UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS AL ÁLGEBRA LINEAL Y AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

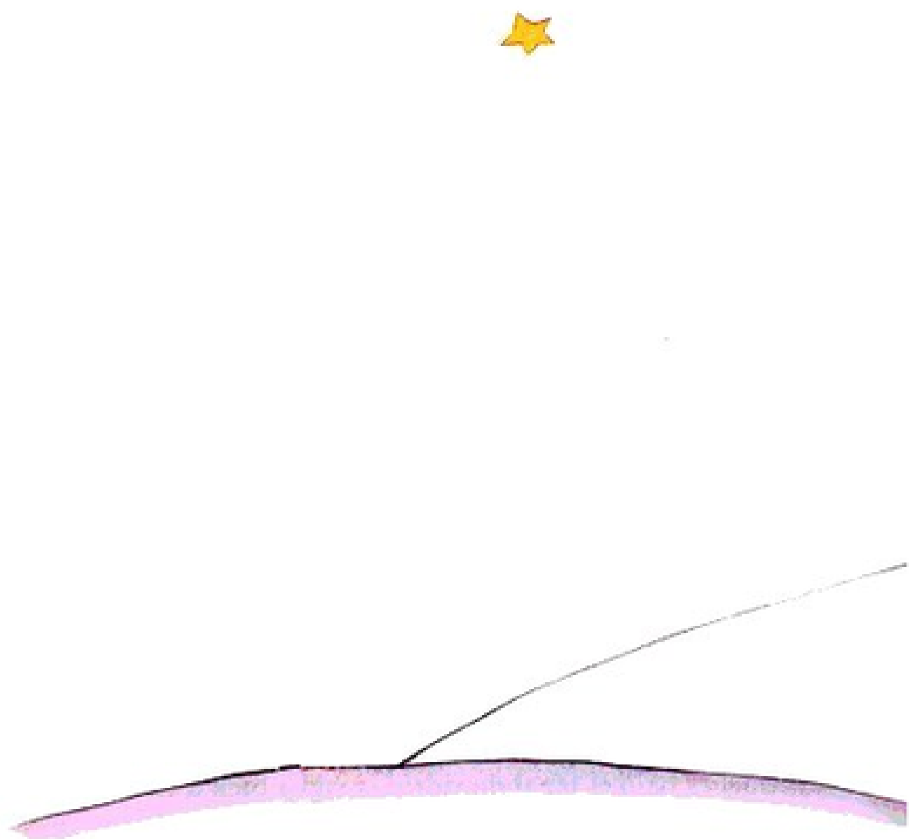
P R E S E N T A :

ALEJANDRO RÍOS HERREJÓN

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2019

1.Datos del alumno:	
Apellido paterno	Ríos
Apellido materno	Herrejón
Nombre(s)	Alejandro
Teléfono	(55) 85 51 33 68
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	312230146
2. Datos del tutor:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Roberto
Apellido paterno	Pichardo
Apellido materno	Mendoza
3. Datos del sinodal 1:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Ángel
Apellido paterno	Tamariz
Apellido materno	Mascarúa
4. Datos del sinodal 2:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	David
Apellido paterno	Meza
Apellido materno	Alcántara
5. Datos del sinodal 3:	
Grado	Dra.
Nombre(s)	Gabriela
Apellido paterno	Campero
Apellido materno	Arena
6. Datos del sinodal 4:	
Grado	Dr.
Nombre(s)	Alejandro
Apellido paterno	Dorantes
Apellido materno	Aldama
7. Datos del trabajo escrito:	
Título	Aplicaciones de la Teoría de Conjuntos al Álgebra Lineal y al Análisis Matemático
Subtitulo	-
Número de páginas	76
Año	2019



"This is, to me, the loveliest and saddest landscape in the world. It is the same as that on the preceding page, but I have drawn it again to impress it on your memory. It is here that the little prince appeared on Earth, and disappeared.

Look at it carefully so that you will be sure to recognise it in case you travel some day to the African desert. And, if you should come upon this spot, please do not hurry on. Wait for a time, exactly under the star. Then, if a little man appears who laughs, who has golden hair and who refuses to answer questions, you will know who he is. If this should happen, please comfort me. Send me word that he has come back."

— Antoine de Saint-Exupéry, The Little Prince

AGRADECIMIENTOS

A mi mamá, sin duda alguna la principal culpable de que me encuentre en donde estoy ahora. No hay palabras suficientes para agradecerte por todo lo que has hecho y has sacrificado por mí; prácticamente, tú sola me has hecho salir adelante sin rendirte jamás, eres una mujer verdaderamente admirable y es un orgullo para mí ser tu hijo. Gracias por ser siempre un pilar inquebrantable en mi vida y por enseñarme todo lo que en una escuela no se puede aprender.

A mi abuelita, gracias por intervernir cuando trabajaba o estudiaba para recordarme que tenía que comer o dormir; literalmente, me has mantenido sano y fuerte en contra de mi voluntad. Cada interrupción despejaba mi mente y me ayudaba a recuperar la serenidad para seguir, gracias por tu continua e indefectible preocupación.

A mi papá, a pesar de que jamás vayas a leer estas líneas quiero agradecerte por siempre tener las palabras precisas para iluminar mis noches más oscuras; aún dentro de tu enfermedad, siempre supiste cómo brindarme luz y recuperar mi confianza para seguir caminando. Siempre representarás para mí el hombre que quiero ser algún día, aunque honestamente, es probable que jamás te alcance.

Al incomparable Dr. Roberto Pichardo, en el momento en que estudiar esta carrera dejó de sentirse acertado, conseguiste que las matemáticas recuperaran toda su magia y se volviera a encender mi pasión por la ciencia; esto en una única clase y con un suéter al revés. No me canso de agradecer todo lo que has hecho por mí, espero que este sea el primero de muchos trabajos juntos que, cabe mencionar, sin tu ayuda y dirección no hubiera quedado tan bonito.

A mis más queridas personas, Lorena, José Pablo, Andrea, Pablo, Marcela, Sergio, Daniela, Emigdio, Zuriel, Adrián, por mencionar algunas, gracias por su eterna paciencia y su amor incondicional; gracias por comprenderme y haberse quedado durante todo este tiempo, si es difícil para ustedes, imagínense para mí que convivo conmigo todos los días. Ustedes son el motor que me da vida, me hace seguir adelante y me da ganas de superarme a mí mismo constantemente. Sin ustedes, no existo yo, muchas gracias.

RESUMEN

En la actualidad el alcance de la teoría de conjuntos es comúnmente desestimado por las personas que no conocen sus aplicaciones fuera de la teoría misma. Por eso, el objetivo de este trabajo es exponer la extensa capacidad que tienen las herramientas conjuntistas en otras áreas, como el Álgebra Lineal y el Análisis Matemático, para facilitar su estudio y proporcionar nuevos resultados.

El primer capítulo de este texto está dedicado a familiarizar al lector con la notación y algunas propiedades básicas que posee el conjunto de los números reales respecto a la topología, la medida de Lebesgue y las funciones continuas del espacio en sí mismo; concluímos esta sección con una característica notable del producto topológico de espacios discretos de la misma cardinalidad y la utilizamos para construir una descomposición de la recta real en conjuntos de tamaño continuo que, además, resultan ser orden-isomorfos a los números irracionales.

Para el segundo capítulo se abordan los temas selectos del Álgebra Lineal concentrándose en el estudio de los números reales vistos como espacio vectorial sobre los racionales. A continuación, se presentan dos ejemplos de espacios de dimensión infinita acompañados con resultados que desafían a la intuición y se complementan con una caracterización de la dimensión en términos de transformaciones lineales. Además, se trabajó con la ecuación funcional de Cauchy para construir conjuntos de Bernstein y bases de Hamel no medibles; finalizando con el teorema de Erdős-Kakutani, que relaciona las mencionadas bases de Hamel con la Hipótesis del Continuo.

El tema central del tercer capítulo es el Análisis Matemático, dedicado a la conexión entre la Hipótesis del Continuo con las funciones fuertemente Darboux y las funciones constantes en ninguna parte; finalizando con un cardinal asociado a las funciones casi continuas, estableciendo resultados acerca de su cofinalidad y su relación con otros cardinales de la misma índole.

Posteriormente, el último capítulo utilizará el método de Forcing para construir extensiones genéricas, en aras de verificar que el cardinal definido en el capítulo anterior, puede

ser forzado a ser, prácticamente, cualquier cardinal cuya cofinalidad rebase al primer ordinal no numerable. Esto demostraría que los axiomas de ZFC no son suficientes para decidir el tamaño del cardinal en cuestión.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES 1

1.1 Teoría de Conjuntos 1

1.2 Subconjuntos especiales de $\mathbb{R}$ 4

1.3 El conjunto de Cantor 6

1.4 Funciones continuas 11

1.5 ${}^{\omega}\mathbb{Z}$ y los números irracionales 12

CAPÍTULO 2: APLICACIONES AL ÁLGEBRA LINEAL 20

2.1 Independencia lineal y bases de Hamel 20

2.2 La ecuación funcional de Cauchy 31

2.3 El Teorema de Erdős-Kakutani 36

CAPÍTULO 3: APLICACIONES AL ANÁLISIS MATEMÁTICO 40

3.1 Primeros resultados 40

3.2 El cardinal A(Φ) 45

CAPÍTULO 4: FORCING Y NOS VAMOS 60

4.1 Combinatoria Infinita 60

4.2 Extensiones Genéricas 65

4.3 Prueba del teorema central 70

BIBLIOGRAFÍA 75

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es introducir la notación que será utilizada a lo largo de este texto y presentar ciertos resultados básicos para auxiliarnos en los capítulos venideros. Recomendamos a los lectores versados en los temas tratados en estas secciones que lean el presente capítulo con el propósito de familiarizarse con los símbolos y los términos que emplearemos más adelante.

1.1 Teoría de Conjuntos

En este trabajo nos apoyaremos en [10] para cualquier referencia necesaria acerca de Teoría de Conjuntos. Todo lo que no sea definido explícitamente aquí deberá entenderse como dice dicho texto.

Si A y B son un par de conjuntos, $A \subset B$ significa que $A \subseteq B$ pero $A \neq B$.

El símbolo ${}^{A}B$ denotará al conjunto formado por las funciones de A en B.

El símbolo $P(A)$ representará al conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Si $f : A \longrightarrow B$, $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, el símbolo $f|_C$ denotará a la función $f \cap (C \times B)$. Para $b \in B$, $f^{-1}\{b\}$ será usado para denotar a la preimagen del conjunto $\{b\}$. Nos referiremos a dicho conjunto como la fibra de b. También, utilizaremos los símbolos $f[C]$ y $f^{-1}[D]$ para hablar de la imagen directa de C bajo f y de la imagen inversa de D bajo f, respectivamente. En particular, utilizaremos el símbolo $\mathrm{img}(f)$ para hablar de $f[A]$.

Utilizaremos $\alpha \in \mathbf{ON}$ para abreviar la frase α es un ordinal.

Denotaremos por $\mathfrak{c}$ al número cardinal de $\mathbb{R}$.

Si A es un conjunto y κ es un cardinal, definimos

$$[A]^{\leqslant\kappa} := \{B \subseteq A : |B| \leqslant \kappa\}, \qquad \text{y} \qquad [A]^{<\kappa} := \{B \subseteq A : |B| < \kappa\};$$

con esto último, definimos $[A]^{\kappa} := [A]^{\leqslant\kappa} \setminus [A]^{<\kappa}$.

El símbolo ω representará al primer ordinal infinito, esto es, ω será el conjunto de todos los números naturales incluyendo al cero. Además, diremos que un conjunto A es "numerable" si $|A| \leqslant \omega$, mientras que "infinito numerable" será lo mismo que $|A| = \omega$.

Utilizaremos el símbolo $\mathbb{I}$ para referirnos al subconjunto de $\mathbb{R}$ cuyos elementos son, precisamente, los números irracionales.

Lema 1.1. *Para cualquier cardinal infinito κ se satisface lo siguiente.*

1. $|\,[\kappa]^{<\omega}\,| = \kappa$.

2. *Si A es un conjunto con $|A| > \kappa$ y existe una colección de conjuntos $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tal que $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, entonces hay $\beta < \kappa$ con $|A_\beta| \geqslant \omega$.*

Demostración. Para probar 1, construiremos un par de funciones inyectivas.

Sea $g : \kappa \longrightarrow [\kappa]^{<\omega}$ dada por $g(\alpha) := \{\alpha\}$. Se tiene claramente que g es inyectiva y, por lo tanto, $\kappa \leqslant |[\kappa]^{<\omega}|$.

Para demostrar la otra desigualdad, dados $n \in \omega$ y $t \in {}^n\kappa$, definimos a $f_n : {}^n\kappa \longrightarrow [\kappa]^{\leqslant n}$ como $f_n(t) := \mathrm{img}(t)$. Se tiene que la función f_n es suprayectiva.

De lo anterior y de [10, teorema 10.6, p. 268] se sigue que:

$$|[\kappa]^{<\omega}| = \left|\bigcup_{n<\omega} [\kappa]^n\right| \leqslant \sum_{n<\omega} |[\kappa]^n| \leqslant \sum_{n<\omega} |[\kappa]^{\leqslant n}| \leqslant \sum_{n<\omega} |{}^n\kappa| \leqslant \sum_{n<\omega} \kappa = \omega \cdot \kappa = \kappa.$$

Esto prueba la desigualdad restante, así que $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$.

Ahora para probar 2, procedamos por contradicción suponiendo que para cualquier $\beta < \kappa$ se tiene que $|A_\beta| < \omega$. Tenemos lo siguiente:

$$\kappa < |A| = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha\right| \leqslant \sum_{\alpha<\kappa} |A_\alpha| \leqslant \sum_{\alpha<\kappa} \omega = \kappa \cdot \omega = \kappa\ ,$$

que es el absurdo que estábamos buscando. $\square$

Para los temas relacionados con la cofinalidad y regularidad de un número ordinal, recomendamos al lector consultar la última parte de la sección 10 de [12]. A continuación presentamos un resultado referente a estos temas.

Lema 1.2. *Sean κ y λ un par de números cardinales infinitos. Supongamos que existe una colección $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq [\kappa]^{<\kappa}$ de conjuntos no vacíos de tal manera que $\bigcup\limits_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \kappa$ y $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, siempre que $\alpha < \beta < \lambda$. En estas circunstancias, se tiene que $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda$.*

Demostración. Dividamos la prueba en dos casos.

Caso 1. Supongamos que $\kappa \leqslant \lambda$.

Como $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \kappa$ (ver [12, definition 10.30, p. 32]), se cumple la desigualdad $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda$.

Caso 2. Supongamos que $\lambda < \kappa$.

En este caso tenemos que:

$$\kappa = \sum_{\alpha<\lambda} |A_\alpha| = \lambda \cdot \sup\{|A_\alpha| : \alpha < \lambda\} \leqslant \lambda \cdot \kappa = \kappa.$$

De lo anterior obtenemos que $\kappa = \lambda \cdot \sup\{|A_\alpha| : \alpha < \lambda\}$ y, como $\omega \leqslant \lambda < \kappa$, se sigue que $\kappa = \sup\{|A_\alpha| : \alpha < \lambda\}$. Este hecho garantiza que $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ dada por $f(\alpha) = |A_\alpha|$ es una función cofinal en κ (ver [12, definition 10.29, p. 32]) y, por ende, $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda$. □

Corolario 1.3. *Si M y N son un par de conjuntos infinitos con $|M|$ regular y $|N| < |M|$, entonces, para cualquier función $f : M \longrightarrow N$ existe $y \in N$ de tal forma que $|f^{-1}\{y\}| = |M|$.*

Demostración. Comencemos fijando una biyección $g : M \longrightarrow |M|$. Definamos $I := \{y \in N : f^{-1}\{y\} \neq \emptyset\}$, hagamos $\theta = |I|$ y notemos que $\theta \leqslant |N| < |M|$. A continuación fijemos una enumeración sin repeticiones de $I = \{y_\xi : \xi < \theta\}$. Supongamos ahora, buscando una contradicción, que $|f^{-1}\{y\}| < |M|$ siempre que $y \in N$. En particular, dado $\xi < \theta$, tenemos que $|f^{-1}\{y_\xi\}| < |M|$ y, como g es biyectiva, se cumple que $\left|g\left[f^{-1}\{y_\xi\}\right]\right| < |M|$. En estas circunstancias, la colección $\{g\left[f^{-1}\{y_\xi\}\right] : \xi < \theta\}$ con el cardinal $|M|$ satisfacen las condiciones del lema 1.2, así que $\mathrm{cf}(|M|) \leqslant \theta$. Por último, como $|M|$ es regular, obtenemos que $|M| \leqslant \theta$, lo cual es absurdo. □

Nuestro siguiente resultado es cierto para cualquier cardinal infinito, sin embargo, para fines de este trabajo, creemos conveniente presentarlo únicamente para $\mathfrak{c}$.

Lema 1.4. *Si X es un conjunto y $|X| = \mathfrak{c}$, entonces existe una colección $\{L_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq [X]^{\mathfrak{c}}$ de tal manera que*

1. $\bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} L_\xi = X$ *y*
2. $L_\xi \cap L_\eta = \emptyset$*, cuando* $\xi < \eta < \mathfrak{c}$.

En otras palabras, existe una partición de X en $\mathfrak{c}$ conjuntos de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Demostración. Como consecuencia de [10, teorema 9.60, p. 260] y de que $|X| = \mathfrak{c}$, podemos fijar una biyección $f : X \longrightarrow \mathfrak{c} \times \mathfrak{c}$. Ahora hagamos, para cada $\xi < \mathfrak{c}$, $L_\xi := f^{-1}[\{\xi\} \times \mathfrak{c}]$. Argumentos rutinarios se pueden usar para verificar que la familia $\{L_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ definida como antes cumple con las propiedades deseadas. □

Lema 1.5. *Sean λ y μ un par de cardinales con $\lambda \geqslant \omega$ y $\lambda^\mu = \lambda$. En estas circunstancias, se satisface que $\mathrm{cf}(\lambda) > \mu$ y, para cualquier cardinal θ que cumpla $1 \leqslant \theta \leqslant \mu$, se tiene la igualdad $\lambda^\theta = \lambda$.*

Demostración. La desigualdad $\mathrm{cf}(\lambda) > \mu$ es una consecuencia directa del lema de König (ver [12, lemma 10.40, p. 34]). Tomemos ahora un cardinal θ que haga ciertas las desigualdades $1 \leqslant \theta \leqslant \mu$. Se sigue de inmediato que:

$$\lambda \leqslant \lambda^\theta \leqslant \lambda^\mu = \lambda.$$

Obtenemos de lo anterior la igualdad $\lambda^\theta = \lambda$. □

1.2 Subconjuntos especiales de $\mathbb{R}$

En esta sección presentaremos varios resultados de topología y de medida de Lebesgue que serán de utilidad en los capítulos siguientes. El libro base en el que nos apoyaremos para tratar los conceptos de topología será [4]. A su vez, nos referiremos a [17] para todo lo concerniente a la medibilidad según Lebesgue. Aquello que no sea definido explícitamente aquí deberá entenderse como dicen dichos textos.

Definición 1.6. Para cualesquiera $A, B \subseteq \mathbb{R}$ definimos

$$A + B := \{a + b : a \in A \ \wedge \ b \in B\} \qquad \text{y} \qquad A - B := \{a - b : a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Más aún, para cada $t \in \mathbb{R}$ emplearemos los símbolos $t + B$ y $t - B$ para denotar, respectivamente, a los conjuntos $\{t\} + B$ y $\{t\} - B$.

Le pedimos al lector que note la diferencia entre los símbolos $A \setminus B$, el complemento relativo de B en A, y $A - B$, el conjunto recién definido.

A lo largo de este trabajo, el símbolo $\mathcal{L}$ denotará al conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que resultan ser Lebesgue-medibles; además, de ahora en adelante, nos referiremos a los elementos de $\mathcal{L}$ únicamente como conjuntos medibles, ya que no consideraremos otro tipo de medibilidad. En [17] se utiliza el símbolo $m(A)$ para hablar de la medida de un elemento A del conjunto $\mathcal{L}$, nosotros utilizaremos el símbolo $\lambda(A)$ para hablar del mismo concepto. Utilizaremos $\tau_{\mathbb{R}}$ para representar a la colección de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Por último, el conjunto $\mathcal{H}$ estará formado por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que sean cerrados y no numerables.

Lema 1.7. *El conjunto $\mathcal{H}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ y cada uno de sus elementos también tiene tamaño $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Enfoquémonos en probar que $|\mathcal{H}| = \mathfrak{c}$. La desigualdad $\mathfrak{c} \leqslant |\mathcal{H}|$ es consecuencia del hecho de que, si $t \in \mathbb{R}$, entonces el intervalo $[t, t+1]$ es un elemento de $\mathcal{H}$. Para la otra desigualdad, como $\mathbb{R}$ tiene una base de tamaño ω, entonces tiene, a lo sumo, $\mathfrak{c}$ abiertos y, por ende, tenemos, a lo más, $\mathfrak{c}$ cerrados; de esta manera $\mathfrak{c} \geqslant |\mathcal{H}|$.

Para probar la segunda parte del lema, tomemos $F \in \mathcal{H}$ arbitrario. Por [4, theorem 4.3.11, p. 270], el espacio F visto como subespacio de $\mathbb{R}$, resulta ser un espacio completamente metrizable (ver página 268 de [4]). Además, como en espacios metrizables, ser separable y ser segundo numerable son equivalentes y esta última propiedad es hereditaria, F es un espacio separable (ver página 25 de [4]). De esta manera, F resulta ser un espacio polaco (ver [15, definición 5.1, p. 10]). Entonces, por [15, proposición 7.2, p. 22], podemos concluir que $|F| = \mathfrak{c}$. $\square$

Definición 1.8. Diremos que $X \subseteq \mathbb{R}$ es un *conjunto de Bernstein* si tanto X como $\mathbb{R} \setminus X$ tienen intersección no vacía con cualquier elemento de $\mathcal{H}$.

Lo natural después de esta definición sería mostrar un ejemplo de un conjunto que cumpla la propiedad anterior. En el teorema 2.16 iremos un poco más allá, mostraremos que existen $\mathfrak{c}$ conjuntos de Bernstein ajenos por pares. Por ahora, nos conformamos con un resultado simple que nos ayudará más adelante.

Lema 1.9. *Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de Bernstein, entonces X no es medible.*

Demostración. Supongamos buscando una contradicción que X sí es medible. Como consecuencia de [17, theorem 11 (iv), p. 40], sabemos que existe $F \subseteq \mathbb{R}$ de tal manera que F es un conjunto F_σ, $F \subseteq X$ y $\lambda(X \setminus F) = 0$. Por definición de F, existe una familia de cerrados $\{F_n : n < \omega\}$ en $\mathbb{R}$, de tal manera que $F = \bigcup_{n<\omega} F_n$. Note que, para cualquier $n < \omega$, F_n es un conjunto cerrado que tiene intersección vacía con $\mathbb{R} \setminus X$. Como X es de Bernstein, se sigue que, para cada $n < \omega$, el conjunto F_n es numerable. Esto último implica que F es la unión numerable de conjuntos numerables; por lo tanto, F es numerable y como corolario de [17, example, p. 31] obtenemos que $\lambda(F) = 0$. Empleando la aditividad de la medida y lo anterior, obtenemos lo siguiente:

$$\lambda(X) = \lambda(F \cup (X \setminus F)) = \lambda(F) + \lambda(X \setminus F) = 0.$$

Ahora, observe que al ser $\mathcal{L}$ una σ-álgebra, se sigue que $\mathbb{R} \setminus X$ también es un conjunto medible. Siguiendo la misma línea de razonamiento del párrafo anterior, se puede probar que $\lambda(\mathbb{R} \setminus X) = 0$. En estas circunstancias, tenemos que:

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(X \cup (\mathbb{R} \setminus X)) = \lambda(X) + \lambda(\mathbb{R} \setminus X) = 0.$$

Esta es la contradicción deseada. $\square$

1.3 El conjunto de Cantor

Uno de los subconjuntos más interesantes de los números reales es el llamado *conjunto ternario de Cantor* que denotaremos aquí como K_ω. Este conjunto se construye con un proceso recursivo: en el primer paso hacemos $K_0 := [0,1]$; a continuación, definimos $K_1 := [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (esto es, removemos "el tercio de en medio"); en el tercer paso eliminamos los tercios medios de K_1 para obtener $K_2 := K_1 \setminus ((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}))$ y seguimos este proceso hasta producir una colección $\{K_n : n < \omega\}$. De este modo, K_ω es, por definición, $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$. Esta construcción la representamos en el siguiente diagrama:

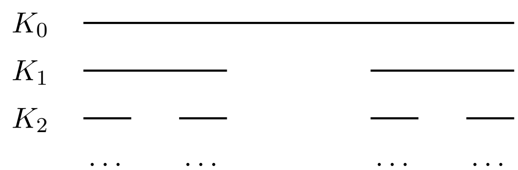


Figura 1.1: Los tres primeros pasos en la construcción de K_ω.

Para los fines de este texto, únicamente utilizaremos el bien conocido resultado de que los puntos del conjunto de Cantor son, precisamente, aquellos que poseen una expansión ternaria que no incluye al dígito 1; esto último en términos matemáticos es que, dado $x \in \mathbb{R}$, se satisface que $x \in K_\omega$ si y sólo si existe $s \in {}^\omega 2$ de tal manera que $x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2s(n)}{3^{n+1}}$.

El siguiente y único resultado de esta sección asegura que los puntos del intervalo $[0,1]$ pueden representarse como distancias entre puntos de K_ω. Esto fue probado originalmente por Steinhaus mediante un argumento geométrico. Las técnicas presentadas en [16] tienen como fin ser una justificación analítica al argumento dado por Steinhaus. La prueba presentada en este trabajo es una modificación y adaptación a los tiempos modernos de lo expuesto en [16]. Recuerde la notación establecida en la definición 1.6.

Teorema 1.10. *El intervalo* $[0,1]$ *está contenido en* $K_\omega - K_\omega$.

Demostración. Tomemos $z \in [0,1]$ y fijemos $t \in {}^\omega 3$ tal que $z = \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{t(i)}{3^{i+1}}$. Probaremos que hay $x, y \in K_\omega$ con $z = x - y$. Establezcamos cierta notación para facilitar la prueba.

Hagamos $\alpha := |t^{-1}\{1\}|$ y a continuación establezcamos una enumeración creciente $\{e_k : k < \alpha\}$ de $t^{-1}\{1\}$. Definamos además, por conveniencia, a $e_{-1} := -1$. Dados $m, n \in \omega$, los símbolos (m,n) y (m,ω) se usarán para denotar, respectivamente, a los intervalos $\{k < \omega : m < k < n\}$ y $\{k < \omega : k > m\}$. Siguiendo esta notación, si $n \in \omega$, el símbolo $(-1, n)$ denotará al intervalo $\{k < \omega : 0 \leqslant k < n\}$.

Ahora, dado $k < \alpha$, tomemos a:

$$\delta_k := \sum_{i=e_{k-1}+1}^{e_k-1} \frac{t(i)}{3^{i+1}} \qquad \text{y} \qquad \eta_k := \sum_{i=e_{k-1}+1}^{e_k-1} \frac{2-t(i)}{3^{i+1}}\ ;$$

además, por cuestiones puramente formales, necesitaremos hacer:

$$\overline{0}_k := \sum_{i=e_{k-1}+1}^{e_k-1} \frac{0}{3^{i+1}}.$$

En el caso en que $\alpha < \omega$, también emplearemos las cantidades siguientes:

$$\delta_\alpha := \sum_{i=e_{\alpha-1}+1}^{\infty} \frac{t(i)}{3^{i+1}} \qquad \text{y} \qquad \eta_\alpha := \sum_{i=e_{\alpha-1}+1}^{\infty} \frac{2-t(i)}{3^{i+1}};$$

finalmente, por razones que serán claras más adelante, pongamos:

$$\overline{0}_\alpha := \sum_{i=e_{\alpha-1}+1}^{\infty} \frac{0}{3^{i+1}} \qquad \text{y} \qquad \overline{2}_\alpha := \sum_{i=e_{\alpha-1}+1}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}}.$$

Como el lector ya se imaginará, en algún momento sumaremos algunas de las expresiones recientemente definidas. Dándole la razón y para facilitar las cuentas venideras haremos dos observaciones pertinentes.

Afirmación 1. Para cualquier $k < \alpha$, $\delta_k + \eta_k = \dfrac{1}{3^{e_{k-1}+1}} - \dfrac{1}{3^{e_k}}$.

En efecto,

$$\delta_k + \eta_k = \sum_{i=e_{k-1}+1}^{e_k-1} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{2}{3^{e_{k-1}+2}} \sum_{i=0}^{e_k-e_{k-1}-2} \frac{1}{3^i} = \frac{2}{3^{e_{k-1}+2}} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{e_k-e_{k-1}-1}}{1-\frac{1}{3}} \right)$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3^{e_{k-1}+2}} \left(1 - \frac{1}{3^{e_k-e_{k-1}-1}}\right) = \frac{1}{3^{e_{k-1}+1}} - \frac{1}{3^{e_k}}.$$

Afirmación 2. La condición $\alpha < \omega$ implica que $\overline{2}_\alpha = \dfrac{1}{3^{e_{\alpha-1}+1}}$.

Para verificar este enunciado basta con ver que

$$\overline{2}_\alpha = \sum_{i=e_{\alpha-1}+1}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} = \frac{2}{3^{e_{\alpha-1}+2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{2}{3^{e_{\alpha-1}+2}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3^{e_{\alpha-1}+1}}.$$

Equipados con todo esto, es momento de comenzar la prueba. Distinguiremos tres casos.

Caso 1. Existe $n \in \omega$ tal que $\alpha = 2n$.

Si $n = 0$, tenemos que $z \in K_\omega$ y, en consecuencia, $z = z - 0$, con $0 \in K_\omega$. Supongamos entonces que $n \geqslant 1$.

Recordemos que, si $s \in {}^\omega 3$ es tal que $1 \notin \operatorname{img}(s)$, entonces $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s(i)}{3^{i+1}} \in K_\omega$. Teniendo esto en cuenta, para construir a los deseados puntos x y y produciremos dos sucesiones $t_x, t_y \in {}^\omega\{0,2\}$.

Tomemos $k < \alpha$. Si k es par, hagamos $t_x(e_k) = 0$ y $t_x|_{(e_{k-1},e_k)} = 0|_{(e_{k-1},e_k)}$ (para nosotros, $0 \in {}^\omega 3$ es la función constante cero). En caso contrario, tomemos $t_x(e_k) = 2$ y $t_x|_{(e_{k-1},e_k)} = (2-t)|_{(e_{k-1},e_k)}$. Por último, $t_x|_{(e_{2n-1},\omega)} = 0|_{(e_{2n-1},\omega)}$.

Para t_y procedemos como sigue: si k es par, hagamos $t_y(e_k) = 2$ y $t_y|_{(e_{k-1},e_k)} = t|_{(e_{k-1},e_k)}$. En caso contrario, tomemos $t_y(e_k) = 0$ y $t_y|_{(e_{k-1},e_k)} = 0|_{(e_{k-1},e_k)}$. Por último, $t_y|_{(e_{2n-1},\omega)} = t|_{(e_{2n-1},\omega)}$.

Haciendo $x := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_x(i)}{3^{i+1}}$ y $y := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_y(i)}{3^{i+1}}$, tenemos que $x, y \in K_\omega$. Mostraremos ahora que $y = z + x$. Para esto, empecemos por notar lo siguiente:

$$\begin{aligned} z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t(i)}{3^{i+1}} &= \delta_0 + \frac{1}{3^{e_0+1}} + \delta_1 + \frac{1}{3^{e_1+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{e_{2n-2}+1}} + \delta_{2n-1} + \frac{1}{3^{e_{2n-1}+1}} + \delta_{2n} \\ &= \delta_0 + \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{1}{3^{e_k+1}} + \delta_{k+1} + \frac{1}{3^{e_{k+1}+1}} \right) + \delta_{2n}. \end{aligned}$$

Similarmente se comprueba que

$$x = \overline{0}_0 + \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{0}{3^{e_k+1}} + \eta_{k+1} + \frac{2}{3^{e_{k+1}+1}} \right) + \overline{0}_{2n} \text{ y}$$

$$y = \delta_0 + \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{2}{3^{e_k+1}} + \overline{0}_{k+1} + \frac{0}{3^{e_{k+1}+1}} \right) + \delta_{2n}.$$

Por otro lado, la afirmación 1 implica que

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{1}{3^{e_k+1}} + \delta_{k+1} + \frac{1}{3^{e_{k+1}+1}} \right) + \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{0}{3^{e_k+1}} + \eta_{k+1} + \frac{2}{3^{e_{k+1}+1}} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{1}{3^{e_k+1}} + \delta_{k+1} + \frac{1}{3^{e_{k+1}+1}} + \frac{0}{3^{e_k+1}} + \eta_{k+1} + \frac{2}{3^{e_{k+1}+1}} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{1}{3^{e_k+1}} + \delta_{k+1} + \eta_{k+1} + \frac{3}{3^{e_{k+1}+1}} \right) = \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{1}{3^{e_k+1}} + \frac{1}{3^{e_k+1}} - \frac{1}{3^{e_{k+1}}} + \frac{1}{3^{e_{k+1}}} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{2}{3^{e_k+1}} + \overline{0}_{k+1} + \frac{0}{3^{e_{k+1}+1}} \right).$$

Además, como la igualdad $\delta_k + \overline{0}_k = \delta_k$ es cierta para cualquier $k \leqslant \alpha$, de lo anterior se sigue que, en efecto, $y = z + x$.

Caso 2. Existe $n \in \omega$ tal que $\alpha = 2n + 1$.

Como antes, tomemos $k < \alpha$. Cuando k es par, hacemos $t_x(e_k) = 0$ y $t_x|_{(e_{k-1},e_k)} = 0|_{(e_{k-1},e_k)}$. En caso contrario, tomemos $t_x(e_k) = 2$ y $t_x|_{(e_{k-1},e_k)} = (2-t)|_{(e_{k-1},e_k)}$. Por último, $t_x|_{(e_{2n},\omega)} = 2|_{(e_{2n},\omega)}$.

Nuestra definición de t_y se detalla a continuación. Si k es par, hagamos $t_y(e_k) = 2$ y $t_y|_{(e_{k-1},e_k)} = t|_{(e_{k-1},e_k)}$. En caso contrario, tomemos $t_y(e_k) = 0$ y $t_y|_{(e_{k-1},e_k)} = 0|_{(e_{k-1},e_k)}$. Por último, $t_y|_{(e_{2n},\omega)} = t|_{(e_{2n},\omega)}$.

De nuevo, haciendo $x := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_x(i)}{3^{i+1}}$ y $y := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_y(i)}{3^{i+1}}$, tenemos que $x, y \in K_\omega$. Mostraremos ahora que $y = z + x$. Notemos que:

$$z = \delta_0 + \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{1}{3^{e_k+1}} + \delta_{k+1} + \frac{1}{3^{e_{k+1}+1}} \right) + \delta_{2n} + \frac{1}{3^{e_{2n}+1}} + \delta_{2n+1};$$

$$x = \overline{0}_0 + \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{0}{3^{e_k+1}} + \eta_{k+1} + \frac{2}{3^{e_{k+1}+1}} \right) + \overline{0}_{2n} + \frac{0}{3^{e_{2n}+1}} + \overline{2}_{2n+1};$$

$$y = \delta_0 + \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{2}{3^{e_k+1}} + \overline{0}_{k+1} + \frac{0}{3^{e_{k+1}+1}} \right) + \delta_{2n} + \frac{2}{3^{e_{2n}+1}} + \delta_{2n+1}.$$

Como la afirmación 2 garantiza que $\overline{2}_{2n+1} = \dfrac{1}{3^{e_{2n}+1}}$, de las cuentas efectuadas en el caso 1 obtenemos fácilmente que $y = z + x$.

Caso 3. Supongamos que $\alpha = \omega$.

De nuevo, tomemos $k < \alpha$. Si k es par, hagamos $t_x(e_k) = 0$ y $t_x|_{(e_{k-1},e_k)} = 0|_{(e_{k-1},e_k)}$. En caso contrario, $t_x(e_k) = 2$ y $t_x|_{(e_{k-1},e_k)} = (2-t)|_{(e_{k-1},e_k)}$.

Para t_y: si k es par, hagamos $t_y(e_k) = 2$ y $t_y|_{(e_{k-1},e_k)} = t|_{(e_{k-1},e_k)}$. En caso contrario, $t_y(e_k) = 0$ y $t_y|_{(e_{k-1},e_k)} = 0|_{(e_{k-1},e_k)}$.

Otra vez, haciendo $x := \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{t_x(i)}{3^{i+1}}$ y $y := \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{t_y(i)}{3^{i+1}}$, deducimos que $x, y \in K_\omega$. Ahora, para ver que $y = z+x$, procederemos un tanto distinto. Para cada $n \in \omega$, definamos:

$$z_n := \sum_{i=0}^{e_{2n+1}+1} \frac{t(i)}{3^{i+1}};\ x_n := \sum_{i=0}^{e_{2n+1}+1} \frac{t_x(i)}{3^{i+1}};\ y_n := \sum_{i=0}^{e_{2n+1}+1} \frac{t_y(i)}{3^{i+1}}.$$

Observe que la sucesión de los (z_n) es una subsucesión de la sucesión de sumas parciales de una serie que converge a z; en consecuencia, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. De la misma manera se comprueba que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Para concluir el teorema notemos que, para cualquier $n \in \omega$, el caso 1 garantiza que $y_n = z_n + x_n$. De esta manera, tomando límites en ambos lados de la igualdad, un sencillo argumento de continuidad nos asegura que $y = z + x$. $\square$

Una propiedad interesante del conjunto K_ω aparece cuando lo analizamos desde el punto de vista de su medida. En [17, p. 31] se prueba que todos los subconjuntos numerables de la recta real tienen medida cero. Una pregunta natural es si el recíproco es cierto, es decir, ¿si un subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene medida cero, será cierto que es numerable? Se prueba en [17, proposition 19, p. 50] que la respuesta a esta pregunta es negativa y el ejemplo que se presenta es, precisamente, el conjunto de Cantor. El hecho de que K_ω tiene medida cero nos va a ser de gran utilidad más adelante.

1.4 Funciones continuas

En esta sección ahondaremos un poco en las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y estableceremos resultados que utilizaremos en los capítulos siguientes. Comencemos denotando por $C(\mathbb{R})$ a la colección de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Definición 1.11. Diremos que una función $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ es *constante en ninguna parte* (abreviado, f es nwc) si, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se cumple que f no es constante en el intervalo (a, b).

A continuación calcularemos las cardinalidades de un par de conjuntos.

Lema 1.12. *Tanto $C(\mathbb{R})$ como $\{f \in C(\mathbb{R}) : f$ es nwc$\}$ tienen exactamente $\mathfrak{c}$ elementos.*

Demostración. Para probar la igualdad $|C(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$ observemos primero que $\mathfrak{c} \leqslant |C(\mathbb{R})|$ ya que todas las funciones constantes son elementos de la colección $C(\mathbb{R})$. Para demostrar la otra desigualdad, consideremos a la función $\varphi : C(\mathbb{R}) \longrightarrow {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ dada por $\varphi(f) = f_{|\mathbb{Q}}$. Si φ fuese inyectiva, tendríamos entonces que

$$|C(\mathbb{R})| \leqslant |{}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}| = \mathfrak{c}^{\omega} = (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega \cdot \omega} = 2^{\omega} = \mathfrak{c},$$

como queremos. En aras de verificar la inyectividad de φ tomemos $f, g \in C(\mathbb{R})$ de tal forma que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Se deduce de esto último que $\mathbb{Q} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$. En virtud de [4, theorem 1.5.4, p. 38] el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ es cerrado y, como $\mathbb{Q}$ es denso, obtenemos que $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$, esto es, $f = g$.

Lo anterior muestra que, a lo sumo, hay $\mathfrak{c}$ funciones continuas que son nwc. Por otro lado, si definimos para cada $r \in \mathbb{R}$ a la función f_r mediante $f_r(x) = x + r$, entonces la colección $\{f_r : r \in \mathbb{R}\}$ tiene tamaño $\mathfrak{c}$ y cada uno de sus elementos es una función continua y nwc. $\square$

1.5 ${}^{\omega}\mathbb{Z}$ y los números irracionales

En esta sección demostraremos algunos resultados concernientes a familias de subconjuntos especiales de $\mathbb{R}$. Lo anterior, con el objetivo en mente de usar dichas familias en las pruebas de los teoremas 3.21 y 3.24, más adelante.

Consideremos a $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, y tomemos $n \in \omega$. Definimos:

$${}^{<\omega}\mathbb{Z} := \bigcup\{{}^{n}\mathbb{Z} : n < \omega\} \qquad \text{y} \qquad {}^{\leqslant n}\mathbb{Z} := \{x \in {}^{<\omega}\mathbb{Z} : |x| \leqslant n\}.$$

Lo que sigue es equipar a $\mathbb{Z}$ con la topología discreta y realizar el producto topológico de $\mathbb{Z}$ consigo mismo ω veces para obtener el espacio producto ${}^{\omega}\mathbb{Z}$.

Fijemos ahora $s \in {}^{<\omega}\mathbb{Z}$. Definimos el *cono* de s, denotado por $[s]$, como el conjunto formado por todas las extensiones de s en el espacio ${}^{\omega}\mathbb{Z}$, es decir, $[s] := \{z \in {}^{\omega}\mathbb{Z} : s \subseteq z\}$. Se prueba en [8, proposición 1.15, p. 9] que el conjunto $\{[s] : s \in {}^{<\omega}\mathbb{Z}\}$ es una base para la topología de ${}^{\omega}\mathbb{Z}$.

Por otra parte, si $s \in {}^{<\omega}\mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}$, definimos la *concatenación* de s con m, denotada como $s^\frown m$, como la función $s \cup \{(|s|, m)\}$. Observe que $s^\frown m$ vuelve a ser un elemento de ${}^{<\omega}\mathbb{Z}$.

Fijemos una enumeración de $\mathbb{Q}$, digamos, $\{q_n : n \in \omega\}$, dónde $q_0 = 0$. Con estas herramientas se demuestra en [8, lema 1.16, p. 9] lo siguiente:

Lema 1.13. *Existe una familia $\{I_s : s \in {}^{<\omega}\mathbb{Z}\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de tal manera que las siguientes propiedades se satisfacen para cualesquiera $s \in {}^{<\omega}\mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}$.*

1. $I_\emptyset = \mathbb{R}$.
2. *Si $s \neq \emptyset$, entonces I_s es un intervalo abierto con extremos racionales.*
3. $\overline{I_{s^\frown m}} \subseteq I_s$, *donde $\overline{A}$ es la cerradura topológica de A.*
4. $\sup I_{s^\frown m} = \inf I_{s^\frown(m+1)}$.
5. $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_{s^\frown k} = I_s \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\inf I_{s^\frown k}, \sup I_{s^\frown k}\}$.
6. *Si $s \neq \emptyset$, entonces la longitud de I_s es, a lo sumo, $\dfrac{1}{|s|}$.*
7. *Para cada $n \in \omega$, existe $t \in {}^{\leqslant n+1}\mathbb{Z}$, de tal forma que q_n es un extremo de I_t.*

Consideremos a la familia $\{I_s : s \in {}^{<\omega}\mathbb{Z}\}$ garantizada por el lema previo y sean $x \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$ y $n \in \omega$. La condición (3) del lema asegura que $\overline{I_{x|_{n+1}}} \subseteq I_{x|_n}$ y esto a su vez implica que $\overline{I_{x|_{n+1}}} \subseteq \overline{I_{x|_n}}$. En estas circunstancias, $\{\overline{I_{x|_n}} : n \in \omega\}$ es una familia anidada de intervalos cerrados. Se sigue de [18, 14(b), p. 140] que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{I_{x|_n}} \neq \emptyset$; aún más, en presencia de la condición (6) del lema podemos asegurar que $\left|\bigcap_{n\in\omega} \overline{I_{x|_n}}\right| = 1$.

Afirmamos ahora que $\bigcap_{n\in\omega}\overline{I_{x|_n}}=\bigcap_{n\in\omega}I_{x|_n}$. En efecto, la condición (3) implica que

$$\bigcap_{n\in\omega}\overline{I_{x|_n}}=\bigcap_{n\in\omega\setminus 1}\overline{I_{x|_n}}\subseteq\bigcap_{n\in\omega}I_{x|_n};$$

para demostrar la otra contención basta con notar que, para cada $n\in\omega$, $I_{x|_n}\subseteq\overline{I_{x|_n}}$.

Definimos $\varphi:{}^{\omega}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$, como $\{\varphi(x)\}=\bigcap_{n\in\omega}I_{x|_n}$, siempre que $x\in{}^{\omega}\mathbb{Z}$. Se comprueba en [8, teorema 1.17, p. 11] que φ definida como antes es un homeomorfismo entre ${}^{\omega}\mathbb{Z}$ y $\mathbb{I}$. Probaremos a continuación que satisface otra propiedad más.

Recordemos primero que uno de los órdenes lineales (ver [10, definición 4.111, p. 82]) que se le puede dar a ${}^{\omega}\mathbb{Z}$ es el orden lexicográfico; este se define como sigue: para $x,y\in{}^{\omega}\mathbb{Z}$ diremos que $x\preceq y$ si y solamente si $x=y$ o bien, existe un $n\in\omega$ de tal manera que $x(n)<y(n)$ y además $x|_n=y|_n$. Nos permitimos comentar que una interpretación común para trabajar con espacios como ${}^{\omega}\mathbb{Z}$ es pensar que x y y son palabras de longitud ω; de esta manera, el hecho de que $x\preceq y$ se puede entender como que x y y son la misma palabra o bien, coinciden en sus primeras n letras pero en la letra $n+1$ difieren y, además, la letra $x(n)$ aparece antes (o es menor) que la letra $y(n)$.

Como mencionamos en el párrafo previo, se verifica fácilmente que la pareja $({}^{\omega}\mathbb{Z},\preceq)$ es un orden lineal. Lo que sigue para nosotros es probar que la función φ es un isomorfismo de orden (ver [10, definición 4.124, p. 87]) entre $({}^{\omega}\mathbb{Z},\preceq)$ y $(\mathbb{I},\leqslant)$, donde $\leqslant$ es el orden que hereda $\mathbb{I}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$. Enunciaremos esto con propiedad para referirnos a este resultado más adelante:

Lema 1.14. *La función $\varphi:{}^{\omega}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{I}$ definida mediante $\{\varphi(x)\}=\bigcap_{n\in\omega}I_{x|_n}$ es un isomorfismo de orden.*

Demostración. Supongamos que $x,y\in{}^{\omega}\mathbb{Z}$ cumplen que $x\prec y$. Tomemos $n\in\omega$ tal que $x(n)<y(n)$ y además satisfaga $x|_n=y|_n$ Hagamos $s:=x|_n$ Por definición, se verifica que $\varphi(x),\varphi(y)\in I_s$. Luego, se tiene que $\varphi(x)\in I_{s^\frown x(n)}$ y $\varphi(y)\in I_{s^\frown y(n)}$. Por último, como $x(n)<y(n)$, la condición (4) del lema 1.13 implica que $\sup I_{s^\frown x(n)}\leqslant\inf I_{s^\frown y(n)}$ y, por ende, $\varphi(x)<\varphi(y)$. En virtud de [10, teorema 4.122, p. 87] y la biyectividad de φ podemos concluir que φ es, en efecto, un isomorfismo. $\square$

En suma, hemos comprobado que φ es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden entre los espacios ${}^{\omega}\mathbb{Z}$ y $\mathbb{I}$. Utilizaremos fuertemente ambos hechos para demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.15. *Existe una familia $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades.*

1. *S_ξ es orden-isomorfo a $\mathbb{I}$, siempre que $\xi < \mathfrak{c}$.*

2. *Cuando $\xi < \eta < \mathfrak{c}$, se satisface que $S_\xi \cap S_\eta = \emptyset$.*

3. *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se verifica la igualdad*

$$\left|\{\xi < \mathfrak{c} : \left|(a,b) \cap S_\xi\right| = \mathfrak{c}\}\right| = \mathfrak{c}.$$

Demostración. Definamos, para cada $x \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$, el conjunto E_x como sigue

$$E_x := \{z \in {}^{\omega}\mathbb{Z} : \forall\, n < \omega\ (z(2n) = x(n))\}.$$

Dividiremos la prueba en una serie de afirmaciones.

Afirmación 1. Para toda $x \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$, el conjunto E_x con el orden heredado de ${}^{\omega}\mathbb{Z}$ es orden-isomorfo a ${}^{\omega}\mathbb{Z}$.

Fijemos $x \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$. Para cada $y \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$, definimos a $y^\star$ como sigue:

$$y^\star := \{(2n, x(n)) : n < \omega\} \cup \{(2n+1, y(n)) : n < \omega\}.$$

Nótese que $y^\star$ cumple de inmediato que $y^\star \in E_x$, siempre que $y \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$.

Consideremos a la función $\psi : {}^{\omega}\mathbb{Z} \longrightarrow E_x$ dada por $\psi(g) = g^\star$. Veamos que ψ es el isomorfismo buscado.

En efecto, para verificar la suprayectividad, consideremos $z \in E_x$ y pongamos $y := \{(n, z(2n+1)) : n < \omega\}$. Es obvio que $y \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$ y algunos cálculos rutinarios muestran que $y^\star = z$.

Supongamos ahora que $y, z \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$ cumplen que $y \prec z$. Tomemos $n \in \omega$ tal que $y(n) < z(n)$ y además cumpla que $y|_n = z|_n$. Por definición, la desigualdad $y^\star(2n+1) <$

$z^\star(2n+1)$ es cierta y, como la condición $y|_n = z|_n$ implica que $y^\star|_{2n+1} = z^\star|_{2n+1}$, esto prueba que $y^\star \prec z^\star$. Lo anterior es suficiente para asegurar que ψ es un isomorfismo gracias a [10, teorema 4.122, p. 87].

Afirmación 2. Cuando $x, y \in {}^\omega\mathbb{Z}$ satisfacen que $x \neq y$, se tiene que $E_x \cap E_y = \emptyset$.

Verificaremos esto por contrapuesta, supongamos que $x, y \in {}^\omega\mathbb{Z}$ son de tal forma que existe un $z \in E_x \cap E_y$. Si $n < \omega$, la pertenencia anterior implica que $x(n) = z(2n) = y(n)$. Se concluye que $x = y$.

Afirmación 3. Para cualquier $s \in {}^{<\omega}\mathbb{Z}$, la igualdad $\left|\{x \in {}^\omega\mathbb{Z} : \left|E_x \cap [s]\right| = \mathfrak{c}\}\right| = \mathfrak{c}$ es cierta.

Fijemos $s \in {}^{<\omega}\mathbb{Z}$. Observemos que, como $[s^\frown 0] \subseteq [s]$, podemos suponer sin perder generalidad que $|s|$ es un número natural de la forma que mejor nos acomode; en particular, podemos suponer que $|s| = 2k+1$ con k un número par.

Para $x \in {}^\omega\mathbb{Z}$, definamos $\hat{x}$ como

$$\hat{x} := \{(n, s(2n)) : n \leqslant k\} \cup \{(n, x(n-k-1)) : n > k\}.$$

Notemos que esta asignación es inyectiva ya que, si $x, y \in {}^\omega\mathbb{Z}$ con $x \neq y$ y tomamos $l \in \omega$ de tal manera que $x(l) \neq y(l)$, entonces se cumple que

$$\hat{x}(l+k+1) = x(l) \neq y(l) = \hat{y}(l+k+1)$$

y, por ende, $\hat{x} \neq \hat{y}$. Se desprende de esto que $|\{\hat{z} : z \in {}^\omega\mathbb{Z}\}| = \mathfrak{c}$.

Esto último garantiza que, para finalizar la prueba de esta afirmación, basta con demostrar que $\left|E_{\hat{x}} \cap [s]\right| = \mathfrak{c}$, siempre que $x \in {}^\omega\mathbb{Z}$.

Con esta idea en mente, fijemos $x \in {}^\omega\mathbb{Z}$ y, para cada $y \in {}^\omega\mathbb{Z}$, definamos $\tilde{y} \in {}^\omega\mathbb{Z}$ como sigue:

$$\tilde{y} := s \cup \{(2(k+l+1), \hat{x}(k+l+1)) : l \in \omega\} \cup \{(2(k+l)+1, y(l)) : l \in \omega\}.$$

Nuestra afirmación concluiría exitosamente si logramos mostrar que para cada $y \in {}^\omega\mathbb{Z}$ se tiene que $\tilde{y} \in E_{\hat{x}} \cap [s]$ y, además, $\tilde{y} \neq \tilde{z}$, siempre que $z \in {}^\omega\mathbb{Z} \setminus \{y\}$.

Comencemos por verificar la segunda parte. Tomemos $y, z \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$ con $y \neq z$. Sea $l \in \omega$ de tal forma que $y(l) \neq z(l)$. Se satisface entonces que

$$\tilde{y}(2(k+l)+1) = y(l) \neq z(l) = \tilde{z}(2(k+l)+1)$$

y, en consecuencia, $\tilde{y} \neq \tilde{z}$.

Para la otra parte, elijamos $y \in {}^{\omega}\mathbb{Z}$ y concentrémonos en probar que $\tilde{y} \in E_{\hat{x}} \cap [s]$. Como $s \subseteq \tilde{y}$, se cumple tranquilamente que $\tilde{y} \in [s]$. Para demostrar que $\tilde{y} \in E_{\hat{x}}$, tomamos $n \in \omega$ e intentaremos comprobar que $\tilde{y}(2n) = \hat{x}(n)$. Si $n \leqslant k$, tenemos que $2n \leqslant 2k < 2k+1$ y así obtenemos que $\tilde{y}(2n) = s(2n) = \hat{x}(n)$. En el caso en que $n > k$, tenemos que $l := n - k - 1$ es un número natural con $n = k + l + 1$. Se sigue que

$$\tilde{y}(2n) = \tilde{y}(2(k+l+1)) = \hat{x}(k+l+1) = \hat{x}(n).$$

En suma, $\tilde{y} \in E_{\hat{x}} \cap [s]$.

Afirmación 4. $\{\varphi[E_x] : x \in {}^{\omega}\mathbb{Z}\}$ es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ orden-isomorfos a $\mathbb{I}$, que además es ajena por pares y satisface que $\left|\left\{x \in {}^{\omega}\mathbb{Z} : \left|\varphi[E_x] \cap (a,b)\right| = \mathfrak{c}\right\}\right| = \mathfrak{c}$ siempre que $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

El hecho de que φ sea un isomorfismo de orden junto con la afirmación 1 garantizan que cada elemento de $\{\varphi[E_x] : x \in {}^{\omega}\mathbb{Z}\}$ es orden-isomorfo a $\mathbb{I}$. Por otro lado, la afirmación 2 combinada con la biyectividad de φ asegura que $\varphi[E_x]$ y $\varphi[E_y]$ son ajenos siempre que $x \neq y$.

Tomemos ahora $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Se cumple que $(a,b) \cap \mathbb{I}$ es un subconjunto abierto no vacío $\mathbb{I}$ y, como φ es un homeomorfismo, tenemos que $\varphi^{-1}\left[(a,b) \cap \mathbb{I}\right]$ es un abierto no vacío en ${}^{\omega}\mathbb{Z}$. En seguida, existe un $s \in {}^{<\omega}\mathbb{Z}$ tal que $[s] \subseteq \varphi^{-1}\left[(a,b) \cap \mathbb{I}\right]$. Se desprende de la afirmación 3 que $\left|\{x \in {}^{\omega}\mathbb{Z} : \left|E_x \cap [s]\right| = \mathfrak{c}\}\right| = \mathfrak{c}$ y, empleando una vez más las propiedades de φ, obtenemos que:

$$\mathfrak{c} = \left|\left\{x \in {}^{\omega}\mathbb{Z} : \left|\varphi[E_x] \cap \varphi\left[[s]\right]\right| = \mathfrak{c}\right\}\right| = \left|\left\{x \in {}^{\omega}\mathbb{Z} : \left|\varphi[E_x] \cap (a,b) \cap \mathbb{I}\right| = \mathfrak{c}\right\}\right|,$$

como queríamos.

Para finalizar la prueba notemos que $\left|\{\varphi\left[E_x\right] : x \in {}^{\omega}\mathbb{Z}\}\right| = \mathfrak{c}$. Esto implica que podemos dar una enumeración sin repeticiones de esta colección tomando como conjunto de índices a $\mathfrak{c}$, esto es, $\{\varphi\left[E_x\right] : x \in {}^{\omega}\mathbb{Z}\} = \{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$. Evidentemente, la familia $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ satisface las condiciones 1 - 3 de la presente proposición. $\square$

Corolario 1.16. *Consideremos $\{I_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, una enumeración sin repeticiones de $\{(a,b) : a, b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a < b\} = \{I_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$. Entonces, existe una familia $\{S_\xi^y : \xi < \mathfrak{c} \wedge y \in \mathbb{R}\} \subseteq [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ que cumple las siguientes propiedades para cualesquiera $y, z \in \mathbb{R}$ y $\xi, \eta < \mathfrak{c}$.*

1. *$S_\xi^y \subseteq I_\xi$.*

2. *$S_\xi^y \cap S_\eta^z = \emptyset$ cuando $(\xi, y) \neq (\eta, z)$.*

Demostración. Consideremos a la familia $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ dada por la proposición 1.15. Construyamos, por recursión transfinita sobre $\mathfrak{c}$, a la función $f : \mathfrak{c} \longrightarrow \mathfrak{c}$ mediante la correspondencia

$$f(\xi) = \min\{\eta \in \mathfrak{c} \setminus f[\xi] : |S_\eta \cap I_\xi| = \mathfrak{c}\}.$$

Observe que, para $\xi < \mathfrak{c}$, se satisface que $|f[\xi]| < \mathfrak{c}$ y así, en virtud de la condición 3 de la proposición 1.15, f está bien definida.

A continuación hagamos, para cada $\xi < \mathfrak{c}$, $G_\xi := S_{f(\xi)} \cap I_\xi$. Es inmediato de la definición que $G_\xi \in [I_\xi]^{\mathfrak{c}}$, siempre que $\xi < \mathfrak{c}$. Además, en vista de la condición 2 de la proposición 1.15 y de la inyectividad de f, se satisface que la colección $\{G_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ es ajena por pares.

Fijemos ahora $\xi < \mathfrak{c}$. Como $|G_\xi| = \mathfrak{c}$, se sigue del lema 1.4 que existe una familia $\{S_\xi^y : y \in \mathbb{R}\} \subseteq [G_\xi]^{\mathfrak{c}}$ con las propiedades

(a) $\bigcup_{y \in \mathbb{R}} S_\xi^y = G_\xi$.

(b) $S_\xi^y \cap S_\xi^z = \emptyset$, cuando $y \neq z$.

Se afirma que la colección $\{S_\xi^y : \xi < \mathfrak{c} \ \wedge \ y \in \mathbb{R}\}$ satisface las condiciones de este corolario.

En efecto, que $\{S_\xi^y : \xi < \mathfrak{c} \wedge y \in \mathbb{R}\} \subseteq [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ se sigue de $[G_\xi]^{\mathfrak{c}} \subseteq [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$. La condición 1 es cierta pues, para cualesquiera $\xi < \mathfrak{c}$ y $y \in \mathbb{R}$, se tiene que $S_\xi^y \subseteq G_\xi \subseteq I_\xi$. Por último, tomemos $(\xi, y) \neq (\eta, z)$. Si $\xi \neq \eta$, se tiene que $S_\xi^y \cap S_\eta^z \subseteq G_\xi \cap G_\eta = \emptyset$. Por otro lado, si

$\xi = \eta$ y $y \neq z$, se satisface que $S_\xi^y \cap S_\eta^z = \emptyset$, por el inciso (b). Esto prueba que la condición 2 es cierta, como se quería. $\square$

CAPÍTULO 2: APLICACIONES AL ÁLGEBRA LINEAL

El libro base de Álgebra Lineal en el que se apoya este trabajo es [5]. Todo lo que no sea definido explícitamente aquí deberá entenderse como dice dicho texto.

2.1 Independencia lineal y bases de Hamel

A lo largo de esta sección F denotará un campo y V siempre representará un F-espacio vectorial. Además, $\vec{0}$ y 0 serán los neutros aditivos de V y F, respectivamente.

Sea S un subconjunto de V. El símbolo $[S]$ lo utilizaremos para denotar al subespacio vectorial generado por S, esto es, $[S] := \operatorname{span}(S)$ (ver página 30 de [5]).

Recordemos que S es llamado *linealmente dependiente* si para algún $n \in \omega$ existen colecciones $\{v_i : i \leqslant n\} \subseteq S$ y $\{a_i : i \leqslant n\} \subseteq F \setminus \{0\}$ de tal modo que $\{v_i : i \leqslant n\}$ está indizada sin repeticiones y $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \vec{0}$. Diremos que S es *linealmente independiente* si no es linealmente dependiente.

Observe que si S es linealmente independiente y $T \subseteq S$, T es linealmente independiente. Esto indica que la independencia lineal es una propiedad hereditaria.

De acuerdo a la definición dada en la página 43 de [5], un conjunto $B \subseteq V$ es llamado *base para* V si es linealmente independiente y satisface $[B] = V$, sin pedir restricción alguna sobre la cardinalidad de B. Ahora, dentro de la teoría de espacios normados hay varias definiciones de base (ver, por ejemplo, [6]) y por este motivo es costumbre llamarle *base de Hamel para* V a cualquier conjunto linealmente independiente que genere a V. En el presente trabajo seguiremos esta convención.

Observe que $\mathcal{F}$, la colección de todos los subconjuntos linealmente independientes de V, es una familia que tiene como elemento al conjunto vacío y es de carácter finito (ver [10, definición 8.6, p. 188]). De esta manera, en ZFC el Lema de Tukey-Teichmüller (ver [10, teorema 8.8, p. 188]), nos proporciona un elemento maximal de $\mathcal{F}$. Ahora, la relevancia de esta observación queda clara a la luz del resultado de abajo.

Lema 2.1. *Con la notación del párrafo previo: las bases de Hamel para V son, precisamente, los elementos maximales de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Consideremos a B un elemento maximal de la familia $\mathcal{F}$. Para verificar que B es una base para V habrá que probar que $[B] = V$, pues $B \in \mathcal{F}$.

Dado que $[B]$ es un subespacio vectorial de V, para ver que $[B] = V$, únicamente se debe probar que $V \subseteq [B]$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un $v \in V$ de tal manera que $v \notin [B]$; en particular, esto implica que $v \notin B$ ya que $B \subseteq [B]$. Probaremos que $B \cup \{v\} \in \mathcal{F}$. Para $n \in \omega$, tomemos $\{v_i : i \leqslant n\} \subseteq B \cup \{v\}$ y $\{a_i : i \leqslant n\} \subseteq F$, con el conjunto de vectores indizado sin repeticiones, y supongamos que $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \vec{0}$.

Caso 1. $v \notin \{v_i : i \leqslant n\}$.

En esta situación tenemos que $\{v_i : i \leqslant n\}$ es un subconjunto del conjunto linealmente independiente B y, por ende, $a_i = 0$ para toda $i \leqslant n$.

Caso 2. $v \in \{v_i : i \leqslant n\}$.

Tomemos $j \leqslant n$ tal que $v = v_j$. La igualdad $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \vec{0}$ implica que $a_j v_j = -\sum_{i \neq j} a_i v_i$. Luego, si $a_j \neq 0$, tenemos que $v_j = -\sum_{i \neq j} (a_i/a_j) v_i$ con $\{v_i : i \leqslant n \ \wedge \ i \neq j\} \subseteq B$, contradiciendo que $v \notin [B]$. En consecuencia, $a_j = 0$.

Por lo anterior, la igualdad $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = \vec{0}$ se vuelve $\sum_{i \neq j} a_i v_i = \vec{0}$, y como $\{v_i : i \leqslant n \ \wedge \ i \neq j\} \subseteq B$ con $B \in \mathcal{F}$, tenemos que $a_i = 0$ para cada $i \neq j$. Esto muestra que $a_i = 0$ para toda $i \leqslant n$.

Para finalizar, como $v \notin B$, se satisface que $B \subset B \cup \{v\}$, contradiciendo la maximalidad de B. Esto garantiza que $v \in [B]$ y, por lo tanto, que $V \subseteq [B]$, como se quería.

Ahora concentrémonos en verificar que si B es una base de Hamel, necesariamente B es un elemento maximal de $\mathcal{F}$. Buscando una contradicción, supongamos que existe $B' \in \mathcal{F}$ de tal forma que $B \subset B'$ y tomemos $v \in B' \setminus B$. Como B genera al espacio V, existen $\{v_i : i \leqslant n\} \subseteq B$ y $\{a_i : i \leqslant n\} \subseteq F \setminus \{0\}$, con el conjunto de vectores indizado sin repeticiones, tales que $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = v$. Esto implica que $B \cup \{v\} \notin \mathcal{F}$. Sin embargo, $B \cup \{v\} \subseteq B'$, contradiciendo que $B' \in \mathcal{F}$. Luego, B es un elemento maximal de $\mathcal{F}$. □

En el siguiente resultado ofrecemos una condición suficiente para un subconjunto S del espacio V que asegura la existencia de bases de Hamel contenidas en S.

Lema 2.2. *Si $S \subseteq V$ cumple que $[S] = V$, entonces existe B, base de Hamel para V, con $B \subseteq S$.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{F}_S$ a la colección $\mathcal{F} \cap P(S)$. Observe que, como $\mathcal{F}_S$ tiene cáracter finito, el Lema de Tukey-Teichmüller (ver [10, teorema 8.8, p. 188]) nos da un elemento maximal de $\mathcal{F}_S$, digamos B (en especial, B es linealmente independiente). Probaremos a continuación que $[B] = V$.

Fijemos $v \in V$. Como S satisface que $[S] = V$, existen $n < \omega$, $\{v_i : i \leqslant n\} \subseteq S$ y $\{a_i : i \leqslant n\} \subseteq F \setminus \{0\}$, con el conjunto de vectores indizado sin repeticiones, de tal manera que $\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = v$. Si existiese $j \leqslant n$ tal que $v_j \notin [B]$, entonces tendríamos que $B \cup \{v_j\}$ sería linealmente independiente, estaría contenido en S y contendría propiamente a B; una contradicción a la maximalidad de B. Por lo tanto, para todo $i \leqslant n$, se cumple que $v_i \in [B]$ y, en consecuencia, $v \in [B]$. $\square$

Por lo dicho en el lema 2.1, en ZFC todo espacio vectorial posee una base de Hamel. En la siguiente proposición mostraremos que, en ZF, aquellos espacios vectoriales que pueden ser bien ordenados poseen una base de Hamel.

Proposición 2.3. *Si V admite un buen orden y $S \subseteq V$ es linealmente independiente, entonces existe B, base de Hamel para V, con $S \subseteq B$.*

Demostración. Como V admite un buen orden, $V \setminus S$ es equipotente a algún número cardinal κ. Luego, $V \setminus S$ posee una enumeración sin repeticiones $\{v_\xi : \xi < \kappa\}$. Ahora definamos por recursión transfinita una función $g : \kappa \to 2$ mediante:

$$g(\xi) = 1 \text{ si y sólo si } S \cup \{v_\eta : \eta < \xi \wedge g(\eta) = 1\} \cup \{v_\xi\} \in \mathcal{F}.$$

Sea $B := S \cup \{v_\xi : \xi \in g^{-1}\{1\}\}$. Es claro que $S \subseteq B$. Probaremos ahora que B es una base de Hamel. En vista del lema 2.1, para ver que B es base de Hamel basta con probar que B es un elemento maximal de $\mathcal{F}$.

Empecemos verificando que $B \in \mathcal{F}$. Fijemos $n \in \omega$ y tomemos $\{w_i : i \leqslant n\} \subseteq B$. Definamos el conjunto $I := \{i \leqslant n : w_i \notin S\}$. Para cada $j \in I$, existe $\xi_j \in g^{-1}\{1\}$ tal que $v_{\xi_j} = w_j$. Si $\{\xi_i : i \in I\}$ no tiene elementos, tenemos que $\{w_i : i \leqslant n\} \subseteq S$ con $S \in \mathcal{F}$, así que $\{w_i : i \leqslant n\} \in \mathcal{F}$.

Si $\{\xi_i : i \in I\}$ no es vacío, podemos tomar a $\hat{\xi} := \max\{\xi_i : i \in I\}$. Luego, como $g(\hat{\xi}) = 1$, se tiene que

$$\{w_i : i \leqslant n\} \subseteq S \cup \{v_\eta : \eta < \hat{\xi} \wedge g(\eta) = 1\} \cup \{v_{\hat{\xi}}\} \in \mathcal{F};$$

por lo tanto, $\{w_i : i \leqslant n\} \in \mathcal{F}$. Se deduce de ambos casos que $B \in \mathcal{F}$.

Para probar la maximalidad de B, supongamos que $B' \subseteq V$ es tal que $B \subset B'$ y tomemos $v \in B' \backslash B$ arbitrario. Como $v \notin B$, se tiene que $v \notin S$; de esta manera, existe $\xi < \kappa$ tal que $v_\xi = v$. Se sigue que $g(\xi) = 0$, así que el conjunto $S \cup \{v_\eta : \eta < \xi \wedge g(\eta) = 1\} \cup \{v_\xi\}$ es linealmente dependiente y está contenido en $B \cup \{v_\xi\} \subseteq B'$. En resumen, $B' \notin \mathcal{F}$. $\square$

El lema siguiente será de gran utilidad más adelante.

Lema 2.4. *Si α es un ordinal y $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ es un subconjunto de V que satisface $x_\xi \in V \setminus [\{x_\eta : \eta < \xi\}]$, para cualquier $\xi < \alpha$, entonces $\{x_\xi : \xi < \alpha\} \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos, buscando una contradicción, que $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ es linealmente dependiente. De esta forma, existen $E \in [\alpha]^{<\omega}$ y $\{a_\xi : \xi \in E\} \subseteq F \setminus \{0\}$ tales que $\sum_{\xi \in E} a_\xi x_\xi = 0$. Si tomamos a $\eta := \max E$, entonces

$$x_\eta = -\sum_{\xi \in E \setminus \{\eta\}} (a_\xi / a_\eta) x_\xi = -\sum_{\xi \in E \cap \eta} (a_\xi / a_\eta) x_\xi \in \left[\{x_\zeta : \zeta < \eta\}\right];$$

lo cual contradice la construcción de x_η. $\square$

En el siguiente teorema utilizaremos el resultado [5, corollary 1, p. 46]: si V tiene una base de Hamel formada por n vectores, entonces cualquier base de Hamel para V tiene, precisamente, n vectores.

Teorema 2.5. *Si B y B' son bases de Hamel para V, se tiene que $|B| = |B'|$.*

Demostración. Hagamos $\kappa = |B|$ y $\lambda = |B'|$. Podemos enumerar fielmente (esto es, sin repeticiones) a los elementos de B y B' como $B = \{v_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $B' = \{u_\beta : \beta < \lambda\}$. Para ver que $\kappa = \lambda$, probaremos que $\lambda \leqslant \kappa$ y que $\kappa \leqslant \lambda$. Para la primera desigualdad, supongamos, buscando una contradicción, que $\lambda > \kappa$.

Como B es una base de Hamel para V, dado un $\beta < \lambda$, existen $P_\beta \in [\kappa]^{<\omega}$ y $\{a_{\alpha\beta} : \alpha \in P_\beta\} \subseteq F$ tales que $u_\beta = \sum_{\alpha \in P_\beta} a_{\alpha\beta} v_\alpha$. Para cada $P \in [\kappa]^{<\omega}$, definimos $J_P := \{\beta < \lambda : P_\beta = P\}$. Mostraremos a continuación que $\lambda = \bigcup_{P \in [\kappa]^{<\omega}} J_P$.

Que $\bigcup_{P \in [\kappa]^{<\omega}} J_P \subseteq \lambda$ se sigue de que $J_P \subseteq \lambda$ para cualquier $P \in [\kappa]^{<\omega}$. Para verificar la otra contención tomamos un $\beta < \lambda$. Claramente $P_\beta \in [\kappa]^{<\omega}$ y $\beta \in J_{P_\beta}$, así que $\beta \in \bigcup_{P \in [\kappa]^{<\omega}} J_P$.

Ahora, como $\lambda = \bigcup_{P \in [\kappa]^{<\omega}} J_P$ y además (lema 1.1) $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa < \lambda$, se sigue que existe $\overline{P} \in [\kappa]^{<\omega}$ tal que $|J_{\overline{P}}| \geqslant \omega$. Denotemos por W al subespacio $[\{v_\alpha : \alpha \in \overline{P}\}]$ y notemos que su dimensión es $|\overline{P}|$. Más aún, $\{u_\beta : \beta \in J_{\overline{P}}\} \subseteq W$.

Para finalizar, notemos que al ser $\overline{P}$ finito, existe $n \in \omega$ tal que $|\overline{P}| = n$. Como $\{u_\beta : \beta \in J_{\overline{P}}\}$ es infinito, existe un $E \in [J_{\overline{P}}]^{<\omega}$ tal que $|\{u_\beta : \beta \in E\}| = n + 1$. Luego, dado que $\{u_\beta : \beta \in E\} \subseteq B'$, tenemos que $\{u_\beta : \beta \in E\} \in \mathcal{F}$, así que por la proposición 2.3 existe B'', base de Hamel para W, con $\{u_\beta : \beta \in E\} \subseteq B''$. Esto implica que $n + 1 = |\{u_\beta : \beta \in E\}| \leqslant |B''|$. Por último, $n + 1 \leqslant |B''| = |\overline{P}| = n$, lo cual es absurdo. Esto prueba que $\lambda \leqslant \kappa$ y un argumento similar prueba la desigualdad restante. $\square$

El teorema anterior justifica la siguiente definición.

Definición 2.6. La *dimensión* del espacio V es la cardinalidad de cualquier base de Hamel para V. Utilizaremos el símbolo $\dim(V)$ para denotar dicho concepto.

Lo previo es una generalización natural de la definición de dimensión utilizada para espacios generados por un conjunto finito (ver [5, section 1.6, p. 42]). Es preciso mencionar que los resultados conocidos de dimensión pueden variar o incluso romper con la intuición cuando se hace el salto al infinito. Para finalizar esta sección mostraremos tres ejemplos para sustentar este comentario. Teniendo presente este objetivo, probaremos primero el siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Sean $B \subseteq V$ una base de Hamel para V y $f : B \longrightarrow W$ una función con W un F-espacio vectorial. Existe una única transformación lineal $F : V \longrightarrow W$ tal que $f \subseteq F$.*

Demostración. Probaremos esta proposición en cuatro pasos.

Afirmación 1. Para cualquier $H \in [B]^{<\omega}$, existe una única transformación lineal $F_H : [H] \longrightarrow W$ tal que $f|_H \subseteq F_H$.

Si $H \in [B]^{<\omega}$, tenemos que $\dim([H]) = |H| < \omega$. Como consecuencia de [5, theorem 2.6, p. 72] obtenemos una única transformación lineal $F_H : [H] \longrightarrow W$ de tal manera que $f|_H \subseteq F_H$.

Afirmación 2. Para cualesquiera $G, H \in [B]^{<\omega}$, la condición $G \subseteq H$ implica que $F_G \subseteq F_H$.

Si $G, H \in [B]^{<\omega}$ son tales que $G \subseteq H$, tenemos que $[G] \subseteq [H]$. De esta manera $F_H|_{[G]}$ es una transformación lineal y además, como $f|_G \subseteq f|_H \subseteq F_H$, tenemos que $f|_G \subseteq F_H|_{[G]}$. Por la afirmación 1, esto último implica que $F_H|_{[G]} = F_G$. Se sigue que $F_G \subseteq F_H$.

Afirmación 3. $\{F_H : H \in [B]^{<\omega}\}$ es un sistema compatible de funciones.

Si $G, H \in [B]^{<\omega}$, observe que $G \cup H \in [B]^{<\omega}$. De la afirmación 2 obtenemos que $F_G \cup F_H \subseteq F_{G \cup H}$. En consecuencia, $F_G \cup F_H$ es una función.

En virtud de la afirmación 3, podemos definir a $F := \bigcup\{F_H : H \in [B]^{<\omega}\}$ y asegurar que F es una función.

Afirmación 4. F es la única transformación lineal de V en W tal que $f \subseteq F$.

Comenecemos probando que $\mathrm{dom}(F) = V$. Por definición, sabemos que $\mathrm{dom}(F) = \bigcup\{\mathrm{dom}(F_H) : H \in [B]^{<\omega}\} = \bigcup\{[H] : H \in [B]^{<\omega}\} = V$. Entonces, en efecto, F es una función de V en W.

Para verificar la linealidad, tomemos un par de vectores $v, w \in V$ y un escalar $a \in F$. Como $v, w \in V$, existen $G, H \in [B]^{<\omega}$ de tal manera que $v \in [G]$ y $w \in [H]$. Considerando a la transformación lineal $F_{G \cup H}$, tenemos lo siguiente:

$$F(av + w) = F_{G\cup H}(av + w) = aF_{G\cup H}(v) + F_{G\cup H}(w) = aF(v) + F(w);$$

mostrando que F es una transformación lineal.

Mostraremos que F extiende a f de la siguiente manera, dado $u \in B$, claramente $\{u\} \in [B]^{<\omega}$ y $f|_{\{u\}} \subseteq F_{\{u\}} \subseteq F$. Luego, $f = \bigcup_{u\in B} f|_{\{u\}} \subseteq \bigcup_{u\in B} F_{\{u\}} \subseteq F$.

Para concluir, veamos que F es única. Supongamos que existe una transformación lineal $F' : V \longrightarrow W$ tal que $f \subseteq F'$. Dado $v \in V$, existen vectores $\{u_k : k \leqslant n\} \subseteq B$ y escalares $\{a_k : k \leqslant n\} \subseteq F$ tales que $v = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k$. Se sigue de la linealidad y la propiedad de extensión que:

$$F'(v) = \sum_{k=0}^{n} a_k F'(u_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k f(u_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k F(u_k) = F(v);$$

probando así la igualdad $F = F'$. $\square$

Armados con esto nos encontramos mejor posicionados para sustentar nuestras afirmaciones y ofrecerles tres ejemplos relevantes en esta discusión de la dimensión.

Una consecuencia de [5, theorem 1.11, p. 50] es que si $\dim(V) < \omega$ y W es un subespacio propio de V, entonces necesariamente $\dim(W) < \dim(V)$. Este resultado puede fallar cuando la dimensión del espacio sostén es infinita.

Denotemos por $\mathbb{R}[x]$ al espacio de los polinomios con coeficientes reales en la indeterminada x. Si consideramos al conjunto $B := \{x^n : n < \omega\}$, tenemos que B forma una base de Hamel para $\mathbb{R}[x]$. Esto indica que $\dim(\mathbb{R}[x]) = \omega$. Por otro lado, si llamamos $B' := \{x^{2n} : n < \omega\}$ y hacemos $W := [B']$, tenemos que W es un subespacio propio de $\mathbb{R}[x]$ y, sin embargo, el hecho de que B' es una base de Hamel para W muestra que $\dim(W) = \omega$.

Pensemos ahora en $\mathbb{R}^n$ visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Es sabido que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ para cualquier $n < \omega$. El siguiente paso sería pensar en ${}^{\omega}\mathbb{R}$. Nos permitimos comentar que una buena forma de pensar a los elementos de ${}^{\omega}\mathbb{R}$ es como vectores con una cantidad infinita numerable de coordenadas, donde la suma y el producto por escalares se realizan entrada a entrada como en su contraparte finita $\mathbb{R}^n$.

Con estos hechos en mente, es natural preguntarse por $\dim({}^{\omega}\mathbb{R})$ y es aún más natural creer que $\dim({}^{\omega}\mathbb{R}) = \omega$. Nuestro siguiente resultado muestra que esto no es así.

Proposición 2.8. $\dim({}^{\omega}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Demostración. Comenzaremos exhibiendo un subconjunto de ${}^{\omega}\mathbb{R}$ que resulte linealmente independiente y de tamaño $\mathfrak{c}$. Para esto, dado $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, definimos a $\overline{s} : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\overline{s}(n) := s^n$. Concentrémonos en probar que el conjunto $S := \{\overline{s} : s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ es linealmente independiente.

Sea $n \in \omega$. Tomemos $\{s_k : k \leqslant n\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, indizado sin repeticiones, y $\{a_k : k \leqslant n\} \subseteq \mathbb{R}$ de tal forma que $\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{s_k} = \underline{0}$, donde $\underline{0}$ denota al neutro aditivo de ${}^{\omega}\mathbb{R}$. Definamos una matriz M de tamaño $(n+1)\times(n+1)$ de manera que $M_{ij} := (s_j)^i$ (note que la primera columna de M está formada por los números de la forma M_{i0}, con $0 \leqslant i \leqslant n$) y tomemos $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que la k-ésima entrada de a sea, precisamente, a_k.

Antes de seguir, conviene mencionar dos detalles sutiles. Tomamos al espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ por comodidad ya que nuestras enumeraciones comienzan en el cero; mencionamos esto por si nuestros lectores se sienten incómodos con el $n+1$ (para al menos justificar la incomodidad). Además, estamos pensando en a como un vector columna, esto justifica que el producto de matrices Ma está bien definido.

Con esto en mente, notemos que $(Ma)_i = \sum_{k=0}^{n} a_k (s_k)^i = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{s_k}\right)(i) = 0$. Esto nos dice que $Ma = \vec{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Cambiemos un poco la perspectiva y consideremos al sistema de $n+1$ ecuaciones lineales en $n+1$ indeterminadas inducido por $Mx = \vec{0}$. En esta situación, estamos diciendo que a es una solución del sistema $Mx = \vec{0}$. Dado que $\vec{0}$ es una solución trivial del sistema, si logramos verificar que este tiene una única solución obtendríamos que $a = \vec{0}$ y esto a su vez implicaría que, para cualquier $k \leqslant n$, se satisface la igualdad $a_k = 0$, como queríamos.

Para probar que el sistema $Mx = \vec{0}$ tiene una única solución, [5, theorem 3.10, p. 174] nos indica que es suficiente probar que M es una matriz invertible. Ahora, para ver que M es invertible, notemos que los resultados que aparecen en [5, p. 223] y [5, theorem 4.8, p. 224] aseguran que es suficiente probar que M^t, la transpuesta de M, es invertible. Finalmente, la invertibilidad de M^t se deduce de la inyectividad de la transformación lineal L_{M^t}, gracias a [5, theorem 2.5, p. 70] y a [5, corollary 2, p. 102]. Verifiquemos entonces esto último comprobando que el núcleo de L_{M^t} es trivial.

Sea $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ de tal manera que $L_{M^t}(b) = \vec{0}$. Convengamos en denotar por b_k a la k-ésima coordenada de b. Tenemos que $0 = (L_{M^t}(b))_i = \sum_{k=0}^{n} b_k (s_i)^k$, para cada $i \leqslant n$. Esto nos lleva a que $p(x) := \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ es un polinomio de grado, a lo más, n y satisface $p(s_k) = 0$, siempre que $k \leqslant n$; esto es, $p(x)$ posee $n+1$ raíces distintas. Se sigue de [18, 7(c), p. 49] que $p(x)$ es el polinomio cero y en consecuencia, $b_k = 0$, siempre que $k \leqslant n$; equivalentemente, $b = \vec{0}$, tal y como se quería probar.

Entonces, en efecto, S es un conjunto linealmente independiente de ${}^{\omega}\mathbb{R}$. Para concluir, por la proposición 2.3, existe B, base de Hamel para ${}^{\omega}\mathbb{R}$, con $S \subseteq B$. Así,

$$\mathfrak{c} = |S| \leqslant |B| \leqslant |{}^{\omega}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^{\omega} = (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega \cdot \omega} = 2^{\omega} = \mathfrak{c};$$

esto muestra que $|B| = \mathfrak{c}$, y por ende, $\dim({}^{\omega}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. □

Nuestro último ejemplo yace en la teoría de los espacios vectoriales normados. En lo que sigue entenderemos los conceptos de norma y continuidad de la manera tradicional; si nuestros lectores quieren ahondar en los detalles que aquí daremos por hecho recomendamos consultar [3] para obtener más información del tema.

Para la construcción que nos compete necesitamos mencionar de antemano ciertos resultados que serán de gran utilidad. Pensemos de nuevo en $\mathbb{R}^n$. En [3, proposición 2.13, p. 14] se prueba que la pareja $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ es un espacio normado, donde la función $\|x\|_1$ está dada por la suma de los valores absolutos de las entradas del vector x.

Otro resultado útil es el enunciado a continuación. Supongamos que tenemos un par de F-espacios vectoriales, V y W, donde además W es un espacio normado con norma $\|\cdot\|_W$. Supongamos también que $g : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal inyectiva. Con estas hipótesis, si definimos para cada $v \in V$ a $\|v\|_V := \|g(v)\|_W$, entonces $(V, \|\cdot\|_V)$ resulta ser un espacio normado. Nuestro último resultado auxiliar lo enunciaremos como lema.

Lema 2.9. *Fijemos un par de F-espacios vectoriales normados, V y W, y $f : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Se tiene que f es continua si y sólo si existe $c > 0$ de tal suerte que para cualquier $v \in V$ la desigualdad $\|f(v)\|_W \leqslant c\|v\|_V$ es cierta.*

Demostración. Comencemos verificando la suficiencia. La continuidad de f asegura que f es continua en $\vec{0}$. Entonces, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ de tal forma que si $v \in V$ cumple que $\|v\|_V < \delta$, entonces $\|f(v)\|_W < 1$. Si $v = \vec{0}$, la desigualdad buscada se cumple trivialmente para cualquier $c > 0$. Para $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$, observe que

$$\left\| \frac{\delta v}{2\|v\|_V} \right\|_V = \frac{\delta}{2} < \delta;$$

este hecho junto con la continuidad de f garantizan que

$$\frac{\delta}{2\|v\|_V}\left\|f(v)\right\|_W = \left\|f\left(\frac{\delta v}{2\|v\|_V}\right)\right\|_W < 1.$$

En consecuencia, si hacemos $c := \dfrac{2}{\delta}$, tenemos que $\left\|f(v)\right\|_W < c\|v\|_V$, como queríamos.

Para la necesidad, supongamos que existe $c > 0$ con la característica deseada. Para comprobar la continuidad de f procedemos de manera estándar fijando $w \in V$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Definimos $\delta := \dfrac{\varepsilon}{c}$ y elijamos $v \in V$ tal que $\|v - w\|_V < \delta$. Tenemos que $\left\|f(v-w)\right\|_W \leqslant c\|v-w\|_V \leqslant c \cdot \delta = \varepsilon$. Esto prueba que f es continua. $\square$

Antes de continuar nos permitimos comentar que en la siguiente sección trabajaremos con $\mathbb{R}$ visto como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial y construiremos varias funciones con propiedades interesantes (entre ellas, funciones $\mathbb{Q}$-lineales que son discontinuas). El ejemplo que hemos estado preparando es sobre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Puntualizamos esto para distinguir que, en esencia, el próximo resultado y los resultados de la siguiente sección son distintos. Sin más preámbulos, presentamos nuestro tercer y último ejemplo.

Teorema 2.10. *Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $\dim(V) < \omega$.
2. *Si W es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces f es continua.*

Demostración. Supongamos primero que $\dim(V) = n$ para algún $n < \omega$. Tomemos W, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y $f : V \longrightarrow W$, una transformación lineal. Fijemos además $\{v_k : k < n\}$, base de Hamel para V.

Dado $v \in V$, [5, theorem 1.8, p. 43] asegura que existe una única colección de escalares $\{a_k : k < n\} \subseteq \mathbb{R}$ de tal manera que $v = \sum_{k<n} a_k v_k$. Dicha unicidad justifica que $g : V \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ dada por $g(v) = (a_0, ..., a_{n-1})$, está bien definida. Además, es fácil ver que g es una transformación lineal inyectiva.

Por las observaciones previas al lema 2.9, si hacemos $\|v\|_\star := \|g(v)\|_1 = \sum_{k<n} |a_k|$, tenemos que $(V, \|\cdot\|_\star)$ es un espacio normado. En estas condiciones, $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_\star$ resultan ser normas equivalentes para V (ver [3, teorema 4.19, p. 64]). De esta manera existe un $c_\star > 0$ tal que para todo $v \in V$, la desigualdad $\|v\|_\star \leqslant c_\star \|v\|_V$ es cierta. Para concluir la prueba de esta implicación hagamos $c := \max \{\|f(v_k)\| : k < n\}$ y notemos que si $v \in V$, entonces, como dijimos antes, existe $\{a_k : k < n\} \subseteq \mathbb{R}$ con $v = \sum_{k<n} a_k v_k$, y de esta forma:

$$\|f(v)\|_W = \left\| f\left(\sum_{k<n} a_k v_k\right) \right\|_W \leqslant \sum_{k<n} |a_k| \|f(v_k)\|_W \leqslant \sum_{k<n} |a_k| c = \|v\|_\star c \leqslant c c_\star \|v\|_V .$$

Por el lema 2.9, esto es suficiente para asegurar que f es continua.

Para verificar la implicación recíproca procederemos por contrapuesta. Supongamos que $\dim(V) \geqslant \omega$ y fijemos B, base de Hamel para V. Como $|B| \geqslant \omega$, podemos extraer un subconjunto $\{v_k : k < \omega\} \subseteq B$ que este enumerado sin repeticiones. Ahora, en vista de que B es linealmente independiente, $\vec{0} \notin B$ y, por ende, podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $\|v_k\|_V = 1$, para cada $k < \omega$.

Con lo anterior en mente, definamos $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue

$$f(v) = \begin{cases} k, & \text{si existe } k < \omega \text{ tal que } v = v_k \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por la proposición 2.7, existe una única transformación lineal $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \subseteq F$. Observe que si $k < \omega$, tenemos que $|F(v_k)| = k$. De esta manera, el lema 2.9 indica que F no es continua. $\square$

Como hemos mencionado antes, lo que sigue es estudiar a $\mathbb{R}$ visto como un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Para concluir esta sección, presentamos el siguiente resultado para $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales en arbitrario.

Lema 2.11. *Si S es un subconjunto no vacío de un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial V, entonces $|[S]| \leqslant |S| \cdot \omega$.*

Demostración. Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$, consideremos a la función $\varphi_n : {}^n S \times {}^n \mathbb{Q} \longrightarrow [S]$

dada por $\varphi_n(x,p) := \sum_{k<n} p(k)x(k)$. Hagamos $\varphi := \bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} \varphi_n$. Observe que φ es una función al ser unión de un sistema compatible de funciones; además φ tiene como dominio a $\bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}}({}^nS \times {}^n\mathbb{Q})$ y como imagen a $[S]$. De esta manera:

$$\big|[S]\big| \leqslant \left|\bigcup_{n\in\omega\setminus\{0\}} ({}^nS \times {}^n\mathbb{Q})\right| = \sum_{n\in\omega\setminus\{0\}} |{}^nS \times {}^n\mathbb{Q}| = \sum_{n\in\omega\setminus\{0\}} |S|^n \cdot \omega = \sum_{n\in\omega\setminus\{0\}} |S| \cdot \omega = |S| \cdot \omega \cdot \omega = |S| \cdot \omega.$$

□

Corolario 2.12. $\mathbb{R}$ *visto como* $\mathbb{Q}$*-espacio vectorial tiene dimensión* $\mathfrak{c}$.

Demostración. Sea B una base de Hamel para el $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{R}$. Como B es un subconjunto de $\mathbb{R}$, tenemos la desigualdad $|B| \leqslant \mathfrak{c}$. Por otro lado, se deduce del lema 2.11 que $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = \big|[B]\big| \leqslant |B| \cdot \omega$. Por último, la desigualdad $\mathfrak{c} \leqslant |B| \cdot \omega$, implica que $\mathfrak{c} \leqslant |B|$.

□

2.2 La ecuación funcional de Cauchy

Definición 2.13. Una función entre F-espacios vectoriales $f : V \longrightarrow W$ es una *función aditiva* (o satisface la ecuación funcional de Cauchy) si para cualesquiera $u, v \in V$ se cumple que $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

En esta sección mostraremos algunas propiedades del comportamiento de $\mathbb{R}$ visto como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial con respecto a las funciones aditivas; además construiremos varios ejemplos de funciones interesantes.

Lema 2.14. *Si* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es aditiva, entonces* F *es* $\mathbb{Q}$*-lineal.*

Demostración. La prueba de este resultado se basa en una serie de afirmaciones. Comencemos fijando un $x \in \mathbb{R}$.

Afirmación 1. Si $n \in \omega$, se satisface $F(nx) = nF(x)$.

Procedemos por inducción sobre n.

Para el caso base, la aditividad de F nos da que $F(0) = F(0+0) = F(0) + F(0)$ y, por ende, $F(0) = 0$. Luego, $F(0x) = F(0) = 0 = 0F(x)$, como se quería.

Con respecto al paso inductivo, supongamos que $n \in \omega$ cumple que $F(nx) = nF(x)$ y notemos que $F((n+1)x) = F(nx + x) = F(nx) + F(x) = nF(x) + F(x) = (n+1)F(x)$.

Afirmación 2. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, se cumple que $F(nx) = nF(x)$.

Primero, observemos que de las igualdades $0 = F(0) = F(x - x) = F(x) + F(-x)$ se sigue que $F(-x) = -F(x)$. Luego, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \omega$, tenemos que $-n \in \omega$ y por la observación anterior y la afirmación 1 se deduce que $F(nx) = F((-n)(-x)) = (-n)F(-x) = (-n)(-F(x)) = nF(x)$.

Afirmación 3. Cuando $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se tiene que $F\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}F(x)$.

Si $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, la afirmación 2 implica que $F(x) = F\left(\frac{nx}{n}\right) = nF\left(\frac{x}{n}\right)$ y en consecuencia, $F\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}F(x)$.

Con estas tres afirmaciones, estamos listos para probar el lema, tomemos $p \in \mathbb{Q}$ y $x, y \in \mathbb{R}$. Para p, existen $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $p = \frac{m}{n}$. Como consecuencia de la aditividad de F y de las afirmaciones 2 y 3 obtenemos lo siguiente:

$$F(px + y) = F(px) + F(y) = F\left(\frac{m}{n}x\right) + F(y) = \frac{m}{n}F(x) + F(y) = pF(x) + F(y). \qquad \square$$

Nuestro resultado siguiente no usa el Axioma de Elección.

Proposición 2.15. *Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función aditiva. Se satisface que F es continua si y sólo si F es $\mathbb{R}$-lineal.*

Demostración. Demos por hecho que F es $\mathbb{R}$-lineal y hagamos $a := F(1)$. Así, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $F(x) = F(x \cdot 1) = xF(1) = ax$. De este modo, F es claramente continua.

Supongamos ahora que F es continua. Probaremos que si $a \in \mathbb{I}$ y $x \in \mathbb{R}$, entonces $F(ax) = aF(x)$. Como $\mathbb{Q}$ es infinito numerable, existe $g : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$ biyectiva. Nos proponemos construir una sucesión en $\mathbb{Q}$ convergente a a. Para esto note que, dado un $n \in \omega$, la densidad de $\mathbb{Q}$ implica que $(a, a + 2^{-n}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$; de esta forma, la colección $\{k < \omega : a < g(k) < a + 2^{-k}\}$ no es vacía y posee elemento mínimo, digamos $h(n)$. Lo anterior nos da una función $h : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$ de tal manera que $0 < h(n) - a < 2^{-n}$, para cualquier $n < \omega$.

Por la construcción de h se tiene que $\lim_{n\to\infty} h(n) = a$ y, por ende, $\lim_{n\to\infty} h(n)x = ax$. Luego, la continuidad de F implica que $\lim_{n\to\infty} F(h(n)x) = F(ax)$. Por otro lado, como F es

$\mathbb{Q}$-lineal (lema 2.14), para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ tenemos que $F(h(n)x) = h(n)F(x)$. Finalmente, $aF(x) = \left(\lim_{n\to\infty} h(n)\right) F(x) = \lim_{n\to\infty} (h(n)F(x)) = \lim_{n\to\infty} F(h(n)x) = F(ax)$.

Se concluye que para cualesquiera $r, x \in \mathbb{R}$, $F(rx) = rF(x)$. $\square$

Una pregunta natural que surge después de este resultado es ¿cuál es un ejemplo de una función aditiva discontinua? ¿existe alguno? La respuesta es sí, el primer ejemplo de una función con estas características fue construido por Hamel (ver [7]), utilizando una base de Hamel para $\mathbb{R}$ visto como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Nosotros no presentaremos este ejemplo en particular, sin embargo, trataremos de satisfacer la curiosidad de nuestros lectores con nuestros dos resultados siguientes. Convengamos que, por el resto del capítulo, pensaremos a $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

El siguiente resultado tiene como consecuencia que hay $\mathfrak{c}$ conjuntos de Bernstein (ver definición 1.8) ajenos por pares.

Teorema 2.16. *Existe una base de Hamel B y una función $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}\{r\}$ es un conjunto de Bernstein para cada $r \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Primero, note que si $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple que para cada $r \in \mathbb{R}$ y para cada $F \in \mathcal{H}$ se tiene que $F \cap f^{-1}\{r\} \neq \emptyset$, entonces f tiene la propiedad deseada pues el complemento de $f^{-1}\{r\}$ contiene a $f^{-1}\{r+1\}$, así que debe intersectar a cualquier elemento de $\mathcal{H}$. Esto último implicaría que cada fibra es un conjunto de Bernstein.

En vista del lema 1.7 podemos fijar $\{(F_\xi, r_\xi) : \xi < \mathfrak{c}\}$, una enumeración sin repeticiones, de $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$. Construiremos una sucesión $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, indizada sin repeticiones, que sea linealmente independiente y tal que, para cada $\xi < \mathfrak{c}$, se tenga la pertenencia $x_\xi \in F_\xi$. Esto es suficiente para construir a la función f en cuestión, puesto que, por la proposición 2.3, el conjunto $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ puede incluirse en una base de Hamel B. En esta situación, definimos a $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera: para cada $\xi < \mathfrak{c}$, $f(x_\xi) = r_\xi$ y $f(v) = v$, siempre que $v \in B \setminus \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$. Entonces, para $r \in \mathbb{R}$ y $F \in \mathcal{H}$, existe $\xi < \mathfrak{c}$ tal que $(F, r) = (F_\xi, r_\xi)$. Luego, $f(x_\xi) = r_\xi = r$ y $x_\xi \in F_\xi = F$; por lo tanto, $F \cap f^{-1}\{r\} \neq \emptyset$. Concentrémonos pues en construir esta sucesión.

Obtendremos dicha sucesión por recursión transfinita sobre $\mathfrak{c}$. Supongamos que, para alguna $\xi < \mathfrak{c}$, hemos obtenido $\{x_\eta : \eta < \xi\}$ de tal modo que $x_\eta \in F_\eta \setminus [\{x_\zeta : \zeta < \eta\}]$, siempre que $\eta < \xi$ y hallemos x_ξ como sigue.

Si $\xi = 0$, simplemente tomamos $x_0 \in F_0$. Supongamos entonces que $\xi > 0$. En vista de los lemas 1.7 y 2.11, tenemos que $\Big|\big[\{x_\eta : \eta < \xi\}\big]\Big| \leqslant |\xi| \cdot \omega < \mathfrak{c} = |F_\xi|$. De esta manera, podemos tomar $x_\xi \in F_\xi \setminus \big[\{x_\eta : \eta < \xi\}\big]$. Esto completa la recursión.

Lo único restante es mencionar que $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ es linealmente independiente en virtud del lema 2.4. $\square$

En el cálculo aparece un famoso resultado conocido como el Teorema del Valor Intermedio, formulado y probado originalmente por Bernard Bolzano en 1817. Recordando brevemente, para $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, y $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que g posee la *propiedad del valor intermedio* si para cualesquiera $w, z \in \operatorname{img}(g)$ y para cualquier $y \in \mathbb{R}$ con $w < y < z$, existe $x \in [a, b]$ tal que $g(x) = y$. El teorema del valor intermedio asegura que las funciones continuas con dominio un intervalo cerrado siempre tienen esta propiedad.

Uno de los matemáticos que más profundizaron en este tema fue Jean Gaston Darboux. Mediante un nuevo concepto, llamado actualmente *función de Darboux*, se dedicó a estudiar a las funciones, no necesariamente continuas, que cumplen con tener la propiedad del valor intermedio. A continuación presentamos esta definición con propiedad y una generalización de las funciones de Darboux.

Definición 2.17. Una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es de *Darboux* si para cualesquiera números reales a, b, w, z y y que satisfagan $a < b$, $w, z \in g\big[[a, b]\big]$ y $w < y < z$ hay $x \in [a, b]$ tal que $g(x) = y$

Definición 2.18. Una función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *fuertemente Darboux* si para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y para cualquier $y \in \mathbb{R}$, existe un $x \in [a, b]$ tal que $g(x) = y$.

Hagamos la observación de que, como fuerte contraste con la motivación original para estudiar la propiedad del valor intermedio, es decir, las funciones continuas, resulta que las funciones fuertemente Darboux no son continuas en ningún punto de $\mathbb{R}$.

En aras de sustentar lo anterior verifiquemos que, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es fuertemente Darboux y $z \in \mathbb{R}$, entonces g no es continua en z. En efecto, tomemos $\varepsilon = 1$ y notemos que, para cualquier $\delta > 0$,

$$g[[z - \delta, z - \delta]] = \mathbb{R} \not\subseteq (g(z) - 1, g(z) + 1).$$

Para los corolarios siguientes le recordamos a nuestro lector que *medible* significa *Lebesgue-medible* y le sugerimos estar familiarizado con el contenido de la sección 1.2.

Corolario 2.19. *Hay una función de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *que es fuertemente Darboux y aditiva, pero no es medible.*

Demostración. Por la proposición 2.7, existe una única transformación lineal $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que extiende a la función f del teorema 2.16. Observemos que las contenciones $f^{-1}\{r\} \subseteq F^{-1}\{r\}$ y $f^{-1}\{r+1\} \subseteq F^{-1}\{r+1\} \subseteq \mathbb{R} \setminus F^{-1}\{r\}$, para cada $r \in \mathbb{R}$, implican que todas las fibras de F son conjuntos de Bernstein. En particular (ver lema 1.9), $F^{-1}\{0\}$ no es medible y, por ende, F no es medible.

Por último, tomemos $r \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. En vista de que $[a, b] \in \mathcal{H}$, podemos fijar $t \in [a, b] \cap f^{-1}\{r\}$. De este modo, $F(t) = f(t) = r$. □

Corolario 2.20. *Existe una base de Hamel* B *tal que, para cualquier* $F \in \mathcal{H}$*, se tiene que* $|B \cap F| = \mathfrak{c}$.

Demostración. Mostraremos que la base de Hamel B del teorema 2.16 tiene esta propiedad. En efecto, para $F \in \mathcal{H}$, tenemos la igualdad:

$$B \cap F = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \left(f^{-1}\{r\} \cap F \right);$$

donde $\{f^{-1}\{r\} \cap F : r \in \mathbb{R}\}$ es una familia no numerable de conjuntos no vacíos y ajenos por pares. □

Corolario 2.21. *Existe una base de Hamel no medible.*

Demostración. Probaremos que B es un conjunto de Bernstein. Note que, en virtud del lema 1.9, esto es suficiente para asegurar que B no es medible. Comencemos por tomar $F \in \mathcal{H}$. Entonces, $\emptyset \neq f^{-1}\{0\} \cap F \subseteq B \cap F$; esto es, B tiene intersección no vacía con cada elemento de $\mathcal{H}$.

Por otro lado, para $x \in B$, el conjunto $x + B$ (recuerde la definición 1.6) es ajeno con B, ya que, en caso contrario, existirían $y, z \in B$ tales $x + y = z$. De esta manera, podríamos tomar $S \subseteq \{x, y, z\} \subseteq B$ con S linealmente dependiente. Esto último es absurdo puesto que B es base de Hamel.

Se concluye de lo anterior que $x + B \subseteq \mathbb{R} \setminus B$. Observemos, además, que $(-x) + F \in \mathcal{H}$. De esta manera, $B \cap ((-x) + F) \neq \emptyset$, y así $(x + B) \cap F \neq \emptyset$. Esto prueba que $(\mathbb{R} \setminus B) \cap F \neq \emptyset$. $\square$

Como contraste con el corolario 2.21 ofrecemos el siguiente resultado.

Proposición 2.22. *Existe una base de Hamel medible.*

Demostración. Mencionamos al final de la sección 1.3 que K_ω tiene medida cero. A partir de este hecho y de la subaditividad de la medida de Lebesgue (ver [17, proposition 3, p. 33]) obtenemos que, si $S \subseteq K_\omega$, entonces S tiene medida cero y, por ende, S es medible. Con esto en mente, para mostrar la veracidad de la proposición basta con encontrar una base de Hamel contenida en K_ω. Note que, en virtud del lema 2.2, esto último está garantizado si logramos mostrar que $[K_\omega] = \mathbb{R}$. Para probar esto fijemos $t \in \mathbb{R}$ y tomemos $q \in \mathbb{Q}$ con $qt \in [0, 1]$. De acuerdo al teorema 1.10, hay $x, y \in K_\omega$ con $qt = x - y$, es decir, $t = (1/q)x + (1/q)y \in [K_\omega]$. $\square$

2.3 El Teorema de Erdős-Kakutani

Uno de los enunciados más famosos y controversiales de las matemáticas es la reconocida Hipótesis del Continuo de Cantor (abreviada comúnmente como CH) que afirma que $\mathfrak{c} = \omega_1$. Gracias a los trabajos de Kurt Gödel en 1940 y de Paul Cohen en 1963 ya sabemos que este es un enunciado independiente de ZFC, es decir, tanto la Hipótesis del Continuo como su negación pueden añadirse a los axiomas de la teoría de conjuntos y la teoría resultante resultará consistente si y solamente si ZFC es consistente. Para concluir este capítulo queremos presentar la demostración del teorema de Erdős-Kakutani, que nos da una inesperada e impresionante relación de este enunciado, que es puramente conjuntista, con el álgebra lineal y las bases de Hamel. Con esto en mente, presentaremos a continuación dos lemas previos, debidos a Erdős y a Hajnal, que nos ayudarán a cumplir nuestro objetivo.

Lema 2.23. *Si $f : A \times B \longrightarrow \omega$, con $|A| = \omega_2$ y $|B| = \omega_1$, entonces, para cada $n < \omega$, existen $A_0 \in [A]^{\omega_2}$ y $B_0 \in [B]^n$ tales que $f|_{A_0 \times B_0}$ es constante.*

Demostración. Fijemos $n < \omega$.

Afirmación. Para cualquier $a \in A$, existen $B_a \in [B]^n$ y $m_a < \omega$ tales que $f|_{\{a\} \times B_a}$ es la función constante m_a.

Sea $a \in A$. Hagamos $f_a : B \longrightarrow \omega$ dada por $f_a(b) := f(a, b)$. Por el corolario 1.3, existe $m_a < \omega$ tal que $|f_a^{-1}\{m_a\}| = \omega_1$. Tomemos $B_a \in [f_a^{-1}\{m_a\}]^n$. Se satisface que $B_a \in [B]^n$ y, si $b \in B_a$, por definición de B_a se tiene que $f(a, b) = f_a(b) = m_a$.

Definamos ahora $g : A \longrightarrow [B]^n \times \omega$ mediante $g(a) := (B_a, m_a)$. Como $|[B]^n \times \omega| = \omega_1$, el corolario 1.3 asegura que existe $(B_0, m) \in [B]^n \times \omega$ tal que $|g^{-1}\{(B_0, m)\}| = \omega_2$. Pongamos $A_0 := g^{-1}\{(B_0, m)\}$ y a continuación tomemos $(a, b) \in A_0 \times B_0$. De la igualdad $g(a) = (B_0, m)$ se deduce que $B_0 = B_a$ y $m = m_a$; en consecuencia, $f(a, b) = m$. □

Para el resultado siguiente se requiere familiaridad con la definición 1.6.

Lema 2.24. *Supongamos que $\omega_1 < \mathfrak{c}$. Sea $H \subseteq \mathbb{R}$ con $|H| \geqslant \omega_2$. Si $\{H_n : n < \omega\}$ es una partición de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ indizada sin repeticiones, entonces existen $n < \omega$, $A_0 \in [H]^{\omega_2}$ y $B_0 \in [H]^2$ tales que $A_0 \cap B_0 = \emptyset$ y $A_0 + B_0 \subseteq H_n$.*

Demostración. Sea $B' \in [H]^{\omega_1}$. Hagamos $B := B' \cup \{-b \in H : b \in B'\}$ y notemos que $B \in [H]^{\omega_1}$. Tomemos ahora $A \in [H \setminus B]^{\omega_2}$. Observemos que $A \cap B = \emptyset$ y además $0 \notin A + B$.

La condición $0 \notin A + B$ y nuestra hipótesis sobre $\{H_n : n < \omega\}$ garantizan que $f : A \times B \longrightarrow \omega$ dada por $f(a, b) = m$ si y sólo si $a + b \in H_m$ está bien definida. Por el lema 2.23, para $n = 2$, existen $A_0 \in [A]^{\omega_2}$ y $B_0 \in [B]^2$ tales que $f|_{A_0 \times B_0}$ es constante; digamos n. Evidentemente $n < \omega$ y se cumple que $A_0 + B_0 \subseteq H_n$. □

Equipados con estos dos lemas estamos preparados para enunciar y demostrar el teorema de Erdős-Kakutani.

Teorema 2.25. *La Hipótesis del Continuo es equivalente a la existencia de una partición infinita numerable de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en bases de Hamel.*

Demostración. Comencemos verificando la implicación recíproca. Sea $\{H_n : n < \omega\}$ una partición de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ indizada sin repeticiones con cada H_n base de Hamel y supongamos, buscando una contradicción, que $\omega_1 < \mathfrak{c}$. Fijemos H, una base de Hamel para $\mathbb{R}$. Por el corolario 2.12 sabemos que $|H| = \mathfrak{c} \geqslant \omega_2$. Así que, por el lema 2.24, existen $n < \omega$,

$A_0 \in [H]^{\omega_2}$ y $B_0 \in [H]^2$ tales que $A_0 \cap B_0 = \emptyset$ y $A_0 + B_0 \subseteq H_n$. Tomemos $(a_0, b_0), (a_1, b_1) \in A_0 \times B_0$ con $a_0 \neq a_1$ y $b_1 \neq b_1$. Definamos ahora, para cada $i, j < 2$, $x_{ij} := a_i + b_j$. Notemos que cada $x_{ij} \in H_n$. Si los x_{ij} fuesen distintos entre sí, entonces tendríamos que:

$$x_{00} - x_{10} = (a_0 + b_0) - (a_1 + b_0) = (a_0 + b_1) - (a_1 + b_1) = x_{01} - x_{11};$$

esto contradiría la independencia lineal de H_n y finalizaría la prueba de esta implicación. Veamos que, en efecto, cada x_{ij} es distinto de los demás. Por ejemplo, la hipótesis $b_0 \neq b_1$ nos da $x_{00} = a_0 + b_0 \neq a_0 + b_1 = x_{01}$. Similarmente se verifica que $x_{00} \neq x_{10}$, $x_{01} \neq x_{11}$ y $x_{10} \neq x_{11}$. Únicamente falta comprobar que $x_{00} \neq x_{11}$ y $x_{01} \neq x_{10}$. Para esto consideremos a la función $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} a_i, & \text{si existe } i < 2 \text{ tal que } x = a_i \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por la proposición 2.7 existe una única transformación lineal $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \subseteq F$. Entonces, $F(x_{00}) = F(a_0 + b_0) = F(a_0) + F(b_0) = a_0$ y $F(x_{11}) = a_1$; con lo cual, $x_{00} \neq x_{11}$. Análogamente, $x_{01} \neq x_{10}$.

Concentrémonos ahora en la implicación directa. Supongamos que $\omega_1 = \mathfrak{c}$ y fijemos $\{v_\xi : \xi < \omega_1\}$, una base de Hamel para $\mathbb{R}$ indizada sin repeticiones. Hagamos, para cada $\xi \leqslant \omega_1$, $L_\xi := [\{v_\zeta : \zeta < \xi\}]$. Notemos que, si $\xi < \eta \leqslant \omega_1$, tenemos que $L_\xi \subseteq L_\eta$; si $\xi \leqslant \omega_1$ es un ordinal límite, entonces $L_\xi = \bigcup\limits_{\eta<\xi} L_\eta$ y además, $L_{\omega_1} = \mathbb{R}$. Observemos también que el conjunto $\{L_{\xi+1} \setminus L_\xi : \xi < \omega_1\}$ es una partición de $\mathbb{R} \setminus L_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tomemos ahora $\xi < \omega_1$. Por el lema 2.11 tenemos que $|L_{\xi+1} \setminus L_\xi| \leqslant |L_{\xi+1}| \leqslant |\xi+1| \cdot \omega = \omega$. Por otro lado, como $L_{\xi+1} \setminus L_\xi$ contiene a todos los múltiplos racionales de v_ξ, se tiene que $\omega \leqslant |L_{\xi+1} \setminus L_\xi|$. Concluimos que $|L_{\xi+1} \setminus L_\xi| = \omega$.

Por lo anterior, para cada $\xi < \omega_1$, podemos fijar una biyección $f_\xi : L_{\xi+1} \setminus L_\xi \longrightarrow \omega$. Hagamos ahora $f := \bigcup\limits_{\xi<\omega_1} f_\xi$ y notemos que $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \omega$. Para cada $n < \omega$, definamos $H_n := f^{-1}\{n\}$. El conjunto $\{H_n : n < \omega\}$ es una partición de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Comprobaremos a continuación que cada H_n es una base de Hamel.

Sea $n < \omega$. Es fácil ver que, para cualquier $\xi < \omega_1$, se satisface la igualdad:

$$(L_{\xi+1} \setminus L_\xi) \cap f^{-1}\{n\} = (L_{\xi+1} \setminus L_\xi) \cap f_\xi^{-1}\{n\}$$

y como f_ξ es una biyección, el conjunto $(L_{\xi+1} \setminus L_\xi) \cap f^{-1}\{n\}$ consta de un solo punto, digamos x_ξ. Notemos ahora que $H_n = \{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ y además, por el lema 2.4, tenemos que el conjunto $\{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ es linealmente independiente. Para ver que H_n es base de Hamel únicamente falta probar que H_n genera a $\mathbb{R}$. Si logramos verificar que $L_\xi = [\{x_\eta : \eta < \xi\}]$ siempre que $\xi \leqslant \omega_1$, entonces tendremos que $[H_n] = [\{x_\xi : \xi < \omega_1\}] = L_{\omega_1} = \mathbb{R}$, como requerimos. Para finalizar la prueba enunciemos esto con propiedad y comprobemos su veracidad.

Afirmación. Para cada $\xi \leqslant \omega_1$ se satisface la igualdad $L_\xi = [\{x_\eta : \eta < \xi\}]$.

Procederemos por inducción transfinita sobre ω_1. Sea $\xi \leqslant \omega_1$. Si $\xi = 0$, obtenemos que $L_0 = [\emptyset] = [\{x_\eta : \eta < 0\}]$. Para verificar el caso límite supongamos que, para todo $\eta < \xi$, se tiene que $L_\eta = [\{x_\zeta : \zeta < \eta\}]$. Podemos deducir que:

$$L_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} L_\eta = \bigcup_{\eta<\xi} [\{x_\zeta : \zeta < \eta\}] = [\{x_\eta : \eta < \xi\}].$$

Con respecto al caso sucesor, supongamos que $L_\xi = [\{x_\eta : \eta < \xi\}]$ y comprobemos que $L_{\xi+1} = [\{x_\eta : \eta < \xi + 1\}]$. Haremos esto por doble contención. Por un lado, notemos que:

$$\{x_\xi\} \cup [\{x_\eta : \eta < \xi\}] = \{x_\xi\} \cup L_\xi \subseteq L_{\xi+1};$$

así que $[\{x_\eta : \eta < \xi + 1\}] \subseteq L_{\xi+1}$. Para la otra inclusión, recordemos que, como $x_\xi \in L_{\xi+1} \setminus L_\xi$, existen $m < \omega$, $q \in \mathbb{Q}, \{q_i : i < m\} \subseteq \mathbb{Q}$ y $\{w_i : i < m\} \subseteq \{x_\eta : \eta < \xi\}$, con los w_i indizados sin repeticiones, de tal manera que $x_\xi = qv_\xi + \sum_{i<m} q_i w_i$. Más aún, $q \neq 0$ pues $x_\xi \notin L_\xi = [\{x_\eta : \eta < \xi\}]$. De esta manera:

$$v_\xi = \frac{1}{q}\left(x_\xi - \sum_{i<m} q_i w_i\right) \in [\{x_\eta : \eta < \xi + 1\}];$$

por lo tanto, $\{v_\xi\} \cup L_\xi \subseteq [\{x_\eta : \eta < \xi + 1\}]$, así que $L_{\xi+1} \subseteq [\{x_\eta : \eta < \xi + 1\}]$. □

CAPÍTULO 3: APLICACIONES AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

En este capítulo trabajaremos con las funciones Darboux y fuertemente Darboux mencionadas en el capítulo anterior (ver las definiciones 2.17 y 2.18). Probaremos un par de resultados acerca de estas funciones y analizaremos las propiedades combinatorias de un cardinal, $\mathrm{A}(\mathcal{D})$, cuya definición está íntimamente relacionada con las funciones Darboux. Establezcamos que, de ahora en adelante, $\mathcal{D}$ denotará al subconjunto de ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ conformado por las funciones Darboux. A su vez, denotaremos por $\mathcal{D}^\star$ al subconjunto de $\mathcal{D}$ cuyos elementos son, precisamente, las funciones fuertemente Darboux. También, utilizaremos el símbolo $\mathcal{I}$ para hablar de la colección de todos los intervalos abiertos no vacíos y acotados en $\mathbb{R}$, $\{(a,b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a < b\}$.

3.1 Primeros resultados

Comencemos nuestra discusión notando que para cualquier X, subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, se tiene que ${}^{X}\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ cuando se le equipa con las operaciones usuales. Ahora, para $f \in {}^{X}\mathbb{R}$ y $\Psi \subseteq {}^{X}\mathbb{R}$, pensaremos en el conjunto $f+\Psi := \{f+g : g \in \Psi\}$ como la traslación del conjunto Ψ por la función f. Esta notación la utilizaremos en lo que resta del texto.

Teorema 3.1. *Si $\Psi \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ cumple que $|\Psi| \leqslant \mathfrak{c}$, entonces existe $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tal que $f + \Psi \subseteq \mathcal{D}^\star$.*

Demostración. Empecemos por notar que las desigualdades

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leqslant |\Psi \times \mathcal{I} \times \mathbb{R}| \leqslant |\Psi| \cdot |\mathbb{R}^3| = \mathfrak{c}$$

implican que existe $\{(g_\xi, I_\xi, r_\xi) : \xi < \mathfrak{c}\}$, una enumeración sin repeticiones de $\Psi \times \mathcal{I} \times \mathbb{R}$.

Construiremos, por recursión transfinita, una colección $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de tal modo que la pertenencia

$$x_\alpha \in I_\alpha \setminus \{x_\eta : \eta < \alpha\} \tag{3.1}$$

se dé siempre que $\alpha < \mathfrak{c}$. Para esto, suponga que $\xi < \mathfrak{c}$ es tal que $\{x_\eta : \eta < \xi\}$ ha sido obtenida para cualquier $\alpha < \xi$. Ahora note que $|\{x_\eta : \eta < \xi\}| \leqslant |\xi| < \mathfrak{c} = |I_\xi|$ y use el Axioma de Elección para hallar $x_\xi \in I_\xi \setminus \{x_\eta : \eta < \xi\}$.

Como consecuencia de (3.1) se tiene que $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ no tiene repeticiones y así, existe $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ de tal forma que

$$f(x) = \begin{cases} r_\xi - g_\xi(x_\xi), & \text{si existe } \xi < \mathfrak{c} \text{ tal que } x = x_\xi \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

está bien definida.

Para concluir, si $g \in \Psi$ y $r, a, b \in \mathbb{R}$ satisfacen $a < b$, entonces existe $\xi < \mathfrak{c}$ tal que $(g_\xi, I_\xi, r_\xi) = (g, (a, b), r)$. Luego: $r = r_\xi = f(x_\xi) + g_\xi(x_\xi) \in (f + g_\xi)[I_\xi] = (f + g)[(a, b)]$. Esto último asegura que $f + g \in \mathcal{D}^\star$. $\square$

Lema 3.2. *Para cualesquiera $f \in \mathcal{D}^\star$ y $g \in C(\mathbb{R})$ se satisface que $f + g \in \mathcal{D}^\star$ si y sólo si $f + g \in \mathcal{D}$.*

Demostración. La implicación directa es obvia ya que $\mathcal{D}^\star \subseteq \mathcal{D}$. Para la implicación recíproca supongamos que $f + g \in \mathcal{D}$, tomemos $c, d \in \mathbb{R}$ con $c < d$ y consideremos al intervalo $[c, d]$. Según nuestras hipótesis, para algún $M \in \mathbb{R}$ se satisface la contención $g\big[[c, d]\big] \subseteq [-M, M]$. Por otro lado, para cada $y \in \mathbb{R}$, la pertenencia $f \in \mathcal{D}^\star$ produce $a, b \in [c, d]$ de tal modo que $f(a) = y - M$ y $f(b) = y + M$, esto es,

$$(f + g)(a) \leqslant f(a) + M = y = f(b) - M \leqslant (f + g)(b).$$

De esta manera, como $f + g \in \mathcal{D}$, existe un $x \in [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}] \subseteq [c, d]$ tal que $(f + g)(x) = y$. Esto comprueba que $(f + g)\big[[c, d]\big] = \mathbb{R}$ y, por ende, que $f + g \in \mathcal{D}^\star$. $\square$

Mostraremos ahora que la suma de una función Darboux con una función continua no necesariamente es una función de Darboux. Para ver esto fijemos una enumeración sin repeticiones $\{(I_\xi, r_\xi) : \xi < \mathfrak{c}\}$ de $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$. Por recursión transfinita sobre $\mathfrak{c}$ definamos una sucesión $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ tal que, para cada $\xi < \mathfrak{c}$, $x_\xi \in I_\xi \setminus \big(\{x_\eta : \eta < \xi\} \cup \{r_\xi\}\big)$. Denotemos por f a la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} r_\xi, & \text{si existe } \xi < \mathfrak{c} \text{ tal que } x = x_\xi \\ x+1, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con la intención de probar que $f \in \mathcal{D}^\star$, fijemos $a, b, y \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Así, hay $\xi < \mathfrak{c}$ de tal modo que $((a,b), y) = (I_\xi, r_\xi)$; luego, $x_\xi \in [a,b]$ y $f(x_\xi) = y$.

Ahora notemos que nuestra definición de f nos da: $f(x) \neq x$, siempre que $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $g(x) = -x$, entonces $g \in C(\mathbb{R})$ y $0 \notin \operatorname{img}(f+g)$. En particular, $f + g \notin \mathcal{D}^\star$ y, de acuerdo al lema 3.2, $f + g \notin \mathcal{D}$, tal y como se deseaba.

Lo hecho en los párrafos previos muestra que existe $f \in \mathcal{D}^\star$ con $f + C(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{D}$. Ahora, en el resultado siguiente (obra de Natkaniec y Kirchheim, [11]) argumentaremos que, en presencia de CH, es posible hallar $f \in \mathcal{D}^\star$ con

$$\big(f + \{h \in C(\mathbb{R}) : h \text{ es nwc}\}\big) \cap \mathcal{D} = \emptyset.$$

Recomendamos a nuestros lectores estar familiarizados con el contenido de la sección 1.4.

Teorema 3.3. *Si* CH *es cierta, entonces existe* $f \in \mathcal{D}^\star$ *tal que, para cualquier función continua* $h \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ *que sea nwc, se verifica que* $f + h \notin \mathcal{D}$.

Demostración. Probemos primero que, si $h \in C(\mathbb{R})$ es nwc y $r \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto $h^{-1}\{r\}$ es denso en ninguna parte (ver [17, p. 212]). Notemos que, como h es continua, $h^{-1}\{r\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$. En vista de esto, se tiene la igualdad $\operatorname{int}\left(\overline{h^{-1}\{r\}}\right) = \operatorname{int}\left(h^{-1}\{r\}\right)$. Ahora supongamos, buscando una contradicción, que existe un punto $x \in \operatorname{int}\left(\overline{h^{-1}\{r\}}\right)$. Tenemos entonces que $x \in \operatorname{int}\left(h^{-1}\{r\}\right)$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq h^{-1}\{r\}$. Es decir, para cualquier $z \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ se cumple que $h(z) = r$. Esto contradice el hecho de que h es nwc.

Por el lema 1.12, podemos fijar una enumeración sin repeticiones $\{h_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de todas las funciones continuas que son nwc. Buscamos, en virtud del lema 3.2, una $f \in \mathcal{D}^\star$ tal que

$$\forall \xi < \mathfrak{c}\ \exists r_\xi \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) + h_\xi(x) \neq r_\xi). \tag{3.2}$$

Con este objetivo en mente, tomemos $S, T \in [\mathfrak{c}]^{\mathfrak{c}}$ con $S \cap T = \emptyset$ y $S \cup T = \mathfrak{c}$. A continuación, fijemos enumeraciones sin repeticiones $\{s_\xi : \xi \in S\}$ y $\{(I_\xi, t_\xi) : \xi \in T\}$ de $\mathbb{R}$ y $\mathcal{I} \times \mathbb{R}$, respectivamente. El plan es construir tres subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, $\{y_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ y $\{r_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, de tal modo que los enunciados siguientes sean satisfechos siempre que $\xi < \mathfrak{c}$.

(1_ξ) $r_\xi \in \mathbb{R} \setminus \{y_\eta + h_\xi(x_\eta) : \eta < \xi\}$;

(2_ξ) si $\xi \in T$, entonces $y_\xi = t_\xi$;

(3_ξ) si $\xi \in T$, entonces $x_\xi \in I_\xi \setminus \Big(\{x_\eta : \eta < \xi\} \cup \bigcup \{h_\eta^{-1}\{r_\eta - y_\xi\} : \eta \leqslant \xi\}\Big)$;

(4_ξ) si $\xi \in S$, entonces $x_\xi = s_\xi$;

(5_ξ) si $\xi \in S$ y existe $\eta < \xi$ tal que $x_\xi = x_\eta$, entonces $y_\xi = y_\eta$;

(6_ξ) si $\xi \in S$ y no existe $\eta < \xi$ tal que $x_\xi = x_\eta$, entonces $y_\xi \in \mathbb{R} \setminus \{r_\eta - h_\eta(x_\xi) : \eta \leqslant \xi\}$.

En aras de comprobar que, efectivamente, esta construcción nos ayuda a concluir la prueba, notemos lo siguiente. Por (4_ξ), $\mathbb{R} = \{x_\xi : \xi \in S\} \subseteq \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq \mathbb{R}$. En consecuencia, $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} = \mathbb{R}$. Hagamos $f := \{(x_\xi, y_\xi) : \xi < \mathfrak{c}\}$ y comprobemos que $f \in \mathcal{D}^\star$. Por lo anterior, evidentemente se cumple que f es una relación cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Ahora, para ver que f es una función, tomemos $\xi < \eta < \mathfrak{c}$ y supongamos que $x_\xi = x_\eta$. Enfoquémonos en probar que $y_\xi = y_\eta$. Como consecuencia de (3_ξ) obtenemos que $\xi \notin T$. Entonces $\xi \in S$ y de esta manera (5_ξ) garantiza que $y_\xi = y_\eta$. Concluimos que f es función.

Para ver que f es fuertemente Darboux tomamos $t, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Existe un $\xi \in T$ con la propiedad $(I_\xi, t_\xi) = ((a, b), t)$. Se deduce que $x_\xi \in (a, b)$ y $f(x_\xi) = t_\xi$.

Para terminar esta parte, únicamente resta demostrar que se cumple (3.2). Tomemos pues $\xi < \mathfrak{c}$, consideremos al r_ξ correspondiente y sea $x \in \mathbb{R}$. Existe un $\eta < \mathfrak{c}$ tal que $x = x_\eta$. En estas circunstancias estamos buscando que se cumpla que

$$y_\eta + h_\xi(x_\eta) \neq r_\xi \tag{3.3}$$

Nótese que, cuando $\eta < \xi$, la condición (1_ξ) asegura que (3.3) es cierta. Supongamos entonces que $\xi \leqslant \eta$. Las propiedades (3_η) y (6_η) nos implican que, para cualquier $\zeta \leqslant \eta$, se cumple que $y_\eta + h_\zeta(x_\eta) \neq r_\zeta$. En particular, (3.3) se cumple.

Por el argumento anterior, para concluir la prueba únicamente basta con construir los tres subconjuntos de $\mathbb{R}$ mencionados al principio. Procederemos por recursión transfinita sobre $\mathfrak{c}$.

Supongamos que, para un $\xi < \mathfrak{c}$, hemos obtenido $\{x_\zeta : \zeta < \xi\}, \{y_\zeta : \zeta < \xi\}$ y $\{r_\zeta : \zeta < \xi\}$ de tal modo que, para cualquier $\zeta < \xi$, se satisfacen (1_ζ)-(6_ζ). Construiremos la terna x_ξ, y_ξ, r_ξ como sigue.

Caso 1. Supongamos que $\xi \in S$.

Tomemos $r_\xi \in \mathbb{R} \setminus \{y_\zeta + h_\xi(x_\zeta) : \zeta < \xi\}$. Hagamos $x_\xi := s_\xi$. Por último, si existe $\zeta < \xi$ tal que $x_\xi = x_\zeta$ entonces ponemos $y_\xi := y_\zeta$. Si esto no sucede, tomamos $y_\xi \in \mathbb{R} \setminus \{r_\zeta - h_\zeta(x_\xi) : \zeta \leqslant \xi\}$.

Caso 2. Supongamos que $\xi \in T$.

Tomemos r_ξ según lo pide (1_ξ) y hagamos $y_\xi = t_\xi$. Queremos seleccionar x_ξ de acuerdo a (3_ξ) y para esto haremos

$$M := \{x_\eta : \eta < \xi\} \cup \bigcup \{h_\eta^{-1}\{r_\eta - y_\xi\} : \eta \leqslant \xi\}$$

y mostraremos que $I_\xi \setminus M \neq \emptyset$.

Lo hecho en el primer párrafo de la presente prueba nos dice que cada $h_\eta^{-1}\{r_\eta - y_\xi\}$ es un subconjunto magro de $\mathbb{R}$. Más aún, la hipótesis $\mathfrak{c} = \omega_1$ nos garantiza que ξ es un ordinal numerable y, en consecuencia, M es magro. Así, el Teorema de Categoría de Baire (ver [13, teorema 2.8, p. 14]) nos da lo que queremos: $I_\xi \not\subseteq M$.

Argumentos rutinarios muestran que los números x_ξ, y_ξ y r_ξ obtenidos en los casos dados arriba satisfacen (1_ξ)-(6_ξ). Esto completa la recursión y, por extensión, la demostración.

□

Vale la pena mencionar que la conclusión del teorema 3.3 no es equivalente a CH. Esencialmente, la misma prueba funciona con un axioma adicional más débil según el cuál la unión de menos de $\mathfrak{c}$ magros es magro. Sin embargo, fue probado por Steprāns (ver [20]) que la conclusión del teorema en cuestión es independiente de ZFC.

3.2 El cardinal $\mathrm{A}(\Phi)$

En lo que resta de esta sección, X denotará a un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Las siguientes definiciones son la piedra angular de este capítulo.

Definición 3.4. Utilizaremos el símbolo $\mathcal{D}(X)$ para denotar al conjunto de las funciones Darboux con dominio X, es decir, aquellas $g \in {}^{X}\mathbb{R}$ para las cuales se cumple lo siguiente: para cualesquiera números reales a, b, w, z y y que satisfagan $a, b \in X$, $a < b$, $w, z \in g\left[[a, b]\right]$ y $w < y < z$ hay $x \in X \cap [a, b]$ tal que $g(x) = y$.

Observe que se tiene la igualdad $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}$.

Definición 3.5. Para $\Phi \subseteq {}^{X}\mathbb{R}$, diremos que Φ tiene la *propiedad de Natkaniec* si existe $\Psi_0 \subseteq {}^{X}\mathbb{R}$ de tal forma que, para cualquier $f \in {}^{X}\mathbb{R}$, se cumple que $f + \Psi_0 \nsubseteq \Phi$.

Presentamos a continuación un ejemplo, que será sumamente útil, de una familia con esta propiedad.

Lema 3.6. $\mathcal{D}(X)$ *tiene la propiedad de Natkaniec siempre que* $|X| \geqslant 3$.

Demostración. Sean $a, b, c \in X$ tales que $a < c < b$. Consideremos a la familia ${}^{X}\mathbb{R}$ y tomemos $f \in {}^{X}\mathbb{R}$. Nuestro objetivo es comprobar que $f + {}^{X}\mathbb{R} \nsubseteq \mathcal{D}(X)$, esto es, queremos construir una función $g \in {}^{X}\mathbb{R}$ de tal manera que $f + g \notin \mathcal{D}(X)$.

Definimos $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$g(x) = \begin{cases} f(c) - 1 - f(a), & \text{si } x = a \\ f(c) + 1 - f(x), & \text{si } x \in X \cap (a, b] \\ 0, & \text{si } x \in X \setminus [a, b]. \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(c)-1, & \text{si } x = a \\ f(c)+1, & \text{si } x \in X \cap (a,b] \\ f(x), & \text{si } x \in X \setminus [a,b]; \end{cases}$$

en particular, $(f+g)(a) < f(c) < (f+g)(b)$ y, para cualquier $x \in (a,b)$, se tiene que $(f+g)(x) \neq f(c)$, es decir, $f+g \notin \mathcal{D}(X)$. $\square$

Definición 3.7. Para una familia $\Phi \subseteq {}^X\mathbb{R}$ con la propiedad de Natkaniec, definimos el cardinal

$$\mathrm{A}(\Phi) := \min\{|\Psi| : \Psi \subseteq {}^X\mathbb{R} \ \wedge \ \forall f \in {}^X\mathbb{R}\ (f + \Psi \nsubseteq \Phi)\}.$$

Conviene hacer un par de observaciones. Supongamos que $\Upsilon \subseteq \Phi \subseteq {}^X\mathbb{R}$ y que Φ tiene la propiedad de Natkaniec. Tomemos $\Psi \subseteq {}^X\mathbb{R}$ de tal manera que, para cualquier $f \in {}^X\mathbb{R}$, $f + \Psi \nsubseteq \Phi$. Ahora, como $\Upsilon \subseteq \Phi$, se cumple que $f + \Psi \nsubseteq \Upsilon$. Así, Ψ atestigua que Υ tiene la propiedad de Natkaniec y además $\mathrm{A}(\Upsilon) \leqslant \mathrm{A}(\Phi)$. Esto asegura que la propiedad de Natkaniec es hereditaria y que $\mathrm{A}(\cdot)$ es un operador monótono.

Corolario 3.8. $\mathfrak{c} < \mathrm{A}(\mathcal{D}^\star) \leqslant \mathrm{A}(\mathcal{D}) \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$.

Demostración. Es fácil deducir del lema 3.6 que $\mathrm{A}(\mathcal{D}) \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$. El hecho de que $\mathrm{A}(\mathcal{D}^\star) \leqslant \mathrm{A}(\mathcal{D})$ se desprende de la monotonía del operador $\mathrm{A}(\cdot)$ y de la contención $\mathcal{D}^\star \subseteq \mathcal{D}$. Por último, la desigualdad $\mathfrak{c} < \mathrm{A}(\mathcal{D}^\star)$ se obtiene del teorema 3.1. $\square$

Definición 3.9. Una función $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ es *casi continua* si y sólo si para cualquier abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $f \subseteq U$, existe $g \in C(\mathbb{R})$ con $g \subseteq U$. Denotaremos por $\mathcal{A}$ a la colección de funciones casi continuas.

Es inmediato de la definición que $C(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Mostraremos a continuación que esta contención es propia. Consideremos a la función $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Evidentemente $f \notin C(\mathbb{R})$ en vista de que f no es continua en 0. Para mostrar que $f \in \mathcal{A}$, tomemos $U \subseteq \mathbb{R}^2$, abierto con $f \subseteq U$. Como $(0,0) \in f$, existe un $\varepsilon > 0$ de tal manera que, si hacemos $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$, entonces $(0,0) \in B \subseteq U$.

Ahora, podemos elegir un $n \in \mathbb{N}$ que satisfaga la desigualdad $\dfrac{1}{n\pi} < \varepsilon$. Deducimos de esto último y de la defінción de la función f que $\left(-\dfrac{1}{n\pi}, 0\right), \left(\dfrac{1}{n\pi}, 0\right) \in f \cap B$. Llamémosle $h := \left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant \dfrac{1}{n\pi}\right\}$, es decir, h es el segmento de recta que une a los puntos $\left(-\dfrac{1}{n\pi}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{1}{n\pi}, 0\right)$. Se desprende fácilmente de la condición $\dfrac{1}{n\pi} < \varepsilon$ que $h \subseteq B$. Por último, definimos $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(x) = \begin{cases} h(x), & \text{si } x \in \left[-\dfrac{1}{n\pi}, \dfrac{1}{n\pi}\right] \\ f(x), & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

Se sigue que $g \in C(\mathbb{R})$ y, además, $g \subseteq U$. Esto prueba que f es casi continua.

Nuestro siguiente resultado relaciona a las funciones casi continuas con las funciones Darboux.

Lema 3.10. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$.

Demostración. Procedemos por contrapuesta. Supongamos que $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ es tal que $f \notin \mathcal{D}$. Luego, existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$; además de $w, z \in f\big[[a,b]\big]$ y $y \in \mathbb{R}$ de tal forma que $w < y < z$ y $y \notin f\big[[a,b]\big]$. Para simplificar un poco, supongamos también que $\{f(a), f(b)\} = \{w, z\}$. Note que esto produce dos casos: o bien, $f(a) = w$ y $f(b) = z$ ó $f(a) = z$ y $f(b) = w$. Aquí únicamente analizaremos el primero pues el segundo es enteramente similar.

Demos por hecho, entonces, que $f(a) = w < y < z = f(b)$. Sea

$$H := (\{a\} \times [y, \infty)) \cup ([a, b] \times \{y\}) \cup (\{b\} \times (-\infty, y]).$$

Nótese que $\mathbb{R}^2 \setminus H$ es un abierto que contiene a f. Para concluir, tomemos una función $g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ que cumpla que $g \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus H$. Si logramos probar que $g|_{[a,b]}$ no es continua, tendríamos entonces que $f \notin \mathcal{A}$, como queremos. Con esta idea en mente, empecemos por observar que nuestra elección de g garantiza que $g(a) < y < g(b)$; además, para cada $t \in [a, b]$ se tiene que $(t, y) \in H$ y así, $(t, y) \notin g$. En consecuencia, no existe $t \in [a, b]$ con $g(t) = y$, es decir, $g|_{[a,b]}$ no satisface el Teorema del Valor Intermedio. $\square$

Una cuestión interesante es si la contención anterior es en realidad una igualdad. Stallings responde esta pregunta negativamente en [19] mostrando que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$.

Nuestros objetivos en esta sección son demostrar que $\mathrm{A}(\mathcal{A}) = \mathrm{A}(\mathcal{D})$ y que $\mathrm{cf}(\mathrm{A}(\mathcal{A})) > \mathfrak{c}$. Nos concentraremos primero en probar la igualdad $\mathrm{A}(\mathcal{A}) = \mathrm{A}(\mathcal{D})$. Note usted, apreciable lector, que el lema 3.10 sumado con la multicitada monotonía de $\mathrm{A}(\cdot)$ garantizan que $\mathrm{A}(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{A}(\mathcal{D})$. En lo que sigue prepararemos el camino para probar la otra desigualdad.

Definición 3.11. Para un número cardinal $0 < \kappa \leqslant \mathfrak{c}$ definimos la familia $\mathcal{D}(X, \kappa) \subseteq {}^{X}\mathbb{R}$ de funciones *κ-fuertemente Darboux sobre* X mediante la fórmula siguiente: $f \in \mathcal{D}(X, \kappa)$ si y sólo si para cualquier $I \in \mathcal{I}$ con extremos en X y para cualquier $y \in \mathbb{R}$ se cumple que $|I \cap f^{-1}\{y\}| \geqslant \kappa$.

En el caso particular en el que $X = \mathbb{R}$, denotaremos por $\mathcal{D}(\kappa)$ a la familia $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \kappa)$.

Es importante destacar ciertas cosas. Si $0 < \kappa \leqslant \lambda \leqslant \mathfrak{c}$, se sigue de la definición que $\mathcal{D}(X, \lambda) \subseteq \mathcal{D}(X, \kappa)$. Además, para cualquier $0 < \kappa \leqslant \mathfrak{c}$, se tiene que $\mathcal{D}(X, \kappa) \subseteq \mathcal{D}(X)$ y, como la propiedad de Natkaniec es hereditaria, deducimos del lema 3.6 que $\mathcal{D}(X, \kappa)$ tiene la propiedad de Natkaniec cuando $|X| \geqslant 3$.

Los lemas siguientes serán usados posteriormente.

Lema 3.12. *$\mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c})) > \mathfrak{c}$.*

Demostración. Tomemos una familia $\Psi \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ de tamaño $\mathfrak{c}$. Vamos a construir una función $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tal que $f + \Psi \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{c})$.

Fijemos una enumeración sin repeticiones $\{(I_\xi, y_\xi, g_\xi) : \xi < \mathfrak{c}\}$ de $\mathcal{I} \times \mathbb{R} \times \Psi$. Como hemos mostrado con anterioridad, podemos definir, por recursión transfinita sobre $\mathfrak{c}$, una sucesión $\{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ de tal forma que, para cada $\xi < \mathfrak{c}$, $x_\xi \in I_\xi \setminus \{x_\eta : \eta < \mathfrak{c}\}$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} y_\xi - g_\xi(x_\xi), & \text{si } x = x_\xi \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Para concluir, sean $g \in \Psi$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $y \in \mathbb{R}$. Para cualquier $c \in [a, b)$, existe un único $\xi_c < \mathfrak{c}$ tal que $((c, b), y, g) = (I_{\xi_c}, y_{\xi_c}, g_{\xi_c})$. Así, $\{x_{\xi_c} : a \leqslant c < b\}$ es un subconjunto de $(a, b) \cap (f + g)^{-1}\{y\}$ que tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. $\square$

El lema restante requiere la siguiente definición.

Definición 3.13. Para $f, g \in {}^X\mathbb{R}$, escribiremos que $f =^\star g$ si y sólo si

$$|\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}| \leqslant \omega.$$

Proposición 3.14. *Para cualquier $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, el conjunto $\{g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : g =^\star f\}$ tiene tamaño $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Tomemos $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ y llamémosle $E := \{g \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : g =^\star f\}$. Primero, note que $\{(f \setminus \{(0, f(0))\}) \cup \{(0, y)\} : y \in \mathbb{R}\} \subseteq E$; por lo tanto, $\mathfrak{c} \leqslant |E|$. Probaremos la otra desigualdad como sigue. Para cada $g \in E$, hagamos $M_g := \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq f(x)\}$. Sea $\varphi : E \longrightarrow \bigcup\{{}^M\mathbb{R} : M \in [\mathbb{R}]^{\leqslant\omega}\}$ definida como $\varphi(g) := g|_{M_g}$. Si logramos mostrar que φ es inyectiva, podremos concluir que

$$|E| \leqslant \left|\bigcup\{{}^M\mathbb{R} : M \in [\mathbb{R}]^{\leqslant\omega}\}\right| = \mathfrak{c},$$

como buscamos.

Sean pues $g, h \in E$ con $g|_{M_g} = h|_{M_h}$. De inmediato, obtenemos que $M_g = M_h =: M$. Para comprobar que $g = h$, sea $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in M$, la igualdad $g|_M = h|_M$ nos da $g(x) = h(x)$. Si esto último no sucede, $x \in \mathbb{R} \setminus M$, y así tenemos que $g(x) = f(x) = h(x)$. $\square$

Retomando nuestra discusión, presentamos el lema que falta.

Lema 3.15. $\mathrm{A}(\mathcal{D}) = \mathrm{A}(\mathcal{D}(\omega_1))$.

Demostración. Como $\mathcal{D}(\omega_1) \subseteq \mathcal{D}$, la desigualdad $\mathrm{A}(\mathcal{D}(\omega_1)) \leqslant \mathrm{A}(\mathcal{D})$ es cierta. Para probar la otra desigualdad, hagamos $\kappa := \mathrm{A}(\mathcal{D}(\omega_1))$. Se satisface, en virtud del lema 3.12 y la contención $\mathcal{D}(\mathfrak{c}) \subseteq \mathcal{D}(\omega_1)$, que $\kappa \geqslant \mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c})) > \mathfrak{c}$.

Mostraremos que $\kappa \geqslant \mathrm{A}(\mathcal{D})$ de la siguiente manera: tomemos $\Psi \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ que satisfaga las condiciones $|\Psi| = \kappa$ y, para cualquier $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, $f + \Psi \nsubseteq \mathcal{D}(\omega_1)$. Buscamos una familia $\Psi^\star \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tal que $|\Psi^\star| = \kappa$ y que cumpla que $f + \Psi^\star \nsubseteq \mathcal{D}$, para toda $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

Con lo anterior en mente, hagamos $\Psi^\star := \{h \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : \exists g \in \Psi \ (h =^\star g)\}$. Como $\kappa > \mathfrak{c}$ y, para cualquier $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, el conjunto $\{h \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} : h =^\star f\}$ tiene tamaño $\mathfrak{c}$ (ver proposición 3.14), se deduce que $|\Psi^\star| = \kappa$.

Tomemos ahora $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. El hecho de que $f + \Psi \nsubseteq \mathcal{D}(\omega_1)$, asegura que existe $g \in \Psi$ tal que $f + g \notin \mathcal{D}(\omega_1)$. En consecuencia, existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $y \in \mathbb{R}$ de tal forma que $|(a,b) \cap (f+g)^{-1}\{y\}| \leqslant \omega$. Definamos $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$h(x) = \begin{cases} y + 1 - f(x), & \text{si } x \in (a,b) \text{ y } (f+g)(x) = y \\ y + 1 - f(b), & \text{si } x = b \\ y - 1 - f(a), & \text{si } x = a \\ g(x), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Evidentemente se cumple que $h =^\star g$, esto es, $h \in \Psi^\star$. También, como $(f+h)(a) < y < (f+h)(b)$ y $(f+h)(x) \neq y$ para todo $x \in (a,b)$, tenemos que $f + h \notin \mathcal{D}$, como queríamos. $\square$

Como últimos preparativos, citamos dos teoremas sin prueba que Natkaniec presenta en [14].

Teorema 3.16. $\mathfrak{c} < \mathrm{A}(\mathcal{A}) \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$.

Teorema 3.17. *Existe una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^2$ que satisface las siguientes propiedades.*

(i) Para cualquier $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ se cumple que $f \in \mathcal{A}$ si y sólo si $f \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathcal{B}$.

(ii) Para todo $B \in \mathcal{B}$, la proyección de B en el eje x, $\Pi_x[B]$, es un intervalo no degenerado, esto es, con más de un punto.

Equipados con todo esto, estamos en condiciones de demostrar la deseada igualdad.

Teorema 3.18. $\mathrm{A}(\mathcal{A}) = \mathrm{A}(\mathcal{D})$.

Demostración. Ya comprobamos (ver párrafo previo a la definición 3.11) que $\mathrm{A}(\mathcal{D}) \geqslant \mathrm{A}(\mathcal{A})$. Para probar la otra desigualdad observemos que, en virtud del lema 3.15, es suficiente probar que $\mathrm{A}(\mathcal{D}(\omega_1)) \leqslant \mathrm{A}(\mathcal{A})$.

Hagamos $\kappa := \mathrm{A}(\mathcal{A})$. Sabemos, gracias al teorema 3.16, que $\kappa > \mathfrak{c}$. Seleccionemos una familia $\Psi \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ de tamaño κ que satisface que $f + \Psi \nsubseteq \mathcal{A}$, para toda $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

Por el teorema 3.17, podemos fijar una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^2$ que cumpla las propiedades (i) y (ii) de dicho teorema. Por (i) y por lo anterior sabemos que, para cualquier $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, existen $g \in \Psi$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que $(f + g) \cap B = \emptyset$.

Nuestro objetivo es encontrar una familia $\Psi^\star \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ de tamaño κ tal que, para cualquier $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, $f + \Psi^\star \nsubseteq \mathcal{D}(\omega_1)$. Para lograr esto procedemos de la siguiente manera. Sea $B \in \mathcal{B}$ fijo. Para cada $x \in \Pi_x[B]$, existe $\overline{x} \in \mathbb{R}$ con $(x, \overline{x}) \in B$. Sea $h_B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$h_B(x) = \begin{cases} \overline{x}, & \text{si } x \in \Pi_x[B] \\ 8, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Note que h_B cumple que, para cualquier $x \in \Pi_x[B]$, la pareja $(x, h_B(x))$ es un elemento de B. Sea $\Psi^\star := \{g - h_B : g \in \Psi \text{ y } B \in \mathcal{B}\}$. La igualdad $|\Psi^\star| = \kappa$ es consecuencia de $|\mathcal{B}| \leqslant \mathfrak{c} < \kappa$.

Ahora, para cada $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ y $B \in \mathcal{B}$, definimos $Z - h_B := \{(x, y - h_B(x)) : (x, y) \in Z\}$. Únicamente falta demostrar que, para cualquier $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, $f + \Psi^\star \nsubseteq \mathcal{D}(\omega_1)$. Con esto en mente, tomemos $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Sabemos que existen $g \in \Psi$ y $B \in \mathcal{B}$ con la propiedad $(f + g) \cap B = \emptyset$.

Afirmación. Se tiene que $[f + (g - h_B)] \cap (B - h_B) \subseteq [(f + g) \cap B] - h_B = \emptyset$.

Claramente, la igualdad $(f+g)\cap B=\emptyset$ implica que $[(f+g)\cap B]-h_B=\emptyset$. Para probar la contención tomamos $z\in[f+(g-h_B)]\cap(B-h_B)$. Así existen $x\in\mathbb{R}$ tal que $z=(x,f(x)+g(x)-h_B(x))$ y $w\in\mathbb{R}$ tal que $z=(w,y-h_B(w))$ con $(w,y)\in B$. Tenemos entonces que $x=w$ y $f(x)+g(x)=y$. De esta manera, como $(w,y)\in B$, se tiene que $(x,f(x)+g(x))\in B$. Por lo tanto, $z=(x,f(x)+g(x)-h_B(x))\in[(f+g)\cap B]-h_B$.

Como mencionamos antes, $\{(x,h_B(x)):x\in\Pi_x[B]\}\subseteq B$ y, por ende, $\Pi_x[B]\times\{0\}\subseteq B-h_B$. Esto nos permite emplear la afirmación de arriba para deducir que $[f+(g-h_B)]\cap[\Pi_x[B]\times\{0\}]=\emptyset$. En particular, $[f+(g-h_B)]^{-1}\{0\}\cap\Pi_x[B]=\emptyset$. Evidentemente tenemos que $g-h_B\in\Psi^\star$. Para terminar, notemos que existe un $I\in\mathcal{I}$ con $I\subseteq\Pi_x[B]$ ya que, por el inciso (ii) del teorema 3.17, $\Pi_x[B]$ es un intervalo no degenerado. Podemos concluir que $f+(g-h_B)\notin\mathcal{D}(\omega_1)$ pues $[f+(g-h_B)]^{-1}\{0\}\cap I\subseteq[f+(g-h_B)]^{-1}\{0\}\cap\Pi_x[B]=\emptyset$. $\square$

Para completar nuestros objetivos de esta sección nos falta exponer por qué la desigualdad $\mathrm{cf}(\mathrm{A}(\mathcal{A}))>\mathfrak{c}$ es cierta. Comencemos con un par de lemas.

Lema 3.19. *Si κ es un cardinal que satisface $\omega<\kappa\leqslant\mathfrak{c}$ y X es denso en $\mathbb{R}$, entonces*

1. $\mathrm{A}(\mathcal{D}(X,\kappa))\leqslant\mathrm{A}(\mathcal{D}(\kappa))$ *y*
2. *cuando* $|\mathbb{R}\setminus X|\leqslant\omega$, $\mathrm{A}(\mathcal{D}(\kappa))\leqslant\mathrm{A}(\mathcal{D}(X,\kappa))$.

En particular, $\mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathbb{I},\kappa))=\mathrm{A}(\mathcal{D}(\kappa))$.

Demostración. Con la idea en mente de comprobar que $\mathrm{A}(\mathcal{D}(X,\kappa))\leqslant\mathrm{A}(\mathcal{D}(\kappa))$, tomemos $\Psi\subseteq{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tal que, para cualquier $f\in{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, $f+\Psi\nsubseteq\mathcal{D}(\kappa)$. Buscamos una familia $\hat\Psi\subseteq{}^{X}\mathbb{R}$ que cumpla $|\hat\Psi|\leqslant|\Psi|$ y $\hat f+\hat\Psi\nsubseteq\mathcal{D}(X,\kappa)$, siempre que $\hat f\in{}^{X}\mathbb{R}$.

Proponemos $\hat\Psi:=\{g|_X:g\in\Psi\}$. Observe que $\hat\Psi$ cumple con estar contenida en ${}^{X}\mathbb{R}$ y, claramente, se tiene también que $|\hat\Psi|\leqslant|\Psi|$.

Sea pues $\hat f\in{}^{X}\mathbb{R}$ y hagamos $f:=\hat f\cup((\mathbb{R}\setminus X)\times\{0\})$. Como $f\in{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, existen $g\in\Psi$ y $a,b,y\in\mathbb{R}$ con $a<b$ de tal manera que $|(a,b)\cap(f+g)^{-1}\{y\}|<\kappa$. Ahora, si ponemos $\hat g:=g|_X$, tenemos que $\hat g\in\hat\Psi$; además, como $\hat f\subseteq f$ y $\hat g\subseteq g$, se satisface que $(\hat f+\hat g)^{-1}\{y\}\subseteq(f+g)^{-1}\{y\}$. Para terminar esta parte, utilicemos la densidad de X para tomar $c, d \in X$ tales que $c < d$ y $(c, d) \subseteq (a, b)$ y observemos que

$$\left|(c,d) \cap (\hat{f} + \hat{g})^{-1}\{y\}\right| \leqslant \left|(a,b) \cap (f+g)^{-1}\{y\}\right| < \kappa.$$

Esto prueba que $\hat{f} + \hat{\Psi} \nsubseteq \mathcal{D}(X, \kappa)$.

Para verificar la otra desigualdad, supongamos adicionalmente que $|\mathbb{R} \setminus X| \leqslant \omega$ y elijamos $\Psi \subseteq {}^X\mathbb{R}$ tal que, para cualquier $f \in {}^X\mathbb{R}$, $f + \Psi \nsubseteq \mathcal{D}(X, \kappa)$. Queremos una familia $\hat{\Psi} \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ que cumpla $|\hat{\Psi}| \leqslant |\Psi|$ y $\hat{f} + \hat{\Psi} \nsubseteq \mathcal{D}(\kappa)$ para toda $\hat{f} \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

Proponemos $\hat{\Psi} := \{g \cup ((\mathbb{R} \setminus X) \times \{0\}) : g \in \Psi\}$. Claramente, esta familia de funciones está contenida en ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ y su cardinalidad es, a lo sumo, $|\Psi|$.

Tomemos $\hat{f} \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ y definamos $f := \hat{f}|_X$. Como $f \in {}^X\mathbb{R}$, existen $g \in \Psi$, $a, b \in X$ con $a < b$ y $y \in \mathbb{R}$ de tal forma que $|(a, b) \cap (f + g)^{-1}\{y\}| < \kappa$. Ahora, si hacemos $\hat{g} := g \cup ((\mathbb{R} \setminus X) \times \{0\})$, tenemos que $\hat{g} \in \hat{\Psi}$. Por otro lado, el hacer $h := f + g$ y $\hat{h} := \hat{f} + \hat{g}$ nos da

$$(a,b) \cap \hat{h}^{-1}\{y\} = \Big((a,b) \cap h^{-1}\{y\}\Big) \cup \Big((\mathbb{R} \setminus X) \cap (a,b) \cap \hat{h}^{-1}\{y\}\Big).$$

En consecuencia, $|(a, b) \cap (\hat{h})^{-1}\{y\}| < \kappa + \omega = \kappa$; asegurando que $\hat{f} + \hat{\Psi} \nsubseteq \mathcal{D}(\kappa)$. $\square$

Recordemos que, para $A, B \subseteq \mathbb{R}$, decimos que A y B son *orden-isomorfos* si y únicamente si existe una función $\varphi : A \longrightarrow B$, llamada isomorfismo de orden, de tal manera que φ es una biyección y además, para cualesquiera $a, b \in A$, las condiciones $a \leqslant b$ y $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ son equivalentes.

Lema 3.20. *Si $|X| \geqslant 3$ y tenemos $Y \subseteq \mathbb{R}$ que es orden-isomorfo a X, entonces* $\mathrm{A}(\mathcal{D}(X, \kappa)) = \mathrm{A}(\mathcal{D}(Y, \kappa))$ *siempre que $\kappa \leqslant \mathfrak{c}$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo de orden. Hagamos $\phi : {}^Y\mathbb{R} \longrightarrow {}^X\mathbb{R}$ dada por $\phi(g) = g \circ \varphi$. Observe que ϕ definida de esta forma es una biyección con inversa $\phi^{-1} : {}^X\mathbb{R} \longrightarrow {}^Y\mathbb{R}$ definida como $\phi^{-1}(g) = g \circ \varphi^{-1}$. Con esto en mente, comencemos demostrando que $\mathrm{A}(\mathcal{D}(X, \kappa)) \leqslant \mathrm{A}(\mathcal{D}(Y, \kappa))$. Tomemos $\Psi \subseteq {}^Y\mathbb{R}$ tal que, para cualquier $f \in {}^Y\mathbb{R}$, $f + \Psi \nsubseteq \mathcal{D}(Y, \kappa)$. Buscamos una familia $\hat{\Psi} \subseteq {}^X\mathbb{R}$ que cumpla $|\hat{\Psi}| \leqslant |\Psi|$ y $\hat{f} + \hat{\Psi} \nsubseteq \mathcal{D}(X, \kappa)$, siempre que $\hat{f} \in {}^X\mathbb{R}$.

Proponemos a $\hat{\Psi} := \phi[\Psi]$. Observe que $\hat{\Psi}$ es un subconjunto de ${}^{X}\mathbb{R}$ con $|\hat{\Psi}| = |\Psi|$. Sea $\hat{f} \in {}^{X}\mathbb{R}$ y hagamos $f := \phi^{-1}(\hat{f})$. Como $f \in {}^{Y}\mathbb{R}$, existen $g \in \Psi$, $a, b \in Y$ con $a < b$ y $y \in \mathbb{R}$ de tal manera que $|(a,b) \cap (f+g)^{-1}\{y\}| < \kappa$. Note que, si definimos $\hat{g} := \phi(g)$, $c := \varphi^{-1}(a)$ y $d := \varphi^{-1}(b)$, se verifica que $\hat{g} \in \hat{\Psi}$ y $c, d \in X$.

Afirmación. Se satisface que $(c,d) \cap (\hat{f}+\hat{g})^{-1}\{y\} \subseteq \varphi^{-1}\left[(a,b) \cap (f+g)^{-1}\{y\}\right]$.

En efecto, si tomamos un $x \in (c,d) \cap (\hat{f}+\hat{g})^{-1}\{y\}$, se cumple que $c < x < d$, $x \in X$ y $(\hat{f}+\hat{g})(x) = y$; luego, como φ es un isomorfismo de orden y se satisface la igualdad $\hat{f}+\hat{g} = (f+g) \circ \varphi$, tenemos que $a < \varphi(x) < b$ y $(f+g)(\varphi(x)) = y$. Esto implica que $\varphi(x) \in (a,b) \cap (f+g)^{-1}\{y\}$ y, por ende, $x \in \varphi^{-1}\left[(a,b) \cap (f+g)^{-1}\{y\}\right]$, como se quería.

El paso siguiente en la demostración de nuestro lema es emplear la biyectividad de φ y la afirmación anterior para deducir que

$$\left|(c,d) \cap (\hat{f}+\hat{g})^{-1}\{y\}\right| \leqslant \left|\varphi^{-1}\left[(a,b) \cap (f+g)^{-1}\{y\}\right]\right| = \left|(a,b) \cap (f+g)^{-1}\{y\}\right| < \kappa;$$

de este modo, $\hat{f} + \hat{\Psi} \nsubseteq \mathcal{D}(X, \kappa)$.

La prueba de la otra desigualdad es enteramente similar tomando a la familia $\hat{\Psi} := (\phi^{-1})[\Psi]$. $\square$

Con estos dos lemas estamos preparados para el resultado siguiente. Recomendamos a nuestros lectores estar familiarizados con el material expuesto en la sección 1.5 del presente trabajo.

Teorema 3.21. $\mathrm{A}(\mathcal{D}) = \mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c}))$.

Demostración. Del lema 3.15 y la monotonía de $\mathrm{A}(\cdot)$ se sigue que $\mathrm{A}(\mathcal{D}) = \mathrm{A}(\mathcal{D}(\omega_1)) \geqslant \mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c}))$. Para probar la otra desigualdad, tomamos $\Psi \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ con $\kappa := |\Psi| < \mathrm{A}(\mathcal{D})$. Es suficiente hallar $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ de tal manera que $f + \Psi \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{c})$.

Por la proposición 1.15, podemos tomar $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$, de tal modo que, para cualesquiera $\xi < \eta < \mathfrak{c}$, $S_\xi \cap S_\eta = \emptyset$; S_ξ es orden-isomorfo a $\mathbb{I}$ y además, para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se cumple que $\left|\left\{\xi < \mathfrak{c} : \left|(a,b) \cap S_\xi\right| \geqslant 2\right\}\right| = \mathfrak{c}$.

Fijemos $\xi < \mathfrak{c}$ y apliquemos los lemas 3.19 y 3.20 para obtener:

$$\kappa < \mathrm{A}(\mathcal{D}) = \mathrm{A}(\mathcal{D}(\omega_1)) = \mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathbb{I}, \omega_1)) = \mathrm{A}(\mathcal{D}(S_\xi, \omega_1)).$$

Ahora hagamos $\Psi_\xi := \{g|_{S_\xi} : g \in \Psi\}$ para deducir las desigualdades

$$|\Psi_\xi| \leqslant |\Psi| = \kappa < A(\mathcal{D}(S_\xi, \omega_1))$$

y garantizar la existencia de $f_\xi \in {}^{S_\xi}\mathbb{R}$ tal que $f_\xi + \Psi_\xi \subseteq \mathcal{D}(S_\xi, \omega_1)$.

Definamos $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ como

$$f := \bigcup_{\xi < \mathfrak{c}} f_\xi \cup \left\{(x, 0) : x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup \{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}\right\}.$$

En aras de comprobar que $f + \Psi \subseteq \mathcal{D}(\mathfrak{c})$, tomemos $g \in \Psi$ y $a, b, y \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Entonces, el conjunto $M := \{\xi < \mathfrak{c} : |(a,b) \cap S_\xi| \geqslant 2\}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Ahora, por cada $\xi \in M$, elijamos $a_\xi, b_\xi \in (a,b) \cap S_\xi$ con $a_\xi < b_\xi$; luego, nuestra elección de f_ξ nos da la pertenencia $(f_\xi + (g|_{S_\xi})) \in \mathcal{D}(S_\xi, \omega_1)$ y así, se sigue que hay un $x_\xi \in (a_\xi, b_\xi) \cap S_\xi$ con

$$(f + g)(x_\xi) = (f_\xi + (g|_{S_\xi}))(x_\xi) = y.$$

En resumen, $\{x_\eta : \eta \in M\} \subseteq (a,b) \cap (f+g)^{-1}\{y\}$.

Por otro lado, de las condiciones $\{S_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ es ajena por pares y $|M| = \mathfrak{c}$ obtenemos la igualdad $|\{x_\xi : \xi \in M\}| = \mathfrak{c}$. Por ende, $f + g \in \mathcal{D}(\mathfrak{c})$. □

A continuación, presentamos el último cardinal que definiremos en este trabajo:

Definición 3.22. $\mu := \min\{|\Psi| : \Psi \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \ \wedge \ \forall f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \ \exists g \in \Psi \ (|f \cap g| < \mathfrak{c})\}$

Como es costumbre, comenzamos con un par de observaciones. Considerando a la familia $\Psi := {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, tomamos $f \in \Psi$ y hacemos $g := f + 1$. Tenemos claramente que $f \cap g = \emptyset$; en particular, $|f \cap g| < \mathfrak{c}$. Esto prueba que el cardinal μ está bien definido y, además, $\mu \leqslant 2^{\mathfrak{c}} = |{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}|$. La observación restante la enunciamos como lema:

Lema 3.23. *Sean A, B un par de subconjuntos de $\mathbb{R}$ con $|A| = \mathfrak{c} = |B|$. Se cumple la igualdad*

$$\mu = \min\{|\Psi| : \Psi \subseteq {}^{A}B \ \wedge \ \forall f \in {}^{A}B \ \exists g \in \Psi \ (|f \cap g| < \mathfrak{c})\}.$$

Demostración. En vista de que $|A| = \mathfrak{c} = |B|$, podemos fijar un par de biyecciones $\varphi_1 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi_2 : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Con esto en mente, hagamos $\varphi : {}^{A}B \longrightarrow {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ definida mediante $\varphi(f) := \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$. Argumentos rutinarios pueden ser empleados para probar que $\varphi^{-1} : {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \longrightarrow {}^{A}B$ está dada por $\varphi^{-1}(g) = \varphi_2^{-1} \circ g \circ \varphi_1$.

Afirmación. Para cualesquiera $f, g \in {}^{A}B$ las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $|f \cap g| < \mathfrak{c}$.

(b) $|\varphi(f) \cap \varphi(g)| < \mathfrak{c}$.

En efecto, tomemos $f, g \in {}^{A}B$ y supongamos primero que $|f \cap g| < \mathfrak{c}$. En aras de verificar que $|\varphi(f) \cap \varphi(g)| < \mathfrak{c}$, tomemos $x \in \mathbb{R}$ de tal modo que $\varphi(f)(x) = \varphi(g)(x)$. En estas circunstancias, podemos emplear que φ_2 es una biyección para asegurar que $f(\varphi_1^{-1}(x)) = g(\varphi_1^{-1}(x))$.

Esto último nos induce una función $\eta : \varphi(f) \cap \varphi(g) \longrightarrow \{a \in A : f(a) = g(a)\}$ dada por $\eta(x, y) := \varphi_1^{-1}(x)$. Se desprende de la biyectividad de φ_1 que η es una función inyectiva. Por último:

$$|\varphi(f) \cap \varphi(g)| \leqslant |\{a \in A : f(a) = g(a)\}| = |f \cap g| < \mathfrak{c}.$$

Para mostrar que (b) implica (a) se utiliza un argumento similar y por esta razón no lo incluimos.

Regresando al enunciado del lema, tomemos $\Psi \subseteq {}^{A}B$ con la propiedad de que, para cualquier $f \in {}^{A}B$, existe una $g \in \Psi$ de tal manera que $|f \cap g| < \mathfrak{c}$.

Haciendo $\hat{\Psi} := \varphi[\Psi]$, notamos que $\hat{\Psi}$ está contenida en ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ y, además, $|\Psi| = |\hat{\Psi}|$. Sea $\hat{f} \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ y tomemos $f \in {}^{A}B$ de tal forma que $\varphi(f) = \hat{f}$. Para f, existe $g \in \Psi$ tal que $|f \cap g| < \mathfrak{c}$. Definamos ahora $\hat{g} := \varphi(g) \in \hat{\Psi}$. Empleando la afirmación se deduce que $|\hat{f} \cap \hat{g}| < \mathfrak{c}$. Lo anterior prueba que μ es, a lo más, el mínimo que aparece a la derecha de la igualdad centrada de nuestro lema.

La igualdad restante se verifica empleando argumentos enteramente similares. $\square$

Nuestros dos siguientes resultados concluyen esta sección.

Teorema 3.24. $\mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c})) = \mu$.

Demostración. Para demostrar que $\mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c})) \leqslant \mu$, tomemos $\Psi \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ de tal forma que $|\Psi| < \mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c}))$. Considerando a la familia $\tilde{\Psi} := \{-g : g \in \Psi\}$, obtenemos que $|\Psi| = |\tilde{\Psi}|$ y, de este modo, existe $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tal que, para cualquier $g \in \Psi$, $f - g \in \mathcal{D}(\mathfrak{c})$; en particular, se satisface que $|(f-g)^{-1}\{0\}| = \mathfrak{c}$ y, por lo tanto, $|f \cap g| = \mathfrak{c}$. Esto demuestra que $|\Psi| < \mu$ y, en consecuencia, $\mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c})) \leqslant \mu$.

Con respecto a la desigualdad que falta, utilicemos el corolario 1.16 para fijar una familia $\{S^y_\xi : \xi < \mathfrak{c} \wedge y \in \mathbb{R}\} \subseteq [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ que cumple lo siguiente para cualesquiera $y, z \in \mathbb{R}$ y $\xi, \eta < \mathfrak{c}$.

1. $S^y_\xi \subseteq I_\xi$.

2. $S^y_\xi \cap S^z_\eta = \emptyset$ cuando $(\xi, y) \neq (\eta, z)$.

A continuación, tomamos $\Psi \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ tal que $|\Psi| < \mu$. Ahora, fijemos $\xi < \mathfrak{c}$ y $y \in \mathbb{R}$ y definamos la colección (aquí, y representa a la función constante y con dominio $\mathbb{R}$)

$$\Psi^y_\xi := \{(y-g)|_{S^y_\xi} : g \in \Psi\}.$$

De los hechos $|S^y_\xi| = \mathfrak{c}$ y $|\Psi^y_\xi| = |\Psi| < \mu$, junto con el lema 3.23, deducimos la existencia de una función $f^y_\xi : S^y_\xi \longrightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que, para cada $g \in \Psi$, se cumple la igualdad

$$\left|(y-g)|_{S^y_\xi} \cap f^y_\xi\right| = \mathfrak{c}.$$

Se sigue de esto que, para cualquier $g \in \Psi$, $|S^y_\xi \cap (f^y_\xi + g|_{S^y_\xi})^{-1}\{y\}| = \mathfrak{c}$.

Hasta aquí, hemos producido una colección de funciones $\{f^y_\xi : y \in \mathbb{R} \ \wedge \ \xi < \mathfrak{c}\}$. En vista de la condición 2 de arriba, se tiene que

$$f := \bigcup\{f^y_\xi : y \in \mathbb{R} \ \wedge \ \xi < \mathfrak{c}\} \cup \left\{(x, 0) : x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup\{S^y_\xi : y \in \mathbb{R} \ \wedge \ \xi < \mathfrak{c}\}\right\}$$

es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Para concluir la prueba, tomemos $\xi < \mathfrak{c}$, $y \in \mathbb{R}$ y $g \in \Psi$. Utilizando la condición 1 obtenemos que:

$$\mathfrak{c} = |S_\xi^y \cap (f_\xi^y + g|_{S_\xi^y})^{-1}\{y\}| \leqslant |I_\xi \cap (f+g)^{-1}\{y\}|;$$

se sigue de esto último que $\kappa < \mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c}))$ y, por ende, $\mu \leqslant \mathrm{A}(\mathcal{D}(\mathfrak{c}))$. □

Corolario 3.25. $\mathrm{cf}(\mu) > \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $h : \mathfrak{c} \longrightarrow \mu$. Hagamos $\delta := \bigcup \mathrm{img(h)}$. Se cumple evidentemente que $\delta \leqslant \mu$. Basta con demostrar que $\delta \neq \mu$ para asegurar que h no es cofinal en μ y, en consecuencia, que $\mathrm{cf}(\mu) > \mathfrak{c}$.

Con esto en mente, utilicemos el lema 1.4 para fijar una familia $\{L_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq [\mathbb{R}]^{\mathfrak{c}}$ que cumple lo siguiente.

(1) $\bigcup\limits_{\alpha<\mathfrak{c}} L_\alpha = \mathbb{R}$.

(2) $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ siempre que $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$.

Por definición de μ, existe una familia $\{g_\xi : \xi < \mu\} \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ de tal manera que la siguiente condición es cierta

$$\forall\, f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\ \exists \xi < \mu\ (|f \cap g_\xi| < \mathfrak{c}). \tag{3.4}$$

Ahora, si $\alpha < \mathfrak{c}$, entonces $\{g_\xi|_{L_\alpha} : \xi \leqslant h(\alpha)\}$ es una familia de funciones de L_α en $\mathbb{R}$ con menos de μ elementos. Utilizando que $|L_\alpha| = \mathfrak{c}$ en conjunto con el lema 3.23, obtenemos una función $f_\alpha : L_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $\xi \leqslant h(\alpha)$, la igualdad $\left|f_\alpha \cap (g_\xi|_{L_\alpha})\right| = \mathfrak{c}$ es cierta.

Luego, de las condiciones (1) y (2), podemos deducir que $f := \bigcup\limits_{\alpha<\mathfrak{c}} f_\alpha$ es un elemento de ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$.

Por último, para $\xi < \delta$, existe un $\alpha < \mathfrak{c}$ tal que $\xi \leqslant h(\alpha)$. Se sigue de todo lo anterior que:

$$\mathfrak{c} = \left|f_\alpha \cap (g_\xi|_{L_\alpha})\right| \leqslant \left|f \cap g_\xi\right|.$$

Podemos concluir entonces que, para cualquier $\xi < \delta$, $\left|f \cap g_\xi\right| = \mathfrak{c}$. Este hecho, sumado con la condición (3.4), garantizan que $\delta \neq \mu$. □

Observe usted, querido lector, que este corolario junto con los teoremas 3.18, 3.21 y 3.24, nos garantizan que $\mathrm{cf}(\mathrm{A}(\mathcal{A})) > \mathfrak{c}$, que era nuestro segundo y último objetivo de esta sección.

CAPÍTULO 4: FORCING Y NOS VAMOS

El objetivo en este, nuestro cuarto y último capítulo, es demostrar el siguiente teorema: si V es un modelo transitivo y numerable de ZFC en el cual CH sea cierta, entonces, para cualquier $\lambda \in V$ tal que $V \models$ "λ es un cardinal y $\lambda^{\omega_1} = \lambda$", existe $\mathbb{P} \in V$ con $V \models$ "$\mathbb{P}$ es una noción de forcing que preserva cardinales" y $1_{\mathbb{P}} \Vdash \mathrm{A}(\mathcal{A}) = 2^{\mathfrak{c}} = \lambda$.

Nuestra fuente bibliográfica para este capítulo será [12] con una pequeña diferencia: nosotros utilizaremos la letra V para hablar de modelos transitivos y numerables de ZFC, mientras que en [12] se utiliza la letra M.

La pregunta que estamos interesados en responder es ¿cuál es el ordinal α que satisface que $\mathrm{A}(\mathcal{A}) = \aleph_\alpha$? Algo inmediato que podemos decir, en vista del corolario 3.25, es que $\mathrm{cf}(\mathrm{A}(\mathcal{A})) > \mathfrak{c} \geqslant \aleph_1$. De esta manera, el ordinal α que estamos buscando satisface la desigualdad $\alpha \geqslant 2$. El resto de este trabajo está dedicado a demostrar que, prácticamente, no hay restricciones para el tamaño del cardinal $\mathrm{A}(\mathcal{A})$. Trataremos de sustentar esta afirmación en el siguiente párrafo.

Si consideramos a V, un modelo transitivo y numerable de ZFC en el cual la Hipótesis Generalizada del Continuo sea cierta (note que en particular, $V \models \mathsf{CH}$), entonces, para cualquier $\lambda \in V$ con $V \models$ "λ es cardinal", se cumple que $V \models \lambda^{\omega_1} = \lambda$ si y sólo si $V \models \mathrm{cf}(\lambda) > \omega_1$. Esto último se deduce fácilmente del teorema de König (ver [12, lemma 10.40, p. 34] y [12, lemma 10.42, p. 34]). En vista de esto, podemos utilizar el teorema mencionado al inicio de este capítulo para asegurar que, si $\alpha \in V$ cumple que $V \models$ "α es un ordinal y $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) > \omega_1$", entonces podemos producir una noción de forcing $\mathbb{P}$ dentro de V de tal forma que $1_{\mathbb{P}} \Vdash \mathrm{A}(\mathcal{A}) = \aleph_\alpha$.

4.1 Combinatoria Infinita

Comenzamos con las últimas definiciones básicas de este trabajo. Una *noción de forcing* es una terna ordenada $(\mathbb{P}, \leqslant, 1_{\mathbb{P}})$, en la cual, la pareja $(\mathbb{P}, \leqslant)$ es un preorden con elemento máximo $1_{\mathbb{P}}$. Cuando no haya ambigüedad con el orden ni con el elemento máximo, los omitiremos y diremos simplemente que $\mathbb{P}$ es una noción de forcing.

Para una noción de forcing $\mathbb{P}$, diremos que $p, q \in \mathbb{P}$ son *compatibles* (y lo denotaremos por $p \mid q$) si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. Naturalmente, diremos que $p, q \in \mathbb{P}$ son incompatibles (y lo denotaremos por $p \perp q$) si no son compatibles. Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* en $\mathbb{P}$ si para cualquier $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ de tal forma que $q \leqslant p$. Por otro lado, $G \subseteq \mathbb{P}$ será llamado un $\mathbb{P}$-filtro (o únicamente filtro, cuando no haya riesgo de confusión con la noción de forcing) si satisface las siguientes condiciones:

(1) cualesquiera $p, q \in G$ son compatibles en G, esto es que p y q son compatibles y una extensión común de estos es un elemento de G.

(2) para cualesquiera $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$ se tiene que la condición $p \leqslant q$ implica que $q \in G$.

En general, si I y J son un par de conjuntos y κ es un cardinal, definimos:

$$\mathrm{Fn}(I, J, \kappa) := \bigcup \{ {}^X J : X \in [I]^{<\kappa} \}.$$

Ordenando a $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ con la contención inversa (esto es, $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$), obtenemos que $(\mathrm{Fn}(I, J, \kappa), \leqslant, \emptyset)$ es una noción de forcing. Durante el resto de esta sección, nosotros trabajaremos específicamente con la colección $\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$.

Para alcanzar nuestro objetivo de este último capítulo necesitaremos varios resultados auxiliares. Comencemos por definir, para cualesquiera ordinales α y β, el conjunto

$${}^{<\beta}\alpha := \bigcup \{ {}^{\gamma}\alpha : \gamma < \beta \}.$$

Empezamos con el siguiente lema combinatorio:

Lema 4.1. *(1) Para cualquier $\alpha < \omega_2$ se satisface que $\left| {}^{<\omega_1}\alpha \right| \leqslant \mathfrak{c}$.*

(2) Se verifica la desigualdad $|\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})| \leqslant |{}^{<\mathfrak{c}}\mathfrak{c}|$.

(3) Si CH es cierta, entonces $|\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})| \leqslant \omega_1$.

Demostración. Para comprobar la veracidad del inciso (1), comenzamos con la siguiente propiedad.

Afirmación. $\left|{}^{<\omega_1}\omega_1\right| = \mathfrak{c}$.

Primero, note que:

$$\left|{}^{<\omega_1}\omega_1\right| = \sup\{\omega_1^{|\alpha|} : \alpha < \omega_1\} = \omega_1^{\omega}.$$

Luego, como $\omega_1 \leqslant \mathfrak{c}$, se sigue que $\omega_1^{\omega} \leqslant \mathfrak{c}^{\omega} = \mathfrak{c}$. Por otro lado, como $2 < \omega_1$, tenemos que $\mathfrak{c} = 2^{\omega} \leqslant \omega_1^{\omega}$. Esto es suficiente para asegurar que $\left|{}^{<\omega_1}\omega_1\right| = \mathfrak{c}$.

Para concluir este inciso, fijemos $\alpha < \omega_2$. En estas circunstancias, se cumple que:

$$\left|{}^{<\omega_1}\alpha\right| \leqslant \left|{}^{<\omega_1}\omega_1\right| = \mathfrak{c}.$$

En aras de comprobar (2), notemos que $\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c}) \subseteq [\mathbb{R} \times \mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$. De esta manera, tenemos que:

$$|\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})| \leqslant \left|[\mathbb{R} \times \mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}\right| = \left|[\mathfrak{c}]^{<\mathfrak{c}}\right|.$$

Basta con argumentar que $\left|[\mathfrak{c}]^{<\mathfrak{c}}\right| \leqslant |{}^{<\mathfrak{c}}\mathfrak{c}|$. Dada $b \in [\mathfrak{c}]^{<\mathfrak{c}}$, se cumple que $b \subseteq \mathfrak{c}$ y además $|b| < \mathfrak{c}$. Si fijamos una biyección $f_b : |b| \longrightarrow b$, tenemos entonces que la función $\varphi : [\mathfrak{c}]^{<\mathfrak{c}} \longrightarrow {}^{<\mathfrak{c}}\mathfrak{c}$ definida mediante $\varphi(b) := f_b$ es una función inyectiva, garantizando que $\left|[\mathfrak{c}]^{<\mathfrak{c}}\right| \leqslant |{}^{<\mathfrak{c}}\mathfrak{c}|$.

Para comprobar (3) y finalizar la prueba, asumamos que CH es cierta. Se desprende de la afirmación del inciso (1) junto con el inciso (2) que:

$$|\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})| \leqslant |{}^{<\mathfrak{c}}\mathfrak{c}| = \left|{}^{<\omega_1}\omega_1\right| = \mathfrak{c} = \omega_1.$$

□

Si S es una noción de forcing, diremos que S es *σ-cerrada* si cualquier sucesión decreciente de longitud ω en S tiene una cota inferior. Formalmente, S es σ-cerrada si para cualquier $\{p_n : n < \omega\} \subseteq S$ con la propiedad $p_{n+1} \leqslant p_n$, siempre que $n < \omega$, se tiene que existe $p \in S$ tal que, para cualquier $n < \omega$, se satisface la desigualdad $p \leqslant p_n$.

Por otro lado, si X es un conjunto no vacío y $p : X \longrightarrow \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$, nos referiremos al conjunto $\mathrm{supp}(p) := \{x \in X : p(x) \neq \emptyset\}$ como el *soporte de p*. Con esto en mente, definamos, también, a

$$X_\diamond := \{p : X \longrightarrow \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c}) : |\mathrm{supp}(p)| \leqslant \omega\}.$$

A continuación, equipemos a $X_\diamond$ con el siguiente orden: para cualesquiera $p, q \in X_\diamond$, diremos que $p \leqslant q$ si y sólo si, para cualquier $x \in X$, $p(x) \leqslant q(x)$. Es fácil verificar que $(X_\diamond, \leqslant, \bar{\emptyset})$ es una noción de forcing, en donde $\bar{\emptyset}$ es la función constante vacío con dominio X. Nuestro siguiente resultado conecta adecuadamente los párrafos anteriores.

Lema 4.2. *Si X es un conjunto no vacío, se satisface que $X_\diamond$ es una noción de forcing σ-cerrada.*

Demostración. Comencemos verificando que, si $\{q_n : n < \omega\} \subseteq \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$ es una sucesión decreciente y hacemos $q := \bigcup\limits_{n<\omega} q_n$, entonces $q \in \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$. Es inmediato que q es una función en vista de que la sucesión $\{q_n\}$ es decreciente. Únicamente resta comprobar que $|\mathrm{dom}(q)| < \mathfrak{c}$. Recordemos que una consecuencia del lema de König (ver [12, corollary 10.41, p. 34]) es que $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) > \omega$. Podemos emplear este hecho junto con el lema 1.2 para garantizar que:

$$\big|\mathrm{dom}(q)\big| = \left|\bigcup_{n<\omega} \mathrm{dom}(q_n)\right| < \mathfrak{c};$$

esto es suficiente para asegurar que $q \in \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$.

Concentrémonos ahora en comprobar que $X_\diamond$ es σ-cerrada. Consideremos $\{p_n : n < \omega\} \subseteq X_\diamond$ de tal forma que $p_{n+1} \leqslant p_n$, siempre que $n < \omega$. En estas circunstancias, observe que $\{\{p_n(x) : n < \omega\} : x \in X\}$ es una colección de sucesiones decrecientes en $\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$. Podemos emplear lo expuesto al principio de la prueba para garantizar que $p := \Big\{\big(x, \bigcup_{n<\omega} p_n(x)\big) : x \in X\Big\}$ es una función de X en $\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$. Con p definida como antes, es inmediato que $p \leqslant p_n$, siempre que $n < \omega$. Únicamente falta comprobar que $\big|\mathrm{supp}(p)\big| \leqslant \omega$. Para esto, observe que se verifica la contención $\mathrm{supp}(p) \subseteq \bigcup\limits_{n<\omega} \mathrm{supp}(p_n)$ y, por lo tanto:

$$\big|\mathrm{supp}(p)\big| \leqslant \left|\bigcup_{n<\omega} \mathrm{supp}(p_n)\right| \leqslant \omega.$$

□

En general, si S es una noción de forcing, diremos que $A \subseteq S$ es una *anticadena* si y sólo si cualesquiera dos elementos distintos de A son incompatibles. También, diremos que S tiene la ω_2-cc si se satisface que toda anticadena en S tiene, a lo más, ω_1 elementos. Ilustramos esta definición con el siguiente resultado auxiliar.

Lema 4.3. *Bajo* CH *se cumple que* $X_\diamond$ *tiene la* ω_2*-cc para cualquier conjunto no vacío* X.

Demostración. Supongamos que $\{p_\xi : \xi < \omega_2\}$ es un subconjunto de $X_\diamond$ indizado sin repeticiones y enfoquémonos en demostrar que esta colección no puede ser una anticadena. Hagamos, para cada $\xi < \omega_2$, $a_\xi := \operatorname{supp}(p_\xi)$ y definamos $A := \{a_\xi : \xi < \omega_2\}$. Nuestro siguiente objetivo es verificar que los cardinales ω_2 y ω_1 junto con el conjunto A satisfacen las hipótesis del lema del Δ-sistema (ver [12, theorem 1.6, p. 49]).

Esperamos que los lectores que nos acompañen hasta este momento no tengan ningún problema en aceptar que lo único que necesitamos argumentar es por qué, para cualquier $\alpha < \omega_2$, se cumple que $\left|{}^{<\omega_1}\alpha\right| < \omega_2$. Este hecho es una consecuencia inmediata del inciso (1) del lema 4.1 junto con la suposición de que CH es cierta.

De esta manera, por el lema del Δ-sistema, existen $J \in [\omega_2]^{\omega_2}$ y $r \subseteq X$ de tal forma que, para cualesquiera $\xi, \eta \in J$, se tiene que $a_\xi \cap a_\eta = r$, siempre que $\xi \neq \eta$.

De nuevo, empleando nuestra hipótesis de que CH es cierta, podemos utilizar el inciso (3) del lema 4.1 para asegurar lo siguiente:

$$|{}^r\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})| = |\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})|^{|r|} \leqslant |\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})|^{\omega} \leqslant \omega_1^{\omega} = \omega_1.$$

Entonces, como $\{p_\xi|_r : \xi \in J\}$ es un subconjunto de ${}^r\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$ y además $|J| = \omega_2$, podemos hacer uso del corolario 1.3 (tome $M = J$, $N = {}^r\,\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$ y $f(\xi) = p_\xi|_r$) para garantizar la existencia de un $J_0 \in [J]^{\omega_2}$ de tal manera que, para cualesquiera $\xi, \eta \in J_0$, se tiene la igualdad $p_\xi|_r = p_\eta|_r$. Se desprende de la propiedad siguiente que el conjunto $\{p_\xi : \xi < \omega_2\}$ no es una anticadena.

Afirmación. $p_\xi \mid p_\eta$, siempre que $\xi, \eta \in J_0$.

Fijemos $\xi, \eta \in J_0$. Buscamos producir una función $q \in X_\diamond$ que satisfaga las desigualdades $q \leqslant p_\xi$ y $q \leqslant p_\eta$. Definamos $q : X \longrightarrow \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$ como sigue:

$$q(x) = \begin{cases} p_\xi(x), & \text{si } x \in \operatorname{supp}(p_\xi) \\ p_\eta(x), & \text{si } x \in \operatorname{supp}(p_\eta) \\ \emptyset, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se puede comprobar con un argumento rutinario que q definida como antes satisface las condiciones deseadas. Esto prueba la afirmación y, por extensión, concluye la prueba. $\square$

4.2 Extensiones Genéricas

En lo que resta de este trabajo, V será un modelo transitivo y numerable de ZFC en el cual se verifique CH. También, nos reservaremos el símbolo Q para hablar de $\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})^V$, es decir, de la noción de forcing $\mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})$ relativizada al modelo V.

Si S es una noción de forcing y $H \subseteq S$ es un filtro, diremos que H es (V, S)-*genérico* si, para cualquier $D \in V$ tal que $V \models$ "D es denso en S ", se satisface que $H \cap D \neq \emptyset$. Si H es como antes, haremos uso del símbolo $V[H]$ para referirnos a la extensión genérica producida por H.

Nuestro siguiente lema es la columna vertebral de este capítulo:

Lema 4.4. *Si $S \in V$ y $V \models$ "S es una noción de forcing σ-cerrada" y H es un filtro (V, S)-genérico, los siguientes enunciados son ciertos:*

1. $\mathbb{R}^V = \mathbb{R}^{V[H]}$,

2. $V[H] \models \mathsf{CH}$ *y*

3. $Q = \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})^{V[H]}$.

Demostración. Lo primero que haremos será comprobar que $\mathbb{R}^V = \mathbb{R}^{V[H]}$. La contención de izquierda a derecha es evidente. Para la otra contención tomemos $t \in \mathbb{R}^{V[H]}$ y, a continuación, fijemos $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ de tal manera que $V \models$ " la pareja (A, B) es una cortadura de Dedekind y, además, $(A, B) = t$". En seguida, obtenemos que existe una $f \in {}^\omega\mathbb{Q} \cap V[H]$ de tal forma que:

($\cdot$) $\{f(2n) : n < \omega\} = A$ y

($\cdot\cdot$) $\{f(2n+1) : n < \omega\} = B$.

En estas circunstancias, como podemos emplear [9, teorema 3.32, p. 52] para asegurar que $f \in V$ y, por ende, $t \in V$. Nótese que una consecuencia inmediata de este inciso es que $\mathfrak{c}^V = \mathfrak{c}^{V[H]}$.

Para verificar que $V[H] \models \mathsf{CH}$, podemos emplear que $V \models \mathsf{CH}$ para garantizar la igualdad $\mathfrak{c}^V = \omega_1^V$ y, utilizando lo dicho al final del párrafo previo, deducimos que:

$$\omega_1^{V[H]} \leqslant \mathfrak{c}^{V[H]} = \mathfrak{c}^V = \omega_1^V \leqslant \omega_1^{V[H]};$$

esto prueba que $\omega_1^{V[H]} = \mathfrak{c}^{V[H]}$, como buscábamos.

Las igualdades siguientes se desprenden de lo anterior:

$$Q = \mathrm{Fn}(\mathbb{R}^V, \mathbb{R}^V, \omega_1^V) \cap V \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})^{V[H]} = \mathrm{Fn}(\mathbb{R}^V, \mathbb{R}^V, \omega_1^V) \cap V[H].$$

Para poder conlcuir este lema, concentrémonos en mostrar que $Q = \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})^{V[H]}$. Observemos que, de nuevo, la contención de izquierda a derecha es inmediata. Para la contención restante, tomemos $p \in \mathrm{Fn}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathfrak{c})^{V[H]}$. Haciendo $B := \mathbb{R}^V \times \mathbb{R}^V$, obtenemos que $B \in V$ y $p \subseteq B$. Por último, en vista de que $V[H] \models |p| \leqslant \omega$, tenemos que $V[H] \models \exists\, f : \omega \longrightarrow p \,\wedge\, \mathrm{img}(f) = p$. Observando que $f \in V[H]$ y que $f : \omega \longrightarrow B$, podemos aplicar una vez más [9, teorema 3.32, p. 52], para deducir que $f \in V$ y, por ende, que $p \in Q$. $\square$

En lo que sigue utlizaremos el símbolo $\mathbb{P}$ para hablar de la noción de forcing $(\lambda_\diamond)^V$, donde $\lambda \in V$ satisface que $V \models$ "λ es un número cardinal y $\lambda^{\omega_1} = \lambda$". Observe que el lema 1.5 implica que $V \models$ "$\lambda \geqslant \mathrm{cf}(\lambda) > \omega_1$".

Lo que resta de esta sección esta dedicado a probar los resultados auxiliares que utilizaremos para culminar este trabajo.

Trabajando en V, el lema 4.2 nos garantiza que ω_1 no es colapsado por $\mathbb{P}$, mientras que el lema 4.3, [12, lemma 6.9, p. 213] y [12, lemma 5.8, p. 207] implican que $\mathbb{P}$ preserva todos los cardinales mayores o iguales a $\aleph_2$. De este modo, $\mathbb{P}$ preserva cardinales, tal y como se anunció al principio del capítulo.

En los lemas siguientes, X será un subconjunto de λ que satisface que $X \in V$. También, haremos $Y := \lambda \setminus X$.

Lema 4.5. *Si G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico y hacemos $G_X := \{p|_X : p \in G\}$, tenemos que G_X es un filtro $(V, X_\diamond)$-genérico.*

Demostración. Es claro que G_X definido como antes cumple que $G_X \subseteq X_\diamond$. Comencemos tomando $p, q \in G$ y concentrémonos en demostrar que $p|_X$ es compatible con $q|_X$. Empleando que G es un filtro, podemos producir $r \in G$ de tal forma que $r \leqslant p, q$. Así, obtenemos que $r|_X \in G_X$ y, además, $r|_X \leqslant p|_X, q|_X$.

Ahora, tomemos $p \in G$, $q \in X_\diamond$ y supongamos que $p|_X \leqslant q$. Definamos $r := q \cup (p|_Y)$. Se comprueba fácilmente que $p \leqslant r$ y, por ende, $r \in G$. Por último, nótese que $q = r|_X \in G_X$.

Lo único que falta verificar es que si $D \in V$ es denso en $X_\diamond$, se satisface que $G_X \cap D \neq \emptyset$. Para esto, hagamos $D^\star := \{p \in \mathbb{P} : p|_X \in D\}$. En vista de que de que todos los parámetros involucrados en la definición de $D^\star$ son elementos de V, se sigue que $D^\star \in V$. Mostraremos a continuación que $D^\star$ es denso en $\mathbb{P}$.

Sea $q \in \mathbb{P}$. De inmediato tenemos que $q|_X \in X_\diamond$ y, como D es denso en $X_\diamond$, deducimos que existe un $p \in D$ que hace cierta la desigualdad $p \leqslant q|_X$. Haciendo $p^\star := p \cup (q|_Y)$, es claro que $p^\star \in D^\star$ y además $p^\star \leqslant q$. Esto asegura que $D^\star$ es, en efecto, denso en $\mathbb{P}$.

Por último, como G es $(V, \mathbb{P})$-genérico, tenemos que existe $r \in G \cap D^\star$. Se desprende de este hecho que $r|_X \in G_X \cap D$. □

La prueba del siguiente resultado se escapa de los alcances de este trabajo; sin embargo, lo utilizaremos libremente en la demostración del lema posterior.

Proposición 4.6. *Si G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces $G_Y := \{p|_Y : p \in G\}$ es un filtro $(V[G_X], Y_\diamond)$-genérico y además $V[G_X][G_Y] = V[G]$.*

Lema 4.7. *Si G un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico y hacemos, para cada $\alpha < \lambda$,*

$$G_\alpha := \{p(\alpha) : p \in G\},$$

se satisface que cada G_α es un filtro en Q. Además, si $\alpha \in Y$, se tiene que G_α es $(V[G_X], Q)$-genérico.

Demostración. Fijemos $\alpha < \lambda$. Es evidente que $G_\alpha \subseteq Q$. Para verificar que cualesquiera dos elementos en G_α son compatibles, tomemos $x, y \in G_\alpha$. De esta manera, existen $p, q \in G$ de tal forma que $x = p(\alpha)$ y $y = q(\alpha)$. Como G es un filtro, tenemos que existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p, q$. En seguida obtenemos que $r(\alpha)$ es un elemento de G_α con $r(\alpha) \leqslant x, y$.

Finalmente, tomemos $x \in G_\alpha$ y $y \in Q$ con $x \leqslant y$; enfoquémonos en probar que $y \in G_\alpha$. Por definición, hay $p \in G$ con $x = p(\alpha)$ y así,

$$q := \big(p \setminus \{(\alpha, x)\}\big) \cup \{(\alpha, y)\}.$$

es un elemento de $\mathbb{P}$ que satisface $p \leqslant q$; luego, como $p \in G$, se sigue $q \in G$ y, por ende, $y = q(\alpha) \in G_\alpha$. Esto prueba que G_α es un filtro en Q, como queríamos.

Para comprobar la genericidad, supongamos adicionalmente que $\alpha \in Y$ y tomemos $D \in V[G_X]$, un conjunto denso en Q, y enfoquémonos en probar que $D \cap G_\alpha \neq \emptyset$.

Hagamos $D^\star := \{p \in Y_\diamond : p(\alpha) \in D\}$. Tenemos inmediatamente que $D^\star \in V$. Mostraremos a continuación que $D^\star$ es denso en $Y_\diamond$.

Tomemos $q \in Y_\diamond$. Como $q(\alpha) \in Q$, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant q(\alpha)$. Hagamos ahora $d^\star := (q \setminus \{(\alpha, q(\alpha))\}) \cup \{(\alpha, d)\}$. Es claro que $d^\star \in D^\star$ y además se cumple que $d^\star \leqslant q$. Esto asegura que $D^\star$ es denso en $Y_\diamond$.

Ahora podemos emplear la proposición 4.6 para obtener $p \in D^\star \cap G_Y$. En particular, como $p \in G_Y$, tenemos que existe $p' \in G$ tal que $p'|_Y = p$. Se sigue que $p(\alpha) \in D$ y $p(\alpha) = p'(\alpha) \in G_\alpha$. $\square$

Para nuestro último lema de la sección requerimos la siguiente definición: sea S una noción de forcing. Sea $\dot{x}$ un S-nombre. Diremos que $\dot{z}$ es un *buen S-nombre (en inglés, nice S-name) para algún subconjunto de $\dot{x}$* si existe $\{A_{\dot{y}} : \dot{y} \in \mathrm{dom}(\dot{x})\}$, una colección de anticadenas en S, de tal modo que $\dot{z} = \bigcup\{\{\dot{y}\} \times A_{\dot{y}} : \dot{y} \in \mathrm{dom}(\dot{x})\}$.

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [12, lemma 5.12, p. 208], nosotros nos limitaremos a utilizarlo sin miedo en nuestro último resultado de la sección.

Lema 4.8. *Sea S una noción de forcing. Si $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son un par de S-nombres, existe $\dot{z}$, un buen S-nombre para algún subconjunto de $\dot{x}$, de tal manera que $1_S \Vdash (\dot{y} \subseteq \dot{x} \rightarrow \dot{y} = \dot{z})$.*

Lema 4.9. *Si G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, se satisface que $V[G] \vDash 2^{\mathfrak{c}} = \lambda$.*

Demostración. En $V[G]$, tenemos (recuerde el lema 4.2 y el inciso (2) del lema 4.4) que $|{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| = 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\omega_1}$. Consideremos de nuevo, para cada $\alpha < \lambda$, a $G_\alpha = \{p(\alpha) : p \in G\}$. Definamos, también, para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $\alpha < \lambda$ a los conjuntos $D_t^\alpha := \{p \in \mathbb{P} : t \in \operatorname{dom}(p(\alpha))\}$. Se comprueba fácilmente que estos conjuntos son densos en $\mathbb{P}$. En estas circunstancias y en presencia del lema 4.7, un argumento rutinario de genericidad verifica que, si $f_\alpha := \bigcup G_\alpha$, entonces $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \cap V[G]$.

Para concluir que $V[G] \models 2^{\omega_1} \geqslant \lambda$, basta con ver que $f_\alpha \neq f_\beta$ siempre que $\alpha < \beta < \lambda$. Esto se comprueba, de nuevo, con un sencillo argumento de genericidad junto con el hecho de que, si hacemos $D_\alpha^\beta := \{p \in \mathbb{P} : \exists\, t \in \mathbb{R}\ (p(\alpha)(t) \neq p(\beta)(t))\}$, entonces dichos conjuntos son densos.

Concentrémonos ahora en ver que $V[G] \vDash 2^{\omega_1} \leqslant \lambda$. Recordemos que una consecuencia del lema 4.2 es que $\theta := \omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$. Observemos que, para comprobar que $V[G] \vDash 2^{\omega_1} \leqslant \lambda$, basta con ver que $V[G] \vDash |P(\theta)| \leqslant \lambda$. En aras de verificar esto último, emplearemos un par de afirmaciones. Comencemos por definir el conjunto $V^{\mathbb{P}}$ como la colección de todos los $\mathbb{P}$-nombres que son elementos del modelo base V.

Afirmación 1. Para cualquier $y \in V[G] \cap P(\theta)$, existe $\dot{z} \in V^{\mathbb{P}}$, un buen $\mathbb{P}$-nombre para algún subconjunto de $\check{\theta}$, tal que $\dot{z}_G = y$.

En efecto, tomemos $y \in V[G] \cap P(\theta)$. De esta manera, existen $\dot{y} \in V^{\mathbb{P}}$ y $p \in G$ tales que $\dot{y}_G = y$ y $p \Vdash \dot{y} \subseteq \check{\theta}$. Por el lema 4.8, existe un buen $\mathbb{P}$-nombre para algún subconjunto de $\check{\theta}$, digamos $\dot{z} \in V^{\mathbb{P}}$, que satisface que $1_{\mathbb{P}} \Vdash (\dot{y} \subseteq \check{\theta} \rightarrow \dot{y} = \dot{z})$. Inmediatamente obtenemos que $p \Vdash \dot{y} = \dot{z}$ y, por ende, $\dot{z}_G = y$.

Afirmación 2. En V, la colección de buenos $\mathbb{P}$-nombres para algún subconjunto de $\check{\theta}$ tiene, a lo sumo, $|\mathbb{A}|^\theta$ elementos, en donde $\mathbb{A}$ es la familia de todas las anticadenas en $\mathbb{P}$.

Notemos que, por definición de $\check{\theta}$, $\operatorname{dom}(\check{\theta}) = \{\check{\alpha} : \alpha < \theta\}$; en consecuencia, si $\dot{z}$ es un buen $\mathbb{P}$-nombre para un subconjunto de $\check{\theta}$, entonces, para cada $\alpha < \theta$, existe $A_\alpha \in \mathbb{A}$ tal que $\dot{z} = \bigcup_{\alpha < \theta} (\{\check{\alpha}\} \times A_\alpha)$. De esta manera, si definimos $f : \theta \longrightarrow \mathbb{A}$ mediante $f(\alpha) = A_\alpha$, se cumple que $\dot{z} = \bigcup_{\alpha<\theta} (\{\check{\alpha}\} \times f(\alpha))$. Esto es suficiente para comprobar la afirmación.

Combinando las afirmaciones 1 y 2 obtenemos que, para estimar por arriba cuántos subconjuntos de θ posee $V[G]$, basta con saber cuántas funciones de θ en $\mathbb{A}$ hay en V. Esto se resume en símbolos diciendo que $V[G] \vDash |P(\theta)| \leqslant (|\mathbb{A}|^{\theta})^{V}$. A continuación argumentaremos por qué, en V, se cumple que $|\mathbb{A}|^{\theta} \leqslant \lambda$.

Lo que haremos primero será mostrar que $V \vDash |\mathbb{P}| \leqslant \lambda$. Trabajemos en V. Es claro que $|\mathbb{P}| \leqslant \left|\bigcup\{{}^{E}Q : E \in [\lambda]^{\leqslant\omega}\}\right|$. Por otro lado, como V satisface CH, podemos utilizar el inciso (3) del lema 4.1 para garantizar que, si tomamos $E \in [\lambda]^{\leqslant\omega}$, se cumple que $|{}^{E}Q| \leqslant \omega_1^{\omega} = \omega_1$. Por último, podemos recurrir al lema 1.5 (tome $\mu = \omega_1$) para deducir que $|[\lambda]^{\leqslant\omega}| \leqslant \lambda^{\omega} = \lambda$. Se sigue de esto que $|\mathbb{P}| \leqslant \lambda \cdot \omega_1$ y, por el lema 1.5, $\omega_1 < \operatorname{cf}(\lambda) \leqslant \lambda$; en conclusión, $|\mathbb{P}| \leqslant \lambda$.

Ahora, en vista de que $\mathbb{P}$ tiene la ω_2-cc (ver lema 4.3), se sigue que $\mathbb{A} \subseteq [\mathbb{P}]^{\leqslant\omega_1}$. Así, podemos utilizar que en V se satisface la igualdad $\lambda^{\omega_1} = \lambda$ para asegurar que:

$$|\mathbb{A}| \leqslant |[\mathbb{P}]^{\leqslant\omega_1}| \leqslant \lambda^{\omega_1} = \lambda.$$

Se desprende de este hecho que $|\mathbb{A}|^{\theta} \leqslant \lambda^{\omega_1} = \lambda$ y, por ende, que $V[G] \vDash 2^{\omega_1} \leqslant \lambda$. $\square$

Corolario 4.10. *Si G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, se satisface que $V[G] \vDash \mathrm{A}(\mathcal{A}) \leqslant \lambda$.*

Demostración. En efecto, recordemos que es un resultado de ZFC que $\mathrm{A}(\mathcal{A}) \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$ (ver teorema 3.16). Luego, podemos emplear el inciso 2 del lema 4.4 y el lema 4.9 para asegurar que las siguientes relaciones se verifican en $V[G]$: $\mathrm{A}(\mathcal{A}) \leqslant 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\omega_1} = \lambda$. $\square$

4.3 Prueba del teorema central

Recordemos que, si S y T son nociones de forcing y $e : S \longrightarrow T$, decimos que e es un *encaje* si se satisfacen las condiciones siguientes para cualesquiera $p, r \in S$.

1. $p \leqslant r$ implica que $e(p) \leqslant e(r)$.

2. $e(p) \mid e(r)$ implica que $p \mid r$.

Una propiedad sencilla que cumplen los encajes es que si A es una anticadena en S, se satisface que $e[A]$ es una anticadena en T. Sin embargo, no siempre se cumple que se preserve la maximalidad de las anticadenas y, por esto mismo, se extiende la definición de encaje a *encaje completo*, es decir, un encaje $e : S \longrightarrow T$ es *completo* si manda anticadenas maximales en anticadenas maximales.

Para aquellos lectores que deseen profundizar más en el atractivo tema de los encajes entre nociones de forcing, les recomendamos que consulten [1]. Nuestro siguiente resultado relaciona este concepto con los temas tratados hasta el momento.

Lema 4.11. *Si X, Y son conjuntos no vacíos y $X \subseteq Y$, entonces $X_\diamond$ se encaja completamente en $Y_\diamond$.*

Demostración. Proponemos a la función $e : X_\diamond \longrightarrow Y_\diamond$ definida mediante

$$e(p) := p \cup ((Y \setminus X) \times \{\emptyset\}).$$

Argumentos rutinarios pueden ser empleados para demostrar que las condiciones 1 y 2 de la definición de encaje completo se verifican. Únicamente nos resta argumentar que e manda anticadenas maximales en anticadenas maximales.

Sea pues A una anticadena maximal en $X_\diamond$. Tomemos $q \in Y_\diamond$. Se sigue que $q|_X \in X_\diamond$ y, como A es anticadena maximal, deducimos que existe $a \in A$ de tal manera que a y $q|_X$ son compatibles. Luego, podemos tomar $r \in X_\diamond$ de tal manera que $r \leqslant a, q|_X$. Un argumento sencillo comprueba que $t := r \cup (q|_{Y \setminus X})$ satisface que $t \in Y_\diamond$ y, además, $t \leqslant e(a), q$. Esto indica que t es un testigo de que $e(a)$ y q son compatibles en $Y_\diamond$ y, por ende, que $e[A]$ es una anticadena maximal. $\square$

A continuación presentamos el último resultado auxiliar que utilizaremos en este trabajo.

Lema 4.12. *Sea G un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico. Para cualesquiera $E \in V[G]$ y $F \in V$, si $E \subseteq F$, entonces existe $E^\star \in V$ con $E^\star \subseteq \lambda$ de tal forma que $V \models$ "$|E^\star| \leqslant |F| + \omega_1$" y $E \in V[G_{E^\star}]$.*

Demostración. Como $V[G] \models E \subseteq F$, existen $p \in G$ y $\dot{C} \in V^{\mathbb{P}}$ de tal manera que $\dot{C}_G = E$ y $p \Vdash \dot{C} \subseteq \check{F}$. El siguiente argumento deberá entenderse relativizado a V.

Empleemos el lema 4.8 para hallar $\dot{E}$, un buen $\mathbb{P}$-nombre para algún subconjunto de $\check{F}$, que satisface $1_{\mathbb{P}} \Vdash (\dot{C} \subseteq \check{F} \longrightarrow \dot{C} = \dot{E})$. Deducimos que $p \Vdash \dot{C} = \dot{E}$ y, como $p \in G$, se satisface que $E = \dot{C}_G = \dot{E}_G$.

Nuestra elección de $\dot{E}$ garantiza que $\{A_x : x \in F\}$, una familia de anticadenas en $\mathbb{P}$, que hace cierta la igualdad $\dot{E} = \bigcup\{\{\check{x}\} \times A_x : x \in F\}$. En vista del lema 4.3 tenemos que, para cualquier $x \in F$, $|A_x| \leqslant \omega_1$.

Hagamos $E^\star := \mathrm{supp}(p) \cup \bigcup_{x \in F} \bigcup\{\mathrm{supp}(q) : q \in A_x\}$. Con esto, es evidente que $E^\star \subseteq \lambda$. Luego, utilizando que cada elemento en $\mathbb{P}$ tiene soporte numerable, podemos asegurar que las siguientes desigualdades son ciertas:

$$|E^\star| \leqslant \omega + \left|\bigcup\{\mathrm{supp}(q) : q \in A_x\}\right| \cdot |F| \leqslant \omega + (\omega_1 \cdot \omega) \cdot |F| \leqslant |F| + \omega_1.$$

El siguiente argumento tiene su demostración formal utilizando buenos nombres, sin embargo, optamos por el argumento intuitivo que presentamos para no saturar el contenido de esta última sección. En vista de que fuera de $E^\star$ todas y cada una de las condiciones que estamos considerando se vuelven la constante vacío, tenemos que dentro de $E^\star$ está comprendida toda la información que necesitamos para asegurar que existe $\dot{E}_0$, un $(E^\star)_\diamond$-nombre, de tal modo que $\mathrm{val}(\dot{E}_0, G_{E^\star}) = \dot{E}_G$. En consecuencia, $E = \mathrm{val}(\dot{E}_0, G_{E^\star}) \in V[G_{E^\star}]$.

□

Teorema 4.13. *Si G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces $V[G] \models \mathrm{A}(\mathcal{A}) = \lambda$.*

Demostración. Se desprende del corolario 4.10 que $V[G] \models \mathrm{A}(\mathcal{A}) \leqslant \lambda$. Mostraremos a continuación que $V[G] \models \mathrm{A}(\mathcal{A}) \geqslant \lambda$.

Tomemos $\Psi \in V[G]$ tal que $V[G] \models$ “$\Psi \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ y $|\Psi| < \lambda$”. Fijemos $f \in \Psi$. En $V[G]$, tomemos $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Una consecuencia de esto, en vista de que en $V[G]$ se satisface CH, es que $|f| = \omega_1$. Por otro lado, podemos utilizar el inciso 1 del lema 4.4 para asegurar que $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^V \in V$.

De esta manera, por el lema 4.12 (tome $E = f$ y $F = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^V$), existe $f^\star \in V$ con $f^\star \subseteq \lambda$, $|f^\star| \leqslant |(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^V| + \omega_1 = \omega_1$ y $f \in V[G_{f^\star}]$.

Hagamos $X := \bigcup\{f^\star : f \in \Psi\}$. Nótese que $|X| \leqslant |\Psi| \cdot \omega_1 < \lambda$ y, además, para cualquier $f \in \Psi$, se cumple que $f^\star \subseteq X$. A continuación, fijemos de nuevo $f \in \Psi$. Con el objetivo en mente de probar que $f \in V[G_X]$, notemos que, en virtud del lema 4.11, $(f^\star)_\diamond$ se encaja completamente en $X_\diamond$ mediante la función $e : (f^\star)_\diamond \longrightarrow X_\diamond$ dada por $e(p) := p \cup ((X \setminus f^\star) \times \{\emptyset\})$.

Afirmación. Se satisface que $G_{f^\star} = e^{-1}[G_X]$.

Verificaremos esta igualdad por doble contención. Supongamos primero que $p \in G_{f^\star}$. Tenemos que existe $q \in G$ de tal forma que $q|_{f^\star} = p$. Luego, tenemos que $e(p) = e(q|_{f^\star}) = q|_{f^\star} \cup ((X \setminus f^\star) \times \{\emptyset\})$. Nótese ahora que $q|_X \leqslant q|_{f^\star} \cup ((X \setminus f^\star) \times \{\emptyset\})$ y, como G_X es filtro, se sigue que $q|_{f^\star} \cup ((X \setminus f^\star) \times \{\emptyset\}) \in G_X$ o, en otras palabras, que $p \in e^{-1}[G_X]$.

Tomemos ahora $p \in e^{-1}[G_X]$. Se sigue que $e(p) \in G_X$ y así, existe $q \in G$ tal que $q|_X = e(p) = p \cup ((X \setminus f^\star) \times \{\emptyset\})$. Entonces, podemos asegurar que $q|_{f^\star} = p$ y, por ende, que $p \in G_{f^\star}$.

De esta manera, podemos emplear [1, teorema 2.4, p. 20] junto con la afirmación anterior para garantizar que $f \in V[G_{f^\star}] = V[e^{-1}[G_X]] \subseteq V[G_X]$. Se sigue de esto que $\Psi \subseteq V[G_X]$.

Para concluir esta parte, recordemos que $V \models |X| < \lambda$ y empleemos esto para fijar $\alpha \in \lambda \setminus X$. En virtud del lema 4.7, tenemos que G_α es un filtro $(V[G_X], Q)$- genérico. Ahora, utilicemos el lema 1.4 para fijar $\{L_\xi : \xi < \mathfrak{c}^V\} \in V$, una familia indizada sin repeticiones y ajena por pares, de tal forma que $V \models$ "$\{L_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \subseteq [\mathbb{R}]^\mathfrak{c}$ y $\bigcup\{L_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} = \mathbb{R}$". A continuación, definamos, para cada $x \in \mathbb{R}^V$, $f \in \Psi$ y $\xi < \mathfrak{c}^V$, a los conjuntos:

$$D_x := \{p \in Q : x \in \operatorname{dom}(p)\} \qquad \text{y} \qquad D^\xi_f := \{p \in Q : \exists t \in \operatorname{dom}(p) \cap L_\xi \ (p(t) = f(t))\}.$$

Es inmediato que los conjuntos anteriores son elementos de $V[G_X]$ en vista de que todos los parámetros involucrados en sus definiciones son elementos de $V[G_X]$. Además, es rutinario comprobar que D_x es denso en Q. Con respecto a la densidad de D^ξ_f tenemos que si $p \in Q$, se satisface que $V \models$ "$|\operatorname{dom}(p)| < \mathfrak{c} = |L_\xi|$", así que podemos fijar $t \in L_\xi \setminus \operatorname{dom}(p)$. Definiendo (recuerde que $\mathbb{R}^V = \mathbb{R}^{V[G]}$) $q := p \cup \{(t, f(t))\}$, se cumple que $q \leqslant p$ y $q \in D^\xi_f$, como queríamos.

Podemos emplear ahora la genericidad de G_α para asegurar que $g := \bigcup G_\alpha$ es una función de $\mathbb{R}^V$ en $\mathbb{R}^V$. Fijemos $f \in \Psi$ y mostremos que $V[G_X][G_\alpha] \models$ "hay una función inyectiva de $\mathfrak{c}^V$ en $f \cap g$".

Primeramente, para cada $\xi < \mathfrak{c}^V$ hay $p_\xi \in D_f^\xi \cap G_\alpha$ y, por ende, existe $x_\xi \in \operatorname{dom}(p_\xi) \cap L_\xi$ con $f(x_\xi) = p_\xi(x_\xi) = g(x_\xi)$. El hecho de que $\{L_\eta : \eta < \mathfrak{c}^V\}$ sea ajena por pares nos da $V[G_X][G_\alpha] \models$ "$\{x_\eta : \eta < \mathfrak{c}^V\}$ es equipotente a $\mathfrak{c}^V$". De esta manera, la contención $\{(x_\eta, f(x_\eta)) : \eta < \mathfrak{c}^V\} \subseteq f \cap g$ nos permite concluir lo enunciado en el párrafo previo.

Aunque es posible usar un argumento basado en encajes completos de la iteración $X_\diamond * \check{Q}$ en $\mathbb{P}$ para argumentar que

$$V[G_X][G_\alpha] \subseteq V[G], \tag{4.1}$$

lo omitiremos porque sentimos que dicha explicación nos desviaría considerablemente de nuestro tema central. En resumen, daremos por hecho que (4.1) es cierta.

De todo lo anterior se deduce que para cada $f \in \Psi$ hay una función inyectiva de $\mathfrak{c}^V$ en $f \cap g$ que es elemento de $V[G]$. Esto, aunado a $V \models$ "$\mathbb{P}$ es σ-cerrada", nos garantiza que

$$V[G] \models \forall\, f \in \Psi\, \big(|f \cap g| = \mathfrak{c}\big)\,.$$

Luego, $V[G] \models \lambda \leqslant \mathrm{A}(\mathcal{A})$, tal y como se requería. $\square$

Al lector interesado en resultados de consistencia similares al presentado en el presente capítulo le recomendamos que consulte las secciones 6 y 7 del artículo [2].

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. L. Celis Martínez, *Encajes entre nociones de forcing*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.

[2] K. Ciesielski y A. W. Miller, *Cardinal invariants concerning functions whose sum is almost continuous*, Real Anal. Exchange **20** (1994-5), 657–672.

[3] M. Clapp, *Análisis matemático*, Colección Papirhos, Textos **2**, Instituto de Matemáticas, 2015.

[4] R. Engelking, *General topology*, Segunda edición, Sigma Series in Pure Mathematics, Volume 6, Heldermann Verlag, Berlín, 1989.

[5] H. Friedberg, J. Insel, E. Spence, *Linear Algebra*, Pearson, Fourth edition, 2002.

[6] B. Gamboa de Buen, *¿Qué es una base "adecuada" para un espacio normado completo?*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones **20** (1997) 95–108.

[7] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung*, Math. Ann. **60** (1905) 459-462.

[8] D. H. Falcón Flores, *El Axioma de Determinación*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.

[9] J. A. Gallardo Quiroz, *El Principio Combinatorio de Jensen*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[10] F. Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos, Una introducción*, Aportaciones Matemáticas, Textos **13**, Tercera edición, 2014.

[11] B. Kirchheim y T. Natkaniec, *On universally bad Darboux functions*, Real Anal. Exchange **16** (1990/91), no. 2, 481–486.

[12] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[13] M. A. López Pérez, *Espacios pseudocompletos y de Oxtoby*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[14] T. Natkaniec, Almost continuity, Real Analysis Exchange 17 (1991-92), 462-520.

[15] R. Pichardo Mendoza, *Rudimentos de la teoría de espacios polacos*, Topología y sus aplicaciones 4 (J. J. Angoa Amador, R. Escobedo y M. Ibarra, editores), Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016, pp. 3-26.

[16] J. F. Randolph, *Questions, Discussions, and Notes: Distances Between Points of the Cantor Set*, Amer. Math. Monthly **47** (1940), no. 8, pp. 549–551.

[17] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, Pearson, Fourth edition, 2010.

[18] M. Spivak, *Calculus*, Cuarta edición, Publish or Perish, Houston, 2008.

[19] J. Stallings, *Fixed point theorems for connectivity maps*, Fund. Math. **47** 1959 249–263.

[20] J. Steprāns, *Sums of Darboux and continuous functions*, Fund. Math. **146** (1995), no. 2, 107–120.