Por definición, G es distinta del vacío y cerrada bajo superconjuntos, sean $u, v \in G$, y $U, V \subseteq C$ finitas y tales que $\bigcap U \subseteq u$ y $\bigcap V \subseteq v$, luego $U \cup V$ es finita y $\bigcap(U \cup V) \subseteq u \cap v$, por ello, G es cerrado bajo intersecciones.

$\mathrm{ii}) \Rightarrow \mathrm{iii})$ Sea $u \in R$, si $u \in F$ habríamos concluído, supongamos que $u \notin F$. Como F es centrada maximal y $F \subsetneq F \cup \{u\}$, entonces existe $u_1, \dots u_n \in F$ tales que $u_1 \cap \cdots \cap u_n \cap u = \emptyset$. Como $u_1 \cap \cdots \cap u_n \in \tau^*$, entonces $u_1 \cap \cdots \cap u_n \cap \mathrm{cl}(u) = \emptyset$. Así $u_1 \cap \cdots \cap u_n \subseteq P \setminus \mathrm{cl}(u)$, por ello $F \cup \{P \setminus \mathrm{cl}(u)\}$ es una familia centrada. Por último, debido a que F es maximal y a que $F \subseteq F \cup \{P \setminus \mathrm{cl}(u)\}$, necesariamente $P \setminus \mathrm{cl}(u) \in F$.
$\mathrm{iii}) \Rightarrow \mathrm{i})$ Observemos primero que F es centrada maximal: si sucediera que no es maximal, existiría $u \in R \setminus F$ tal que $F' = F \cup \{u\}$ es centrada, entonces, por hipótesis, $P \setminus \mathrm{cl}(u) \in F \subset F'$, pero $P \setminus \mathrm{cl}(u) \cap u = \emptyset$, lo que contradice el que F' sea centrada. Como vimos en «$\mathrm{i}) \Rightarrow \mathrm{ii})$», toda familia centrada maximal está contenida en un filtro, entonces existe un filtro G que contiene a F. Ahora note que, como G es una familia centrada $G = F$, y por lo tanto, F es un filtro, y, más aún, F es un ultrafiltro. □

Definición 3.10. Si A es un conjunto, $B \subseteq A$ y $\mathfrak{F} \subseteq A^A$. Diremos que B *es cerrado respecto a la familia de funciones* $\mathfrak{F}$, si para toda $f \in \mathfrak{F}$, $f(B) \subseteq B$. También diremos que B es cerrado respecto a una función $g : A \times A \longrightarrow A$ si $g(B \times B) \subseteq B$.

Lema 3.11. *Sean* $\kappa \geqslant \aleph_0$, A *un conjunto no vacío,* $\mathfrak{F} = \{f_\alpha \in A^A : \alpha < \kappa\}$ *y* $g : A \times A \longrightarrow A$ *una función, entonces existe* $B \subseteq A$ *no vacío, con* $|B| \leqslant \kappa$ *tal que* B *es cerrado respecto a* $\mathfrak{F}$ *y a* g.

Demostración. Procederemos por recursión sobre ω; fijemos $a \in A$ y denotemos $B_0 = \{a\}$. Supongamos que para algún $n \in \omega$ hemos definido $B_n \subseteq A$ tal que $|B_n| \leqslant \kappa$. Definamos $B_{n+1} = B_n \cup g(B_n \times B_n) \cup \bigcup\{f_\alpha(B_n) : \alpha < \kappa\}$. Observe que $|g(B_n \times B_n)| \leqslant |B_n \times B_n| \leqslant \kappa$ y que para toda $\alpha < \kappa$, $|f_\alpha(B_n)| \leqslant |B_n| \leqslant \kappa$, en consecuencia $|B_{n+1}| \leqslant \kappa$. Por recursión, podemos concluir que existe una familia $\{B_n : n \in \omega\} \subseteq [A]^{\leqslant\kappa}$, tal que para cada $n \in \omega$ y para cada $\alpha < \kappa$, $g(B_n \times B_n) \subseteq B_{n+1}$ y $f_\alpha(B_n) \subseteq B_{n+1}$, entonces el conjunto $B = \bigcup\{B_n : n \in \omega\}$ es cerrado bajo $\mathfrak{F}$ y g, no es vacío y $|B| \leqslant \kappa$. □

Lema 3.12. *Si* κ *es un cardinal infinito, AM(*κ*) es equivalente a AM*(*κ*), donde AM*(*κ*) es el siguiente enunciado: sea* $(P, \leqslant)$ *un conjunto parcialmente ordenado que satisfaga la* *cac, con* $0 < |P| \leqslant \kappa$. *Si* D *es una familia de densos con cardinalidad a lo más igual a* κ, *entonces existe un filtro* D*-genérico en* P.

Demostración. Bastará con argumentar el que el enunciado $AM^*(\kappa)$ implica al $AM(\kappa)$. Sean $(P, \leqslant)$ un conjunto preordenado que satisfaga la cac y $D = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de densos en él.

Sea $\alpha < \kappa$, para cada $p \in P$, fijemos $p_\alpha \in D_\alpha$ tal que $p_\alpha \leqslant p$. Definamos a la función $f_\alpha : P \longrightarrow P$, como $f_\alpha(p) = p_\alpha$ siempre que $p \in P$. Asimismo, si $p, q \in P$ y $p||q$, fijemos $r_{p,q} \in P$ una extensión común de ellos; definimos a la función $g : P \times P \longrightarrow P$, como $g(p, q) = r_{p,q}$. Mientras que, si p y q son incompatibles, definimos $g(p, q) = p$.

El lema anterior nos asegura que existe $Q \subseteq P$ no vacío de cardinalidad menor o igual a κ y cerrado respecto a $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y respecto a g. Considere a Q con el orden que hereda de P; que sea cerrado respecto a $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ nos asegurará que para cada $\alpha < \kappa$, $D_\alpha \cap Q$ sea denso en Q: sean $\alpha < \kappa$ y $p \in Q$, por definición de f_α, $f_\alpha(p) \in D_\alpha$ y extiende a p, y debido a que Q es cerrado bajo f_α, $f_\alpha(p) \in D_\alpha \cap Q$. Por otro lado, el que Q es cerrado respecto a g, implica que cualquier anticadena de Q es una anticadena en P, y entonces Q también satisface la cac: sean $p, q \in Q$, observe que si p, q son compatibles respecto a P, dado que Q es cerrado bajo g, entonces son compatibles en Q; recordando que a la incompatibilidad la definimos como la negación de la compatibilidad, la observación implica que si p, q son incompatibles en Q, también lo son en P, por lo tanto si A es una anticadena en Q, también lo es en P y como P satisface la cac, A es numerable.

Nuestras observaciones nos permiten aplicar $AM^*(\kappa)$ a Q y $D' = \{D_\alpha \cap Q : \alpha < \kappa\}$; sea G' un fitlro D'-genérico en Q. Considere a $G = \{p \in P : \text{existe } q \in G' \text{ tal que } q \leqslant p\}$, dado que G' es un filtro en Q, G es un filtro en P. Y como para cualquier $\alpha < \kappa$, $G' \cap D_\alpha$, G es D-genérico. □

Lema 3.13. *Si* $(P, \leqslant)$ *es un orden parcial y* $p, q \in P$, *el conjunto* $D_{p,q} = \{r \in P : r \leqslant p \text{ y } r \leqslant q\} \cup \{r \in P : r \perp p\} \cup \{r \in P : r \perp q\}$ *es denso en* P.

Demostración. En efecto, sea $s \in P$, si existe $r \in P$ una extensión de s tal que $r \perp p$ y $r \perp q$ habremos concluido. De otra manera, todas las extensiones comunes de s son compatibles con p y q; en particular, existe $r \in P$ tal que $r \leqslant s$ y $r \leqslant p$, y al ser compatible con q, existe $t \in P$ tal que $t \leqslant r$ y $t \leqslant q$. Entonces t extiende a s y $t \in D_{p,q}$. □

Teorema 3.14. *El siguiente enunciado implica al Axioma de Martin: «dado un espacio topológico* X, T_2, *compacto y con la propiedad de Suslin, si* N *es una familia de nunca densos en* X *y* $|N| < \mathfrak{c}$, *entonces* $\bigcup N \neq X$*».*

Demostración. Sean $(P, \leqslant)$ un preorden que satisfaga la cac, $\omega < \kappa < \mathfrak{c}$ un cardinal y $D = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de densos en P, debemos asegurar la existencia de un filtro D-genérico. El lema 3.8 nos sugiere una topología que podríamos ocupar para aplicar nuestra hipótesis pues su definición emparenta el concepto de compatibilidad en $(P, \leqslant)$ con la propiedad de Suslin en (P, τ), sin embargo, dicha topología τ puede ni siquiera ser T_1[3], y nosotros buscamos un espacio T_2 y compacto. Para ello ocuparemos al conjunto $R \subseteq \tau$ definido en 3.8 y a las propiedades observadas en 3.9 para hacer un espacio X, compacto y T_2 vinculado con $(P, \leqslant)$ a través de (P, τ); ese vínculo es el que implicará el que X, además, posea la propiedad de Suslin. Esta suerte de compactación (X) es un caso particular de una construcción conocida como el *espacio de Stone de un álgebra booleana*

Considere al espacio $X = \{f \subseteq R : f \text{ es un ultrafiltro de } R\}$ y para cada $u \in R$ definamos $O_u \subseteq X$ como $O_u = \{f \in X : u \in f\}$. Veremos que la definición de filtro se presta para construir bases a partir de ellos, mientras que el que sean ultrafiltros nos ayudará para la compacidad y para que sea T_2.

Afirmamos que $O = \{O_u : u \in R\}$ es base de una topología para X: primero notemos que si $f \in X$, como $f \neq \emptyset$, existe $u \in R$ tal que $u \in f$, y por ello $X = \bigcup\{O_u : u \in R\}$, además, si $f \in O_u \cap O_v$, como f es un filtro y $v, u \in f$, $w = v \cap u \in f$ y por ello $f \in O_w$, además, si $h \in O_w$, como $u \cap v \in h$ y h es cerrado bajo superconjuntos, $u, v \in h$, por lo que $O_w \subseteq O_u \cap O_v$. Por lo tanto O es base de una topología de X que llamaremos μ.

Como augurábamos, (X, μ) es un espacio compacto y T_2. Para comenzar, mostremos que es Hausdorff; sean $f, g \in X$, elementos diferentes, al ser ambos ultrafiltros, existen $u \in f \setminus g$, por el lema 3.9, $u' = P \setminus cl(u) \in g$, así que $f \in O_u$ y $g \in O_{u'}$. Si suponemos que $h \in O_u \cap O_{u'}$, entonces $u, u' \in h$, pero el que $\emptyset = u \cap u' \in h$ va en contra de la centralidad de h, por lo que O_u y $O_{u'}$ son necesariamente ajenos.

Para mostrar que X es compacto, ya que O es una base de μ, será suficiente con probar que todo $O' \subseteq O$ que cubra a X posee una subcubierta finita. Supongamos por reducción al absurdo que existe $R' \subseteq R$ tal que $X = \bigcup\{O_u : u \in R'\}$ y tal que $O' = \{O_u : u \in R'\}$ no posee subcubiertas finitas. Entonces, para cada colección finita $F \subseteq R'$, debe existir $f_F \in X \setminus \bigcup\{O_u : u \in F\}$, luego, para cada $u \in F$, $P \setminus cl(u) \in f_F$, y dado que f es un filtro, $\bigcap\{P \setminus cl(u) : u \in F\} \neq \emptyset$. Por lo anterior, la colección $C = \{P \setminus cl(u) : u \in R'\}$ es centrada. Por una observación en la demostración de 3.9, existe $g \in X$ tal que $C \subseteq g$, lo cual nos lleva a una contradicción, pues como para

[3] Considere por ejemplo, a $\mathbb{N}$ con su orden usual, al ser numerable satisface la cac, pero es claro que dotado con τ, no es T_1

todo $u \in R'$, $u \cap P \setminus \mathrm{cl}(u) = \emptyset$, y g es un filtro, $g \notin \bigcup\{O_u : u \in R'\} = X$. Así, una cubierta como O' no puede existir.

Veamos que, además, (X, μ) tiene la propiedad de Suslin: supongamos que $R' \subseteq R$ es una colección no numerable y tal que $\{O_u : u \in R'\}$ es ajena por pares, observe que si $u, v \in R'$, entonces $O_u \cap O_v = O_{u \cap v}$, así que $O_u \cap O_v = \emptyset$ si y sólo si $u \cap v = \emptyset$. Entonces $\{u : u \in R'\}$ es una familia celular no numerable de (P, τ); para cada $u \in R'$, fijemos $p_u \in P$ tal que $N_{p_u} \subseteq u$. Notando que $p \perp q$ si y sólo si $N_p \cap N_q = \emptyset$, siempre que $p, q \in P$, tenemos que $\{p_u : u \in R'\}$ es una anticadena no numerable en P, lo cual contradice la elección de P. Por lo tanto, en (X, μ) no hay familias celulares y no numerables.

Ahora, para ligar a la familia D, de densos en $(P, \leqslant)$, con densos en ninguna parte de (X, μ), definamos para cada $p \in P$, al abierto $U(p) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(N_p)) \in \tau^*$, por el lema 3.8, $U(p) \in R$. Por esto último, si $\alpha < \kappa$, y definimos $W_\alpha = \bigcup\{O_{U(p)} : p \in D_\alpha\}$, sucede que $\mathfrak{W} = \{W_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mu$. Probemos que, además, $\mathfrak{W}$ es una colección de densos en X: sean $\alpha < \kappa$ y $U \in R$, arbitrarios, dado que O es base de μ, bastará con mostrar que $W_\alpha \cap O_U \neq \emptyset$. Como $U \in \tau^*$, existe $p \in P$ tal que $N_p \subseteq U$, y por la densidad de D_α, podemos seleccionar $q \in N_p \cap D_\alpha$, así $\emptyset \neq O_{U(q)} \subseteq W_\alpha$. Es claro que $N_q \subseteq N_p \subseteq U$, sea $f \in O_{U(q)}$, debido a que $U(q) \in f$ y $U(q) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(N_q)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(U)) = U$, $U \in f$, por lo tanto $f \in O_U$, lo que implica que $W_\alpha \cap O_U \neq \emptyset$.

Hemos probado que $\mathfrak{W}$ es una familia de abiertos densos en X, así $N = \{X \setminus w : w \in \mathfrak{W}\}$ es una familia de densos en ninguna parte y $|N| < \kappa$. Considerando todas nuestras observaciones, podemos aplicar nuestra hipótesis y elegir $f \in X \setminus \bigcup N = \bigcap\{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Sea $C = \{p \in P : U(p) \in f\}$, primero veamos que se cumplen las siguientes propiedades:

i) $\forall \alpha < \kappa (D_\alpha \cap C \neq \emptyset)$;

ii) $\forall p \in C \forall q \in P (p \leqslant q \to q \in C)$;

iii) $\forall p, q \in C (p \| q)$.

Efectivamente, demostremos i), tenemos que $f \in W_\alpha$, así que existe $p_\alpha \in D_\alpha$ tal que $f \in O_{U(p_\alpha)}$, entonces $U(p_\alpha) \in f$ y, por ello, $p_\alpha \in C$. Luego $p_\alpha \in D_\alpha \cap C$. Por otro lado, para mostrar ii) note que dados $p \in C$ y $q \in P$ tales que $p \leqslant q$, tenemos que $N_p \subseteq N_q$, por lo que $U(p) \subseteq U(q)$, y como $U(p) \in f$, por la definición de filtro, $U(q) \in f$, es decir $q \in C$. Veamos ahora que iii) también es verdadera: sean $p, q \in C$, por definición de C, $U(p), U(q) \in f$, dado que f es un filtro, $U = U(p) \cap U(q)$ es un abierto no vacío. Como $U(p) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(N_p))$,

$W = U \cap N_p$ es abierto y no vacío y está contenido en $U(q)$. Asimismo, dado que $U(q) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(N_q))$, tenemos que $W \cap N_q \neq \emptyset$, en particular, existe $r \in N_p \cap N_q$, es decir, p y q son compatibles. Si pudiéramos justificar que $r \in C$, C sería el filtro genérico que buscamos, pero no podemos asegurarlo. Sin embargo, podremos sortear esta dificultad y recuperar lo hecho modificando ligeramente a la familia D.

Por el lema 3.12, podemos suponer que $|P| = \kappa$, mientras que el lema 3.13, nos asegura que dados $p, q \in P$, el conjunto $D_{p,q}$ es denso en P. Sea $D' = D \cup \{D_{p,q} : p, q \in P\}$, note que $|D'| \leqslant \kappa$; retomando lo demostrado antes, existe $F \subseteq P$ que satisface $i), ii)$ y (iii). Sean $p, q \in F$, por (i) existe $r \in D_{p,q} \cap F$, por $iii)$, no es posible que $r \perp q$, ni el que $r \perp p$, esto implica, junto con la definición de $D_{p,q}$, que r extiende a p y a q. Esta propiedad y $ii)$ aseguran que F es un filtro, mientras que $i)$ nos muestra que F es D'-genérico, en particular, es D-genérico, como deseábamos. □

Ahora es lícito darle el siguiente nombre a la propiedad que nos ocupó:

Definición 3.15. Al siguiente enunciado lo llamaremos la *versión topológica del Axioma de Martin*: «dado un espacio topológico X, T_2, compacto y con la propiedad de Suslin, si N es una familia de nunca densos en X y $|N| < \mathfrak{c}$, entonces $\bigcup N \neq X$».

Teorema 3.16. *El axioma de Martin es equivalente a su versión topológica.*

Demostración. Se sigue de los teoremas 3.7 y 3.14. □

3.3. Miscelánea

Para la primera aplicación de esta sección, recordemos una propiedad muy útil que comparten todos los espacios métricos, más aún, todos los espacios primero numerables (o espacios 1AN): si un punto pertence a la cerradura de un conjunto A es sencillo construir una sucesión en A que converja a dicho punto. Dado que los filtros son la generalización de la sucesiones en topología, es natural que el Axioma de Martin nos dé resultados sobre ellas. En específico, a través del lema de Booth mostraremos una suerte de generalización de la propiedad de la cerradura en espacios 1AN (espacios con carácter numerable) que menciónabamos, en espacios con carácter menor que la cardinalidad del continuo.

Definición 3.17. Sean (X, τ) y $A \subseteq X$, introducimos los siguientes conceptos:

- El *carácter de* A *en* X será el cardinal

$$\chi(A, X) = \mathrm{inf}\{|B| : B \text{ es una base de } A \text{ en } X\}$$

donde B será una *base* de A si $B \subseteq \tau$, $B \neq \emptyset$, $A \subseteq \bigcap B$ y para todo abierto U tal que $A \subseteq U$, existe $W \in B$, tal que $W \subseteq U$.

- El *carácter de* X será igual a

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$$

con $\chi(x, X) = \chi(\{x\}, X)$.

Teorema 3.18 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}} + \neg\mathrm{HC}$)**.** *Si* X *es un espacio topológico* T_1 *y* $x \in X$ *es tal que* $\chi(x, X) < \mathfrak{c}$, *entonces para todo* $A \subseteq X$ *numerable y tal que* $x \in \mathrm{cl}(A)$, *existe una sucesión en* A *que converge a* x.

Demostración. Si $x \in A$, la sucesión constante x funcionará, así que revisemos el caso en el que $x \in A'$. Notemos que el que X sea T_1 y $x \in A'$, obliga a que, para toda vecindad u de x, $|u \cap A| = \aleph_0$. Fijemos una base de vecindades de x, $\mathcal{U}$, de cardinalidad menor a $\mathfrak{c}$. Por lo anterior, si $F \subseteq \mathcal{U}$ es finito, $\bigcap F \cap A$ es infinito.

Ahora elijamos una biyección $f : A \longrightarrow \omega$, resulta que por las observaciones anteriores y porque f es biyectiva, el conjunto $U^* = \{f[A \cap u] : u \in \mathcal{U}\}$, es una familia de subconjuntos infinitos de ω con la *pfif* y $|U^*| \leqslant |\mathcal{U}| < \mathfrak{c}$. Así que por el lema de Booth (demostrado en 2.14), existe $s^* \subseteq \omega$, infinito y tal que para todo $u^* \in \mathcal{U}^*$, $s^* \setminus u^*$ es finito.

Consideremos al conjunto $s = f^{-1}[s^*] \subseteq A$ y numerémoslo; $s = \{a_n : n \in \omega\}$. Veamos que $(a_n)_{n \in \omega}$ converge a x: recordemos que $\mathcal{U}$ es una base de vecindades de x, sea $u \in \mathcal{U}$, arbitraria. Observe que $|s \setminus u| \leqslant |s \setminus (u \cap A)| = |s^* \setminus f[u \cap A]| < \aleph_0$, así que existe $n \in \omega$ tal que para todo natural $m > n$, $a_m \in u$. Por consiguiente, s converge a x. □

Definición 3.19. Sea X un espacio topológico.

- Si $\kappa > 0$ es un cardinal y $A \subseteq X$, definimos al conjunto $[A]_\kappa = \bigcup\{\mathrm{cl}(B) : B \subseteq A$ y $|B| \leqslant \kappa\}$
- Definimos al cardinal de *estrechez* como $t(X) = \inf\{\kappa : \mathrm{cl}(A) = [A]_\kappa$ para todo $A \subseteq X\}$.

El teorema que sigue es la generalización que buscábamos para espacios donde $\chi(X) < \mathfrak{c}$, siempre que dichos espacios tengan estrechez numerable.

Teorema 3.20 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}} + \neg\mathrm{HC}$)**.** *Si* X *es* T_1, $\chi(X) < \mathfrak{c}$ *y* $t(X) = \omega$, *entonces para todo* $A \subseteq X$ *y* $x \in \mathrm{cl}(A)$, *existe una sucesión en* A *que converge a* x.

Demostración. Observe que si $A \subseteq X$ y $x \in \mathrm{cl}(A)$, como $t(X) = \omega$, $\mathrm{cl}(A) = \bigcup\{\mathrm{cl}(B) : B \subseteq A \text{ y } |B| \leqslant \omega\}$, luego, existe $B \subseteq A$ numerable y tal que $x \in \mathrm{cl}(B)$, por el teorema 3.18, existe una sucesión en B -y por lo tanto en A- que converge a x. □

Los espacios perfectamente normales son espacios topológicos donde los conjuntos abiertos se pueden representar como alguna unión numerable de cerrados, o equivalentemente, los cerrados son intersección numerable de abiertos. Debido a esta última caracterización, la propiedad de ser *perfectamente normal* más T_4 es considerada por algunos autores como un axioma de separación más: el axioma T_6. Por otro lado, aunque es sencillo verificar que todos los subconjuntos cerrados de un espacio T_4, también son T_4, no todos los subconjuntos de un espacio T_4 son T_4. Los espacios que son hereditariamente normales y T_1, resultan ser un punto medio entre los espacios T_4 y T_6 (como se establece en [KPHNV04]).

Algunos resultados importantes de axiomas de separación versan sobre condiciones que podemos agregar a un espacio para asegurar que satisfaga un axioma de separación más fuerte [4]. Podemos agrupar a nuestra siguiente aplicación con las pertenecientes a este tipo; específicamente, encontraremos condiciones para que un espacio sea T_6. De hecho, dichas condiciones asegurarán algo bastante más fuerte, pues en los espacios que las cumplen, todo subconjunto es intersección numerable de abiertos. Esto último nos permitirá dar una prueba topológica de que el conjunto potencia de cualquiera de los cardinales introducidos al aceptar $\neg$HC, tiene la misma cardinalidad que $\mathcal{P}(\omega)$.

Definición 3.21. Sean (X, τ) es un espacio topológico, $A \subseteq X$ y κ un cardinal:

- Diremos que A es un conjunto G_κ si existe $U = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}o \subseteq \tau$ tal que $A = \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. En el caso en el que en el que U sea numerable, diremos que A es G_δ.
- Por otro lado, si existe una familia $\{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ compuesta por cerrados en X, tal que $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} F_\alpha$, diremos que A es un conjunto F_κ. Análogamente, si $\kappa = \aleph_0$, a A se le conoce como un conjunto F_σ.
- Si todo abierto en X es un conjunto F_σ [5], nos referiremos a X como un espacio *perfectamente normal*.

Definición 3.22. Si (X, τ) es un espacio topológico, τ es generada por una métrica ρ y $A \subseteq X$. Diremos que A es *totalmente acotado* en X si para todo $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq A$ finito tal que $A \subseteq \bigcup_{x \in F} B(x, \epsilon)$.

[4] Por ejemplo, T_2 más compacidad implica T_4.

[5] Observe que esto es equivalente a que todo cerrado sea G_δ.

Teorema 3.23 ($AM_{\sigma-\mathtt{centrado}} + \neg HC$)**.** *En un espacio* X *Tychonoff,* $2AN$ *y de cardinalidad menor que* $\mathfrak{c}$*, todo subconjunto de* X *es* G_δ*. En particular,* X *es perfectamente normal.*

Demostración. Sea (X,τ) un espacio topológico que cumple con las hipótesis, y de cardinalidad κ. Por el conocido teorema de inmersión de Tychonoff[6], X es homeomorfo a un subespacio del producto topológico I^ω, donde $I = [0,1]$ con su topología usual, pero al ser producto numerable de metrizables, I^ω es a su vez metrizable. Así, podemos suponer que τ es generada por la restricción a X de una métrica ρ de I^ω, que denotaremos con δ.

Lo anterior lo necesitaremos para construir una base numerable de X, $B = \{B_n : n \in \omega\}$, con la propiedad de que $\mathtt{diam}_\delta(B_n)$[7] tienda a cero cuando n tienda a infinito: como I^ω es compacto, es sencillo demostrar que es totalmente acotado en sí mismo con la métrica ρ, por ello X es totalmente acotado en sí mismo con δ. Luego, para todo $n \in \omega \setminus \{0\}$, existe $F_n \subseteq X$ finito tal que $X = \bigcup_{x \in F_n} B(x, \frac{1}{n})$. Utilizando el hecho de que X es métrico y técnicas estándar, resulta que cualquier numeración de $B = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in F_n \wedge 0 < n < \omega\}$, digamos $B = \{B_n : 0 < n < \omega\}$, es una base con las características que buscábamos. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la numeración $\{B_n : 0 < n < \omega\}$ no tiene repeticiones.

Ahora notemos que:

$$\forall B' \subseteq B(|B'| = \aleph_0 \to |\bigcap B'| \leqslant 1). \qquad (\star)$$

Efectivamente, sea $B' \subseteq B$ infinito y supongamos, por reducción al absurdo, que $x, y \in \bigcap B'$ son distintos entre sí. Luego $\delta(x,y) > 0$, sea $\epsilon = \delta(x,y)$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \mathtt{diam}_\delta(B_n) = 0,$$

existe $m \in \omega$ tal que para todo natural $n \geqslant m$, $\mathtt{diam}_\delta(B_n) < \epsilon$. Así, como B' es infinito, existe $n \geqslant m$ tal que $B_n \in B'$. Pero $x, y \in B_m$, entonces $\epsilon = \delta(x,y) < \epsilon$, esta contradicción surgió de suponer que x, y son distintos, luego $|\bigcap B'| \leqslant 1$.

Sea $Y \subseteq X$, para mostrar que Y es G_δ, fijemos $X = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, una numeración sin repeticiones de X. Para cada $\alpha < \kappa$ definamos $N_\alpha = \{n \in \omega : x_\alpha \in B_n\}$. Definamos también a las familias $A = \{N_\alpha : x_\alpha \in Y\} \setminus \{N_\alpha : x_\alpha$ es un punto aislado$\}$ y $C = \{N_\alpha : x_\alpha \in X \setminus Y\}$. Podremos aplicar el lema de Solovay en las colecciones A y C para seleccionar elementos de B que nos permitan crear la colección numerable

[6] Puede consultar una prueba de éste en [CT15].

[7] Recuerde que el diámetro de un subconjunto no vacío de un espacio métrico se define como el supremo de las distancias entre sus elementos.

de abiertos que buscamos.

Primero notemos que $|A|, |C| \leqslant |X| < \mathfrak{c}$. Para asegurar que se cumpla la otra hipótesis del lema de Solovay fijemos $N_\alpha \in A$ y $\mathcal{F} \subset C$ finito; observe que $\mathcal{F} = \{N_\beta : \beta \in F\}$ para algún $F \subseteq \kappa$ finito. Debemos mostrar que $N_\alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}$ es infinito. Supongamos lo contrario, entonces N_α es finito, o bien, N_α es infinito y $N_\alpha \setminus \bigcup \mathcal{F}$ es finito. En el primer caso, por la definición de B y debido a que X es métrico, tenemos que x_α es un punto aislado de X, pero esto contradice la definición de A. Luego, N_α es infinito y $N_\alpha \cap \bigcup \mathcal{F}$ es infinito. Como $\mathcal{F}$ es finito, debe existir $\beta \in F$ tal que $|N_\alpha \cap N_\beta| = \aleph_0$. Por esto último y debido a que $\{B_n : n \in \omega\}$ no tiene repeticiones, la colección $B' = \{B_n : n \in N_\alpha \cap N_\beta\} \subseteq B$ es infinita; pero, por la definición de N_α y de N_β, sucede que $x_\alpha, x_\beta \in \bigcap B'$, y como $x_\alpha \in Y$ y $x_\beta \notin Y$, esto contradice la propiedad $(\star)$. Por lo tanto, se satisfacen las condiciones del lema de Solovay: fijemos $d \subseteq \omega$ tal que para todo $a \in A$ suceda que $a \cap d$ es infinito y para todo $c \in C$ el conjunto $c \cap d$ sea finito.

Siendo así, $D = \{B_n : n \in d\}$ es una colección numerable de abiertos que tiene la propiedad de que si $x \in X \setminus Y$, x es elemento de sólo una cantidad finita de dicha colección, es decir, $x = x_\alpha$ para algún $\alpha \in \kappa$ y $|N_\alpha \cap d| < \aleph_0$. Por otro lado, si $x \in Y$, entonces es elemento de una cantidad infinita de abiertos de D, pues, $x = x_\alpha$ para algún $\alpha \in \kappa$ y $|N_\alpha \cap d| = \aleph_0$. Por ello, si para cada $n \in \omega$ definimos $V_n = \bigcup\{B_m : m \in d \setminus n\} \cup \bigcup\{\{x\} \in \tau : x \in Y \text{ es un punto aislado}\}$ tenemos que $Y = \bigcap\{V_n : n \in \omega\}$. Recordando que Y fue arbitrario, se cumple nuestra afirmación original. $\square$

Teorema 3.24 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}} + \neg\mathrm{HC}$)**.** *Si* X *un espacio* T_4, 2AN *y de cardinalidad menor a* $\mathfrak{c}$, *entonces es* T_6.

Teorema 3.25 ($\mathrm{AM}_{\sigma-\mathrm{centrado}} + \neg\mathrm{HC}$)**.** *Si* κ *es un cardinal infinito menor a* $\mathfrak{c}$, *entonces* $2^\kappa = 2^\omega$.

Demostración. Sea $\kappa < \mathfrak{c}$ un cardinal infinito. Bastará con mostrar que $2^\kappa \leqslant 2^\omega$. Consideremos $X \subseteq \mathbb{R}$, un conjunto de cardinalidad κ dotado con la topología de subespacio τ, que hereda de $\tau_\mathbb{R}$. Se tiene entonces que X es métrico y de cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$. Por el teorema anterior (3.23), para cada $Y \subseteq X$, podemos fijar una colección numerable de abiertos $G_Y = \{U_n^Y : n \in \omega\}$, tal que $Y = \bigcap G_Y$. Consideremos a la función $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \tau^\omega$, donde para cada $Y \in \mathcal{P}(X)$, $f(Y) : \omega \longrightarrow \tau$ está definida como $f(Y)(n) = U_n^Y$, si $n \in \omega$. Dado que para cada $Y \subseteq X$, $Y = \bigcap G_Y$, f es inyectiva, así $|\mathcal{P}(X)| \leqslant |\tau^\omega|$.

Sea B una base numerable de X, observemos que por ser base $|\tau| \leqslant |\mathcal{P}(B)| \leqslant 2^\omega$. Se concluye así, la siguiente desigualdad: $|\mathcal{P}(X)| \leqslant |\tau|^\omega \leqslant 2^\omega = \mathfrak{c}$. Por lo tanto

$2^\kappa = 2^\omega$. □

3.4. L-espacios y S-espacios fuertes

Definición 3.26. Sea X un espacio topológico.

- La *densidad* de X será $d(X) = \inf\{|D| : D \text{ es denso en } X\} + \aleph_0$. Si $d(X) = \aleph_0$ a X le llamaremos *separable*.
- Definimos al cardinal $hd(X) = \sup\{d(Y) : Y \text{ es subespacio de } X\}$. Cuando $hd(X) = \aleph_0$, a X se le llama *hereditariamente separable*.
- Definimos $hd^*(X) = \sup\{d(X^n) : n \in \omega\}$.
- El *grado de Lindelöf de X*, será $l(X) = \inf\{\kappa \geqslant \aleph_0 :$ para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta de cardinalidad $\kappa\}$. Si $l(X) = \aleph_0$, diremos que X es un *espacio de Lindelöf*.
- $hl(X) = \sup\{l(Y) : Y \subseteq X\}$. En el caso en el que $hl(X) = \aleph_0$, a X lo llamaremos *hereditariamente Lindelöf*.
- Definimos $hl^*(X) = \sup\{l(X^n) : n \in \omega\}$.

Definición 3.27. Si X es un espacio topológico, introducimos los siguientes conceptos:

- Diremos que X es un *S-espacio* si es hereditarimante separable y su grado de Lindelöf no es numerable, es decir, si $hd(X) \leqslant \aleph_0 < l(X)$.
- X será un *S-espacio fuerte* cuando $hd^*(X) \leqslant \aleph_0 < l(X)$.
- Diremos que X es un *L-espacio* si es hereditariamente Lindelöf empero no separable, esto es, $hl(X) \leqslant \aleph_0 < d(X)$.
- X será un *L-espacio fuerte* si $hl^*(X) \leqslant \aleph_0 < d(X)$.

La pregunta por la existencia de S-espacios y de L-espacios se derivó de investigaciones sobre espacios métricos, semi-métricos y Fréchet[8]. Por ejemplo, en los espacios métricos, la separabilidad y la propiedad de Lindelöf son equivalentes, sin embargo, existen espacios Lindelöf más no separables y espacios separables pero no Lindelöf -presentamos algunos ejemplos en A.0.2 y A.0.3. Estas propiedades, como

[8]Para abundar en la historia y estudio de S y L-espacios, puede consultar [Cri19]

lo anunciamos en la introducción a este capítulo, a primera vista parecen conectadas pero pueden estar diametralmente separadas pues existen L-espacios [Moo00]. Además, añadir la Hipótesis del Continuo permite la construcción de S-espacios [HJ]. Por otro lado, de suponer $\neg$HC y el axioma de Martin nace otra vertiente donde dichas propiedades no están totalmente desvinculadas pues la existencia de S-espacios resulta independiente (consúltese [Cri19]). Además, -también suponiendo AM+$\neg$HC- se puede mostrar que ni los espacios compactos ni los espacios 1AN pueden ser ejemplos de L-espacios ni de S-espacios (como se muestra en [AT84]). Aquí trabajaremos en una línea similar, dedicándonos a mostrar que, bajo el Axioma de Martin, ningún espacio T_3 puede ser un L-espacio fuerte ni un S-espacio fuerte.

Nuestra tarea principal será encontrar ciertas condiciones para que un espacio T_3 sea hereditariamente Lindelöf.

Definición 3.28. Diremos que un espacio topólogico $X = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es *separado derecho* si y sólo si existe un buen orden $<$ de X, tal que para todo $x \in X$, el *rayo izquierdo* $I_x^X = \{y \in X : y < x\}$ -cuando no haya confusión escribiremos simplemente I_x- es abierto en X. Diremos que X está *separado derecho por su indexación*, si, además, para cualquier par $\alpha, \beta < \kappa$, $x_\alpha < x_\beta$ equivale a $\alpha < \beta$.

Lema 3.29. *La propiedad de ser separado derecho es hereditaria.*

Demostración. Si X es un espacio separado derecho y $<$ lo atestigua, entonces es casi inmediato notar que todo subespacio $Y \subseteq X$ con $<$ restringido a Y también es separado derecho. □

Lema 3.30. *Para todo ordinal regular infinito κ y para todo espacio separado derecho X con $|X| = \kappa$, existe un subespacio $Y \subseteq X$ con la misma cardinalidad y que es separado derecho por su indexación.*

Demostración. Sean κ y $(X, <)$ como en la hipótesis. Primero observe que existe un subespacio $Z \subseteq X$, con $|Z| = \kappa$, tal que para todo $x \in Z$, $|I_x^Z| < \kappa$. De lo contrario, como $<$ es un buen orden, podemos considerar a $x_0 = \min\{x \in X : |I_x^X| = \kappa\}$ y así $Z = I_{x_0}^X$ contradice a lo que supusimos.

Ahora, por recursión, construyamos al subespacio deseado: fijemos a un $z_0 \in Z$ y supongamos que para $\beta \in \kappa$ hemos construido $\{z_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq Z$ tal que $z_\alpha < z_\delta$ siempre que $\alpha < \delta < \beta$. Dado que κ es regular y para todo $z \in Z$, $|I_z^Z| < \kappa$, existe $z \in Z \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} I_{z_\alpha}^Z$, definiendo $z_\beta = z$ concluimos el paso inductivo. Así, podemos asegurar que existe $Y = \{z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ separado derecho por su indexación. □

El siguiente teorema muestra que dado un espacio topológico podemos transformar el cálculo de su grado de Lindelöf por el cálculo de la cardinalidad de los espacios separados derechos de dicho espacio. Esto será ventajoso ya que los espacios separados derechos son muy similares a los ordinales con su topología del orden, así que hacer contrucciones con ellos se facilita.

Lema 3.31. *Si* X *es un espacio topológico,* $hl(X) = \sup\{|A| : A \subseteq X$ *es separado derecho*$\}$. *En particular,* X *será hereditariamente Lindelöf si y sólo si todo espacio separado derecho de* X, *es numerable.*

Demostración. Sea X un espacio topológico no vacío.

I Para probar que $hl(X) \geqslant \sup\{|A| : A \subseteq X$ es separado derecho$\}$, por reducción al absurdo, supongamos que $hl(X) = \kappa$ y que $Y = \{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \subseteq X$ es un subespacio separado derecho de cardinalidad κ^+. Por el lema 3.30, podemos suponer que Y está separado por su indexación.

Observando que $U = \{I^Y_{y_\alpha} : \alpha < \kappa^+\}$ es una cubierta abierta de Y, y que por hipótesis $hl(X) = \kappa$, existe $A \subset \kappa^+$, tal que $|A| \leqslant \kappa$ y $W = \{I^Y_{x_\alpha} : \alpha \in A\}$ una subcubierta de U. Por otro lado, existe $\beta < \kappa^+$ tal que $A \subseteq \beta$, y como Y está separado por su indexación $x_\beta \notin \bigcup W$, contradiciendo que W sea una subcubierta de U.

II Para justificar la otra desigualdad, también procedamos por reducción al absurdo; supongamos que $\sup\{|A| : A \subseteq X$ es separado derecho$\} = \kappa$ y que existe $Y \subseteq X$ tal que $l(Y) \geqslant \kappa^+$. Fijemos a U una cubierta abierta de Y que no tenga subcubiertas de cardinalidad menor a κ^+.

Elijamos $u_0 \in U$ y $y_0 \in u_0$, y supongamos que para $\alpha < \kappa^+$, hemos construido a $\{y_\beta \in Y : \beta < \alpha\}$ y a $\{u_\beta \in U : \beta < \alpha\}$, tales que para todo $\beta < \alpha$ $y_\beta \in u_\beta$ y para cualesquiera $\beta < \gamma < \alpha$, $y_\gamma \notin u_\beta$. Como $\alpha < \kappa^+$ y U no tiene subcubiertas de cardinalidad menor a κ^+, existe un elemento $y \in Y \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} u_\beta$, denominémoslo como y_α y eligamos $u_\alpha \in U$ una vecindad de y_α. Por recursión, existen $Y = \{y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ y una colección de abiertos $\{u_\alpha : \beta < \kappa^+\}$ tales que para cada $\alpha < \kappa^+$, $I^Y_{y_\alpha} = \bigcup\{u_\beta : \beta \leqslant \alpha\} \cap Y$. Pero entonces hemos creado una contradicción, pues fue posible obtener a Y, un subespacio separado derecho de cardinalidad κ^+.

□

Hemos dicho que los espacios separados derechos nos permiten hacer ciertas construcciones, específicamente, acompañados por el AM nos permitirán crear subespacios discretos. El cardinal $s^*(X)$ -que definimos enseguida- versa sobre espacios discretos. El teorema que sigue nos dará una condición para que un espacio de Tychonoff X sea hereditarimente Lindelöf; esa condición es que el cardinal $s^*(X)$ sea numerable.

Definición 3.32. Si X es un espacio topólogico.

- Definimos a la *amplitud* de X, como $s(X) = \sup\{|E| : E \subseteq X$ es subespacio discreto$\} + \aleph_0$.
- $s^*(X) = \sup\{s(X^n) : n \in \omega\}$.

Teorema 3.33 (AM+¬HC). *Si X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y $s^*(X) = \omega$, entonces X es hereditariamente Lindelöf.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $s^*(X) = \omega$ y $hl(X) > \omega$. Entonces, por una caracterización del grado de Lindelöf (lema 3.31), existe $E \subseteq X$ separado derecho no numerable. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $E = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ está separado derecho por su indexación (consúltese 3.30). Además, si para algún $n \in \omega$, D es un conjunto discreto en E^n, también es discreto en X^n, por lo que $s^*(E) \leqslant s^*(X)$. Así que podemos suponer que $X = E$.

Como X es separado derecho y regular, para cada $\alpha < \omega_1$, existe $U_\alpha \in \tau(x_\alpha, X)$ tal que $cl(U_\alpha) \subseteq I_{\alpha+1} = \{x_\beta : \beta < \alpha + 1\}$. De aquí en adelante nuestros esfuerzos estarán dirigidos a encontrar un conjunto no numerable $Y \subseteq X$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $U_\alpha \cap Y$ sea finito; esto aunado a que X es T_1 implicará que Y es discreto, pero dado que $s(X) \leqslant s^*(X)$, esto contradirá la hipótesis de que $s^*(X) = \omega$. Para lograrlo, propondremos un preorden tal que si F es un filtro en él, entonces $\bigcup F$ es un espacio discreto en X.

Dotemos al conjunto $P = [X]^{<\omega}$ con el orden $<$ definido como $p < q$ si y sólo si $q \subseteq p$ y $(p \setminus q) \cap W_q = \emptyset$, para $p, q \in P$ y $W_q = \bigcup_{x_\alpha \in q} U_\alpha$. Resulta que $(P, <)$ es un orden parcial. En efecto, como la reflexividad es casi inmediata, bastará con mostrar que $<$ es transitiva. Sean $p, q, r \in P$ tales que $p < q < r$; es claro que $r \subseteq p$, por otro lado, como $p = (p \setminus q) \cup (q \cap p)$, se tiene que $p \setminus r \subseteq (p \setminus q) \cup (q \setminus r)$, pero $r \subseteq q$, así que $(p \setminus r) \cap W_r \subseteq (p \setminus q \cap W_q) \cup (q \setminus r \cap W_r) = \emptyset$. Por lo tanto $p < r$, y así $<$ es transitiva.

Observemos ahora que la definición de $<$ implica que, en efecto, para cualquier filtro F de P, $\bigcup F$ es un subespacio discreto de X: sean $x_\alpha \in \mathfrak{F} = \bigcup F$ y $p \in F$ tal que $x_\alpha \in p$. Sea $q \in F$ arbitrario, entonces existe $r \in F$ tal que $p > r < q$. Así, $(q \setminus p) \cap U_\alpha \subseteq (r \setminus p) \cap U_\alpha = \emptyset$, luego $q \cap U_\alpha \subseteq p$. Notando que p es finito y que q fue arbitrario, podemos concluir que $\mathfrak{F} \cap U_\alpha$ también es finito, y como X es T_1, $\mathfrak{F}$ es discreto. Ahora note que para llegar a una contradicción, bastará demostrar la existencia de un filtro tal que $\bigcup F$ no sea numerable. Podremos mostrar su existencia y moldearlo a nuestro agrado utilizando el axioma de Martin, sólo si P satisface la cac.

Verifiquemos esto último, supongamos por el contrario, que A es una anticadena no numerable de P. Como A está compuesta por conjuntos finitos, y gracias al Δ-lema (puede verlo en 1.4), podemos fijar $C \subseteq A$ un Δ-sistema no numerable con raíz r. Entonces, el conjunto $C_r = \{p \setminus r : p \in C\}$ es ajeno dos a dos. A continuación, construiremos una subcolección de C, $C' = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, de conjuntos no vacíos, tal que:

i) Para todo $\alpha < \omega_1$, $i_+(r) < i_-(p_\alpha \setminus r)$, donde $i_+(q) = \text{máx}\{\alpha : x_\alpha \in q\}$ e $i_-(q) = \text{mín}\{\alpha : x_\alpha \in q\}$ para cada $q \in P$.

ii) Para cualesquiera $\alpha < \beta < \omega_1$, $i_+(p_\alpha \setminus r) < i_-(p_\beta \setminus r)$.

iii) $\{p \setminus r : p \in C'\} \subseteq [X]^n$, para algún $n \in \omega$.

Para ello procederemos por recursión sobre la cardinalidad de la colección. Fijemos un $\alpha < \omega_1$. Notemos primero que, como el conjunto C_r es disjunto y no numerable, el conjunto $\{p \in C_r : p \cap I_\gamma \neq \emptyset\}$ debe ser numerable, siempre que $\gamma < \omega_1$. Por esa razón, como $i_+(r) < \omega_1$ y C_r no es numerable, existe $p \in C$ tal que $p \setminus r \cap I_{i_+(r)} = \emptyset$, y ya que X está ordenado por su indexación $i_-(p \setminus r) > i_+(r)$, hagamos $p_0 = p$. Supongamos ahora que $\alpha < \omega_1$ y que $\{p_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq C$ es una colección que cumple con i) y ii). Como $\bigcup_{\beta<\alpha} p_\beta$ es numerable, existe $\gamma < \omega_1$ tal que $\bigcup_{\beta<\alpha} p_\beta \subseteq I_\gamma$, luego $\{p \in C_r : p \cap I_\gamma \neq \emptyset\}$ es numerable, y C_r no lo es, por ello existe algún $q \in C$ tal que $q \setminus r \cap I_\gamma = \emptyset$, así $i_-(q \setminus r) > i_+(p_\beta)$, para todo $\beta < \alpha$. Haciendo $p_\alpha = q$, $\{p_\beta : \beta \leqslant \alpha\}$ cumple con i) y ii).

Por recursión, existe un conjunto $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ no numerable que también cumple i) y ii). Como $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\} = \bigcup_{n\in\omega}\{p_\alpha \in [X]^n : \alpha < \omega_1\}$, debe existir $n \in \omega$ tal que $C' = \{p_\alpha \in [X]^n : \alpha < \omega_1\}$ no es numerable; por construcción C' tiene las características que buscábamos.

Ahora podremos encontrar un subespacio discreto y no numerable de X^n. Las siguientes dos propiedades de C' serán esenciales para ello. Si $\alpha < \beta < \omega_1$ entonces:

iv) Entonces $(p_\beta \setminus r) \cap \bigcup_{x_\gamma \in p_\alpha} cl(U_\gamma) = \emptyset$;

v) y $(p_\alpha \setminus r) \cap \bigcup W_{p_\beta \setminus r} \neq \emptyset$.

En efecto; sean $\alpha < \beta < \omega_1$, por la elección de los abiertos $\{U_\gamma : \gamma < \omega_1\}$, sucede que

$$\bigcup_{x_\gamma \in p_\alpha} cl(U_\gamma) \subseteq \{x_\delta : \delta \leqslant i_+(p_\alpha)\}$$

y, por ii), $i_+(p_\alpha \setminus r) < i_-(p_\beta \setminus r)$, recordando la definición de $i_-(p_\beta \setminus r)$, podemos concluir que iv) es verdadera. Para verificar v), basta notar que si $(p_\alpha \setminus r) \cap$

$\bigcup W_{p_\beta \setminus r} = \emptyset$, entonces $p_\alpha \cup p_\beta$ resulta una extensión común de p_α y p_β, contradiciendo que A es una anticadena.

Para cada $\alpha < \omega_1$, fijemos una numeración de $p_\alpha \setminus r = \{x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n\}$ y consideremos a los puntos en X^n de la forma $y_\alpha = (x_\alpha^1, ..., x_\alpha^n)$. Definamos también en X^n, a los abiertos $W_\alpha = \{(x_1, ..., x_n) \in X^n : x_i \in W_{p_\alpha \setminus r}$ para algún $i \leqslant n\}$, y con ellos a los abiertos $V_\alpha = W_{\alpha+1} \setminus \mathrm{cl}(W_\alpha)$. Es inmediato que el subespacio $Y = \{y_{\alpha+1} : \alpha \in \omega_1\}$ no es numerable. Además, si $\alpha < \omega_1$, $Y \cap V_\alpha = \{y_{\alpha+1}\}$: pues si $\delta < \alpha < \beta < \omega_1$, por v), $y_{\delta+1} \in W_\alpha \subseteq \mathrm{cl}(W_\alpha)$ y, por iv), $y_{\beta+1} \notin W_{\alpha+1}$, y es claro que $y_{\alpha+1} \in W_{\alpha+1}$. Por lo tanto Y es discreto, así que $\omega < s(X^n) \leqslant s^*(X) = \omega$, lo cual es una contradicción. Pero ésta surgió de suponer que A no era numerable, así que P satisface la cac.

Regresando a la no numerabilidad de la unión del filtro buscado, para cada $\alpha < \omega_1$ definamos al conjunto $D_\alpha = \{p \in P : i_+(p) > \alpha\}$, revisemos que $D = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de densos en P: sean $\alpha < \omega_1$ y $p \in P$, sea $\beta = \text{máx}\{\alpha + 1, i_+(p) + 1\}$, es claro que $q = p \cup \{x_\beta\} \in D_\alpha$ y que $p \subseteq q$. Observando que $q \setminus p = \{x_\beta\}$ y que $W_p \subseteq I_{i_+(p)}$, se asegura que $q < p$.

Como $\omega_1 < \mathfrak{c}$, existe un filtro D-genérico G, de P. Afirmamos que $\mathfrak{G} = \bigcup G$ no es numerable: sea $N \subset X$ numerable, entonces existe $\alpha < \omega_1$ con $N \subseteq I_\alpha$. Sea $p \in G \cap D_\alpha$, entonces $x_{i_+(p)} \in \mathfrak{G} \setminus N$. Luego $\mathfrak{G}$ es no numerable y discreto, lo que implica que $\omega < s(X) \leqslant s^*(X) = \omega$. Pero esta última contradicción se dedujo de suponer que $hl(X) > \omega$, por lo tanto X es hereditariamente Lindelöf. $\square$

El siguiente resultado muestra que si X es un espacio de Tychonoff, $s^*(X) = \omega$ no sólo implica que $hl(X) = \omega$ -como observamos en el teorema anterior-, sino que, además, $hl^*(X) = \omega$ (puede consultar la definición en 3.27).

Teorema 3.34 (AM+¬HC)**.** *Para todo espacio Tychonoff* X *con* $s^*(X) = \omega$*, se tiene que* $hl^*(X) = \omega$.

Demostración. Para toda $n \in \omega$, el que $s^*(X) = \omega$ implica que $s^*(X^n) = \omega$, por esto aunado al teorema anterior, tenemos que, para toda $n \in \omega$, $hl(X^n) = \omega$ y por lo tanto $hl^*(X) = \omega$. $\square$

Hemos encontrado ya, una relación entre las funciones cardinales s^* y hl^*. Pero, ya que estamos interesados en L-espacios *y* S-espacios fuertes, además de interesarnos hl^*, debemos de relacionarla con hd^*. Para concluir el objetivo de esta sección, necesitaremos -además del teorema anterior- algunos resultados de C_p-Teoría[9], pues,

[9]Es decir, de la teoría sobre espacios de funciones dotados con la topología de convergencia puntual.

junto con nuestros resultados anteriores, nos darán una relación entre las funciones s^* y hd^*. Definimos a los espacios que estudia dicha teoría, a continuación.

Definición 3.35.

- Si $(X, \tau(X))$ y $(Y, \tau(Y))$ son espacios topológicos, entonces $C(X, Y)$ es el conjunto formado por todas las funciones continuas de X en Y. En el caso en el que $Y = \mathbb{R}$, $C(X, Y)$ se denota como $C(X)$.
- Sin $n \in \omega$, $x_0 \dots x_{n-1} \in X$ y $U_0 \dots U_{n-1} \in \tau(Y)$, definimos al conjunto

  $$[x_0 \dots x_{n-1}; U_0 \dots U_{n-1}] = \{f \in C(X, Y) : \forall i < n(f(x_i) \in U_i)\}$$

  La familia

  $$\begin{aligned} PC(X, Y) = \{U \subseteq C(X, Y) : \forall f \in U \exists n \in \omega \exists x_0 \dots x_{n-1} \in X \\ \exists U_0 \dots U_{n-1} \in \tau(Y)(f \in [x_0 \dots x_{n-1}; U_0 \dots U_{n-1}] \subseteq U)\} \end{aligned}$$

  es una topología de $C(X, Y)$ conocida como la *topología de convergencia puntual*.
- El espacio topológico $(C(X, Y), PC(X, Y))$ se le suele denotar con $C_p(X, Y)$; análogamente, $C_p(X) = ((C(X), PC(X, \mathbb{R}))$.

Las demostraciones de los siguientes resultados se pueden consultar en [Tka11], problemas 25, 27 y 11-13, respectivamente.

Lema 3.36. *Para todo espacio Tychonoff X se dan las siguientes igualdades:*

i) $hd^*(X) = hl^*(C_p(X))$.

ii) $s^*(X) = s^*(C_p(X))$.

iii) $s^*(X) = s(X^\omega)$,$hd^*(X) = hd(X^\omega)$ *y* $hl^*(X) = hl(X^\omega)$.

Teorema 3.37 (AM+¬HC)**.** *Si X es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ entonces X no es un S-espacio fuerte ni un L-espacio fuerte.*

Demostración. En el caso en el que $s^*(X) = \omega$, por el teorema 3.34, sucede que $hl^*(X) = \omega$. Por otro lado, utilizando 3.36, tenemos que $s^*(C_p(X)) = \omega$; por ello, podemos aplicar el teorema 3.34 a $C_p(X)$ y obtener que $hl^*(C_p(X)) = \omega$. Pero esto último y el lema 3.36 implican que $hd^*(X) = \omega$. Concluimos que $hd^*(X) = hl^*(X)$, en consecuencia X no es un S-espacio fuerte ni un L-espacio fuerte.
Si sucede que $s^*(X) > \omega$, por el lema anterior $s(X^\omega) > \omega$ entonces X^ω tiene un subespacio discreto D de cardinalidad ω_1. Para este espacio sucede que $d(D) = |D| = l(D)$. Luego, $hd(X^\omega), hl(X^\omega) \geqslant \omega_1$. Así que $hl^*(X), hd^*(X) > \omega$; en particular, X no puede ser un S-espacio fuerte ni un L-espacio fuerte. □

3.5. Sobre espacios compactos

En esta sección el Axioma de Martin derivará en: criterios para metrizar un espacio compacto, teoremas que vinculan a la compacidad con propiedades hereditarias y condiciones que aseguran que un espacio numerablemente compacto es en realidad compacto.

Una corriente de investigación en Topología General estudia clases *cercanas* a espacios metrizables. Por «cercanas» nos referimos a clases cuya propiedad definitoria permite generalizar propiedades de espacios metrizables y dotan a los espacios con una estructura rica. Una de esas clases es la conformada por espacios con una diagonal G_δ. Tales clases suelen aparecer en teoremas donde se muestran determinadas propiedades topológicas (relativamente simples) que aseguran la metrizabilidad de algunos espacios[10]; a continuación -con el teorema 3.42- mostramos un ejemplo típico de ese tipo de teoremas.

Definición 3.38. Dado un espacio topológico X, la *diagonal* de X, es el subconjunto $\triangle = \{(x, x) : x \in X\}$ de $X \times X$.

Definición 3.39. Dados $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$, con (X, τ) un espacio topológico.

- Diremos que $\mathcal{U}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{V}$ -o que $\mathcal{U}$ *refina* a $\mathcal{V}$- si para cada $u \in \mathcal{U}$ existe $v \in \mathcal{V}$ tal que $u \subseteq v$.

- Si $x \in X$, definimos a la *estrella de* x *respecto de* $\mathcal{U}$ como $st(x, \mathcal{U}) = \bigcup\{u \in \mathcal{U} : x \in u\}$. Diremos que $\mathcal{U}$ es un *refinamiento baricéntrico* de $\mathcal{W}$ -y lo abreviaremos con $\mathcal{U} \subseteq_\triangle \mathcal{W}$- si $\{st(x, \mathcal{U}) : x \in X\}$ refina a $\mathcal{W}$.

Definición 3.40. Sea (X, τ) un espacio topológico.

- Diremos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es *localmente finita* si para todo $x \in X$, existe $w \in \tau(x, X)$ tal que $|\{u \in \mathcal{U} : u \cap w \neq \emptyset\}| < \aleph_0$.

- (X, τ) será un espacio *paracompacto* si para toda cubierta abierta $\mathcal{V}$ de X, existe un refinamiento abierto (un refinamiento formado por conjuntos abiertos) que es localmente finito y que cubre a X.

Es claro que todo espacio compacto es un espacio paracompacto. En varias ocasiones hemos utilizado el hecho de que todo espacio Hausdorff compacto es T_4, ese resultado se puede generalizar notando que todo espacio Hausdorff paracompacto es T_4 (consúltese [CT15]).

[10] Para una introducción detallada a este tema puede consultar en [**kunen2**][p.424-501], el artículo de Gruenhage dedicado a Espacios Métricos Generalizados.

Lema 3.41. *Sea* U *una cubierta abierta de* (X, τ), *un espacio paracompacto y* T_2, *entonces:*

i) U *tiene un refinamiento cerrado (formado por conjuntos cerrados) y localmente finito, que cubre a* X;

ii) U *tiene un refinamiento baricéntrico y abierto, que cubre a* X.

Demostración. i) Para cada $x \in X$, fijemos $u_x \in U$ tal que $x \in u_x$. Dado que X es T_3, para cada $x \in X$, existe v_x una vecindad abierta de x tal que $\mathrm{cl}(v_x) \subseteq u_x$. Sea V' un refinamiento y localmente finito de $V = \{v_x : x \in X\}$ que cubra a X. Sea $U' = \{\mathrm{cl}(v) : v \in V'\}$, es claro que U' cubre a X y como V' refina a V y V refina a U, U' es un refinamiento de U. Para concluir, verifiquemos que además es localmente finito: sea $x \in X$ y $w_x \in \tau(x, X)$ tal que $\{v \in V' : v \cap w_x\}$ es finito; observe que como w_x es abierto, si $a \subseteq X$ es tal que $\mathrm{cl}(a) \cap w_x \neq \emptyset$, entonces $a \cap w_x \neq \emptyset$. Por lo anterior $\{u \in U' : u \cap w_x \neq \emptyset\}$ también es finito.

ii) Por el inciso anterior, existe $F = \{f_t : t \in T\}$ un refinamiento cerrado y localmente finito de U. Para cada $t \in T$ fijemos $u_t \in U$ tal que $f_t \subseteq u_t$. Si $x \in X$, definamos a $T_x = \{t \in T : x \in u_t\}$ y a $w_x = \bigcap\{u_t : t \in T_x\} \setminus \bigcup\{f_t : t \in T \setminus T_x\}$. Dado que F es localmente finito, para cada $x \in X$, $\{u_t : t \in T_x\}$ es finito y por lo tanto w_x es abierto. Luego, $U' = \{w_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta X. Veamos que además es un refinamiento baricéntrico de U: sean $x \in X$, y $w_y \in U'$ tal que $x \in w_y$. Fijemos $r \in T_x$; dado que $x \in w_y \cap f_r$ y por definición de w_y, tenemos que $r \in T_y$, y por ello $w_y \subseteq u_r$. Notando que w_y fue un uniendo arbitrario de la estrella de x respecto a U', se concluye la verdad de nuestra afirmación. □

Teorema 3.42. *Si* (X, τ) *es compacto, es* T_2 *y la diagonal de* X *es* G_δ, *entonces* X *es 2AN. Y por lo tanto, metrizable.*

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n \in \omega}$ una colección de abiertos de $X \times X$, tal que:

$$\triangle = \bigcap\{u_n : n \in \omega\}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para cada $n \in \omega$, $u_{n+1} \subseteq u_n$.

A continuación construiremos a $\{V_n : n \in \omega\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X tal que para cada $n \in \omega$, V_n es finita, V_{n+1} es refinamiento baricéntrico de V_n y para cualquier $v \in V_n$, $v \times v \subseteq u_n$: como para cada $x \in X$, $(x, x) \in u_0$, existen w_x^1, $w_x^2 \in \tau(x, X)$ con la propiedad de que $w_x^1 \times w_x^2 \subseteq u_0$, definamos $w_x^0 = w_x^1 \cap w_x^2$ y sea $W_0 = \{w_x^0 : x \in X\}$. Dado que W_0 es una cubierta abierta de X, existe V_0 una subcubierta finita de W_0; como $V_0 \subseteq W_0$ tenemos que $\bigcup\{v \times v : v \in V_0\} \subseteq u_0$. Supongamos que existen $n \in \omega$ y $\{V_m : m \leqslant n\}$ una colección con las propiedades mencionadas. Para cada $x \in X$ fijemos $w_x^n \in \tau(x, X)$ tal que $w_x^n \times w_x^n \subseteq u_{n+1}$ y sea $W_n = \{w_x^n \cap v : x \in X \wedge v \in V_n\} \setminus \{\emptyset\}$. Como W_n es una cubierta abierta de X, por el lema 3.41, existe V_{n+1} un refinamiento baricéntrico de ella que cubre a X, como X es compacto, podemos suponer que V_{n+1} es finito. Debido a que $V_{n+1} \subseteq_\triangle W_n$ y a que, a su vez, W_n es un refinamiento de V_n, V_{n+1} es un refinamiento baricéntrico de V_n. Además, si $v \in V_{n+1}$, existe $x \in X$ tal que $v \times v \subseteq w_x^n \times w_x^n \subseteq u_{n+1}$. Por recursión podemos concluir que existe $\{V_n : n \in \omega\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de X tal que para cada $n \in \omega$, V_n es numerable, $V_{n+1} \subseteq_\triangle V_n$ y tal que $\bigcup\{v \times v : v \in V_n\} \subseteq u_n$.

Como $S = \bigcup\{V_n : n \in \omega\}$ cubre a X y es numerable, el espacio $Z = (X, T)$ donde T es la topología que tiene a S como subbase, es 2AN. Además $i : (X, \tau) \longrightarrow Z$ es continua porque para cada $U \in S$, $i^{-1}(U) \in \tau$, lo cual implica que Z también es compacto. Ahora deduzcamos de la construcción de S que Z es T_2: sean $x, y \in X$ distintos entre sí, luego $(x, y) \notin \triangle$; así que existe $n \in \omega$ tal que $(x, y) \notin u_n$. Dado que V_{n+1} cubre a x, existen v_x y $v_y \in V_{n+1}$ que tienen a x y a y, respectivamente. Si existiera $z \in v_x \cap v_y$ entonces $\{x, y\} \in St(z, V_{n+1})$, pero existe $v \in V_n$ tal que $St(z, V_{n+1}) \subseteq v$ y $(x, y) \in v \times v \subseteq u_n$, lo cual contradice la elección de n. Por lo tanto v_x y v_y son ajenos y por ello Z es T_2.

Hemos probado que Z es T_2 y compacto, por ello, es T_3 y como es 2AN también es metrizable. Finalmente, observemos que i es un homeomorfismo; dado que es biyectiva y continua, bastará con mostrar que es cerrada: supongamos que F es cerrado en (X, τ), entonces es compacto, así que $i(F)$ es compacto en Z y como hemos probado que éste último es T_2, $i(F)$ es también cerrado en Z. Por lo tanto i es un homeomorfismo. Podemos concluir que (X, τ) es 2AN y por el teorema de metrización de Urysohn, es metrizable. □

Lo que buscamos en esta ocasión es debilitar la condición de la diagonal G_δ del teorema anterior a través del Axioma de Martin. Para ello, recuerde que la diagonal de un espacio T_2 es siempre cerrada. Dado un espacio topológico X, el Axioma de Martin nos dará condiciones para que $X \times X$ sea perfectamente normal, y que, en particular, su diagonal sea G_δ.

Teorema 3.43 (AM+¬HC). *Todo espacio* X *compacto,* T_2 *y con* $s(X) \leqslant \omega$*, es hereditariamente Lindelöf.*

Demostración. Sea X como en la hipótesis, por el lema 3.31, bastará con probar que todos sus subespacios separados derechos son numerables. Supongamos por reducción al absurdo que existe $Y \subseteq X$ separado derecho y no numerable. Hemos visto ya que podemos considerar que Y es separado derecho por su indexación, así que sin pérdida de generalidad $(Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}, <)$ es un buen orden, tal que para cada $\alpha < \beta < \omega_1$, $I_\alpha = \{y_\gamma : \gamma < \alpha\}$ es abierto en X y $y_\alpha < y_\beta$.

Observando que X es regular y que como para cada $\alpha < \omega_1$, $I_{\alpha+1} \in \tau(y_\alpha, X)$, fijemos $U_\alpha \in \tau(y_\alpha, X)$ con la cualidad de que $cl(U_\alpha) \subseteq I_{\alpha+1}$. Consideremos al siguiente orden parcial: $(P, \prec)$ donde $P = [Y]^{<\omega}$ y, dados $p, q \in P$, $p \prec q$ si y sólo si $q \subseteq p$ y $(p \setminus q) \cap W_q = \emptyset$, con $W_q = \bigcup\{U_\alpha : y_\alpha \in q\}$. Nuestro primer propósito será asegurar la existencia de una anticadena no numerable de P. Repitiendo el método de la prueba del teorema 3.33, podemos asegurar que en este orden parcial la unión de cualquier filtro es un subespacio discreto de X; esto junto con el Axioma de Martin producirá dicha anticadena.

De nuevo procedamos por reducción al absurdo, supongamos que en P todas las anticadenas son numerables. Si $p \in P$, utilizaremos las siguientes notaciones: $i_+(p) = \text{máx}\{\alpha : y_\alpha \in p\}$ y $i_-(p) = \text{mín}\{\alpha : y_\alpha \in p\}$. Asimismo, definamos para cada $\alpha < \omega_1$, al conjunto $D_\alpha = \{p \in P : i_+(p) > \alpha\}$. Resulta que $D = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia de conjuntos densos en P: sean $\alpha < \omega_1$ y $p \in P$ arbitrarios, considere $\beta = \text{máx}\{\alpha + 1, i_+(p) + 1\}$, luego $d = \{y_\beta\} \cup p$ extiende a p, pues, por la definición de los U_α, $(d \setminus p) \cap W_p \subseteq \{y_\beta\} \cap I_\gamma$, con $\gamma = i_+(p)$, y $y_\beta \notin I_\gamma$ debido a la elección de β. Luego, como suponemos AM+¬HC, existe un filtro G que es D-genérico.

Veamos que $\mathfrak{G} = \bigcup G$ es no numerable. Para ello, observemos que para todo subconjunto numerable de Y, digamos N, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $N \subseteq I_\alpha$. No obstante, para cualquier $\alpha < \omega_1$, $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$, así que existe $\gamma > \alpha$ tal que $y_\gamma \in \bigcup G$ y por ello $\bigcup G \nsubseteq I_\alpha$. Por lo tanto, $\mathfrak{G}$ es un subespacio discreto no numerable, contradiciendo el que $s(X) \leqslant \omega$, y por ello P no puede satisfacer la cac.

Por lo anterior, existe A, una anticadena no numerable de P, y por el Δ-lema podemos elegir $A^{'} \subseteq A$ un Δ-sistema no numerable y de raíz r. De nuevo, a la manera del teorema 3.33, es posible construir una colección $A^{''} = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq A^{'}$ con las propiedades que siguen:

- Para algún $n \in \omega$, $A^{''} \subseteq [Y]^n$;
- y dados $\alpha < \beta < \omega_1$, $r \ll (p_\alpha \setminus r)$, $(p_\alpha \setminus r) \ll (p_\beta \setminus r)$, donde, para $p, q \in P$, $p \ll q$ si y sólo si $i_+(p) < i_-(q)$.

Observe ahora que si $\alpha < \beta < \omega_1$, tenemos que $(p_\beta \setminus p_\alpha) \cap W_{p_\alpha} \subseteq (p_\beta \setminus r) \cap I_{i_+(p_\alpha)}$, y, como $p_\alpha \ll p_\beta$, esta última intersección es vacía. Luego, si sucediera que también $(p_\beta \setminus p_\alpha) \cap W_{p_\alpha} = \emptyset$, tendríamos que $p = p_\alpha \cup p_\beta$ sería una extensión entre p_αy p_β pues los contiene, y ya que $(p \setminus p_\alpha) = (p_\beta \setminus r)$ y $(p \setminus p_\beta) = (p_\alpha \setminus r)$ la observación y la suposición anterior lo comprueban. Pero esto contradice el hecho de que p_α y p_β son miembros de la misma anticadena. En consecuencia, podemos concluir que necesariamente $(p_\beta \setminus p_\alpha) \cap W_{p_\alpha} \neq \emptyset$. A continuación recogemos estas propiedades en una definición más especializada.

Diremos que una familia $A = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq P(Y)$ es adecuada si cumple con lo siguiente:

i) Para cada $\alpha < \omega_1$, A_α es numerable y $A_\alpha \cap R = \emptyset$, donde $R = \bigcap\{R_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ y $R_\alpha = Y \setminus I_\alpha$.

ii) Existen $n \in \omega$, $\{q_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq [Y]^n$ y $A' = \{A_\gamma : \gamma < \omega_1\} \subseteq A$ con la propiedad de que si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $q_\alpha \ll q_\beta$ y $A_\beta \cap q_\alpha \neq \emptyset$.

Observemos que, por lo desarrollado anteriormente, si denotamos por D a las uniones finitas de $\{W_{p_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$, entonces D es una familia adecuada.

Además, si $A = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq P(Y)$, diremos que está cofinalmente centrada en algún subconjunto $B \subseteq Y$, si para cualquier conjunto no numerable $C \subseteq B$, existe un ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $\{C \cap A_\beta : \beta > \alpha\}$ es centrada, es decir, cualquier colección finita de ésta, tiene intersección no vacía.

Afirmamos que para cualquier familia adecuada A, existe $B \subseteq \omega_1$ y $A' = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que A' es cofinalmente centrada en $Y_B = \{y_\alpha : \alpha \in B\}$. Efectivamente, sea $n \in \omega$ el mínimo natural para el cual existen $A' = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq A$ y $\{q_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq [Y]^n$ con las propiedades en (ii). Consideremos a $B = \{i_-(q_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ y supongamos por reducción al absurdo que A' no es cofinalmente centrada en Y_B. Sea $C \subseteq B$ un contraejemplo, es decir, un conjunto no numerable tal que para cada $\alpha < \omega_1$, existe $b_\alpha \subseteq \omega \setminus \alpha$ finito y con la propiedad de que $\bigcap\{C \cap A_\beta : \beta \in b_\alpha\} = \emptyset$. Para cada $\alpha < \omega_1$, definamos $s_\alpha = q_\alpha \setminus \{\delta\}$ con $\delta = i_-(q_\alpha)$ y a $B_\alpha = \bigcup\{A_\beta : \beta \in b_\alpha\}$: sean $\alpha < \beta < \omega_1$, de que $q_\alpha \ll q_\beta$ se sigue que $s_\alpha \ll s_\beta$; y como $\bigcap\{C \cap A_\gamma : \gamma \in b_\beta\} = \emptyset$, existe $\gamma \in b_\beta \subseteq \omega \setminus \beta$ tal que $y_\delta \notin A_\gamma$, sin embargo, como $\gamma > \beta > \alpha$, $A_\gamma \cap q_\alpha \neq \emptyset$, y combinando las dos condiciones, $\emptyset \neq A_\gamma \cap q_\alpha \subseteq B_\beta \cap q_\alpha$. Pero entonces $\{s_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq [Y]^{n-1}$ y $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ contradicen la minimalidad de n. Así que nuestra afirmación es verdadera.

Como D es adecuada, por nuestro último resultado podemos elegir $B \subseteq \omega_1$ y $D' = \{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ cofinalmente centrada en $Y_B = \{y_\alpha \in B\}$. Para cada $\alpha < \omega_1$, denotemos por $K_\alpha = cl(D_\alpha)$, a $H_\alpha = \bigcap\{K_\beta : \alpha \leqslant \beta\}$ y sea $H = \bigcup\{H_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Observemos que el que, para cada $\alpha < \omega_1$, H_α sea cerrado implica que H también es cerrado: sea $x \in cl(H)$, como $t(X) \leqslant s(X) \leqslant \omega$, existe $N \subseteq H$ numerable tal que $x \in cl(N)$. Dado que $\{H_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es creciente y N numerable, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $N \subseteq H_\alpha$, y por ello $x \in cl(N) \subseteq H_\alpha \subseteq H$. Observe ahora que $H \cap R \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} cl(D_\alpha) \cap R = \emptyset$, pero notando que $H \cap R$ es igual a la intersección de $\{H \cap R_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, una familia anidada de compactos, obtenemos que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $H \cap R_\alpha = \emptyset$.

Por otro lado, como D' es cofinalmente centrada en Y_B, para $Y_C = \{y_\alpha : \alpha \in C\}$, con $C = B \setminus \alpha$, existe $\gamma < \omega_1$ tal que $\{D_\beta \cap Y_C : \beta > \gamma\}$ es centrada. Entonces $\{K_\beta \cap Y_C : \beta > \gamma\}$ también lo es, y como $Y_C \subseteq R_\alpha$, $\{K_\beta \cap R_\alpha : \beta > \gamma\}$ también es centrada, así, podemos suponer que $\{K_\beta \cap R_\alpha : \beta > \gamma\}$ es centrada, decreciente y que está compuesta por elementos no vacíos. Como R_α es cerrado y X es compacto, lo anterior nos lleva a la siguiente contradicción: $\emptyset \neq \bigcap\{K_\beta \cap R_\alpha : \beta > \gamma\} = H_\gamma \cap R_\alpha \subseteq H \cap R_\alpha = \emptyset$. Esta contradicción nació de suponer la existencia de Y, luego todos los espacios separados derechos de X son numerables y por lo tanto $hl(X) \leqslant \omega$. $\square$

Lema 3.44. *Si X es T_3 y κ es un cardinal tal que $hl(X) \leqslant \kappa$, entonces todo cerrado es G_κ en X. En particular, si X es hereditariamente Lindelöf, X es un espacio perfectamente normal.*

Demostración. Sea $F \subseteq X$ un conjunto cerrado de (X, τ) como en la hipótesis. Para cada $x \in U = X \setminus F$, fijemos U_x tal que $cl(U_x) \subseteq U$. Sea $A \subseteq U$ de cardinalidad a lo más κ y tal que $\{U_x : x \in A\}$ es cubierta de U. Como $U = \bigcup\{cl(U_x) : x \in A\}$, tenemos que $F = \bigcap\{X \setminus cl(U_x) : x \in A\}$, es decir, F es G_κ. $\square$

Del lema anterior y del teorema 3.43 sucede que:

Lema 3.45 (AM+¬HC)**.** *Todo espacio X compacto y T_2, tal que $s(X) \leqslant \omega$ es perfectamente normal.*

Teorema 3.46 (AM+¬HC)**.** *Todo espacio X compacto, T_2 y tal que $s(X \times X) \leqslant \omega$, es metrizable.*

Demostración. Dado que X es T_2, su diagonal es cerrada en $X \times X$, un compacto T_2, y por el corolario 3.45, $\triangle$ es G_δ. Entonces, por el teorema 3.42, X es metrizable. $\square$

Observe que en la aplicación inmediata anterior, en los resultados que expusimos sobre L y S-espacios fuertes -y en la sección que dedicaremos a espacios de Luzin-, encontrar criterios para deducir propiedades hereditarias es esencial. Nuestro siguiente cometido será encontrar propiedades relativamente sencillas que aseguren que un espacio compacto sea hereditariamente separable. Específicamente, veremos que si X es un espacio Haussdorff, compacto y $s(X) = t(X) = \omega$, entonces X es hereditariamente separable. Sin embargo, pedir que tanto $t(X)$ como $s(X)$ sean numerables es redundante porque en ese tipo de espacios $t(X) \leqslant s(X)$. Los lemas que siguen nos mostrarán esta última desigualdad y nos apoyarán para demostrar el resultado que nos interesa.

Definición 3.47. Sea X un espacio topológico. Si $\kappa > 0$ es un cardinal y $A \subseteq X$, diremos que A es κ-*cerrado* si $[A]_\kappa \subseteq A$. Recuerde que en la definición 3.19, definimos al conjunto $[A]_\kappa = \bigcup\{\mathrm{cl}(B) : B \subseteq A \text{ y } |B| \leqslant \kappa\}$.

Lema 3.48. *Si X es un espacio topológico, entonces $t(X) \leqslant \kappa$ si y sólo si todo κ-cerrado es cerrado.*

Demostración. Supongamos que κ es un cardinal mayor que $t(X)$ y $A \subseteq X$ es κ-cerrado en X. Por esto último $[A]_\kappa \subseteq A$. Y como $t(X) \leqslant \kappa$, $\mathrm{cl}(A) = [A]_\kappa$. Por lo tanto A es cerrado.
Para la otra implicación, consideremos un subconjunto arbitrario A de X. Probemos que $[A]_\kappa = \mathrm{cl}(A)$. Se sigue de la definición de $[A]_\kappa$ que $[A]_\kappa \subseteq \mathrm{cl}(A)$. Para probar la contención faltante, observe que también de la definición de $[A]_\kappa$ se sigue $A \subseteq [A]_\kappa$; por esto último y como supusimos que todos los κ-cerrados son cerrados, bastará con mostrar que $[A]_\kappa$ es κ-cerrado: sea $B \subseteq [A]_\kappa$, con $|B| \leqslant \kappa$. Para cada $b \in B$ fijemos $A_b \subseteq A$, que atestigüe su pertenencia a $[A]_\kappa$, es decir, tal que $|A_b| \leqslant \kappa$ y $b \in \mathrm{cl}(A_b)$. Luego, $A_B = \bigcup\{A_b : b \in B\} \subseteq A$ y $|A_B| \leqslant \kappa$, por lo que $\mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A_B) \subseteq [A]_\kappa$, por lo tanto $[A]_\kappa$ es κ-cerrado. □

Lema 3.49. *Si (X, τ) es regular, κ un cardinal infinito, $H \subseteq X$ un conjunto G_κ y $x \in H$, entonces existe $G \subseteq H$ cerrado y G_κ, tal que $x \in G$.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una colección de abiertos tal que $H = \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Por la regularidad de X, podemos encontrar una subcolección $\{U_n^\alpha : n < \omega \wedge \alpha < \kappa\}$ de $\tau(x, X)$, tal que para cada $\alpha < \kappa$, $U_0^\alpha = U_\alpha$, y, además, si $n < \omega$, $\mathrm{cl}(U_{n+1}^\alpha) \subseteq U_n^\alpha$. Luego, $G = \bigcap\{U_n^\alpha : n < \omega \wedge \alpha < \kappa\} = \{\mathrm{cl}(U_{n+1}^\alpha) : n < \omega \wedge \alpha < \kappa\}$, es como lo buscábamos. □

Introducimos los siguientes conceptos:

Definición 3.50. Sean (X, τ) un espacio T_1 y $A \subseteq X$,

- El *pseudocarácter de A en X* es el cardinal $\psi(A, X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \tau \wedge \bigcap \mathcal{U} = A\}$.
- El *pseudocarácter de X* se define como $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$, donde $\psi(x, X) = \psi(\{x\}, X)$.

Lema 3.51. *Sean (X, τ) un espacio compacto y T_2, y $F \subseteq X$ cerrado. Entonces $\chi(F, X) = \psi(F, X)$*[11].

[11] La definición de $\chi(F, X)$ se encuentra en 3.17

Demostración. Primero revisemos que $\chi(F,X) \leqslant \psi(F,X)$. Sea $\mathcal{U} \subseteq \tau$ de cardinalidad κ y tal que $F = \bigcap \mathcal{U}$. Por la normalidad de X, para cada $W \in \mathcal{U}$, existe $V_W \in \tau(F,X)$ tal que $\mathrm{cl}(V_W) \subseteq W$. Se tiene que la colección de las intersecciones finitas de $\{V_W : W \in \mathcal{U}\}$, llamémosla $\mathcal{B}$, es de cardinalidad κ, veamos que además es una base de F: sea $A \in \tau(F,X)$. Por construcción de $\{V_W : W \in \mathcal{U}\}$, $F = \bigcap\{\mathrm{cl}(V_W) : W \in \mathcal{U}\}$; en consecuencia $X \setminus A \subseteq \bigcup\{X \setminus \mathrm{cl}(V_W) : W \in \mathcal{U}\}$. Como X es compacto, $X \setminus A$ también lo es, así que existe $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ finito y tal que $X \setminus A \subseteq \bigcup\{X \setminus \mathrm{cl}(V_W) : W \in \mathcal{U}'\}$. Por ello, $V = \bigcap\{V_W : W \in \mathcal{U}'\} \subseteq A$ y $V \in \mathcal{B}$. Podemos concluir que $\chi(F,X) \leqslant \kappa$ y por lo tanto $\chi(F,X) \leqslant \psi(F,X)$.

Para probar que $\psi(F,X) \leqslant \chi(F,X)$, simplemente observemos que si $\mathcal{B}$ es una base de F, es inmediato que $F \subseteq \bigcap \mathcal{B}$, y si $x \in X \setminus F$, debido a que X es T_2, $F \subseteq X \setminus \{x\} \in \tau$, así que existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subseteq X \setminus \{x\}$, y por ello, $x \notin \bigcap \mathcal{B}$. Luego, $F = \bigcap \mathcal{B}$, y podemos concluir que $\psi(F,X) \leqslant \chi(F,X)$. □

Definición 3.52. Dados (X,τ) y $A \subseteq X$, definimos al conjunto $[A]^\kappa = \{x \in X :$ si H es G_κ de X y $x \in H$, entonces $H \cap A \neq \emptyset\}$.

Lema 3.53. *Si* (X,τ) *es compacto y* T_2 *y* $A \subseteq X$, *entonces* $\mathrm{cl}(A) = [[A]_\kappa]^\kappa$, *para cualquier cardinal infinito* κ.

Demostración. Observe que si $x \in [[A]_\kappa]^\kappa$ y $U \in \tau(x,X)$, como U es G_κ, se tiene que $U \cap [A]_\kappa$ no es vacío. Por esto último y porque U es abierto, $U \cap A$ tampoco es vacío. Así, $[[A]_\kappa]^\kappa \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

Para la otra contención, supongamos, hasta llegar a una contradicción, que $x \in \mathrm{cl}(A) \setminus [[A]_\kappa]^\kappa$. Así, existe $\mathcal{C} \subseteq \tau(x,X)$ de cardinalidad menor o igual a κ y tal que $(\bigcap \mathcal{C}) \cap [A]_\kappa = \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{C} \subseteq X \setminus [A]_\kappa$. Como $x \in \bigcap \mathcal{C}$, por el lema 3.49, existe F un conjunto cerrado y G_κ tal que $x \in F \subseteq \bigcap \mathcal{C}$. Por el lema 3.51, $\psi(F,X) = \chi(F,X)$ y debido a que F es G_κ, tenemos que $\psi(F,X) \leqslant \kappa$. Luego, podemos fijar una base $\mathcal{D}$ de F con $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$. Como $x \in F$, sucede que $\mathcal{D} \subseteq \tau(x,X)$, y dado que $x \in \mathrm{cl}(A)$, para cada $U \in \mathcal{D}$, podemos elegir $y_U \in U \cap A$. Note que $Y = \{y_U : U \in \mathcal{D}\}$ tiene cardinalidad menor o igual a κ y que $Y \subseteq A$. Esto último implica la siguiente desigualdad: $F \cap \mathrm{cl}(Y) \subseteq (\bigcap \mathcal{C}) \cap [A]_\kappa = \emptyset$. Así, $F \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(Y)$ y entonces existe $U \in \mathcal{D}$ tal que $U \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(Y)$ lo que contradice el que $y_U \in U \cap Y$. Puesto que la contradicción surgió de la existencia de x, se concluye que $\mathrm{cl}(A) \subseteq [[A]_\kappa]^\kappa$. □

Definición 3.54. Si X es un espacio topológico, $S = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ será una *secuencia libre de longitud* κ si para todo $\beta < \kappa$, sucede que $\mathrm{cl}(\{x_\alpha : \alpha < \beta\}) \cap \mathrm{cl}(\{x_\alpha : \alpha \geqslant \beta\}) = \emptyset$.

La estrechez (que presentamos en 3.19) y la secuencias libres resultan tener un vínculo importante en espacios compactos: el cálculo de la estrechez de un espacio se podrá sustituir por el cálculo de las cardinalidades de sus secuencias libres.

Lema 3.55. *Si* X *es compacto y* T_2, *entonces* $t(X) = \sup\{\kappa \geqslant \omega : \kappa$ *es la longitud de alguna secuencia libre de* $X\}$.

Demostración. Asignemos las siguientes notaciones: $\gamma = \sup\{\kappa : \kappa$ es la longitud de alguna secuencia libre de $X\}$ y $\delta = t(X)$.

Verifiquemos primero que $\gamma \leqslant \delta$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $S = \{x_\alpha : \alpha < \delta^+\}$ es una secuencia libre en X; resulta que $\mathrm{cl}(S)$ no está contenida en $[S]_\delta$. En efecto, para cada $\alpha < \delta^+$, consideremos al cerrado $F_\alpha = \mathrm{cl}(\{x_\beta : \beta > \alpha\})$. Debido a que X es compacto y $\{F_\alpha : \alpha < \delta^+\}$ es decreciente, podemos fijar $x \in F = \bigcap\{F_\alpha : \alpha < \delta^+\}$. Notemos que $x \in \mathrm{cl}(S)$, pues de lo contrario existiría $U \in \tau(x, X)$, tal que $U \cap S = \emptyset$, en particular, si $\alpha < \delta^+$, $U \cap \{x_\beta : \beta > \alpha\} = \emptyset$, y entonces, debido a que $U \in \tau$, $\mathrm{cl}(U \cap \mathrm{cl}(\{x_\beta : \beta > \alpha\})) = \mathrm{cl}(U \cap \{x_\beta :: \beta > \alpha\}) = \emptyset$, contradiciendo el que $x \in F_\alpha \cap U$. Por otro lado, si $A \subseteq S$ y $|A| \leqslant \delta$, existe $\alpha < \delta^+$ tal que $A \subseteq \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, y como S es una secuencia libre, $\mathrm{cl}(\{x_\beta : \beta < \alpha\}) \cap F_\alpha = \emptyset$, por lo que $x \notin [S]_\delta$. Luego $\mathrm{cl}(S) \nsubseteq [S]_\delta$, contradiciendo el que $t(X) = \delta$. Por lo tanto $\gamma \leqslant \delta$.

Para la desigualdad restante, de nuevo procediendo por contradicción, supongamos que $\delta > \gamma$; por el lema 3.48, existe A, un conjunto γ-cerrado que, sin embargo, no es cerrado. Por el lema anterior, $\mathrm{cl}(A) = [[A]_\gamma]^\gamma$, y como A es γ-cerrado, $A = [A]_\gamma$, así $\mathrm{cl}(A) = [A]^\gamma$. Sea $x \in \mathrm{cl}(A) \setminus A$; utilizando el que $x \in [A]^\gamma$, podremos construir una secuencia libre de longitud γ^+: fijemos $a_0 \in A$, observemos que como $H_0 = X$ es G_γ y $x \in H_0$, sucede que $H_0 \cap A \neq \emptyset$; además H_0 es cerrado. Supongamos que hemos construido a $\{a_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq A$ y a una familia $\{H_\alpha : \alpha < \beta\}$ de conjuntos cerrados y G_γ, para algún $\beta < \gamma^+$, y que para todo $\alpha < \beta$, se cumplen las siguientes propiedades:

i) $\{x, a_\alpha\} \subseteq H_\alpha$.

ii) $H_\alpha \subseteq H_\delta$, si $\delta < \alpha$.

iii) $\mathrm{cl}(I_\alpha) \cap H_\alpha = \emptyset$, donde $I_\alpha = \{a_\delta : \delta < \alpha\}$.

Observemos que $x \notin \mathrm{cl}(I_\beta)$ puesto que $I_\beta \subseteq A$, un γ-cerrado y $x \notin A$. Luego, como $X \setminus \mathrm{cl}(I_\beta)$ es G_γ y x es un elemento de él, por el lema 3.49, existe H un G_γ cerrado y tal que $x \in H \subseteq X \setminus \mathrm{cl}(I_\beta)$. Proponemos $H_\beta = H \cap \{H_\alpha : \alpha < \beta\}$, como H_β es intersección de a lo más γ conjuntos G_γ cerrados, él también lo es. Por su definición, H_β cumple ii) y iii). Y por i), $x \in H_\beta$, entonces existe $a_\beta \in H_\beta \cap A$. Entonces, por recursión existen familias $S = \{a_\alpha : \alpha < \gamma^+\} \subseteq A$ y $\{H_\alpha : \alpha < \gamma^+\}$ que cumplen i), ii) y iii), si $\alpha < \gamma^+$. Resulta que las características de estas familias implican que S es una secuencia libre de X: en efecto, si $\beta < \gamma^+$ tenemos que $\mathrm{cl}(\{a_\alpha : \alpha \geqslant \beta\}) \subseteq H_\beta$

debido a que H_α es cerrado y a las propiedades i) y ii). Así, por lo anterior y por iii), $\mathrm{cl}(I_\beta) \cap \mathrm{cl}(\{a_\alpha : \alpha \geqslant \beta\} = \emptyset$. Pero S tiene longitud γ^+ y esto contradice el que $\gamma = \sup\{\kappa : \kappa$ es la longitud de alguna secuencia libre de $X\}$. Así que necesariamente $t(X) \leqslant \gamma$. □

Lema 3.56. *Si* X *es compacto y* T_2*, entonces* $t(X) \leqslant s(X)$*.*

Demostración. Por el lema anterior, bastará con mostrar que toda secuencia libre es un espacio discreto. Observemos primero que si $S = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una secuencia libre de X, como para cualquier $\beta < \kappa$ sucede que $\mathrm{cl}(\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \cap \mathrm{cl}(\{x_\alpha : \alpha \geqslant \beta\} = \emptyset$, tanto $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ como $\{x_\alpha : \alpha \geqslant \beta\}$ son abiertos en S. Luego, si $\beta < \kappa$ se tiene que el conjunto

$$\{x_\beta\} = \{x_\alpha : \alpha < \beta + 1\} \cap \{x_\alpha : \alpha \geqslant \beta\}$$

es abierto en S. Por lo tanto cualquier secuencia libre de X es un subespacio discreto. □

Finalmente, presentamos el teorema que perseguíamos.

Teorema 3.57 (AM+¬HC). *Si* X *es compacto,* T_2 *y* $s(X) \leqslant \omega$*, entonces* X *es hereditariamente separable.*

Demostración. Nuestra primera meta será probar que existe un abierto separable y no vacío de X; supongamos por reducción al absurdo que todo conjunto numerable es denso en ninguna parte. Esta suposición nos permitirá construir por recursión sobre ω_1, a una familia $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que:

i) Para cada $\alpha < \omega_1$, F_α es separable y cerrado.

ii) Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $F_\alpha \subset F_\beta$.

iii) Para cada $\alpha < \omega_1$ existe $A_\alpha \subseteq F_{\alpha+1} \setminus F_\alpha$ tal que $F_\alpha \subseteq \mathrm{cl}(A_\alpha)$.

Como paso base, fijemos $x_0 \in X$ arbitrario y tomemos $F_0 = \{x_0\}$. Supongamos que para algún $\gamma < \omega_1$, existe $\{F_\alpha : \alpha \leqslant \gamma\}$ que cumple con las propiedades deseadas. Fijemos D_γ numerable y denso en F_γ. Observemos que como F_γ es separable y cerrado, por nuestra suposición, $\mathrm{int}(F_\gamma) = \emptyset$. Luego, F_γ es igual a su frontera, así $F_\gamma \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{ext}(F_\gamma))$. Como X es compacto y $s(X) = \omega$, por el lema anterior $t(X) \leqslant \omega$; entonces $\mathrm{cl}(\mathrm{ext}(F_\gamma)) = [\mathrm{ext}(F_\gamma)]_\omega$. Por esto último, es posible fijar para cada $d \in D_\gamma$, $A_d \subseteq X \setminus F_\gamma$ numerable y tal que $d \in \mathrm{cl}(A_d)$; denotemos $A_\gamma = \bigcup\{A_d : d \in D_\gamma\}$. Luego, si $F_{\gamma+1} = F_\gamma \cup \mathrm{cl}(A_\gamma)$, la colección $\{F_\alpha : \alpha \leqslant \gamma + 1\}$ tiene las tres características buscadas. Para el caso límite consideremos a una familia $\{F_\alpha : \alpha < \gamma\}$ con $\gamma < \omega_1$ que satisfaga i), ii) y iii). Para cada

$\alpha < \gamma$ existe D_α numerable y denso de F_α, denotemos por D_γ a la unión de estos. Sea $F_\gamma = \mathrm{cl}(\bigcup\{F_\alpha : \alpha < \gamma\})$, es claro que D_γ atestigüa su separabilidad. Por la definición de este último conjunto, $\{F_\alpha : \alpha \leqslant \gamma\}$ cumple i) y ii), y por hipótesis y como γ es límite también cumple iii). Por lo tanto existe tal familia $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$; sin embargo, su existencia será contradictoria.

Sea $F = \bigcup\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, como es subespacio de X, es T_2 y posee la propiedad de Suslin porque $c(F) \leqslant s(F) \leqslant s(X) = \omega$. Notemos que además es compacto: dado que cualquier secuencia libre de F es una secuencia libre de X, $t(F) \leqslant t(X) \leqslant \omega$, entonces $\mathrm{cl}(F) = [F]_\omega = \bigcup\{\mathrm{cl}(A) : A \subseteq F \text{ y } |A| \leqslant \omega\}$ y si $A \subseteq F$ es numerable, como $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es creciente y está compuesta por cerrados, existe $\beta < \omega_1$ tal que $\mathrm{cl}(A) \subseteq F_\beta \subseteq F$. Por lo tanto F es cerrado en X, y por ello es compacto. Sucede entonces que F cumple con todas las premisas de la versión topológica de AM (véase 3.16), pero por iii), para cada $\alpha < \omega_1$, F_α es denso en ninguna parte de $F_{\alpha+1}$ entonces es denso en ninguna parte de F y como estamos suponiendo $\neg$HC se contradice AM. Ahora podemos concluir que cualquier espacio compacto, T_2 y tal que $s(X) = \omega$ contiene un abierto separable y no vacío.

Por otro lado, consideremos a una familia U formada por abiertos separables y no vacíos, ajena dos a dos y maximal, notemos que como $c(X) \leqslant \omega$, U es numerable. Por ello $\bigcup U$ es separable, además afirmamos que es denso en X, pues de lo contrario existiría W no vacío y abierto de X tal que $W \subseteq X \setminus \bigcup U$. Y dado que X es regular, podemos fijar un abierto V de X tal que $K = \mathrm{cl}(V) \subseteq W$. Como K es compacto, T_2 y $s(K) \leqslant s(X)$, existe un abierto A en K, separable y no vacío. Pero entonces $A \cap V$ es abierto en X, separable y ajeno a cualquier elemento de U, lo que contradice la maximalidad de esa familia. Entonces es verdad que $\bigcup U$ es separable y denso de X, y por lo tanto X es separable. Más aún, como cualquier subespacio cerrado de X hereda todas las propiedades de X que supusimos, todos los cerrados de X también son separables.

Finalmente, consideremos $A \subseteq X$ arbitrario. Por lo anterior sabemos que $\mathrm{cl}(A)$ es separable, sea $D = \{d_n : n \in \omega\}$ un denso de $\mathrm{cl}(A)$, como $t(X) \leqslant \omega$, para cada $n \in \omega$ existe $A_n \subseteq A$ numerable y tal que $d_n \in \mathrm{cl}(A_n)$; por su elección $E = \bigcup\{A_n : n \in \omega\} \subseteq A$ es numerable y $A \subseteq \mathrm{cl}(D) \subseteq \mathrm{cl}(E)$, por lo tanto A es separable y podemos concluir que X es hereditariamente separable. $\square$

Ahora estableceremos hipótesis suficientes que *llevan* un espacio numerablemente compacto a uno compacto. Dicho resultado es conocido como *Teorema de Weiss*.

Lema 3.58. *Si X es un espacio numerablemente compacto y perfectamente normal, entonces* $s(X) = \aleph_0$.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe D un subespacio discreto no numerable. Sin pérdida de generalidad $|D| = \omega_1$, sea $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una numeración sin repeticiones. Para cada $\alpha < \omega_1$, elijamos un abierto $U_\alpha \in \tau(X)$ tal que $U_\alpha \cap D = \{x_\alpha\}$.

Dado que X es un espacio perfecto y $G = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$ un abierto, G es F_δ, sea $\{F_i : i \in \omega\}$ una familia de cerrados tales que $G = \bigcup_{i\in\omega} F_i$. Como D no es numerable, existe $m \in \omega$ tal que $F_m \cap D$ tampoco es numerable; y, por lo tanto, podemos elegir una sucesión estrictamente creciente de elementos de ω_1, $\{\alpha_n : n \in \omega\}$, tal que, para todo $n \in \omega$, $x_{\alpha_n} \in D \cap F_m$.

X es numerablemente compacto por hipótesis, entonces el conjunto

$$B = \bigcap_{n\in\omega} \mathrm{cl}(\{x_{\alpha_m} : n < m < \omega\})$$

no es vacío. Sea $x \in B$, recordando que F_m es cerrado, sucede que $B \subseteq F_m$. Así que existe $\gamma < \omega_1$ tal que $x \in U_\gamma$.

Para mostrar una contradicción observe que, como para todo $n \in \omega$, $\mathrm{cl}(\{x_{\alpha_m} : n < m < \omega\}) \cap U_\gamma \neq \emptyset$ y U_γ es abierto, tenemos que para todo $n \in \omega$, $\{x_{\alpha_n} : n \in \omega\} \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Y dado que $D \cap U_\gamma = \{x_\gamma\}$, tenemos que $\gamma = \alpha_m$ para alguna $m \in \omega$ contradiciendo el que $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, la existencia de un subespacio como D es imposible. □

Lema 3.59. *Si* X *es un espacio separado derecho y no numerable con* $s(X) = \aleph_0$, *entonces* X *es separable.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, con $I_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ abierto en X, si $\alpha < \omega_1$. Supongamos por reducción al absurdo que X no es separable; esto nos permitirá construir un subespacio discreto y no numerable. Para ello, procedamos por recursión sobre ω_1: para la base considere a $x_\alpha \in X$ arbitrario y a $I_{\alpha+1}$, y definamos $x_{\alpha_0} = x_\alpha$ y $V_0 = I_{\alpha+1}$. Supongamos que para $\beta < \omega_1$, hemos construido un par de conjuntos $D_\beta = \{x_{\alpha_\gamma} : \gamma < \beta\}$ y $\{V_\gamma : \gamma < \beta\} \subseteq \tau(X)$ tales que:

$$\forall \gamma < \beta (x_{\alpha_\gamma} \in V_\gamma \setminus \bigcup \{V_\delta : \gamma < \delta < \beta\}) \qquad (*)$$

Como $\beta < \omega_1$ y X no es separable, existe un abierto no vacío U tal que $\{x_{\alpha_\gamma} : \gamma < \beta\} \cap U = \emptyset$. Por esta razón, si fijamos $x \in U$, y definimos $x_{\alpha_\beta} = x$ y a $V_\beta = U$, sucede que $D = \{x_{\alpha_\gamma} : \gamma \leqslant \beta\}$ y $\{V_\gamma : \gamma \leqslant \beta\}$ son como buscábamos. Por recursión, existen $D = \{x_{\alpha_\gamma} : \gamma \leqslant \omega_1\} \subseteq X$ y $\{V_\gamma : \gamma < \omega_1\} \subseteq \tau(X)$ que cumplen con la propiedad $(*)$; esto implica que D es discreto pues si $\gamma < \omega_1$, $x_{\alpha_\gamma} = (V_\gamma \cap I_{\alpha+1}) \cap D$. Por lo tanto, D es no numerable y discreto, contradiciendo la numerabilidad de la amplitud de X. Así, podemos concluir que X es separable. □

Definición 3.60. Si X es un espacio topológico, a $U \subseteq P(X)$ la llamaremos una *pseudocubierta*[12] de X si es tal que $X = \bigcup\{cl(u) : u \in U\}$. Diremos que es una *pseudocubierta abierta*, si, además, está conformada por abiertos de X.

Lema 3.61 ($AM_{\sigma-centrado} + \neg HC$)**.** *Sea* X *un espacio* T_2*, numerablemente compacto y separable. Entonces para toda* U*, cubierta abierta de* X *de cardinalidad infinita y menor que* $2^{\aleph_0}$*, existe* $W \subseteq U$ *una pseudocubierta finita de* X*.*

Demostración. Sea D un conjunto denso y numerable en X, fijemos $\{x_n : n \in \omega\}$ una numeración de D, sin repeticiones. Para cada $u \in U$ definamos al conjunto $A_u = \{n \in \omega : x_n \notin cl(u)\}$.
Si existe $U' \subseteq U$ finito y tal que $\bigcap\{A_u : u \in U'\}$ también es finito, fijemos $U'' \subseteq U$ finito, tal que para cada $n \in \bigcap\{A_u : u \in U'\}$, existe $w \in U''$ con $x_n \in w$. Luego, $U' \cup U''$ es una pseudocubierta finita de X, pues, como $D \subseteq U' \cup U''$, sucede que $X = cl(D) \subseteq \bigcup\{cl(w) : w \in U' \cup U''\}$.

Resta explorar el caso en el que se cumpla la siguiente propiedad:

$$\forall U' \subseteq U(|U'| < \aleph_0 \to |\bigcap\{A_u : u \in U'\}| = \aleph_0). \qquad (*)$$

Supongamos $(*)$, es decir, supongamos que $A = \{A_u : u \in U\}$ tiene la pfif. Observe que, en particular, para cada $u \in U$, A_u es infinito. Luego, como $|A| < 2^{\aleph_0}$, por el lema de Booth (2.14), A posee una pseudointersección E'.

Veamos ahora que entonces el conjunto $E = \{x_n : n \in E'\}$ es infinito, discreto y cerrado, hecho que, si logramos demostrar, contradiría la hipótesis de que X es numerablemente compacto, pues $\{X \setminus E\} \cup \{\{e\} : e \in E\}$ no tendría subcubiertas finitas. Primero note que, por definición de pseudointersección, E' es infinito y por ello E también lo es. Ahora, veamos que E es discreto: sea $n \in E'$ arbitrario, y $u \in U$ tal que $x_n \in u$. Por la elección de E', el conjunto $E' \setminus A_u = \{m \in E' : x_m \in cl(u)\}$ es finito y por ello $\{m \in E' : x_m \in u\}$ también es finito. Entonces, $E \cap u$ es finito y, dado que X es T_2, existe un abierto w, tal que $E \cap (u \cap w) = \{x_n\}$. Revisemos ahora que E es cerrado: sean $x \in X \setminus E$ y $u \in U$ tales que $x \in u$. Como $E' \setminus A_u$ es finito, en particular, $\{n \in E' : x_n \in u\}$ es finito. De nuevo, utilizando el que X es de Hausdorff, existe v un abierto en X, tal que $x \in v \cap u \subseteq X \setminus E$. Luego, la existencia de E es contradictoría, y, por ello, la propiedad $*$) es falsa. En consecuencia, y por nuestras observaciones anteriores, existe $W \subseteq U$ una pseudocubierta finita de X. □

[12]Esta definición no es una convención general, sólo la introducimos en este escrito para nuestros propósitos.

Teorema 3.62 ($AM_{\sigma-\mathtt{centrado}} + \neg HC$)**.** *Todo espacio numerablemente compacto, perfectamente normal y regular, es compacto.*

Demostración. Sea un espacio X, que satisfaga la hipótesis. Observe que como X es numerablemente compacto, si fuese Lindelöf, habríamos concluido. A continuación mostraremos que X es, de hecho, hereditariamente Lindelöf. Esto lo mostraremos por el método de contradicción. Sabemos que X es hereditariamente Lindelöf si y sólo si todos sus subespacios separados derechos son a lo más numerables (véase 3.31). Supongamos entonces, que existe un subespacio separado derecho por su indexación (véase 3.30) y de cardinalidad ω_1: $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, con $U_\alpha = \{y_\beta : \beta < \alpha + 1\}$ abierto para toda $\alpha < \omega_1$.

Observe que $U_\alpha \cap \{y_\beta : \beta > \alpha\} = \emptyset$, y que, por la regularidad de X, podemos escoger una vecindad abierta V_α de y_α tal que $\mathrm{cl}(V_\alpha) \subseteq U_\alpha$, para cada $\alpha < \omega_1$. Como X es numerablemente compacto y perfectamente normal, por el lema 3.58, $s(X) = \aleph_0$ y, así, $s(Y) = \aleph_0$. Esto último y el que Y es separado derecho, implican que Y es separable (lema 3.59).

Por otro lado, como X es perfectamente normal y $G = \bigcup_{\alpha<\omega_1} V_\alpha$ es abierto, existe una familia $\{F_n : n \in \omega\}$ de conjuntos cerrados, tal que $G = \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Fijemos $m \in \omega$ tal que $Y \cap F_m$ sea no numerable. Así, si definimos $E = \mathrm{cl}(Y \cap F_m)$, como Y es separable y F_m es cerrado, E también resulta ser separable. Además, debido a que E es cerrado en X, es numerablemente compacto. Pero entonces, por el lema 3.61, para toda cubierta abierta U de E, con $|U| < 2^{\aleph_0}$, existe $F \subseteq U$ finito y tal que $\{\mathrm{cl}(u) : u \in F\}$ es una cubierta de E. Notemos que $U = \{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una cubierta abierta de E, pues $E \subseteq \mathrm{cl}(F_m) = F_m \subseteq \bigcup U$, y, no obstante, para cada $\alpha < \omega_1$, $\mathrm{cl}(V_\alpha) \subseteq U_\alpha$ y $|U_\alpha \cap Y| \leqslant \aleph_0$, así que no existe una colección $F \subseteq U$ finita y tal que $\{\mathrm{cl}(u) : u \in F\}$ cubra un subconjunto no numerable de Y, y por lo tanto a E. Esta contradicción nos muestra que X es hereditariamente Lindelöf.

Así, X es Lindelöf y, por lo tanto, compacto. □

3.6. Los espacios de Luzin no existen

En la sección sobre categoría de Baire y Teoría de la Medida, mencionábamos que en ocasiones las maneras de concebir el *tamaño* de un conjunto determinado coinciden y en otras no, un ejemplo de las últimas lo ofrece el conjunto ternario de Cantor pues al ser un conjunto no numerable puede ser considerado como amplio desde la visión conjuntista y, sin embargo, tiene medida de Lebesgue cero. Los espacios de Luzin serán aquellos en donde obligamos a que coincidan las *mediciones* de la óptica conjuntista con la topológica. Nuestra siguiente y última aplicación tratará este tema.

Definición 3.63. Diremos que un espacio de Hausdorff denso en sí mismo y no numerable *es de Luzin* si todo denso en ninguna parte es numerable.

Si incorporamos la Hipótesis del Continuo y utilizamos el teorema de categoría de Baire para espacios métricos[13], como comprobaremos en el siguiente ejemplo, podemos construir de una manera muy directa un espacio de Luzin dentro de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.63.1. (HC) Existe al menos un espacio de Luzin.

Demostración. Fijemos $\{N_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, una numeración de los nunca densos en $\mathbb{R}$ y supongamos que para algún $\alpha < \omega_1$, hemos construido $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ tal que para cada $\beta < \alpha$, $x_\beta \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\{N_\gamma \cup \{x_\gamma\} : \gamma \leqslant \beta\}$. Por el teorema de categoría de Baire $\bigcup\{N_\beta \cup \{x_\beta\} : \beta < \alpha\}$ es denso en ninguna parte; fijemos $x_\alpha \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\{N_\gamma \cup \{x_\beta\} : \beta < \alpha\}$. El conjunto L que resulta de aplicar recursión, es por contrucción no numerable y su intersección con cualquier denso en ninguna parte de $\mathbb{R}$ es numerable, pues si $\alpha < \omega_1$, $N_\alpha \cap L \subseteq \{x_\beta : \beta < \alpha\}$; por lo tanto, también es numerable cualquier denso en ninguna parte contenido en él. $\square$

Sin embargo, a diferencia de todas las aplicaciones conjuntistas, de categoría y medida que hemos abordado, el Axioma de Martin unido a la negación de la Hipótesis del Continuo, implicarán algo distinto de lo que implica la HC, pues mostraremos que bajo $\neg$HC+AM la existencia de espacios Luzin es imposible. Para demostrar lo anterior, primero veremos algunas propiedades que deberían de poseer los espacios de Luzin; lo primero que encontraremos es que los espacios de Luzin deben ser hereditariamente Lindelöf.

Lema 3.64. *Si X es T_1 y denso en sí mismo, entonces todo subespacio discreto es denso en ninguna parte de X.*

Demostración. Supongamos que $D \subseteq X$ es discreto. Observe que como para todo abierto $U \in \tau(X)$ y todo $A \subseteq X$, $\mathrm{cl}(U \cap \mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(U \cap A)$, entonces $U \cap \mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(U \cap A)$. Ahora, para cada $x \in D$, fijemos $U_x \in \tau(x, X)$ tal que $U_x \cap D = \{x\}$ y note que entonces $U_x \cap \mathrm{cl}(D) \subseteq \mathrm{cl}(U_x \cap D) = \mathrm{cl}(\{x\}) = \{x\}$. Además, debido a que X es denso en sí mismo, $\mathrm{int}(\{x\}) = \emptyset$, combinando lo anterior, $U_x \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(D)) = \emptyset$. Definamos $V = \bigcup\{U_x : x \in D\}$, por su construcción es ajeno a $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(D))$ y como $D \subseteq V$, tenemos que $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(D)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(D)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(V)) = \emptyset$. Por lo tanto, D es denso en ninguna parte. $\square$

[13] En los espacios métricos completos, la unión numerable de nunca densos es también densa en ninguna parte. Puede consultarse [Bri11] para una prueba y una motivación detallada de éste y de otros temas relacionados.

Lema 3.65. *Si* X *es de Luzin, entonces* $hl(X) = \omega$.

Demostración. Por una caracterización del grado de Lindelof que demostramos en 3.31, bastará con probar que si Y es un subespacio separado derecho arbitrario, entonces Y es numerable. Sea $<$ un buen orden que atestigüe el que Y es separado derecho; para cada $u \in \tau(Y) \setminus \{\emptyset\}$, denotemos por x_u a su $<$-mínimo. Observe que si $u \in \tau^*$ y $u \setminus \{x_u\} \neq \emptyset$, entonces existe y_u el mínimo de éste, y como Y es separado derecho, $\{x_u\} = u \cap I_{y_u} \in \tau(X)$. Si $u \setminus \{x_u\} = \emptyset$, entonces $u = \{x_u\}$. Luego, $D = \{x_u : u \in \tau(Y) \setminus \emptyset\}$ es un espacio discreto. Por el lema anterior, D es denso en ninguna parte y como $cl(D) = Y$, Y también lo es. Y debido a que X es de Luzin, obtenemos que Y es numerable. $\square$

Nuestro siguiente objetivo será mostrar que bajo el AM los espacios de Luzin deben ser cero dimensionales.

Definición 3.66. Un espacio topológico es *cero dimensional* si es T_2 y tiene una base conformada por conjuntos abiertos y cerrados a la vez.

Lema 3.67. *Si* X *no es cero dimensional y es* $T_{3\frac{1}{2}}$, *entonces* X *puede ser mapeado continua y suprayectivamente en* $I = ([0,1], \tau)$, *donde* τ *es la topología usual de* $[0,1]$.

Demostración. Por la hipótesis existen $x \in X$ y $U \in \tau(x, X)$ tal que ningún conjunto V que sea cerrado y abierto satisface $x \in V \subseteq U$, en particular, U no es igual al vacío ni a X. Al ser de Tychonoff, existe $f : X \longrightarrow I$ una función continua tal que $f(x) = 1$ y $f[X \setminus U] \subseteq \{0\}$. Si suponemos que $r \in (0,1) \setminus f[X]$, entonces $f^{-1}[(r,1]]$ es una vecindad abierta y cerrada de x y es tal que $f^{-1}[(r,1]] \subseteq U$. Como esto contradice la elección de x, podemos concluir que f es suprayectiva. $\square$

Lema 3.68. *(AM +¬HC) Sea* X *un espacio* T_3 *y* $2AN$, *y sea* $Z \subseteq X$ *no numerable. Entonces existe una familia* $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ *de cerrados de* X *y ajena dos a dos, tal que para toda* $\alpha < \omega_1$, $|F_\alpha \cap Z| > \omega$.

Demostración. Sea B una base numerable de X, sin pérdida de generalidad, la podemos suponer cerrada bajo uniones finitas. Como Z no es numerable, existe $f : Z \times \omega_1 \longrightarrow Z$ una biyección. Si para cada $\alpha < \omega_1$ denotamos $Z_\alpha = f[Z \times \{\alpha\}]$, entonces $\{Z_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq P(Z)$ es una familia ajena dos a dos, observe que podemos proceder suponiendo que para cada $\alpha < \omega_1$, $|Z_\alpha| = \omega_1$.

Sea P el conjunto de los pares ordenados $p = (s, a)$ tales que:

I s y a son funciones para las cuales existe $D_p \subseteq \omega_1 \times \omega$ finito y tal que $D_p = dom(s) = dom(a)$.

II $s : D_p \longrightarrow B$ y $a : D_p \longrightarrow [Z]^{<\omega}$.

III Para cada $(\alpha, n) \in D_p$, $a(\alpha, n) \subseteq Z_\alpha \cap s(\alpha, n)$.

Dados dos elementos $p = (s, a)$, $q = (t, b) \in P$, diremos que $p \leqslant q$ si y sólo si $D_q \subseteq D_p$, $s(\alpha, n) \subseteq t(\alpha, n)$ y $b(\alpha, n) \subseteq a(\alpha, n)$, para cada $(\alpha, n) \in D_q$. La prueba de que $(P, \leqslant)$ es un orden parcial es casi inmediata, pero revisemos que el que X sea 2AN asegura que $(P, \leqslant)$ satisface la cac: supongamos que $A \subseteq P$ no es numerable, si $\{D_p : p \in A\}$ no es numerable, por el Δ-lema (véase 1.4), se da la siguiente propiedad:

$$\exists A' \subseteq A \exists r \subseteq \omega_1 \times \omega (\forall p, q \in A' (D_p \cap D_q = r) \qquad (*)$$

Note que si $\{D_p : p \in A\}$ es numerable, debido a que A no es numerable, también podemos asegurar la verdad de la propiedad $(*)$. Fijemos $A' \subseteq A$ y $r \subseteq \omega_1 \times \omega$, tales que para cualesquiera $p, q \in A'$ $D_p \cap D_q = r$. Debido a que B es numerable y r es finito, la cantidad de funciones de r en B son numerables, así que existe $A'' \subseteq A'$ no numerable y tal que para cualesquiera $p = (s, a)$, $q = (t, b) \in A''$, $s|_r = t|_r$. Como una consecuencia de ello, si fijamos un par de los elementos $p = (s, a)$ y $q = (t, b)$, de A'', podemos definir una extensión común, de la siguiente manera: $e = (v, c)$ con $v : D_p \cup D_q \longrightarrow B$ y $c : D_p \cup D_q \longrightarrow [Z]^{<\omega}$ definidas como $v(\alpha, n) = s(\alpha, n)$ si $(\alpha, n) \in D_p$ y $v(\alpha, n) = t(\alpha, n)$ en el caso en que $(\alpha, n) \in D_q \setminus r$, así mismo $c(\alpha, n) = a(\alpha, n) \cup b(\alpha, n)$ si $(\alpha, n) \in D_p$, $c(\alpha, n) = b(\alpha, n)$ si $(\alpha, n) \in D_q \setminus f$. Por su definición $e \leqslant p$ y $e \leqslant q$, así que A no es una anticadena y por lo tanto P satisface la cac.

Dada $\alpha < \omega_1$ y $z \in Z_\alpha$ definimos $E(z, \alpha) = \{(s, a) \in P : z \in a(\alpha, n)$ para algún $n \in \omega\}$; verifiquemos que éste es denso en P: sea $p = (s, a) \in P$, como D_p es finito, existe $n \in \omega$ tal que $(\alpha, n) \notin D_p$, asimismo, fijemos algún $U \in \tau(z, X)$. Definamos $q = (t, b)$ donde $t : D_p \cup \{(\alpha, n)\} \longrightarrow B$ es definida como $t|_{D_p} = s$ y $t(\alpha, n) = U$, y $b : D_q \longrightarrow [Z]^{<\omega}$ de modo que $b|_{D_p} = a$ y $b(\alpha, n) = \{z\}$. Es claro que q extiende a p y pertenece a $E(z, \alpha)$. La familia $E = \{E(z, \alpha) : z \in Z_\alpha$ para algún $\alpha < \omega_1\}$ junto con nuestra definición de $\leqslant$ nos permitirán construir conjuntos que contengan a Z_α, mientras que la siguiente familia de densos asegurará que esos conjuntos sean cerrados y ajenos.

Sea $H = \{H(\alpha, \beta, n, m) : \alpha, \beta < \omega_1$ con $\alpha \neq \beta$ y $n, m < \omega\}$ donde dados $\alpha, \beta < \omega_1$ y $n, m \in \omega$, $H(\alpha, \beta, n, m) = \{(s, a) \in P : cl(s(\alpha, n)) \cap cl(s(\beta, m)) = \emptyset\}$. Para mostrar que H está conformada por densos, sean $H(\alpha, \beta, n, m) \in H$ y $p = (s, a) \in P$. Si $(\alpha, n) \notin D_p$, sean $z \in Z_\alpha$ y $U \in B$ una vecindad de z. Considere a $p' = (s', a')$ con $s'|_{D_p} = s$, $a'|_{D_p} = a$, $s'(\alpha, n) = U$ y $a'(\alpha, n) = \{z\}$, como $p' \leqslant p$, para nuestro propósito podemos suponer que $p = p'$, análogamente podemos suponer que $(\beta, m) \in D_p$. Observando que X es T_3, los conjuntos $a(\alpha, n)$ y $a(\beta, m)$ son ajenos y finitos (pues $\alpha \neq \beta$), y que B es cerrada bajo uniones finitas, podemos encontrar $U, V \in B$ tales que $a(\alpha, n) \subseteq U$, $a(\beta, m) \subseteq V$ y $cl(U) \cap cl(V) = \emptyset$. Definamos $q = (t, b)$ igual a p exceptuando por las evaluaciones: $t(\alpha, n) = U \cap s(\alpha, n)$, $t(\beta, m) = V \cap s(\beta, m)$, luego $q \in H(\alpha, \beta, n, m)$ y extiende a p.

Consideremos a G, un filtro $(E \cup H)$-genérico; para cada $p = (s, a) \in G$, si $(\alpha, n) \in (\omega_1 \times \omega) \setminus D_p$, extendamos su dominio como sigue: $s(\alpha, n) = X$ y $a(\alpha, n) = \emptyset$. Para cada $(\alpha, n) \in \omega_1 \times \omega$ definamos al conjunto cerrado $F_{\alpha,n} = \bigcap\{\mathrm{cl}(s(\alpha, n)) : (s, a) \in G$ para alguna función $a\}$ y sea $K_\alpha = \bigcup\{F_{\alpha,n} : n \in \omega\}$. Sucede que para cada $\alpha < \omega_1$, $Z_\alpha \subseteq K_\alpha$. En efecto, sea $z \in Z_\alpha$. Tomemos $p = (s, a) \in G \cap E(z, \alpha)$, y $n \in \omega$ tales que $z \in s(\alpha, n)$. Si $q = (t, b) \in G$, existe $r = (v, c) \in G$ que extiende a p y a q; en particular $a(\alpha, n) \subseteq c(\alpha, n)$ y $c(\alpha, n) \subseteq t(\alpha, n)$, entonces $z \in \mathrm{cl}(t(\alpha, n))$. Como q fue arbitrario, tenemos que $z \in F_{\alpha,n}$, y por lo tanto nuestra afirmación es cierta.

Ahora observaremos que para cada $\alpha < \beta < \omega_1$, $K_\alpha \cap K_\beta = \emptyset$. Por la definición de estos conjuntos, basta con probar que si fijamos $n, m \in \omega$, entonces $F_{\alpha,n} \cap F_{\beta,m} = \emptyset$. Para ello, sea $p = (s, a) \in H(\alpha, \beta, n, m) \cap G$, entonces $F_{\alpha,n} \cap F_{\beta,m} \subseteq \mathrm{cl}(s(\alpha, n)) \cap \mathrm{cl}(s(\beta, m)) = \emptyset$.

Por último, para cada $\alpha < \omega_1$ fijemos $n_\alpha \in \omega$ tal que $|Z_\alpha \cap F_{\alpha,n_\alpha}| > \omega_1$. Entonces, haciendo $F_\alpha = F_{\alpha,n_\alpha}$, la familia $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es como prometimos. □

Lema 3.69. *(AM +¬HC) Si* X *es un espacio de Luzin,* M *es un espacio* 2AN *y* T_3, *y* $f : X \longrightarrow M$ *es una función continua, entonces su imagen es numerable.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $f[X]$ no es numerable. Entonces, si aplicamos el lema 3.68, existen una familia $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ajena dos a dos y conformada por cerrados de M, tales que para cada $\alpha < \omega_1$, $|F_\alpha \cap f[X]| > \aleph_0$. Por esto, si $\alpha < \omega_1$, $f^{-1}[F_\alpha]$ tampoco es numerable y es cerrado, y debido a que X es de Luzin, $\mathrm{int}(f^{-1}[F_\alpha]) \neq \emptyset$. Luego, la familia $\{\mathrm{int}(f^{-1}[F_\alpha]) : \alpha < \omega_1\}$ es una familia no numerable de abiertos ajenos dos a dos. Pero entonces $\omega_1 \leqslant C(X) \leqslant hl(X) \leqslant \omega$, la contradicción surgió de suponer que la imagen de f no es numerable y por lo tanto la proposición es verdadera. □

Lema 3.70 (AM+¬HC)**.** *Todo espacio de Luzin es cero-dimensional.*

Demostración. Supongamos que X es de Luzin. Como I es 2AN, T_3 y no numerable, el lema 3.69 nos dice que ninguna función continua de X en I puede ser suprayectiva. Entonces, por la contrapositiva del lema 3.67, X es cero dimensional. □

Estamos casi en condiciones de mostrar que los espacios de Luzin no pueden existir si aceptamos al AM+¬ HC. Para probarlo, esencialmente lo que haremos en el teorema 3.72 será suponer la existencia de un espacio de Luzin, digamos X, y crear una colección de abiertos en él, que al combinarla con $\mathrm{hl}(X) = \omega$ (lo cual hemos probado en el lema 3.65) creará una contradicción. La construcción de dichos abiertos la haremos por recursión; el lema que sigue será el paso límite de dicha construcción.

Lema 3.71. *Sea X un espacio de Luzin tal que todos sus abiertos no vacíos no son numerables. Supongamos que $U = \{u(n,k) : n, k \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos de X que son cerrados y abiertos a la vez, y que es tal que, para cada $n \in \omega$, la colección $U_n = \{u(n,k) : k \in \omega\}$ es ajena dos a dos y $\bigcup U_n$ es denso en X. Entonces, el conjunto $H = \bigcup\{\mathrm{int}(E_h) : h \in \omega^\omega\}$, donde $E_h = \bigcap\{u(n, h(n)) : n \in \omega\}$ para cada $h \in \omega^\omega$, es denso en X.*

Demostración. Dado $u \in U$, $X_u : X \longrightarrow \{0,1\}$ será la función característica de u. Entonces $f = \triangle\{X_u : u \in U\}$, la función diagonal, mapea a X suprayectivamente en un espacio $Y \subseteq \{0,1\}^U$. Debido a que U es numerable, Y es métrico, en particular, es T_3 y 2AN, así que por el lema 3.69, Y es numerable.

Observemos ahora que para cada $h \in \omega^\omega$, el conjunto E_h es distinto del vacío si y sólo si existe $y_h \in Y$ tal que $E_h = f^{-1}[\{y_h\}]$. En efecto, sea $h \in \omega^\omega$. Como $f : X \longrightarrow Y$ es suprayectiva, si $E_h = f^{-1}[\{y_h\}]$ para algun $y_h \in Y$, tenemos que $E_h \neq \emptyset$. Supongamos ahora que $E_h \neq \emptyset$. Fijemos $x \in E_h$ y definamos $y_h : U \longrightarrow \{0,1\}$ como sigue:

$$y_h(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists n \in \omega(u = u(n, h(n))) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Afirmamos que $E_h = f^{-1}[\{y_h\}]$. Efectivamente, primero veamos que si $x \in E_h$, entonces $x \in f^{-1}[\{y_h\}]$, es decir, $f(x) = y_h$. Para verificar esto bastará con revisar que sus evaluaciones coinciden: sea $u(n,m) \in U$, como $x \in E_h \subseteq u(n, h(n))$, si $h(n) = m$, entonces $f(x)(u(n,m)) = 1 = y_h(u(n,m))$. Por otro lado, si $h(n) \neq m$, dado que U_n es ajena dos a dos y $x \in u(n, h(n))$, tenemos que $f(x)(u(n,m)) = 0 = y_h(u(n,m))$. Por lo tanto, $f(x) = y_h$. Para la otra contención, sólo note que si $x \in f^{-1}(y_h)$, como para cada $n \in \omega$ $X_{u(n,h(n))}(x) = f(x)(u(n,h(n))) = y_h(u(n,h(n))) = 1$, sucede que $x \in E_h$. Combinando lo anterior podemos concluir que $E = \{E_h : h \in N\}$, con $N = \{h \in \omega^\omega : E_h \neq \emptyset\}$, es numerable.

Ahora probaremos que H, efectivamente es denso, sea $W \in \tau^*$; observe que como N es numerable, podemos fijar $h \in N$ tal que $W \cap E_h$ no es numerable. Dado que X es de Luzin, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(E_h \cap W)) \neq \emptyset$, en particular existe $V \in \tau(X)^*$ tal que $V \subseteq \mathrm{cl}(E_h) \cap \mathrm{cl}(W)$, pero E_h es cerrado, entonces $V \subseteq E_h \cap \mathrm{cl}(W) \neq \emptyset$, como V es abierto y $V \cap \mathrm{cl}(W) \neq \emptyset$, tenemos que $V \cap W \neq \emptyset$. Por último y como $V \subseteq E_h$, podemos concluir que $V \cap W \subseteq \mathrm{int}(E_h) \cap W \neq \emptyset$, y, por lo tanto, que H sí es denso. □

Teorema 3.72 (AM+¬HC). *No existen espacios de Luzin.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Luzin. Primero observemos que, sin pérdida de generalidad, podemos considerar que todos los abiertos no vacíos de este espacio no son numerables. Sean $U = \{u \in \tau(X) : u \text{ es numerable}\}$ y $Y = \bigcup U$. Como $hl(X) \leqslant \omega$, existe $W \subseteq U$ numerable y tal que $Y = \bigcup W$, entonces Y es numerable y abierto. Por ello $X \setminus Y$ es un espacio de Luzin sin abiertos (no vacíos) numerables.

Ahora, por recursión, construyamos una familia $\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ que cumpla con lo siguiente:

i) Para todo $\alpha < \omega_1$, T_α es numerable, ajena dos a dos, todos sus elementos son no vacíos, abiertos y cerrados, y $\bigcup T_\alpha$ es denso en X.

ii) Siempre que $\alpha < \beta < \omega_1$, T_β está propiamente inscrito en T_α, es decir: si $u \in T_\beta$, existe $v \in T_\alpha$ tal que $u \subset v$.

Definamos $T_0 = \{X\}$. Supongamos que existe $\alpha < \omega_1$ y $\{T_\beta : \beta < \alpha\}$ una colección que satisface las propiedades buscadas. Si α es el sucesor de algún ordinal γ y $u \in T_\gamma$, como u no es numerable, podemos tomar $x, y \in u$ tales que $x \in u \setminus \{y\}$, y como X es cero-dimensional, existe $o_u \in \tau(x, X)$ cerrado y tal que $o_u \subseteq u \setminus \{y\}$, en particular, $o_u \subset u$. Proponemos $T_\alpha = \{o_u : u \in T_\gamma\} \cup \{u \setminus o_u : u \in T_\gamma\}$. Para el caso en el que α es ordinal límite, sea $\{\beta_n : n \in \omega\}$ una sucesión estrictamente creciente y cofinal en α. Para cada $n \in \omega$, numeremos T_{β_n}: si es infinito fijemos cualquier numeración $T_{\beta_n} = \{U(n, m) : m \in \omega\}$, si es finito, de cardinalidad m_n, numeremos a sus elementos $\{U(n, m) : m \leqslant m_n\}$ y hagamos para cada $m > m_n$ $U(n, m) = \emptyset$. Por el lema 3.71, existe $N \subset \omega^\omega$ numerable, es tal que para cada $h \in N$, el interior de $E_h = \bigcap\{U(n, h(n)) : n \in \omega\}$ es distinto del vacío, y $\bigcup\{int(E_h) : h \in N\}$ es denso en X. Observe que si $h, g \in N$ son distintos entre sí, existe $n \in \omega$ tal que $h(n) \neq g(n)$, por hipótesis inductiva $U(n, h(n)) \cap U(n, g(n)) = \emptyset$ y entonces $E_h \cap E_g = \emptyset$, además, si $\gamma < \alpha$ y $h \in N$, por hipótesis de inducción existen $n \in \omega$ y $u \in T_\gamma$, tales que $\beta_n > \gamma$ y $E_h \subseteq U(n, h(n)) \subseteq U$. Así que la única propiedad que le falta a la familia $\{int(E_h) : h \in N\}$ para llenar las que buscamos de T_α es que esté conformada por conjuntos abiertos-cerrados: para cada $h \in N$, recurriendo a la cero-dimensionalidad de X, fijemos B_h un conjunto de abiertos-cerrados tales que $\bigcup B_h = int(E_h)$, ya que $hl(X) = \omega$, existe $B'_h \subseteq B_h$ numerable y tal que $\bigcup B'_h = int(E_h)$. Fijemos una numeración $B_h = \{b_n : n \in \omega\}$ sin repeticiones, por recursión en ω, definamos $v_0 = b_0$ y si $n \in \omega \setminus \{0\}$, hagamos $v_n = b_n \setminus \bigcup\{v_m : m < n\}$; la familia $V_h = \{v_n : n \in \omega\}$ está compuesta por abiertos-cerrados, es ajena dos a dos y $\bigcup V_h = int(E_h)$. Luego, si definimos $T_\alpha = \bigcup\{V_h : h \in N\}$, por las observaciones sobre $\{int(E_h) : h \in N\}$ y ya que para cada $u \in T_\alpha$ existe $h \in N$ tal que $u \subset int(E_h)$, T_α cumple con i) y ii).

Sea $T = \bigcup\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\} \setminus \{\emptyset\}$. Afirmamos que T no es numerable pues de lo contrario existiría $\alpha < \omega_1$ tal que $T \subseteq \bigcup\{T_\beta : \beta < \alpha\}$, pero como $\bigcup T_\alpha$ es denso, T_α no es vacío, y si $u \in T_\alpha \cap T_\beta$ para algún $\beta < \alpha$, existe $v \in T_\beta$ tal que $\emptyset \neq v \subsetneq u$, en particular $u \neq v$, y $v \cap u \neq \emptyset$ contradiciendo el que T_β fuese ajena dos a dos. Como T no es numerable y notando que $c(X) \leqslant hl(X) = \omega$, podemos aplicar el lema 3.4, y fijar $S \subseteq T$ no numerable y con la pif. Observe que si $u, v \in T$ son distintos entre sí, entonces o bien $u \cap v = \emptyset$ o $v \subsetneq u$, o bien $v \subsetneq u$. Luego, para cualesquiera $u, v \in S$, $u \subsetneq v$ o bien $v \subsetneq u$.

Para cada $u \in S$, definamos $P_u = \{v \in S : u \subseteq v\}$. Notemos que si $u \in S$ existe $\alpha < \omega_1$ tal que $u \in T_\alpha$, así si $v \in S \cap T_\beta$ y $\beta > \alpha$, entonces $u \nsubseteq v$ pues eso negaría en que T_α sea ajena dos a dos, y si $\beta < \alpha$ a lo más existe un $u \in T_\beta \cap S$, por ello P_u es numerable.

Para finalizar, fijemos $u_0 \in S$ y supongamos que para algún $\alpha < \omega_1$, tenemos $\{u_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq S$ con $u_\beta \subsetneq u_\gamma$ para cada $\gamma < \beta < \alpha$. Como $P = \bigcup\{P_{u_\beta} : \beta < \alpha\}$ es numerable, existe $u \in S \setminus P$ y por la elección de S, $u \subsetneq u_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Haciendo $u_\alpha = u$ y aplicando recursión, existe $\{u_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq T$ una familia esctrictamente decreciente. Para cada $\alpha < \omega_1$ definamos $v_\alpha = u_0 \setminus u_\alpha$, luego $v = \{v_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \tau^*$ es creciente. Como $hl(X) = \omega$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\bigcup v = v_\alpha = u_0 \setminus u_\alpha$. Pero $u_{\alpha+1} \subsetneq u_\alpha \subsetneq u_0$, entonces existe $x \in v_{\alpha+1} \setminus v_\alpha = \emptyset$, por lo tanto los espacios de Luzin no pueden existir. $\square$

4 Preliminares para Forcing

De aquí en adelante estaremos siguiendo los pasos necesarios para construir las llamadas *extensiones genéricas* y trataremos de entender cómo es que éstas nos permiten mostrar que hay proposiciones independientes del mismo sistema axiomático que utilizamos (ZFE). En este capítulo tan sólo haremos un listado de definiciones y teoremas básicos de la teoría que sustenta su funcionamiento -Teoría de Modelos-, siempre tratando de ilustrar su sentido y la necesidad de su introducción para nosotros. Si se desea puede estudiarse [End01] para un tratamiento introductorio y más profundo sobre Lógica Matemática, [JW95], [Amo00] y [Tor00] para un complemento panorámico y ameno sobre Teoría de Conjuntos y Lógica Matemática.

4.1. Lenguajes Formales

Para comenzar, definiremos el tipo de lenguajes que necesitaremos, estos son utlizados para estudiar los fundamentos porque se caracterizan por su falta de ambigüedad -en contraste con los lenguajes naturales-. En particular, estaremos interesados en *lenguajes formales de primer orden*. Cabe mencionar que generalizando de una manera muy directa las definiciones que propondremos en esta sección, se pueden construir lenguajes formales de grados más altos. Y aunque los lenguajes de primer orden no tienen la capacidad expresiva como para tratar toda la matemática -por ejemplo, los rebasa la definición de lo que es una topología-, una parte importante de la matemática se puede reflejar en ellos. Nosotros nos restringiremos a los de primer orden porque varios resultados sobre consistencia sólo se dan en lenguajes de ese grado y serán suficientemente fuertes como para obtener resultados importantes sobre fundamentación.

Remarcamos que en estas definiciones introduciremos la notación que ocuparemos a lo largo de los capítulos restantes y trataremos de indicar lo que buscamos con ellas, pero es importante mantener en mente que, hasta nuevo aviso, no son más que cadenas de símbolos que siguen ciertas reglas de construcción.

Definición 4.1.
- Un *tipo de semejanza* τ, será un conjunto de símbolos de tres tipos:

$$\tau = (\bigcup\{\mathfrak{R}_i : i \in \omega\}) \cup (\bigcup\{\mathfrak{F}_j : j \in \omega\}) \cup \mathfrak{C}$$

  Pueden haber uniendos vacíos y, si $i, j \in \omega$, $\mathfrak{R}_i$ estará conformado por los *símbolos relacionales de aridad* i, $\mathfrak{F}_j$ serán los *símbolos funcionales de aridad* j y $\mathfrak{C}$ es el conjunto de símbolos constantes.

- Dado un tipo de semejanza τ un *lenguaje formal de primer orden* $\mathcal{L}_\tau$ será la unión de los siguientes conjuntos: los conectivos lógicos $\{\wedge, \neg\}$[1]; el cuantificador $\{\exists\}$; los símbolos de variables $VAR := \{v_i : i \in \omega\}$; el símbolo de igualdad $\{=\}$; y símbolos auxiliares: $\{(,), [,], \{,\}, ,\}$, y el tipo de semejanza τ. A los símbolos del lenguaje $\mathcal{L}_\tau$ que no están en el tipo de semejanza se les suele llamar *símbolos lógicos* y a los del tipo de semejanza *no lógicos*.

- Dado un lenguaje formal $\mathcal{L}_\tau$, el conjunto de *T-expresiones* o EXPR_τ, será cualquier sucesión finita de símbolos de dicho lenguaje.

- Mientras que los *T-términos* serán los elementos de un subconjunto TERM_τ de las expresiones, con ellos, trataremos de señalar a los elementos del universo de discurso. Definimos a TERM_τ recursivamente como sigue:

  i) $v_i \in \mathsf{TERM}_\tau$ para toda $i \in \omega$;

  ii) $c \in \mathsf{TERM}_\tau$ para toda $c \in \mathfrak{C}$;

  iii) si $n \in \omega$ $t_1, ..., t_n \in \mathsf{TERM}_\tau$ y $f \in \mathfrak{F}_n$, entonces $f(t_1, ..., t_n) \in \mathsf{TERM}_\tau$.

- Asimismo, definimos recursivamente a las *T-fórmulas* que conforman al conjunto FORM_τ. Éstas simbolizarán enunciados sobre los elementos de nuestro discurso:

  - si $s, t \in \mathsf{TERM}_\tau$, entonces $s = t \in \mathsf{FORM}_\tau$; si $t_1, ..., t_n \in \mathsf{TERM}_\tau$ y $r \in \mathfrak{R}_n$, entonces $r(t_1, ..., t_n) \in \mathsf{FORM}_\tau$, éstas son conocidas como *fórmulas atómicas*.
  - si $\phi, \psi \in \mathsf{FORM}_\tau$, entonces $(\phi) \wedge (\psi) \in \mathsf{FORM}_\tau$;
  - si $\phi \in \mathsf{FORM}_\tau, \neg(\phi) \in \mathsf{FORM}_\tau$
  - si $\phi \in \mathsf{FORM}_\tau$, $\exists v_i(\phi) \in \mathsf{FORM}_\tau$ [2].

[1] Los demás conectivos lógicos usuales los veremos por conveniencia como abreviaciones: $a \vee b =: \neg(\neg a \wedge \neg b)$; $a \to b =: \neg a \vee b$; $a \leftrightarrow b =: a \to b \wedge b \to a$

[2] Asimismo, $\forall v_i \phi$ abreviará a $\neg(\exists v_i(\neg \phi))$

Existen otras maneras equivalentes de definir a las fórmulas de los lenguajes formales, pero ésta (recursiva) es conveniente para probar propiedades y definir conjuntos asociados; los siguientes conjuntos nos serán de utilidad para poder hacer una distinción entre las naturalezas de las fórmulas del lenguaje.

Definición 4.2. Dado un tipo de semejanza τ, definiremos recursivamente una función $\mathsf{Subform}$, que a cada fórmula la asociará con un subconjunto (a sus *subfórmulas*) de FORM. Sean $t_0, ..., t_{n-1} \in \mathsf{TERM}_\tau$, con $n \in \omega$ y $\phi, \psi \in \mathsf{FORM}_\tau$:

- $\mathsf{Subform}(t_0 = t_1) = \{t_0 = t_1\}$
- $\mathsf{Subform}(r(t_0, ..., t_{n-1})) = \{r(t_0, ..., t_{n-1})\}$, donde $r \in \mathfrak{R}_n$
- $\mathsf{Subform}(\phi \wedge \psi) = \{\phi \wedge \psi\} \cup \mathsf{Subform}(\phi) \cup \mathsf{Subform}(\psi)$
- $\mathsf{Subform}(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup \mathsf{Subform}(\phi)$
- $\mathsf{Subform}(\exists v_i \phi) = \{\exists v_i \phi\} \cup \mathsf{Subform}(\phi)$

  Una cantidad importante de pruebas las haremos por inducción sobre la relación S en el conjunto de las fórmulas, donde $\phi S \psi$ si y sólo si $\phi \in \mathsf{Subform}(\psi)$, cuando se utiliza ese tipo de inducción se suele decir «por inducción en la complejidad de las fórmulas» o «por inducción en la construcción de fórmulas».

- El *rango de ocurrencia* de un cuantificador $\exists v_i$ en una fórmula ϕ, será la única subfórmula $\exists v_i \psi$ en $\mathsf{Subform}(\phi)$. Si la variable v_i apareciera en tal ψ diremos que su ocurrencia en ϕ está *acotada*, de no aparecer bajo ningún cuantificador $\exists v_i$, diremos que es *libre*. Si ϕ tiene exactamente n variables libres, con $n \in \omega$, lo abreviaremos como $\phi \in \mathsf{FORM}^n$, o las anunciaremos entre paréntesis, es decir, si escribimos $\phi(v_1, \ldots, v_n)$, significará que $v_1, \ldots, v_n$ son todas las variables que aparecen libres en ϕ (a menos de que indiquemos lo contrario).
- Un *enunciado* será una fórmula sin variables libres, al conjunto de ellos las denotaremos por ENUN_τ. Con éstas trataremos de indicar propiedades generales en nuestro universo de discurso.

  Normalmente cuando interpretemos a las fórmulas, estaremos indicando propiedades sobre sus variables libres; así, si sustituimos una ocurrencia libre de una variable por otra variable que tras la sustitución en esa ocurrencia también es libre, el«sentido» de esa fórmula permanece igual, y por ello, se denomina *sustitución legítima*. La *clausura universal* de una fórmula ϕ será el enunciado que resulte de acotar todas sus variables libres por cuantificadores universales ($\forall$), por ejemplo, usualmente cuando hacemos una afirmación sobre una propiedad, la formalización de esa afirmación sería la clausura universal de la fórmula asociada a esa propiedad.

Ahora que tenemos cadenas de letras que simbolizan afirmaciones sobre algún universo de nuestro interés, podemos formalizar parcialmente nuestra noción de prueba: dar sustento a enunciados más complejos a partir de algunos más simples, de modo que el camino sea de fiabilidad que si las afirmaciones de las que partimos son verdaderas (sea lo que sea que eso signifique), las afirmaciones que concluyamos no tengan más que heredar su veracidad, a este concepto se le llama *correctud* o *sonoridad*.

En la lógica proposicional, a diferencia de la que estamos tratando (lógica de predicados), el vínculo entre la verdad y las pruebas suele ser diáfano. Cuando se busca definir el que una proposición se siga de otra, se formalizan algunas de nuestras maneras usuales de raciocinio en tablas de verdad. Se le da un valor de verdad (falso o verdadero, en la lógica de dos valores) a los átomos de dicha proposición, y el valor de verdad se puede extender a través de un método general (tablas de verdad) a la proposición entera. Sin embargo, la estructura enriquecida de la lógica de predicados rechaza un método análogo.

Establecer lo que es una prueba formal de carácter constructivo, fue una de las razones que llevaron a desarrollar una teoría sintáctica de ésta. No obstante, para tratar muchos asuntos matemáticos requerimos de la expresividad que nos da la lógica de predicados y al introducir cuantificadores, si los dominios de los que estamos hablando son infinitos, un simil a las tablas de verdad no es inmediato. Sin embargo, de nuestra noción de lo que debería ser un teorema matemático, podremos abstraer lineamientos que sean independientes de los entes que estamos estudiando en él; la alternativa que se encontró fue el concepto de modelo y la definición de satisfacibilidad. Más adelante, cuando vinculemos al lenguaje con significados, veremos que la siguiente definición de prueba y la noción de satisfacibilidad en esos «significados», se complementaran armoniosamente para absorber nuestra intuición de «verdad», éste fue uno de los logros más fuertes de la lógica en el siglo XX.

Definición 4.3. Si $\Gamma \subset \mathsf{FORM}_\tau$, para algún tipo de semejanza τ, una *prueba formal* de una fórmula ϕ_n en Γ, lo cual abreviaremos con $\Gamma \vdash \phi_n$, es una sucesión finita no vacía de fórmulas de FORM_τ, digamos $\phi_0, ..., \phi_n$, tal que para cada $i \in \{0, ..., n\}$:

i) $\phi_i \in \Gamma$, o

ii) ϕ es un axioma lógico, o

iii) existen $j, k \in \{0, ..., i-1\}$ tales que ϕ_i se siga por Modus Ponens a partir de ϕ_j y ϕ_k.

- El Modus Ponens será nuestra única *regla de inferencia* (aunque hay sistemas que trabajan otras), éste tipo de reglas son un mecanismo sintáctico y finito que permita a partir de un conjunto finito de fórmulas obtener otra fórmula. Mientras que el conjunto de *axiomas lógicos* son fórmulas del lenguaje que se incluyen para que sea manejable el uso de conectivos lógicos y que los cuantificadores y los símbolos de igualdad tengan las propiedades esperadas[3].

- A los elementos de Γ los llamaremos *axiomas no lógicos*, en principio tan sólo es un subconjunto de FORM_τ, pero para que nos dé un punto de partida adecuado, normalmente se eligen de tal manera que sea un conjunto decidible; un conjunto es *decidible* si existe un procedimiento general y finito para decidir objetivamente si un objeto pertenece o no a dicho conjunto, así que es un requerimiento natural si lo hemos de ocupar directamente.

- Diremos que un subconjunto Γ de FORM_τ es *inconsistente* si existe $\phi \in \mathsf{FORM}_\tau$ tal que $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$, en otro caso diremos que Γ es *consistente*.

- Finalmente, dado $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathsf{FORM}_\tau$, diremos que ϕ es independiente de Γ si no existen pruebas formales de ϕ ni de $\neg\phi$ en Γ.

Una vez elegido un tipo de semejanza, el lenguaje que hemos definido a partir de él, se podrá interpretar de muchas maneras; por ejemplo: algunos lenguajes pueden interpretarse como circuitos eléctricos y, a la vez, como un álgebra de Boole, o si el tipo de semejanza que elegimos es $\tau_G = \{e, *\}$ donde e es la única constante, $* \in \mathfrak{F}_2$ es la única función y el conjunto de relaciones es vacío, una interpretación de tal lenguaje puede ser un grupo o un monoide. Pero a nosotros nos interesa estudiar no sólo a la teoría de grupos, sino a todo lo que entendemos como matemática. Nos encontramos con la cuestión de encontrar un lenguaje apropiado para expresar todos los conceptos en los que se suele pensar en ella. Aunque en la práctica no lo hacemos, objetos como pares ordenados, relaciones, funciones, etc. se pueden reescribir con el tipo de semejanza que tiene como único elemento a la relación binaria $\in$, ese lenguaje es flexible y es el que utlilizaremos, lo denotaremos por τ_C, al lenguaje determinado a partir de ese tipo lo llamaremos *lenguaje de la teoría de conjuntos*, o $\mathcal{L}_C$, ya que, por otro lado, puede utilizarse para representar a la Teoría de Conjuntos. Éste entonces, tendrá un doble papel, por un lado se usa para describir y probar teoremas *sobre* comportamientos de fórmulas y de las estructuras que describiremos con esas fórmulas, y, por otro lado, se suele utilizar para tratar la Teoría

[3]Para nuestros fines no es necesario que profundicemos en ello pero utilizamos los mismos que [End01]

de Conjuntos, u otras ramas de la matemática. Para evitar confusiones cuando lo usemos, para el último caso, se hará a través de los símbolos que introdujimos en la definición 4.1 y cuando lo usemos para teoremas *metamatemáticos* se utilizará el lenguaje español. En particular, todas las definiciones de esta sección sobre teoría de modelos se pueden reescribir apropiadamente en ese lenguaje.

4.2. Introducción a Teoría de Modelos

«This process of assigning meaning guides and motivates all we do»

— H. Enderton

Definición 4.4. Dados un tipo de semejanza τ y el lenguaje $\mathcal{L}_\tau$ de primer orden asociado, una $\mathcal{L}_\tau$*-estructura* será una pareja $\mathfrak{A} = (A, I)$ donde A es un **conjunto** no vacío, llamado *universo de* $\mathfrak{A}$, e I es una función que tiene como dominio a τ, si satisface lo siguiente[4]:

i) si $f \in \mathfrak{F}_j$ para algún $j > 0$, entonces $f_\mathfrak{A} : A^j \to A$ es una función,

ii) si $r \in \mathfrak{R}_i$ para algún $i > 0$, entonces $r_\mathfrak{A} \subseteq A^i$,

iii) si $c \in \mathfrak{C}$, $c_\mathfrak{A} \in A$.

Definición 4.5. Sean $\mathfrak{A}$ una $\mathfrak{L}$-estructura y ϕ una fórmula de ese lenguaje, definiremos recursivamente el que $\mathfrak{A}$ *satisfaga* a ϕ. Primero dotaremos a los términos en $\mathfrak{L}$ de significado. Sea $i : Var \to A$ una función, la extenderemos a una función $\bar{i} : Term \to A$, que llamaremos *interpretación*, utilizando recursión:

I para cada $v \in Var$, $\bar{i}(v) = i(v)$;

II para cada $c \in \mathfrak{C}$: $\bar{i}(c) = i(c)$;

III si $t_1, ..., t_n \in Term$ y $f \in \mathfrak{F}_n$, para algún $n \in \omega$, $\bar{i}(f(t_1, ..., t_n)) = f_\mathfrak{A}(\bar{i}(t_1), ..., \bar{i}(t_n))$.

Ahora fijamos una interpretación s, definimos recursivamente el que $\mathfrak{A}$ *satisface* ϕ bajo la interpretación s, o, equivalentemente, que $\mathfrak{A}$ modela a $\phi[s]$, y lo denotaremos con $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ o con $(\phi[s])^\mathfrak{A}$:

I si $t_1, t_2 \in Term$, $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2[s]$ si y sólo si $s(t_1) = s(t_2)$;

II si $r \in \mathfrak{R}_n$, $n \in \omega$, y $t_1, ..., t_n \in Term$, $\mathfrak{A} \models r(t_1, ..., t_n)[s]$ si y sólo si $(s(t_1), ..., s(t_n)) \in r_\mathfrak{A}$;

[4] Dado $l \in T$ denotaremos a su evaluación en I como $l_\mathfrak{A}$.

III si $\psi \in \mathtt{Form}$ $\mathfrak{A} \models \neg\psi[s]$ si y sólo si no sucede que $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ (esto último lo denotaremos como $\mathfrak{A} \not\models \psi[s]$);

IV $\mathfrak{A} \models \psi[s] \wedge \rho[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi[s]$ y $\mathfrak{A} \models \rho[s]$;

V $\mathfrak{A} \models \exists \nu\psi[s]$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[s(\nu|a)]$, donde $s(\nu|a)$ es una interpretación definida como $s(\nu|a)(t) = s(t)$ si $t \neq \nu$, y como $s(\nu|a)(t) = a$ si $t = \nu$.

Si $\Gamma \subset \mathtt{Form}$, $\mathfrak{A} \models \Gamma[s]$ significa que $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ para toda ϕ en Γ. Observe que aunque las interpretación s tiene como dominio a todo TERM, en la fórmula ϕ sólo aparece una cantidad finita de términos, así que no todas las evaluaciones de s son de interés para saber el valor de verdad de ϕ, es más, es posible probar que si s' es otra interpretación, que restringida a las variables libres de ϕ coincide con s, entonces $(\phi[s])^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(\phi[s'])^{\mathfrak{A}}$. Por ello, usualmente, en lugar de escribir $\phi[s]$, escribiremos $\phi[a_1, \ldots, a_n]$, donde $s(x_1) = a_1, \ldots, s(x_n) = a_n$ y $x_1, \ldots, x_n$ son las variables libres de ϕ.

Debido a que la estructura del lenguaje que establecimos está suficientemente limitada, la noción de satisfacibilidad está bien definida, es decir, no habrá una afirmación que sea «verdadera» y «falsa» en un mismo modelo, y todas las fórmulas de un lenguaje $\mathfrak{L}$ recibirán una valuación en cualquier $\mathfrak{L}$-estructura. La definición se hace a través del teorema de recursión y, a su vez, éste descansa fuertemente en que los conjuntos (pensados como los entes de los que habla la matemática estándar) están «bien fundados»[5]. Sin embargo, hay colecciones de conjuntos que son de interés o utilidad para los matemáticos y, no obstante, pueden no ser conjuntos. Por ejemplo, supongamos que $M \models AC^6$. Si supusiéramos que existe $m \in M$ tal que $m = \{x \in M : x = x\}$, por el Axioma de Comprensión, tendríamos que $r = \{x \in m : x \notin x\} \in M$, se crea la llamada *Paradoja de Russel* pues $r \notin r \leftrightarrow r \in r$. Luego, tal m no puede ser un elemento de M, entonces dado un universo de discurso, hay colecciones en las que podemos pensar y reconocer con una fórmula, mas no necesariamente son un elemento de dicho universo. A este tipo de colecciones las llamaremos *clases propias*, cuando no distingamos si una colección es una clase propia o un conjunto simplemente la llamaremos *clase*, en particular, las *clases propias*, pueden no estar bien fundadas, y por ello la noción de verdad no se podrá extender a ellas. Tanto la definición previa como los límites de ella, fueron aportaciones que Tarski, lógico, matemático y filósofo polaco, hizo en 1930. Valdrá la pena tener en mente esta distinción particular entre la naturaleza de las clases propias y los conjuntos en el siguiente capítulo.

[5] A saber, cumplen el Axioma de Fundación, éste lo definiremos en 4.13, pero en este momento no es necesario entenderlo para seguir esta discusión.

[6] AC es el Axioma de Comprensión, su definición se encuentra en 4.13.

Ahora estamos en posición de formalizar el otro aspecto (el semántico) que intuimos cuando hacemos pruebas matemáticas.

Definición 4.6. Sea $\Gamma \cup \{\phi\}$ un conjunto de fórmulas de algún lenguaje, entonces Γ *implica logicamente* a ϕ, o, equivalentemente, que ϕ es una consecuencia lógica de Γ, y lo denotaremos por $\Gamma \vDash \phi$, si para toda interpretación s tal que $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[s]$[7] sucede que $\mathfrak{A} \vDash \phi[s]$.

Los siguientes dos teoremas muestran la afortunada compatibilidad entre la formalización sintáctica y semántica, afortunada pues si no existieran, nuestra formalización no representaría ni el tema central de nuestras preocupaciones; y mejor sería abandonarla. Al primero se le conoce como *correctud* por la noción que mencionamos en la definición de prueba formal, y el segundo se llama teorema de *completud*, fue demostrado por Kurt Gödel, lógico, matemático y filósofo austríaco, en 1930.

Teorema 4.7 (Correctud). *Si* $\Gamma \cup \{\phi\}$ *es un conjunto de fórmulas de algún lenguaje y* $\Gamma \vdash \phi$, *entonces* $\Gamma \vDash \phi$

Corolario 4.8. *Si una teoría es satisfacible entonces es consistente.*

Teorema 4.9 (Completud). *Sea* $\Gamma \cup \{\phi\}$ *es un conjunto de fórmulas de algún lenguaje* $\mathfrak{L}$, *si* $\Gamma \vDash \phi$, *entonces* $\Gamma \vdash \phi$. *Además, esto es equivalente a que toda teoría consistente tiene un modelo.*

Definición 4.10.

- Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden, una *teoría* T, de $\mathcal{L}$, será un subconjunto de $\mathsf{ENUN}_{\mathcal{L}}$ con la propiedad de que para cualquier enunciado σ tal que $T \vDash \sigma$ entonces $\sigma \in T$.

- Si $\mathfrak{A}$ es una $\mathcal{L}$-estructura, denotaremos por $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ a la teoría conformada todos los enunciados verdaderos en $\mathfrak{A}$.

- $\mathsf{Th}(\mathfrak{A})$ será *axiomatizable* si existe un conjunto Σ de enunciados de $\mathcal{L}$, decidible y tal que $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \{\sigma \in \mathsf{ENUN}_{\mathcal{L}} : \Sigma \vDash \sigma\}$.

- En particular, llamaremos *teoría de números* a $\mathsf{Th}(\mathfrak{N})$, donde $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, <, +, \cdot, E)$ es la estructura que tiene como universo de discurso al conjunto de los naturales, como elemento distinguido al 0, S es la función sucesor, $<$ es el orden estricto usual, $+$ y $\cdot$ son la suma y el producto usuales y E es la función potencia.

[7] Así abreviamos que $\mathfrak{A}$ modela a cada fórmula en Γ bajo la interpretación s.

Es por el siguiente teorema que se dice que Gödel, en contraposición al paraíso que nos brindó Cantor, nos concedió el infierno, o, en otra lectura, demostró que «las matemáticas son tan libres como los pájaros»[Hof12].

Teorema 4.11 (Primer Teorema de Incompletud)**.** $\mathtt{Th}(\mathfrak{N})$ *no es axiomatizable.*

Muy someramente, lo que hizo Gödel para probar lo anterior, fue, dado un conjunto A de enunciados decidibles del lenguaje de la aritmética, asignar a cada fórmula y a cada sucesión finita (cada prueba) en A un número en $\mathbb{N}$, y utilizar esa autorreferencia para obligar a que cierta fórmula verdadera en $\mathfrak{N}$ no pueda ser probada en A. Más aún, retomando esa estrategia logró codificar en una propiedad de números el que «la teoría A sea consistente»: dicha propiedad es una verdad en la teoría de números si y sólo si la teoría de números es consistente. Y finalizó demostrando que desde A no se puede probar.

Teorema 4.12 (Segundo teorema de Incompletud)**.** *Si* T *es una teoría suficientemente fuerte, entonces* $\mathsf{T} \vdash \mathtt{Cons}(\mathsf{T})$ *si y sólo si es inconsistente.*

El que sea *suficientemente fuerte* se puede definir estrictamente pero para nuestro quehacer, es suficiente con saber que hay maneras de traducir algunos lenguajes en otros lenguajes, en particular, el de la aritmética lo podemos reflejar en el de la teoría de conjuntos de tal manera que si la última fuera axiomatizable, entonces la primera también. Entonces, sin importar los esfuerzos que hagamos, jamás habremos de encontrar un sistema de axiomas tan cristalinos como para que satisfagan al mismo tiempo las siguientes tres intuiciones que tenemos (¿teníamos?) sobre la verdad:

i) Del cual no se pueda deducir una contradicción.

ii) Para el cual exista una forma nítida de decidir qué fórmulas lo conforman.

iii) Y a partir del cual se puedan demostrar, al menos, todas las verdades de la teoría de conjuntos.

De las tres, si lo reflexionamos, no podemos prescindir de i), ni de ii). Entonces renunciamos a iii) o bien, renunciamos a la búsqueda de axiomatizar la matemática. Sin embargo, hay buenas razones para no renunciar a esta última; además de la justificación de conceptos como el infinito actual o geometrías no euclidianas, y la evasión de paradojas, cada rama de la matemática tiene sus procederes y sus conceptos, sin embargo, no hay fronteras bien delimitadas entre ellas pues cada una se suele apoyar en otras. Si además cada una tuviera sus propios fundamentos, estos se deberían de revisar cada vez que se quisiera recurrir a resultados de otras áreas.

Así pues, hemos de renunciar a iii), y aceptar que para cualquier marco de referencia que se nos ocurra, habrá una clase de *irresoluciones, hoyos, libertades*, en fin, cuestiones que no estarán absolutamente determinadas, es decir, *proposiciones independientes*. Una reflexión que se da en [Ivo], es que estamos acostumbrados a situaciones familiares, por ejemplo, la teoría de grupos permite que haya grupos abelianos y grupos no abelianos, así que en el sentido anterior, la proposición de ser abeliano es independiente a dicha teoría. Podemos entonces considerar a los conjuntos -pénsandolos como los objetos de los que la matemática habla- como una estructura y no un cuerpo concreto; los conjuntos serán aquellos que delinea el sistema axiomático que adoptaremos. Éste nació a principios del s.XX, cuando E. Zermelo presentó el extraño teorema que afirmaba que todo conjunto aceptaba un buen orden (¿por ejemplo, cuál buen orden ofrecería el lector de los reales?), por el recelo que causó en algunos, y como en ese tiempo la teoría de conjuntos carecía de una axiomatización, se vio orillado a transparentar las suposiciones que hacía en su prueba; junto a los axiomas de Reemplazo y de Buena Fundación propuestos por Frankel y Mirimanoff, respectivamente, el sistema que propuso, denominado ZFE[8], se convertiría en el históricamente más aceptado en la comunidad matemática todavía en nuestro tiempo, pues establece propiedades difícilmente más simplificables y que reflejan las nociones intuitivas de lo que debe ser un conjunto, además de evitar la existencia de algunos objetos paradójicos. Lo presentamos a continuación[9].

Definición 4.13. El sistema axiomático ZFE del lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_C$, está compuesto por las clausuras universales de las fórmulas enlistadas, lo hacemos así para que sea más legible su lectura, por lo mismo, omitimos algunos paréntesis y utilizamos algunas abreviaciones cuando no hay ambigüedad. Algunos autores consideran un axioma adicional de existencia para asegurar que el universo no sea vacío, pero aquí asumiremos eso de entrada.

AEx Axioma de Extensión:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

AC Axioma de Comprensión, éste en realidad es un esquema, por lo que estará representando a una infinidad de axiomas, uno por cada fórmula ϕ sin la ocurrencia de y libre:

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \land \phi(x)))$$

[8]«Z» por Zermelo, «F» por Fraenkel y «E» por el Axioma de Elección, que aunque fue descrito por Zermelo, se escribe aparte debido a que los objetos que agrega no son explícitamente definidos, esto y algunas de sus consecuencias causan sospecha en algunos.

[9]Una discusión más amplia sobre su pertinencia se puede consultar en [Amo00] y en [JW95], además, en la siguiente sección abordaremos algunas de las intuiciones que están detrás de él.

AP Axioma del Par:
$$\forall x \forall y(\exists z(x \in z \wedge y \in z)).$$

AU Axioma de la Unión:
$$\forall F \exists U \forall y \forall x((x \in y \wedge y \in F) \rightarrow x \in U).$$

AR Axioma de Reemplazo, en éste se da la misma situación que en AC, para cada fórmula ϕ sin R libre:
$$\forall D(\forall x \in D \exists ! y \phi(x, y) \rightarrow \exists R \forall x \in D \exists y \in R \phi(x, y)).$$

A estos primeros cinco axiomas junto con el Axioma de Potencia, los denominaremos *Teoría de Conjuntos Básica* (TCB).

AF Axioma de Fundación:
$$\forall x[\exists y(y \in x) \rightarrow \exists w(w \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in w))].$$

Para escribir los siguientes tres axiomas de manera legible, a partir de los axiomas anteriores se pueden definir[10] las nociones conjuntistas de: subconjunto, conjunto vacío, función sucesor, intersección, y de que x es un conjunto singular (o que x tiene un único elemento), se abreviarán con los símbolos $\subseteq, \emptyset, s, \cap$ y $sing(x)$, respectivamente.

AI Axioma de Infinito:
$$\exists x((\emptyset \in x) \wedge \forall y \in x(s(y) \in x).$$

APo Axioma de Potencia:
$$\forall x \exists z \forall y(y \subseteq x \rightarrow y \in z).$$

AE Axioma de Elección:
$$\forall F(\emptyset \neq F \wedge \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \rightarrow x \cap y=\emptyset) \rightarrow \exists S \forall z \in F(sing(s \cap z)).$$

Cuando escribamos ZF nos referiremos a ZFE sin el Axioma de Elección, mientras que ZFE^- será ZFE sin el Axioma de Fundación. Asimismo, si escribimos $ZFE - AX$ donde AX es alguno de los axiomas de ZFE, nos estaremos refiriendo a ZFE menos el axioma AX.

[10]Más adelante ahondaremos en esta acepción de definir, que no es exactamente la usual.

4.3. MTN's de ZFE*

La técnica de extensiones genéricas nos ofrecerá demostraciones *finitistas* de que hay proposiciones consistentes con ZFE. Por el corolario 4.8, para probar que una afirmación ϕ es consistente con la matemática «estándar», bastaría con construir un modelo de ZFE$\cup\{\phi\}$. Pero observe que el Segundo Teorema de Incompletud (en 4.12) nos indica que, de ser consistente ZFE, dicho modelo no se puede construir desde el mismo ZFE, así que deberíamos ocupar otra teoría. Para ofrecer una prueba que no trascienda a ZFE, demostraremos que una inconsistencia en ZFE$\cup\{\phi\}$, genera otra en ZFE; esto resuelve el problema anterior pues en lugar de generar un modelo para ZFE, bastará con generar un modelo para listas finitas de ZFE. Específicamente, mostraremos que para cualquier lista *finita* $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \phi\}$ de axiomas de ZFE$\cup\{\phi\}$, desde ZFE podremos generar un modelo $M[G]$ de Γ. A $M[G]$ se le conoce como *extensión* genérica pues lo que haremos será mostrar que existe $\{\varphi'_1, \dots, \varphi'_m\}$, una porción finita de ZFE y un *modelo base* M de ella, con cualidades que nos permitirán construir a partir de él otro modelo $M[G]$ de Γ, que contiene a M.

En esta sección estudiaremos esos modelos base; éstos serán *modelos transitivos y numerables de porciones finitas de ZFE* y lo abreviaremos como *mtn de ZFE** o sencillamente mtn*. La necesidad de que estos sean transitivos se aclarará en esta sección y el que sean numerables en la siguiente. La ruta que seguiremos para construirlos será: mostrar que, si suponemos ZFE, hay una manera de organizar a V, explícitamente, veremos que $V = \mathsf{BF}$. A BF[11] la podemos pensar, por ahora, como la unión de estratos conformados por conjuntos cada vez más complejos. Una vez que hayamos probado esto, la estructura de BF nos permitirá aplicar el llamado Teorema del Reflejo, que nos mostrará que cualquier lista finita de axiomas de ZFE es modelada por alguno de los estratos de BF, esos niveles tienen la virtud de ser conjuntos. Después, para asegurar la numerabilidad aplicaremos el Teorema de Löwenheim-Skolem, y, finalmente, para que sea transitivo, utilizaremos el Teorema de Colapso de Mostowski.

Lo primero en lo que nos enfocaremos será en encontrar condiciones que impliquen que un conjunto o una clase propia -nos interesa BF- «satisfaga»[12] a los axiomas de ZFE. Dichas condiciones nos servirán para mostrar que $V = \mathsf{BF}$, lo cual, al mismo tiempo, nos dará un ejemplo de prueba de consistencia distinto al de extensiones

[11] BF es una clase propia conformada por los conjuntos bien fundados, la trataremos con detalle en esta sección.

[12] Las comillas son porque hasta ahora sólo hemos definido la satisfacibilidad para conjuntos y no para clases propias.

genéricas[13], además, más adelante, nos permitirán simplificar las pruebas de que las extensiones genéricas efectivamente modelan a ZFE^*.

Definición 4.14. Dada una fórmula $\phi \in \mathcal{L}_C$, donde x es la única variable libre, si $X = \{x : \phi(x)\}$ es una clase propia, el enunciado $x \in X$ abreviará a la fórmula $\phi(x)$. Sea M una clase propia, entonces la *relativización* de ϕ en M, será otra fórmula que denotaremos por ϕ^M o por $M \models \phi$, y su definición se hace por recursión, de la siguiente manera:

I $M \models x = y$ es $x = y$.

II $M \models x \in y$ es $x \in y$.

III $M \models \varphi \wedge \psi$ es $M \models \varphi \wedge M \models \psi$.

IV $M \models \neg\varphi$ es $M \not\models \phi$.

V $M \models \exists x\varphi$ es $\exists x(x \in M \wedge M \models \varphi)$.

En términos prácticos, esto equivaldrá a cambiar cada aparición en ϕ de «$\exists x$» por «$\exists x \in M$».

En el caso en el que S sea un conjunto de enunciados, diremos que S *es verdadero en* M, o $M \models S$, si desde los axiomas que estemos utilizando podemos probar $M \models \phi$, para cada $\phi \in S$.

La definición de relativización es afortunada pues nos permitirá tratar varias pruebas y definiciones sin distinguir entre conjuntos y clases propias.

Definición 4.15. Diremos que una clase M es *transitiva* si para todo $y \in M$ y todo $z \in y$, se tiene que $z \in M$.

Sabemos ya que un mismo lenguaje puede tener interpretaciones dispares y $\mathcal{L}_C$ no es la excepción, por ejemplo, podemos interpretarlo como los reales con su orden usual. Para justificar que en el modelo que tratamos de construir se satisfacen los axiomas deseados, nos servirá que la interpretación de $\in$ sea la pertenencia usual, a estos modelos les llamaremos *modelos estándar*. Es muy común utilizar modelos estándar transitivos, pues facilitan su manejo y porque, al restingirnos a ellos para estudiar pruebas de consistencia, en esencia no perdemos nada, puesto que cualquier teoría que tenga un modelo estándar, también es modelada por un modelo estándar transitivo[14].

[13] A saber, probaremos que $\mathrm{CON}(\mathsf{ZFE}^-)$ implica $\mathrm{CON}(\mathsf{ZFE})$.

[14] Esto lo probaremos en 4.52.

Lema 4.16. *(ZF^-) Sea* M *una clase.*

I *Si* M *es transitiva entonces satisface el Axioma de Extensión.*

II *Si* $\forall z \in M \forall y \subseteq z(y \in M)$, *entonces el Esquema de Comprensión se cumple en* M.

III *Si* M *es transitiva y para todas las funciones* f *tales que* $\mathrm{dom}(f) \in M$ *y* $\mathrm{ran}(f) \subseteq M$, *entonces* $\mathrm{ran}(f) \in M$, *entonces el Axioma de Reemplazo es verdadero en* M.

IV *Si* M *transitiva y* $\forall x \in M(P(x) \cap M \in M)$, *el Axioma de Potencia se verifica en* M.

V *Si* $\forall x, y(\{x, y\} \in M)$, *entonces* M *satisface el Axioma del Par.*

VI *Si* $\forall F \in M(\bigcup F \in M)$, *entonces el axioma de la unión es verdadero en* M.

Demostración. I Sean $x, y \in M$, probemos la contrapositiva: si $x \neq y$ entonces, sin pérdida de generalidad, existe $z \in x$ tal que $z \notin y$, como $x \in M$ y M es transitivo, tenemos $z \in M$. Luego, no sucede que $\forall w \in M(w \in x \leftrightarrow w \in y)$. Por ello AE, es verdadero en M.

II Sea ϕ una fórmula donde la variable y no ocurre libre, y sea $z \in M$, por el axioma de comprensión existe $y = \{x \in z : \phi(x)\}$, por hipótesis y porque $y \subseteq z$, $y \in M$. Entonces para toda $x \in M$, $x \in y$ si y sólo si $x \in z$ y $\phi(x)$.

III Sean ϕ sin R libre, y $D \in M$, tales que $\forall x \in M(x \in D \to \exists! y \in M \phi(x, y))$. Entonces $\forall x \in D \exists! y(\phi^M(x, y) \wedge x, y \in M)$ es verdadera, y por la instancia del Axioma de Reemplazo asociado a la fórmula $\phi^M(x, y) \wedge x, y \in M$ sucede que $\exists R \forall x \in D \exists y \in R(\phi^M(x, y) \wedge x, y \in M)$, luego podemos definir a la función $f : D \to R$, como $f(x)$ igual a la única $y \in M$ tal que $\phi^M(x, y)$, como $\mathrm{ran}(f) \subseteq M$, por hipótesis $\mathrm{ran}(f) \in M$, como $R^M = \mathrm{ran}(f)$, $M \vDash \exists R \forall x \in D \exists y \in R \phi(x, y)$.

IV Sea $x \in M$, por hipótesis $z = P(x) \cap M \in M$, supongamos que $y \in M$ es tal que $(y \subseteq x)^M$, si $w \in y$, como M es transitiva, $w \in M$, y por lo tanto $(w \in x)^M$ luego $y \subseteq x$, entonces $y \in P(X) \cap M = z$. Así que $(AP)^M$.

Los otros dos incisos son prácticamente inmediatos.

□

Nosotros estamos principalmente interesados en el lenguaje $\mathcal{L}_C$ cuyo único símbolo no lógico es $\in$, además de haberlo elegido por su flexibilidad para tratar asuntos matemáticos, lo mantenemos para simplificar varias pruebas. Sin embargo, necesitaremos señalar otros objetos sin ambigüedad, como son el de función, par ordenado, producto de conjuntos, etc. El uso de fórmulas como $y \subseteq x$ es inocuo pues lo podemos introducir como una abreviación de la fórmula $\forall z(z \in y \to z \in x)$, asimismo, $(y \subseteq x)^M$ es una contracción para $\forall z \in M \forall y \in M(z \in y \to z \in x)$, en este caso, la relación $\subseteq$ se puede definir en M, por el simple hecho de que M es un modelo de $\mathcal{L}_C$. Formalmente, el uso de estos símbolos se conciliará con la simbología austera de $\mathcal{L}_C$ por lo siguiente:

Definición 4.17. Sea $\mathfrak{A}$ es una $\mathfrak{L}$-estructura, un modelo de Σ.

I Para cada ϕ fórmula de $\mathfrak{L}$, donde $v_1, \dots v_n$ son sus únicas variables libres, podemos definir una relación n-aria $r^\phi = \{(a_1, \dots, a_n) : \mathfrak{A} \models \phi[a_1, \dots, a_n]\}$ en A. Si r es una relación n-aria en A, diremos que r es *definible* en $\mathfrak{A}$ si existe una fórmula que la defina en el sentido anterior. Habrá relaciones en A que no sean definibles, observe como ejemplo, que si $\aleph_0 < |A|$ la cantidad de fórmulas es numerable, mientras que las relaciones en A no lo son.

II Un caso especial lo consituye la definibilidad de funciones, si φ es una fórmula de $\mathfrak{L}$, donde $v_1, \dots v_k$ son sus únicas variables libres, y si sucede que el enunciado $\forall v_1, \dots, v_{k-1} \exists! y \varphi(v_1, \dots, v_{k-1}, y)$ es verdadero en $\mathfrak{A}$, podemos definir una función f^φ en el universo de $\mathfrak{A}$ como $f^\varphi(a_1, \dots, a_{k-1}) = a_k$ si $(a_1, \dots, a_k) \in r^\varphi$. En el caso en el que $k = 1$, estaremos definiendo una constante en A.

III Así, si $\mathfrak{A}'$ es identico a $\mathfrak{A}$ exceptuando porque agregamos r^ϕ a sus relaciones y a f^φ a sus funciones, entonces $\mathfrak{A}'$ es una $\mathfrak{L}'$-estructura donde, $\mathfrak{L}'$ será el lenguaje que se obtiene de agregar a $\mathfrak{L}$ un símbolo en R a $\mathfrak{R}_n$ y un símbolo F a $\mathfrak{F}_k$. A ϕ^* la definimos como:

$$\forall v_1, \dots, v_n(r^\phi(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \dots, v_n))$$

mientras que φ^* será:

$$\forall v_1, \dots, v_k(f^\varphi(v_1, \dots, v_{k-1}) = v_k \leftrightarrow \varphi(v_1, \dots, v_k))$$

estos enunciados son llamados las *definiciones* de r_ϕ y de f_φ, respectivamente. Si $\Sigma' = \Sigma \cup \{\phi^*, \varphi^*\}$, tenemos que $\mathfrak{A}' \models \Sigma'$ y que a cada fórmula $\psi'(x_1, \dots, x_m)$ en $\mathfrak{L}'$ le corresponde una fórmula $\psi'(x_1, \dots, x_m)$ en $\mathfrak{L}'$ de tal manera que, si $a_1, \dots, a_m \in A$, $\mathfrak{A}' \models \psi'[a_1, \dots, a_m]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi[a_1, \dots, a_m]$[15].

En conclusión, aunque agregamos esos símbolos a nuestro lenguaje, esencialmente no cambiamos la naturaleza del modelo, pues siempre podemos reescribir las verdades de él, en el lenguaje original. Para poder definir a un objeto -distinguirlo sin

[15]La demostración de esto último se hace por inducción sobre la términos y fórmulas.

ambigüedad de los demás- en una estructura, las verdades de dicha estructura juegan un rol esencial. Si M es un modelo del Axioma de Extensión, se pueden definir al conjunto $\emptyset^M$ de tal manera que se comoporte como el $\emptyset$ y sea el único elemento de M que lo haga, de otra manera no podemos asegurarlo. Por ejemplo, considere a la $\mathcal{L}_C$-estructura $(X, \in)$, con $X = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$, note que este modelo no satisface el Axioma de Extensión, y que si $x \in X$ se satisface la fórmula $\forall v_1(v_1 \notin v_2)[x]$, luego, sus dos elementos se comportan como el vacío en X. El que $\emptyset^M$, S^M, y $\cap^M$ se puedan definir, junto con el concepto de que una fórmula sea absoluta -que introduciremos en seguida-, nos ayudará a obtener condiciones para que se satisfagan los axiomas de Elección y de Infinito.

Definición 4.18. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos $\mathfrak{L}$-estructuras, diremos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$, o que $\mathfrak{B}$ es una extensión de $\mathfrak{A}$, y lo denotaremos por $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, si $A \subseteq B$ y:

- $r \in \mathfrak{R}_m$, para algún $i \in \omega$ entonces $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}} \cap A^i$;
- $f \in \mathfrak{F}_j$, para algún $j \in \omega$ entonces $f_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{B}}\big|_{A^j}$;
- si $c \in \mathfrak{C}$, entonces $c_{\mathfrak{A}} = c_{\mathfrak{B}}$.

Definición 4.19. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos $\mathfrak{L}$-estructuras. Diremos que ϕ es absoluta para $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, si para cualquier interpretación s en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \phi[s]$, y lo denotaremos como $\mathfrak{A} \prec_\phi \mathfrak{B}$. Diremos que ϕ es *absoluta* si ϕ es absoluta para $\mathfrak{A}, V$, donde V es la clase de todos los conjuntos, o equivalentemente, si $\mathfrak{A} \models \phi$ si y sólo si ϕ.

Nuestro método para crear modelos de ZFE^* será comenzar por mostrar que ciertas clases modelan axiomas relativamente menos complejos, y a partir de ellos, probar los restantes. Habrá todo un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_C$, relativamente sencillas, que resultarán absolutas para clases transitivas. Éstas nos permitirán atraer una gran cantidad de propiedades de V a este tipo de clases, pues mostrarán que, dado M un modelo de ciertos axiomas, varios conceptos «significan lo mismo para V y para M».

Definición 4.20. Por recursión, definimos a las fórmulas Δ_0 del lenguaje $\mathcal{L}_C$.

I Todas las fórmulas atómicas son Δ_0.

II Si ϕ es una fórmula Δ_0, v es una variable y t es un término donde v no aparece, entonces $\exists v(v \in t \wedge \phi)$ también es Δ_0.

III Si ϕ y ψ son Δ_0, entonces también lo son $\neg\phi$ y $\phi \wedge \psi$. En consecuencia, también $\forall v(v \in t \to \phi)$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ y $\phi \leftrightarrow \psi$ son Δ_0.

Lema 4.21. *Supongamos que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}_C$-estructuras estándares y que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Si A es transitivo y ϕ es Δ_0, entonces $\mathfrak{A} \prec_\phi \mathfrak{B}$.*

Demostración. Sean ϕ una fórmula Δ_0 y s una asignación en A, procedamos por inducción.

I Sean $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{Term}$, si ϕ es la fórmula $t_1 = t_2$, como $A \subseteq B$, se tiene que dada una interpretación en A, $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \phi[s]$. Si $r \in \mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{A} \models r(t_1, \dots, r_n)[s]$ si y sólo si $(s(t_1), \dots, s(t_n))) \in r_{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(s(t_1), \dots, s(t_n))) \in r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}} \cap A^i$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models r(t_1, \dots, r_n)[s]$ (pues s es una asignación en A).

II Supongamos que ϕ es de la forma $\exists v(v \in t \wedge \psi)$, donde v es una variable, t es un término donde v no aparece y ψ cumple la hipótesis de inducción. Observe que $\mathfrak{A} \models \exists v(v \in t \wedge \psi)[s]$ entonces existe $a \in A$ tal que $a \in t_{\mathfrak{A}}[s]$ y $\mathfrak{A} \models \psi[s(v|a)]$. Como $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $t_{\mathfrak{A}}[s] = t_{\mathfrak{B}}[s]$ y por hipótesis de inducción, existe $b \in B$ tal que $b \in t_{\mathfrak{B}}[s]$ y $\mathfrak{B} \models \psi[s(v|b)]$, es decir $\mathfrak{B} \models \phi[s]$. Si suponemos que $\mathfrak{B} \models v(v \in t \wedge \psi)[s]$, existe $b \in B$ tal que $b \in t_{\mathfrak{B}}[s]$ y $\mathfrak{B} \models \psi[s(v|a)]$, como s es una asignación en A, $t_{\mathfrak{B}}[s] = t_{\mathfrak{A}}[s] \in A$, luego, existe $b \in B$ tal que $b \in t_{\mathfrak{A}}[s]$, y como A es transitivo, $b \in A$, esto aunado a la hipótesis de inducción nos permite concluir que $\mathfrak{A} \models \phi[s]$.

III Supongamos que φ y ψ son fórmulas Δ_0 y que cumplen con la hipótesis de inducción. Si ϕ es la fórmula $\neg\varphi$, como $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$, por definición de satisfacibilidad, esto equivale a $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[s]$. Si ϕ es la fórmula $\varphi \wedge \psi$, $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ y $\mathfrak{A} \models \psi[s]$, por hipótesis inductiva esto ocurre si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi[s]$ y $\mathfrak{B} \models \psi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi \wedge \psi[s]$.

$\square$

Lema 4.22. *Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son transitivos y ϕ es absoluta para $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, entonces la fórmula $\exists x \in y\phi$, también es absoluta para $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.*

Demostración. Supongamos que $(\exists x \in y\phi)^A$ entonces $\exists x \in A(x \in y\phi^A)$, luego, por hipótesis, $\exists x \in A(x \in y\phi^B)$, como B es transitivo $x \in B$, y por lo tanto $(\exists x \in y\phi)^B$. La recíproca es casi idéntica. $\square$

Lema 4.23. *Supongamos que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, y que ambas son $\mathcal{L}_C$ estructuras que modelan a Γ, un conjunto de enunciados. Si ϕ y ψ tienen como variables libres a $v_1, \dots, v_n$ y*

$$\Gamma \vdash \forall v_1, \dots, v_n(\phi(v_1, \dots, v_n) \leftrightarrow \psi(v_1, \dots, v_n))$$

entonces $\mathfrak{A} \prec_\phi \mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \prec_\psi \mathfrak{B}$.

Demostración. Veamos que $\mathfrak{A} \prec_\phi \mathfrak{B}$ implica $\mathfrak{A} \prec_\psi \mathfrak{B}$. Sea s una interpretación en A; supongamos que $\mathfrak{A} \models \psi[s]$. Como $\mathfrak{A}$ modela a Γ, por el teorema de correctud (4.7), esto equivale a $\mathfrak{A} \models \phi[s]$. Por hipótesis, esto sucede si y sólo si $\mathfrak{B} \models \phi[s]$. De nuevo por correctud, esto último es equivalente a $\mathfrak{B} \models \psi[s]$. La otra implicación es análoga. □

Las observaciones hechas en la definición 4.17 junto con el lema anterior, hacen asertada la siguiente definición.

Definición 4.24. Si r es una función (o una relación) definible en $\mathfrak{A}$, una $\mathcal{L}_C$-estructura, y $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, diremos que r es absoluta para $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ si y sólo si la fórmula que la define lo es.

Lema 4.25. *Si los axiomas de Extensión, Comprensión, del Par y de la Unión (TCB-AR-APo), se verifican en una clase A, las siguientes fórmulas son definibles, y más aún, si A es transitiva son absolutas para M.*

- $x \subseteq y$
- $\{x, y\}$
- $\{x\}$
- (x, y)
- $\emptyset$
- $S(x)$ *(i.e.* $x \cup \{x\}$*)*
- $x \cap y$
- $sing(x)$ [16]
- x *es transitivo*
- $\bigcup x$
- $\bigcap x$ [17]
- $x \setminus y$

Demostración. El que A sea modelo de TCB-AR-APo, las hace definibles. Sólo nos concentraremos en probar que son absolutas. Como M es transitiva, por el lema 4.23 bastará con mostrar que la fórmula que las define es equivalente a una fórmula Δ_0, omitiremos la prueba cuando sea muy similar a otra ya escrita.

- La definición de $x \subseteq y$ es $\forall z(z \in x \to z \in y)$, que por la observación en 4.20 es Δ_0.
- $z = \{x, y\}$ si y sólo si $x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w(w \in z \to (w = x \vee w = y))$, esta última es una fórmula Δ_0.
- $x = \emptyset$ si y sólo si $\forall y(y \in x \to \neg(y = y))$, esta fórmula es Δ_0.
- $y = s(x)$ si y sólo si $x \in y \vee x \subseteq y \forall w(w \in y \to (w = xw \in x))$, y como $x \subseteq y$ es Δ_0, la fórmula anterior también es Δ_0.
- $z = x \cap y$ si y sólo si $\forall w((w \in x \wedge w \in y) \to w \in z) \wedge z \subseteq x \wedge z \subseteq x$.

[16] i.e. x tiene un único elemento.
[17] Para asegurar esto, debemos definir $\bigcap \emptyset = \emptyset$.

- $sing(x)$ si y sólo si $\exists y \forall z(z \in x \to z = y)$ que es Δ_0.
- x es transitivo si y sólo si $\forall y \in x \forall z \in y(z \in x)$ si y sólo si $\forall y(y \in x \to \forall z(z \in y \to z \in x))$, la cuál es Δ_0.

□

Aunque la composición de fórmulas Δ_0 no es en general Δ_0, la sustitución que hicimos para probar que $y = s(x)$ es absoluta se puede generalizar como sigue:

Lema 4.26. *Las fórmulas absolutas son cerradas bajo composición, es decir, si* M *es subestructura de* N *y las fórmulas*

$$\phi(v_1, \dots, v_n) \quad y \quad G_i(y_1, \dots, y_m)$$

para $i = 1, \dots, n$ *y la función* $F(v_1, \dots, v_n)$ *son absolutas para* M, N*, entonces también son absolutas las fórmulas*

$$\phi(G_1(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m)) \quad y \quad F(G_1(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m)).$$

Demostración. Por definición de satisfacibilidad,

$$\phi(G_1(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m))^M$$

si y sólo si

$$\phi^M(G_1^M(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n^M(y_1, \dots, y_m))$$

por hipótesis, esto sucede si y sólo si $\phi^N(G_1^N(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n^N(y_1, \dots, y_m))$ si y sólo si

$$\phi(G_1(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m))^N.$$

La otra prueba es análoga. □

Aprovechamos para mostrar con el lema anterior, otras nociones absolutas que nos servirán en las sección que sigue.

Lema 4.27. *Sea* A *una clase transitiva donde se verifica* $ZF - Po$*. Si* $X, R \in A$ *y* R *es un buen orden de* X*, entonces* (R *es un buen orden de* $X)^A$*. Además, las siguientes nociones son absolutas para* A*.*

- x *es un par ordenado*
- $dom(r)$
- $ran(r)$
- $x \times y$
- r *es una relación*
- r *es una función*

- $r(x)$
- *r es función inyectiva*
- *α es un ordinal*
- *α es un ordinal límite*
- *α es un ordinal sucesor*
- *α es un ordinal finito*
- ω

Demostración. Omitiremos las pruebas cuando retomen argumentos muy similares a los de otros incisos ya escritos.

- x es un par ordenado si y sólo si $\exists y \in \bigcup x \exists z \in \bigcup x(z = (x, y))$. Hemos probado que $z = (x, y)$ es absoluta para clases como A, por ello y por el lema 4.22, la fórmula $y \in a \exists z \in b(z = (x, y))$ es absoluta para A, además hemos probado (en 4.25) que $\bigcup x$ es absoluta, por el lema 4.26, en donde mostramos que la propiedad de ser absoluta es «cerrada bajo composición» $\exists y \in \bigcup x \exists z \in \bigcup x(z = (x, y))$ es absoluta.

- Observe que $z = x \times y$ si y sólo si $\forall a \in x \forall b \in y((a, b) \in z) \wedge \forall c \in z \exists a \in x \exists b \in y(c = (a, b))$, denotemos a esta última fórmula como ϕ. Es inmediato que la negación de una fórmula absoluta es también absoluta, así que por el lema 4.22, $\forall a \in x \forall b \in y((a, b) \in z)$, y $\forall c \in z \exists a \in x \exists b \in y(c = (a, b))$ son absolutas, y por ello ϕ es absoluta para A.

- r es una relación si y sólo si $\forall x \in r(r$ es un par ordenado$)$, así, por el primer inciso y por el lema 4.22, es absoluta.

- Basta con observar que r es una función si y sólo si $[\forall x, y, y' \in \bigcup\bigcup r(((x, y) \in r(x, y') \in r) \to y = y')] \wedge$ r es una relación.

- r es una función inyectiva si y sólo si $[r$ es una función $\wedge \forall x, x' \in \mathrm{dom}(r)(r(x) = r(x') \to x = x')$. Luego, como esta última fórmula se obtiene al acotar con cuantificadores a $r(x) = r(x') \to x = x'$ (una fórmula Δ_0), entonces «r es una función inyectiva», es absoluta para A.

- α es un ordinal si y sólo si $(\alpha$ es transitivo$) \wedge (\in$ es un buen orden de $x)$. Por el lema 4.25, «α es transitivo» es absoluta para A. Además, como en A se verifica el Axioma de Fundación, $(\in$ es un buen orden de $x)^A$ equivale a $(\in$ es un orden total de $x)^A$. Y como esta última fórmula Δ_0. Podemos concluir que la fórmula «α es un ordinal» es absoluta para A.

- Basta con observar que α es un ordinal límite si y sólo si

$$\alpha \text{ es un ordinal} \wedge \alpha \neq 0 \wedge \forall \beta \in \alpha \exists \gamma \in \alpha(\beta \in \gamma)$$

  pues la fórmula de la derecha es Δ_0 y $x = 0$ es absoluta por el lema 4.25.

- Observe que α es un ordinal sucesor si y sólo si (α es un ordinal $\wedge \alpha \neq 0 \wedge \alpha$ no es un ordinal límite. Luego, por el inciso anterior, «α es un ordinal sucesor» es absoluta para A.

$\square$

Lema 4.28. *Si* M *es una clase transitiva donde se verifican los axiomas del Par, de la Unión, de Comprensión y de Extensión, entonces:*

i) El Axioma de Elección es verdadero en M *si y sólo si cada familia disjunta de conjuntos no vacíos en* M*, tiene un conjunto selectivo.*

ii) El Axioma de Infinito se verifica en M *si* $\omega \in M$.

Demostración. i) Por el lema 4.25, tenemos que $\emptyset$, $S \cap z$ y $sing(w)$ son absolutas para M. Como la composición de fórmulas absolutas es absoluta (por 4.26), $sing(S \cap z)$ es absoluta. Utilizando esto y que M es transitiva, el Axioma de Elección (AE) relativizado a M es:

$$\forall F \in M(\emptyset \in F \wedge \forall x \in F \quad \forall y \in F(x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset) \rightarrow \exists S \in M \quad \forall z \in F(sing(S \cap z)))$$

que es exactamente nuestra hipótesis, así que tenemos que $M \vDash AE$.

ii) Como M modela a TCB-AR-APo, por el lema 4.25, $\emptyset$ y $S(y)$ son absolutas, entonces $M \vDash AI$ es equivalente a $\exists x \in M(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$, que es verdadera pues $\omega \in M$.

$\square$

Como anunciábamos al iniciar esta sección, veremos que la consistencia de ZFE$^-$ implica la de ZFE, para ello, probaremos desde ZFE$^-$ que existe una clase propia que verifica al Axioma de Fundación. Formalmente:

Lema 4.29. *Supongamos que* M *es una clase propia (de* $\mathcal{L}_C$*), que* $\{\phi_1, \ldots, \phi_n, \varphi\} \subseteq$ ENUN *y que* $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \vdash \varphi$*. Entonces* $\exists x \in M \wedge \phi_1^M, \ldots, \phi_n^M \vdash \varphi^M$.

Demostración. Probémoslo por inducción. Si $\varphi \in \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$[18], es inmediato que $\phi_1^M \wedge \cdots \wedge \phi_n^M \vdash \varphi^M$. Supongamos que existe $l < n$ tal que φ es obtenido por Modus Ponens a partir de ϕ_l y $\phi_l \rightarrow \varphi$, por hipótesis de inducción ψ^M y $\psi^M \rightarrow \varphi^M$, entonces ψ^M. $\square$

Lema 4.30. *Si* S *y* T *son subconjuntos de enunciados de* $\mathcal{L}_C$ *y se puede probar desde* T *que* S *es verdadera en una clase* M *y que* $M \neq \emptyset$*, entonces* $CON(T) \rightarrow CON(S)$.

[18] Omitimos la prueba de cuando φ es un axioma lógico.

Demostración. Probemos la contrarrecíproca: supongamos que existe $\varphi \in \mathsf{ENUN}$ y

$$\{\phi_1, \dots, \phi_n, \varphi\} \subseteq S$$

es tal que $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Por hipótesis $T \vdash \phi_1^M, \dots, \phi_n^M$, y por el lema anterior $T \vdash \varphi^M \wedge \neg\varphi^M$.

$\square$

En el caso en que $T = \mathsf{ZFE}^-$ y $S = \mathsf{ZFE}$, la clase que nos servirá será, naturalmente, la compuesta por los llamados conjuntos bien fundados (BF). Esto nos dará un ejemplo de pruebas de consistencia, distinto al de extensiones genéricas, a la vez de que nos ayudará en nuestro camino hacia comprender las pruebas de consistencia que utilizan dichas extensiones. La clase BF es útil para estudiar a V, pues si aceptamos el Axioma de Fundación nos da una manera de organizarlo. En ZFE se introduce AF para evitar conjuntos paradójicos como el de Russel, así, un conjunto sólo se puede formar a partir de otros conjuntos previamente definidos, en particular, ningún conjunto puede ser elemento de sí mismo. Hemos de comenzar la construcción de nuestra jerarquía por algún lado, dado que el vacío no requiere de conjuntos preexistentes comenzaremos por él, a partir de éste y con operaciones básicas se irán construyendo conjuntos más complejos, una cualidad que compartirán estos conjuntos es que al estar conformados por elementos «más simples»que ellos mismos, todos tienen un fondo. Esta construcción fue propuesta por von Neumann algunos años después de que se propusiera ZFE, sin embargo, es una idea natural que podemos pensar como subyacente al sistema que ocupamos. Claro que esto es tan sólo un esquema, pues existen otros modelos del mismo ZFE, y eso esta en la esencia del presente trabajo.

Definición 4.31. (ZF) Definamos por recursión[19] sobre la clase de los ordinales:

I $V_0 = \emptyset$.

II $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$.

III $V_\alpha = \bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\}$ si α es límite.

IV A la colección $\{V_\alpha : \alpha \in \mathsf{ORD}\}$ se le conoce como la *jerarquía acumulativa de los conjuntos bien fundados*. Denotaremos por BF a la unión de dicha clase.

Definición 4.32. Observe que, por la definición de BF, si $x \in \mathsf{BF}$, el $\min\{\alpha \in \mathsf{ORD} : x \in V_\alpha\}$ debe ser un ordinal sucesor. Si $x \in \mathsf{BF}$, definimos $\mathrm{rank}(x) = \min\{\alpha \in \mathsf{ORD} : x \in V_{\alpha+1}\}$.

[19] El teorema de recursión transfinita se prueba a partir de $\mathsf{ZF}^- - \mathsf{APo}$.

A continuación mostramos una lista de propiedades de BF que nos servirán para su manejo.

Lema 4.33. *Sean* $\alpha \in \mathsf{ORD}$ *y* $x \in \mathsf{BF}$ *arbitrarios, las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

I V_α *es transitivo.*

II $V_\alpha = \{y \in \mathsf{BF} : \mathrm{rank}(y) < \alpha\}$.

III $\forall y \in x(\mathrm{rank}(y) < \mathrm{rank}(x))$.

IV $\mathrm{rank}(x) = \sup\{\mathrm{rank}(y) + 1 : y \in x\}$.

V *Si* $\beta < \alpha$ *entonces* $V_\beta \subseteq V_\alpha$.

VI $\alpha \in \mathsf{BF} \wedge \mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$. *Observe que esto implica que BF es una clase propia.*

VII $V_\alpha \bigcap \mathsf{ORD} = \alpha$.

VIII $y \subseteq \mathsf{BF}$ *implica que* $y \in \mathsf{BF}$.

Demostración. I Probémoslo por inducción: si $\alpha = 0$, entonces la afirmación es cierta por vacuidad. Supongamos que para todo $\beta < \alpha$ la afirmación es cierta. Si α es un ordinal límite, y $x \in V_\alpha$, existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in V_\beta$, por hipótesis, $x \subseteq V_\beta$ y por lo tanto $x \subseteq V_\alpha$. Si existe $\beta \in \mathsf{ORD}$ tal que $\alpha = \beta + 1$ y $x \in V_\alpha = P(V_\beta)$, entonces $x \subseteq V_\beta$, sea $y \in x \subseteq V_\beta$, por hipótesis de inducción, $y \subseteq V_\beta$, lo que equivale a $y \in P(V_\beta) = V_\alpha$. En cualquier caso, V_α es transitivo.

II $z \in V_\alpha$ si y sólo si $\exists\beta < \alpha(z \in V_{\beta+1})$ si y sólo si $\mathrm{rank}(z) \leqslant \beta < \alpha$.

III Sea $y \in x$, considere $\beta = \mathrm{rank}(x)$, como V_β es transitivo, $y \in x$, así que $\mathrm{rank}(y)$ está definido. Observe que, por definición de $\mathrm{rank}(x)$, $x \subseteq V_\beta$, luego $y \in V_\beta$, así que $\mathrm{rank}(y) < \beta$.

IV Se sigue de los dos incisos anteriores.

V Procedamos por inducción, $\alpha = 1$, la afirmación es verdadera. Si suponemos que α es un ordinal límite, también es cierta pues $V_\alpha = \bigcup\{V_\gamma : \gamma < \alpha\}$. Supongamos entonces que $\alpha = \gamma + 1$ para algún $\gamma \in \mathsf{ORD}$, si $y \in V_\beta$, entonces $\mathrm{rank}(y) < \beta < \alpha$, y como $V_\alpha = \{y \in \mathsf{BF} : \mathrm{rank}(y) < \alpha\}$, tenemos que $V_\beta \subset V_\alpha$.

VI De nuevo, por inducción: si $\alpha = 0$, es verdadero, supongamos que $\alpha > 0$ y que para cada $\beta < \alpha$ la afirmación es cierta, como para cada $\beta < \alpha$, $\mathrm{rank}(\beta) = \beta$, $\beta \in V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$. Luego $\alpha \subseteq V_\alpha$ y por lo tanto $\alpha \in V_{\alpha+1}$. Finalmente, como $\mathrm{rank}(\alpha) = \sup\{\mathrm{rank}(y) + 1 : y \in x\}$, $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$.

VII Se sigue del inciso anterior.

VIII Como $y \subseteq \mathrm{BF}$, si $y = \emptyset$, $y \in \mathrm{BF}$, en otro caso podemos considerar $\alpha = \sup\{\mathrm{rank}(z) + 1 : z \in y\}$, por definición de $\mathrm{rank}(z)$, $y \subseteq V_\alpha$ y por lo tanto $y \in V_{\alpha+1}\mathrm{BF}$.

□

Lema 4.34. I BF *es transitivo.*

II $\forall y \in \mathrm{BF}(\{x, y\} \in \mathrm{BF})$.

III $\forall F \in \mathrm{BF}(\bigcup F \in \mathrm{BF})$.

IV $\forall x \in \mathrm{BF}(P(x) \cap \mathrm{BF} \in \mathrm{BF})$.

V *Para todas las funciones* f *tales que* $\mathrm{dom}(f) \in \mathrm{BF}$ *y* $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{BF}$, *entonces* $\mathrm{ran}(f) \in \mathrm{BF}$.

VI *Cada familia disjunta de conjuntos no vacíos en* BF *tiene un conjunto selectivo en* BF.

VII $\omega \in \mathrm{BF}$.

Demostración. I BF es transitivo: se sigue del lema 4.33 pues en él mostramos que para todo $\alpha \in \mathrm{ORD}$, V_α es transitivo.

II $\forall x \in \mathrm{BF}\forall y(y \subseteq x \to y \in \mathrm{BF})$: como $x \subseteq V_\alpha$, con $\alpha = \mathrm{rank}(x)$, luego, si $y \subseteq x$, $y \in P(V_\alpha) = V_{\alpha+1} \subset \mathrm{BF}$.

III $\forall y \in \mathrm{BF}(\{x, y\} \in \mathrm{BF})$: sean $x, y \in \mathrm{BF}$, denotemos como $\gamma = \text{máx}\{\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y)\}$, luego $x, y \in V_\gamma$, así que $\{x, y\} \in V_{\gamma+1} \subset \mathrm{BF}$.

IV $\forall F \in \mathrm{BF}(\bigcup F \in \mathrm{BF})$: sea $F \in \mathrm{BF}$, $\bigcup F = \{x : \exists y \in F(x \in y)\}$ sea $\alpha = \mathrm{rank}(x)$, como V_α es transitivo, $\bigcup F \subseteq V_\alpha$, y por lo tanto $\bigcup F \in V_{\alpha+1}$. Por ello, $\mathrm{BF} \models AU$

V $\forall x \in \mathrm{BF}(P(x) \cap \mathrm{BF} \in \mathrm{BF})$: sea $x \in \mathrm{BF}$, hemos visto que si $y \subseteq x$, entonces $y \in \mathrm{BF}$. Luego $P(x) \cap \mathrm{BF} = P(x)$, además $P(x) \in \mathrm{BF}$, pues como $x \subseteq V_\alpha$ para $\alpha = \mathrm{rank}(x)$, $P(x) \subseteq V_{\alpha+1}$ y por lo tanto $P(x) \in V_{\alpha+2}$.

VI Por el lema anterior, basta con suponer que $\mathrm{ran}(f) \subseteq \mathrm{BF}$ para concluir que $\mathrm{ran}(f) \in \mathrm{BF}$.

VII Cada familia disjunta de conjuntos no vacíos en BF tiene un conjunto selectivo en BF: supongamos que $F \in \mathsf{BF}$ es una familia ajena dos a dos, y $\emptyset \notin F$. Por el AE, existe un conjunto selectivo S de F, luego $S' = S \cap \bigcup F$ también es un conjunto selectivo de $S' \in \mathsf{BF}$ pues $S' \subseteq \bigcup F \in \mathsf{BF}$.

VIII Como $\omega \in \mathsf{ORD}$, el lema anterior asegura que $\omega \in \mathsf{BF}$.

□

Teorema 4.35. $\mathsf{CON}(\mathsf{ZFE}^-)$ *implica* $\mathsf{CON}(\mathsf{ZFE})$

Demostración. El lema anterior y las condiciones de satisfacibilidad que elaboramos en los lemas 4.16 y 4.28 verifican que $\mathsf{BF} \models \mathsf{ZFE}^-$, observe que $\mathsf{BF} \vdash \mathsf{AF}$ pues el Axioma de Fundación relativizado a BF es:

$$\forall x \in \mathsf{BF}[\exists y \in \mathsf{BF}(y \in x) \to \exists w \in \mathsf{BF}(w \in x \wedge \neg \exists z \in \mathsf{BF}(z \in x \wedge z \in w))].$$

Sea $x \in \mathsf{BF}$, si $x \neq \emptyset$, consideremos $\alpha = \text{mín}\{\mathrm{rank}(y) : y \in x\}$, sea $w \in x$ con $\mathrm{rank}(w) = \alpha$, si suponemos que $z \in \mathsf{BF}$ es tal que $z \in w$, como $\mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(w)$, la elección de α obliga a que $z \notin x$. Como todos estos resultados fueron derivados de ZFE^-, el lema 4.30 justifica $\mathsf{CON}(\mathsf{ZFE}^-)$ implica $\mathsf{CON}(\mathsf{ZFE})$. □

La siguiente definición traduce el Axioma de Fundación a afirmar que la relación de pertenecia es bien fundada en V. Ésto nos ayudará a caracterizar el que un conjunto pertenezca a BF, con lo que a su vez lograremos mostrar que aceptar el Axioma de Fundación es equivalente a restringir nuestro universo de discurso a BF. Esa organización de nuestro universo nos permite aplicar el teorema del Reflejo (que mostraremos en 4.3), y así asegurar que para cualquier lista finita de fórmulas en $\mathcal{L}_C$, existe un nivel V_α, tal que todas las fórmulas en la lista son absolutas para V_α, en particular, si la lista está compuesta por axiomas de ZFE, el *conjunto* V_α será un modelo de ella.

Definición 4.36. (ZF$^-$)Una relación R es *bien fundada* en un conjunto A si y sólo si

$$\forall x \subseteq A(x \neq \emptyset \to \exists y \in x(\neg \exists z \in x(zRy)))$$

Lema 4.37. *(ZF$^-$)*

I *Si* $A \in \mathsf{BF}$, *entonces* $\in$ *es bien fundada en* A[20].

II *Por otro lado, si* A *es transitivo y* $\in$ *es bien fundada en* A, *entonces* $A \in \mathsf{BF}$.

[20] La recíproca no es verdadera, por ejemplo si $x = \{y\}$ y $y = \{x\}$, $x \neq y$, entonces $\in$ es bien fundada en x y sin embargo $x \notin \mathsf{BF}$.

Demostración.

I Sean $A \in \mathrm{BF}$ y $x \subseteq A$, si $x \neq \emptyset$, consideremos $\alpha = \min\{\mathrm{rank}(y) : y \in x\}$, sea $w \in x$ con $\mathrm{rank}(w) = \alpha$, si suponemos que $z \in \mathrm{BF}$ es tal que $z \in w$, como $\mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(w)$, la elección de α obliga a que $z \notin x$, por lo tanto $\in$ es bien fundada en A.

II Por el lema 4.33 $A \subset \mathrm{BF}$ implica que $A \in \mathrm{BF}$, supongamos que $x = A \setminus \mathrm{BF} \neq \emptyset$, por hipótesis, existe $y \in x$ tal que para todo $z \in x$, $z \notin y$, luego si $z \in y$, $z \notin x$, además, dado que A es transitiva, para todo $z \in y$, $z \in A$, entonces $y \subseteq A \cap \mathrm{BF}$. Pero entonces, $y \in \mathrm{BF} \cap x = \emptyset$. Esta contradicción nos indica que $A \in \mathrm{BF}$.

□

Por el lema anterior, nos interesará asociar a cada conjunto a un conjunto transitivo con ciertas cualidades, que definimos enseguida.

Definición 4.38. Si A es un conjunto, por recursión definimos: $\bigcup^0 A = A$, $\bigcup^{n+1} A = \bigcup(\bigcup^n A)$. La *cerradura transitiva de* A será $\mathrm{ctr}(A) = \bigcup\{\bigcup^n A : n \in \omega\}$.

Lema 4.39 (ZF$^-$). *Si* A *es un conjunto.*

- $\mathrm{ctr}(A)$ *es transitivo.*
- $A \subseteq \mathrm{ctr}(A)$,

Demostración.

- Sea $x \in \mathrm{ctr}(A)$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $x \in \bigcup^n A$, luego $x \subseteq \bigcup^{n+1} A \subseteq \mathrm{ctr}(A)$.
- Por definición de $\bigcup^0 A$ y de $\mathrm{ctr}(A)$.

□

Lema 4.40. *Para cualquier conjunto* A *son equivalentes:*

I $A \in \mathrm{BF}$

II $\mathrm{ctr}(A) \in \mathrm{BF}$

Demostración.

I Como BF es cerrada bajo uniones, bastará con mostrar que para cada $n \in \omega$, $\bigcup^n A \in \mathrm{BF}$. Procedamos por inducción: $\bigcup^0 A \in \mathrm{BF}$ por hipótesis; supongamos que $\bigcup^n A \in \mathrm{BF}$, como BF es transitiva, $\bigcup^n A \subset \mathrm{BF}$ y ya que BF es cerrado bajo uniones $\bigcup^{n+1} A = \bigcup\bigcup^n A \in \mathrm{BF}$.

II Si sucede que $\mathrm{ctr}(A) \in \mathrm{BF}$, entonces $A \subseteq \mathrm{ctr}(A) \subset \mathrm{BF}$, y por ello $A \in \mathrm{BF}$.

□

Como resultado añadido, observe que en la definición de $\mathtt{ctr}(A)$ no fue necesario el uso del Axioma de Potencia (ni en ningún otro teorema involucrado con el siguiente resultado), como el lema muestra que ésta caracteriza a BF, obtenemos el siguiente teorema de consistencia.

Teorema 4.41. $\mathsf{CON}(\mathsf{ZFE}^- - \mathsf{APo})$ *implica* $\mathsf{CON}(\mathsf{ZFE})$.

Lema 4.42. *Son equivalentes:*

I *El axioma de fundación se verifica en* V.

II $V = \mathsf{BF}$.

Demostración. Supongamos AF, sea $x \in V$, por el lema 4.37 y ya que $\mathtt{ctr}(x)$ es transitivo, se tiene que $\mathtt{ctr}(x) \in \mathsf{BF}$, entonces por el lema 4.40, $x \in \mathsf{BF}$.
Para la otra implicación, note que el axioma de fundación relativizado a BF es:

$$\forall x \in \mathsf{BF}[\exists y \in \mathsf{BF}(y \in x) \to \exists w \in \mathsf{BF}(w \in x \wedge \neg \exists z \in \mathsf{BF}(z \in x \wedge z \in w))].$$

Sea $x \in \mathsf{BF}$, que es equivalente a que si $x \in \mathsf{BF}$, entonces la relación $\in$ es bien fundada en x, y esto último fue lo que se estableció en el lema 4.37. $\square$

Definición 4.43. Una lista de fórmulas $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ es *cerrada bajo subfórmulas* si y sólo si para cada $i < n$, toda subfórmula de ϕ_i está en la lista.

Lema 4.44. *Sea* $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ *una lista de fórmulas de* $\mathcal{L}_C$ *cerrada bajo subfórmulas, sean* A *y* B *clases no vacías y tales que* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. *Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I $\bigwedge_{i<n}(A \prec_{\phi_i} B)$.

II *Para todas las fórmulas existenciales* $\phi_i(x_1, \ldots, x_r)$[21], *es válido que*

$$\forall a_1, \ldots, a_r \in A(\phi_i^B(a_1, \ldots, a_r) \to \exists a \in A\phi_j^B(a_1, \ldots, a_r, a)).$$

Demostración. Supongamos que $\bigwedge_{i<n}(A \prec_{\phi_i} B)$ y que para algún $i < n$, la fórmula $\phi_i(x_1, \ldots, x_r)$ es de la forma $\exists x \phi_j(x_1, \ldots, x_r, x)$ para algún $j < n$. Sean $a_1, \ldots, a_r \in A$, si sucede que $\phi_i^B(a_1, \ldots, a_r)$, por hipótesis, tenemos que es equivalente a

$$\phi_i^A(a_1, \ldots, a_r)$$

entonces

$$\exists a \in A\phi_j^A(a_1, \ldots, a_r, a),$$

[21]Es decir, de la forma $\exists x \phi_j(x_1, \ldots, x_r, x)$ para algún $j < n$.

y como $A \prec_{\phi_j} B$, se concluye que

$$\exists a \in A\phi_j^B(a_1, \ldots, a_r, a).$$

Para la otra implicación, supongamos que II es verdadera y que $i < n$, probemos por inducción que $A \prec_{\phi_i} B$: si ϕ_i es atómica, por la prueba del lema 4.21, se obtiene el resultado. Supongamos que el resultado es cierto para toda ϕ_j en $\mathtt{Subform}(\phi_i)$. Como el caso en el que ϕ_i es de la forma $\neg\phi_j$ o $\phi_l \wedge \phi_k$, es inmediato por la hipótesis de inducción. Supongamos que $\phi_i(x_1, \ldots, x_r)$ es de la forma $\exists x \phi_j(x_1, \ldots, x_r, x)$ para algún $j < n$. Observe que si $\phi_i^A(a_1, \ldots, a_r)$ entonces $\exists a \in A\phi_j^A(a_1, \ldots, a_r, a)$, como $A \subseteq B$ y por hipótesis de inducción $\phi_j^B(a_1, \ldots, a_r, a)$, tenemos que $\phi_i^B(a_1, \ldots, a_r)$. Ahora supongamos que $\phi_i^B(a_1, \ldots, a_r)$, por II sucede que $\exists a \in A\phi_j^B(a_1, \ldots, a_r, a)$, y utilizando la hipótesis de inducción $\phi_i^A(a_1, \ldots, a_r)$. $\square$

Teorema 4.45. *(Teorema del Reflejo) Sea* $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ *una lista de fórmulas de* L_C. *Si* B *es una clase no vacía,* A_ξ *es un conjunto para cada* $\xi \in \mathrm{ORD}$ *y son tales que:*

I *Si* $\nu < \xi$ *entonces* $A_\nu \subseteq A_\xi$.

II *Si* ξ *es ordinal límite entonces* $A_\xi = \bigcup\{A_\nu : \nu < \xi\}$

III $B = \bigcup\{A_\xi : \xi \in \mathrm{ORD}\}$.

Entonces, $\forall \nu \exists \xi > \nu(A_\xi \neq \emptyset \wedge \bigwedge_{i<n}(A_\xi \prec_{\phi_i} B) \wedge \xi$ *es ordinal límite*).

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la lista es cerrada bajo subfórmulas. Sea $\nu \in \mathrm{ORD}$, por el último lema bastará con concentrarnos en encontrar $\xi > \nu$ un ordinal límite, tal que $A_\xi \neq \emptyset$ y que para todas las fórmulas $\phi_i(x_1, \ldots, x_r)$ de la forma $\exists x \phi_j(x_1, \ldots, x_r, x)$ para algún $j < n$, sea válido que $\forall a_1, \ldots, a_r \in A_\xi(\phi_i^B(a_1, \ldots, a_r) \rightarrow \exists a \in A_\xi \phi_j^B(a_1, \ldots, a_r, a))$: para cada $i < n$ tal que la fórmula $\phi_i(x_1, \ldots, x_r)$ sea de la forma $\exists x \phi_j(x_1, \ldots, x_r, x)$, para cada $\bar{b} \in B^r$ sea

$$f_i(\bar{b}) = \begin{cases} \text{mín}\{\alpha : \exists a \in A_\alpha \phi_j^B(a_1, \ldots, a_r, a)\} & \mathrm{si} \quad \phi_i^B(a_1, \ldots, a_r) \\ 0 & \mathrm{si} \quad \neg\phi_i^B(a_1, \ldots, a_r) \end{cases}$$

Note que $f_i(\bar{b})$ está bien definido porque $B = \bigcup\{A_\xi : \xi \in \mathrm{ORD}\}$. Para $\alpha \in \mathrm{ORD}$, considere

$$g_i(\alpha) = \begin{cases} \sup\{f_i(\bar{a}) : \bar{a} \in A_\alpha^r\} & \text{si } \phi_i(x_1, \ldots, x_r) \text{ es existencial} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

También definimos $k(\alpha) = \text{máx}\{\alpha + 1, \text{máx}\{g_i(\alpha) : i < n\}\}$. Definamos la lista $\{\xi_n : n \in \omega\}$ recursivamente $\xi_0 = \text{mín}\{\alpha \in \text{ORD} : A_\alpha \neq \emptyset \text{ y } \alpha > k(\nu)\}$, si $n \in \omega$, $\xi_{n+1} = k(\xi_n)$. Sea $\xi = \sup\{\xi_n : n \in \omega\}$, como $\{\xi_n : n \in \omega\}$ es estrictamente creciente, ξ es límite. Si $\phi_i(x_1, \dots, x_r)$ está en la lista y es de la forma $\exists x \phi_j(x_1, \dots, x_r, x)$, sean $a_1, \dots, a_r \in A_\xi = \bigcup\{A_\mu : \mu < \xi\}$, por definición de ξ y por I, existe $n \in \omega$ tal que $a_1, \dots, a_r \in A_{\xi_n}$. Si suponemos $\phi_i^B(a_1, \dots, a_r)$, dado que $\beta = f_i(a_1, \dots, a_r) = \text{mín}\{\alpha : \exists a \in A_\alpha \phi_j^B(a_1, \dots, a_r, a)\}$, existe $a \in A_\beta$ tal que $\phi_j^B(a_1, \dots, a_r, a)$, observando que $\alpha = f_i(a_1, \dots, a_r) \leqslant g_i(\xi_n) < k(\xi_n) = \xi_{n+1} < \xi$, tenemos que $A_\beta \subseteq A_\xi$, y por lo tanto existe $a \in A_\xi$ tal que $\phi_j^B(a_1, \dots, a_r, a)$. $\square$

Teorema 4.46. *(ZFE) Para cualquier lista finita de axiomas de* ZFE, *existe un conjunto que las modela.*

Demostración. Como estamos suponiendo ZFE, el lema 4.42 muestra que $V = \text{BF}$, por definición BF cumple con las hipótesis del teorema del Reflejo, así, si $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$ es una lista finita de ZFE, existe $\nu \in \text{ORD}$, tal que $V_\nu \models \phi_0, \dots, \phi_{n-1}$. $\square$

Hemos avanzado en nuestra meta de construir mtns de ZFE*, pero aún nos falta asegurar que sean transitivos y numerables. A continuación veremos cómo «transformar» los modelos que tenemos hasta ahora, en modelos numerables de los mismos axiomas. Y aunque hemos probado que para cualquier $\alpha \in \text{ORD}$, V_α es transitivo, la transitividad no se respetará en esa transformación, sin embargo podremos arreglarlo con otro teorema conocido como el *Colapso de Mostowsky*, que a partir de modelos de alguna teoría, construye modelos transitivos de la misma teoría y de la misma cardinalidad.
El teorema de Löwenheim-Skolem será el que aportará la numerabilidad a nuestros modelos. Dicho teorema abrió una nueva dirección a las investigaciones en teoría de modelos ya que antes de él, éstas estaban volcadas principalmente al estudio de la fundamentación. Fue célebre por la inquietud que despertó, pues una de sus consecuencias es que existen modelos numerables de la teoría que procura describir a los reales y, sin embargo, no hay una contradicción, lo que muestra es que propiedades esenciales -como que son Dedekind completos- se escapan a los lenguajes de primer orden. Omitimos la demostración del Teorema de Löwenheim-Skolem y del lema que le sigue pues se encuentran en cualquier introducción a lógica matemática (pueden consultarse, por ejemplo, en [End01]).

Teorema 4.47. *(Teorema de Löwenheim-Skolem). Sea $\mathfrak{L}$ un lenguaje de primer orden que contiene sólo una cantidad numerable de símbolos no lógicos y sea* T *una teoría en $\mathfrak{L}$. Si* T *tiene un modelo, entonces* T *tiene un modelo numerable.*

Definición 4.48. Dado $\mathcal{L}$, un lenguaje de primer orden. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$-estructuras diremos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *elementalmente equivalentes*, y lo denotaremos como $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ si para todo enunciado ϕ, $\mathfrak{A} \models \phi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \phi$.

Lema 4.49. *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras, con $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

Definición 4.50 (ZF$^-$-Po)**.** Diremos que una relación R es extensional en una clase A si y sólo si $\forall x, y \in A(\forall z \in A(zRx \leftrightarrow zRy) \to x = y)$.

Teorema 4.51 (Colapso de Mostowski)**.** *Supongamos ZF$^-$-Po. Si R es una relación extensional y estrictamente bien fundada*[22]*, sobre un conjunto A. Entonces existe un conjunto transitivo B, conocido como el colapso de Mostowski de (A, R), para la cual existe $C : A \to B$ una biyección que satisface:*

$$\forall x, y \in A(xRy \leftrightarrow C(x) \in C(y)).$$

Demostración. Definamos a C por recursión, supongamos que para algún $x \in A$ hemos definido $C\big|_{I_x}$, donde $I_x = \{y \in A : yRx\}$, definimos $C(x) = ran(C\big|_{I_x})$. Y considere $B = Im(C)$, note que la definición de C obliga a que B sea transitivo, pues si $x \in B$, existe $y \in A$ tal que $C(y) = x$ y ya que $C(y) = ran(C\big|_{I_y})$, $x \subseteq Im(C) = B$. Es decir, a todos los C minimales los «colapsamos» en el vacío, y obligamos que los demás conjuntos de B sólo se puedan generar a partir de otros elementos de B. Además, si $x, y \in A$ y xRy, $C(x) \in ran(C\big|_{I_y}) = C(y)$. Finalmente, revisemos que C, en efecto, es una biyección: por definición es suprayectiva, para probar inyectividad, procedamos por inducción y supongamos que $x, y \in A$ son distintos entre sí, y sucede que $C\big|_{I_x \cup I_y}$ es inyectiva, como R es extensional, sin pérdida de generalidad existe $z \in A$ tal que zRx y $z\neg Ry$, luego $C(z) \in C(x)$, por hipótesis de inducción $C(z) \notin C(y)$, entonces $C(x) \neq C(y)$. □

Teorema 4.52 (ZF$^-$-Po)**.** *Si T es una teoría de $\mathcal{L}_C$ que contiene al Axioma de Extensión y de Fundación, T tiene un modelo estándar numerable, entonces T tiene un modelo estándar, transitivo y numerable.*

Demostración. Supongamos que $(A, \in)$ es una $\mathcal{L}_C$-estructura y que $(A, \in) \models T$. Como A modela al Axioma de Extensión y al de Fundación, $\in$ es extensional y bien fundada en A, así, por el teorema de Colapso de Mostowski, existe un conjunto B transitivo y una biyección $C : N \to N'$ tal que

$$\forall a, a' \in A(aRa' \leftrightarrow C(a) \in C(a')).$$

Esta condición asegura que $(A, \in)$ y $(B, \in)$ son isomorfos, así, por el lema 4.49,

$$(A, \in) \equiv (B, \in) \text{ y por lo tanto } (B, \in) \models T$$

y ya que C es una biyección, $|B|$ es numerable. □

[22] La relación es bien fundada y no es reflexiva.

Con el siguiente teorema recogemos varios de los frutos que trabajamos en esta sección.

Teorema 4.53. *Si* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *es una lista finita de axiomas de* ZFE*, entonces*

$$\mathsf{ZFE} \vdash \exists M (M \vDash (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n) \wedge M \textit{ es numerable} \wedge M \textit{ es transitivo}).$$

5 Extensiones Genéricas

Estamos en posición de presentar detalladamente la técnica de extensiones genéricas. De aquí en adelante mostraremos su construcción, las propiedades que las han hecho tan fructíferas y, finalmente, un ejemplo de su aplicación para obtener un resultado de consistencia relativa. Las fuentes principales las debo a [Kun80], a [Bal09] y a [Hel12].

En 1963, Paul Cohen demostró que ni el Axioma de Elección, ni la Hipótesis del Continuo son demostrables partiendo de ZFE. La técnica que utilizó, conocida ahora como *forcing*, o *técnica de extensiones genéricas*, se ha retomado, transformado y derivado en cuantiosos resultados sobre consistencia relativa. La presentación que hacemos en este trabajo de dicha técnica, además de a Cohen, la debemos a Scott, Solovay y Shoenfield.

En este capítulo sólo introduciremos -como ejemplo guía- el *forcing de Cohen*; algunos otros ejemplos de *forcing* son: el *forcing aleatorio*, el *forcing de Mathias*, el *forcing de Sacks* y el de *Silver*. Algunos resultados sobre consistencia (entre tantos otros) que se han obtenido con la técnica que aquí nos interesa están: Solovay a partir del *forcing* aleatorio mostró que la consistencia de ZFE+«La existencia de un cardinal inaccesible» implica la consistencia de ZFE+«Todo conjunto de reales es Lebesgue medible». Otra consecuencia importante de las extensiones genéricas, es que a partir de ellas se creó otra técnica conocida como *forcing iterado*; con ésta última Solovay y Tennenbaum probaron que la consistencia de ZFE implica la consistencia de la Hipótesis de Suslin+ZFE. Además, se han obtenido resultados relacionados con Álgebra y Teoría de la Medida, por ejemplo, que la conjetura de Whitehead tiene contraejemplos y que la conjetura de Borel resulta consistente con ZFE. Otra corriente en la que ha generado frutos la técnica de *forcing* es en la postulación de candidatos para axiomas, dichos axiomas son conocidos como *axiomas de forcing*, entre ellos se encuentran el Axioma de Martin, el Axioma de Forcing Propio y el *Open Coloring Axiom*.

En las aplicaciones dedicadas al Axioma de Martin (capítulos 2 y 3), hemos visto que los filtros genéricos se pueden adecuar para crear objetos variados y de interés; la fuerza del *forcing*, reside en que, si hay un preorden $\mathbb{P}$ tal que un filtro genérico en él, digamos G, nos permite construir el objeto deseado -por ejemplo, $\aleph_2$ números reales- con la técnica de extensiones genéricas, para cualquier porción finita de ZFE hallaremos un modelo $M[G]$ de esa porción finita que tenga como elemento a G, y, por lo tanto, los objetos que buscamos también serán elementos de $M[G]$ -en nuestro ejemplo, una consecuencia será que $(\aleph_2 \leqslant 2^{\omega})^{M[G]}$-. El que ZFE muestre la existencia de ese conjunto $M[G]$, como relatamos en el inicio del capítulo pasado, muestra que la consistencia de ZFE implica la consistencia de $\mathsf{ZFE} + \phi$ donde ϕ es cualquiera de las verdades en $M[G]$ -siguiendo con el ejemplo, ϕ podría ser $\neg\mathsf{HC}$-.

Ahora entenderemos por qué nos esforzamos en hallar a los modelos transitivos numerables de cualquier parte finita de ZFE: fijemos Γ, una lista finita de ZFE. Dado un preorden $\mathbb{P}$ conveniente, fijaremos M un mtn que tenga como elemento a $\mathbb{P}$ y que modele otra lista finita de ZFE, digamos $\Gamma^{\star}$[1]. El que M sea un conjunto y sea numerable, a la manera del lema de Rasiowa-Sikorski 1.7, implicará que en V, existe G un filtro «genérico»[2]. Después construiremos a la extensión $M[G]$, que será un conjunto tal que $G \in M[G]$; de entrada, la definición de $M[G]$ permitirá probar que satisface los axiomas de Extensión y de Fundación; para probar que satisface los demás posibles axiomas en Γ, se utiliza algo muy característico de la técnica de *forcing*, y es que la definición de los elementos en $M[G]$ nos permitirá señalarlos a todos con elementos de M -les daremos un *nombre* en M-, de ahí, para cualquier $\psi \in \Gamma$, podremos hallar $\psi^{\star} \in \Gamma^{\star}$, tal que $M \models \psi^{\star}$ y que esto implique que $M[G] \models \psi$.

5.1. Construcción de Extensiones Genéricas

En esta sección, además de construir a las llamadas extensiones genéricas, mostraremos propiedades útiles de ellas que se desprenden de su definición; por ejemplo, que son transitivas y que, de entrada, cumplen algunos axiomas.

Definición 5.1. Un *conjunto parcialmente ordenado de forcing* (*copof*) es una triada ordenada $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1)$ donde $(P, \leqslant)$ es un copo y $1 \in P$ es $\leqslant$-máximo, es decir, para

[1] $\Gamma^{\star}$ será una lista que iremos llenando a lo largo de la construcción conforme lo necesitemos, anunciaremos algunos como ejemplo para aclarar este punto, pero podremos estar seguros de que es una lista finita y que no surgen problemas por irlos agregando de esta manera.

[2] Recuerde que la existencia de filtros genéricos no siempre es posible. Luego, las comillas las agregamos pues será muy similar a un filtro genérico, pero ligeramente más débil.

todo $p \in P$, sucede que $p \leqslant 1$. Diremos que $\mathbb{P}$ *está en* M, un mtn, y lo denotaremos como $\mathbb{P} \in M$, si $P, \leqslant, 1 \in M$. Las definiciones relacionadas con preordenes que hemos tratado, se modifican en algunos detalles, y se agregan otras:

I Si $p \in P$, diremos que es una *condición de forzamiento*, una P-*condición* o *condición*[3]. Un conjunto $D \subseteq P$ *es denso debajo de* p si para todo $q \in P$ que extienda a p, existe $d \in D$ que extiende q.

II G será un *filtro en* $(P, \leqslant, 1)$ si es un filtro sobre $(P, \leqslant)$ y $1 \in G$.

III Un conjunto D es denso en $(P, \leqslant, 1)$ si es denso en $(P, \leqslant)$. Si G es un filtro de $\mathbb{P}$ diremos que es un *filtro* P-*genérico sobre* M si para cualquier D, denso en $\mathbb{P}$, tal que $D \in M$, $G \cap D \neq \emptyset$.

El siguiente ejemplo, cuando $\kappa = 1$, es llamado el *Forcing de Cohen*.

Ejemplo 5.1.1. $\mathbb{C}_\kappa = (\mathrm{F_n}(\kappa \times \omega, 2), \leqslant, \emptyset)$, donde $\mathrm{F_n}(\kappa \times \omega, 2)$ está dotado con el orden usual, es decir, si $p, q \in P$, $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$, es un copo de forcing.

En algunas aplicaciones del Axioma de Martin (por ejemplo, en el teorema 1.8), hemos visto que un filtro genérico en preordenes de la forma $\mathrm{Fn}(I, J)$, donde I y J son conjuntos, nos permite crear funciones que tengan como dominio a I. Luego, con un filtro genérico en el Forcing de Cohen, se puede crear una función de ω en 2, conocida como *real de Cohen*. En general, un filtro genérico en $\mathbb{C}_\kappa$ resultará en κ reales distintos entre sí. Al terminar esta sección, utilizando un preorden de ese tipo, estaremos en condiciones de mostrar que la consistencia de ZFE implica la consistencia de $\mathsf{ZFE} + \neg\mathsf{HC}$, o, equivalentemente, que la Hipótesis del Continuo no es un teorema de ZFE.

Definición 5.2. Sean M un mtn*, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1)$ un copof en M y $G \subseteq P$ un P-filtro sobre M.

I Por recursión sobre R, donde xRy si y sólo si $x \in \mathrm{crt}(y)$, definimos a la colección $\mathbb{V}^P$, de los P-*nombres*; τ es un P-*nombre* si y sólo si para todo $x \in \tau$, x es una pareja ordenada, digamos (π, p), donde π es un P-nombre y $p \in P$. Los P-nombres serán los conjuntos con los que tratamos de designar a los elementos de la extensión genérica.
Observe que una definición equivalente se obtiene al definir como $V_0^P = \emptyset$, $V_\alpha^P = \bigcup\{V_\beta^P : \beta < \alpha\}$ si α es un ordinal límite, $V_\alpha = \mathcal{P}(V_\beta^P \times P)$ si $\beta + 1 = \alpha$ para algún $\beta \in \mathrm{ORD}$ y $\mathbb{V}^P = \bigcup\{V_\alpha^P : \alpha \in \mathrm{ORD}\}$; esta segunda presentación muestra que V^P tiene una fuerte similitud con V (considerando al Axioma de Fundación), pero se distingue porque los elementos de cada conjunto en V^P están marcados por un elemento en P.

[3]Esta manera de nombrarlas se aclarará con el teorema de Verdad 5.19.

II Si τ es un P-nombre, definimos $rk(\tau) = \sup\{rank(\pi) + 1 : \exists p \in P((\pi, p) \in \tau)\}$.

III Para que la extensión genérica también sea modelo de ZFE*, utilizaremos fuertemente que M lo es, por ello, de V^P sólo nos interesará su intersección con M. Definamos $\mathbb{M}^P = \mathbb{V}^P \cap M$.

IV Si τ es un P-nombre, por recursión sobre $\in$, definimos a la *valuación de* τ *en* G, τ_G -que también se denota por $val(\tau, G)$- de la siguiente manera $\tau_G = \{\pi_G : \exists g \in G((\pi, g) \in \tau)\}$.

V $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^P\}$, a este conjunto se le conoce como *extensión genérica de* M.

Observación. Dado que M es transitivo y modela a ZF, la fórmula «τ es un P-nombre» es absoluta para M. Probémoslo por R-inducción, tomemos $x \in M$ y supongamos que para todo $y \in ctr(x)$, «y es un P-nombre» es absoluta para M, entonces:

$$(x \in V^P)^M \text{ si y sólo si } (\forall y \in x \exists \pi \in V^P \exists p \in P(y = (\pi, P)))^M \qquad (*)$$

Notando que $P \in M$ y M es transitiva, si $y \in x$, entonces $y \in M$ y ya que M modela ZF, si $\pi \in dom(y)$ π también es elemento de M. Luego, por hipótesis de inducción, $(*)$ sucede si y sólo si $\forall y \in x \exists \pi \in V^P \exists p \in P(y = (\pi, P))$. Una consecuencia de que la noción de P-nombre sea absoluta es que $M^P = \{\tau \in M : (\tau \text{ es un P-nombre})^M\}$.

El siguiente ejemplo -que, más precisamente, es un ejercicio- nos servirá para dos fines; el primero es para familiarizarnos con los conceptos en la definición anterior. El otro es que nos introducirá a los P-nombres canónicos. Recurriremos a estos últimos en numerosas ocasiones, una de vital importancia será asegurar que si M y G son como en la definición anterior, entonces G sea un elemento de $M[G]$.

Ejemplo 5.2.1. En $N = [\omega]^\omega$ definamos a la relación de equivalencia $\sim$ como: x si y sólo si $x \triangle y$ es finito. Si $x \in N$, entonces $[x]^\sim = \{y \in N : y\}$, definimos $N/fin = \{[x]^\sim : x \in N\}$, si $x, y \in N$, diremos que $[x]^\sim \leqslant [y]^\sim$ si y sólo si $|x \setminus y| < \aleph_0$. Observe que $(U, \leqslant, 1)$ con $U = N/fin$ y $1 = [\omega]^\sim$ es un copo de forcing. Consideremos a las siguientes U-condiciones: $u_1 = [\omega]^\sim$, $u_2 = [\{2n : n \in \omega\}]^\sim$ y $u_3 = [\{3n : n \in \omega\}]^\sim$. Observe que por definición de V^U, $\emptyset$ es un P-nombre, así que los siguientes también lo son: $x = \{(\emptyset, u_2), (\emptyset, u_3)\}$, $y = \{(x, u_2), (\emptyset, u_1)\}$ y $z = \{(y, u_1), (x, u_2), (\emptyset, u_2)\}$. Note que $rank(\emptyset) = 0$ y entonces, $rank(x) = 1$, $rank(y) = 2$ y $rank(z) = 3$. Supongamos, por un instante, que $G_1 = \{u_1\}$ y $G_2 = \{u_1, u_2\}$ son filtros genéricos observe que $x_{G_1} = \{(\emptyset, u_2), (\emptyset, u_3)\}_{G_1} = \emptyset$, $x_{G_2} = \{(\emptyset, u_2), (\emptyset, u_3)\}_{G_1} = \{\emptyset_G\} = \{\emptyset\}$, $y_{G_1} = \{(x, u_2), (\emptyset, u_1)\} = \{\emptyset\}$ y $y_{G_2} = \{x_{G_2}, \emptyset\}$.

Debido a que las valuaciones en G, varían dependiendo del filtro, hemos pedido que los preordenes tengan un máximo y que el máximo siempre se encuentre en los filtros que nos interesan; gracias a esto podremos dar nombres canónicos a los elementos de las extensiones genéricas con la siguiente definición.

Definición 5.3. Si $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1)$ es un copof y x es un conjunto, definimos por recursión sobre $\in$ a $\hat{x} = \{(\hat{y}, 1) : y \in x\}$.

Todos los incisos del siguiente lema son consecuencia de los nombres canónicos recientemente definidos; II y V son propiedades de interés en sí mismas, mientras que los otros incisos nos preparan para mostrar propiedades que comparten todas las extensiones genéricas, entre ellas, que éstas verifican al Axioma de Infinito.

Lema 5.4. *(ZF) Sean M un mtn*, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1)$ un copof y G un filtro P-genérico sobre M. Entonces son verdaderas las siguientes afirmaciones:*

I *Si x es un conjunto, entonces $\hat{x} \in V^P$.*

II V^P *es una clase propia.*

III $\forall x \in M(\hat{x} \in M^P \wedge \hat{x}_G = x)$.

IV $M \subseteq M[G]$.

V $G \in M[G]$

Demostración. I Debido a la definición de P-nombre, es inmediato (procediendo por $\in$-inducción).

II Por el inciso anterior, bastará con revisar que la aplicación $\hat{}: V \to V^P$ definida como $\hat{x} \in V^P$ para todo conjunto x, es inyectiva. Sean x, y conjuntos distintos entre sí, de nuevo procedamos por $\in$-inducción, supongamos que $\hat{}\restriction_{x \cup y}$ es inyectiva, sin pérdida de generalidad, existe $z \in x \setminus y$, entonces, por hipótesis de inducción, $(\hat{z}, 1) \notin \hat{y}$ y por lo tanto $\hat{y} \neq \hat{x}$.

III Sea $x \in M$, probemos $\hat{x} \in M^P \wedge \hat{x}_G = x$ por inducción sobre $\in$: como M es transitivo, si $x = \emptyset$, $\emptyset \in M$ y por definición $\hat{\emptyset} = \emptyset \in V_p$ y $\hat{\emptyset}_G = \emptyset$. Supongamos que $x \neq \emptyset$ y que para cada $y \in x$, $\hat{y} \in M^P$ y $\hat{y}_G = x$, entonces $\hat{x} = \{(\hat{y}, 1) : y \in x\}$ es un P-nombre por definición, además, por hipótesis de inducción y debido a que M es un modelo de ZFE* y $1 \in M$, $\hat{x} \in M$. Como hemos probado $\hat{x} \in V_P \cap M$, podemos evaluarlo en G, $\hat{x}_G = \{y_G : \exists g \in G((y, g) \in \hat{x})\} = \{\hat{y}_G : (\hat{y}, 1) \in \hat{x}\} = \{\hat{y} : y \in x\}$ por hipótesis de inducción $\{\hat{y} : y \in x\} = \{y : y \in x\}$, luego $\hat{x}_G = x$.

IV Sea $x \in M$, el inciso anterior muestra que $\hat{x} \in M^P$, por definición de $M[G]$, $\hat{x}_G \in M[G]$, esto junto con el resultado anterior implica que $x \in M[G]$.

V En general, cuando busquemos probar que algún conjunto es elemento de $M[G]$, buscaremos un nombre en M^P cuya valuación en G, sea igual al conjunto buscado: en este caso, considere $\Gamma = \{(\hat{p}, p) : p \in P\} \in V^P$, por un inciso anterior y ya que $P \in M$, y M es transitivo, tenemos que $\Gamma \in M^P$, luego $\Gamma_G \in M[G]$. Observe que $\Gamma_G = \{\hat{p}_G : \exists g \in G((p,g) \in \Gamma\} = \{\hat{g}_G : g \in G\}$, entonces, ya que $G \subset M$ y aplicando un inciso anterior, $\Gamma = G$.

□

Ya aseguramos que $G \in M[G]$, pero observe que si G también fuera elemento de M, entonces M sería el modelo que buscamos y no habría necesidad de hacer tal extensión genérica. Sin embargo, hay una condición que es fácil de comprobar en muchos preordenes de interés, que inhibe el que G sea elemento M y, por lo tanto, asegura que nuestra construcción no sea en vano. Para mostrarla presentamos el siguiente concepto.

Definición 5.5. Si $(P, \leqslant)$ es un copo, diremos que $p \in P$ es un *átomo* de P si y sólo si $\forall q, r \in P((q \leqslant p \wedge r \leqslant p) \to p \| q)$.

Lema 5.6. *Si* M *es un mtn,* $\mathbb{P} \in M$ *es un copof sin átomos y* G *es un filtro* P*-genérico sobre* M*, entonces* $G \notin M$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $G \in M$. Como $P \setminus G$ es absoluta para modelos de ZFE (utilizando tantas instancias como sean necesarias), entonces $D = P \setminus G \in M$. Observe que D es denso pues si $p \in P$, dado que p no es un átomo, existen $q, r \in P$ extensiones de p con $q \perp r$. Por esto último y porque G es un filtro, sin pérdida de generalidad, $q \notin G$. Luego, $q \in D$ y $q \leqslant p$. Pero por definición de D, tenemos $D \cap G = \emptyset$, lo cual contradice el que G sea un filtro P-genérico sobre M. □

Ejemplo 5.6.1. Si κ es un ordinal, entonces $\mathbb{C}_\kappa$ (la definición se encuentra en 5.1.1) no tiene átomos: sea $f \in Fn(\kappa \times \omega)$, hagamos $d = dom(f)$ y fijemos $n \in \omega \setminus d$, definamos $g : d \cup \{n\} \to 2$ y $h : d \cup \{n\} \to 2$ como $g\big|_d = f = h\big|_d$, $g(n) = 0$ y $h(n) = 1$. Es claro que tanto g como h extienden a f y sin embargo son incompatibles pues, por la definición de $g(n)$ y $h(n)$, ningún conjunto que las contenga puede ser una función.

Teorema 5.7. *(ZFE) Si* M *es un mtn**, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ *un copof y* G *es un filtro* P*-genérico sobre* M*. Entonces* $M[G]$ *modela al axioma de infinito.*

Demostración. Como M modela a ZFE*, el lema 4.27 asegura que $\omega \in M$, y como hemos probado que $M \subseteq M[G]$, $\omega \in M[G]$ y esto, por las condiciones vistas en 4.28, asegura que $M[G]$ modela al Axioma de Infinito. □

Directamente de la definición de las extensiones genéricas podremos mostrar que en ellas son verdaderos otros cuatro axiomas de ZFE. Hemos visto que el que una clase sea transitiva es conveniente para verificarlos, empecemos con ello:

Lema 5.8. *Si* M *es un mtn**, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1)$ *es un copof en* M *y* $G \subseteq P$ *es un* P*-filtro sobre* M. *Entonces* $M[G]$ *es transitiva.*

Demostración. Supongamos que $x \in M[G]$, entonces existe $\tau \in M^P$ tal que $x = \tau_G$; así que si $y \in x$, existen $\pi \in V_p$ y $g \in G$ tales que $(\pi, g) \in \tau$ y $y = \pi_G$, pero por definición de τ y porque M es transitiva, $\pi \in M^P$, luego $y \in M[G]$. □

Para tratar el Axioma del par, definimos a los siguientes operadores:

Definición 5.9. Sean M un mtn* y $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ un copof, si $\sigma, \tau \in M^P$, definimos $\mathrm{up}(\sigma, \tau) = \{(\sigma, 1), (\tau, 1)\} \in M^P$ y $\mathrm{op}(\sigma, \tau) = \mathrm{up}(\mathrm{up}(\sigma, \sigma), \mathrm{up}(\sigma, \tau)) \in M^P$. Observe que $\mathrm{up}(\sigma, \tau)_G = \{\sigma_G, \tau_G\}$ y $\mathrm{op}(\sigma, \tau)_G = (\sigma_G, \tau_G)$.

Teorema 5.10. *(ZFE) Si* M *es un mtn**, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ *es un copof y* G *es un filtro* P*-genérico sobre* M. *Entonces* $M[G]$ *modela a los axiomas de Extensión, Fundación, Par y Unión.*

Demostración.

I $M[G]$ es transitivo, por ello y por el lema 4.16, $M[G]$ modela al axioma de extensión.

II Observe que $M \cap V^P$ es numerable, por ello $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^P\}$ es numerable, luego $M[G]$ es un conjunto, entonces, como estamos suponiendo el axioma de fundación, $M[G] \in \mathrm{BF}$ (véase 4.42), y por ello satisface el Axioma de Fundación.

III Para mostrar que el axioma del par es verdadero en $M[G]$, tomemos $\sigma, \tau \in M^P$ arbitrarios, así $\sigma_G, \tau_G \in M[G]$. Dado que $\mathrm{up}(\sigma, \tau) \in M^P$, tenemos que $\mathrm{up}(\sigma, \tau)_G = \{\sigma_G, \tau_G\} \in M[G]$, esto y el lema 4.16, nos permiten concluir lo que buscábamos.

IV Sea $\tau \in M^P$, para asegurar que $M[G]$ modela al axioma de unión, bastará con encontrar $\sigma \in M^P$ tal que $\bigcup \tau_G \subseteq \sigma_G$. Aunque τ puede no ser una función, definimos al domino de τ, como $\mathrm{dom}(\tau) = \{\pi : \pi \text{ es un } P\text{-nombre} \wedge \exists p \in P((\pi, p) \in \tau\}$. Note que $\sigma = \bigcup \mathrm{dom}(\tau)$ es un P-nombre, como $\tau \in M$ y M es transitiva y modela al axioma de unión, $\sigma \in M$, así $\sigma_G \in M[G]$. Finalmente observe que si $x \in \bigcup \tau_G$, entonces $x \in \pi_G$ para algún $\pi \in \mathrm{dom}(\tau)$, como $\pi \subseteq \sigma$, por la definición de valuación en G, tenemos que $x \in \pi_G \subseteq \sigma_G$ y por lo tanto $\bigcup \tau_G \subseteq \sigma_G$.

□

5.2. Teoremas Fundamentales

Si, (como el griego afirma en el Cratilo)
el nombre es arquetipo de la cosa,
en las letras de rosa está la rosa
y todo el Nilo en la palabra Nilo.

— J.L. BORGES,«El Golem»

Para probar que $M[G]$ modela a los axiomas restantes, generaremos un vínculo entre los elementos en M^P (P-nombres) y las verdades en $M[G]$. Como ejemplo tomemos el forcing de Cohen; hemos notado que si G es un filtro genérico en él, entonces $f = \bigcup G$ es una función que tiene a ω como dominio y a 2 como rango, así si la condición $\{(0,1)\}$ es elemento de G, *forzaremos* que $f(0) = 1$. La próxima definición nos dará una manera de no sólo forzar en $M[G]$ verdades directamente relacionadas con G, sino que planteará una relación entre cualquier verdad en $M[G]$ con condiciones en el copof asociado.

Definición 5.11. Si M es un mtn*, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ es un copof, $p \in P$, $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es una fórmula de $\mathcal{L}_c$ y $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^P$. Considere a la relación R, definida como

$$(\pi_1, \pi_2) R (\tau_1, \tau_2) \text{ si y sólo si } \pi_i \in \mathrm{dom}(\tau_i),$$

para $\pi_i, \tau_i \in V^P$ e $i = 1, 2$. Definimos por recursión sobre R, a $p \Vdash^* \phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, de la siguiente manera:

I Si $\phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ es la fórmula $\tau_1 = \tau_2$, entonces $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ si se cumplen:

a) Para cada $(\pi, q) \in \tau_1$ el conjunto $\{r \in P : r \leqslant q \to \exists(\pi', q') \in \tau_2(r \leqslant q' \wedge r \Vdash^* \pi = \pi')\}$ es denso debajo de p.

b) Para cada $(\pi, q) \in \tau_2$ el conjunto $\{r \in P : r \leqslant q \to \exists(\pi', q') \in \tau_1(r \leqslant q' \wedge r \Vdash^* \pi = \pi')\}$ es denso debajo de p.

II Si $\phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ es la fórmula $\tau_1 \in \tau_2$, entonces $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ si el conjunto $\{q \in P : \exists(\pi, r) \in \tau_2(q \leqslant r \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \pi)\}$ es denso debajo de p.

III Si ϕ es la fórmula $\psi \wedge \varphi$ para algunas $\psi, \varphi \in \mathrm{Form}$, $p \Vdash^* (\psi \wedge \varphi)[\tau_1, \dots, \tau_n]$ si y sólo si $p \Vdash^* \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ y $p \Vdash^* \varphi[\tau_1, \dots, \tau_n]$.

IV Si $\phi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ es $\neg\psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, con $\psi \in \mathrm{Form}$, entonces $p \Vdash^* \neg\psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ si y sólo si $\forall q \in P(q \leqslant p \to \neg(q \Vdash^* \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]))$.

V Si $\psi \in \mathrm{Form}$, entonces $p \Vdash^* \exists x \psi[x, \tau_1, \dots, \tau_n]$ si y sólo si el conjunto $\{q \in P : \exists \pi(q \Vdash^* \psi[\pi, \tau_1, \dots, \tau_n])\}$ es denso debajo de p.

Observación. Será de utilidad tener en cuenta que $p \Vdash^* \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ es absoluta para M. Centrémonos tan sólo en I, pues los demás incisos se desprenden fácilmente de éste, y probémoslo por inducción sobre R: $(p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2)^M$ si y sólo si los incisos $a)$ y $b)$ son verdaderos relativizados a M, denotémoslo como $(a)^M$ y $(b)^M$. Note que en ellos sólo se utiliza la relación $\leqslant$, que por hipótesis es elemento de M, la relación $\in$ que por el lema 4.21 es absoluta para M, recuerde además, que hemos probado que la propiedad de ser P-nombre es absoluta para M, todo esto junto con el hecho de que $P \in M$, M es transitivo, modela a ZF y la hipótesis de inducción, implican que $(a)^M$ y $(b)^M$ si y sólo si $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$.

De la definición 5.11 se siguen las siguientes equivalencias.

Lema 5.12. *Si* $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1)$ *es un copof en* M, *un mtn**, $p \in P$, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula de* $\mathcal{L}_c$ *y* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$, *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I $p \Vdash^* \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$

II $\forall q \leqslant p(q \Vdash^* \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n])$

III $\{q \in P : q \Vdash^* \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]\}$ *es denso debajo de* p.

El teorema que sigue, nos permite concluir que, efectivamente, la noción de $\Vdash^*$ se comporta como una codificación de propiedades en $M[G]$ en una noción en M. Por ejemplo, observe nuestra definición de igualdad -inciso I de 5.11-, con ella tratamos de que exista $p \in G$ tal que $(p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2)^M$ si y sólo si $M[G] \vDash \tau_{1G} = \tau_{2G}$, la virtud de nuestra definición recursiva, es que si de alguna manera hemos codificado en $E = \{r \in P : r \leqslant p\}$, el que eso sea verdad para los elementos de τ_{1G} y de τ_{2G}, la mezcla entre algunas propiedades de los filtros genéricos, G, y la definición de $M[G]$, obligarán a que también para τ_{1G} y τ_{2G}, la verdad de $\tau_{1G} = \tau_{2G}$ esté codificada en p. Antes presentamos un lema que nos dará una relación importante entre los conjuntos densos de la definición de $\Vdash^*$ y los filtros genéricos.

Lema 5.13. *Si* M *es un mtn,* $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1)$ *es un copof en* M, G *es un filtro* P*-genérico sobre* M, $E \subseteq P$ *y* $E \in M$ *entonces se verifican las siguientes propiedades:*

I $G \cap E \neq \emptyset$, *o bien, existe* $g \in G$ *tal que para todo* $e \in E$, $(e \perp g)$.

II *Si* $g \in G$ *y* E *es denso debajo de* g, *entonces* $G \cap E \neq \emptyset$

Demostración. I Considere al conjunto $D = \{p \in P : \exists e \in E(p \leqslant e)\} \cup \{p \in P : \forall e \in E(e \perp p)\}$, veamos que es denso: sea $p \in P$, si suponemos que $\neg\forall e \in E(e \perp p)$, entonces existe $e \in E$ y $q \in P$ tales que $q \leqslant e$ y $q \leqslant p$, luego $q \in D$ y q extiende a p y por lo tanto nuestra afirmación es cierta. Ahora note que como M es transitivo, modela al axioma de comprensión, del par y $\leqslant, P \in M$, así $D \in M$, luego por la elección de G, existe $p \in G \cap D$. Si sucede que $p \in \{q \in P : \forall e \in E(e \perp q)\}$, hemos concluido, si no, existe $e \in E(p \leqslant e)$, y dado que $p \in G$, un filtro, $e \in G \cap E$.

II Sean $g \in G$ y E un denso debajo de g. Por el inciso anterior, bastará notar que $\neg\exists q \in G \forall e \in E(e \perp q)$; supongamos que $q \in G$, entonces existe $r \in G$ tal que $r \leqslant q$ y $r \leqslant g$, entonces, debido a que E es denso debajo de g, existe $e \in E$ tal que $e \leqslant r$, en particular tenemos que $e \| q$. Podemos concluir que $E \cap G \neq \emptyset$.

□

Teorema 5.14. *Sean* M *un mtn**, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ *un copof,* G *un filtro* P*-genérico sobre* M, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *una fórmula de* $\mathcal{L}_c$ *y* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$. *Entonces* $M[G] \vDash \phi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}]$ *si y sólo si existe* $g \in G$ *tal que* $M \vDash (g \Vdash^* \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n])$.

Demostración. La prueba la haremos por inducción sobre la complejidad de las fórmulas, y, dentro de cada inciso, haremos inducción sobre R, donde

$$(\pi_1, \pi_2) R (\tau_1, \tau_2) \text{ si y sólo si } \pi_i \in \mathrm{dom}(\tau_i),$$

para $\pi_i, \tau_i \in M^P$ e $i = 1, 2$. Recuerde que, por la observación hecha sobre la definición 5.11, es equivalente $M \vDash (g \Vdash^* \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n])$, a $g \Vdash^* \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$, así que para facilitar la escritura, a lo largo de la demostración muchas veces optaremos por la última.

I Para el primer caso tomemos $\phi(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1 = x_2$ y supongamos que para todo $\pi_1, \pi_2 \in M^P$ tales que $(\pi_1, \pi_2) R (\tau_1, \tau_2)$ la afirmación es verdadera, es decir, $\pi_{1G} = \pi_{2G}$ si y sólo si $\exists g' \in G(g' \Vdash x_1 = x_2[\pi_1, \pi_2])$.

a) Supongamos que $g \in G$ y $(g \Vdash^* \tau_1 = \tau_2)^M$ y mostremos que $(\tau_1 = \tau_2)^{M[G]}$, es decir que $\tau_{1G} = \tau_{2G}$. Verifiquémoslo por doble contención: supongamos que $x \in \tau_{1G}$, sabemos que existe $(\pi_1, g_1) \in \tau_1$ con $g_1 \in G$ tal que $x = \pi_{1G}$. Como $g, g_1 \in G$, existe $p \in G$ que extiende a g y a g_1. Por hipótesis, $g \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$, entonces, por la definición de $\Vdash^*$,el conjunto $E = \{q \in P : q \leqslant g_1 \to \exists(\pi_2, g_2) \in \tau_2(q \leqslant g_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$ es denso debajo de p (de lo contrario no sería denso debajo de g). Luego, por el lema 5.13, existe $q \in E \cap G$, tal que $q \leqslant p$, dado que $q \leqslant g_1$ y $q \in E$, existe $(\pi_2, g_2) \in \tau_2$ tal que $q \leqslant g_2$ y $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$. Entonces $(\pi_1, \pi_2) R (\tau_1, \tau_2)$ y por hipótesis de inducción, $\pi_{1G} = \pi_{2G}$; como $q \leqslant g_2$, $g_2 \in G$, así, por definición de τ_{2G}, tenemos que $\pi_{2G} \in \tau_{2G}$, entonces podemos concluir que $x = \pi_{1G} \in \tau_{2G}$. Como x fue arbitrario, tenemos que $\tau_{1G} \subseteq \tau_{2G}$. La otra contención es análoga.

b) Supongamos que $\tau_{1G} = \tau_{2G}$, buscamos $g \in G$ tal que $(g \Vdash^* \tau_1 = \tau_2)^M$, la idea será crear un denso en P, que sea elemento de M, de tal manera que un elemento en su intersección con G sea el g que necesitamos. Para ello se presta perfectamente nuestra definición de $\Vdash^*$: considere al conjunto $D = \{p \in P : p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2\} \cup \{p \in P : p \text{ satisface la propiedad i}\} \cup \{p \in P : p \text{ satisface la propiedad ii}\}$, donde:

i) $\exists(\pi_1, q_1) \in \tau_1[p \leqslant q_1 \wedge \forall(\pi_2, q_2) \in \tau_2 \forall q \in P((q \leqslant q_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \to q \perp p)]$.

ii) $\exists(\pi_2, q_2) \in \tau_2[p \leqslant q_2 \wedge \forall(\pi_1, q_1) \in \tau_1 \forall q \in P((q \leqslant q_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \to q \perp p)]$.

Primero, observe que el que P y $\leqslant$ sean elementos de M, M sea transitiva y $\Vdash^*$ sea absoluta para M, implican que $D \in M$. Ahora demostremos que el conjunto D es denso en P: sea $p \in P$, si $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ habríamos concluido, si esto no sucediera podemos suponer, sin pérdida de generalidad y por definición de $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$, que $\exists(\pi_1, q_1) \in \tau_1 \exists q \leqslant p \forall r[r \leqslant q \to (r \leqslant q_1 \wedge \forall(\pi_2, q_2) \in \tau_2(\neg r \leqslant q_2 \vee \neg(r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)))]$ de nuevo, sin pérdida de generalidad, tenemos que

$$\exists(\pi_1, q_1) \in \tau_1 \forall r[(r \leqslant p \wedge r \leqslant q_1) \to \\ \forall(\pi_2, q_2) \in \tau_2(\neg r \leqslant q_2 \vee \neg(r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2))](\star).$$

Supongamos que existen $(\pi_2, q_2) \in \tau_2$ y $q \in P$ tales que $q \leqslant q_2$, $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$, y supongamos por reducción al absurdo que existe $r \in P$ tal que $r \leqslant q$ y $r \leqslant p$, entonces, $r \leqslant q_2$ y, por definición de $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$, $r \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$, contradiciendo $\star$). Así que p satisface la propiedad i, luego D es denso en P.

Por lo anterior y porque G es un filtro P-genérico sobre M, existe $g \in E \cap G$. El que G sea un filtro junto con la hipótesis de que $\tau_{1G} = \tau_{2G}$ (por nuestra definición de $M[G]$) implicarán que g no puede satisfacer la propiedad i) ni la propiedad ii): supongamos por reducción al absurdo que g satisface i), es decir, supongamos que existe $(\pi_1, q_1) \in \tau_1$ tal que $g \leqslant q_1 \wedge \forall(\pi_2, q_2) \in \tau_2 \forall q \in P((q \leqslant q_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2) \to q \perp g)$. Como $g \in G$, sucede que $q_1 \in G$, entonces, por definición de τ_{1G}, $\pi_{1G} \in \tau_{1G}$; por hipótesis $\tau_{1G} = \tau_{2G}$, así que $\pi_{1G} \in \tau_{2G}$, por ello, existe $(\pi_2, q_2) \in \tau_2$ tal que $\pi_{2G} = \pi_{1G}$, lo que implica que $q_2 \in G$. Por otro lado, como $(\pi_1, \pi_2)R(\tau_1, \tau_2)$ y $\pi_{2G} = \pi_{1G}$, nuestra hipótesis de inducción asegura que existe $g' \in G$ tal que $g' \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$, dado que $g', q_2 \in G$, existe

$q \in G$ una extensión de ambos, entonces, $q \leqslant q_2$ y por el lema 5.12, $g' \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ implica $q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$, además, ya que $q, g \in G$, $q \| g$, esto es una contradicción, así que no es posible que g satisfaga i. Por un razonamiento muy similar, g no satisface ii. Como $g \in D$, por descarte, tenemos que $g \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$.

II Si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ es la fórmula $x_1 \in x_2$, supongamos que para todo $\pi_1, \pi_2 \in M^P$ tales que $(\pi_1, \pi_2)R(\tau_1, \tau_2)$ la afirmación es verdadera.

a) Si $g \in G$ y $M \vDash (g \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2)$, el conjunto $E = \{p \in P : \exists(\pi, r) \in \tau_2(p \leqslant r \wedge p \Vdash^* \tau_1 = \pi)\}$ es denso debajo de g. Por el lema 5.13, existe $p \in P$ tal que $p \leqslant g$ y $p \in E \cap G$, fijemos $(\pi, r) \in \tau_2$ tal que $p \leqslant r$ y $p \Vdash^* \tau_1 = \pi$. Ya que $p \in G$ y $p \Vdash^* \tau_1 = \pi$, el inciso I demuestra que $\tau_{1G} = \pi_G$, el que $g \leqslant r$, implica que $r \in G$, y como $(\pi, r) \in \tau_2$, tenemos que $\pi_G \in \tau_{2G}$, por lo tanto $\tau_{1G} \in \tau_{2G}$, es decir $M[G] \vDash x_1 \in x_2[\tau_1, \tau_2]$.

b) Por otro lado, si $\tau_{1G} \in \tau_{2G}$, por definición de τ_{2G}, existe $(\pi, q) \in \tau_2$, con $q \in G$ tal que $\pi_G = \tau_{1G}$, así, entonces, por el inciso anterior, existe $g' \in G$ tal que $g' \Vdash^* \tau_1 = \pi$. Sea $g \in G$ tal que $g \leqslant q$ y $g \leqslant g'$, entonces, $g \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ pues si $r \leqslant g$, $(\pi, q) \in \tau_2$, $r \leqslant q$ y, como $g' \Vdash^* \tau_1 = \pi$ y $r \leqslant g'$, por el lema 5.12, $r \Vdash^* \tau_1 = \pi$, entonces el conjunto $\{r \in P : \exists(\pi', q') \in \tau_2(r \leqslant q' \wedge r \Vdash^* \tau_1 = \pi')\}$ es denso debajo de g.

III Si ϕ es la fórmula $\psi \wedge \varphi$ y la afirmación es verdadera para ψ y φ. Existe $g \in G$ tal que $g \Vdash^* \psi \wedge \varphi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, si y sólo si (por definición de $\Vdash^*$) existe $g \in G$ tal que $g \Vdash^* \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ y $g \Vdash^* \varphi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ si y sólo si (por hipótesis inductiva) $M[G] \vDash \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$ y $M[G] \vDash \varphi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, si y sólo si $M[G] \vDash (\psi \wedge \varphi)[\tau_1, \dots, \tau_n]$.

IV Supongamos que ϕ es la fórmula $\neg\psi$ y la propiedad es verdadera para ψ.

a) Supongamos que existe $g \in G$ tal que $g \Vdash^* \neg\psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$. Supongamos por reducción al absurdo, que $M[G] \vDash \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, por hipótesis de inducción existe $q \in G$ tal que $q \Vdash^* \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, sea $p \in G$ tal que $p \leqslant g$ y $p \leqslant q$, por la última desigualdad y el lema anterior, $p \Vdash^* \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, pero $p \leqslant g$, contradiciendo la definición de $g \Vdash^* \neg\psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$. Luego, $M[G] \vDash \neg\psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$.

b) Para mostrar la recíproca, supongamos que $M[G] \vDash \neg\psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, sea $g \in G$, si existiera $p \leqslant g$ tal que $q \Vdash^* \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, por hipótesis de inducción, tendríamos que $M[G] \vDash \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, lo cuál es imposible. Así que para todo $p \leqslant g$ no sucede que $p \Vdash^* \psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$, lo cual, por el lema 5.12, equivale a $g \Vdash^* \neg\psi[\tau_1, \dots, \tau_n]$.

V Por último, supongamos que ϕ es la fórmula $\exists x\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$, donde ψ es una fórmula que satisface la hipótesis de inducción.

a) Si $g \in G$ y $g \Vdash^* (\exists x\psi)[x, \tau_1, \ldots, \tau_n]$, como el conjunto $\{q \in P : \exists\pi(q \Vdash^* \psi[\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n])\}$ es denso debajo de g, el lema 5.13 asegura que existen $g \in G$ y $\pi \in M^P$ tales que $g \Vdash^* \psi[\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n]$, entonces, por hipótesis, $M[G] \vDash \psi[\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n]$ y por lo tanto $M[G] \vDash \exists x\psi(x)[\tau_1, \ldots, \tau_n]$.

b) Si $M[G] \vDash \exists x\psi(x)[\tau_1, \ldots, \tau_n]$, existe $\pi \in M^P$ tal que

$$M[G] \vDash \psi[\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n],$$

por hipótesis, existe $g \in G$ tal que $g \Vdash^* \psi[\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n]$, entonces, por el lema 5.12, para todo $q \in P$, si $q \leqslant g$, $q \Vdash^* \psi[\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n]$, en particular el conjunto $\{q \in P : \exists\pi q \Vdash^* \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]\}$ es denso debajo de g, es decir, $g \Vdash^* \exists x\psi[x, \tau_1, \ldots, \tau_n]$.

□

De la siguiente definición, proviene el nombre de *forcing*.

Definición 5.15. Sean M un mtn*, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ un copof y ϕ un enunciado de $\mathcal{L}_c$. Si $p \in P$, diremos que p *fuerza a* ϕ y lo denotaremos como $p \Vdash \phi$ si ocurre que para cada filtro P-genérico sobre M, G, tal que $p \in G$, sucede que $M[G] \vDash \phi$.

La siguiente propiedad de $\Vdash$ la usaremos a menudo y se sigue directamente de la definición anterior.

Lema 5.16. *Sean* M *un mtn**, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ *un copof y* ϕ, ψ *enunciados de* $\mathcal{L}_c$. *Entonces, si* $p, q \in P$, $p \Vdash \phi$ *y* $q \leqslant p$, *sucede que* $q \Vdash \phi$.

Como se probará en el Teorema de Definibilidad (5.18), $\Vdash$ será casi equivalente a $\Vdash^*$, sin embargo, a menudo recurriremos a la primera porque, como mostrará un teorema complementario (el Teorema de Verdad), captura todo lo que buscábamos de la definición de $\Vdash^*$ y lo hace de una manera simplificada. La siguiente proposición será útil para probar el Teorema de Definibilidad.

Lema 5.17. *Si* M *es un mtn**, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$, *entonces para todo* $p \in P$ *existe* G, *un filtro* P*-genérico sobre* M, *tal que* $p \in G$.

Demostración. Sea $p \in P$, como M es numerable, $\mathfrak{D}$ la familia de densos de P que son elementos de M, puede ser numerada: $\mathfrak{D} = \{D_{n+1} : n \in \omega\}$. Definamos por recursión a una familia B como sigue: $p_0 = p$, supongamos que para algún $n \in \omega$ se tiene una colección $\{p_m : m \leqslant n\}$ con la propiedad de que: si $0 \leqslant m \leqslant l \leqslant n$, $p_m \in D_m$ y $p_l \leqslant p_m$. Como D_{n+1} es denso en P, existe $d \in D_{n+1}$ una extensión de p_n. Por construcción B es una base para filtro, luego $G = \{p \in P : \exists b \in B(b \leqslant p)\}$ es un filtro y es P-genérico sobre M pues $B \subseteq G$. □

Teorema 5.18 (Teorema de Definibilidad)**.** *Si* M *es un mtn** $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1)$ *es un copof en* M*,* $p \in P$*,* ϕ *es una fórmula de* $\mathcal{L}_c$ *y* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$ $(p \Vdash^* \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n])^M$ *si y sólo si* $p \Vdash \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$*.*

Demostración. Abreviaremos $\tau_1, \ldots, \tau_n$ con $\bar{\tau}$. El que $(p \Vdash^* \phi[\bar{\tau}])^M$ implica $p \Vdash \phi[\bar{\tau}]$ es una consecuencia inmediata del teorema 5.14.
Para la recíproca, supongamos que $p \Vdash \phi[\bar{\tau}]$, como $p \Vdash^* \phi[\bar{\tau}]$ es equivalente a que el conjunto $D = \{q \in P : q \Vdash^* \phi[\bar{\tau}]\}$ sea denso debajo de p (lema 5.12), probaremos esto último. Sea $q \leqslant p$, si sucediera que para todo $r \in P$, con $r \leqslant q$, $\neg r \Vdash^* \phi[\bar{\tau}]$, por definición de $\Vdash^*$, tendríamos que $q \Vdash^* \neg\phi[\bar{\tau}]$, entonces, por el teorema 5.14, $q \Vdash \neg\phi[\bar{\tau}]$, y ya que $q \leqslant p$, por definición de $\Vdash$, $p \Vdash \neg\phi[\bar{\tau}]$. Pero, por el lema 5.17, existe G, un filtro P-genérico sobre M tal que $p \in G$, lo que implica que $M[G] \vDash (\phi \wedge \neg\phi)[\bar{\tau}]$, como esto último es imposible, existe $r \leqslant q$ tal que $r \Vdash^* \phi[\bar{\tau}]$, y por ello D es denso debajo de p. □

Hemos observado que preferiremos $\Vdash$ por su simplicidad, otro beneficio que brinda el teorema anterior es que nos permite atraer todas las propiedades de $\Vdash$ (relacionadas con las propiedades de filtros) a $\Vdash^*$ y viceversa. El Teorema de Definibilidad merece ese nombre por la técnica que utilizaremos para probar propiedades en $M[G]$, utilizando nuestra notación usual, los nombres en M junto con $\Vdash$ reducirán la mayoría de las pruebas en $M[G]$ a ver que una propiedad análoga se cumple en M; lo que haremos, en general, será buscar cierto conjunto x en $M[G]$ que satisfaga una propiedad deseada, para ello, construiremos un P-nombre, digamos x', que fuerce las propiedades utilizando a $\Vdash$, el Teorema de Definibilidad junto con los axiomas que elijamos que cumple M, nos mostrarán que x' pertenece a M^P, es decir, que x' es *definible* en M, y por lo tanto su evaluación en G pertenecerá a $M[G]$, así si hemos utilizado $\Vdash$ con sabiduría, x'_G será el x que buscábamos. Después del Teorema de Verdad, veremos varios ejemplos de esta técnica, pues ya estaremos en condiciones de probar que las extensiones genéricas satisfacen los axiomas restantes.

Teorema 5.19. *(Teorema de Verdad) Si* M *es un mtn**, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1)$ *es un copof en* M*,* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *es una fórmula de* $\mathcal{L}_c$*,* $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$ *y* G *es un filtro* P*-genérico sobre* M*, entonces* $M[G] \vDash \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ *si y sólo si* $\exists g \in G(g \Vdash \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n])$*.*

Demostración. Por el teorema 5.14, $M[G] \vDash \phi[\bar{\tau}]$ si y sólo si $\exists g \in G(g \Vdash^* \phi[\bar{\tau}])^M$, y por el teorema de definibilidad (5.18) esto último equivale a $\exists g \in G(g \Vdash \phi[\bar{\tau}])$. □

Para facilitar la prueba de que las extensiones genéricas satisfacen al Axioma de Elección, presentamos el lema que sigue.

Lema 5.20. *El Axioma de Elección es verdadero si y sólo si*

$$\forall x \exists \alpha \in \mathrm{ORD} \exists f(f \text{ es una función} \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge x \subset \mathrm{ran}(f))$$

Demostración. Supongamos que el axioma de elección es verdadero, sea x un conjunto, por el axioma de elección existen f una función, y $\alpha \in \mathrm{ORD}$ tales que $f : \alpha \to x$ es una biyección. Para la recíproca, también es bien conocido que el Axioma de Elección es equivalente a que todo conjunto acepta un buen orden, así que concentrémonos en probar esto último: sea x un conjunto, y sean α y f como en la hipótesis, para cada $y \in x$, definamos $g(y) = \min f^{-1}[y]$. Definamos a la relación $\prec = \{(y, z) \in X \times X : g(y) \leqslant g(z)\}$ como $(\alpha, \leqslant)$ es un buen orden y g es una inyección, $(x, \prec)$ es un buen orden. $\square$

Teorema 5.21. *(ZFE) Sean* M *un mtn*,* $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ *un copof y* G *un filtro* P*-genérico sobre* M*.* $M[G]$ *modela a los axiomas de Comprensión, de Potencia, de Reemplazo y de Elección*[4]*.*

Demostración. I Probemos que el Axioma de Comprensión relativizado a $M[G]$ es verdadero: sea $\phi \in \mathrm{Form}$ una fórmula de $\mathcal{L}_c$, con no más de $n + 2$ variables libres, sean $\pi, \tau_1, \dots, \tau_n \in M^P$, en toda esta prueba abreviaremos como $\bar{\tau}$ a $\tau_1, \dots, \tau_n$ deseamos verificar que el conjunto $y = \{x \in \pi_G : (\phi(x, \pi, \bar{\tau}))^{M[G]}\}$ pertenece a $M[G]$. Considere $\rho = \{(\sigma, p) \in \mathrm{dom}(\pi) \times P : p \Vdash (\sigma \in \pi \wedge \phi[\sigma, \pi, \bar{\tau}])\}$, observe que por definición $\rho \in V^P$, y que por el lema de definibilidad, $\rho = \{(\sigma, p) \in \mathrm{dom}(\pi) \times P : (p \Vdash^* (\sigma \in \pi \wedge \phi[\sigma, \pi, \bar{\tau}]))^M\}$, debido a que M satisface el esquema de comprensión asociado a $p \Vdash^* (\sigma \in \pi \wedge \phi[\sigma, \pi, \bar{\tau}]$ (así lo elegimos), sucede que $\rho \in M$, así, $\rho \in M^P$ y por lo tanto $\rho_G \in M[G]$. Veamos que $\rho_G = y$: suponga que $\sigma_G \in \rho_G$, entonces existe $(\sigma, p) \in \mathrm{dom}(\pi) \times P$, con $p \in G$ tal que $p \Vdash \sigma \in \pi$ y $p \Vdash \phi[\sigma, \pi, \bar{\tau}]$, por definición de $\Vdash$ y ya que $p \in G$, implica que $\sigma_G \in \pi_G$ y que $(\phi[\sigma, \pi, \bar{\tau}])^{M[G]}$, luego $\sigma_G \in y$. Para la otra contención, supongamos que $x \in y$, como $x \in \pi_G$, existe $\sigma \in \mathrm{dom}(\pi)$ tal que $x = \sigma_G$, es decir, $\sigma_G \in \pi_G$, además $(\phi[\sigma, \pi, \bar{\tau}])^{M[G]}$, el teorema 5.19, implica que existe $q \in G$ tal que $q \Vdash (\sigma \in \pi \wedge \phi[\sigma, \pi, \bar{\tau}])$, luego $(\sigma, q) \in \rho$ y por lo tanto $x = \sigma_G \in \rho_G$. Por ello $y = \rho_G$ y así, $y \in M[G]$.

II Para mostrar que el Axioma de Elección es verdadero en $M[G]$, por lema anterior (5.20), equivale a probar que el enunciado

$$\forall x \exists \alpha \in \mathrm{ORD} \exists f (f \text{ es una función} \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge x \subset \mathrm{ran}(f))$$

es verdadero en $M[G]$. Por el teorema 5.10 y el inciso anterior, en $M[G]$ se verifican los axiomas de extensión, comprensión, del par y de unión, el lema 4.27 muestra que la fórmula anterior es absoluta para $M[G]$, así que si suponemos el Axioma de Elección, tenemos $M[G] \vDash \mathrm{AE}$.

[4]Propiamente, modelará sólo una cantidad finita de instancias de los axiomas de Comprensión y de Reemplazo, pero esas instancias las podremos elegir libremente a través de la elección de M.

III Demostremos que el Axioma de Potencia se verifica en $M[G]$: sea $\tau_G \in M[G]$, bastará con asegurar la existencia de algún $\sigma \in M^P$ tal que $\mathcal{P}(\tau_G) \cap M[G] \subseteq \sigma_G$. Para cada $\rho_G \subseteq \tau_G$, considere a $\rho' = \{(\pi, p) \in \mathrm{dom}(\tau) \times P : p \Vdash \pi \in \rho\}$, de que $\tau, P \in M^P$ y del teorema de definibilidad, se sigue que $\rho' \in M^P$, verifiquemos que $\rho_G = \rho'_G$: si $\pi_G \in \rho_G$, por el teorema 5.19, existe $g \in G(g \Vdash \pi \in \rho)$, y ya que $\rho_G \subseteq \tau_G$, sucede que $\pi \in \mathrm{dom}(\tau)$, por lo tanto $\pi_G \in \rho'_G$. Para verificar la otra contención, supongamos que $\pi_G \in \rho'_G$, por definición de ρ'_G, existe $g \in G$ tal que $(\pi, g) \in \rho$, luego $g \Vdash \pi \in \rho$, de nuevo, por el teorema de verdad, $\pi_G \in \rho_G$. Ahora considere a $s = \{\rho \in M^P : \mathrm{dom}(\rho) \subseteq \mathrm{dom}(\tau)\}$, observe que $\rho'_G \in s$, de entrada, como M^P podría ser una clase propia en M, no podemos utilizar el Axioma de Comprensión, para verificar que $s \in M$, pero observando que $s = (\mathcal{P}(\mathrm{dom}(\tau)) \times P)^M$, y que M verifica el Axioma de Potencia, tenemos $s \in M$. Proponemos $\sigma = s \times \{1\}$, por definición $\sigma \in M^P$ y por las observaciones anteriores $\mathcal{P}(\tau_G) \cap M[G] \subseteq \sigma_G$.

IV Para comprobar que el Axioma de Reemplazo es verdadero en $M[G]$, fijemos una fórmula $\phi(x, y, D, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}^{n+3}$ y $\delta, \tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$ tales que

$$(\forall x \in \delta \exists! y \phi(x, y, \delta, \bar{\tau}))^{M[G]}$$

buscamos $\rho \in M^P$ tal que

$$(\forall x \in \delta_G \exists y \in \rho_G \phi(x, y, \delta, \bar{\tau}))^{M[G]}$$

Observe que $r = \{y \in M[G] : \exists x \in \delta_G \phi(x, y, \delta, \bar{\tau})^{M[G]}\}$ es un candidato natural para ser ρ_G, para asegurar que $r \in M[G]$ necesitamos $\rho \in M^P$ tal que $\rho_G = r$; para guiarnos en nuestra construcción de ρ, notemos que si $\pi_G \in \delta_G$, por hipótesis, existe $\tau_G \in M[G]$ tal que $\phi^{M[G]}[\pi_G, \tau_G, \delta_G, \tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}]$, por el teorema de verdad, existe $g \in G$ tal que $g \Vdash (\pi \in \delta \wedge \phi[\pi, \tau, \delta, \bar{\tau}])$, podemos proponer que

$$\rho = \{(\tau, p) \in M^P \times P : \exists \pi \in \mathrm{dom}(\delta)(p \Vdash (\pi \in \delta \wedge \phi[\pi, \tau, \delta, \bar{\tau}]))\}$$

el problema con esta propuesta es que debido a que M^P podría no ser un elemento de M, no podemos asegurar que $\rho \in M$ y por lo tanto no sabemos si $\rho \in M^P$, pero note que si ρ fuera elemento de M^P, su valuación en G sería igual a r, luego, entonces para cada elemento en r hay algún P-nombre en ρ con los que lo representamos, pero quisiéramos restringirnos a un conjunto definible en M. Para sortear lo anterior, considere ψ, el enunciado que sigue: $\forall \mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \forall \delta, \tau_1, \ldots, \tau_n (\mathbb{P}$ es un copof $\wedge\, \delta, \bar{\tau} \in V^P \rightarrow \exists S(\forall y \in S(y \in V^P \wedge \forall \pi, \tau \in V^P \forall p \in P(\pi \in \mathrm{dom}(\delta) \wedge p \Vdash (\pi \in \delta \wedge \phi(\pi, \tau, \delta, \bar{\tau}) \rightarrow \exists \mu \in S p \Vdash^* (\pi \in \delta \wedge \phi(\pi, \mu, \delta, \bar{\tau})))))$ podremos probar que este enunciado es verdadero en M asegurando que S^M es un conjunto que contiene a suficientes representantes y que tiene la virtud de pertenecer a M. En efecto, para cada $(\pi, p) \in \mathrm{dom}(\delta) \times P$ definamos $\alpha(\pi, p)$ como sigue:

$$\alpha(\pi, p) = \begin{cases} \text{mín}\{\alpha : \exists \tau \in R(\alpha) \cap M^P \phi(\pi, \tau, \delta, \bar{\tau})\} & \text{si } \exists t \in M^P \phi(\pi, t, \delta, \bar{\tau}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como $\mathrm{Im} = \{\alpha(\pi, p) : (\pi, p) \in \mathrm{dom}(\delta) \times P\}$ es la imagen de $\mathrm{dom}(\delta) \times P$, como M satisface el axioma de Reemplazo y de Comprensión (las instancias que necesitamos para éste argümento), $\mathrm{Im} \in M$ y por lo tanto tiene un supremo α, así $S^M = R(\alpha) \cap M^P$ es como buscábamos. Observe que ψ^M asegura que para los $\delta, \phi, \bar{\tau}$ como en nuestra hipótesis, existe $Q \in M$ tal que $Q \subseteq M^P$ y es tal que $\forall \pi \in \delta \exists \mu \in Q p \Vdash (\pi \in \delta \wedge \phi(\pi, \mu, \delta, \bar{\tau}))$. Redefinamos

$$\rho = \{(\tau, p) \in Q \times P : \exists \pi \in \mathrm{dom}(\delta)(p \Vdash (\pi \in \delta \wedge \phi[\pi, \tau, \delta, \bar{\tau}]))\}$$

Dado que $Q, \tau, \mathbb{P} \in M$, M es transitivo y modela a ZF^*, se tiene que $\rho \in M$, además, por definición $\rho \in V^P$ y por las observaciones anteriores $\rho_G = r$.

$\square$

Teorema 5.22. *Si M un mtn de ZFE^*, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ un copof y G un filtro P-genérico sobre M, entonces $M[G]$ es un mtn de ZFE^*.*

Demostración. La numerabilidad de $M[G]$ se sigue de que M es numerable y de la definición de $M[G]$ (definición 5.2), la transitividad se probó en 5.8, y las pruebas de que modela cualquier lista finita de axiomas de ZFE que deseemos, están en 5.7, 5.10 y 5.21. $\square$

5.3. Consistencia de $\neg$HC

«Encountering specific matters, we understand the principles,
understanding the principles, we apply them in specific matters...»

— Venerable Maestro Hsu Yu

En esta sección podremos mostrar que la consistencia de ZFE implica la consistencia de $ZFE + \neg HC$. Recordando las observaciones que hicimos en el ejemplo 5.1.1, podremos mostrar que existe M un mtn* tal que $\mathbb{C}_\kappa \in M$ y por lo tanto asegurar que existe una extensión genérica $M[G]$ que modele a cualquier lista finita de ZFE y también podremos argumentar de manera sencilla que modela $\kappa \leqslant \mathcal{P}(\omega)$. Sin embargo, aunque pidamos que $(\kappa = \aleph_2)^M$ (o cualquier cardinal mayor), de resultados anteriores no será posible deducir que $(\kappa = \aleph_2)^{M[G]}$ y por lo tanto todavía no estamos en posibilidad de mostrar que en $M[G]$ se niega la Hipótesis del Continuo. Este comportamiento de la propiedad de «ser cardinal» es natural pues si

$(x \text{ es } \aleph_1)^M$, note que como M es numerable y la noción de ordinales es absoluta (véase 4.27) x no es más que un ordinal numerable (en V) y lo que sucede es que en M no existen inyecciones de x en algún ordinal anterior de M, como $M[G]$ es una extensión de M, en $M[G]$ bien podría existir una inyección con algún ordinal menor en $M[G]$ y, por ello, x no sería un cardinal para $M[G]$. Sin embargo, al igual que en las demostraciones de verdades en $M[G]$ que hemos hecho hasta ahora, podremos pedir condiciones a M para que los cardinales de M, también sean cardinales en $M[G]$.

Enlistamos algunas definiciones y propiedades cuya demostración se puede encontrar en cualquier introducción a Teoría de Conjuntos, por ejemplo en [Her14]:

Definición 5.23. Sea α un ordinal.

I Diremos que $\aleph_\alpha \geqslant \omega$ es un *cardinal sucesor* si y sólo si α es un ordinal sucesor. Si α es límite, entonces $\aleph_\alpha$ será un *cardinal límite*.

II Si $A \subseteq \alpha$ se dice que A es *cofinal* en α si para cada $\beta \in \alpha$, existe $\gamma \in A$ tal que $\beta \leqslant \gamma$.

III La *cofinalidad* de α, que se denota como $\mathrm{cof}(\alpha)$, es el mínimo del siguiente conjunto:

$$\{\beta \in \mathrm{ORD} : \exists f(\text{ f es una función} \wedge \mathrm{dom}(f) = \beta \wedge \mathrm{Im}(f) \text{ es cofinal en } \alpha\}$$

IV Diremos que α es *regular* si $\mathrm{cof}(\alpha) = \alpha$.

Lema 5.24. *Sea α un ordinal.*

I $\mathrm{cof}(\mathrm{cof}(\alpha)) = \mathrm{cof}(\alpha)$*, en particular,* $\mathrm{cof}(\alpha)$ *es regular.*

II *Si α es regular, entonces α es un cardinal.*

III *Todos los cardinales sucesores, son regulares.*

IV *Existe una función* $f : \mathrm{cof}(\alpha) \to \alpha$ *estrictamente creciente y tal que* $\mathrm{Im}(f)$ *es cofinal en α.*

V *Si* $\beta \in \mathrm{ORD}$ *y* $f : \alpha \to \beta$ *es una función estrictamente creciente y* $f[\alpha]$ *es cofinal en* β*, entonces* $\mathrm{cof}(\alpha) = \mathrm{cof}(\beta)$.

VI *Si α es regular y $\mathcal{F} \subseteq [\alpha]^{<\alpha}$ es tal que $|\mathcal{F}| < \alpha$, entonces $|\bigcup \mathcal{F}| < \alpha$.*

Definición 5.25. Si M un mtn*, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ un copof.

I Diremos que $\mathbb{P}$ preserva cardinalidades si para todo ordinal $\alpha \in M$, y para todo G, filtro P-genérico sobre M sucede que:

$$(\alpha \text{ es un cardinal})^M \leftrightarrow (\alpha \text{ es un cardinal})^{M[G]}$$

II Diremos que $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades si para todo ordinal $\alpha \in M$, y todo G, filtro P-genérico sobre M, existe un ordinal $\gamma \in M$ tal que:

$$(\mathtt{cof}(\alpha) = \gamma)^M \rightarrow (\mathtt{cof}(\alpha) = \gamma)^{M[G]}$$

En la definición anterior formalizamos la manera en que buscamos que se comporten los cardinales en nuestros modelos e introducimos un concepto análogo para cofinalidad pues bastará que se conserve ésta para que se preserven los cardinales.

Lema 5.26. *Si M un mtn*, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ un copof y $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades, entonces $\mathbb{P}$ preserva cardinalidades.*

Demostración. Sean $\alpha \in M$ un ordinal y G un filtro P-genérico sobre M. Por el lema 4.27 si $\alpha \in \omega \cup \{\omega\}$, la fórmula «$\alpha$ es un ordinal finito o $\alpha = \omega$.^{es} absoluta para $M, M[G]$. Supongamos que $\alpha > \omega$, observe que si $(\alpha$ no es un cardinal$)^M$, existen $\beta < \alpha$ y una función inyectiva $f : \alpha \to \beta$, tales que $\beta, f \in M$ (recuerde que la propiedad de ser función inyectiva y la propiedad de ser ordinal son absolutas para M), como $M \subseteq M[G]$, entonces $\beta, f \in M[G]$, y por ello $(\alpha$ no es un cardinal$)^{M[G]}$. Ahora mostremos que $(\alpha$ es un cardinal$)^M$ implica que $(\alpha$ es un cardinal$)^{M[G]}$: si $(\alpha$ es un cardinal sucesor$)^M$, entonces, por el lema 5.24, $(\mathtt{cof}(\alpha) = \alpha)^M$, entonces, por hipótesis $(\mathtt{cof}(\alpha) = \alpha)^{M[G]}$, luego, el mismo lema implica que $(\alpha$ es regular$)^{M[G]}$ y que, por lo tanto, $(\alpha$ es cardinal$)^{M[G]}$. Note que, por un razonamiento análogo al anterior, tenemos que si $\gamma \in M \cap \mathrm{ORD}$ y $(\gamma$ es regular$)^M$, entonces $(\gamma$ es cardinal$)^{M[G]}$. Resta probar el caso en el que $(\alpha$ es un cardinal límite$)^M$, es decir $(\exists\beta(\beta$ es un ordinal límite $\wedge\, \alpha = \aleph_\beta)^M$. Observe que (el conjunto de los cardinales regulares en α no es acotado$)^M$ pues, por el lema 5.24, $(\forall\gamma(\gamma \in \beta \rightarrow \aleph_{\gamma+1}$ es regular$)^M$, luego, como los ordinales regulares en M son cardinales en $M[G]$, (el conjunto de cardinales en α no es acotado$^M[G]$. Supongamos por reducción al absurdo que $(\exists\gamma \in \alpha(|\alpha| = \gamma))^{M[G]}$ luego, $(\forall\delta \in \alpha(\gamma < \delta < \alpha \rightarrow |\delta| = \gamma))^{M[G]}$, entonces $(\gamma$ es una cota de los cardinales en $\alpha)^{M[G]}$, hemos llegado a una contradicción, así que podemos concluir que tal γ no existe en $M[G]$ y por lo tanto $(\alpha$ es un cardinal$)^{M[G]}$. $\square$

En el ejemplo 1.7.12, recalcamos que para que la existencia de filtros genéricos de preordenes sea consistente con ZFE, es necesario que los preordenes satisfagan la cac, la intuición que nos muestra ese ejemplo, es que la condición de la cac hace suficientemente «estrecho» al preorden como para que un filtro que interseca a una amplísima cantidad de conjuntos, pueda existir. En este caso, también ocuparemos la condición de anticadena numerable y la intuición que la acompaña, sólo que aquí no la necesitaremos para la existencia de tales filtros (pues eso lo asegura la numerabilidad de los modelos base). Utilizando nuestra notación usual de M, P y G, recordemos que los elementos de cada conjunto en V^P están marcados por un elemento de P (véase la definición 5.2); el lema siguiente mostrará que si pedimos a esos nombres que sean suficientemente «estrechos» algunas funciones en $M[G]$ se podrán aproximar por funciones en M. A su vez, las funciones que podremos aproximar serán suficientes como para asegurar que se preserve la cofinalidad.

Lema 5.27. *Sean* M *un mtn**, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ *un copof. Si* $A, B \in M$, $f : A \to B$ *es una función* $f \in M[G]$ *y* ($\mathbb{P}$ *satisface la cac*)^M, *entonces existe* $F : A \to (\mathcal{P}(B))^M$ *una función, tal que* $F \in M$, *para todo* $a \in A$, $f(a) \in F(a)$ *y* $(|F(a)| \leqslant \omega)^M$.

Demostración. Como $f \in M[G]$, existe $\tau \in M^P$ tal que $f = \tau_G$, por ello, si $a \in A$. Definamos a la función $F : A \to B$ como $F(a) = \{b \in B : \exists p \in P(p \Vdash (\tau(\hat{a}) = \hat{b} \wedge \tau \text{ es una función})\}$ [5], para $a \in A$. Por el Teorema de Definibilidad (teorema 5.18) y ya que $B \in M$ y $F(a) \in M \cap P(B)$, si $a \in A$, por ello y debido a que $A \in M$, $F \in M$. Sea $a \in A$, verifiquemos que $f(a) \in F(a)$: recuerde que para cada $m \in M$, $\hat{m}_G = m$, por definición $f(a) \in B$, entonces debido a que $A, B \in M$ y éste último es transitivo, tenemos que $a, f(a) \in M$; luego, como $(\tau_G(a) = f(a))^{M[G]}$, existe $p \in P$ tal que $p \Vdash \tau(\hat{a}) = \widehat{f(a)}$, por lo tanto $f(a) \in F(a)$.
Para probar la otra propiedad de F, fijemos $a \in A$; por definición de $F(a)$, y porque M satisface el Axioma de Elección, existe una función $S : F(a) \to P$ con $S \in M$ tal que para cada $b \in F(a)$, $S(b) \Vdash (\tau(\hat{a}) = \hat{b}\tau \text{ es una función})$. Observe que como ($\mathbb{P}$ satisface la cac)^M, si logramos verificar que $\{S(b) : b \in F(a)\}$ es una anticadena de $\mathbb{P}$, entonces S sería inyectiva, $\{S(b) : b \in F(a)\}$ sería numerable (en M) y por lo tanto $F(a)$ también sería numerable (en M). Sean $b, b' \in F(a)$, supongamos que existe $p \in P$ una extensión de $S(b)$ y de $S(b')$, entonces $p \Vdash (\tau(\hat{a}) = \hat{b} \wedge \tau(\hat{a}) = \hat{b'} \wedge \tau \text{ es una función})$, fijemos H un filtro P-genérico sobre M tal que $p \in H$ (esto es posible por el lema 5.17), entonces, por el Teorema de Verdad, $\hat{b}_H = \hat{b'}_H$, es decir, $b = b'$. Luego, si $b, b' \in F(a)$ son distintos entre sí, $S(b) \perp S(b')$. Y por lo tanto $(|F(a)| \leqslant \omega)^M$. $\square$

Lema 5.28. $\mathrm{ORD} \cap M = \mathrm{ORD} \cap M[G]$.

Lema 5.29. *Sean* M *un mtn**, $\mathbb{P} = (P, \leqslant, 1) \in M$ *un copof, si* ($\mathbb{P}$ *satisface la cac*)^M *entonces* $\mathbb{P}$ *preserva cardinalidades.*

Demostración. Por el lema 5.26 bastará con mostrar que $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades.
Afirmación. $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades si para todo G, filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, y

[5]Observe que por el lema 4.27, $\tau(\hat{a})$ es absoluta para M, es absoluta para $M[G]$, entonces la evaluación de τ en $\hat{a}$ está definida para M.

todo $\kappa \in M$ tal que $(\kappa$ es regular$)^M$, sucede que $(\kappa$ es regular$)^{M[G]}$.
En efecto, supongamos que $\alpha \in M$ es un ordinal y que G e un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, como la propiedad der ser ordinal sucesor es absoluta para modelos como M y M[G] (véase 4.27), y todos los ordinales sucesores tienen cofinalidad 1, bastará considerar el caso en el que $(\alpha$ es un ordinal límite$)^M$: supongamos que $(\mathrm{cof}(\alpha) = \kappa)^M$, por el lema 5.24, existe $f \in M$ una función $(f : \kappa \to \alpha$ estrictamente creciente y tal que $f[\kappa]$ es cofinal en $\alpha)^M$, luego, como $f \in M[G]$ $(f : \kappa \to \alpha$ estrictamente creciente y tal que $f[\kappa]$ es cofinal en $\alpha)^{M[G]}$, por el lema 5.24, tenemos que $(\mathrm{cof}(\kappa) = \mathrm{cof}(\alpha))^M[G]$. Además, como $(\mathrm{cof}(\alpha)$ es regular$)^M$, nuestra hipótesis implica que $(\kappa$ es regular$)^{M[G]}$, luego $(\kappa = \mathrm{cof}(\kappa))^M[G]$ y por lo tanto $(\kappa = \mathrm{cof}(\alpha))^M[G]$.

Sea $\kappa \in M$, un ordinal, tal que $(\kappa$ es regular$)^M$ y sea G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Debido a que la definición de los cardinales finitos y ω son absolutas (véase 4.27), podemos suponer que $\kappa > \omega$. Por la afirmación anterior, para concluir nuestra prueba resta mostrar que $(\kappa$ es regular$)^{M[G]}$: por reducción al absurdo supongamos que $(\kappa$ no es regular$)^{M[G]}$, sean $\gamma, f \in M[G]$ un ordinal y una función, respectivamente, tales que $(\gamma < \kappa)^{M[G]}$, $f : \gamma \to \kappa$ y $f[\alpha]$ es cofinal en κ. Como $\mathrm{ORD} \cap M = \mathrm{ORD} \cap M[G]$, $\gamma \in M$, luego tenemos todas las condiciones para aplicar el lema 5.27; sea $F : \gamma \to (\mathcal{P}(\kappa))^M$ una función en M tal que para cada $\delta \in \gamma$, $f(\delta) \in F(\delta)$ y $(|F(\delta)| \leqslant \omega)^M$. Observe que $A = \{F(\delta) : \delta \in \gamma\} \in M$ y por lo tanto $B = \bigcup\{F(\delta) : \delta \in \gamma\} \in M$, además $(A \subseteq [\kappa]^{<\kappa})^M$ y, debido a que $\gamma < \kappa$, $|A| < \kappa$, entonces, ya que $(\kappa$ es regular$)^M$ el lema 5.24, muestra que

$$|B| < \kappa \tag{$\star$}$$

Por otro lado, como para cada $\delta \in \gamma$, $f(\delta) \in F(\delta)$, B es cofinal en κ y $B \in M$, tenemos $(\mathrm{cof}(\kappa) \leqslant \beta)^M$, esto y $(\star)$ implican que $(\kappa$ no es regular$)^M$. Esto último contradice nuestra hipótesis y por lo tanto $(\kappa$ es regular$)^{M[G]}$. □

Finalmente, estamos listos para probar la consistencia de la negación de la Hipótesis del Continuo.

Teorema 5.30. *Si* ZFE *es consistente, entonces* $\mathrm{ZFE} + \neg\mathrm{HC}$ *es consistente.*

Demostración. Debido a que la propiedad de consistencia se define como la negación de la propiedad de inconsitencia, bastará con mostrar que la inconsistencia en $\mathrm{ZFE} + \neg\mathrm{HC}$ implica la inconsistencia de ZFE. Supongamos que $\mathrm{ZFE} + \neg\mathrm{HC}$ es inconsistente, sea Λ es una lista finita de $\mathrm{ZFE} + \neg\mathrm{HC}$, y ϕ una fórmula de $\mathcal{L}_C$ tales que $\Lambda \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$ si $\Lambda \subset \mathrm{ZFE}$ habríamos concluido, veamos el caso en el que $\Lambda = \Gamma \cup \{\neg\mathrm{HC}\}$ con $\Gamma \subset \mathrm{ZFE}$. Observe que $\mathbb{C}_\kappa$ (su definición de encuentra en 5.1.1), sea ψ la fórmula que define a $\mathbb{C}_\kappa$ es un conjunto. Por el teorema 4.53, y por el teorema 5.22, sabemos que existen Γ' una lista finita de axiomas de ZFE[6] y M, un conjunto trasitivo y numerable que modela a $\Gamma' \cup \{\psi\} \cup \{\kappa = \aleph_2\}$ donde (y por ello $\mathbb{C}_{\aleph_2} \in M$), tales que, si G es un filtro $\mathbb{C}_{\aleph_2}$-genérico sobre M, entonces $M[G]$ modela a Γ y $G \in M[G]$. Por el lema 5.17, podemos fijar G un filtro $\mathbb{C}_{\aleph_2}$-genérico sobre M. Observe que el ejemplo 5.6.1, implica uqe $G \notin M$.

Utilizando la misma técnica que utilizamos en algunas aplicaciones del Axioma de Martin, por ejemplo en 1.7, $f_G := \bigcup G : \kappa \times \omega \to 2$ es una función, observe que $f_G \in M[G]$ (agregando el Axioma de la Unión a Γ, en caso de no aparezca originalmente). Definimos, para cada $\alpha \in \kappa$, a la función $f_{G\alpha} : \omega \to 2$ como $f_{G\alpha}(n) = f_G(\beta, n)$ para cada $n \in \omega$. Notemos que como $f \in M[G]$, para cada $\alpha \in \kappa$, $f_{G\alpha} \in M[G]$ y $f \in 2^{\omega}$[7]. Mostremos que si $\alpha < \beta < \kappa$, entonces $f_{G\alpha} \neq f_{G\beta}$: sean $\alpha, \beta \in \kappa$ distintos entre sí definamos $D_{\alpha,\beta} = \{g \in Fn(\kappa \times \omega, 2) : \exists n \in \omega(g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)\}$, $D_{\alpha,\beta}$ es denso en P pues si $h \in Fn(\kappa \times \omega, 2)$, como $dom(h)$ es finito, existe $n \in \omega \setminus \{m \in \omega : (\alpha, m) \in dom(h) \vee (\beta, m) \in dom(h)\}$, considere a $g = h \cup \{((\alpha, n), 0), ((\beta, n), 0)\}$, entonces $g \leqslant h$ y $g \in D_{\alpha,\beta}$. Además $D_{\alpha,\beta}$ es definible en M, así que existe $g \in D_{\alpha,\beta} \cap G$ y por ello $f_G(\alpha, n) \neq f_G(\beta, n)$, y podemos concluir que $f_{G\alpha} \neq f_{G\beta}$. Luego, la función $H : \kappa \to 2^{\omega}$ definida como $H(\alpha) = f_{G\alpha}$ es inyectiva y pertence a $M[G]$, por lo tanto $(\kappa \leqslant 2^{\omega})^{M[G]}$ (la noción de inyectividad es absoluta 4.27). Finalmente, recordando que la fórmula que define a ordinales finitos es absoluta para M, tenemos que $(2 \text{ es finito})^M$, el lema 1.4.1, muestra que $(\mathbb{C}_\kappa \text{ satisface la cac})^M$, entonces, por el lema 5.29 $(\kappa = \aleph_2)^{M[G]}$, podemos concluir que $(\neg HC)^{M[G]}$.

Como $M[G]$ es un conjunto y su existencia se dedujo de ZFE, tenemos que ZFE $\models$ $\exists M[G] \Vdash (\phi \wedge \neg\phi)$ y por lo tanto ZFE es inconsitente. $\square$

[6] Y que contiene todos los axiomas que utlizaremos en lo que resta de esta demostración.
[7] Por esta razón, a $f_{G\alpha}$ se le denomina «real de Cohen».

A APÉNDICE

Ejemplo A.0.1. El siguiente espacio nos muestra que la separabilidad no es productiva: si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de espacios topológicos Hausdorff con más de un elemento y κ es un cardinal infinito tal que para cada $i \in I$, $d(X_i) \leqslant \kappa$ y $|I| > 2^\kappa$, entonces la densidad de $\prod_{i\in I} X_i$ es estrictamente mayor que κ.

Demostración. Sea $D = \{d_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X = \prod_{i\in I} X_i$ ($|D| \leqslant \kappa$), y veamos por qué D no es denso en X.

Para cada $i \in I$ fijemos $x_i, y_i \in X_i$ y $U_i, V_i \in \tau(X_i)$ ajenos entre sí. Definamos a la función $f : I \longrightarrow 2^\kappa$ como:

$$f(i)(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_\alpha(i) \in U_i \\ 0 & \text{si } d_\alpha(i) \notin U_i \end{cases}$$

Como $|I| > 2^\kappa$, existen $i, j \in I$ distintos y tales que $f(i) = f(j)$; es decir para todo $d \in D$ $b(i) \in U_i$ y $b(j) \in U_j$ o bien, $b(i) \notin U_i$ y $b(j) \notin U_j$. Por ello, ningún $d \in D$ pertenece al abierto $\pi_i^{-1}(U_i) \bigcap \pi_j^{-1}(U_j)$, donde π_i y π_j son las proyecciones naturales. Por lo tanto D no es denso y $d(X) > \kappa$. □

Ejemplo A.0.2. Espacios de Mrowka Mostraremos que la separabilidad no implica a la propiedad de Lindelöf.

Demostración. Sea A una familia casi ajena maximal (estás existen por 2.1.1), un *espacio de Mrowka* será $X = A \cup \omega$ dotado con la topología generada por la base $B = \{\{a\} \cup a \setminus F : F \subset \omega \text{ es finito y } a \in A\} \cup P(\omega)\}$. Es inmediato que ω es denso, así que X es separable. Ahora observe que la cubierta abierta $U = \{\{a\} \cup \omega : a \in A\}$ no tiene subcubiertas numerables pues si $A' \subseteq A$ es numerable, dado que $\mathfrak{a} > \omega$ (véase 2.3), existe $a \in [\omega]^\omega$ tal que $a \cap a'$ es finito para toda $a' \in A'$, en particular $a' \notin A'$. Ya que A es maximal, $a \in A$, y por lo anterior, $a \notin \bigcup U$. Como U fue arbitraria entre las numerables, entonces X no es un espacio de Lindelöf. □

Ejemplo A.0.3. Asimismo, la propiedad de Lindelöf no implica a separabilidad. Sea X un conjunto no numerable y p un conjunto tal que $p \notin X$. Considere al conjunto $Y = X \cup \{p\}$ y a la colección $B = \{\{x\} : x \in X\} \cup \{\{p\} \cup U : U \subseteq X \wedge |X \setminus U| \leqslant \aleph_0\}$. Es sencillo verificar que B genera una topología τ de la cual es base y que Y dotado con la topología generada es un espacio Lindelöf pero no separable.

Bibliografía

[AT84] U. Abraham y S. Todorcevic. “Martin’s Axiom and first-countable S- and L-spaces”. En: *Handbook of Set-Theoretic Topology* (1984), págs. 327-346.

[Amo00] J.Alfredo Amor. “La Teoría de Conjuntos en el Siglo XX”. En: *Miscelánea Matemática* 31 (2000), págs. 1-27.

[Bab67] José Babini. *Historia de las Ideas Modernas en Matemática*. Unión Panamericana, 1967.

[Bal09] Sergio Atayan García Balán. *La técnica de Forcing y algunas aplicaciones*. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2009.

[Bri11] William Brito. *El Teorema de Categoría de Baire y Aplicaciones*. Consejo de Publicaciones de la Universidad de Los Andes, 2011.

[CT15] Fidel Casarrubias y Ángel Tamariz. *Elementos de Topología General*. 2.ª ed. Vol. 37. Textos. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2015.

[CR41] Richard Courant y Herbert Robbins. *¿Qué es la matemática?* Universidad de Oxford, 1941.

[Cri19] Emmanuel Alejandro Balderas Cristóbal. *Introducción al problema del S- y L-espacio*. Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2019.

[End01] Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. 2.ª ed. Harcourt/ Academic Press, 2001.

[Ett08] Patricio Salvador Jara Ettinger. *Aplicaciones del Axioma de Martin*. Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2008.

[HJ] A. Hajnal e I. Juhász. *On hereditarily α-Lindelöf and α-separable spaces, II*. URL: `http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm81/fm81114.pdf`.

[Hel12] Lorenz J. Helbsein. *Combinatorial Set Theory*. Springer, 2012.

[Her14] Fernando Hernández. *Teoría de Conjuntos*. 3.ª ed. Vol. 13. Textos. Aportaciones Matemáticas. Una introducción. Sociedad Matemática Mexicana, 2014.

[Her09] Rodrigo J. Hernández. *Producto de espacios topológicos con celularidad numerable:una aplicación a Teoría de Conjuntos a la Topología*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2009.

[Hil10] David Hilbert. *Fundamentos de las Matemáticas; selec. e introd. de Carlos Álvarez; pról. de Carlos Torres*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2010.

[Hof12] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle*. 1.ª ed. Tusquets Editores, 2012.

[Ivo] Carlos Ivorra. *Pruebas de Consistencia*. URL: `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm`.

[JW95] Winfried Just y Martin Weese. *Discovering Modern Set Theory I-II*. American Mathematical Society, 1995.

[KPHNV04] Editada por: Klass P. Hart, Jun iti Nagata y Jerri E. Vaughan. *Encyclopedia of General Topology*. Elsevier, 2004.

[Kun80] Kenneth Kunen. *Set Theory*. Elsevier Science Publisher B.V., 1980.

[Moo00] Justin Tatch Moore. "A solution to the L space problem". En: *American Mathematical Society* 19 (2000).

[Ort14] José Mauro Alejandro González Luna Ortiz. *Algunas aplicaciones del Axioma de Martin*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

[Ran02] Inder K. Rana. *An Introduction to Measure and Integration*. American Mathematical Society, 2002.

[Tka11] Vladimir V. Tkachuk. *A* C_p*-Theory Problem Book*. Springer, 2011.

[Tor00] C. Torres. "La Lógica Matemática en el Siglo XX". En: *Miscelánea Matemática* 61-103 (2000), págs. 1-27.

[Wei84] William Weiss. "Versions of Martin's Axiom". En: *Handbook of Set-Theoretic Topology* (1984), págs. 827-886.