UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una Introducción al Teorema de Dold-Kan y sus Aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Luis Alberto Macías Barrales

TUTOR

Dr. Frank Patrick Murphy Hernández

2019

1. Datos Alumno	1. Datos Alumno
Apellido paterno	Macías
Apellido Materno	Barrales
Nombres	Luis Alberto
Teléfono	57-54-01-36
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Número de Cuenta	312118936
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Doctor
Apellido Paterno	Murphy
Apellido Materno	Hernández
Nombres	Frank Patrick
3. Datos del sinodal	3. Datos del sinodal
Grado	Doctor
Apellido paterno	Prieto
Apellido materno	de Castro
Nombres	Carlos
4. Datos del sinodal	4. Datos del sinodal
Grado	Doctor
Apellido paterno	Antolín
Apellido materno	Camarena
Nombres	Omar
5. Datos del sinodal	5. Datos del sinodal
Grado	Doctor
Apellido paterno	Rincón
Apellido materno	Mejía
Nombres	Hugo Alberto
6. Datos del sinodal	6. Datos del sinodal
Grado	Maestro en ciencias
Apellido paterno	Turcio
Apellido materno	Cuevas
Nombres	Luis Jesus
7. Datos del trabajo escrito	7. Datos del trabajo escrito
Título	Una introduccin al teorema de Dold-Kan y sus aplicaciones
Número de Páginas	86
Año	2019

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi madre, Sara, por todo el cariño, el coraje y el valor con el que nos crío a mi y a mis hermanos.

Agradecimientos

El camino hacia la finalización de este proyecto ha sido largo. Muchas personas han estado involucradas, no solo en el proceso de esta tesis, sino a lo largo de mi formación académica, personal y profesional. Haré mi mejor intento por mencionarlas y agradecerles a todas.

Primero que nada, a mi madre, Sara, por haber confiado en mi todo este tiempo. A mis hermanos, Gis, Eliza y Jona, por el apoyo que me han dado. A mi familia en general.

A mis profesores, que influyeron en mi visión de las matemáticas. Sobre todo a mis tres grandes maestros, Frank, Jaime y Carlos, quienes me enseñaron todo lo que sé. Especialmente a Frank, por mostrarme de lo que soy capaz con este trabajo.

A mis amigos de siempre, en orden de aparición: Jaque, Daf, Christian, Laura y Azul. Por los buenos momentos, por las risas, por la buena música.

A mis amigos y compañeros de facultad, por las charlas, las risas, las discusiones que tanto me ayudaron a comprender mejor. Los enumero, en un orden aleatorio: Adri, Taba, Daysi, Lore, Luis, Emilio, Carlos, Alan, Lucy, Marco y Chuy. A Paty, por la libreta en la que escribí la mitad de esta tesis. A Zyan, por las tardes de café en las que avancé tanto.

Finalmente, a los sinodales que aportaron valiosos comentarios, los cuales hicieron de este el mejor trabajo posible: los doctores Carlos, Omar y Hugo y el maestro Luis Turcio.

Índice general

Introducción

Los conjuntos simpliciales (también llamados en la literatura complejos semi-simpliciales o complejos c.s.s) fueron introducidos por S. Eilenberg y J.A. Zilber, en un artículo conjunto publicado en 1949 ([**2**]). Este concepto es una generalización de los de complejos simpliciales geométricos y complejos simpliciales abstractos, los cuales fueron desarrollados para el estudio de la homología singular y simplicial de los espacios topológicos.

Dado un espacio topológico X, sus grupos de homología singular se definen de la siguiente manera: el conjunto de los n-simplejos singulares de X, $S_n(X)$, es el conjunto de funciones continuas $f : \Delta_n \to X$, donde Δ_n es el n-simplejo topológico estaándar.

El grupo de n-cadenas singulares de X, $S_*^n(X)$, es el grupo abeliano libre generado por sus $n-$simplejos singulares. Dado que cada una de las caras del n-simplejo (topológico) estantar es homeomorfo al $(n-1)$-simplejo estándar, la restricción en la $i-$ésima cara de Δ_n induce una función $\delta_i^n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$.

Así se induce un morfismo de grupos $\partial_n : S_*^n(X) \to S_*^{n-1}(X)$, el cual está definido en la base como $\partial_n(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^n \delta_j^n(x)$. Este morfismo hace de $S_*(X) = \{\partial_n : S_*^n(X) \to S_*^{n-1}(X)\}$ un complejo de cadenas. Entonces, se define el n-ésimo grupo de homología singular de X como el grupo de homología en grado n de este complejo de cadena.

Resulta que $S(X) = \{S_n(X)\}$ y $S_*(X) = \{S_*^n(X)\}$ son, respetivamente, un conjunto simplicial y un grupo abeliano simplicial. Estas asignaciones son funtoriales, por lo que forman invariantes para los espacios topológicos. El funtor complejo singular S, es de suma importancia pues además establece una relación entre la teoría de homotopía de espacios topológicos y la teoría de homotopía de los conjuntos simpliciales.

El objetivo de este trabajo es presentar una demostración a detalle del Teorema de Dold-Kan, así como algunas de sus aplicaciones. Este teorema establece una equivalencia entre las categorías de grupos abelianos simpliciales y la categoría de complejos de cadenas positivos (es decir, aquellos que son triviales en grados menores que 0). El teorema de Dold-Kan fue presentado por A. Dold y D. Kan en 1958, en artículos separados ([**1**] y [**5**]).

En su artículo, Kan presenta una forma general para construir funtores adjuntos entre una categoría arbitraria **C**, con la condición de que tenga límites directos, y la categoría de conjuntos simpliciales. Entonces construye la ahora llamada equivalencia de Dold-Kan de esta forma, al notar que la categoría de grupos abelianos y la de complejos de cadenas tienen límites directos. Por otra parte, Dold presenta una versión más general de este teorema, la cual involucra módulos sobre un anillo unitario R.

En este trabajo se utilizan los funtores M y $N : \mathbf{sAb} \to \mathbf{CC}_+$, llamados complejo de Moore y complejo normalizador, respectivamente, y cuya regla de correspondencia es $M(A)_n = A_n$, para toda $n \geq 0$ y cuya diferencial está dada por $\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \delta_i^n$, donde δ_i^n son los operadores de cara que se definen en el captulo 1. La regla de correspondencia de N está dada por $N(A)_n = \cap_{i=0}^{n-1} nuc(\delta_i^n)$ y su diferencial por $\partial_n = (-1)^n \delta_n^n$. Así $N(A)$ es un subcomplejo de cadenas de $M(A)$, además son homotópicamente equivalalentes de manera natural.

Como todo grupo simplicial es a su vez un complejo de Kan (capítulo 2), se pueden calcular sus grupos de homotopía. Estos grupos de homotopía resultan, bajo la equivalencia de Dold-Kan, isomorfos a los grupos de homología de su complejo normalizador y, por lo tanto, de su complejo de Moore.

En este trabajo se introducirán todos los conceptos necesarios para entender la equivalencia de Dold-Kan y algunas de sus aplicaciones.

El primer capítulo se iniciará con una motivación del concepto de complejo simplicial geométrico (y abstracto) para después introducir la categoría de conjuntos simpliciales y varios ejemplos.

En el capítulo 2 se dará la definición de complejo de Kan, cuyos principales ejemplos son el complejo singular de un espacio topológico y los grupos simpliciales. Además se introducirá la teoría de homotopía de los complejos de Kan y se demostrarán sus principales propiedades.

En el tercer capítulo se hará un repaso breve de los conceptos de complejos de cadena, complejos de cadena positivos, grupos de homología y homotopía de cadenas.

En el capítulo 4, se definirán los complejos de Moore y normalizador de un grupo abeliano simplicial, para después demostrar que son homotópicamente equivalentes. Después se construirán el funtor $\Gamma : \mathbf{CC}_+ \to \mathbf{sAb}$ así como los isomorfismos naturales $\Phi : \Gamma N \to 1_{\mathbf{sAb}}$ y $\Psi : 1_{\mathbf{CC}_+} \to N\Gamma$.

El capítulo 5 inicia con el planteamiento del problema de los espacios de Eilenberg-Mac Lane y se utilizará le equivalencia de Dold-Kan para resolverlo en conjuntos simpliciales. Después se hablará, sin profundizar mucho, de la realización geométrica de un conjunto simplicial y su implicacíon en la existencia de los complejos de Eilenberg-Mac Lane.

Preliminares

Durante este trabajo, las categorías de conjuntos y funciones, de espacios topológicos y funciones continuas, de grupos y morfismos de grupo y de grupos abelianos y morfismos de grupos, se denotarán, respectivamente, por: **Set**, **Top**, **Grp** y **Ab**.

Para todo espacio topológico X, su topología será τ_X y no se hará énfasis en ella.

El conjunto de números naturales incluye al 0. Los números naturales sin el 0 se denotarán por $\mathbb{N}^+$.

Capítulo 1

Conjuntos Simpliciales

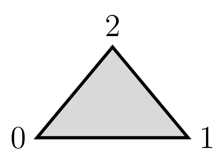
1. Complejos simpliciales geométricos y abstractos

Uno de los conceptos más importantes para la Topología algebraica es el de *complejo simplicial*, pues estos funcionan como modelos combinatorios para aquellos espacios "*buenos*"que suelen estudiar los topólogos algebraicos.

Definición 1.1. *Un* n-simplejo *geométrico es la envolvente convexa generada por un conjunto de* $n+1$ *vectores* $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ *que son* afinmente *independientes (véase apéndice A). Al conjunto de vectores* $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ *se le llama conjunto de* vértices *del simplejo. Una* k-cara *de un* n*-simplejo determinado por* $\{v_0, \ldots, v_n\}$ *es la envolvente convexa generada por algún subconjunto de cardinalidad* $k+1$ *de esta lista de vectores.*

Ejemplo 1.1. *El* 0*-simplejo,* $[(1)]$ *consta de un solo punto.*
El 1*-simplejo* $[(1,0),(0,1)]$*, en* $\mathbb{R}^2$ *es el segmento de recta que une* $(1,0)$ *con* $(0,1)$*.*
El 2*-simplejo en* $\mathbb{R}^3$*,* $[(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$*, es un triángulo con vértices en el conjunto* $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$*.*

1−simplejo



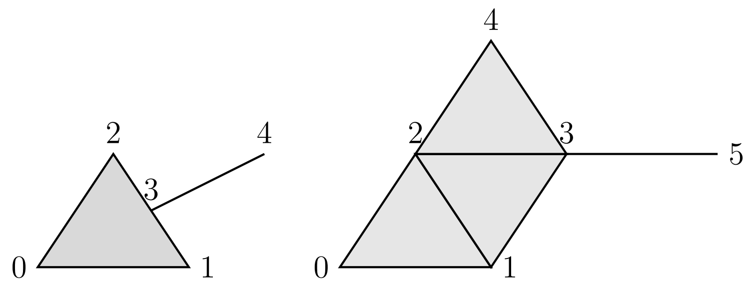
2−simplejo

Del ejemplo anterior se puede observar que, en general, los simplejos son generalizaciones de triángulos para dimensiones altas. Los complejos simpliciales por lo tanto serán "*espacios triangulados*".

Definición 1.2. *Un complejo simplicial geométrico* X *consiste en una colección de* $n-$*simplejos en* $\mathbb{R}^{m+1}$ *(con* $m = \infty$ *posiblemente) tales que:*

1. *Si* σ *es un simplejo de* X*, entonces todas las caras de* σ *son simplejos de* X*.*

2. *Si σ y σ' son simplejos de X, entonces estos se intersecan solo si se intersecan en una cara.*



En la imagen anterior, el conjunto de la izquiera no es un complejo simplicial, pues hay un par de simplejos que no se intersecan en una cara. Por otro lado, el conjunto de la derecha sí representa un complejo simplicial.

Ejemplo 1.2. *Considérese de nuevo el ejemplo 1. Sea $B = \{e_0, \ldots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, la base canónica. Obsérvese que todo subconjunto no vacío de B es un conjunto afinmente independiente, entonces si $\overline{B}$ es el conjunto de los k-simplejos generados por cada uno de estos conjuntos, $\overline{B}$ es un complejo simplicial.*

Notación 1.1. *El $n-$simplejo del ejemplo anterior es llamado* n-simplejo topológico estándar *y se le denota por Δ_n.*
La k-ésima cara del n-simplejo estándar es la $n-1$ cara opuesta al k-ésimo vértice. Como realmente no causa confusión, se denotará por Δ_n tanto al n-simplejo estándar como al complejo simplicial cuyos simplejos son las caras de Δ_n.

Es importante observar que para toda $n \in \mathbb{N}$, Δ_n tiene $n+2$ encajes en Δ_{n+1}, uno en cada cara.

Definición 1.3. *Sea X un complejo simplicial, se denota por X_0 a la colección de vértices de todos los simplejos en X.*

Definición 1.4. *Un morfismo de complejos simpliciales geométricos $f : X \to Y$ consta de una función $\overline{f} : X_0 \to Y_0$ tal que para cada colección de vértices, $\tau = \{v_0, \ldots, v_n\} \subseteq X_0$, de un n-simplejo, $f_0(\tau)$ son los vértices de un m-simplejo en Y.*

La composición de morfismos de conjuntos simpliciales geométricos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ es simplemente componer $\overline{f} : X_0 \to Y_0$ con $\overline{g} : Y_0 \to Z_0$.

Ejemplo 1.3. *De los ejemplos más importantes de morfismos son los operadores de cocara $d_n^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ y de codegeneración $s_n^i : \Delta_n \to \Delta_{n-1}$.*
En este caso $(\Delta_n)_0$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, se definen $\overline{d}_n^i : (\Delta_{n-1})_0 \to (\Delta_n)_0$ y

$\overline{s}_n^i : (\Delta_n)_0 \to (\Delta_{n-1})_0$ *dadas por*

$$\overline{d}_n^i(e_j) = \begin{cases} e_j, & si\ 0 \leq j < i \\ e_{j+1}, & si\ i \leq j \end{cases}$$

Y

$$\overline{s}_n^i(e_j) = \begin{cases} e_j, & si\ 0 \leq j \leq i \\ e_{j-1}, & si\ i < j \end{cases}$$

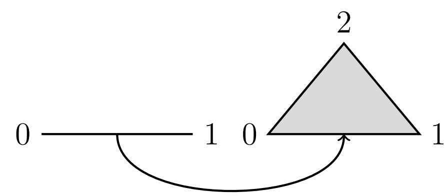


Ilustración del operador de cara.

Estos morfismos (y sus generalizaciones a conjuntos simpliciales) son de gran importancia pues tienen muchas propiedades, entre ellas la siguiente.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sean* $d_n^i : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$ *y* $s_n^i : \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n-1}$ *los morfismos definidos anteriormente. Estos cumplen las siguientes identidades:*

1. $d_{n+1}^j d_n^i = d_{n+1}^i d_n^{j-1}$, *si* $i < j$.
2. $s_n^j s_{n+1}^i = s_n^i s_{n+1}^{j+1}$, *si* $i \leq j$.
3. $s_n^j d_n^i = d_{n-1}^i s_{n-1}^{j-1}$ *si* $i < j$
4. $s_n^j d_n^j = 1_\Delta = s_n^{j+1} d_n^j$
5. $s_n^j d_n^i = d_{n-1}^{i-1} s_{n-1}^j$, *si* $j < i$

DEMOSTRACIÓN. La prueba de esta proposición es de carácter combinatorio

1. Supóngase que $i < j$.
   Si $k < i < j$, entonces $\overline{d}_{n+1}^j \overline{d}_n^i(e_k) = \overline{d}_{n+1}^j(e_k) = e_k$, De igual manera $\overline{d}_{n+1}^i \overline{d}_n^{j-1}(e_k) = e_k$.
   Si $i \leq k < j-1$, entonces $\overline{d}_{n+1}^j \overline{d}_n^i(e_k) = \overline{d}_{n+1}^j(e_{k+1}) = e_{k+1}$. Por otro lado $\overline{d}_{n+1}^i \overline{d}_n^{j-1}(e_k) = e_{k+1}$.
   Por último si $i \leq j-1 \leq k$, $\overline{d}_{n+1}^j \overline{d}_i^n(e_k) = \overline{d}_{n+1}^j(e_{k+1}) = e_{k+2}$. Por otro lado $\overline{d}_{n+1}^i \overline{d}_n^{j-1}(e_k) = e_{k+2}$.
2. Supóngase que $i < j$.
   Si $k \leq i < j$, $\overline{s}_n^j \overline{s}_{n+1}^i(e_k) = \overline{s}_{n+1}^j(e_k) = e_k$ y también $\overline{s}_n^i \overline{s}_{n+1}^{j+1}(e_k) = \overline{s}_{n+1}^{j+1}(e_k) = e_k$.
   Si $i < k \leq j+1$, $\overline{s}_n^j \overline{s}_{n+1}^i(e_k) = \overline{s}_{n+1}^j(e_{k-1}) = e_{k-1}$. Del lado derecho se tiene $\overline{s}_n^i \overline{s}_{n+1}^{j+1}(e_k) = \overline{s}_{n+1}^i(e_k) = e_{k-1}$.

Si $j+1<k$, $\overline{s}^j_n\overline{s}^i_{n+1}(e_k)=\overline{s}^j_{n+1}(e_{k-1})=e_{k-2}$, por el otro lado $\overline{s}^i_n\overline{s}^{j+1}_{n+1}(e_k)=\overline{s}^i_{n+1}(e_{k-1})=e_{k-2}$

3. Supóngase $i<j$.
   Si $k<i$, entonces $\overline{s}^j_n\overline{d}^i_n(e_k)=\overline{s}^j_n(e_k)=e_k$. De la misma manera $\overline{d}^i_{n-1}\overline{s}^{j-1}_{n-1}(e_k)=e_k$.
   Si $i\leq k<j-1$, entonces $\overline{s}^j_n\overline{d}^i_n(e_k)=\overline{s}^j_n(e_{k+1})=e_{k+1}$. Por otro lado $\overline{d}^i_{n-1}\overline{s}^{n-1}_{j-1}(e_k)=e_{k+1}$.
   Y si $j-1\leq k$ $\overline{s}^j_n\overline{d}^i_n(e_k)=\overline{s}^j_n(e_{k+1})=e_k$. Del otro lado $\overline{d}^i_{n-1}\overline{s}^{j-1}_{n-1}(e_k)=e_k$.
4. Para esta prueba bastan dos casos:
   Si $k<j$, entonces $\overline{s}^j_n\overline{d}^j_n(e_k)=\overline{s}^j_n(e_k)=e_k$.
   Si $j<k$, entonces $\overline{s}^j_n\overline{d}^j_n(e_k)=\overline{s}^j_n(e_{k+1})=e_k$.
   De igual manera $\overline{s}^{j+1}_n\overline{d}^j_n(e_k)=e_k$, para cualquier k.
5. Supóngase $j<i$.
   Si $k\leq j$, entonces $\overline{s}^j_n\overline{d}^i_n(e_k)=\overline{s}^j_n(e_k)=e_k$. Del mismo modo $\overline{d}^{i-1}_{n-1}\overline{s}^j_{n-1}(e_k)=e_k$.
   Si $j<k<i-1$, $\overline{s}^j_n\overline{d}^i_n(e_k)=\overline{s}^j_n(e_k)=e_{k-1}$. Del lado derecho $\overline{d}^{i-1}_{n-1}\overline{s}^j_{n-1}(e_k)=e_{k-1}$.
   Para $k=i-1$, $\overline{s}^j_n\overline{d}^i_n(e_{i-1})=\overline{s}^j_n(e_{i-1})=e_{i-2}$. También $\overline{d}^{i-1}_{n-1}\overline{s}^j_{n-1}(e_{i-1})=\overline{d}^{i-1}_{n-1}(e_{i-2})=e_{i-2}$. Finalmente, si $i\leq k$, $\overline{s}^j_n\overline{d}^i_n(e_k)=\overline{s}^j_n(e_{k+1})=e_k$. Igualmente $\overline{d}^{i-1}_{n-1}\overline{s}^j_{n-1}(e_k)=e_k$.

■

NOTACIÓN 1.2. *La categoría de complejos simpliciales geométricos se denota por* **CSG**.

Se puede pensar un complejo simplicial geométrico X bien como una colección de simplejos, pegados por sus caras comunes, o bien como un espacio topológico, al considerar a $X^*=\bigcup X$ como subespacio de $\mathbb{R}^m$. Más aún, los morfismos de complejos simpliciales se pueden interpretar como funciones continuas gracias al lema del pegado para conjuntos cerrados.

DEFINICIÓN 1.5. *El espacio topológico $X^*=\bigcup X$ se le llama espacio subyacente del complejo simplicial X.*

La información importante que se puede obtener de un complejo simplicial es su imformación geométrica y combinatoria. Esta última está codificada, principalmente, en su colección de vértices.

Sea $A(X)$ la colección de subconjuntos $\sigma\subseteq X_0$ tales que σ genera un n-simplejo τ de X, para alguna $n\in\mathbb{N}$.

$A(X)$ contiene la información combinatoria de como se relacionan los simplejos de X con sus vértices, aristas y en general, las caras de diferentes dimensiones.

Esto lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.6. *Un* complejo simplicial abstracto X *es una colección de conjuntos finitos y no vacíos tales que si* $\sigma \in X$ *y* $\tau \subseteq \sigma$, $\tau \neq \emptyset$, *entonces* $\tau \in X$.

A los elementos de X *se les llaman simplejos.*

Los siguientes son ejemplos de complejos simpliciales abstractos.

EJEMPLO 1.4. *Dado un complejo simplicial geométrico* X, $A(X)$ *es un complejo simplicial abstracto, ya que si* $\sigma \in A(X)$, *entonces para todo* $\tau \subseteq \sigma$, $\tau \neq \emptyset$, τ *genera una de las caras del* n*-simplejo que genera* σ.

EJEMPLO 1.5. *Sea* $(P, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado. Se define* $X = \{\{p_0, \ldots, p_k\} \subseteq P : p_0 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_k\}\}$

EJEMPLO 1.6. *Sea* G *una gráfica. Se define* X *como el conjunto de conjuntos finitos de vértices de* G *tales forman una subgráfica conexa de* G.

DEFINICIÓN 1.7. *Sea* X *un complejo simplicial abstracto:*

1. *Se define* $X_0 = \bigcup X$ *y se le llama conjunto de vértices de* X.
2. *Para* $n > 0$, *se define* $X_n = \{\sigma \in X : card(\sigma) = n+1\}$ *y se le llama conjunto de* n*-simplejos.*

DEFINICIÓN 1.8. *Un morfismo de complejos simpliciales abstractos* $f : X \to Y$ *consta de una función* $f : X_0 \to Y_0$ *tal que para todo* $\sigma \in X$, $f(\sigma) \in Y$.

La composición de dos morfismos de conjuntos simpliciales abstractos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, consiste en componer $f : X_0 \to Y_0$ con $g : Y_0 \to Z_0$.

NOTACIÓN 1.3. *La categoría de complejos simpliciales abstractos se denota por* **CSA**.

Dado un morfismo de conjuntos simpliciales geométricos $f : X \to Y$, es posible construír un morfismo de conjuntos simpliciales abstractos $A(f) : A(X) \to A(Y)$. Obsérvese primero que $A(X)_0 = X_0$. Basta con definir $A(f) : A(X)_0 \to A(Y)_0$, por la observación anterior, es claro que $A(f) = \overline{f}$ sirve.

Sea $\sigma \in A(X)$. Como $\overline{f}(\sigma)$ son los vértices de un n-simplejo en Y, entonces $A(f)(\sigma) \in A(Y)$.

PROPOSICIÓN 1.2. *A es un funtor de* **CSG** *en* **CSA**.

DEMOSTRACIÓN. $A(1_X) = 1_{A(X)}$ pues $A(1_X)_0 = (1_X)_0 = 1_{X_0} = 1_{A(X)_0}$.

Ahora, sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, morfismos en **CSG**, entonces $A(gf)^* = \overline{gf} = \overline{g}\,\overline{f} = A(g)^* A(f)^*$. Por lo que $A(gf) = A(g)A(f)$. ■

De manera recíproca, dado un complejo simplicial abstracto X, también es posible construír complejo simplicial geométrico $G(X)$. Primero se le da un orden total a X_0. De esta manera, si σ y σ' son simplejos de X tales que $\tau \subseteq \sigma$, entonces la inclusión, $i_{\tau,\sigma} : \tau \to \sigma$, respeta el orden.

Ahora, para un simplejo $\sigma = \{x_0, \dots x_n\}$ a cada x_j se le asocia $e_{j+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ y a σ se le asocia $A_\sigma = \Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, el n-simplejo topológico estándar.

Si $\tau \subseteq \sigma$, $f_{\tau,\sigma} : A_\tau \to A_\sigma$ es la función afín inducida por la regla de correspondencia en vértices $f_{\tau,\sigma}(e_{j+1}) = e_{i_{\tau,\sigma}(j)+1}$ Así el sistema $\{f_{\tau,\sigma} : A_\tau \to A_\sigma\}_{\tau\subseteq\sigma\in X}$ es un sistema codirigido. Sea $G(X)^*$ el colímite de este sistema, este espacio es homeomorfo al espacio subyacente (en el sentido de la definición 1.5) del complejo simplicial geométrico $G(X)$.

TEOREMA 1.1. *El funtor A es una equivalencia entre las categorías* **CSG** *y* **CSA**.

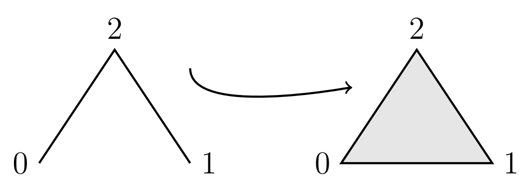
DEMOSTRACIÓN. Se mostrará que A es un funtor fiel, pleno y esencialmente suprayectivo.

- Fiel: $f \neq g : X \to Y \in$ **CSG**, esto implica que $\overline{f} \neq \overline{g} : X_0 \to Y_0$, por lo que $A(f) \neq A(g)$.
- Pleno: Seam $X, Y \in$ **CSG** y $f : A(X) \to A(Y)$. f está dada por una función $f : A(X)_0 \to A(Y)_0$, tal que si $\sigma \in X$, $f(\sigma) \in Y$. Ahora, como $X_0 = A(X)_0$ y $Y_0 = A(Y)_0$, $f : X_0 \to Y_0$ induce un morfismo $\hat{f} : X \to Y$, que es tal que $A(\hat{f}) = f$.
- Esencialmente Suprayectivo: Sea $X \in$ **CSA** .

  Se probará que $X \cong A(G(X))$. Nótese que X_0 está en correspondencia biyectiva con $G(X)_0 = A(G(X))_0$ a través de una función $\varphi_X : X_0 \to A(G(X))_0$ tal que si $\sigma \in X$, $\varphi_X(\sigma)$ es el conjunto de vértices de un simplejo geométrico de $G(X)$, es decir, $\varphi_X(\sigma) \in A(G(X))$. Más aún, si τ es el conjunto de vértices de un simplejo geométrico de $G(X)$, $\varphi_X^{-1}(\tau)$ es un simplejo de X. Así el morfismo de complejos simpliciales $\phi_X : X \to A(G(X))$ definido por $\phi_X^* = \varphi_X$ es un isomorfismo.

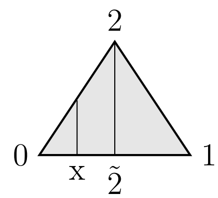
■

Para terminar esta sección considérese el siguiente ejemplo. El n-simplejo topológico estantar tiene un subespacio que es un complejo simplicial. Λ_k^n es el subespacio formado por la unión de todas las caras de Δ_n, excepto la k-ésima.

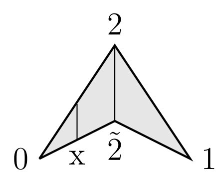


Proposición 1.3. *Para toda $n \in N$ y para toda k, $0 \leq k \leq n$, Λ_k^n es un retracto fuerte por deformación de Δ_n.*

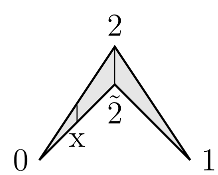
La idea heurística detras de la prueba es la siguiente: como Δ_n es un conjunto convexo (véase Apéndice A), para todo punto x en la cara opuesta al k-ésimo vértice el segmento perpendicular a la k-ésima cara y que pasa por x, queda contenido en Δ_n.

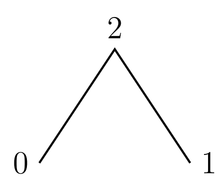


La retracción consistirá en transladar, de manera continua, cada punto x a través de este segmento perpendicular a la k-ésima cara. Tal como se ve en las siguientes imágenes



Así, esta retración será continua y dejará fijo a Λ_k^n





Λ_k^n tendrá un papel importante en el capítulo 2 de este trabajo.

2. Conjuntos simpliciales

Los conjuntos simpliciales generalizan el concepto de complejo simplicial abstracto, proporcionan herramientas más sofisticadas que las que tienen los complejos y forman una categoría más rica.

DEFINICIÓN 1.9. *Un conjunto simplicial consta de una sucesión de conjuntos* $K = \{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *junto con funciones* $\delta_i^n : K_n \longrightarrow K_{n-1}$ *y* $\sigma_i^n : K_{n-1} \longrightarrow K_n$, *con* $0 \leq i \leq n$, *que satisfacen las siguientes identidades llamadas identidades simpliciales:*

1. $\delta_i^{n-1}\delta_j^n = \delta_{j-1}^{n-1}\delta_i^n$, *si* $0 \leq i < j \leq n$
2. $\sigma_i^{n+1}\sigma_j^n = \sigma_{j+1}^{n+1}\sigma_i^n$, *si* $0 \leq i \leq j \leq n$
3. $\delta_i^n\sigma_j^n = \sigma_{j-1}^{n-1}\delta_i^{n-1}$, *si* $0 \leq i < j \leq n$
4. $\delta_j^n\sigma_j^n = 1_{K_{n-1}} = \delta_{j+1}^n\sigma_j^n$
5. $\delta_i^n\sigma_j^n = \sigma_j^{n-1}\delta_{i-1}^{n-1}$, *si* $0 \leq j+1 < i \leq n$

Los elementos de K_n son llamados n-*simplejos*. A los elementos de K_0 también se les llama vértices. Las funciones δ_i^n, σ_j^n son llamadas operadores de *cara* y de *degeneración*, respectivamente. Se dice que un n-simplejo x es degenerado si es la imagen de un $(n-1)$-simplejo z bajo un operador de degeneracin σ_i^n, es decir $x = \sigma_i^n(z)$, para alguna $0 \leq i \leq n$. De lo contrario se dice que x es no degenerado.

EJEMPLO 1.7. *Sea* K *un complejo simplicial abstracto, se puede construir un conjunto simplicial* K' *a partir de* K.
Un n-simplejo de K' *es una sucesión* $(a_0, \ldots, a_n)$ *tal que* $\{a_0, \ldots, a_n\}$ *es un m-simplejo de* K *para alguna* $m \leq n$. *Los operadores de cara y de degeneración se definen por:*

$$\delta_i^n(a_0, \ldots, a_n) = (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

$$\sigma_i^n(a_0, \ldots, a_n) = (a_0, \ldots, a_i, a_i, \ldots, a_n)$$

EJEMPLO 1.8. *Sea* $\mathbf{C}$ *una categoría pequeña. El nervio de* $\mathbf{C}$, $\mathbf{NC}$, *es el conjunto simplicial tal que sus n-simplejos son cadenas de morfismos en* $\mathbf{C}$,

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \xrightarrow{\alpha_n} A_n$$

Los operadores de cara, δ_i^n *están dados por componer* α_i *y* α_{i+1} *para* $i \geq 1$ *y* δ_0^n *por olvidar* α_1. *Los de degeneración* σ_i^n *por agregar un morfismo identidad entre* A_{i-1} *y* A_i.

En el caso de que $\mathbf{C} = G$, *la categoría cuyo único objeto es un punto* $*$ *y cuyo conjunto de morfismos es un grupo* G, $\mathbf{N}G$ *se denota por* $\mathbf{B}G$.

El siguiente ejemplo es el más importante en lo que concierne al presente trabajo, pues establece la primera conexión entre espacios topológicos y conjuntos simpliciales.

EJEMPLO 1.9. *Dado un espacio topológico* X, *un* n-simplejo singular *de* X *es una función continua* $f : \Delta_n \longrightarrow X$. *Sean* $S_n(X)$ *el conjunto de todos los n-simplejos singulares de* X *y* $S(X) = \{S_n(X)\}_n$, *el cual es llamado* Complejo Singular de X.

Si $f \in S_n(X)$, se definen:

$$\delta_i^n : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$$

y

$$\sigma_i^{n+1} : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X)$$

dadas por $\delta_i^n(f) = f d_n^i$ y $\sigma_i^{n+1}(f) = f s_i^n$, donde d_n^i y s_n^i son las funciones afines generadas por las funciones del ejemplo 1.3. Con estos operadores de cara y de degeneración, $S(X)$ es un conjunto simplicial (esto se sigue de las identidades de la proposición 1.1).

Nótese que $S_0(X)$ está en correspondencia biyectiva con X a través de una función $\phi_X : S_0(X) \to X$ dada por $\phi(f) = f(*)$, donde $*$ es el único punto de Δ_0 Por otra parte, $S_1(X)$ es el conjunto de las trayectorias en X ya que $\Delta_1 \cong I$, donde I es el intervalo unitario. Así, los operadores de cara δ_0^1, δ_1^1 dan los extremos de una trayectoria f. Este ejemplo se analizará mejor en el siguiente capítulo.

3. Objetos simpliciales en una categoría

Definición 1.10. *La categoría simplicial Δ es la categoría de ordinales finitos, es decir, sus objetos son conjuntos finitos de naturales $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ y sus morfismos son funciones monótonas $f : [n] \longrightarrow [m]$ (es decir, si $i < j$ entonces $f(i) \leq f(j)$).*
Se definen $d_i^{n+1} : [n] \longrightarrow [n+1]$ y $s_i^{n+1} : [n+1] \longrightarrow [n]$, con $0 \leq i \leq n$, cuya regla de correspondencia es:

$$d_i^{n+1}(j) = \begin{cases} j, & si\ 0 \leq j < i \leq n \\ j+1, & si\ i \leq j \end{cases}$$

y

$$s_i^{n+1}(j) = \begin{cases} j, & si\ 0 \leq j \leq i \\ j-1, & si\ i < j \end{cases}$$

Estos son llamados operadores de cocara *y* codegeneración*, respectivamente.*

Los siguientes resultados se usarán de manera recurrente en este trabajo.

Lema 1.1. *En la categoría Δ, los operadores de cocara y codegeneración, d_i^n y s_i^n, cumplen las siguientes identidades cosimpliciales:*

1. $d_j^n d_i^{n-1} = d_i^n d_{j-1}^{n-1}$, *si* $i < j \leq n$
2. $s_j^n s_i^{n+1} = s_i^n s_{j+1}^{n+1}$, *si* $i \leq j \leq n$
3. $s_j^n d_i^n = d_i^{n-1} s_{j-1}^{n-1}$, *si* $i < j \leq n$
4. $s_j^n d_j^n = 1_{\Delta_{n-1}} = s_j^n d_{j+1}^n$
5. $s_j^n d_i^n = d_{i-1}^{n-1} s_j^{n-1}$, *si* $j < i$

Demostración. Esta prueba es análoga a la de la proposición 1.1. ■

Lema 1.2. *Sea $f \in Hom_\Delta([n],[m])$, diferente de la identidad, entonces existen únicos $\alpha : [k] \to [m]$ y $\beta : [n] \to [k]$, morfismos en Δ con β suprayectiva, α inyectiva y $f = \alpha\beta$. En un diagrama*

$$\begin{tikzcd} {[n]} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\beta"'] & & {[m]} \\ & {[k]} \arrow[ur, hook, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

A esta factorización se le llama factorización epi-mono.

Demostración. Sean $i_0 < i_1 < \ldots < i_k$ los elementos de imf, entonces se define $\beta : [n] \to [k]$ como $\beta(i) = j$ si $f(i) = i_j$. β es monótona pues si $i < j$, entonces $f(i) = i_s \leq i_r = f(j)$, por lo que $s \leq r$ y así $\beta(i) \leq \beta(j)$, además es claro que β es suprayectiva.
Ahora sea $\alpha : [k] \to [m]$ dada por $\alpha(j) = i_j$. Nótese que α es estrictamente creciente pues si $s < r$ entonces $i_s < i_r$, de esto se sigue que α es inyectiva.
Para la unicidad supóngase que existen $\alpha' : [k'] \to [m]$ y $\beta' : [n] \to [k']$ tales que $f = \alpha'\beta'$. Se afirma que $\alpha = \alpha'$. Como α' es inyectiva, se tiene que $[k']$ está en correspondencia biyectiva con imf. Por lo que $k = k'$, además, como $imf = imf\alpha'$, pues $f = \alpha'\beta'$. Entonces $im\alpha = im\alpha'$ y así $\alpha = \alpha'$ (ya que son funciones estrictamente crecientes). De esto también se sigue que $\beta = \beta'$, pues $\alpha\beta = \alpha\beta'$ y α es cancelable por la izquierda. ■

Lema 1.3. *Sea $f \in Hom_\Delta([n],[m])$.*

1. *Si f es inyectiva y diferente de la identidad, entonces*
$$f = d^m_{i_1} d^{m-1}_{i_2} \ldots d^{n+1}_{i_k}$$
con $i_k < i_{k-1} < \ldots < i_1$. Además, esta descomposición es única.
2. *Si f es suprayectiva y diferente de la identidad, entonces*
$$f = s^n_{j_1} s^{n-1}_{j_2} \ldots s^{m+1}_{j_r},$$
con $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Además, esta descomposición es única.

Demostración. Del lema anterior, existen únicas α y $\beta \in \Delta$, tales que $f = \alpha\beta$, α es inyectiva y β es suprayectiva, así, si f es inyectiva $f = \alpha$ y si f es suprayectiva $f = \beta$. Con esto, basta ver que $\alpha = d^m_{i_1} d^{m-1}_{i_2} \ldots d^{n+1}_{i_k}$ si f es inyectiva, o que $\beta = s^n_{j_1} s^{n-1}_{j_2} \ldots s^{m+1}_{j_r}$ si f es suprayectiva.

Supóngase que f es inyectiva, y sean $i_k < i_{k-1} < \ldots i_1$ los elementos de $[m] - imf$, así α y $d^m_{i_1} d^{m-1}_{i_2} \ldots d^{n+1}_{i_k}$ tienen la misma imagen y como son inyectivas, al igual que en la demostración anterior, esto implica que son la misma función, más aún, esto implica la unicidad de la descomposición.

Si f es suprayectiva, sean $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ los elementos de $im f$, así, es claro que $\beta = s^n_{j_1} s^{n-1}_{j_2} \ldots s^{m+1}_{j_r}$.

■

COROLARIO 1.1. *Sea $f \in Hom_\Delta([n],[m])$, diferente de la identidad, entonces f se descompone de la manera:*

$$f = d^m_{i_1} \cdots d^a_{i_k} s^a_{j_1} \cdots s^n_{j_r}$$

con $i_k < i_{k-1} < \ldots < i_1$ y $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Además la factorización es única.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 1.2, f se descompone de manera única como $f = \alpha\beta$, con β inyectiva y α suprayectiva, así, por el lema 1.3, se obtiene la factorización deseada ■

DEFINICIÓN 1.11. *Sea **C** una categoría:*

1. *Un objeto simplicial en **C** es un funtor $F : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{C}$.*
2. *Un morfismo de objetos simpliciales es una transformación natural $\eta : F \to G$.*
3. *Se definen $\delta^n_i = F(d^n_i)$ y $\sigma^{n+1}_i = F(s^{n+1}_i)$.*
4. *La categoría **sC** es la categoría cuyos objetos son los objetos simpliciales de **C** y cuyos morfismos son transformaciones naturales.*

El Corolario 1.1 implica que un objeto simplicial F, en una categoría **C**, está determinado únicamente por su regla de correspondencia en objetos $[n]$ y morfismos d^n_i, s^n_i.

EJEMPLO 1.10. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces el funtor $\Delta[n] = Hom_\Delta(-,[n])$ es un objeto simplicial en la categoría de conjuntos. A este se le llama n-simplejo estanándar.*

EJEMPLO 1.11. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $D([n]) = \Delta_n$, el n-simplejo topológico estándar. Si $f \in Hom_\Delta([n],[m])$, entonces $D(f)$ es la función afín inducida por la función $df(e_k) = e_{f(k)}$.*

*D es un funtor covariante de Δ en **Top**, este no es un objeto simplicial en **Top** (pues la definición pide que sea contravariante), pero al componer este con el funtor $Hom_{\mathbf{Top}}(-,X)$, con $X \in \mathbf{Top}$, se obtiene un funtor contravariante a la cateogría de conjuntos y por lo tanto un objeto simplicial. A este funtor se le denotará por $S(X)$.*

Es importante recalcar que en el ejemplo 1.11, se ha recuperado el ejemplo 1.9 de la sección anterior. Es decir, este ejemplo es a su vez un conjunto simplicial y un objeto simplicial en la categoría de conjuntos. Esto no es una casualidad sino una mera consecuencia del siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.4. *Todo conjunto simplicial F induce un objeto simplicial en **Set** y viceversa.*

Demostración. Sea F un objeto simplicial en **Set**, entonces se define $F^* = \{F([n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\delta_i^n = F(d_i^n)$, $\sigma_i^n = F(s_i^n)$, el corolario 1.1 implica que las funciones δ_i^n y σ_i^n cumplen las identidades simpliciales de la definición 1.9 y por lo tanto forman un conjunto simplicial.

Ahora sea $F = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto simplicial, y se define la siguiente asignación F^* para objetos y morfismos en Δ:

$$F^*([n]) = F_n,\ F^*(1_{[n]}) = 1_{F_n},\ F^*(d_i^n) = \delta_i^n,\ F^*(s_i^n) = \sigma_i^n.$$

Ahora, si $\mu \in Hom_\Delta([n],[m])$, $\mu \neq 1_{[n]}$, por el Lema 1.1 se tiene que μ se descompone de manera única como $\mu = d_{i_1}\cdots d_{i_k}s_{j_1}\cdots s_{j_r}$, entonces se define

$$F^*(\mu) = \sigma_{j_r}\cdots\sigma_{j_1}\delta_{i_k}\cdots\delta_{i_1}.$$

Se afirma que F^* es un funtor

- $F^*(1_{[n]}) = 1_{F^*([n])}$ por definición.
- Ahora sean $\mu : \Delta_n \to \Delta_m$ y $\nu : \Delta_m \to \Delta_l$, entonces $\nu\mu = d_{i'_1}\cdots d_{i'_{k'}}s_{j'_1}\cdots s_{j'_{r'}}$ $d_{i_1}\cdots d_{i_k}s_{j_1}\cdots s_{j_r}$, ahora, por el lema 2, se pueden reagrupar todos los operadores d_i y todos los s_j por lo que $\nu\mu = d_{i''_1}\cdots d_{i''_z}s_{j''_1}\cdots s_{j''_x}$ y as $F(\nu\mu) = \sigma_{j''_x}\cdots\sigma_{j_1}\delta_{i''_z}\cdot\delta_{i''_1}$.
  Ahora, usando las identidades simpliciales de la definición 1.9 es posible reagrupar los operadores δ_i y σ_j tal que $F^*(\nu\mu) = \sigma_{j'_{r'}}\cdots\sigma_{j'_1}\delta_{i'_{k'}}\cdot\delta_{i'_1}\ \sigma_{j_r}\cdots\sigma_{j_1}\delta_{i_k}\cdot\delta_{i_1} = F^*(\mu)F^*(\nu)$

Por lo que F^* es un funtor contravariante y, por lo tanto, un objeto simplicial en **Set**. ■

Esta equivalencia en las definiciones es muy útil, a continuación se verán algunos ejemplos.

El ejemplo 1.10 se puede caracterizar de la siguiente manera. $\Delta[n]$ es el conjunto simplicial tal que $(\Delta[n])_k = \{(i_0,\ldots,i_k) : i_j \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq i_0 \leq \ldots \leq i_k \leq n\}$. Los operadores de cara están dados por omitir el j-ésimo término de la sucesión y los operadores de degeneración por repetir el j-ésimo término. Dado que la regla de correspondencia del funtor $Hom_{\Delta(,[n])}$ en morfismos está dada por componer un morfismo por la derecha, los operadores de cara y de degeneración de $\Delta[n]$ en una sucesión (o en una función monótona) μ, se denotarán por μd_i^n y μs_i^n, respectivaente.

A este se le conoce también como el conjunto simplicial libre con base $(0,1,\ldots,n) = 1_{[n]} = \iota_n$, pues todo m-simplejo se obtiene como una sucesión finita de operadores de cara y degeneración aplicados a la sucesión ι_n. Esto se sigue de que si $f \in \Delta[n]_m$, por el corolario 1.1

$$\begin{aligned} f &= d_{i_1}^n\cdots d_{i_k}^a s_{j_1}^a\cdots s_{j_r}^m \\ &= 1_{[n]}d_{i_1}^n\cdots d_{i_k}^a s_{j_1}^a\cdots s_{j_r}^m \end{aligned}$$

NOTACIÓN 1.4. *De ahora en adelante* $\Delta[0]$ *y* $\Delta[1]$ *se denotarán por* $*$ *e* I*, respectivamente.*

$*$ es un conjunto simplicial que consta de un único punto en cada $(\Delta[0])_n$. Para todo conjunto simplicial K, existe un único morfismo de conjuntos simpliciales de K en $*$. Es decir, $*$ es el objeto terminal de la categoría de conjuntos simpliciales.

I tiene dos vértices que corresponden a las cocaras d_0^1 y d_1^1 o bien a las sucesiones (0) y (1) que serán denotadas simplemente como 0 y 1. Tiene un único 1-simplejo no degenerado correspondiente a $1_{[n]}$ o bien la suceción $(0, 1)$. En grados superiores todos sus n-simplejos son degenerados.

DEFINICIÓN 1.12. *Sea* K *un conjunto simplicial.* L *es un* subconjunto simplicial *de* K*, si* $L : \Delta^{op} \to \mathbf{Set}$ *es un funtor que cumple que para toda* $n \in \mathbb{N}$*,* $L_n \subseteq K_n$ *y para todo* $\mu \in hom_\Delta(\Delta_n, \Delta_m)$*,* $K(\mu)|_{L_m} = L(\mu)$*. Alternativamente,* L *es un subconjunto simplicial de* K *si* $L_n \subseteq K_n$ *y para todo* $\mu : [m] \to [n]$*,* $K(\mu)(x) \in L_m$ *para todo* $x \in L_n$*.*

Si L *es un subconjunto simplicial de* K*, se denota* $L \subseteq K$*.*

EJEMPLO 1.12. *Considérese nuevamente el conjunto simplicial* $\Delta[n]$*,* $\Lambda_k[n]$ *denota el subconjunto simplicial de* $\Delta[n]$ *tal que sus* m*-simplejos son las sucesiones* $(i_0, \ldots, i_m)$ *que siempre toman el valor* k*.*

DEFINICIÓN 1.13. *Sea* $f : K \to L$ *un morfismo de conjuntos simpliciales y* $G \subseteq K$*. Se define* $f(G) = \{f_n(G_n)\}$*.*

PROPOSICIÓN 1.5. $f(G)$ *es un subconjunto simplicial de* L*.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in f_n(G_n)$, basta con ver que $\epsilon_i^n(x) \in f_{n-1}(G_{n-1})$ y $\tau_j^{n+1}(x) \in f_{n+1}(G_{n+1})$, donde ϵ_i^n y τ_i^n son los operadores de cara y de degeneración de L. Ahora, como $x \in f_n(G_n)$, $x = f_n(z)$, para algún $z \in G_n$, entonces $\epsilon_j^n(f_n(z)) = f_{n-1}(\delta_j^n(z)) \in f_{n-1}(G_{n-1})$, de igual manera $\tau_j^{n+1}(f_n(z)) = f_{n+1}(\sigma_j^{n+1}(z)) \in f_{n+1}(G_{n+1})$. ■

A este subconjunto se le llama la imagen de G bajo f.

DEFINICIÓN 1.14. *Un conjunto simplicial punteado consiste en un conjunto simplicial* K *y un vértice* $\phi \in K_0$*. Equivalentemente, consiste en un morfismo* $* \to K$ *y tomando la imagen de* $*$ *como subconjunto simplicial de* K*.*

Se denota por ϕ_n *al único punto de* K_n *que está en la imagen de* $* \to K$*. Un conjunto simplicial punteado se denota por* (K, ϕ)*.*

Un morfismo de conjuntos simpliciales punteados $f : (K, \phi) \to (L, \psi)$ *es un morfismo de conjuntos simpliciales tal que* $f_0(\phi) = \psi$*. De manera alternativa, es un morfismo de conjuntos simpliciales tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ K \arrow[rr, "f"] & & L \end{tikzcd}$$

NOTACIÓN 1.5. *La categoría de conjuntos simpliciales punteados y morfismos de conjuntos simpliciales punteados se denota por* $\mathbf{sSet}_*$

Para el conjunto simplicial I, $\overline{0}$ y $\overline{1}$ corresponden a los subconjuntos simpliciales generados por 0 y 1, respectivamente.

DEFINICIÓN 1.15. *Sea* $f : K \to L$ *un morfismo de conjuntos simpliciales y sea* G *un subconjunto simplicial de* L. *Se define* $f^{-1}(G) = \{f_n^{-1}(G_n)\}$.

PROPOSICIÓN 1.6. $f^{-1}(G)$ *es un subconjunto simplicial de* K.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in f_n^{-1}(G_n)$, entonces $\delta_j^n(x) \in f_{n-1}^{-1}(G_{n-1})$ pues $f_{n-1}\delta_j^n(x) = \epsilon_j^n f_n(x) \in G_{n-1}$, ya que $f_n(x) \in G_n$ y G es un subconjunto simplicial. ■

A este subconjunto se le llama imagen inversa de G bajo f.

Ahora, si $k_0 : * \to K$ es un punto de K, $\overline{k_0}$ es el subconjunto simplicial de K que es la imagen de este morfismo. Si $f : F \to K$ es un morfismo de conjuntos simpliciales, se define $f^{-1}(k_0) = f^{-1}(\overline{k_0})$ y se le llama la fibra de k_0.

Por último, si K y L son conjuntos simpliciales, se define un nuevo conjunto simplicial $K \times L$ tal que sus n-simplejos son $(K \times L)_n = K_n \times L_n$. Si $f \in Hom_\Delta([m],[n])$, entonces $(K \times L)(f)(x, y) = (K(f)(x), L(f)(y))$.

PROPOSICIÓN 1.7. *$K \times L$ es un conjunto simplicial.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $[n] \in \Delta$. Entonces

$$(K \times L)(1_{[n]})(x, y) = (1_{K_n}(x), 1_{L_n}(y)) = (x, y)$$

Por otro lado, sean $f : [m] \to [n]$ y $g[n] \to [k]$. Entonces

$$\begin{aligned}(K \times L)(gf)(x, y) = (K(gf)(x), L(gf)(y)) =& \\ &(K(f)K(g)(x), L(f)L(g)(y)) \\ &(K \times L)(f)(K(g)(x), L(g)(y)) = \\ &(L \times L)(f)(K \times L)(g)(x, y)\end{aligned}$$

■

4. Grupos simpliciales

Un grupo simplicial es, al igual que en la definición 1.9, una colección de grupos $G = \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, junto con morfismos de grupo δ_i^n, σ_i^{n+1} que cumplen las mismas identidades simpliciales. Tal como en el caso de **Set**, esta definición es equivalente a tener un objeto simplicial en la categoría **Grp** de grupos y morfismos de grupo (nótese que la prueba de la Proposición 1.4 es análoga a este caso).

EJEMPLO 1.13. *Sea* $0 : \Delta^{op} \to \mathbf{Grp}$*, el funtor constante en el grupo trivial* 0 *y* $0(d_i)^n = 0(s_i^n) = 0$*, el morfismo trivial.*

Un caso importante, sobre todo para el presente trabajo, es cuando se trabaja con funtores que toman valores en la subcategoría plena **Ab** de **Grp**, la categoría de grupos abelianos.

La estructura adicional de grupo abeliano le da más estructura al conjunto de morfismos de grupos abelianos simpliciales.

PROPOSICIÓN 1.8. *Para cualesquiera grupos abelianos simpliciales* $A, B \in \mathbf{sAb}$*,* $Hom_{\mathbf{sAb}}(A, B)$ *tiene estructura de grupo abeliano. Más aún, la composición es* $\mathbb{Z}$*-bilineal, es decir, para cualesquiera morfismos* $f : A \to B$*,* $g, g' : B \to C$ *y* $h : C \to D$*, se cumple que* $h(g + g')h = fgh + fg'h$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g : A \to B$ morfismos de grupos abelianos simpliciales. Se define $f + g : A \to B$ como $(f + g)_n(x) = f_n(x) + g_n(x)$. $f + g$ es un morfismo de grupos abelianos simpliciales pues si $0 \leq i \leq n$, entonces

$$\begin{aligned}\epsilon_i^n(f_n(x) + g_n x(x)) &= \epsilon_i^n f_n(x) + \epsilon_n g_n(x) = \\ f_{n-1}\delta_i^n(x) + g_{n-1}\delta_i^n(x) &= \\ (f + g)_{n-1}(\delta_i^n)(x)\end{aligned}$$

donde δ_i^n y ϵ_i^n son los operadores de cara de A y de B, respectivamente. De manera análoga, $f + g$ conmuta con los operadores de degeneración.

El morfismo $0 : A \to B$ es el morfismo de grupos abelianos simpliciales que para cada n es el morfismo trivial. Es claro que $f + 0 = f$ para cualquier morfimos $f : A \to B$

Si $f : A \to B$ es un morfismo de grupos abelianos simpliciales, $-(f_n)(x) = -f_n(x)$ define un nuevo morfismo ya que $\epsilon_i^n(-f_n)(x) = -f_{n-1}\delta_i^n(x)$. De igual manera $-f$ conmuta con los operadores de degeneración y además $f + (-f) = 0$

La asosiatividad de esta operación se sigue de la asociatividad de grupos abelianos simpliciales, pues para cada n

$$(f + g)_n + h_n = f_n + (g + h)_n.$$

Para terminar, sean $f : A \to B$, $g, g' : B \to C$ y $h : C \to D$ morfismos de grupos abelianos simpliciales Para cada n se tiene que $f_n(g + g')_n h_n = f_n g_n h_n + f_n g'_n h_n$, de lo que se sigue que la composición es $\mathbb{Z}$-bilineal. ■

Sea F el funtor grupo abeliano libre, es decir, el funtor que a cada conjunto X le asocia el grupo libre con base X, $\mathbb{Z}^{(X)}$. Este es un funtor (covariante) de la categoría

de conjuntos en la de grupos abelianos, entonces al componer cualquier conjunto simplicial K con F se tiene un grupo simplicial $F(K)$. Si $f : K \to L$ es un morfismo de conjuntos simpliciales, se tiene una colección de morfismos $F(f)_n$ definida en la base por $F(f)_n(x) = f_n(x)$ y que se extiende de manera lineal.
La asignación

$$\begin{aligned} F : \mathbf{sSet} &\to \mathbf{sAb} \\ K &\mapsto F(K) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

es funtorial.

Un caso muy interesante es el siguiente: dado un espacio topológico X, en la sección anterior se vio el funtor S, el complejo singular de X. Entonces, al componer este con L, se tiene un Grupo Abeliano Libre con base $S_n(X)$. Este es un objeto de estudio de mucha importancia para la Topología algebraica, pues este grupo abeliano simplicial es usado para calcular los grupos de homología simplicial de un espacio. Se hará mayor énfasis en este ejemplo en el capítulo 4 de este trabajo.

Capítulo 2

Complejos de Kan y homotopía.

En el capítulo anterior, se introdujeron las definiciones básicas de objetos simpliciales en una categoría, se dieron ejemplos (algunos de gran importancia) y se comenzó a trabajar el camino hacia el Teorema de Dold-Kan, el cual continuará a lo largo de este capítulo.

En topología algebraica, en general, se prefiere trabajar con espacios "*buenos*", que tienen las propiedades topológicas y homotópicas necesarias para desarrollar la teoría. Así también, para estudiar conjuntos simpliciales, se necesita la noción de "*buenos*çonjuntos simpliciales, los cuales son los *complejos de Kan*, ya que estos tienen las propiedades mínimas para estudiar la teoría de homotopía.

1. Complejos de Kan

Antes de profundizar en esto, se analiza el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Sean X, un espacio topológico, y $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}, f_{k+1}, \ldots, f_n$, $(n-1)$-simplejos singulares de X tales que $\delta_i^{n-1}(f_j) = \delta_{j-1}^{n-1}(f_i)$, para $i < j$. Entonces existe un n-simplejo singular f, tal que $\delta_i^n(f) = f_i$, para toda $i \neq k$.*

Demostración. Como Δ_{n-1} es homeomorfo a cada una de las caras de Δ_n, se puede definir f_j como función de la cara $j-$ésima de Δ_n, con $j \neq k$. La condición de que $\delta_i^{n-1}(f_j) = \delta_{j-1}^{n-1}(f_i)$, implica que donde las caras se intersecan (es decir, en las de dimensión menor) los simplejos f_i coinciden. Así por lema del pegado (pues cada cara es cerrada en Λ_k^{n-1}) existe una función continua $\overline{f} : \Lambda_k^n \to X$ que los extiende, es decir, tal que $\delta_i^n(\overline{f}) = f_i$.
Como Λ_k^n es un retracto fuerte por deformación de Δ_{n+1} (Proposición 1.3), $\overline{f}$ se extiende a una función continua $f : \Delta_n \to X$. En un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{n-1} \arrow[r, "d_n^i"] \arrow[dr, "f_i"'] & \Lambda_k^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\overline{f}"'] & \Delta_n \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Por lo que f es tal que $\delta_i^n(f) = f_i$. ■

El resultado anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.1. *Sea K un conjunto simplicial.*

1. *Se dice que n $(n-1)$-simplejos $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ con $0 \leq k \leq n-1$, son compatibles, si $\delta_i^{n-1}(x_j) = \delta_{j-1}^{n-1}(x_i)$ cuando $i < j$, con $i, j \neq k$.*
2. *Sean $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$, $(n-1)-$simplejos compatibles. Se dice que un n simplejo z los extiende si $\delta_i^n(z) = x_i$, para toda $i \neq k$.*
3. *K es un* complejo de Kan *si para cualesquiera $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$, $(n-1)$-simplejos compatibles, existe $z \in K_n$ que los extiende. A esta condición se les llama condición de extensión o condición de Kan.*

El principal ejemplo de complejo de Kan es el visto en la proposición 2.1, ya que este da una buena intuición de lo que quiere decir la condición de Kan.

El siguiente resultado, que fue probado por Moore, es de suma importancia para el propósito de esta tesis.

Proposición 2.2. *Sea G un grupo simplicial, entonces G (como conjunto simplicial) es un complejo de Kan.*

Demostración. Sean $g_0, g_1, \ldots, g_{k-1}, g_{k+1}, \ldots, g_{n-1} \in G_{n-1}$ compatibles.

Primero se probará que existe $u \in G_n$ tal que $\delta_i^n(u) = g_i$, para $i < k$.

Si $k = 0$, es cierto por vacuidad. Ahora, si $k > 0$, se define $u_0 = \sigma_0^n(g_0)$ y por recursión, para $r < k$, se definen $y_r = \sigma_{r+1}^n(\delta_{r+1}^n(u_r^{-1})g_{r+1})$ y $u_{r+1} = u_r y_r$.
Se afirma que $\delta_i^n(y_r) = e$, el elemento neutro de G_{n-1}, $\delta_{r+1}^n(y_r) = (\delta_{r+1}^n(u_r))^{-1}g_{r+1}$ y que $\delta_i^n(u_r) = g_i$, para $i \leq r$.

La prueba de esta afirmación se realiza por inducción sobre r.

Si $r = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\delta_0^n(y_0) &= \delta_0^n\sigma_1^n((\delta_1^n(u_0))^{-1}g_1)\\ &= \delta_0^n\sigma_1^n((\delta_1^n(\sigma_0^n(g_1)))^{-1}g_1)\\ &= \delta_0^n\sigma_1^n(g_1^{-1}g_1)\\ &= e\end{aligned}$$

las igualdades anteriores se siguen de las identidades simpliciales.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\delta_1^n(y_0) &= \delta_1^n\sigma_1^n((\delta_1^n(u_0))^{-1}g_1)\\ &= (\delta_1^n(u_0))^{-1}g_1\end{aligned}$$

y finalmente,

$$\delta_0^n(u_0) = \delta_0^n\sigma_0^n(g_0) = g_0.$$

Supóngase que es valido para $r-1$ y se procede a demostrar que lo es para r.

Si $i \leq r-1$.

$$\begin{aligned}
\delta_i^n(y_r) &= \delta_i^n\sigma_{r+1}^n((\delta_{r+1}^n(u_r))^{-1}g_{r+1}) \\
&= \delta_i^n\sigma_{r+1}^n\delta_{r+1}^n(u_r^{-1})\delta_i^n\sigma_{r+1}^n(g_{r+1}) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_i^{n-1}\delta_{r+1}^n(u_r))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_i^{n-1}(g_{r+1}) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}\delta_i^n(u_r))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_i^{n-1}(g_{r+1})
\end{aligned}$$

Estas igualdades se siguen de las identidades simpliciales. Ahora, como los g_i son compatibles,

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}\delta_i^n(u_{r-1}y_r))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_i) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(\delta_i^n(u_{r-1})\delta_i^n(y_r)))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_i) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_ie))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_i) \\
&= e
\end{aligned}$$

Las últimas igualdades se siguen de la hipótesis de inducción.

Análogamente, usando las identidades simpliciales y la hipótesis de inducción, si $i = r$, entonces

$$\begin{aligned}
\delta_r^n(y_r) &= \delta_r^n\sigma_{r+1}^n((\delta_{r+1}^n(u_r))^{-1}g_{r+1}) \\
&= \sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}((\delta_{r+1}(u_r))^{-1}g_{r+1}) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}\delta_{r+1}(u_r))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_{r+1}) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}\delta_r^n(u_r))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_{r+1}) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}\delta_r^n(u_{r-1}y_r))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_{r+1}) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(\delta_r^n(u_{r-1})\delta_r^n(y_r)))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_{r+1}) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(\delta_r^n(u_{r-1})\delta_r^n(u_{r-1})^{-1}g_{r+1}))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_{r+1}) \\
&= (\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_{r+1}))^{-1}\sigma_r^{n-1}\delta_r^{n-1}(g_{r+1}) \\
&= e
\end{aligned}$$

Además,

$$\delta_{r+1}^n(y_{r+1}) = \delta_{r+1}^n\sigma_{r+1}^n((\delta_{r+1}^n(u_r))^{-1}g_{r+1}) = (\delta_{r+1}^n(u_r))^{-1}g_{r+1}.$$

Si $i \leq r$, entonces

$$\delta_i^n(u_{r+1}) = \delta_i^n(u_ry_r) = \delta_i^n(u_r)\delta_i^n(y_r) = g_ie$$

Y por último, si $i = r + 1$,

$$\delta_{r+1}^n(u_{r+1}) = \delta_{r+1}^n(u_r)\delta_{r+1}^n(y_r) = \delta_{r+1}^n(u_r)\delta_{r+1}^n(u_r)^{-1}g_{r+1} = g_{r+1}.$$

Esto da fin al paso inductivo y la afirmación es correcta. Así se elige $u = u_{k-1}$ y, como se buscaba, es tal que $\delta_i^n(u) = g_i$, para $i < k$.

Sea $x_0 = u$ y, para $r \leq n-k-1$, se definen $z_r = \sigma_{n-r-1}^n(\delta_{n-r}^n(x_r)^{-1} g_{n-r})$ y $x_{r+1} = x_r z_r$. Entonces z_r y x_r serán tal que $\delta_i^n(z_r) = e$ para $i \in [n] - \{k\}$ y $\delta_i^n(x_r) = g_i$ para $i < k$, $i > n-r-1$. Esta afirmación también se demuestra por inducción sobre r y es análoga a la anterior. Se elige $x = x_{n-k}$ y es tal que $\delta_i^n(x) = g_i$, para $i \in [n] - \{k\}$. Con esto se concluye que G es un complejo de Kan.

■

2. Fibraciones de Kan

DEFINICIÓN 2.2. *Sea $p : E \to B$ un morfismo de conjuntos simpliciales, con δ_i^n y ϵ_i^n los operadores de cara de E y B, respectivamente. Se dice que p es una* fibración de Kan *si para cualesquiera n $(n-1)$-simplejos $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ de E que son compatibles y para todo n-simplejo z de B que cumple que $\epsilon_i^n(z) = p_{n-1}(x_i)$, para $i \neq k$, exite un n-simplejo x de E tal que $\delta_i^n(x) = x_i$, $i \neq k$, y $p_n(x) = z$.*

A E se le llama complejo total, a B complejo base y, para cada vértice $\phi \in B_0$, a $p^{-1}(\phi)$ se le llama fibra sobre ϕ.

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea $p : E \to B$ una fibración de Kan, entonces $p^{-1}(\phi)$ es un complejo de Kan para todo vértice $\phi \in B_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n \in p^{-1}(\phi)_{n-1}$ compatibles.

Obsérvese que para todo $i \neq k$, se tiene que $\epsilon_i^n(\phi_n) = p_{n-1}(x_i) = \phi_{n-1}$, entonces, como p es una fibración de Kan existe un n-simplejo z de E tal que $\delta_i^n(z) = x_i$, con $i \neq k$ y que además es tal que $p_n(z) = \phi_n$, por lo que $z \in p^{-1}(\phi)_n$.

Así $p^{-1}(\phi)$ es un complejo de Kan. ■

COROLARIO 2.1. *Un conjunto simplicial K es un complejo de Kan si y sólo si la única flecha $! : K \to *$ es una fibración de Kan.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Sean $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ compatibles y nótese que para todo $i \neq k$ $!(x_i) = \epsilon_i^{n-1}(0) = 0$. Entonces, como K es complejo de Kan, existe un n-simplejo z tal que $\delta_i^n(z) = x_i$, para $i \neq k$, y además $!(z) = 0$, por lo que $K \to *$ es una ibración de Kan.

$\Leftarrow$) Basta con observar que $K =!^{-1}(0)$ para todo conjunto simplicial, así, por la proposición anterior se tiene que si $! : K \to *$ es una fibración de Kan entonces K es un complejo de Kan. ■

NOTACIÓN 2.1. *A la subcategoría plena de* **sSet** *formada por los complejos de Kan se le denota por* **Kan**. *A la subcategoría plena de* $\mathbf{sSet}_*$ *formada por los complejos de Kan punteados se le denota por* $\mathbf{Kan}_*$.

Existe una manera alternativa de describir el concepto de fibración de Kan que es usado frecuentemente en la literatura.

Primero es necesario observar un par de cosas.

La asignación $\Delta[\_] : \Delta \to \mathbf{sSet}$ que a cada objeto $[n]$ lo manda al n-simplejo estanándar $\Delta[n]$ es un funtor (covariante). Para todo $0 \leq k \leq n$, el morfismo de conjuntos simpliciales $\Delta(d_k^n) : \Delta[n-1] \to \Delta[n]$ es una inmersión (en el sentido de que es isomorfo a su imagen como subconjunto simplicial de $\Delta[n]$). Al subconjunto simplicial $\Delta(d_k^n)(\Delta[n-1])$ se le llama k-ésima cara de $\Delta[n]$.
Entonces el cuerno $\Lambda_k[n]$ es el subconjunto simplicial que es la unión de las imágenes de las caras de $\Delta(d_i^n)(\Delta[n])$ excepto la $k-$ésima.

Ahora, por el Lema de Yoneda (apéndice B, sección 2), para todo conjuto simplicial K, la función

$$\Theta_{K,n} : Hom_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n], K) \to K_n$$

dada por $\Theta_{K,n}(f) = f_n(\iota_n)$, es una biyección natural. La inversa de $\Theta_{K.n}$ está dada por

$$\Phi_{K,n} : K_n \to Hom_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n], K)$$

que en un n-simplejo x, en el factor k y en una función $f \in \Delta[n]_k$ se evalúa como $\Theta_{K,n}(x)(f) = K(f)(x)$.

Al morfismo $\Theta_{K,n}(x) \in Hom_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n], K)$ se le denotará por $\tilde{x}$.

Sean K un conjunto simplicial y $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_n$, $(n-1)$-simplejos compatibles. Como la biyección del Lema de Yoneda es natural, $\Delta(d_i^{n-1})(\tilde{x}_j) = \Delta(d_j^{n-1})(\tilde{x}_i)$ si $i < j$. Es decir, los $(n-1)$-simplejos compatibles corresponden a un morfismo $f : \Lambda_k[n] \to K$ y viceversa.

Proposición 2.4. *Sea $p : E \to B$ un morfismo de conjuntos simpliciales. Entonces p es una fibración de Kan si y solo si para todo par de morfismo de conjuntos simpliciales $f : \Lambda_k[n] \to E$ y $g : \Delta[n] \to B$ tales que $gi = pf : \Lambda_k[n] \to B$, entonces existe un morfismo $h : \Delta[n] \to E$ tal que $hi = g : \Lambda_k[n] \to E$ y $ph = g\Delta[n] \to B$. En un diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_k[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\
\Delta[n] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supóngase que p es una fibración de Kan y considere el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Lambda_k[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Por el lema de Yoneda y el razonamiento anterior, este diagrama corresponde a n, $(n-1)$-simplejos,$x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$, de E que son compatibles y a un n-simplejo, z, de B que son tales que $\epsilon_i^n(z) = p_{n-1}(x_i)$. Por ser fibración de Kan, existe un n-simplejo x, de E tal que $\delta_i^n(x) = x_i$ y $p_n(x) = y$. Nuevamente, por el Lema de Yoneda, existe un morfismo $h : \Delta[n] \to E$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \Lambda_k[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Recíprocamente, supóngase que $p : E \to B$ admite levantamientos para cualquier par de funciones $f : \Lambda_k[n] \to E$ y $g : \Delta[n] \to B$ tales que $gi = pf : \Lambda_k[n] \to B$.

Sean $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n \in E_{n-1}$ compatibles y $z \in B_n$ tal que $\epsilon_i^n(y) = p_{n-1}(x_i)$. Entonces existe un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} \Lambda_k[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

Donde h es un morfismo que hace conmutar el diagrana. Este morfismo h corresponde a un n-simplejo x que extiende a los simplejos compatibles y que además cumple que $p_n(x) = z$. Es decir, p es una fibración de Kan. ■

El Corolario 2.1 y la proposición anterior implican que un conjunto simplicial es un complejo de Kan si y solo si para todo morfismo de conjuntos simpliciales $f : \Lambda_k[n] \to K$, existe un morfismo $g : \Delta[n] \to K$ que extiende a f. En un diagrama

$$\begin{tikzcd} \Lambda_k[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & K \\ \Delta[n] \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Es por esto que, informalmente, se dice que los complejos de Kan son aquellos conjuntos simpliciales en los que se pueden completar *cuernos*.

3. Homotopía de los complejos de Kan

La categoría de complejos de Kan es una categoría muy rica, en el sentido que tiene dentro de sí una teoría de homotopía muy parecida a la que se tiene en espacios topológicos. En esta sección relucirá la importancia que tiene la propiedad de Kan.

Primero se analizará un caso particular como motivación.

DEFINICIÓN 2.3. *Sea K un conjunto simplicial, una trayectoria entre dos vértices, $y : x_0 \simeq x_1$, es un 1-simplejo y, tal que $\delta_0^1(y) = x_0$ y $\delta_1^1(y) = x_1$*

Dos vértices están relacionados, $x_0 \simeq x_1$, si existe una trayectoria entre ellos.

Esta relación, en general, no es una relación de equivalencia. Una condición necesaria para que lo sea es que K sea un complejo de Kan.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea K un complejo de Kan. Entonces la relación de trayectorias es de equivalencia en los vértices de K.*

DEMOSTRACIÓN. La relación es reflexiva ya que para todo vértice $x \in K_0$, $\delta_0^1\sigma_0^1(x) = \delta_1^1\sigma_0^1(x)$.

Supóngase que $y : x \simeq w$ y $y' : x \simeq w'$, son trayectorias. Ambos 1-simplejos, y, y' son compatibles, pues $\delta_0^1(y) = \delta_0^1(y') = x$. Como K es un complejo de Kan, existe un 2-simplejo z tal que $\delta_0^2(z) = y$ y $\delta_1^2(z) = y'$. $\delta_2^2(z)$ es una trayectoria de w a w', pues $\delta_0^1\delta_2^2(z) = \delta_1^1\delta_0^2(z) = \delta_1^1(y) = w$ y $\delta_1^1\delta_2^2(z) = \delta_1^1\delta_1^2(z) = \delta_1^1(y') = w'$.

Con esto se prueba que la relación es simétrica. Si $x \simeq y$, como $x \simeq x$, por lo anterior $y \simeq x$.

También se deduce que la relación es transitiva. Supóngase que $x \simeq y$ y $y \simeq w$. Entonces de la simetría se tiene que $y \simeq x$ y $y \simeq w$. Entonces, $x \simeq w$.

Por lo tanto la relación de trayectorias es de equivalencia. ■

Considérese I, el cual tiene exactamente dos vértices, 0 y 1. El 1-simplejo $(0, 1)$ es una trayectoria entre 0 y 1. Por el contrario, no hay una trayectoria entre 1 y 0, pues si tal trayectoria existiera, digamos (x_0, x_1) entonces $\delta_0^1(x_0, x_1) = 1$ y $\delta_1^1(x_0, x_1) = 0$, lo que implica que $x_0 = 1$ y $x_1 = 0$ y así, dicha trayectoria es de la forma $(1, 0)$, pero esta sucesión no es un elemento de $\Delta[1]_1$ pues no es creciente. Con esto se prueba que no todo conjunto simplicial es un complejo de Kan.

DEFINICIÓN 2.4. *Sea K un complejo de Kan.*

1. *A la clase de equivalencia, bajo la relación de trayectorias, de un vértice x se le denota por $[x]$ y se le llama componente por trayectorias de x.*
2. *$\pi_0(K)$ denota al conjunto de las componentes por trayectorias de los vértices de K.*
3. *Se dice que K es conexo si $\pi_0(K) = \{[\phi]\}$, con $\phi \in K_0$ cualquier vértice de K.*

Sean $f : K \to L$ un morfismo de conjuntos simpliciales y δ_i^n, ϵ_i^n los operadores de cara de K y de L, respectivamente. Si y es una trayectoria entre x y x', entonces $f_1(y)$ es una trayectoria entre $f_0(x)$ y $f_0(x')$, pues $\epsilon_0^1(f_1(y)) = f_1(\delta_0^1(y)) = f_0(x)$, de igual modo $\epsilon_1^1(f_1(y)) = f_0(\delta_1^1(y)) = f_0(x')$. Por lo tanto f induce una función, bien definida, $\pi_0(f) : \pi_0(K) \to \pi_0(L)$, dada por $\pi_0(f)([x]) = [f_0(x)]$.

Proposición 2.6. *La asignación*

$$\pi_0 : \mathbf{Kan} \to \mathbf{Set}$$

$$K \mapsto \pi_0(K)$$

$$f \mapsto \pi_0(f)$$

es un funtor de la categoría de complejos de Kan en la de conjuntos.

Demostración. Es fácil ver que $\pi_0(1_K) = 1_{\pi_0(K)}$.
Por otro lado, sean $f : K \to L$ y $g : L \to G$, morfismos de conjuntos simpliciales.

$$\pi_0(gf)([x]) = [(gf)_0(x)] = [g_0(f_0(x))] = \pi_0(g)([f_0(x)]) = \pi_0(g)\pi_0(f)([x]).$$

Por lo tanto $\pi_0(gf) = \pi_0(g)\pi_0(f)$ y se concluye que π_0 es un funtor. ∎

Recuérdese de nuevo el complejo singular (ejemplo 1.9). Para un espacio topológico X, el conjunto de vértices de su complejo singular está en correspondencia biyectiva con X a través de una función $\phi_X : S_0(X) \to X$ dada por $\phi_X(f) = f(*)$. Dos vértices, f_0 y f_1, están relacionados si y solo si existe una trayectoria continua, es decir, una aplicación $\omega : I \to X$ tal que $\omega(0) = \phi_X(f_0)$ y $\omega(1) = \phi_X(f_1)$. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Sea $\overline{x}$ la componente conexa por trayectorias de $x \in X$. La asignación $\Phi_X : \pi_0(S(X)) \to \pi_0(X)$, dada por $\Phi_X([f]) = \overline{\phi_X(f)}$, es una biyección. Más aún, esta biyección es natural.*

Demostración. Que Φ_X es una biyección se sigue del razonamiento anterior y de que ϕ_X es biyectiva. Solo queda demostrar la naturalidad.
Primero, es importante notar que si $f : X \to Y$ es una función continua, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
S_0(X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "S_0(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\
S_0(Y) \arrow[r, "\phi_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Pues si $g \in S_0(X)$, entonces

$$\begin{aligned} f\phi_X(g) = f(g(*)) = \\ fg(*) = \phi_Y(fg) = \\ \phi_Y(S_0(f)(g)) = \phi_Y S_0(f)(g) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi_0(S(X)) \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "\pi_0(S(f))"'] & \pi_0(X) \arrow[d, "\pi_0(f)"] \\ \pi_0(S(Y)) \arrow[r, "\Phi_Y"'] & \pi_0(Y) \end{tikzcd}$$

■

Ahora se verá un caso más general al de la relación de trayectorias, el cual establece la teoría de homotopía de los conjuntos simpliciales.

Definición 2.5. *Sea K un complejo de Kan. Se dice que dos n-simplejos, x, x' son homotópicos (y se escribe $x \simeq x'$) si $\delta_i^n(x) = \delta_i^n(x')$ para toda $0 \leq i \leq n$ y si existe un $(n+1)$-simplejo y tal que $\delta_n^{n+1}(y) = x$, $\delta_{n+1}^{n+1}(y) = x'$ y $\delta_i^{n+1}(y) = \sigma_{n-1}^{n+1}\delta_i^n(x) = \sigma_{n-1}^{n+1}\delta_i^n(x')$ para $0 \leq i < n$. Se dice que y es una homotopía de x a x' y se denota por $y : x \simeq x'$*

Como es de esperarse, se tiene el siguiente resultado, cuya prueba es un argumento combinatorio dado por Daniel Kan.

Proposición 2.8. *Sea K un complejo de Kan. La relación de homotopía es de equivalencia en los n-simplejos de K, para toda n.*

Demostración. La relación es reflexiva, ya que para todo $n-$simplejo x, $\delta_n^{n+1}\sigma_n^{n+1}(x) = x = \delta_{n+1}^{n+1}\sigma_n^{n+1}(x)$ y además, $\delta_i^{n+1}\sigma_n^{n+1}(x) = \sigma_{n-1}^n\delta_i^n(x)$.

Sean x, w, w' n-simplejos, tales que $y : x \simeq w$ y $y' : x \simeq w'$ Entonces los $n+2$, $(n+1)$-simplejos $\delta_0^{n+2}\sigma_n^{n+2}\sigma_n^{n+1}(w), \ldots, \delta_{n-1}^{n+2}\sigma_n^{n+2}\sigma_n^{n+1}(w), y, y'$ son compatibles, pues

$$\delta_i^{n+1}\delta_j^{n+2}\sigma_n^{n+2}\sigma_n^{n+1}(w) = \delta_{j-1}^{n+1}\delta_i^{n+2}\sigma_n^{n+2}\sigma_n^{n+1}(w)$$

si $i < j$. Si $i < n$

$$\begin{aligned} \delta_{n-1}^{n+1}\delta_i^{n+2}\sigma_n^{n+1}\sigma_n^{n+1}(w) &= \delta_i^{n+1}\delta_n^{n+2}\sigma_n^{n+2}\sigma_n^{n+1}(w) \\ &= \delta_i^{n+1} id\sigma_n^{n+1}(w) \\ &= \delta_i^{n+1}\sigma_n^{n+1}(w) \\ &= \sigma_{n-1}^{n+1}\delta_i^{n+1}(w) \\ &= \delta_i^{n+1}(y) \end{aligned}$$

(la sucesión de ecuaciones anteriores se siguen de las identidades simpliciales y la última de la condición de que y sea una homotopía de x a x'), análogamente

$$\begin{aligned}\delta_n^{n+1}\delta_i^{n+2}\sigma_n^{n+2}\sigma_n^{n+1}(w) &= \delta_i^{n+1}\delta_{n+1}^{n+2}\sigma_n^{n+2}\sigma_n^{n+1}(w)\\ &= \delta_i^{n+1}\sigma_n^{n+1}(w)\\ &= \delta_i^{n+1}\sigma_n^{n+1}(x)\\ &= \delta_i^{n+1}(y')\end{aligned}$$

Así, como K es un complejo de Kan, existe un $(n+2)$-simplejo z, tal que $\delta_i^{n+2}(z) = \delta_i^{n+2}\sigma_n^{n+2}\sigma_n^{n+1}(w)$ si $i < n$, $\delta_n^{n+2}(z) = y$ y $\delta_{n+1}^{n+2}(z) = y'$.
Se afirma que $y'' = \delta_{n+2}^{n+2}(z)$ es una homotopía de x' a x''. Se tiene que

$$\delta_n^{n+1}(y'') = \delta_n^{n+1}\delta_{n+2}^{n+2}(z) = \delta_{n+1}^{n}\delta_n(z) = \delta_{n+1}^{n}(y) = w$$

También,

$$\delta_{n+1}^{n+1}(y'') = \delta_{n+1}^{n+1}\delta_{n+2}^{n+2}(z) = \delta_{n+1}^{n+1}\delta_{n+1}^{n+2} = \delta_{n+1}^{n+1}(y') = w'$$

Por último, si $i < n$ entonces

$$\begin{aligned}\delta_i^{n+1}(y'') &= \delta_i^{n+1}\delta_{n+2}^{n+1}(z)\\ &= \delta_{n+1}^{n}\delta_i^{n+1}(z)\\ &= \delta_{n+1}^{n}\delta_i^{n+2}\sigma_n^{n+2}\sigma_n^{n+1}(w)\\ &= \delta_{n+1}^{n+1}\sigma_{n-1}^{n+1}\delta_i^{n+1}\sigma_n^{n+1}(w)\\ &= \delta_{n+1}^{n+1}\sigma_{n-1}^{n+1}\sigma_{n-1}^{n}\delta_i^{n}(w)\\ &= \sigma_{n-1}^{n}\delta_n^{n}\sigma_{n-1}^{n}\delta_i^{n}(w)\\ &= \sigma_{n-1}^{n}\delta_i^{n}(w)\\ &= \sigma_{n-1}^{n}\delta_i^{n}(w')\end{aligned}$$

Por el mismo argumento que en la Proposición 2.5, se sigue que la relación de homotopía es de equivalencia. ■

Ahora, para un complejo de Kan punteado (K,ϕ), se define $\tilde{K}_n = \{x \in K_n : \delta_i^n(x) = \phi_{n-1}\ \forall i\}$. Nótese que $\tilde{K}_n$ es saturado con respecto a la relación de homotopía, en el sentido de que si $x \in \tilde{K}_n$ y $x \simeq x'$, entonces $x' \in \tilde{K}_n$.

Definición 2.6. *Para un complejo de Kan punteado (K,ϕ), se define el conjunto $\pi_n(K,\phi) = \tilde{K}_n/\simeq$.*

En la siguiente sección se darán las propiedades de $\pi_n(K,\phi)$.

4. Los grupos de homotopía

Sean (K, ϕ) un complejo de Kan punteado y x y y representantes de α y $\beta \in \pi_n(K, \phi)$, respectivamente. Los $n+1$ n-simplejos, $(\phi_n, \phi_n, \ldots, \phi_n, x, -, y)$ son compatibles. Entonces existe $z \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(z) = \phi_n$, para $i < n-1$, $\delta_{n-1}^{n+1}(z) = x$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(z) = y$. Se define $\alpha\beta = [\delta_n^{n+1}(z)]$.

Lema 2.1. *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \pi_n(K, \phi)$, $\alpha\beta$ está bien definido*

Demostración. Primero se verá que $\alpha\beta$ no depende de la selección del simplejo z. Supóngase que z' es otro $(n+1)$-simplejo tal que $\delta_i^{n+1}(z') = \phi_n$ para $0 \leq i \leq n-1$, $\delta_{n-1}^{n+1}(z') = x$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(z') = y$. Entonces los $n+2$, $(n+1)$-simplejos $(\phi_{n+1}, \ldots, \phi_{n+1}, \sigma_n^{n+1}(x), z, -, z')$ son compatibles. Por la propiedad de Kan, existe $w \in K_{n+2}$ que los extiende. Así, $\delta_n^{n+2}(w)$ será una homotopía entre $\delta_n^{n+1}(z)$ y $\delta_n^{n+1}(z')$.

Supóngase que $w : y \simeq y'$. Sea $z \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(z) = \phi_n$ para $0 \leq i < n-1$, $\delta_{n-1}^{n+1}(z') = x$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(z') = y$. Entonces los $n+2$ $(n+1)$-simplejos $(\phi_{n+1}, \ldots, \phi_{n+1}$ $\sigma_{n-1}^{n+1}(x), -, z, w)$ son compatibles. Por la condición de Kan, existe $u \in K_{n+2}$ que los extiende. Entonces

$$\delta_{n-1}^{n+1}\delta_{n+1}^{n+2}(u) = \delta_n^{n+1}\delta_{n-1}^{n+2}(u) = \delta_{n-1}^{n+1}\sigma_{n-1}^{n+1}(x) = x,$$

también

$$\delta_n^{n+1}\delta_{n+1}^{n+2}(u) = \delta_n^{n+1}\delta_{n+1}^{n+2}(u) = \delta_n^{n+1}(z)$$

y

$$\delta_{n+1}^{n+1}\delta_{n+1}^{n+2}(u) = \delta_{n+1}^{n+1}\delta_{n+2}^{n+2}(u) = \delta_{n+1}^{n+1}(w) = y',$$

por lo que

$$[x][y] = [\delta_n^{n+1}(z)] = [\delta_n^{n+1}\delta_{n+1}^{n+2}(u)] = [x][y'].$$

Análogamente, $\alpha\beta$ no depende del representante de α. ■

El lema anterior implica la existencia de una operación

$$\pi_n(K, \phi) \times \pi_n(K, \phi) \to \pi_n(K, \phi)$$

dada por

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$$

que está bien definida. A continuación se enuncian las propiedades de dicha operación.

Proposición 2.9. *Para $n \geq 1$, $\pi_n(K, \phi)$ es un grupo, con la operación descrita anteriormente*

Demostración. Se define $e = [\phi_n]$. Sean $\alpha \in \pi_n(K, \phi)$ y $x \in \alpha$, entonces $\sigma_n^{n+1}(x)$ es tal que $\delta_i^{n+1}\sigma_n^{n+1}(x) = \sigma_{n-1}^n\delta_i^n(x) = \sigma_{n-1}^{n+1}(\phi_{n-1}) = \phi_n$, para $0 \leq i < n-1$, $\delta_{n-1}^{n+1}\sigma_n^{n+1}(x) = \sigma_{n-1}^n\delta_{n-1}^n(x) = \phi_n$ y $\delta_{n+1}^{n+1}\sigma_n^{n+1}(x) = x$, por lo que $e\alpha = \alpha$.

Análogamente $\alpha e = \alpha$ y entonces e es un neutro para la operación.

Ahora, sean $\alpha \in \pi_n(K, \phi)$, $x \in \alpha$. Para los simplejos compatibles $(\phi_n, \ldots, \phi_n, \phi_n, -, \phi_n, x)$, se elige $z \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(z) = \phi_n$ para $0 \leq i < n-1$, $\delta_n^{n+1}(z) = \phi_n$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(z) = x$. Entonces $[\delta_{n-1}^{n+1}(z)]\alpha = e$.

Análogamente α tiene un inverso derecho.

Por último, para ver que la operación es asociativa, sean $\alpha, \beta, \gamma \in \pi_n(K, \phi)$ y x, y, z representantes para cada uno.

Con la condición de Kan, se eligen w_{n-1}, w_{n+1} y $w_{n+2} \in K_{n+1}$ tales que $\delta_i^{n+1}(w_j) = \phi_n$ para $0 \leq i < n-1$, $\delta_{n-1}^{n+1}(w_{n-1}) = x$, $\delta_{n+1}^{n+1}(w_{n-1}) = y$, $\delta_{n-1}^{n+1}(w_{n+1}) = \delta_{n-1}^{n+1}(w_{n+1}) = \delta_n^{n+1}(w_{n-1})$, $\delta_{n+1}^{n+1}(w_{n+1}) = z$, $\delta_{n-1}^{n+1}(w_{n+2}) = y$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(w_{n+2}) = z$. Despues, con la condición de Kan, se elige $u \in K_{n+2}$ tal que $\delta_i^{n+2}(u) = \phi_{n+1}$ para $0 \leq i < n-1$ y $\delta_i^{n+2}(u) = w_i$ para $i = n-1, n+1, n+2$. Entonces

$$\delta_{n-1}^{n+1}\delta_n^{n+1}(u) = \delta_{n-1}^{n+1}\delta_{n-1}^{n+1}(u) = \delta_{n-1}^{n+1}(w_{w-1}) = x$$

y

$$\delta_{n+1}^{n+1}\delta_n^{n+2}(u) = \delta_n^{n+1}\delta_{n+2}^{n+2}(u) = \delta_n^{n+1}(w_{n+2})$$

Así

$$\begin{aligned}
(\alpha\beta)\gamma &= [\delta_n^{n+1}(w_{n-1})]\gamma \\
&= [\delta_{n-1}^{n+1}(w_{n+1})]\gamma \\
&= [\delta_n^{n+1}(w_{n+1})] \\
&= [\delta_n^{n+1}\delta_n^{n+2}(u)] \\
&= \alpha[\delta_n^{n+1}(w_{n+2})] \\
&= \alpha(\beta\gamma)
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.10. *Para $n \geq 2$, $\pi_n(K, \phi)$ es un grupo abeliano.*

Demostración. La prueba se realiza por pasos. La idea de la prueba es la siguiente: se toman n-simplejos $x, y, z, w \in \tilde{K}_n$ y se construyen, mediante la condición de Kan, $(n+1)$-simplejos t y t' de tal manera que $[x] = [\delta_n^{n+1}(t)] = [y][w]$ y $[z] = [\delta_n^{n+1}(t')] = [w][y]$. Después se construye un $(n+1)$-simplejo t'' tal que $[\delta_n^{n+1}(t'')] = [w]^{-1}[x][z]$. En el último paso se sustituye de tal manera que $[w]^{-1}[x] = [x][w]^{-1}$.

Primero: Tómese $v_{n+1} \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(v_{n+1}) = \phi_n$ para $0 \leq i < n-2$, $\delta_{n+1}^{n+1}(v_{n+1}) = \phi_n$, $\delta_{n-2}^{n+1}(v_{n+1}) = w$, $\delta_{n-1}^{n+1}(v_{n+1}) = x$ y $\delta_n^{n+1}(v_{n+1}) = y$. (Tal v_{n+1} existe por la condición de Kan).

Sea $v_{n-1} \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(v_{n-1}) = \phi_n$, para $0 \leq i < n-2$, $\delta_n^{n+1}(v_{n-1}) = x$ y $\delta_{n+1}(v_{n-1}) = w$ y se toma $t = \delta_{n-1}^{n+1}(v_{n-1})$. Se definen $v_i = \phi_{n+1}$ para $0 \leq i < n-2$, $v_{n-2} = \sigma_{n-2}^{n+1}(w)$ y $v_{n+2})\sigma_{n-2}^{n+1}(w)$. Los v_i son complatibles, por lo que existe r que los extiende. Sea $v_n = \delta_n^{n+2}(r)$.

Ahora, si $0 \leq i \leq n-2$,

$$\delta_i^{n+1}(v_n) = \delta_i^{n+1}\delta_n^{n+2}(r) = \delta_{n-1}^{n+1}\delta_i^{n+2}(r) = \delta_{n-1}^{n+1}(\phi_{n+1}) = \phi_n,$$

también

$$\delta_{n-1}^{n+1}(v_n) = \delta_{n-1}^{n+1}\delta_n^{n+2}(r) = \delta_{n-1}^{n+1}\delta_{n-2}^{n+2}(r) = \delta_{n-1}^{n+1}(v_{n-1}) = t,$$

además

$$\delta_n^{n+1}(v_n) = \delta_n^{n+1}\delta_n^{n+2}(r) = \delta_n^{n+1}\delta_{n+1}^{n+2}(r) = \delta_n^{n+1}(v_{n+1}) = y$$

y por último

$$\delta_{n+1}^{n+1}(v_n) = \delta_{n+1}^{n+1}\delta_n^{n+2}(r) = \delta_n^{n+1}\delta_{n+2}^{n+2}(r) = \delta_n^{n+1}(v_{n+2}) = \phi_n$$

Con esto se deduce que $[t][\phi_m] = [y]$, pero por la elección de v_{n-1}, $[t][w] = [x]$ y entonces $[y][w] = [x]$.

Segundo: Tómese $v_n \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(v_n) = \phi_n$ para $0 \leq i < n-2$, $\delta_{n-1}^{n+1}(v_n) = \phi_n$, $\delta_{n-2}^{n+1}(v_n) = w$, $\delta_n^{n+1}(v_n) = y$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(v_n) = z$.

Sea $v_{n-1} \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(v_{n-1}) = \phi_n$, para $0 \leq i < n-2$, $\delta_{n-2}^{n+1}(v_{n-1}) = w$ y $\delta_{n-1}(v_{n-1}) = \delta_{n+1}(v_{n-1}) = \phi_n$ y se toma $t = \delta_n^{n+1}(v_{n-1})$. Se definen $v_i = \phi_{n+1}$ para $0 \leq i < n-2$, $v_{n-2} = \sigma_{n-2}^{n+1}(w)$ y $v_{n+2})\sigma_n^{n+1}(z)$. Los v_i son complatibles, por lo que existe r que los extiende. Sea $v_{n+1} = \delta_{n+1}^{n+1}(r)$. Entonces $\delta_i^{n+1}(v_{n+1}) = \phi_n$ para $0 \leq i \leq n-2$, $\delta_{n-1}^{n+1}(v_{n+1}) = t'$, $\delta_n^{n+1}(v_{n+1}) = y$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(v_{n+1}) = z$. Con esto se tiene que $[t'][z] = [y]$, pero por la elección de v_{n-1} y por el primer paso, se tiene que $[t'][w] = [\phi_n]$ y así $[w][y] = [z]$.

Tercero: Tómese $v_{n+2} \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(v_{n+2}) = \phi_n$ para $0 \leq i < n-2$, $\delta_{n-2}^{n+1}(v_{n+2}) = w$, $\delta_{n-1}^{n+1}(v_{n+2}) = x$, $\delta_n^{n+1}(v_{n+2}) = y$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(v_{n+2}) = z$.

Sea $v_{n-2} \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1} = \phi_n$ para $i \neq n-2, n+1$ y $\delta_{n+1}^{n+1} =$ y se toma $t = \delta_{n-2}^{n+1}$.

Tómese $v_{n-1} \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1} = \phi_n$ para $i \neq n-2, n+1$ y $\delta_{n+2}^{n+1} = w$ y se toma $t'' = \delta_{n-2}^{n+1}(v_{n-2})$.

Se elige $v_{n-1} \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(v_{n-1})$ para $0 \leq i < n-2$ e $i = n-1$, $\delta_{n-2}^{n+1}(v_{n-1}) = t$, $\delta_{n+1}^{n+1}(v_{n-1}) = x$. Se define $u = \delta_n^{n+1}(v_{n-1})$. Sean $v_i = \phi_{n+1}$ y $v_n = \sigma_n^{n+1}(y)$. Los v_i son compatibles, por lo que existe $r \in K_{n+2}$ que los extiende. Se toma $v_{n+1} = \delta_{n+1}^{n+2}(r)$. Por el segundo paso, $[t''] = [w]^{-1}$. También notese que $\delta_i^{n+1}(v_{n+1}) = \phi_n$ para $0 \leq i \leq n-2$, $\delta_{n-1}^{n+1}(v_{n+1}) = u$, $\delta_n^{n+1}(v_{n+1}) = y$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(v_{n+1}) = z$. Entonces $[u][z] = [y]$. Usando ambas igualdades se tiene que $[w]^{-1}[x][z] = [y]$.

Cuarto: Si se toma $z = \phi_n$ en el tercer paso, se tiene que $[w]^{-1}[x] = [y]$ y si se aplica el segundo paso al simplejo v_{n+2} del tercer paso, se tiene que $[y] = [x][w]^{-1}$.

Así, para cualesquiera $[x], [w] \in \pi_n(K, \phi)$, se tiene que $[w]^{-1}[x] = [x][w]^{-1}$. ■

Sean $f : (K, \phi) \to (L, \psi)$ un morfismo de complejos de Kan punteados, δ_i^n y ϵ_i^n los operadores de cara de K y de L, respetivamente. Como f_n conmuta con los operadores de cara, entonces $f_n(\tilde{K}_n) \subseteq \tilde{L}_n$.

Más aún, Supóngase que $z : x \simeq y \in \tilde{K}_n$. Entonces $\epsilon_n^{n+1} f_{n+1}(z) = f_n \delta_n^{n+1}(z) = f_n(x)$. Análogamente $\epsilon_{n+1}^{n+1} f_{n+1}(z) = y$, por lo que $f_{n+1}(z) : f_n(x) \simeq f_n(y) \in \tilde{L}_n$. Así f induce una fución para toda $n \geq 1$, $\pi_n(f) : \pi_n(K, \phi) \to \pi_n(L, \psi)$, dada por $\pi_n(f)([x]) = [f_n(x)]$

PROPOSICIÓN 2.11. *Para $n \geq 1$, $\pi_n(f)$ es un morfismo de grupos.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\alpha, \beta \in \pi_n(K, \phi)$ y x, y representantes para cada uno. Se elige $z \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(z) = \phi_n$ para $0 \leq i < n-1$, $\delta_{n-1}^{n+1}(z) = x$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(z) = y$. Entonces $f_{n+1}(z) \in L_{n+1}$ cumple que

$$\epsilon_i^{n+1}(f_{n+1}(z)) = f_n(\delta_i^{n+1}(z)) = f_n(\phi_n) = \psi_n,$$

para $0 \leq i < n-1$,

$$\epsilon_{n-1}^{n+1}(f_{n+1}(z)) = f_n(\delta_{n-1}^{n+1}(z)) = f_n(x)$$

y

$$\epsilon_{n+1}^{n+1}(f_{n+1}(z)) = f_n \delta_{n+1}^{n+1}(z) = f_n(y).$$

Así

$$\begin{aligned} f_*^n(\alpha) f_*^n(\beta) &= [\epsilon_n^{n+1}(f_{n+1}(z))] \\ &= [f_n(\delta_n^{n+1}(z))] \\ &= f_*^n([\delta_n^{n+1}(z)]) \\ &= f_*^n(\alpha\beta) \end{aligned}$$

■

PROPOSICIÓN 2.12. *La asignación*

$$(K, \phi) \mapsto \pi_n(K, \phi)$$

$$f \mapsto \pi_n(f)$$

es un funtor de la categoría de complejos de Kan punteados a la de grupos si $n = 1$ y a la de grupos abelianos para $n \geq 2$.

DEMOSTRACIÓN. Claramente $\pi_n(1_K) = 1_{\pi_n(K,\phi)}$.

Ahora, sean $f : (K, \phi) \to (L, \psi)$ y $g : (L.\psi) \to (G, \eta)$ morfismos de conjuntos simpliciales y $x \in \tilde{K}_n$, entonces

$$\pi_n(gf)([x]) = [(gf)_n(x)] = [g_n f_n(x)] = \pi_n(g)([f_n(x)]) = \pi_n(g)\pi_n(f)([x])$$

Por lo que $\pi_n(gf) = \pi_n(g)\pi_n(f)$. ■

Al grupo $\pi_n(K, \phi)$ se le llama n-ésimo grupo de homotopía del complejo de Kan punteado (K, ϕ).

5. Homotopías simpliciales

En esta última sección se presentará una noción más general de homotopía, la cual será utilizada en el capítulo 5 de este trabajo.

Definición 2.7. *Sean $f, g : K \to L$ morfismos de conjuntos (grupos) simpliciales, δ_i^n y ϵ_i^n los operadores de cara de K y de L, respectivamente y σ_i^n, τ_i^n los de degeneración. Se dice que f es homotópica a g, y se escribe $f \simeq g$, si existe una colección de funciones (morfismos de grupo) $h_i^n : K_n \to L_{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq i \leq n$, que satisfacen:*

1. $\epsilon_0^{n+1}h_0^n = f_n$, $\epsilon_{n+1}^n h_n^n = g_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\epsilon_i^{n+1}h_j^n = h_{j-1}^{n-1}\delta_i^n$, *si* $i < j$
3. $\epsilon_{j+1}^{n+1}h_j = \delta_{j+1}^{n+1}h_{j+1}^n$
4. $\epsilon_i^{n+1}h_j^n = h_j^{n-1}\delta_{i-1}^n$ *si* $i > j+1$
5. $\tau_i^{n+2}h_j^n = h_{j+1}^{n+1}\sigma_i^{n+1}$ *si* $i \leq j$
6. $\tau_i^{n+2}h_j^n = h_j^{n+1}\sigma_{i-1}^{n+1}$ *si* $i > j$

A la colección de todas estas funciones (morfisnos de grupo) se le denota por $h : f \simeq g$ y se le llama homotopía.

Sean $K' \subseteq K$ y $L' \subseteq L$ subconjuntos simplciales tales que $f(K') \subseteq L'$, $g(K') \subseteq L'$. Se dice que f es homotópica a g de manera relativa, y se escribe $f \simeq g$ rel K', si existe una homotopía $h : f \simeq g$ tal que $h_i^n(K'_n) \subseteq L'_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $0 \leq i \leq n$ y además $fi \simeq gi : K' \to L'$, donde $i : K' \to K$ es el morfismo inclusión.

La definición anterior, aún cuando no sea muy intuitiva, será útil en algunas circunstancias.

A continuación se presentará una forma alternativa de definir homotopías, la cual recuerda al caso de espacios topológicos.

Para K un conjunto simplicial, sea $i_k : K \to K \times I$ el morfismo de conjuntos simplciales dado por $(i_k)_n(x) = (x, k_n)$, para $k \in \{0, 1\}$ donde $k_n \in \overline{k}$ es el único n-simplejo de este conjunto simplicial.

Proposición 2.13. *Sea $f, g : K \to L$ morfismos de conjuntos simpliciales. Entonces $f \simeq g$ si y solo si existe $H : K \times I \to L$ tal que $Hi_0 = f$ y $Hi_1 = g$. En un diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "i_0"] \arrow[dr, "f"] & \\
K \times I \arrow[r, "H"] & L \\
K \arrow[u, "i_1"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supóngase que $h : f \simeq g$ es una homotopía.

Para $x \in K_n$, se define $H_n(x, 0_n) = f_n(x)$, $H_n(x, 1_n) = g_n(x)$ y para una sucesión de codegeneraciones $s = s_0^2 s_1^3 \dots s_{i-1}^{i+1} s_{i+1}^{i+2} \dots s_n^n \in I_n$, se define $H_n(x, s) = \epsilon_{i+1}^{n+1} h_i^{n+1}(x)$.

Se afirma que $H : K \times I \to L$ es un morfismo de conjuntos simpliciales.

Sea $i \leq n+1$, entonces

$$\begin{aligned}
H_n(\delta_i^{n+1}(x), d_i^{n+1}(0_{n+1})) &= H_n(\delta_i^{n+1}(x), 0_n) = \\
&= f_n(\delta_i^{n+1}(x)) \\
&= \epsilon_i^{n+1} f_{n+1}(x) = \\
&= \epsilon_i^{n+1} H_{n+1}(x, 0_{n+1})
\end{aligned}$$

Análogamente, $H_n(\delta_i^{n+1}(x), d_i^{n+1}(1_{n+1})) = \epsilon_i^n H_{n+1}(x, 1_{n+1})$ y lo mismo con las degeneraciones.

Si $s = s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-1}^{j+1} s_{j+1}^{j+2} \dots s_{n-1}^n \in I_n$ es una suecesión de codegeneraciones, para probar que $H_{n-1}(\delta_i^n(x), sd_i^n) = \epsilon_i^n H_n(x, s)$, se tienen tres casos:

Caso 1: $i = j$ o $i = j+1$. Nótese que usando la identidad cosimplicial 3 en repetidas ocasiones y al final la identidad cosimplicial 4, se tiene que

$$\begin{aligned}
sd_j^n &= s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-1}^{j+1} s_{j+1}^{j+2} \dots s_{n-1}^n d_j^n \\
&= s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-1}^{j+1} s_{j+1}^{j+2} \dots d_j^{n-1} s_{n-2}^{n-1} \\
&= s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-1}^{j+1} s_{j+1}^{j+2} \dots d_j^{n-3} s_{n-3}^{n-2} s_{n-2}^{n-1} \\
&\vdots \\
&= s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-1}^{j+1} s_{j+1}^{j+2} d_j^{j+2} \dots s_{n-2}^{n-1} \\
&= s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-1}^{j+1} d_j^{j+1} s_j^{j+1} \dots s_{n-2}^{n-1} \\
&= s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-2}^{j-1} s_j^{j+1} \dots s_{n-2}^{n-1} = s'
\end{aligned}$$

Entonces, por un lado, utilizando el hecho de que h es una homotopía y al final la identidad simplicial 1

$$\begin{aligned}
H_{n-1}(\delta_j^n(x), sd_j^n) &= H_{n-1}(\delta_j^n(x), s') \\
&= \epsilon_j^n h_{j-1}^n(\delta_j^n(x)) \\
&= \epsilon_j^n h_j^n \epsilon_j^n(x) \\
&= \epsilon_j^n \epsilon_j^{n+1} h_{j+1}^{n+1}(x) \\
&= \epsilon_j^n \epsilon_{j+1}^{n+1} h_{j+1}^{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Y por el otro lado

$$\begin{aligned}\epsilon_j^n H_n(x,s) &= \epsilon_j^n \epsilon_{j+1}^{n+1} h_j^{n+1}(x)\\ &= \epsilon_j^n \epsilon_{j+1}^{n+1} h_{j+1}^{n+1}(x)\end{aligned}$$

Si $i = j+1$, es análogo.

Para los casos $i < j$ o $i > j+1$ ocurre algo similar a lo anterior, por lo que $sd_i^n = s_0^2 s_1^3 \dots s_{k-1}^{k+1} s_{k+1}^{k+2} \dots s_{n-2}^{n-1}$, para alguna $k \geq j$ o $k \leq i$, respectivamente. Por lo que H conmuta con los operadores de cara.

Para los operadores de degeneración, el proceso es similar.

Nótese que si $s = s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-1}^{j+1} s_{j+1}^{j+2} \dots s_{n-2}^{n}$ es una sucesión de codegeneraciones, entonces

$$\begin{aligned}ss_j^{n+1} &= s_0^2 s_1^3 \dots s_{k-1}^{k+1} s_{j+1}^{j+2} \dots s_{n-1}^{n} s_j^{n+1}\\ &= s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-1}^{j+1} s_{j+1}^{j+2} \dots s_j^{n} s_n^{n+1}\\ &= s_0^2 s_1^3 \dots s_{j-1}^{j+1} s_{j+1}^{j+2} \dots s_j^{n-1} s_{n-1}^{n} s_n^{n+1}\\ &\vdots\\ &= s_0^2 s_1^3 \dots s_j^{j+1} s_{j+1}^{j+2} \dots s_n^{n+1}\end{aligned}$$

y si $i \neq j$

$$ss_j = s_0^2 s_1^3 \dots s_{k-1}^{k+1} s_{k+1}^{k+2} \dots s_n^{n+1}$$

Con $k \leq i$ o $k \geq i$, si $i < j$ o $j < i$, respectivamente. Así, procediendo de la misma manera que con los operadores de cara, se demuestra que H conmuta con los operadores de degeneración y por lo tanto es un morfismo de conjuntos simpliciales. Además, es claro que $Hi_0 = f$ y $Hi_1 = g$.

Recíprocamente, supóngase que $H : K \times I \to L$ es tal que $Hi_0 = f$ y $Hi_1 = g$. Para $0 < i < n$ se define $h_i^n : K_n \to L_{n+1} = H_{n+1}(\sigma_i^{n+1}(x), s)$, donde $s = s_0^2 s_1^3 \dots s_{k-1}^{k+1} s_{j+1}^{j+2} \dots s_n^{n+1}$. Se afirma que h es una homotopía de f a g.

1. Primero véase que $\epsilon_0^{n+1} h_0^{n+1}(x) = \epsilon_0^{n+1} H_{n+1}(\sigma_0^{n+1}(x), 0_{n+1}) = H_n(\delta_0^{n+1}\sigma_0^{n+1}(x), 0_n) = f_n(x)$ y también $\epsilon_{n+1}^{n+1} h_n^{n+1}(x) = \epsilon_{n+1}^{n+1} H_{n+1}(\sigma_{n+1}^{n+1}(x), 1_{n+1}) = H_n(\delta_n^{n+1}\sigma_n^{n+1}(x), 1_n) = g_n(x)$.
2. Supóngase que $i < j$, entonces, $\epsilon_i^{n+1} h_j^{n+1}(x) = \epsilon_i^{n+1} H_{n+1}(\sigma_j^{n+1}, s) = H_n(\delta_i^{n+1}\sigma_j^{n+1}, sd_j^{n+1}) = H_n(\sigma_{j-1}^n \delta_i^n(x), s') = h_{j-1}^n \delta_i^n(x)$.
3. Ahora, por un lado se tiene que $\epsilon_{j+1}^{n+1} h_j^{n+1}(x) = H_n(\delta_{j+1}^{n+1}\sigma_{j+1}^{n+1}(x), sd_{j+1}) = H_n(x, sd_j^{n+1})$ y por otro lado $\epsilon_{j+1}^{n+1} h_j^{n+1}(x) = H_n(\delta_{j+1}^{n+1}\sigma_j n+1(x), sd_{j+1}) = H_n(x, sd_j^{n+1})$.
4. Análogamente, si $i > j+1$, $\epsilon_i^{n+1} h_j^{n+1} = h_j^n \delta_{i-1}^n$.

5. Si $i \leq j$, entonces, $\tau_i^{n+2} h_j^n(x) = \tau_i^{n+2} H_{n+1}(\sigma_i^{n+1}(x), s) = H_{n+2}(\sigma_i^{n+2}\sigma_j^{n+1}(x), ss_i^{n+2}) = H_{n+2}(\sigma_{j+1}^{n+2}\sigma_i^{n+1}(x), s') = h_{j+1}^{n+1}\sigma_i^{n+1}(x)$.
6. Análogamente, si $i > j+1$, $\tau_i^{n+2} h_i^n = h_j^{n+1}\sigma_{i-1}^{n+1}$

Con esto se concluye que las h_i^n forman una homotopía. ■

A H se le llama homotopía de f a g y se denota $H : f \simeq g$.

LEMA 2.2. *Sean $f, f' : K \to L$ y $g, g' : L \to G$ morfismos de conjuntos simpliciales, entonces.*

1. $f \simeq f$
2. *si $f \simeq f'$, entonces $gf \simeq gf'$*
3. *si $g \simeq g'$, entonces $gf \simeq g'f$*

DEMOSTRACIÓN.
1. Para $i \leq n$, sea $h_i^n = \sigma_i^{n+1}$. Las identidades simpliciales implican que $h : f \simeq f$.
2. Sea $H : f \simeq f'$. Entonces $gH : K \times I \to G$ es una homotopía de gf a gf'.
3. Sea $F : g \simeq g'$. Entonces $F(f \times 1_I)$ es una homotopía de gf a $g'f$, donde $(f \times 1_I) : K \times I \to L \times G$ es el morfismo de conjuntos simpliciales dado por $(f \times 1_I)_n(x, \mu) = (f_n(x), \mu)$.

■

De manera análoga, se tiene la siguiente proposición para el caso relativo.

PROPOSICIÓN 2.14. *Sean $K' \subseteq K$ y $L \subseteq L'$ conjuntos simpliciales y $f, g : K \to L$ morfismos de conjuntos simpliciales tales que $f(K') \subseteq L'$ y $g(K') \subseteq L'$. Entonces, $f \simeq g \; relK'$ si y solo si existe $H : K \times I \to L$ tal que $H_f \simeq g$, $H(K' \times I) \subseteq L'$ i $H(i \times 1_I) : K' \times I \to L'$ es una homotopía de fi a gi*

Para terminar esta sección, se hará una comparación entre las homotopías descritas en esta sección y aquellas que fueron utilizadas para definir los grupos de homotopía.

Se analizará el caso de trayectorias primero.

PROPOSICIÓN 2.15. *Sean K un conjunto simplicial y x, x' vértices de K. Entonces $x \simeq x'$ si y silo si existe $f : I \to K$ tal que $f_0(0) = x$ y $f_0(1) = x'$.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase primero que $y : x \simeq x'$ es una trayectoria de x a x'. Por el Lema de Yoneda, existe $f : I \to K$ tal que $f_1(1_{[n]}) = y$. Entonces $f_0(0) = \delta_0^1(f_1(1_{[1]})) = \delta_0^1(y) = x$. Análogamente $f_0(1) = x'$.

Recíprocamente, supóngase que existe $f : I \to K$ tal que $f_0(0) = x$ y $f_0(1) = x'$. Entonces $\delta_0^1(f_1(1_{[1]})) = f_0(0) = x$ y $\delta_1^1(f_1(1_{[1]})) = f_0(1) = x'$.

■

A tal función $f : I \to K$ se le llama trayectoria de x a x'.

Sea $\partial\Delta[n]$ el subcobjunto simplicial de $\Delta[n]$ tal que sus m-simplejos son $\partial\Delta[n]_m = \{fd_i^n \in \Delta[n]_m : 0 \leq i \leq n \text{ y } f \in Hom_\Delta([m],[n-1])\}$, es decir, el subconjunto simplicial generado por las caras de $\Delta[n]$.

Ahora, sean (K,ϕ) un complejo de Kan punteado y $x, x' \in K_n$ y $\overline{x}, \overline{x}' : \Delta[n] \to K$ sus correspondientes bajo el morfismo de Yoneda. Nótese que $x \in \tilde{K}_n$ si y solo si $\overline{x}(\partial\Delta[n]) = \overline{\phi}$ (esto se sigue de la naturalidad del Lema de Yoneda).

PROPOSICIÓN 2.16. *Sea $x, x' \in \tilde{K}_n$. $x \simeq x'$ si y solo si $\overline{x} \simeq \overline{x}'$ $rel\partial\Delta[n]$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Z : x \simeq x'$. Dado que todo m-simplejo de $\Delta[n]$ se obtiene como una suceción de caras y degeneraciones aplicadas a $\iota_n = 1_{[n]}$, basta con definir h_i^n en ι_n.

Para $i < n$, sea $h_i^n(\iota_n) = \sigma_i^{n+1}(x)$ y $h_n^n(x) = z$. Entonces h será una homotopía de $\overline{x}$ a $\overline{x}'$ relativa a $\partial\Delta[n]$.

Recíprocamente, sea $h : \overline{x} \simeq \overline{x}'$ $rel\partial\Delta[n]$. Sea $z_j = h_j^n(\iota_n)$. Los z_j son tales que $\delta_i^{n+1}(z_j) = \phi_n$ para $i \neq j, j+1$, $\delta_0^{n+1}(z_0) = x$, $\delta_i^{n+1}(z_i) = \delta_i^{n+1}(z_{i-1})$ para $1 \leq i \leq n$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(z_n) = x'$.

Se probará, utilizando la condición de Kan, que si $u_0 \in K_{n+1}$ es tal que $\delta_i^{n+1}(u_0) = \phi_n$ para $i \neq r, r+1$, con $0 \leq r \leq n$ y $\delta_r^{n+1}(u_0), \delta_{r+1}^{n+1}(u_0) \in \tilde{K}_n$, entones $\delta_r^{n+1}(u_0) \simeq \delta_{r+1}^{n+1}(u_0) \in \tilde{K}_n$.

Sea $a = \delta_r^{n+1}(u_0)$ y $b = \delta_{r+1}^{n+1}(u_0)$.

Por la condición de Kan, existe $w \in K_{n+2}$ ta que $\delta_i^{n+2}(w) = \phi_{n+1}$ si $i < r$ o $r+3 < i \leq n+1$, $\delta_{r+1}^{n+2}(w) = \sigma_{r+1}^{n+1}(b)$, $\delta_{r+2}^{n+2}(w) = u_0$ y $\delta_{r+3}^{n+2}(w) = \sigma_r^{n+1}(b)$.

Sea $u_1 = \delta_r^{n+2}(w)$. Entonces $\delta_i^{n+1}(u_1) = \phi_n$ para $i \neq r+1, r+2$, $\delta_{r+1}^{n+1}(w) = a$ y $\delta_{r+2}^{n+1}(w) = b$. Si $r+1 = n$, entoncs $u_1 : a \simeq b$. Si $r+1 < n$, se repite el proceso para encontrar $u_2 \in K_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(u_1) = \phi_n$ para $i \neq r+2, r+3$, $\delta_{r+2}^{n+1}(w) = a$ y $\delta_{r+3}^{n+1}(w) = b$. Tras un número finito de pasos, se encuentra $u \in K_{n+1}$ tal que $u : a \simeq b$.

Una vez probado esto, se tiene que:

$$x = \delta_0^{n+1}(z_0) \simeq \delta_1^{n+1}(z_0) = \delta_1^{n+1}(z_1) \simeq \ldots \simeq \delta_{n+1}^{n+1}(z_n) = x'$$

Como K es un complejo de Kan, la relación de homotopía es transitiva y se tiene que $x \simeq x'$.

■

La proposición anterior y el Lema de Yoneda implican el siguiente resultado.

COROLARIO 2.2. *Sea $Hom_{\mathbf{sSet}}(\Delta[n], \partial\Delta[n]; K, \phi)$ el conjunto de morfismos $x : \Delta[n] \to K$ tales que $x(\partial\Delta[n]) = \overline{\phi}$. Entonces la relación de homotopía relativa a $\partial\Delta[n]$ es de equivalencia. Además, el conjunto de clases de equivalencia está en correspondencia biyectiva, de manera natural, con $\pi_n(K,\phi)$.*

Este corolario junto con el Lema 2.2 implican lo siguiente.

COROLARIO 2.3. *Sean $f, g : (K, \phi) \to (L, \psi)$ morfismos entre complejos de Kan punteados. Si $f \simeq g$ relϕ, entonces $\pi_n(f) = \pi_n(g)$ para toda n.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in \tilde{K}_n$ y $\overline{x} : \Delta[n] \to K$ su correspondiente bajo el morfismo de Yoneda.

Si $[f\overline{x}]$ y $[g\overline{x}]$ denotan las clases de homotopía de $g\overline{x}, f\overline{x} : \Delta[n] \to L$, como $f \simeq g$, entonces $f\overline{x} \simeq g\overline{x}$ por lo que $[f\overline{x}] = [g\overline{x}]$.

Por la naturalidad de la biyección en el corolario 2.2, se tiene que:

$$\pi_n(f)([x]) = [f_n(x)] = [g_n(x)] = \pi_n(g)([x]).$$

■

Capítulo 3

Complejos de cadena y homología

En los dos primeros capítulos se empezó a desarrollar la teoría necesaria para el teorema de Dold-Kan pero es apenas la mitad del camino. Durante el siguiente capítulo, se presentará la categoría de complejos de cadenas. La primera parte para el teorema de Dold-Kan es la correspondiente a los grupos abelianos simpliciales, los cuales fueron introducidos en el captulo 1. La segunda parte son los complejos de cadena de grupos abelianos, más en concreto, los complejos de cadena positivos.

1. Complejos de cadena

DEFINICIÓN 3.1. *Un Complejo de cadena (de grupos abelianos) es una sucesión de grupos abelianos* $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$*, junto con morfismos de grupos* $\{\partial_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$*, tales que* $\partial_n\partial_{n+1} = 0$*, para toda* $n \in \mathbb{Z}$*.*
Al morfismo ∂_n *se le llama diferencial en grado* n*.*

En lenguaje de diagramas, también se denota a un complejo de cadena como

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

EJEMPLO 3.1. *El complejo de cadena trivial es el que en cada grado es el grupo trivial* 0 *y la diferencial en cada grado es el morfismo trivial.*

EJEMPLO 3.2. *Sea* $C_n = \mathbb{Z}_8$ *para* $n \geq 0$ *y* $C_n = 0$ *para* $n < 0$ *y las diferenciales* ∂_n *está dada por* $\partial_n(x + 8\mathbb{Z}) = 4x + 8\mathbb{Z}$ *para* $n > 0$ *y trivial para* $n \leq 0$*.*

EJEMPLO 3.3. *Sea* $C_n = \mathbb{Z}$ *para toda* $n \geq 0$ *y* 0 *para todas las demás. La diferencial está dada para* $n \geq 1$ *como*

$$\partial_n(x) = \begin{cases} 2x, & \textit{si } n > 0 \textit{ y es par} \\ 0, & \textit{si } n > 0 \textit{ y es impar o } n \leq 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 3.4. *Sea* C *el complejo de cadena tal que en grados* $n < 0$ *es el grupo trivial y si* $n \geq 0$*, está dada por*

$$C_n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{si } n \textit{ es par} \\ 0, & \textit{si } n \textit{ es impar} \end{cases}$$

Todas las diferenciales son el morfismos trivial.

Ejemplo 3.5. *Sea A un grupo abeliano. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, existe un complejo de cadena $A[k]$, tal que*

$$A[k]_n = \begin{cases} A, & si\ n = k \\ 0, & si\ n \neq k \end{cases}$$

y donde todas las diferenciales son triviales.

A un complejo de cadena como el del ejemplo anterior se le llama *complejo concentrado* en grado k.

Definición 3.2. *Un morfismo de cadenas $f : C \to D$ es una colección de morfismos de grupo $f = \{f_n : C_n \to D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\eta_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\eta_n"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

es decir, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $f_n\partial_{n+1} = \eta_{n+1}f_{n+1}$.

Notación 3.1. *La categoría* **CC** *es la categoría cuyos objetos son los complejos de cadena y cuyos morfismos son los morfismos de cadena.*

La categoría de grupos abelianos se encaja en la de complejos de cadena através del funtor $(\_)[k]$ que a cada grupo abeliano lo manda al complejo de cadena concentrado en grado k. A un morfismo de grupos $f : A \to B$ lo manda al morfismo de cadenas $f[k]; A[k] \to B[k]$ dado en grado k como f y en grados $n \neq k$ como el morfismo trivial.

La categoría de complejos de cadena es muy parecida a la de grupos abelianos. Ambas cumplen muchas propiedades algebraicas, algunas de las cuales se verán en este trabajo.

Definición 3.3. *Sea* **A** *una categoría.* **A** *es una* **Ab**-*categoría si para cualesquiera par de objetos, $A, B \in \mathbf{A}$, el conjunto de morfismos, $Hom_{\mathbf{A}}(A, B)$, tiene estructura de grupo abeliano y es tal que la composición es $\mathbb{Z}-$bilineal, es decir, tal que $h(g + g')f = hgf + hg'f$.*

La categoría de grupos abelianos es el principal ejemplo de una **Ab**-categoría. Se puede probar que **CC** también lo es.

Proposición 3.1. *La categoría* **CC** *es una* **Ab**-*categoría.*

Demostración. Dados dos morfismos de cadena $f, g : C \to D$, se pueden construir los morfismos $-f$ y $f + g$, definidos en grado n como $(-f)_n = -f_n$ y $(f + g)_n = f_n + g_n$.

El morfismo trivial 0, es decir, aquel que en cada grado es el morfismo trivial de grupos, cumple que $f + 0 = f = 0 + f$.

Por otra parte, $(f + (-f))_n = f_n - f_n = 0$, por lo que $f - f = 0$.

La asociatividad de esta operación se sigue de la asociatividad en los morfismos de grupos abelianos,

Por último, sean $f : C \to D$, $g, g' : D \to E$ y $h : E \to F$ morfismos de cadenas. Para cualquier número entero n, se tiene que $h_n(g_n + g'_n)f_n = h_n g_n f_n + h_n g'_n f_n$, por lo que $h(g + g')f = hgf + hg'f$. Entonces **CC** es una **Ab**-categoría. ∎

La Proposición 1.8 implica que la categoría de grupos abelianos simpliciales también es una **Ab**-categoría.

DEFINICIÓN 3.4. *La categoría de complejos de cadena positivos es la subcategoría plena de* **CC** *formada por aquellos complejos de cadena* C *tales que* $C_n = 0$ *para* $n < 0$. *A esta categoría se le denota por* $\mathbf{CC}_+$

Como $\mathbf{CC}_+$ es una subcategoría plena de **CC**, también es una **Ab**-categoría.

Esta categoría de complejos de cadena positivos es con la que el teorema de Dold-Kan establece la equivalencia con la categoría de grupos abelianos simpliciales.

2. Los grupos de homología

Para un complejo de cadena C, la condición $\partial_{n+1}\partial_n = 0$ es equivalente a que $im\partial_{n+1} \subseteq nuc\partial_n$.

DEFINICIÓN 3.5. *Dado un complejo de cadena C, se define:*

1. *El grupo de n-ciclos,* $Z_n = Z_n(C) = nuc\partial_n \subseteq C_n$.
2. *El grupo de n-fronteras,* $B_n = B_n(C) = im\partial_{n+1} \subseteq C_n$.
3. *El n-ésimo grupo de homología de C es* $H_n(C) = Z_n/B_n$.

EJEMPLO 3.6. *Recuérdese el ejemplo 3.2. En este caso*

$$Z_n = \begin{cases} [2]\mathbb{Z}_8, & si\ n > 0 \\ 0, & si\ n \leq 0 \end{cases}$$

y

$$B_n = \begin{cases} [4]\mathbb{Z}_8, & si\ n > 0 \\ 0, & si\ n \leq 0 \end{cases}$$

Entonces

$$H_n(C) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & si\ n > 0 \\ 0, & si\ n \leq 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 3.7. *Para el ejemplo 3.3 se tiene que*

$$Z_n = \begin{cases} 0, & si\ n\ es\ par \\ \mathbb{Z}, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

y

$$B_n = \begin{cases} 0, & si\ n\ es\ par \\ 2\mathbb{Z}, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Entonces

$$H_n(C) = \begin{cases} 0, & si\ n\ es\ par \\ \mathbb{Z}_2, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

EJEMPLO 3.8. *Sea C el complejo de cadena del ejemplo 3.4.*

$$Z_n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & si\ n\ es\ par \\ 0, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

Y $B_n = 0$ en todos los casos.

Entonces

$$H_n(C) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & si\ n\ es\ par \\ 0, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

El siguiente resultado será de mucha utilidad más adelante.

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea A un grupo abeliano y $A[k-]$ su complejo de cadenas concentrado en grado k. Entonces*

$$H_n(A[k-]) = \begin{cases} A, & si\ n = k \\ 0, & si\ n \neq k \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Nótese primero que los grupos de $n-$ciclos están dados por

$$Z_n = \begin{cases} A, & \text{si } n = k \\ 0, & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

y las $n-$fronteras son $B_n = 0$, para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Entonces

$$H_n(A[k-]) = \begin{cases} A, & \text{si } n = k \\ 0, & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

■

Sea $f : C \to D$ un morfismo de cadenas. Como f_n conmuta con las diferenciales, entonces $f_n(Z_n(C)) \subseteq Z_n(D)$ y $f_n(B_n(C)) \subseteq B_n(D)$. Así f induce un morfismo de grupos $H(f)_n : H_n(C) \to H_n(D)$.

PROPOSICIÓN 3.3. *La asignación*

$$H_n : \mathbf{CC} \to \mathbf{Ab}$$
$$C \mapsto H_n(C)$$
$$f \mapsto H_n(f)$$

es un funtor para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Claramente $H_n(1_C) = 1_{H_n(C)}$.
Sean $f : C \to D$ y $g : D \to E$, morfismos de cadenas y $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} H_n(gf)(x + B_n(C)) &= (gf)_n(x) + B_n(E) \\ &= g_n f_n(x) + B_n(E) \\ &= H_n(g)(f_n(x) + B_n(D)) \\ &= H_n(g)H_n(f)(x + B_n(C)) \end{aligned}$$

Por lo que $H_n(gf) = H_n(g)H_n(f)$. ■

Dado que dos **Ab**-categorías tienen estructura extra, es natural preguntarse por la forma en que un funtor, $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, puede preservar esta estructura.

Definición 3.6. *Sean $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor entre **Ab**-categorías. F es aditivo si para cualesquiera $A, B \in \mathbf{A}$, la función inducida*

$$F_{A,B} : Hom_{\mathbf{A}}(A, B) \to Hom_{\mathbf{B}}(F(A), F(B))$$

es un morfismo de grupos.

Como es deseable, los funtores de homología preservan la estructura aditiva de **CC**.

Proposición 3.4. *$H_n : \mathbf{CC} \to \mathbf{Ab}$ es un funtor aditivo para toda $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sean $f, g : C \to D$ morfismos de cadena y $x \in Z_n$

$$\begin{aligned} H_n(f + g)(x + B_n) &= (f_n + g_n)(x) + B_n \\ &= (f_n(x) + g_n(x)) + B_n \\ &= f_n(x) + B_n + g_n(x) + B_n \\ &= H_n(f)(x + B_n) + H_n(g)(x + B_n) \end{aligned}$$

Por lo que $H_n(f + g) = H_n(f) + H_n(g)$. ■

3. Construcciones en complejos de cadena

La categoría de complejos de cadena tiene muchas propiedades interesantes, análogas a las que se tienen en la categoría de grupos abelianos. En esta sección se revisarán algunas de estas construcciones, las cuales serán de utilidad más adelante.

Definición 3.7. *Sea C un complejo de cadena. Un subcomplejo de C es una sucesión de grupos abelianos $D = \{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, tal que para toda n, $D_n \subseteq C_n$ y $\partial_n(D_n) \subseteq D_{n-1}$. Equivalentemente un subcomplejo es un complejo de cadena D con diferencial η_n tal que $D_n \subseteq C_n$ y $\partial_n|_{D_n} = \eta_n$.*
Si D es un subcomplejo de C, se escribe $D \subseteq C$ o $D \hookrightarrow C$

Nótese que, inmediatamente de la definición, se deduce que la inclusión $i : D \to C$ es un morfismo de cadenas.

Ejemplo 3.9. *El grupo trivial es un subcomplejo de todo complejo de cadena.*

Ejemplo 3.10. *Sean $f : C \to D$ un morfismo de cadenas y ∂ y η las diferenciales de C y D, respectivamente. El hecho de que $f_n\partial_n = \eta_n f_{n+1}$ implica que la colección de núcleos, $nuc(f) = \{nuc(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, y la colección de imágenes, $im(f) = \{im(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, formen subcomplejos de C y de D, respectivamente.*

Definición 3.8. *Sea $f : C \to D$ y $g : D \to E$. La suceción de morfismos de cadena*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

es exacta si

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

es exacta para toda n

Esta definición es equivalente a que $nuc(g) = im(f)$ como complejos de cadena.

Sean $D \subseteq C$ complejos de cadena con diferencial ∂. Como $\partial_n(D_n) \subseteq D_{n-1}$ para toda n, se tiene un morfismo de grupos $\overline{\partial}_n : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$, dado por $\overline{\partial}_n([x]) = [\partial_n(x)]$. Es claro que $\overline{\partial}_{n+1}\overline{\partial}_n = 0$, por lo que la colección $\{\overline{\partial}_n : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forman un nuevo complejo de cadena que es denotado por C/D. A este complejo de cadena se le llama complejo cociente.
La colección de las proyecciones $p_n : C_n \to C_n/D_n$ son un morfismo de cadenas. Esto se deduce de que $\partial_n(D_n) \subseteq D_{n-1}$.
Si $f : C \to E$ es un morfismo de cadenas y D es un subcomplejo de C tal que $D_n \subseteq nuc(f_n)$ para toda n, entonces f induce un morfismo $\overline{f}_n : C_n/D_n \to E_n$. Como f conmuta con las diferenciales de C y de E, entonces la colección de las $\overline{f}_n$ son un morfismo de cadenas.

Ejemplo 3.11. *Sean $D \subseteq C$ somplejos de cadena. Entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C/D \longrightarrow 0$$

es exacta.

Ejemplo 3.12. *Sea $f : C \to D$ un morfismo de cadenas. La colección de conúcleos de f_n forman un complejo de cadena llamado complejo conúcleo y se le denota por $conuc(f)$.*

Sean C y D complejos de cadena con diferenciales ∂ y η, respectivamente. La suma directa de C y D se construye como el complejo de cadena que en grado n está dado por $(C \oplus D)_n = C_n \oplus D_n$. La diferencial de $C \oplus D$ está dada en grado n por $(\partial, \eta)_n(x, y) = (\partial_n(x), \eta_n(y))$.

Ejemplo 3.13. *Sean C y D complejos de cadena, se tiene una suceción exacta.*

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C \oplus D \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

donde el morfismo de la derecha es la inclusión en el primer factor y el de la derecha es la proyección sobre el segundo factor.

Definición 3.9. *Sea*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de cadena. Se dice que la sucesión se escinde (por la derecha) si existe un morfismo de cadenas $h : E \to D$ tal que $gh = 1_E$.

Proposición 3.5. *Sea*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de cadena que se escinde. Entoces $D \cong C \oplus E$.

Demostración. Como la sucesión se escinde, entonces para todo n se tiene que la sucesión

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

se escinde para toda n. Entonces, para toda n, existe un isomorfismo

$$\phi_n : C_n \oplus E_n \to D_n$$

dado por $\phi_n(x, y) = f_n(x)+h_n(y)$. ϕ es un morfismo de cadenas que es un isomorfismo en cada n, por lo que es un isomorfismo de cadenas. ■

Una de las características principales de la categoría de complejos de cadena es que resulta ser una categoría abeliana. Es decir, es una categoría que se comportan tal como la de grupos abelianos. El Teorema de Dold-Kan implicará que la categoría de grupos abelianos simpliciales también es una categoría abeliana. Para revisar la definición de categoría abeliana, sus propiedades y la demostración de que **CC** lo es, véase [**10**].

4. Homotopías de cadenas

Definición 3.10. *Sea $f : C \to D$ un morfismo de cadenas. Se dice que f es nulhomotópica si existe una sucesión de morfismos de grupo $\mathbf{s} = \{s_n : C_n \to D_{n+1}\}$ tal que $f_n = \eta_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n$, representado en un diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dl, "s_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "\eta_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\eta_n"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Si f es nulhomotópica, se escribe $s : f \simeq 0$.

PROPOSICIÓN 3.6. *Sea $f : C \to D$ un morfismo de cadenas nulhomotópico, entonces $H_n(f) = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $n \in \mathbb{Z}$ y ∂ y η las diferenciales de C y de D respectivamente. Si x es un $n-$*ciclo* de C, entonces $f_n(x) = \eta_{n+1}s_n(x)+s_{n-1}\partial_n(x) = \eta_{n+1}s_n(x)+0$, así, $f_n(x)$ es un $n-$borde de D, por lo tanto $H_n(f) = 0$. ■

DEFINICIÓN 3.11. *Sean $f, g : C \to D$ morfismos de cadena, se dice que f es homotópica a g si $f - g$ es nulhomotópica. Si f es homotópica g entonces se escribe $s : f \simeq g$.*

PROPOSICIÓN 3.7. *Sean $f, g : C \to D$ tales que $f \simeq g$. Entonces $H_n(f) = H_n(g)$ para toda n.*

DEMOSTRACIÓN. Como H_n es un funtor aditivo para toda n, entonces $H_n(f) - H_n(g) = H_n(f - g)$. Ahora, como $f \simeq g$, entonces $f - g \simeq 0$. La proposición 3.6 implica el resultado. ■

Una de las propiedades más importantes de los funtores de homología es la llmada "*invarianza homotópica*", la cual se resume en el siguiente resultado.

DEFINICIÓN 3.12. *Dado un morfismo de cadenas $f : C \to D$, se dice que f es una equivalencia homotópica si existe $g : D \to C$ tal que $gf \simeq 1_C$ y $fg \simeq 1_D$.*

COROLARIO 3.1. *Sea $f : C \to D$ una equivalencia homotópica, entonces $H_n(f)$ es un isomorfismo para toda n.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : D \to C$ tal que $gf \simeq 1_C$ y $fg \simeq 1_D$. Entonces $H_n(g)H_n(f) = 1_{H_n(C)}$ y $H_n(f)H_n(g) = 1_{H_n(D)}$. ■

Para cerrar este capítulo, se demostrarán las principales propiedades de la relación de homotopía.

PROPOSICIÓN 3.8. *Sean $f, f' : C \to D$ y $g, g'; D \to E$ morfismos de cadena tales que $s : f \simeq f'$ y $t : g \simeq g'$, entonces:*

1. $f \simeq f$
2. $tf : gf \simeq gf'$
3. $gs : gf \simeq gf'$

DEMOSTRACIÓN.
1. Sea $s_n : C_n \to D_{n+1}$ dada por $s_n(x) = 0$, es decir, s_n es el morfismo trivial para toda n, es claro que $f - f = 0 = \eta_{n+1}0 + 0\partial_n$.
2. Nótese que $g_nf_n - g'_nf_n = (g_n - g'_n)f_n = (\psi_{n+1}t_n + t_{n-1}\eta_n)f_n = \psi_nt_nf_n + t_{n-1}\eta_nf_n = \psi_nt_nf_n + t_{n-1}f_{n-1}\partial_n$.
3. Esta prueba es análoga a la anterior.

■

PROPOSICIÓN 3.9. *Sean $f, f', g, g' : C \to D$ morfismos de cadena tales que $s : f \simeq f'$ y $t : g \simeq g'$, entonces $s + t : f + g \simeq f' + g'$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$f_n + g_n - (f'_n + g_n) = f_n + g_n - f'_n - g_n = f_n - f'_{n+} + g_n - g'_n =$$
$$\eta_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n + \eta_{n+1}t_n + t_{n-1}\partial_n = \eta_{n+1}(s_n + t_n) + (s_{n-1} + t_{n-1})\partial_n.$$

■

De las proposiciones anteriores se sigue que $0 \simeq 0$, si $s : f \simeq \mathbf{g}$, entonces $-s : -f \simeq -g$ y además, de esto último se sigue que si $f - g \simeq 0$ entonces $g - f \simeq 0$, por lo que la relación de homotopía es reflexiva y simétrica en el conjunto de morfismos de cadena entre dos complejos.

PROPOSICIÓN 3.10. *La relación de homotopía es de equivalencia en el conjunto de morfismos de cadena entre dos complejos.*

DEMOSTRACIÓN. Por lo dicho antes, solo falta probar que la relación es transitiva, entonses sean f, g y h morfismos de cadena tales que $s : f \simeq g$ y $t : g \simeq h$, entonces

$$\begin{aligned} f_n - h_n &= f_n - g_n + g_n - h_n \\ &= \eta_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n + \eta_{n+1}t_n + t_{n-1}\partial_n \\ &= \eta_{n+1}(s_n + t_n) + (s_{n-1} + t_{n-1})\partial_n \end{aligned}$$

por lo que $f \simeq h$ ■

Con todo esto, se tiene lo necesario para enunciar y demostrar el teorema de Dold-Kan.

Capítulo 4

El Teorema de Dold-Kan

En los primeros tres capítulos de este trabajo se ha desarrollado la teoría necesaria para enunciar y demostrar el Teorema de Dold-Kan. Este teorema establece una equivalencia entre las categorías de grupos abelianos simpliciales y la de complejos de cadena positivos. Más aún, la equivalencia de Dold-Kan induce un isomorfismo entre los grupos de homotopía de grupos simpliciales y los grupos de homología de complejos de cadena.

Durante este capítulo se realizarán las pruebas de estos dos resultados así como de algunos de sus corolarios inmediatos.

1. Los complejos de Moore y Normalizador

Sean $A \in \mathbf{sAb}$ y δ_i^n y σ_i^n sus operadores de cara y de degeneración, respectivamente. Existen varias formas de construir un complejos de cadenas a partir de él. La primera es a través del complejo de Moore de A.

El complejo de Moore, $M(A)$, en grado $n \geq 0$ es $M(A)_n = A_n$ y 0 en grados $n < 0$. La diferencial de $M(A)$ en grado $n \geq 1$ está dada por la suma alternada de sus operadores de cara, es decir, $\partial_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^n \delta_j^n$ y $\partial_n = 0$ para $n \leq 0$.

Lema 4.1. *Para todo grupo abeliano simplicial A, $M(A)$ es un complejo de cadenas.*

Demostración. Usando las identidades simpliciales se sigue lo siguiente;

$$\partial_n \partial_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{i+j}\delta_i^n \delta_j^{n+1}$$

$$= \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\delta_i^n \delta_j^{n+1} + \sum_{j\leq i}(-1)^{i+j}\delta_i^n \delta_j^{n+1}$$

$$= \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\delta_{j-1}^n \delta_i^{n+1} + \sum_{j\leq i}(-1)^{i+j}\delta_i^n \delta_j^{n+1}$$

$$= \sum_{i\leq k}(-1)^{i+k+1}\delta_k^n \delta_i^{n+1} + \sum_{j\leq i}(-1)^{i+j}\delta_i^n \delta_j^{n+1}$$

$$= -\sum_{i\leq k}(-1)^{i+k}\delta_k^n\delta_i^{n+1} + \sum_{j\leq i}(-1)^{i+j}\delta_i^n\delta_j^{n+1}$$
$$= -\sum_{l\leq m}(-1)^{l+m}\delta_m^n\delta_l^{n+1} + \sum_{l\leq m}(-1)^{l+m}\delta_m^n\delta_l^{n+1} = 0$$

■

El complejo de Moore es una herramienta importante para la topología algebraica por lo siguiente. Dado un espacio topológico X, se define $S_*^n(X)$ como el grupo abeliano libre con base $S_n(X)$. La colección $S_*(X) = \{S_*^n(X)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un grupo abeliano simplicial, donde los operadores de cara y de degeneración son los morfismos inducidos por operadores de cara y de degeneración de $S(X)$. Los grupos de homología singular de X se definen como los grupos de homología del complejo de Moore de $S_*(X)$.

Dado un morfismo de grupos simpliciales, $f : A \to B$, este induce, de manera funtorial, un morfismo de cadenas $M(f) : M(A) \to M(B)$, dado por $M(f)_n = f_n$ para $n \geq 0$ y 0 para $n < 0$. Esto se sigue de que f_n conmuta con los operadores de cara de A y de B para toda n natural.

Proposición 4.1. *La asignación*

$$M : \mathbf{sAb} \to \mathbf{CC}_+$$
$$A \mapsto M(A)$$
$$f \mapsto M(f)$$

es un funtor

Demostración. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos de grupos abelianos simpliciales.

Como $M(1_A)_n = 1_{A_n}$ para $n \geq 0$ y $M(1_A)_n = 0 = 1_0$, para $n < 0$, se tiene que $M(1_A) = 1_{M(A)}$.

Si $n \geq 0$, entonces $M(gf)_n = (gf)_n = g_nf_n = M(g)_nM(f)_n$. Si $n < 0$ entonces $M(gf)_n = 0$. Así $M(gf) = M(g)M(f)$ y por lo tanto M es un funtor. ■

Aunque el complejo de Moore es una forma muy sencilla para construir un complejo de cadenas, este funtor no es el correcto para la equivalencia de Dold-Kan. A pesar de esto, no dista mucho de ser el funtor ideal.

El complejo normalizador de A, $N(A)$, se define como $N(A)_n = \cap_{i=0}^{n-1} nuc(\delta_i^n)$, para $n \geq 0$ y 0 para $n < 0$. Nótese que $N(A)_n \subseteq M(A)_n$ para toda n. Más aún, si $x \in N(A)_n$, entonces $\partial_n(x) = (-1)^n\delta_n^n(x)$. Si $j < n$,

$$(-1)^n\delta_j^{n-1}\delta_n^n(x) = (-1)^n\delta_{n-1}^{n-1}\delta_j^n(x) = 0.$$

Así, $N(A)$ es un subcomplejo de $M(A)$.

Si $f : A \to B$ es un morfismo de grupos abelianos simpliciales, ϵ_j^n son los operadores de cara de B y $x \in N(A)_n$, entonces $\epsilon_j^n f_n(x) = f_n \delta_j^n(x)$. Así $f_n(x) \in N(B)_n$. Entonces la asignación $N(f)_n(x) = f_n(x)$ está bien definida y hace de N un subfuntor de M.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea* $D(A)_n = \sum_{j=0}^n im(\sigma_j^n)$. *La colección* $D(A) = \{D(A)_n\}_{c\in\mathbb{N}}$ *es un subcomplejo de* $M(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto basta con probarlo para los generadores.
Si $\sigma_i^n(x) \in D(A)_n$, entonces

$$\partial_n(\sigma_i^n(x)) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \delta_j^n \sigma_i^n(x) =$$

$$\sum_{j\neq i-1,i}(-1)^j \delta_j^n \sigma_i^n(x) =$$

$$\sum_{j=0}^{i-2}(-1)^j \delta_j^n \sigma_i^n(x) + \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^j \delta_j^n \sigma_i^n(x) =$$

$$\sum_{j=0}^{i-2}(-1)^j \sigma_j^{n-1} \delta_{i-1}^{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{i-2}(-1)^j \sigma_{j-1}^{n-1} \delta_i^{n-1}(x)$$

por lo que $\partial_n(\sigma_i^n(x)) \in D_{n-1}A$ y entonces $\partial_n(D(A)_n) \subseteq D(A)_{n-1}$. ∎

Sean $f : A \to B$ un morfismo de grupos simpliciales y τ_i^n el operador de degeneración de B. Entonces $f_n \sigma_i^n(x) = \tau_i^n f_{n-1}(x) \in D_n B$, por lo que $(D(f))_n(x) = f_n(x)$ está bien definida. Además f_n conmuta con los operadores de cara de A y de B, entonces $D(f)$ es un morfismo de cadenas. Así D es un subfuntor de M.

Sea $M(A)/D(A)$ el complejo cociente. Si $f : A \to B$ es un morfismo de grupos simpliciales, como $f_n(D(A)_n) \subseteq D(B)_n$, entonces f induce un morfismo de cadenas $\overline{f} : M(A)/D(A) \to M(B)/D(B)$, por lo que $M/D : \mathbf{sAb} \to \mathbf{CC}_+$ es un funtor.

Se tienen los siguientes morfismos de cadena.

$$N(A) \xhookrightarrow{i_A} M(A) \xrightarrow{p_A} M(A)/D(A)$$

donde i_A y p_A son la inclusión y la proyección canónicas, respectivamente. En la siguiente sección se analizará el comportamiento de estos morfismos.

2. El teorema de normalización

La razón por la que $M(A)$ no es el funtor correcto para la equivalencia de Dold-Kan es que $M(A)$ carga con mucha información innecesaria, como se constatará en esta sección. El complejo normalizador "condensa" toda esta información y la codifica de mejor manera al eliminar todas las degeneraciones.

Sean $A \in \mathbf{sAb}$ y δ_i^n, σ_i^n sus operadores de cara y de degeneración, respectivamente. Para $j \leq n$, $(N_j(A))_n$ denotará al subgrupo $\cap_{i=0}^{j} nuc(\delta_i^n) \subseteq A_n$ y $(D_j(A))_n$ al subgrupo de A_n dado por $\sum_{i=0}^{j} im(\sigma_i^n)$.

Sean $i_j^n : (N_j(A))_n \to A_n$ y $p_j^n : A_n \to A_n/(D_j(A))_n$, la inclusión y la proyección canónica, respectivamente.

Lema 4.2. *La composición $\phi_j^n = p_j^n i_j^n$ es un isomorfismo para toda n y toda $j \leq n$.*

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre j.

Supóngase $j = 0$.

Sea $[x]$ la clase en $A_n/(D_0(A))_n$ de un elemento $x \in A_n$. $[x]$ está representado por un elemento de la forma $x - \sigma_0^n \delta_0^n(x)$. Nótese que $x - \sigma_0^n \delta_0^n(x) \in (N_0(A))_n$, pues

$$\begin{aligned} \delta_0^n(x - \sigma_0^n \delta_0^n(x)) &= \delta_0^n(x) - \delta_0^n \sigma_0^n \delta_0^n(x) \\ &= \delta_0^n(x) - \delta_0^n(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Además,

$$\phi_0^n(x - \sigma_0^n \delta_0^n(x)) = \phi_0^n(x) - \phi_0^n(\sigma_0^n \delta_0^n(x)) = [x] - [0] = [x]$$

Por lo que ϕ_0^n es suprayectiva. Para probar la inyectividad, sea $x \in (N_0(A))_n$ tal que $\phi_0^n(x) = 0$. Entonces $x = \sigma_0^n(y)$. Así

$$0 = \delta_0^n(x) = \delta_0^n \sigma_0^n(y) = y$$

Por lo que $x = \sigma_0^n(y) = \sigma_0^n(0) = 0$. Con esto, ϕ_0^n es inyectiva y por lo tanto un isomorfismo.

Supóngase que ϕ_k^n es un isomorfismo para toda n y para toda $k < j$. Se procederá a demostrar que ϕ_j^n es un isomorfismo.

Considérese el siguiente diagrama, el cual resulta ser conmutativo, donde el morfismo de la izquierda es la inclusión canónica y ψ es el morfismo de cambio de clase.

$$\begin{tikzcd} (N_{j-1}(A))_n \arrow[r, "\phi_{j-1}^n", "\cong"'] & A_n/(D_{j-1}(A))_n \arrow[d, "\psi"] \\ (N_j(A))_n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\phi_j^n"'] & A_n/(D_j(A))_n \end{tikzcd}$$

Toda clase $[x] \in A_n/(D_j(A))_n$ está representada por un elemento $x \in (N_{j-1}(A))_n$. Por otro lado, $x - \sigma_j^n \delta_j^n(x) \in (N_j(A))_n$ (por un argumento análogo al que se usó antes) y además $x - \sigma_j^n \delta_j^n(x)$ representa a $[x]$. Por lo tanto, ϕ_j^n es suprayectiva.

Antes de probar la inyectividad, obsérvese lo siguiente: como $\sigma_j^{n-1}\delta_k^{n-1}(x) = \delta_k^n\sigma_{j+1}^n(x)$, para toda $k \leq j$, entonces $\sigma_j^n((N_{j-1}(A))_n) \subseteq (N_{j-1}(A))_n$.
Por otra parte, $\sigma_j^n\sigma_k^{n-1}(x) = \sigma_i^n\sigma_{j-1}^{n-1}(x)$, para $i \leq j-1$, por lo que $\sigma_j((D_{j-1}(A))_{n-1}) \subseteq (D_{j-1}(A))_n$. Así se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(N_{j-1}(A))_{n-1} \arrow[r, "\phi_{j-1}^{n-1}", "\cong"'] \arrow[d, "\sigma_j^n"'] & A_{n-1}/(D_{j-1}(A))_{n-1} \arrow[d, "\overline{\sigma}_j^n"] \\
(N_{j-1}(A))_n \arrow[r, "\cong", "\phi_{j-1}^n"'] & A_n/(D_{j-1}(A))_n
\end{tikzcd}$$

Más aún, la siguiente sucesión es exacta.

$$0 \longrightarrow A_{n-1}/(D_{j-1}(A))_{n-1} \xrightarrow{\overline{\sigma}_j^n} A_n/(D_{j-1}(A))_n \xrightarrow{\psi} A_n/(D_j(A))_n \longrightarrow 0$$

Primero, $\overline{\sigma}_j^n$ es inyectiva pues σ_i^n lo es. ψ es suprayectiva por ser un cociente. Así, solo falta mostrar la exactitud en el término de en medio. Ahora bien, $[x] \in nuc(\psi)$ si y solo si $[x] = [\sigma_j^n(y)]$ para algún $y \in A_n$ y esto pasa si y solo si $[x] \in im\overline{\sigma}_j^n$, por lo que $im\overline{\sigma}_j^n = nuc(\psi)$ y la sucesión es exacta.

Se procede a demostrar que ϕ_j^n es inyectiva. Sea $x \in (N_j(A))_n$ tal que $\phi_j^n(x) = 0$. Considérese de nuevo el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(N_{j-1}(A))_n \arrow[r, "\phi_{j-1}^n", "\cong"'] & A_n/(D_{j-1}(A))_n \arrow[d, "\psi"] \\
(N_j(A))_n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\phi_j^n"'] & A_n/(D_j(A))_n
\end{tikzcd}$$

Entonces, por la exactitud de la sucesión anterior y de la conmutatividad de este diagrama, se tiene que $\phi_{j-1}^n(x) \in nuc(\psi) = im(\overline{\sigma}_j^n)$. Usando el diagrama anterior a la sucesión exacta, se tiene que existe $y \in (N_{j-1}(A))_{n-1}$ tal que $x = \sigma_j^n(y)$. Ahora, como $\delta_j^n(x) = 0$, nuevamente se tiene que $y = 0$ y así $x = \sigma_j^n(y) = 0$. Por lo tanto, se concluye que ϕ_j^n es inyectiva y entonces es un isomorfismo.

Así se concluye el paso de inducción y la prueba queda terminada. ■

Nótese que $(N_{n-1}A)_n = N(A)_n$ y $(D_{n-1}(A))_n = D(A)_n$. De lo anterior se siguen los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 4.3. *La composición $\phi_A = p_A i_A : N(A) \to M(A)/D(A)$ es un isomorfismo que además es natural.*

DEMOSTRACIÓN. Como $i_{n-1}^n = i_{A_n}$ y $p_{n-1}^n = p_{A_n}$, del lema anterior se tiene que $\phi_{A_n} = \phi_{n-1}^n$ es un isomorfismo para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $p_A i_A$ es un isomorfismo de cadenas. La naturalidad se sigue de la naturalidad de $i : N \to N$ y de $p : M \to M/D$ ■

Lo pasado se hizo solo a nivel de subgrupos, ahora, a nivel de complejos de cadena se hará lo siguiente.

Para $j \in \mathbb{N}$, se define un subcomplejo $N_j(A) \subseteq M(A)$ dado por

$$(N_j(A))_n = \begin{cases} \cap_{i=0}^{j} nuc(\delta_i^n), & n \geq j+2 \\ N(A)_n, & n \leq j+1 \end{cases}$$

$N_j(A)$ es un subcomplejo de cadenas. Si $j+1 \leq n$ y $x \in (N_j(A))_n$, entonces

$$\delta_i^{n-1}\partial_n(x) = \delta_i^{n-1}(\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^k\delta_i^n(x)) =$$

$$\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^k\delta_i^{n-1}\delta_k^n(x) = \sum_{k=j+1}^{n}(-1)^k\delta_{k-1}^{n-1}\delta_i^n(x) = 0$$

Esto pasa para $i \leq j$. Nótese que $N_0(A) = M(A)$, que $N_{j+1}(A) \hookrightarrow N_j(A)$. La inclusión canónica $N_{j+1}(A) \hookrightarrow N_j(A)$ se denotará por i_j.

Se tiene un sistema dirigido de complejos de cadena

$$\ldots \xhookrightarrow{i_{j+1}} N_{j+1}(A) \xhookrightarrow{i_j} N_j(A) \xhookrightarrow{i_{j-1}} \ldots \xhookrightarrow{i_1} N_1(A) \xhookrightarrow{i_0} M(A)$$

Entonces $N(A)$ es el límite inverso de este sistema. Esto se sigue de que para el término n, $(N_j(A))_n = N(A)_n$ para toda $j \geq n-1$.

Se define un morfismo de grupos $f_j^n : (N_j(A))_n \to (N_{j+1}(A))_n$, dado por

$$f_j^n(x) = \begin{cases} x - \sigma_{j+1}^n\delta_{j+1}^n(x), & n \geq j+2 \\ x, & n \leq j+1 \end{cases}$$

f_j^n está bien definido pues si $n \geq j+2$, entonces

$$\delta_{j+1}^n f_j^n(x) = \delta_{j+1}^n(x - \sigma_{j+1}^n\delta_{j+1}^n(x)) = \delta_{j+1}^n(x) - \delta_{j+1}^n(x) = 0.$$

La condición de que $n \geq j+2$ para definir $(N_j(A))_n$ es necesaria en la definición de estos morfismos, pues para $j = n-1$ no se cumpliría la igualdad anterior y para $j = n$, f_j^n no tendría sentido.

LEMA 4.3. *La colección de estos morfismos de grupos definen un morfismo de cadenas* $f_j : N_j(A) \to N_{j+1}(A)$.

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto se consideran tres casos: $n \leq j+1$, $n = j+2$ y $n > j+2$. En el primer caso se tiene un diagrama de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} (N(A))_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_j^n = 1_{(N(A))_n}"'] & (N(A))_{n-1} \arrow[d, "f_j^{n-1} = 1_{(N(A))_{n-1}}"] \\ (N(A)_n \arrow[r, "\partial_n"'] & (N(A))_{n-1} \end{tikzcd}$$

Para el segundo caso, el diagrama es de la forma

$$\begin{tikzcd}
(N_{n-2}(A))_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f^n_{n-2}"'] & (N(A))_{n-1} \arrow[d, "1_{(N(A))_{n-1}}"] \\
(N(A)_n \arrow[r, "\partial_n"'] & (N(A))_{n-1}
\end{tikzcd}$$

y considérese la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{gathered}
\partial_n(x) - \partial_n f^{n+1}_{n-2}(x) = \\
(-1)^{n-1}\delta^n_{n-1}(x) + (-1)^n\delta^n_n(x) - (-1)^n\delta^n_n(x - \sigma^n_{n-1}\delta^n_{n-1}(x)) = \\
(-1)^{n-1}\delta^n_{n-1}(x) + (-1)^n\delta^n_n(x) - (-1)^n\delta^n_n(x) - (1)^{n+1}\delta^n_n\sigma^n_{n-1}\delta^n_{n-1}(x) = 0
\end{gathered}$$

Para el último caso, el diagrama es el siguiente

$$\begin{tikzcd}
(N_j(A))_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f^n_j"'] & (N_j(A))_{n-1} \arrow[d, "f^{n-1}_j"] \\
(N_{j+1}(A)_n \arrow[r, "\partial_n"'] & (N_{j+1}(A))_{n-1}
\end{tikzcd}$$

y se tiene la sucesión de igualdades

$$\begin{gathered}
f^n_j\partial_n(x) - \partial_n f^{n-1}_j(x) \\
= \sum_{k=j+1}^{n}(-1)^k(\delta^n_k(x) - \sigma^n_{j+1}\delta^n_{j+1}\delta^n_k(x)) - \sum_{i=j+2}^{n}(-1)^i(\delta^n_i(x) - \delta^n_i\sigma^n_{j+1}\delta^n_{j+1}(x)) \\
= (-1)^{j+1}\delta^n_{j+1}(x) - 0 + 0 - (-1)^{j+3}\delta^n_{j+1}(x) = 0
\end{gathered}$$

Lo anterior se deduce de las identidades simpliciales y de que, para $k \geq j+1$ $\delta^n_k(y)) = 0 \in (N_{j+1}(A))_{n-1}$.

■

Nótese que $f_j i_j = 1_{N_{j+1}(A)}$. Esto se sigue de que si $n \geq j+2$, $f^n_j i^n_j(x) = f^n_j(x) = x - \sigma^n_{j+1}\delta^n_{j+1}(x) = x - 0 = x$.

Ahora, se define una familia morfismos de grupos $t^n_j : (N_j(A))_n \to (N_j(A))_{n+1}$, dadas por

$$t^n_j(x) = \begin{cases} (-1)^j\sigma^{n+1}_j(x) & n \geq j+1 \\ 0 & n \leq j \end{cases}$$

Lema 4.4. *Para toda j y para toda n, se cumple la igualdad siguiente*

$$1_{N_jA_n} - i^n_j f^n_j = \partial_n t^n_j + t^{n-1}_j \partial_{n-1} t^{n-1}_j$$

Demostración. Si $n \leq j+1$, ambos lados de la ecuación es 0.
Si $n \geq j+2$, entonces

$$\partial_n t_j^n(x) + t_j^{n-1}\partial_{n-1}(x) + i_j^n f_j^n(x) =$$
$$\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}\delta_i^n\sigma_{j+1}^n(x) + \sum_{k=j+1}^{n-1}(-1)^{k+j}\sigma_{j+1}^{n-1}\delta_k^{n-1}(x) + x - \sigma_{j+1}^{n-1}\delta_{j+1}^{n-1}(x) =$$
$$\sum_{i=j+3}^{n}(-1)^{i+j}\delta_i^n\sigma_{j+1}^n(x) + \sum_{k=j+1}^{n-1}(-1)^{k+j}\sigma_{j+1}^{n-1}\delta_k^{n-1}(x) + x - \sigma_{j+1}^{n-1}\delta_{j+1}^{n-1}(x) =$$
$$\sum_{i=j+3}^{n}(-1)^{i+j}\sigma_{j+1}^{n-1}\delta_{i-1}^{n-1}(x) + \sum_{k=j+1}^{n-1}(-1)^{k+j}\sigma_{j+1}^{n-1}\delta_k^{n-1}(x) + x - \sigma_{j+1}^{n-1}\delta_{j+1}^{n-1}(x) = x$$

■

Sea $f : M(A) \to N(A)$ el morfismo de cadenas tal que en grado n es la siguiente composición de morfismos

$$A_n \xrightarrow{f_0^n} (N_1(A))_n \xrightarrow{f_1^n} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}^n} N(A)_n$$

f es tal que $fi : N(A) \to N(A)$ es el morfismo identidad. Por otro lado, la colección de morfismos $T_n : (N(A))_n \to M(A)_{n+1}$ dada por

$$T_n = i_0^n i_1^n \cdots i_{n-2}^n t_{n-1}^n f_{n-2} \cdots f_0^n + i_0^n i_1^n \cdots i_{n-3}^n t_{n-2}^n f_{n-3} \cdots f_0^n + \cdots + i_0^n t_1^n f_0^n + t_0$$

es una homotopía $T : if \simeq 1_{M(A)}$. Se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.1. *[Teorema de normalización] La inclusión $i_A : N(A) \to M(A)$ es una equivalencia homotópica que además es natural.*

El Teorema de normalización, junto con el Corolario 3.1, implican lo siguiente.

Corolario 4.2. *Para toda $n \in N$ y para todo $A \in$ **sAb**, se tiene un isomorfismo*

$$H^n(M(A)) \cong H^n(N(A))$$

que además es natural.

Corolario 4.3. *Se tiene un isomorfismo natural*

$$M(A) \cong N(A) \oplus D(A).$$

Demostración. Considérese la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow D(A) \xrightarrow{i_A} M(A) \xrightarrow{f_A} N(A) \longrightarrow 0$$

Esta sucesión se escinde. Así, por la Proposición 3.5, se sigue el resultado. ■

En particular, uno de estos resultados implica la primera mitad del teorema de Dold-Kan. Otro más es necesario para probar la segunda mitad.

3. El funtor Γ

Hasta el momento, se tiene resuelta una parte de la equivalencia de Dold-Kan. Es decir, se ha construido uno de los funtores relacionados con esta equivalencia. En esta sección se motivará la construcción del funtor $\Gamma : \mathbf{CC}_+ \to \mathbf{sAb}$.

Sea C un complejo de cadena positivo. El funtor Γ debe cumplir que $C \cong N\Gamma(C)$. Ahora, por la proposición 4.3, se tiene que $N\Gamma(C) \cong M\Gamma(C)/D\Gamma(C)$. Por lo que C debe ser recuperado al "colapsar"las degeneraciones de $\Gamma(C)$. Ahora bien, por el Lema 1.3, las degeneraciones generan a todos los morfismos suprayectivos γ en Δ.

Por otro lado, cualquier morfismo inyectivo $d : [m] \hookrightarrow [n]$ induce un morfismo $d^* : N_n\Gamma(C) \to N_m\Gamma(C)$, que es nulo excepto en el caso de que $d = d_n^n$ y que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\cong"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\cong"] \\ N\Gamma(C)_n \arrow[r, "(-1)^n\delta_n^n"'] & N\Gamma(C)_{n-1} \end{tikzcd}$$

Además, Γ debe "agregar libremente"las degeneraciones, en el sentido de que estas no agregan información relevante al grupo abeliano simplicial. Con esta motivación, se procede a construir el funtor Γ.

Se define $\Gamma(C)$ en grado n como el grupo abeliano

$$\Gamma_n(C) = \bigoplus_{\gamma:[n]\twoheadrightarrow[k]} C_k$$

Donde la suma directa se toma sobre todos los morfismos $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ en Δ que son suprayectivos.

Dado un morfismo $\theta : [m] \to [n]$, el morfismo de grupos $\Gamma(C)(\theta) : \Gamma_n(C) \to \Gamma_m(C)$, se define en el sumando correspondiente a $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ de la siguiente manera: considérese la factorización epi-mono (Lema 1.2) del morfismo $\gamma\theta : [m] \to [k]$

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, two heads, "t"'] & {[n]} \arrow[d, two heads, "\gamma"] \\ {[s]} \arrow[r, hook, "d"'] & {[k]} \end{tikzcd}$$

Entonces se tiene la siguiente composición

$$C_k \xrightarrow{d^*} C_s \hookrightarrow \bigoplus_{\sigma:[m]\twoheadrightarrow[j]} C_j$$

Donde el morfismo de la derecha es la inclusión en el sumando correspondiente a $t : [m] \twoheadrightarrow [s]$ y d^* está dado por la regla

$$d^* = \begin{cases} (-1)^k \partial_k, & d = d_k^k \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, por la propiedad universal de la suma directa, se extiende a un único morfismo de grupos $\Gamma(C)(\theta) : \Gamma_n(C) \to \Gamma_m(C)$.

LEMA 4.5. $\Gamma(C) : \Delta^{op} \to \mathbf{Ab}$ *es un grupo abeliano simplicial.*

DEMOSTRACIÓN. Nótese que $\Gamma(C)(1_{[n]})$, en el sumando $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$, es la inclusión en el factor $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$, $C_k \hookrightarrow \bigoplus_{\sigma:[n]\twoheadrightarrow[j]} C_j$, por lo que $\Gamma(C)(1_{[n]}) = 1_{\Gamma_n(C)}$.

Ahora, sean $\theta : [m] \to [n]$, $\mu : [n] \to [r]$ y $\gamma : [r] \twoheadrightarrow [j]$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dd, "t"'] & {[n]} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\psi"'] & {[r]} \arrow[dd, "\gamma"] \\
 & {[k]} \arrow[dr, hook, "e"] & \\
{[s]} \arrow[ur, hook, "f"] \arrow[rr, hook, "d"'] & & {[j]}
\end{tikzcd}$$

Donde $e\psi$ es la factorización epi-mono de $\gamma\mu$, ft es la factorización epi-mono de $\psi\theta$ y $d = ef$. Así, dt es la factorización epi-mono de $\gamma\mu\theta$.
Si $d \neq d_j^j$, entonces $\Gamma(C)(\mu\gamma) = 0$ en el factor $\gamma : [r] \twoheadrightarrow [j]$. Por otro lado, $\Gamma(C)(\mu)\Gamma(C)(\mu) = 0$ en el factor $\gamma : [r] \twoheadrightarrow [j]$ siempre, ya que, o bien $\Gamma(C)(\theta) = 0$ o $\Gamma(C)(\mu) = 0$, o bien $\Gamma(C)(\theta) = (-1)^r \partial_t$ y $\Gamma(C)(\mu) = (-1)^{r+1}\partial_{r+1}$.
Si $d = d_j^j$, se tienen dos casos: o bien $f = d_k^k$ y $e = 1_{[k]}$ o $f = 1_{[j]}$ y $e = d_j^j$. En cualquiera de los dos casos $\Gamma(C)(\mu\theta) = \Gamma(C)(\theta)\Gamma(C)(\mu)$ en el sumando $\gamma : [r] \twoheadrightarrow [j]$. Como la elección de $\gamma : [r] \twoheadrightarrow [j]$ fue arbitraria, se concluye que $\Gamma(C)(\mu\theta) = \Gamma(C)(\theta)\Gamma(C)(\mu)$, por lo que $\Gamma(C)$ es un grupo abeliano simplicial. ■

Dado un morfismo de cadenas $f : C \to D$, este induce un morfismo de grupos abelianos $\Gamma_n(f) : \Gamma_n(C) \to \Gamma_n(D)$, que en el sumando $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ está dado por la composición

$$C_k \xrightarrow{f_k} D_k \hookrightarrow \bigoplus_{\sigma:[n]\twoheadrightarrow[j]} D_j$$

donde el morfismo de la derecha es la inclusión en el factor $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ de $\Gamma_n(D)$.

LEMA 4.6. *La colección de morfismos* $\Gamma(f) = \{\Gamma_n(f)\}$ *es un morfismo de grupos abelianos simpliciales.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\theta : [m] \to [n]$ y $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$, morfimos en Δ. Considerese la factorización epi-mono de $\gamma\theta$,

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, two heads, "t"'] & {[n]} \arrow[d, two heads, "\gamma"] \\ {[s]} \arrow[r, hook, "d"'] & {[k]} \end{tikzcd}$$

Si $d = d_k^k$, entonces $d^* = (-1)^k \partial_k$. Así el siguiente diagrama conmuta, pues f es un morfismo de cadenas

$$\begin{tikzcd} C_k \arrow[r, "(-1)^k\partial"] \arrow[d, "f_k"'] & C_{k-1} \arrow[d, "f_{k-1}"] \\ D_k \arrow[r, "(-1)^k\eta_k"'] & D_{k-1} \end{tikzcd}$$

Si $d \neq d_k^k$, $d^* = 0$, entonces $\Gamma(D)(\theta)\Gamma_n(f) = 0 = \Gamma_m(f)\Gamma(C)(\theta)$ en el factor $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$. En cualquiera de los dos casos, el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Gamma_n(C) \arrow[r, "\Gamma(C)(\theta)"] \arrow[d, "\Gamma_n(f)"'] & \Gamma_m(C) \arrow[d, "\Gamma_m(f)"] \\ \Gamma_n(D) \arrow[r, "\Gamma(D)(\theta)"'] & \Gamma_m(D) \end{tikzcd}$$

Con esto se concluye que $\Gamma(f)$ es un morfismo de grupos abelianos simpliciales. ∎

PROPOSICIÓN 4.4. $\Gamma : \mathbf{CC}_+ \to \mathbf{sAb}$ *es un funtor.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : C \to D$ y $g : D \to A$ morfismos de cadenas y $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ un morfismo en Δ. Se tienen las siguientes cadenas de morfismos

$$C_k \xrightarrow{1_{C_k}} C_k \hookrightarrow \Gamma_n C$$

y

$$C_k \xrightarrow{f_k} D_k \xrightarrow{g_k} A_k \hookrightarrow \Gamma_n A$$

De la primera se sigue que $\Gamma(1_C) = 1_{\Gamma(C)}$ y de la segunda que $\Gamma(gf) = \Gamma(g)\Gamma(f)$. ∎

Con esto se tienen los dos funtores de la equivalencia de Dold-Kan, por lo que en la siguiente sección se procede a demostrarla.

4. La equivalencia de Dold-Kan

El teorema de Dold-Kan, formulado por Albrecht Dold y Daniel Kan en artículos separados ([**1**] y [**5**]), establece una equivalencia entre las categorías de grupos abelianos simpliciales y complejos de cadena positivos. Durante este trabajo, se han construido las herramientas necesarias para entender tanto este teorema como sus aplicaciones.

En la primera sección de este capítulo se construyeron los funtores complejo de Moore y complejo normalizador. La proposición 4.3 y el teorema de normalización (corolario 4.1) implican que, aunque el funtor complejo de Moore no es el ideal, no dista mucho de serlo.

La construcción del funtor Γ explica el comportamiento que tienen los operadores de cara y de degeneración en grupos abelianos.

Sea C un complejo de cadena positivo, con diferencial ∂. Obsérvese que para toda $n \in \mathbb{N}$, C_n se incluye en $\Gamma_n(C)$ en el sumando correspondiente a $1_{[n]}$. Sea Φ_{C_n} la composición de esta inclusión con la proyección canónica $p_{C_n} : \Gamma_n(C) \twoheadrightarrow \Gamma_n(C)/D_n\Gamma(C)$.

Lema 4.7. *Para todo natural n, $\Phi_{C_n} : C_n \to \Gamma_n(C)/D_n\Gamma(C)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $\theta_n : \Gamma_n(C) \to (C)_n$ la proyección en el sumando $1_{[n]}$.Se afirma que $nuc(\theta_n) = D_n\Gamma(C)$.

Nótese que $nuc(\theta_n)$ consta de todos los sumandos $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ tales que $k < n$. Además, las degeneraciones $\sigma_i^n : \Gamma_{n-1}(C) \to \Gamma_n(C)$ en los sumandos $\gamma : [n-1] \twoheadrightarrow [k]$ están dados por la inclusión en el factor $\gamma s_i^n : [n] \twoheadrightarrow [k]$. Por lo que $D_n\Gamma(C) \subseteq nuc(\theta_n)$.

Para la otra contención, nótese que $nuc(\theta_m)$ consta de los vectores $(x_\gamma) \in \Gamma_n(C)$ tales que $x_{1_{[n]}} = 0$. También se debe recordar que si $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ es un morfismo supreyectivo diferente de la identidad, entonces $\gamma = s_{j_1}^{k+1} s_{j_2}^{k+2} \ldots s_{j_m}^n$. Si $x = (x_\gamma) \in nuc(\theta_n)$, $x = \sum_{\gamma:[n]\twoheadrightarrow[k]} \sigma_{j_m}^n \ldots \sigma_{j_1}^{k+1}(x'_\gamma)$, donde (x'_γ) es el vector tal que en el factor $1_{[k]}$ es x_γ y 0 en todos los demás. Por lo tanto $nuc(\theta_n) = D_n\Gamma(C)$.

Sea $\Theta_{C_n} : \Gamma_n(C)/D_n\Gamma(C) \to C_n$ el morfismo cociente. Θ_{C_n} es un isomorfismo. Más aún, $\Theta_{C_n}\Phi_{C_n} = 1_{C_n}$ y $\Phi_{C_n}\Theta_{C_n} = 1_{\Gamma_n(C)/D_n\Gamma(C)}$.

$(x_\gamma) \in \Gamma_n(C)$ es el vector tal que $x_\gamma \in C_k$ si $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ y $[(x_\gamma)] \in \Gamma_n(C)/D_n\Gamma(C)$ representa su clase de equivalencia. Si $x \in C_n$, entonces $\Theta_{C_n}\Phi_{C_n}(x) = \Theta_{C_n}[(x_\gamma)] = x_{1_{C_n}} = x$. Por otro lado, $\Phi_{C_n}\Theta_{C_n}[(x_\gamma)] = \Phi_{C_n}(x_{1_{C_n}}) = [(x_{1_{C_n}})] = [(x_\gamma)]$.

Así Φ_{C_n} tiene un inverso que es un isomorfismo y por lo tanto también es isomorfismo. ∎

Lema 4.8. *La coleción $\Phi_C = \{\Phi_{C_n}\}$ es un morfismo de cadenas.*

Demostración. Basta con mostrar que la colección $\Theta_C = \{\Theta_{C_n}\}$ es un morfismo de cadenas.

Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Gamma_n(C)/D\Gamma(C)_n \arrow[r, "(-1)^n\delta_n^n"] \arrow[d, "\Theta_{C_n}"'] & \Gamma_{n-1}(C)/D\Gamma(C)_{n-1} \arrow[d, "\Theta_{C_{n-1}}"] \\ C_n \arrow[r, "\partial_n"'] & C_{n-1} \end{tikzcd}$$

Nótese que el operador de cara $\delta_n^n : \Gamma_n(C)/D\Gamma(C)_n \to \Gamma_{n-1}(C)/D\Gamma(C)_{n-1}$ es 0 en todos los sumandos excepto en el correspondiente a $1_{[n]}$ y en este está dado por $(-1)^n\partial_n$. De esto se deduce que el diagrama conmuta y entonces Φ_C es un isomorfismo de cadenas ■

Proposición 4.5. *Se tiene un isomorfismo*

$$C \cong N\Gamma(C)$$

que además es natural en los complejos de cadena.

Demostración. Por la proposición 4.3, se tiene un isomorfismo

$$M\Gamma(C)/D\Gamma(C) \cong N\Gamma(C)$$

que además es natural. Solo falta probar que $\Phi_C : C \to M\Gamma(C)/D\Gamma(C)$ lo es. Esto se sigue de que si $f : C \to D$ es un morfismo de cadenas, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_n"'] & \Gamma_n(C) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\Gamma_n(f)"'] & \Gamma_n(C)/D\Gamma(C)_n \arrow[d, "\overline{\Gamma_n(f)}"] \\ D_n \arrow[r, hook] & \Gamma_n(D) \arrow[r, two heads] & \Gamma_n(D)/D\Gamma(D)_n \end{tikzcd}$$

■

Por otro lado, dado un grupo abeliano simplicial A, se tiene un morfismo de grupos abelianos $\Psi_{A_n} : \Gamma_n N(A) \to A_n$ dado en el sumando correspondiente a $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ por la composición

$$N(A)_k \hookrightarrow A_k \xrightarrow{A(\gamma)} A_n$$

donde el morfismo de la izquierda es la inclusión canónica.

Lema 4.9. *La colección de morfismos $\Psi_A = \{\Psi_{A_n}\}$ es un morfismo de grupos abelianos simpliciales.*

Demostración. Sean $\theta : [m] \to [n]$ y $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ morfismos en Δ. Considérese la descomposición epi-mono de $\gamma\theta$

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, two heads, "t"'] & {[n]} \arrow[d, two heads, "\gamma"] \\ {[s]} \arrow[r, hook, "d"'] & {[k]} \end{tikzcd}$$

Esto induce el siguiente diagrama, del que se sigue la naturalidad de Ψ_A

$$\begin{tikzcd} N(A)_k \arrow[r, hook] \arrow[d, "A(d)"'] & A_k \arrow[r, "A(t)"] \arrow[d, "A(d)"'] & A_n \arrow[d, "A(\theta)"] \\ N(A)_s \arrow[r, hook] & A_s \arrow[r, "A(\gamma)"] & A_n \end{tikzcd}$$

■

Proposición 4.6. *$\Psi_A : \Gamma N(A) \to A$ es un isomorfismo de grupos abelianos simpliciales que además es natural.*

Demostración. La prueba de que Φ_A es un isomorfismo se hace por inducción sobre n.

Si $n = 0$, se debe notar que $N(A)_0 = A_0$ y que el único morfismo de $[0]$ en si mismo es la identidad, por lo que $\Psi_{A_0} = 1_{A_0}$.
Supóngase que Φ_{A_k} es un isomorfismo para toda $k < n$. Por el corolario 4.3, se tiene que $A_n \cong N(A)_n \oplus D(A)_n$. $\sigma_j^n(x)$ está en la imagen de Ψ_{A_n} pues x está en la imagen de $\Psi_{A_{n-1}}$ y Ψ_A es un morfismo de grupos abelianos simpliciales. Si $x \in N(A)_n$, x está en la imagen de Ψ_{A_n} pues $N(A)_n$ es uno de los sumandos de $\Gamma_n N(A)$. Así Ψ_{A_n} es suprayectiva.
Para probar la inyectividad, sea $(x_\gamma) \in \Gamma_n N(A)$, tal que $\Psi_{A_n}((x_\gamma)) = 0$.
Si $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ es diferente de la identidad, entonces tiene una inversa izquierda $d : [k] \to [n]$ en Δ (esto se sigue de que si $\gamma = s_{j_1}^{k+1} s_{j_2}^{k+2} \dots s_{j_m}^{n}$ es su factorización en morfismos de co-degeneración, se toma $d = d_{j_m}^{k+1} \dots d_{j_1}^{n}$) y es tal que la componente de $\Gamma N(A)(d)((x_\gamma)) \in \Gamma_k N(A)$ que corresponde a $1_{[k]}$ es x_γ. Como $\Psi_{A_k} \Gamma N(A)(d)((x_\gamma)) = A(d)\Psi_{A_n}((x_\gamma)) = 0$ y Ψ_{A_k} es isomorfismo, se tiene que $\Gamma N(A)(d)((x_\gamma)) = 0$. Así $x_\gamma = 0$ para los sumandos en los que γ es diferente de la identidad. Para el sumando correspondiente a $1_{[n]}$, se tiene la inclusión $N(A)_n \hookrightarrow A_n$, lo que implica que $x_{1_{[n]}} = 0$. Esto demuestra que Ψ_{A_n} es isomorfismo y concluye el paso inductivo.

Para la naturalidad, sea $f : A \to B$ un morfismo de grupos abelianos. Si $\gamma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ es uun morfismo en Δ, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N(A)_k \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_k"'] & A_k \arrow[r, "A(\gamma)"] \arrow[d, "f_k"'] & A_n \arrow[d, "f_n"'] \\ N(B)_k \arrow[r, hook] & B_k \arrow[r, "B(\gamma)"] & B_n \end{tikzcd}$$

De este diagrama se sigue la naturalidad de Ψ. ■

Con todo esto, el resultado principal de este trabajo queda demostrado.

Corolario 4.4 (Teorema de Dold-Kan). *Los funtores $N : \mathbf{sAb} \to \mathbf{CC}_+$ y $\Gamma : \mathbf{CC}_+ \to \mathbf{sAb}$ forman una equivalencia de categorías.*

Este teorema tiene muchas implicaciones inmediatas. Por ejemplo, las construcciones sobre los complejos de cadenas, vistas en el capítulo 3, tienen sus análogos en la categoría de grupos abelianos simpliciales.

Nótese que si $f, g : A \to B$ es un morfismo de grupos abelianos, $N(f + g) = N(f) + N(g)$. Es decir, el complejo normalizador es un funtor aditivo. Así, N es una equivalencia entre categorías abelianas (véase la sección 3 del capítulo 3 y [**10**]).

En el último capítulo de este trabajo se analizarán algunas otras aplicaciones de este teorema.

Capítulo 5

Complejos de Eilenberg-Mac Lane

El proposito de la topología algebraica es asignar invariantes algebraicos a los espacios topológicos, esto con la intención de diferenciar las propiedades que se preservan bajo ciertas relaciones. De entre los primeros invariantes que se construyeron, se encuentran los grupos de homotopía π_n (para la definición y las propiedades de estos, véase [**8**]).

Uno de los problemas clásicos de la topología algebraica, que est"a relacionado con estos invariantes, es el de los espacios de Eilenberg-Mac Lane. Para un grupo G y un número natural $n > 0$, un espacio de Eilenberg-Mac Lane del tipo (G, n) es un espacio toplógico $K(G, n)$ conectable por trayectorias, tal que

$$\pi_k(K(G,n)) = \left\{ \begin{array}{ll} G, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{array} \right. .$$

Como para cualquier espacio topológico, los grupos de homotopía de orden $n \geq 2$ son abelianos, la existencia de un espacio $K(G, n)$, para $n \geq 2$, solo tiene sentido si G es abeliano.

Se conocen algunos ejemplos de estos espacios. Para el grupo abeliano $\mathbb{Z}$, su espacio de Eilenberg-Mac Lane, $K(\mathbb{Z}, 1)$, es la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$. En general, cualquier grupo abeliano libre con n generadores tiene como espacio de Eilenberg-Mac Lane, $K(\mathbb{Z}^n, n)$, al $n-$toro $\mathbb{T}^n$, es decir, el producto de n copias de la circunferencia unitaria.

Los espacios proyectivos infinitos real y complejo, $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ se construyen como límites directos de los sistemas codirigidos

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \ldots$$

y

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \hookrightarrow \ldots$$

Estos sirven como modelos para los espacios de Eilenberg-Mac Lane, $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$ y $K(\mathbb{Z}, 2)$, respectivamente.

Los cálculos, en general, de modelos para estos espacios son complicados. Incluso probar la existencia de los espacios de Eilenberg-Maclase fue una tarea complicada. En este capítulo se analizará una forma de construirlos a través de la equivalencia de Dold-Kan.

1. Homotopía y homología

Previo a la construcción de los complejos de Eilenberg-Mac Lane, se analizarán algunas implicaciones del Teorema de Dold-Kan.

Proposición 5.1. *Sean $f, g : A \to B$ un morfismo de grupos abelianos simpliciales tales que $f \simeq g$. Entonces $M(f) \simeq M(g)$.*

Demostración. Sea $h : f \simeq g$ una homotopía. Se afirma que la colección de funciones $h_n^* = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j h_j^n$ forman una homotopía de cadenas. Sea $x \in A_n$, entonces

$$\eta_{n+1}h_n^*(x) + h_{n-1}^*\partial_n(x) =$$

$$\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{j+i}\epsilon_j^{n+1}h_i^n(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{k+l}h_k^{n-1}\delta_l^n(x) =$$

$$f_n(x) - g_n(x) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{j+i}\epsilon_j^{n+1}h_i^n(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{k+l}h_k^{n-1}\delta_l^n(x) =$$

$$f_n(x) - g_n(x)$$

Lo anterior se sigue del hecho de que h es una homotopía. ■

Corolario 5.1. *Sean $f, g : A \to B$ morfismos de cadenas. Si $f \simeq g$, entonces $N(f) \simeq N(g)$.*

Proposición 5.2. *Sea A un grupo abeliano simplicial. Entonces $\pi_n(A, 0) = H_n(M(A))$ para toda $n \geq 1$.*

Demostración. Nótese que $\tilde{A}_n = \cap_{j=0}^{n} nuc(\delta_i^n) = nuc(\partial_n)$. Esto se deduce de que $x \in \tilde{A}_n$ si y solo si $\delta_i^n(x) = 0$, para toda i.

Por otro lado, sean $x, y \in \tilde{A}_n$ y $z \in A_{n+1}$ tal que $\delta_i^{n+1}(z) = 0$, para $i \leq n-1$, $\delta_n^{n+1}(z) = x$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(z) = y$, es decir, z es una homotopía entre x y y. Entonces x y y están relacionados si y solo si existe $z \in A_{n+1}$ tal que $x - y = \delta_n^{n+1}(z) - \delta_{n+1}^{n+1}(z) \in im(\partial_{n+1})$.

Así, las clases de equivalencia de la relación de homotopía son las mismas clases del cociente $H_n(M(A))$.

Más aún, si $[x], [y] \in \pi_n(A, 0)$ y $z \in A_{n+1}$ es tal que $\delta_i^{n+1}(z) = 0$ para $i < n-1$, $\delta_{n-1}^{n+1}(z) = x$ y $\delta_{n+1}^{n+1}(z) = y$, entones $x + y - \delta_n^{n+1}(z) = \delta_{n-1}^{n+1}(z) + \delta_{n+1}^{n+1}(z) - \delta_n^{n+1}(z) \in im(\partial_{n+1})$. Entonces $[x][y] = [x+y]$. ■

Esta proposición, junto con el Teorema de normalización, implican lo siguiente.

Corolario 5.2. *Sea A un grupo abeliano simplicial. Entonces $\pi_n(A, 0) \cong H_n(N(A))$ para toda $n \geq 1$.*

Sea C un complejo de cadena positivo. El isomorfismo natural $\Phi_C : N\Gamma(C) \to C$ induce un isomorfismo natural $H_n(N\Gamma(C)) \cong H_n(C)$. Del teorema de Dold-Kan y del corolario 5.2, se deduce lo siguiente.

COROLARIO 5.3. *Sea C un complejo de cadena. Entones $H_n(C) \cong \pi_n(\Gamma(C), 0)$. Este isomorfismo es natural en complejos de cadena positivos.*

Una de las implicaciones de estos resultados es que el primer grupo de homotopía de un grupo abeliano simplicial siempre es abeliano.

2. Los complejos de Eilenberg-Mac Lane

El problema de los espacios de Eilenberg-Mac Lane de la topología algebraica clásica puede ser transladado a los conjuntos simpliciales. Dado que en la categoría de conjuntos simpliciales, más específicamente en la subcategoría de complejos de Kan, se tiene una noción de homotopía, es natural preguntarse por el concepto de un complejo de Eilenberg-Mac Lane.

DEFINICIÓN 5.1. *Sean G un grupo y $n \in \mathbb{N}^+$. Un complejo de Eilenberg-Mac Lane del tipo (G, n) es un complejo de Kan punteado $(K(G, n), \phi)$ tal que*

$$\pi_k((K(G,n)), \phi) = \begin{cases} G, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} .$$

Con los resultados obtenidos durante este trabajo, demostrar la existencia de los complejos de Eilenberg-Mac Lane resulta fácil, al menos para el caso de grupos abelianos.

TEOREMA 5.1. *Para cualquier grupo abeliano A y todo número natural $n \geq 1$, existe un complejo de Eilenberg-Mac Lane del tipo (A, n)*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A[n]$ el complejo de cadena concentrado en grado n (ejemplo 3.5). Por la proposición 3.2, se tiene que

$$H_k(A[n]) = \begin{cases} A, & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Sea $(K, 0) = (\Gamma(A[n-]), 0)$, visto como complejo de Kan punteado al olvidar la estructura de grupo abeliano. El corolario 5.3 implica que este es un complejo de Eilenberg-Mac Lane del tipo (A, n). ■

Como los grupos de homotopía de orden mayor que 1 siempre son abelianos (proposición 2.10), el teorema anterior resuelve por completo el problema de la existencia de Eilenberg-Mac Lane para $n \geq 2$. La existencia de complejos de Eilenber-Mac Lane del tipo $(G, 1)$ para grupos no abelianos requiere de diferentes herramientas a las desarrolladas durante este trabajo.

Se recuerda que un grupoide es una categoría (pequeña) $\mathbf{C}$ en la que todos los morfismos son isomorfismos. En particular, dado un grupo G, la caegoría $\mathbf{G}$ que consiste únicamente de un objeto $*$ y cuyo conjunto de morfismos es el grupo G, es un grupoide.

El siguiente resultado fue probado originalmente por Daniel Quillen. Su demostración no es incluida en esta tesis, pero puede ser consultada en [**4**](Lema 3.5).

PROPOSICIÓN 5.3. *Si* $\mathbf{C}$ *es un grupoide, entonces* $\mathbf{N}\mathbf{C}$ *es un complejo de Kan.*

En particular, si $\mathbf{G}$ es el grupoide asociado a un grupo G, $\mathbf{B}G$ es un complejo de Kan. El siguiente resultado, cuya prueba también puede ser consultada en [**4**](proposición 7.8), resuelve por completo el problema de los complejos de Eilenberg-Mac Lane.

TEOREMA 5.2. *Dado un grupo* G*,* $\mathbf{B}G$ *es un* $K(G,1)$.

La última sección será dedicada a hacer algunos comentarios sobre la resolución del problema de los espacios de Eilenberg-Mac Lane atraves de los conjuntos simpliciales.

3. Realización Geométrica

Este capítulo inició con la presentación de uno de los problemas clásicos de la topología algebraica: la existencia de espacios de Eilenberg-Mac Lane.

Durante este trabajo, se han presentado algunas situaciones análogas entre la categoría de espacios topológicos y la de conjuntos simpliciales. Una de estas analogías es la relación entre la teoría de homotopía de espacios topológicos y la de conjuntos simpliciales.

Desde el principio se estableció una relación entre espacios topológicos y conjutos simpliciales: el funtor complejo singular $S : \mathbf{Top} \to \mathbf{sSet}$. En esta sección se analizará una forma de construir un espacio topológico a partir de un conjunto simplicial.

Dado un conjunto simplicial K, con operadores de cara y de degeneración δ_i^n y σ_i^n, su realización gométrica se define de la siguiente manera:

$$|K| = \left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} (K_n \times \Delta_n) \right) / \sim$$

donde K_n tiene la topología discreta para toda n y la relación de equivalencia $\sim$ identifica puntos de la forma $(\delta_i^n(k), x) \sim (k, d_n^i(x))$ y $(\sigma_i^n(k), x) \sim (k, s_n^i(x))$. Si $k \in K_n$ y $v \in \Delta_n$, $|k, v|$ representa la clase de equivalencia de (k, v).

Si $f : K \to L$ es un morfismo de conjuntos simpliciales y ϵ_i^n y τ_i^n son los operadores de cara y de degeneración de L, respectivamente, f induce una función continua $|f| : |K| \to |L|$, dada por $|f|(|k, v|) = |f_n(k), v|$, con $k \in K_n$. $|f|$ está bien definida, pues, para el caso de las caras,

$$\begin{aligned}|f|(|\delta_i^n(k), v|) = |f_{n-1}\delta_i^n(k), v| = \\ |\epsilon_i^n f_n(k), v| = |f_n(k), d_n^i(v)| = \\ |f|(|k, d_i^n(v)|)\end{aligned}$$

Análogamente, para las degeneraciones, $|f|(|\sigma_i^n(k), v|) = |f|(|k, s_i^n(v)|)$. Además, $|f|$ es continua por la propiedad universal de las identificaciones.

PROPOSICIÓN 5.4. $|\_| : \mathbf{sSet} \to \mathbf{Top}$ *es un funtor.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : K \to L$ y $g : L \to M$ morfismos de conjuntos simpliciales.
$|1_K|(|k, v|) = |k, v|$, por lo que $|1_K| = 1_{|K|}$.
$|gf|(|k, v|) = |g_n f_n(k), v| = |g|(f_n(k), v) = |g||f|(|k, v|)$. Así $|gf| = |g||f|$. ∎

Por la proposición 2.1, el complejo singular de todo espacio topológico es un complejo de Kan. De la misma manera, la realización geométrica de todo conjunto simplicial tiene características especiales. John Milnor demostró, en su artículo *The geometric realization of a semisimplicial set* de 1957, que la realización geométrica de cualquier conjunto simplicial tiene estructura de complejo CW (para mayores detalles sobre la definición y propiedades de estos, véase [**8**]).

La proposición 2.7 establece una biyección natural entre el conjunto de componentes conexas por trayectorias de un espacio topológico X y el conjunto de componentes conexas de su complejo singular. De hecho, el funtor complejo singular establece un isomorfismo natural entre los grupos de homotopía de X con los grupos de homotopía de $S(X)$.
De manera análoga, el funtor realización geométrica respeta la estructura homotópica de los complejos de Kan. Las demostraciones de los siguientes resultados pueden ser consultadas en [**4**] y en [**6**].

PROPOSICIÓN 5.5. *Sean $f, g : K \to L$ morfismos de conjuntos simpliciales, con K y L complejos de Kan. Entonces $f \simeq g$ si y solo si $|f| \simeq |g|$.*

PROPOSICIÓN 5.6. *Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Entonces $f \simeq g$ si y solo si $S(f) \simeq S(g)$.*

PROPOSICIÓN 5.7. *Sea (K, ϕ) un complejo de Kan punteado. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene un isomorfismo natural*

$$\pi_n(K, \phi) \cong \pi_n(|K|, |\phi, e_1|)$$

En particular, estos resultados implican que la relación de homotopía entre morfismos entre complejos de Kan es de equivalencia.

Todos estos reultados permiten extender la noción de homotopía en complejos de Kan a los conjuntos simpliciales en general. Así, dado un conjunto simplicial K, sus grupos de homotopía se definen como $\pi_n(K, \phi) = \pi_n(S(|K|), \phi_*)$, donde ϕ_* es el vértice correspondiente a la clase de (ϕ, e_1).

Con respecto al problema inicial de este capítulo, la proposición 5.7 junto con el teorema 5.1 y la proposición prueban 5.2 prueban la existencia de los espacios de Eilenberg-Mac Lane.

Apéndice A

Conjuntos Convexos

Definición A.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que A es convexo si para cualesquiera $x, y \in A$, el segmento de recta que une x con y queda contenido en A.*

Ejemplo A.1. *Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $d > 0$, entonces $B_d(x)$ es convexo.*

Proposición A.1. *Sea $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una colección de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, entonces $\cap_{i\in\mathcal{I}} A_i$ es un conjunto convexo.*

Definición A.2. *Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$, la envolvente convexa de B es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a B y se denota por $[B]$.*

Definición A.3. *Un conjunto de vectores $\{v_0, \ldots, v_q\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es afinmente independiente si $\{v_0 - v_q, \ldots, v_{q-1} - v_q\}$ es linealmente independiente.*

Definición A.4. *Sean $x_0, \ldots, x_q \in \mathbb{R}^n$, una combinación convexa de estos es un punto x de la forma*

$$x = \sum_{k=0}^{q} t_k x_k$$

tal que $t_k \geq 0$ para toda k y además $\sum_{k=0}^{q} t_k = 1$.

Por ejemplo, si $x, y \in R^n$, $tx + (1-t)y$ es una combinación convexa de x, y.
Describir la envolvente convexa de un conjunto cualquiera suele ser difcil, pero para conjuntos finitos es fácil de hacer.

Proposición A.2. *Si $x_0, \ldots, x_q \in \mathbb{R}^n$, entonces la envolvente convexa*

$$[x_0 \ldots x_q] = \{\sum_{k=0}^{q} t_k x_k | t_k \geq 0 \forall k, \sum_{k=0}^{q} t_k = 1\}.$$

Proposición A.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{v_0, \ldots, v_q\}$ es afinmente independiete.*
2. *Para todo $x \in [v_0 \ldots v_q]$ existe una única combinación convexa $\sum_{k=0}^{q} t_k v_k = x$*

Definición A.5. *Sea $\{p_0, \ldots, p_n\}$ un conjunto afinmente independiente y sea $A = [p_0 \ldots p_n]$ el n-simplejo que genera, un mapeo afín $T : A \to \mathbb{R}^k$ es una función* *que satisface*

$$T(\sum t_i p_i) = \sum t_i T(p_i)$$

siempre que $\sum t_i = 1$, $0 \leq t_i$.

Es claro que un mapeo afín está determinado por su valor en los vértices del n-simplejo.

PROPOSICIÓN A.4.

1. *Sean* $[p_0 \dots p_n]$, $[q_0 \dots q_m]$ *n y m-simplejos, respectivamente, y sea* $f : \{p_0, \dots, p_n\} \to \{q_0 \dots q_m\}$ *una función. Entonces existe un único mapeo afín* $T : [p_0 \dots p_n] \to [q_0 \dots q_m]$ *tal que* $T(p_i) = f(p_i)$ *para cada* $i \in \{0, \dots, n\}$.
2. *Todo mapeo afín es continuo.*

Apéndice B

Teoría de Categorías

1. Conceptos Básicos

DEFINICIÓN B.1. *Una categoría* $\mathbf{C}$ *consta de una colección de objetos* $Obj(\mathcal{C})$*, para cada par de objetos* $A, B \in Ob(\mathbf{C})$ *un conjunto de morfismos o flechas* $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ *tal que* $Hom_{\mathbf{C}}(A, B) \cap Hom_{\mathbf{C}}(A', B') = \emptyset$ *si* $A \neq A'$ *o* $B \neq B'$ *y una regla de composición* $\circ : Hom_{\mathbf{C}}(A, B) \times Hom_{\mathbf{C}}(B, C) \to Hom_{\mathbf{C}}(A, C)$ *(denotada por* $f \circ g$*) para cualesquiera* $A, B, C \in Obj(\mathbf{C})$ *que cumplen lo siguiente:*

1. *La regla de composición es asociativa, es decir,* $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *siempre que tales composiciones tengan sentido.*
2. *para cada objeto* A *en* $\mathbf{C}$ *existe un morfismo identidad* $1_A \in Hom_{\mathbf{C}}(A, A)$ *tal que* $1_A \circ f = f$ *y* $g \circ 1_A = g$ *para cualesquiera* $f \in Hom_{\mathbf{C}}(B, A)$ *y* $g \in Hom_{\mathbf{C}}(A, C)$*.*

NOTACIÓN B.1. *En lugar de escribir* $A \in Obj(\mathbf{C})$ *se suele escribir* $A \in \mathbf{C}$ *y en lugar de escribir* $f \circ g$ *se simplifica a* fg*.*

Algunos ejemplos de categorías son: Conjuntos y funciones, denotada por **Set**; espacios vectoriales y transformaciones lineales sobre un campo k, que se denota $\mathbf{Vect}_k$; espacios topológicos y transformaciones continuas, **Top**; grupos abelianos y morfismos de grupos **Ab**, etc.

DEFINICIÓN B.2. *Dadas dos categorías* $\mathbf{C}$ *y* $\mathbf{D}$*, un funtor (covariante)* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *es una asignación tal que si* $A \in \mathbf{C}$*, entonces* $F(A) \in \mathbf{D}$ *y si* $f : A \to B$ *es un morfismo en* $\mathbf{C}$ *entonces* $F(f) : F(A) \to F(B)$ *es un morfismo en* $\mathbf{D}$ *y que cumple que:*

1. $F(1_A) = 1_{F(A)}$
2. $F(fg) = F(f)F(g)$

Un funtor contravariante es una asignación como la anterior pero tal que si $f : A \to B$ *es un morfismo en* $\mathbf{C}$*, entonces* $F(f) : F(B) \to F(A)$ *es un morfismo en* $\mathbf{D}$ *y tal que cumple la propiedad 1 de lo anterior y en vez de 2 cumple:*

2'. $F(fg) = F(g)F(f)$

Algunos ejemplos de funtores son:

1. Sea $\mathbf{C}$ la cateogoría de espacios topológicos (o bien la categoría de Grupos) y sea $A \in \mathbf{C}$ fijo, entonces la asignación $H_A(X) = Hom_{\mathbf{C}}(A, X)$ es un funtor (covariante) que toma valores en **Set**, donde $H_A(f) : H_A(X) \to H_A(Y)$ y entonces $H_A(f)(\varphi) = f \circ \varphi$.
2. Análogo al ejemplo anterior se tiene el funtor $H^A(X) = Hom_{\mathbf{C}}(X, A)$, el cual es covariante y cuya regla de correspondencia en morfismos es $H^A(f) : H^A(Y) \to H^A(X)$ tal que $H^A(f)(\varphi) = \varphi \circ f$.
3. Sea X un conjunto y sea $F(X)$ el grupo libre abeliano con base X, la propiedad universal del grupo libre implica que este es un funtor covariante de la categoría de conjuntos en la de grupos abelianos.

Definición B.3. *Dados dos Funtores $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ (ambos de la misma variancia), una transformación natural $\eta : F \to G$ es una colección de morfismos en $\mathbf{D}$ $\{\eta_A : F(A) \to G(A)\}_{A \in \mathbf{C}}$ tales que si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces $\eta_B F(f) = G(f)\eta_A$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Dos funtores $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ son naturalmente isomorfos si existe una transformación natural $\eta : F \to G$ tal que para todo $X \in \mathbf{C}$ $\eta_X : F(X) \to G(X)$ es un isomorfismo.

Definición B.4. *Sea $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, un funtor. Se dice que F es una equivalencia de categorías si existen $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtor y $\eta : FG \to 1_{\mathbf{D}}$, $\theta : 1_{\mathbf{C}} \to GF$ isomorfismos naturales.*

Existe otra forma de caracterizar las equivalencias de categorías que puede llegar a ser más práctica.

Definición B.5. *Sea $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtor. Se dice que F es:*

1. *Fiel si para cualesquiera $A, B \in \mathbf{C}$, la función*
$$F_{A,B} : Hom_{\mathbf{C}}(A, B) \to Hom\mathbf{D}(F(A), F(B))$$
dada por $F_{A,B}(f) = F(f)$, es inyectiva
2. *Pleno si para cualesquiera $A, B \in \mathbf{C}$ la función*
$$F_{A,B} : Hom_{\mathbf{C}}(A, B) \to Hom\mathbf{D}(F(A), F(B))$$
es suprayectiva
3. *Esencialmente suprayectivo (o denso) si para todo $X \in \mathbf{D}$ existe $Y \in \mathbf{C}$ tal que $F(Y) \simeq X$.*

TEOREMA B.1. *Sea $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtor. F es una equivalencia de categorías si y sólo si F es fiel, pleno y escencialmente suprayectivo.*

2. Lema de Yoneda

Uno de los conceptos más importantes en la teoría de categorías es el *Lema de Yoneda* ya que este tiene muchas implicaciones.

DEFINICIÓN B.6. *Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Se dice que $\mathbf{C}$ es pequeña si la colección de objetos $Obj(\mathbf{C})$ es un conjunto.*

Si G es un grupo y $\mathbf{G}$ es la categoría cuyo conjunto de objetos consta de un solo punto y su conjunto de morfismos es G, es un ejemplo de una categría pequeña.

DEFINICIÓN B.7. *Sean $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funtores (covariantes o contravariantes). $Nat(F, G)$ denota la colección de transformaciones naturales de F a G.*

EL lema de Yoneda se enuncia de la siguiente manera:

LEMA B.1 (Lema de Yoneda). *Sea $\mathbf{C}$ una categoría. Para todo funtor $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$, existe una biyección $Nat(h^C, F) \cong F(C)$, donde h^C es el funtor representable $Hom_{\mathbf{C}}(\_, C)$. Además esta biyección es natural en los funtores $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ y en los objetos de $\mathbf{C}$.*

La demostración del Lema de Yoneda se basa en construir la biyecciones naturales $\Phi_{F,C} : Nat(h^C, F) \to F(C)$ dada por $\Phi_{F,C}(\eta) = eta_C(1_C)$ y demostrar que es natural. Tanto a esta biyección conmo su inversa se les conoce como morfismo de Yoneda.

Bibliografía

[1] Dold, A. (1958). Homology of Symmetric Products and Other Functors of Complexes. Annals of Mathematics, 68(1), second series, 54-80.

[2] Eilenberg, S., Zilber, J. (1950). Semi-Simplicial Complexes and Singular Homology. Annals of Mathematics, 51(3), second series, 499-513.

[3] Friedman, G. (2012). An Elementary Ilustrated Introduction to Simplicial Sets, Rocky Mountain Journal of Mathematics 42 (2012), 353-424

[4] Goers, P. Jardine, J.F (2009) Simplicial Homotopy Theory, Birkhaser Verlag

[5] Kan, D. (1958). Functors Involving C.S.S. Complexes. Transactions of the American Mathematical Society, 87(2), 330-346.

[6] May, J.P. (1967). Simplicial Objects in Algebraic Topology. Chicago: The University of Press

[7] Mac Lane, S. (1971). Categories for the Working Mathematician. New York: Springer-Verlag.

[8] Rotman, J.J. (2013). An Introduction to Algebraic Topology. Nueva York: Sprinverg-Verlag

[9] Selick, P. (1997). Introduction to Homotopy Theory. Rhode Island: American Mathematical Society

[10] Weibel, C.A. (1994). An Introduction to Homological Algebra. Cambridge: Cambridge University Press