UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRUPOS DE LIE MÉTRICOS DE 3 DIMENSIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

LEONEL PÉREZ RUIZ

TUTOR

Pierre Michel Bayard

Ciudad de México 2019

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Apellido Paterno
   Apellido Materno
   Nombre
   Teléfono
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Carrera
   Numero de Cuenta
2. Datos del Tutor
   Grado
   Nombre
   Apellido Paterno
   Apellido Materno
3. Datos del Sinodal 1
   Grado
   Nombre
   Apellido Paterno
   Apellido Materno
4. Datos del Sinodal 2
   Grado
   Nombre
   Apellido Paterno
   Apellido Materno
5. Datos del Sinodal 3
   Grado
   Nombre
   Apellido Paterno
   Apellido Materno
6. Datos del Sinodal 4
   Grado
   Nombre
   Apellido Paterno
   Apellido Materno
7. Datos del Trabajo Escrito
   Titulo
   Subtitulo

   Np. de Paginas
   Año

1. Datos del alumno
   Pérez
   Ruiz
   Leonel
   5525733913
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   310261232
2. Datos del Tutor
   Dr.
   Pierre Michel
   Bayard
3. Datos del Sinodal 1
   Dr.
   Eugenio
   Garnica
   Vigil
4. Datos del Sinodal 2
   Dra.
   Adriana
   Ortiz
   Rodríguez
5. Datos del Sinodal 3
   Dr.
   Federico
   Sánchez
   Bringas
6. Datos del Sinodal 4
   M. en C.
   Berenice
   Zavala
   Jiménez
7. Datos del Trabajo Escrito
   Grupos de Lie Métricos de 3 Dimensiones
   Clasificación de los grupos unimodulares y no unimodulares
   104 p
   2019

Índice general

Introducción

Al combinar dos estructuras categóricas distintas, se puede presentar bastante información para su análisis más profundo, tal es el caso de los *grupos de Lie* los cuales son, al mismo tiempo, una *variedad diferenciable* y un *grupo*. Continuando con estas ideas, se define lo que es el *álgebra de Lie* del grupo, en pocas palabras, se puede decir que es el espacio tangente a su elemento neutro y, bajo un punto de vista más global, se puede ver a dicha álgebra como el conjunto de campos vectoriales del grupo de Lie que son invariantes bajo traslaciones, por convención, izquierdas.

Esta nueva estructura de grupo de Lie tiene información compatible con otras áreas de la geometría diferencial, más específicamente, con la *geometría Riemanniana*. Las *métricas* sobre grupos de Lie obtienen sentido cuando se dice que son *invariantes bajo las traslaciones izquierdas, derechas o ambas*. Los grupos de Lie dotados con una métrica invariante por la izquierda se les llaman *grupos de Lie métricos*.

La categoría de variedades Riemannianas clasifica a las variedades basándose en las isometrías entre ellas; y, la categoría de los grupos y álgebras clasifica basándose en los isomorfismos entre ellos.

Al estudiar los grupos de Lie métricos surge de manera natural el buscar si existe una relación de isomorfismos e isometrías entre dos grupos de Lie, es decir, si el hecho de tener dos grupos isomorfos implica, de alguna u otra forma, que sean isométricos y viceversa. Para responder esta cuestión, se utilizan las propiedades de grupo de Lie y de variedad Riemanniana.

El trabajo de John Milnor [10] presenta de manera general un análisis de los grupos de Lie métricos relacionando sus propiedades geométricas y algebraicas. Describe la clasificación de los grupos de Lie métricos unimodulares y no unimodulares de tres dimensiones con base a las constantes de estructura del álgebra de Lie. Los resultados más importantes de Milnor establecen que existen grupos de Lie no isomorfos que son isométricos.

El artículo de Milnor sirvió de punto de partida para el trabajo de William Hamilton Meeks y Joaquin Pérez [9], en el cual se completa la clasificación de los grupos de Lie métricos de tres dimensiones estableciendo más resultados en dicha clasificación, que son la parte inicial para el estudio de superficies de curvatura media constante en grupos de Lie métricos.

El objetivo de este trabajo es analizar los grupos de Lie métricos de dimensión 3 y su clasificación; los grupos unimodulares y los no unimodulares.

A lo largo de los capítulos se introducen las herramientas suficientes para realizar la clasificación de los grupos de Lie métricos unimodulares y no unimodulares de dimensión tres. Dicha clasificación se basará principalmente en las constantes de estructura del grupo de Lie. La tesis está dividida en cuatro capítulos.

En el primer capítulo titulado *Grupos de Lie* se desarrolla la teoría necesaria de grupos y álgebras de Lie, se incluyen resultados importantes tales como los conocidos teoremas de Lie, también se presenta una breve introducción de los productos semi-directos, se presenta su operación de grupo y se calculan sus constantes de estructura, también se presentan definiciones equivalentes de grupos de Lie unimodulares.

El segundo capítulo se titula *Métricas sobre grupos de Lie*, se desarrollan los conceptos de métricas invariantes por la izquierda y por la derecha, se habla sobre la conexión de Levi Civita y sobre métricas canónicas invariantes en grupos de Lie con estructura de producto semi-directo.

En el tercer capítulo, llamado *Grupos de Lie métricos unimodulares de tres dimensiones*, se habla sobre la relación que existe entre el corchete de Lie y el producto cruz, se deduce cómo son las constantes de estructura y, basándose en los signos de dichas constantes se hace la clasificación de estos grupos de Lie.

El último capítulo se llama *Grupos de Lie métricos no unimodulares de tres dimensiones;* se demuestra que todos estos grupos tienen estructura de producto semi-directo y en base en esta estructura se desarrolla la clasificación.

Capítulo

1

Grupos de Lie

En este capítulo se presenta la teoría general de grupos y álgebras de Lie, también se exponen los teoremas más importantes en la teoría de grupos de Lie, los cuales relacionan y unifican los grupos y las álgebras de Lie. De manera especial, se introduce la noción de grupo de Lie unimodular y no unimodular. Estos últimos corresponden a los grupos con estructura de producto semi-directo.

1.1. Variedad y grupo

Definición 1.1.1 *Se dice que un conjunto G es un grupo de Lie si admite una estructura de variedad suave y además una estructura de grupo tal que la operación de grupo, vista como aplicación $\cdot : G \times G \to G$, y la aplicación $^{-1} : G \to G$ dada por $g \to g^{-1}$ son diferenciables.*

Los siguientes son ejemplos de grupos de Lie, más específicamente, son grupos de matrices dotados con la operación *multiplicación de matrices*. Mediante el *Teorema del valor regular*[1] se puede comprobar que los siguientes

[1] En [3], capítulo 0, sección 4:

grupos admiten una estructura de variedad diferenciable.

Ejemplos:

- El grupo especial lineal:
$$SL(2,\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$
- El grupo especial unitario:
$$SU(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^t = I, \det(A) = 1\}.$$

Los siguientes grupos se analizan con más detalle en la sección de *productos semi-directos*.

Ejemplos:

- El espacio real de dimensión tres con su operación usual:
$$(\mathbb{R}^3, +).$$
- El espacio hiperbólico de dimensión tres o el semiespacio real superior
$$\mathbb{H}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\},$$
este grupo en particular obtiene su estructura de grupo debido a que es isomorfo al producto semi-directo $\mathbb{R}^2 \rtimes_{I_2} \mathbb{R}$ donde I_2 es la matriz identidad. Se analizará en el capitulo 4.
- El cubriente universal del grupo de transformaciones rígidas que preservan la orientación del plano euclidiano:
$$\widetilde{E}(2).$$

Definnición *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un mapeo diferenciable de un conjunto abierto $U \subset$. Un punto $p \in U$ es llamado un punto critico de F si la diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ no es suprayectiva. La imagen $F(p)$ de un punto crítico se conoce como valor crítico de F. Los puntos $a \in \mathbb{R}^m$ que no son valores críticos se conocen como los valores regulares de F. Y si existe un valor regular de F en $\mathbb{R}^m$ entonces $n \geq m$.*
Teorema (Valor regular) *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un mapeo diferenciable de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Supóngase que $a \in \mathbb{R}^m$ es un valor regular de F. Entonces la imagen inversa $F^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie regular de dimensión $n - m$.*

- El grupo Sol$_3$, con la multiplicación de matrices como operación:

$$Sol_3 = \left\{ \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R}) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

- El grupo de Heisenberg con la estructura de grupo dada por la multiplicación de matrices:

$$Nil_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.2. Álgebras de Lie

Con respecto a la notación, de ahora en adelante se denotará la operación de grupo entre dos elementos $x, y \in G$ como xy y al elemento neutro del grupo se le denotará por e. En general, las operaciones de grupos son *no conmutativas*, entonces es necesario introducir la siguiente definición.

Definición 1.2.1 *Dado un grupo de Lie G y un elemento del grupo, $g \in G$, se define la multiplicación por la izquierda y la multiplicación por la derecha como los siguientes mapeos suaves:*

$$L_g : G \to G \quad L_g(a) = ga \tag{1.1}$$

$$R_g : G \to G \quad R_g(a) = ag. \tag{1.2}$$

Observación:
La composición $L_x \circ R_y : G \to G$ dada por

$$L_x \circ R_y(a) = xay$$

también es un mapeo diferenciable para todo $x, y \in G$.

Se denotará al conjunto de campos vectoriales en G como $\mathfrak{X}(G)$ y al conjunto de funciones suaves sobre G como $\mathcal{D}(G)$. Además, para $X \in \mathfrak{X}(G)$ se escribe el vector $X(a) = X_a$ para toda $a \in G$. A continuación se define la noción de un campo vectorial invariante por la izquierda.

Definición 1.2.2 *Sea $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo vectorial sobre un grupo de Lie.*

- *X es un campo vectorial invariante por la izquierda si para todo $g \in G$ $L_{g\,*}X = X$, es decir, si, para todo $a \in G$*

$$X(L_g(a)) = d(L_g)_a(X_a). \tag{1.3}$$

- *X es un campo vectorial invariante por la derecha si para todo $g \in G$ $R_{g\,*}X = X$, es decir, si, para todo $a \in G$*

$$X(R_g(a)) = d(R_g)_a(X_a). \tag{1.4}$$

Ahora, considérese un vector tangente a G en e, es decir, $X_e \in T_eG$, con este vector se puede construir un campo vectorial invariante por la izquierda: sea g un elemento del grupo G y el mapeo multiplicación de g por la izquierda $L_g : G \to G$ como en la ecuación (1.1). La diferencial de este mapeo sobre el elemento neutro e está dada por

$$d(L_g)_e : T_eG :\to T_gG.$$

De esta manera se obtiene que el campo vectorial definido por

$$X_g := d(L_g)_e(X_e) \tag{1.5}$$

para todo $g \in G$ es invariante por la izquierda.

El siguiente lema es parte fundamental para la construcción del álgebra de Lie.

Lemma 1.2.1 *El corchete de Lie entre dos campos invariantes por la izquierda es un campo invariante por la izquierda.*

Demostración. Considérese dos vectores $X_e, Y_e \in T_eG$ tangentes al elemento neutro del grupo, entonces usando la ecuación (1.5), se puede decir que, para todo $g \in G$, X_g y Y_g definen campos vectoriales invariantes por la izquierda, dichos campos están dados por

$$\begin{aligned} X_g &:= d(L_g)_e(X_e) \\ Y_g &:= d(L_g)_e(Y_e). \end{aligned}$$

Ahora, si $f \in \mathcal{D}(G)$, entonces para todo $a, g \in G$ se obtiene que

$$\begin{aligned} dL_a[X,Y]_g(f) &= [X,Y]_g(f \circ L_a) \\ &= X_g(Y(f \circ L_a)) - Y_g(X(f \circ L_a)) \\ &= X_g(dL_a(Y))f - Y_g(dL_a(X))f \\ &= X_g(Y(f)) - Y_g(X(f)) \\ &= [X,Y]_g f, \end{aligned}$$

es decir, el corchete de Lie entre X y Y es un campo vectorial invariante por la izquierda. □

Definición 1.2.3 *Al conjunto $\mathfrak{g}$ de campos vectoriales invariantes por la izquierda de un grupo de Lie G, con la operación $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, se le conoce como el álgebra de Lie del grupo G.*

Ejemplos:
En los últimos ejemplos siguientes el corchete de Lie está dado por el conmutador de matrices, es decir, $[A, B] = AB - BA$.

- El álgebra de Lie de los números reales tiene al corchete de Lie como el conmutador de dos números reales, el cual es idénticamente cero para todo par de elementos del álgebra.
- El álgebra de Lie del grupo especial lineal $SL(2, \mathbb{R})$ es

  $$\mathfrak{sl}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{trace}(A) = 0\},$$

  su corchete de Lie está dado por el conmutador de matrices, es decir, $[A, B] = AB - BA$.
- El álgebra de Lie del grupo especial unitario $SU(2, \mathbb{R})$ es

  $$\mathfrak{su}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = -A, \mathrm{trace}(A) = 0\},$$

  de igual forma, su corchete de Lie es el conmutador de matrices.

Observación:
La manera de construir campos vectoriales invariantes por la izquierda permite dar un isomorfismo entre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y T_eG.

Definición 1.2.4 *Dada una base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G se puede escribir al corchete de Lie de el elemento i-ésimo y el elemento j-ésimo de la base como combinación lineal de los vectores de la base, esto es:*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k \tag{1.6}$$

donde a los coeficientes c_{ij}^k se les llama las constantes de estructura del álgebra de Lie.

Observación:
Si se permutan los elementos e_i y e_j se obtiene lo siguiente:

$$[e_j, e_i] = -[e_i, e_j] = -\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k,$$

esto es, las constantes de estructura cambian de signo. Entonces, para todos los indices i, j, k se cumple

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k. \tag{1.7}$$

1.3. Aplicaciones en grupos de Lie

Definición 1.3.1 *Sea $(G, \cdot)$ un grupo de Lie. Un subgrupo uniparamétrico de G es un homomorfismo $\phi : (\mathbb{R}, +) \to (G, \cdot)$ que cumple $\phi(0) = e$ y $\phi(r + s) = \phi(r) \cdot \phi(s)$ para todo $r, s \in \mathbb{R}$.*

Observación:
Existe una correspondencia uno a uno entre los subgrupos uniparamétricos de G y T_eG: Dado $X \in \mathfrak{g}$ existe un único subgrupo uniparametrico ϕ_X : $(\mathbb{R}, +) \to (G, \cdot)$ que satisface la ecuación diferencial

$$\phi_X'(0) = X. \tag{1.8}$$

De esta forma se puede dar la siguiente definición.

Definición 1.3.2 *Sean $X \in \mathfrak{g}$ y $\phi_X : (\mathbb{R}, +) \to (G, \cdot)$ el subgrupo uniparamétrico de G asociado a X. Se define la aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ como*

$$\exp(X) = \phi_X(1).$$

Mas aún, la aplicación exponencial cumple

$$\exp(tX) = \phi_X(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3.3 *Dados un grupo de Lie* G *y un elemento cualquiera* $g \in G$ *se define el mapeo* $a_g : G \to G$ *como*

$$a_g(h) = ghg^{-1},$$

el cual se conoce como el conjugado de h *por el elemento* g.

Observación:
Dados $g, h, u \in G$ se tiene que

$$\begin{aligned} a_{gh}(u) &= (gh)u(gh)^{-1} \\ &= g(huh^{-1})g^{-1} \\ &= ga_h(u)g^{-1} \\ &= a_g(a_h(u)) \\ &= (a_g \circ a_h)(u). \end{aligned}$$

Además, el mapeo conjugación se puede relacionar con las traslaciones izquierda y derecha de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_g(h) &= L_g \circ R_{g^{-1}}(h) \\ &= R_{g^{-1}} \circ L_g(h) \\ &= ghg^{-1}, \end{aligned}$$

lo que implica que el mapeo conjugación $a_g : G \to G$ es diferenciable sobre G para todo $g \in G$ y tiene sentido definir lo siguiente:

Definición 1.3.4 *Dado el mapeo diferenciable* $a_g : G \to G$ *se define el operador adjunto, o representación adjunta de* G*, como el homomorfismo* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *dado por*

$$\mathrm{Ad}_g := d(a_g)_e : T_eG \to T_eG.$$

Observación:
Dados $g, h \in G$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(gh) &= d(a_{gh})_e \\ &= d(a_g \circ a_h)_e \\ &= d(a_g)_e \circ d(a_h)_e \\ &= \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{Ad}(h). \end{aligned}$$

Definición 1.3.5 *Dada la representación adjunta de G, se define la representación adjunta del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como el homomorfismo* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ *dado por*

$$\mathrm{ad}_X := d(\mathrm{Ad})_e(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Estas representaciones adjuntas del grupo de Lie y del álgebra de Lie son aquellas que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"'] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

Teorema 1.3.1 *Para todo par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{g}$ se satisface la siguiente igualdad:*

$$[X, Y] = ad_X(Y). \tag{1.9}$$

Demostración. Sean $g \in G$ y $Y \in \mathfrak{g}$, entonces se cumple

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_g(Y) &= d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_e(Y) \\ &= d(R_{g^{-1}})_{L_g(e)} \circ d(L_g)_e(Y) \\ &= d(R_{g^{-1}})_g(Y). \end{aligned}$$

Ahora sea $X \in \mathfrak{g}$ y su flujo dado por $x_t = \exp(tX)$ entonces se satisface que $x_t \circ L_y = L_y \circ x_t$; en efecto, sea $a \in G$, evaluando se obtiene que

$$\begin{aligned} x_t \circ L_y(a) &= \exp(tX \circ L_y(a)) \\ &= \exp(tX_{ya}) \\ &= \exp(td(L_y)_a(X_a)) \\ &= y \exp(tX_a) \\ &= L_y \circ x_t(a). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} x_t(y) &= x_t(L_y(e)) \\ &= L_y(x_t(e)) \\ &= yx_t(e) \\ &= R_{x_t(e)}(y) \end{aligned}$$

y entonces las diferenciales satisfacen la igualdad $dx_t = dR_{x_t(e)}$. Por lo tanto, usando la relación[2] del corchete de Lie con la derivada del flujo del campo X sobre el campo Y se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(dx_{-t}(Y)-Y) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(dx_{-t}(Y)-Y) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(dR_{x_{-t}}(Y)-Y) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mathrm{Ad}_{x_t}(Y)-Y) \\ &= \mathrm{ad}_X(Y). \end{aligned}$$

□

En las siguientes secciones, este teorema jugará un papel muy importante debido a que deja ver la estructura del corchete de Lie desde otra perspectiva. Algunas de sus aplicaciones se presentarán al momento de construir la base ortonormal del álgebra de Lie en grupos unimodulares.

1.4. Teoremas fundamentales de Lie

Los teoremas más fundamentales en la teoría de grupos de Lie son los siguientes.

Teorema 1.4.1 *Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe un grupo de Lie G, el cual no necesariamente es único, tal que el álgebra de Lie de G coincide con $\mathfrak{g}$.*

[2]**Teorema** Para dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{g}$ y para el flujo de X $\phi_t : G \to G$ se cumple que

$$[X,Y]_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(d\phi_{-t}\left(Y_{\phi_t(p)}\right) - Y_p\right).$$

Teorema 1.4.2 *Dado un grupo de Lie G con su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y un subgrupo H de G con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ se tiene que $\mathfrak{h}$ es subálgebra de $\mathfrak{g}$. Inversamente, para cada subálgebra $\mathfrak{h}$ del álgebra $\mathfrak{g}$ existe un único subgrupo de Lie conexo H de G tal que su álgebra de Lie es $\mathfrak{h}$. Más aún, las álgebras de Lie de los subgrupos normales de G son ideales en $\mathfrak{g}$.*

Teorema 1.4.3 *Sean dos grupos de Lie G_1, G_2 con álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ respectivamente. Si las álgebras de Lie son isomorfas entonces los grupos son locamente isomorfos. Además, si los grupos de Lie son simplemente conexos entonces son isomorfos.*

Las demostraciones de estos teoremas se puede encontrar en:

- J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk. *Lie Groups.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

- R. Carter and G. Segal & I. Macdonald. *Lectures on Lie groups and Lie Algebras.* London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Vol. 32 1995.

- W. Y. Hsiang. *Lectures on Lie Groups.* World Scientific. Singapore, 2000.

1.5. Grupos de Lie unimodulares

El objetivo de esta parte es presentar la definición de un grupo de Lie unimodular en términos de una medida y dar definiciones equivalentes de un grupo unimodualr que no estén relacionadas con teoría de la medida y sí con las características intrínsecas a los grupos de Lie, más específicamente, con las representaciones adjuntas del grupo y del álgebra.

Una medida sobre un grupo de Lie G es una aplicación $\mu : \mathcal{D}_c(G) \to \mathbb{R}$ definida como
$$\mu(f) = \int_G f dg,$$
donde $\mathcal{D}_c(G)$ es el conjunto de funciones $f : G \to \mathbb{R}$ diferenciables con soporte compacto y dg es una forma diferenciable positiva sobre G. Entonces podemos definir las medidas invariantes como sigue:

Definición 1.5.1 *Una medida invariante por la izquierda en un grupo de Lie G es una aplicación $\mu_\ell : \mathcal{D}_c(G) \to \mathbb{R}$ definida como*

$$\mu_\ell(f) = \int_G f d_\ell(g) \tag{1.10}$$

donde d_ℓ es una 3-forma positiva e invariante por la izquierda de G, es decir, tal que $L_g^*(d_\ell) = d_\ell$ para todo $g \in G$. Esta medida invariante por la izquierda cumple la relación

$$\mu_\ell(f \circ L_g) = \mu_\ell(f) \tag{1.11}$$

para todo $g \in G$ y toda función $f \in \mathcal{D}_c(G)$.

Definición 1.5.2 *Una medida invariante por la derecha en un grupo de Lie G es una aplicación $\mu_r : \mathcal{D}_c(G) \to \mathbb{R}$ definida como*

$$\mu_r(f) = \int_G f d_r(g)$$

donde d_r es una 3-forma positiva e invariante por la derecha de G, es decir, tal que $R_g^*(d_r) = d_r$ para todo $g \in G$. Esta medida invariante por la derecha cumple la relación

$$\mu_r(f \circ R_g) = \mu_r(f)$$

para todo $g \in G$ y toda función $f \in \mathcal{D}_c(G)$.

Definición 1.5.3 *Se dice que un grupo de Lie G es unimodular si se cumple que cualquier medida invariante por la izquierda $\mu_\ell : \mathcal{D}_c(G) \to \mathbb{R}$ también es invariante por la derecha, es decir, $\mu_\ell(f \circ R_g) = \mu_\ell(f)$ para todo $g \in G$ y para toda función $f \in \mathcal{D}_c(G)$.*

El siguiente teorema establece una característica más del comportamiento de un grupo de Lie unimodular y sus operadores autoadjuntos.

Teorema 1.5.1 *La representación adjunta $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ de G satisface que*

$$|\det(Ad_g)| = 1 \tag{1.12}$$

para todo $g \in G$ si y solo si el grupo de Lie G es unimodular.

Demostración. De manera general, dado un difeomorfismo $\Phi : M \to N$ que preserva la orientación entre dos variedades diferenciables de dimensión n y una n-forma positiva ω en N se cumple que

$$\int_M f\Phi^*\omega = \int_N (f\circ\Phi^{-1})\omega \tag{1.13}$$

para toda función $f \in \mathcal{D}_c(M)$.

Se puede relacionar la 3-forma invariante por la derecha y por la izquierda mediante la ecuación[3]

$$d_r g = c\det(\mathrm{Ad}_g)d_\ell g \tag{1.14}$$

para alguna c constante. Más aún, se tiene la ecuación[4]

$$d_\ell(gx) = \det(\mathrm{Ad}_{x^{-1}})d_\ell g, \tag{1.15}$$

de esta forma se puede escribir la 3-forma invariante por la izquierda como

$$d_\ell(ygx) = (L_y\circ R_x)^* d_\ell g \tag{1.16}$$

para todo $x, y \in G$.
Ahora, sea $f \in \mathcal{D}_c(G)$, entonces se puede escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mu_\ell(f\circ R_x) &= \mu_\ell((f\circ R_x)\circ L_e)\\
&= \mu_\ell(f\circ(R_x\circ L_e))\\
&= \int (f\circ(R_x\circ L_e))d_\ell g\\
&= \int f(L_e\circ R_{x^{-1}})^* d_\ell g\\
&= \int f d_\ell(egx^{-1})\\
&= \int f d_\ell(gx^{-1})\\
&= \int f|\det(\mathrm{Ad}_x)|d_\ell g\\
&= |\det(\mathrm{Ad}_x)|\int f d_\ell g\\
&= |\det(\mathrm{Ad}_x)|\mu_\ell(f).
\end{aligned}$$

[3]En [6], *lema 1.2*(pag. 365).
[4]En [6], *corolario 1.3*(pag.366)

Por lo tanto, G es unimodular si y solo si $|\det(\mathrm{Ad}_x)| = 1$ para todo $x \in G$.
$\square$

La validez de este teorema permite establecer una nueva definición de grupo de Lie unimodular equivalente a la antes presentada. Esta nueva definición describe las características de un grupo de Lie unimodular en términos de su operador adjunto y su determinante: un grupo de Lie es unimodualr si (1.12) se cumple. Una consecuencia importante del teorema anterior establece la caracterización de la propiedad unimodular en términos del operador adjunto del álgebra de Lie del grupo:

***Corolario* 1.5.1** *El grupo de Lie G es unimodular si y solo si para todo $X \in \mathfrak{g}$ se cumple que*

$$\mathrm{traza}(ad_X) = 0. \tag{1.17}$$

Demostración. Dado $X \in \mathfrak{g}$ se cumple la propiedad

$$\mathrm{Ad}_{\exp(X)} = \exp(\mathrm{ad}_X),$$

entonces por el teorema anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} 1 &= |\det(\mathrm{Ad}_{\exp(X)})| \\ &= |\det(\exp(\mathrm{ad}_X))| \\ &= e^{\mathrm{traza}(\mathrm{ad}_X)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, G es unimodular si y solo si $e^{\mathrm{traza}(\mathrm{ad}_X)} = 1$, es decir

$$\mathrm{traza}(\mathrm{ad}_X) = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. $\square$

Con este último resultado se lograron varias definiciones para un grupo de Lie unimodular. En resumen, se obtuvo:

$$\begin{aligned} G \text{ es unimodular} &\Leftrightarrow \det(\mathrm{Ad}_x) = 1 \text{ para todo } x \in G \\ &\Leftrightarrow \mathrm{traza}(\mathrm{ad}_X) = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

1.6. Productos semi-directos

Los productos semi-directos son una generalización del producto cartesiano usual entre conjuntos.

Definición 1.6.1 *Dados dos grupos* $(G, \odot)$ *y* $(H, \circledcirc)$ *y un homomorfismo* $\psi : H \to \mathrm{Aut}(G)$*, se define el producto semi-directo de* G *con* H *mediante* ψ*, denotado por* $G \rtimes_\psi H$*, como el conjunto de parejas ordenadas* $(g, h) \in G \times H$ *dotado con la siguiente operación de grupo:*

$$(a, b) \circledast (\alpha, \beta) = (a \odot \psi_b(\alpha), b \circledcirc \beta).$$

En nuestro caso consideraremos a $(G, \odot) = (\mathbb{R}^2, +)$ y $(H, \circledcirc) = (\mathbb{R}, +)$, de esta forma se tiene que $\psi_z(\alpha) = e^{zA}\alpha$ para alguna matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$. Entonces podemos denotar al producto semi-directo de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{R}$ mediante ψ como $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$.Así, la operación de grupo entre dos elementos cualesquiera $(x, y, z),\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ está dada por:

$$(x, y, z)(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{zA} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, z + \gamma \right).$$

Ejemplos:

- Podemos ver al espacio $\mathbb{R}^3$ como producto semi-directo: en efecto, si consideramos a la matriz $A \equiv \overline{0} \in M_2(\mathbb{R})$ entonces $\psi_z = e^{z\overline{0}} = I_2 \in M_2(\mathbb{R})$, donde la operación de este producto semi-directo coincide con la operación de grupo usual de $\mathbb{R}^3$.

- Otro ejemplo interesante aparece al considerar a $A = I_2$, la matriz identidad. Entonces tenemos que $\psi_z(\alpha, \beta) = e^{zI_2} = e^z I_2$ y la operación de grupo está dada por

  $$(x, y, z)(\alpha, \beta, \gamma) = ((x, y) + e^z(\alpha, \beta), z + \gamma).$$

  Este producto semi-directo define la estructura de grupo del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

- Si ahora consideramos $E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mediante el cálculo de la matriz exponencial se puede ver que

  $$\psi_z = e^{zE} = \begin{pmatrix} \cos(z) & -\sin(z) \\ \sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix};$$

  se tiene que $\mathbb{R}^2 \rtimes_E \mathbb{R}$ coincide con el grupo $\widetilde{E}(2)$ con su operación de grupo

  $$(x, y, z)(\alpha, \beta, \gamma) = (x + \alpha\cos(z) - \beta\sin(z), y + \alpha\sin(z) + \beta\cos(z), z + \gamma).$$

- Ahora sea $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces se tiene que

  $$\psi_z = e^{zS} = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 \\ 0 & e^{z} \end{pmatrix}$$

  y por lo tanto $\mathbb{R}^2 \rtimes_S \mathbb{R}$ coincide con el grupo Sol_3 con su operación de grupo dada por

  $$(x, y, z)(\alpha, \beta, \gamma) = ((x, y) + e^{-z}(\alpha, \beta), z + \gamma).$$

- Por último, si se considera $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, se obtiene que

  $$\psi_z = e^{zN} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  entonces $\mathbb{R}^2 \rtimes_N \mathbb{R}$ coincide con el grupo de Heisenberg Nil_3 con su operación usual

  $$(x, y, z)(\alpha, \beta, \gamma) = (x + \alpha + z\beta, y + \beta, z + \gamma).$$

Para estudiar la estructura que posee el álgebra de Lie de un grupo que tiene estructura de producto semi-directo, se construye una base de campos invariantes por la izquierda, la cual se denotará por

$$\{E_1(x, y, z), E_2(x, y, z), E_3(x, y, z)\}.$$

Posteriormente se calculan las constantes de estructura del álgebra de Lie.

Primero, dado el producto semi-directo $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ se denotará la acción como la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y a su matriz exponencial por

$$\begin{aligned} \psi_z &= e^{zA} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\psi_z(\alpha,\beta) &= e^{zA}(\alpha,\beta) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora, se procede a determinar una base ortonormal del álgebra de Lie. Para esto, se toman las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}$, es decir, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $z \in \mathbb{R}$. Entonces se puede denotar a la base canónica de los campos vectoriales de G como $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$.

Sean $p_1, p_2, p_3 \in G$ de la forma $p_1 = (t,0,0)$, $p_2 = (0,t,0)$ y $p_3 = (0,0,t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Fijemos un elemento arbitrario $g = (x,y,z) \in G$.

Al multiplicar g con p_i por la izquierda se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
gp_1 &= (x,y,z)(t,0,0) = ((x,y)+\psi_z(t,0),z), \\
gp_2 &= (x,y,z)(0,t,0) = ((x,y)+\psi_z(0,t),z), \\
gp_3 &= (x,y,z)(0,0,t) = ((x,y)+\psi_z(0,0),z)
\end{aligned}$$

donde en la primara entrada operan elementos de $\mathbb{R}^2$ y en la segunda operan elementos de $\mathbb{R}$. Al usar la definición de $\psi_z(\alpha,\beta)$ en el desarrollo queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
gp_1 &= ((x+ta_{11}(z), y+ta_{21}(z)), z), \\
gp_2 &= ((x+ta_{12}(z), y+ta_{22}(z)), z), \\
gp_3 &= ((0,0), z+t)
\end{aligned}$$

Después, al tomar derivadas evaluadas en $t=0$ se obtiene la base del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G en términos de la base canónica:

$$\begin{aligned}
E_1(x,y,z) &= a_{11}(z)\frac{\partial}{\partial x} + a_{21}(z)\frac{\partial}{\partial y}, \\
E_2(x,y,z) &= a_{12}(z)\frac{\partial}{\partial x} + a_{22}(z)\frac{\partial}{\partial y}, \\
E_3(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Calculando las constantes de estructura del álgebra de Lie generada por la base $\{E_i\}$, se calculará cómo están dados $[E_1,E_2]$, $[E_2,E_3]$ y $[E_3,E_1]$.

Primero, se observa que $E_1(x,y,z)$ y $E_2(x,y,z)$ son los elementos generadores del álgebra de Lie de $\mathbb{R}^2$, entonces es una subalgebra conmutativa de $\mathfrak{g}$ ya que el grupo $(\mathbb{R}^2,+)$ es abeliano. Por lo tanto se tiene que el corchete de Lie entre estos dos campos es idénticamente cero:

$$[E_1(x,y,z), E_2(x,y,z)] = 0.$$

Se denota a la matriz inversa de e^{zA} por

$$e^{-zA} = \begin{pmatrix} a^{11}(z) & a^{12}(z) \\ a^{21}(z) & a^{22}(z) \end{pmatrix}.$$

Mediante un cambio de coordenadas se puede expresar a la base $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ en términos de $\{E_1, E_2\}$ como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial x} = a^{11}(z)E_1 + a^{21}(z)E_2 \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = a^{12}(z)E_1 + a^{22}(z)E_2. \tag{1.19}$$

Dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ se considera la derivada de Lie de Y con respecto a X

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X,Y]$$

y se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [E_3, E_1] &= \left[\frac{\partial}{\partial z}, a_{11}(z)\frac{\partial}{\partial x} + a_{21}(z)\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &= \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial z}}\left(a_{11}(z)\frac{\partial}{\partial x} + a_{21}(z)\frac{\partial}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

al utilizar las propiedades de la derivada de Lie se obtiene que

$$\begin{aligned} [E_3, E_1] &= \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial z}}\left(a_{11}(z)\frac{\partial}{\partial x}\right) + \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial z}}\left(a_{21}(z)\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z}a_{11}(z)\right)\frac{\partial}{\partial x} + a_{11}(z)\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial z}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}a_{21}(z)\right)\frac{\partial}{\partial y} + a_{21}(z)\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial z}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= a'_{11}(z)\frac{\partial}{\partial x} + a'_{21}(z)\frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

después de sustituir las ecuaciones (1.18) y (1.19) en el desarrollo anterior se tiene

$$\begin{aligned}
[E_3, E_1] &= a'_{11}(z)\left(a^{11}(z)E_1 + a^{21}(z)E_2\right) + a'_{21}(z)\left(a^{12}(z)E_1 + a^{22}(z)E_2\right) \\
&= \left(a'_{11}(z)a^{11} + a'_{21}(z)a^{12}\right)E_1 + \left(a'_{11}(z)a^{21} + a'_{21}(z)a^{22}\right)E_2.
\end{aligned}$$

Se observa que los coeficientes que acompañan a E_1 y E_2 corresponden a los coeficientes de la siguiente matriz

$$e^{-zA}\frac{d}{dz}e^{zA} = e^{-zA}e^{zA}A = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Entonces el corchete de Lie entre estos dos campos está dado por

$$[E_3(x,y,z), E_1(x,y,z)] = aE_1(x,y,z) + cE_2(x,y,z).$$

Y, de la misma forma se tiene que

$$[E_3(x,y,z), E_2(x,y,z)] = bE_1(x,y,z) + dE_2(x,y,z).$$

Por lo tanto, el corchete de Lie del producto semi-directo $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ en la base $\{E_1(x,y,z), E_2(x,y,z), E_3(x,y,z)\}$, con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, está dado por

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2] &= 0 \\
[E_3, E_1] &= aE_1 + cE_2 \\
[E_3, E_2] &= bE_1 + dE_2.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Las constantes de estructura buscadas coinciden con las entradas de la matriz A, la cual caracteriza al producto semi-directo $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$.

Las relaciones en (1.20) muestran cómo, en un grupo de Lie con esta estructura de producto semi-directo, las constantes de estructura del álgebra de Lie ayudan a determinar la matriz A y por lo tanto la estructura de grupo. Inversamente, los coeficientes de la matriz A ayudan a determinar la estructura del álgebra de Lie.

Este resultado será muy útil para las clasificaciones que se presentan en los capítulos 3 y 4.

Capítulo 2

Métricas sobre grupos de Lie

El objetivo de este capítulo es presentar los conceptos básicos de la geometría Riemanniana en grupos de Lie y así, trabajar con los grupos de Lie métricos. Se presentan las definiciones de métricas invariantes por la izquierda y por la derecha para un grupo de Lie. Con una métrica invariante por la izquierda, se dota al grupo de una conexión Riemanniana y se calculan las curvaturas. Al final del capítulo, se analizan las métricas invariantes por la izquierda en los grupos de Lie con estructura de producto semi-directo.

2.1. Métricas en grupos de Lie

Se sabe que toda variedad diferenciable admite una métrica, la cual dota a la variedad de una estructura Riemanniana. Una métrica Riemaniana es la asignación de un producto interior a cada espacio tangente de G, esto es,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_g : T_gG \times T_gG \to \mathbb{R}$$

es una forma bilineal, simétrica y definida positiva para todo elemento $g \in G$. Esta asignación varia diferenciablemente sobre todos los puntos de la variedad, en efecto, consideremos una parametrización del grupo de Lie dada por $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to G$ y $\varphi(x_1, x_2, x_3) = p \in G$, entonces la base obtenida por φ de T_pG está dada por $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^3$ donde $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = d\varphi_p(e_i)$ y $\{e_i\}_{i=1}^3$ es la base estándar de $\mathbb{R}^3$. Así, tenemos que la función

$$g_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$$

es diferenciable en U. Más aún, para cualquier par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ diferenciables en una vecindad $V \subseteq G$ se tiene que la función $\langle X, Y \rangle : V \subseteq G \to \mathbb{R}$ es diferenciable.

El $\binom{0}{2}$ tensor $G : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \to \mathcal{D}(G)$ dado por $G(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ se llama tensor métrico. Sus componentes en el marco $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^3$ son los coeficientes g_{ij} de la métrica Riemanniana en ese sistema de coordenadas.

La métrica también suele representarse por el elemento de línea: con las coordenadas descritas anteriormente podemos expresar la métrica como

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Definición 2.1.1 *Sean G y H dos grupos de Lie, ambos dotados con una métrica Riemanniana. Se dice que un difeomorfismo $f : G \to H$ es una isometría si satisface la relación*

$$\langle v, w \rangle_g = \langle df_g(v), df_g(w) \rangle_{f(g)}$$

para todo elemento del grupo $g \in G$ y para todo par de vectores $v, w \in T_gG$.

Se definen las métricas invariantes como sigue:

Definición 2.1.2 *Sea G un grupo de Lie, entonces*

- *La métrica es invariante por la izquierda si $L_g : G \to G$ es una isometría para todo $g \in G$.*
- *La métrica es invariante por la derecha si $R_g : G \to G$ es una isometría para todo $g \in G$.*

Si la métrica es invariante por la izquierda y por la derecha entonces diremos que la métrica es bi-invariante.

Definición 2.1.3 *Un grupo de Lie G dotado con una métrica invariante por la izquierda se conoce como grupo de Lie métrico.*

2.2. Conexión de Levi-Civita sobre un grupo de Lie

Consideremos un grupo de Lie G con una métrica invariante por la izquierda y una base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^3$ de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Nótese que con esta métrica se cumple que

$$X\langle Y, Z\rangle = 0$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, es decir, $\langle Y, Z\rangle$ es constante: sea g un elemento cualquiera del grupo G, entonces para cualesquiera $Y, Z \in \mathfrak{g}$ definidos por la ecuacion (1.5) se cumple

$$\begin{aligned} \langle Y, Z\rangle_g &= \langle Y_g, Z_g\rangle \\ &= \langle d(L_g)_e(Y_e), d(L_g)_e(Z_e)\rangle \\ &= \langle Y_e, Z_e\rangle \\ &= \langle Y, Z\rangle_e. \end{aligned}$$

El teorema de Levi-Civita queda expresado como sigue:

Teorema 2.2.1 *Existe una única conexión afín ∇ que satisface las siguientes propiedades para todo campo vectorial invariante por la izquierda $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:*

- *Es compatible con la métrica, esto es, se cumple*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

- *Es simétrica, es decir,*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Se conoce como la conexión de Levi-Civita o conexión Riemanniana y está dada por la fórmula de Koszul:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle. \tag{2.1}$$

Si se escribe $\alpha_{ijk} = \langle [e_i, e_j], e_k\rangle$, la formula (2.1) queda expresada como sigue:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle &= \langle [e_i, e_j], e_k\rangle - \langle [e_j, e_k], e_i\rangle + \langle [e_k, e_i], e_j\rangle \\ &= \alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos escribir la conexión entre dos elementos de una base ortonormal como

$$\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} (\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij})\, e_k \tag{2.2}$$

y al sustituir cada α_{ijk} se obtiene

$$\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} (\langle [e_i, e_j], e_k\rangle - \langle [e_j, e_k], e_i\rangle + \langle [e_k, e_i], e_j\rangle)\, e_k. \tag{2.3}$$

2.3. Curvatura de grupos de Lie

La curvatura de una variedad Riemannniana es una aplicación multilineal $R : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(G)$ que está dada de la siguiente manera

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2.4}$$

Se define el $\binom{0}{4}$ *tensor de curvatura de Riemann* como la aplicación multilineal $R : \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \times \mathfrak{X}(G) \to \mathcal{D}(G)$ dada por

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= \langle R(X, Y)Z, W\rangle \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, W\rangle \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde sus componentes en el marco $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^{3}$ son los coeficientes

$$\begin{aligned} R_{ijks} &= \sum_n R_{ijk}^n g_{ns} \\ &= \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_s}\right\rangle. \end{aligned}$$

Si se considera la traza del tensor de curvatura de Riemann (2.5), se obtiene el $\binom{0}{2}$ *tensor de curvatura de Ricci*, el cual se denota por $\mathrm{Ric} : T_pG \times T_pG \to \mathcal{D}(G)$ y está dado por

$$\mathrm{Ric}_p(X, Y) = \sum_{i=1}^{3} \langle R(X, Z_i)Y, Z_i\rangle \tag{2.6}$$

donde $\{Z_i(p)\}$ es un marco ortonormal de T_pG. Así, *la forma cuadrática de Ricci* está dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_p(X) &= \mathrm{Ric}_p(X, X)\\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle R(X, Z_i)X, Z_i\rangle\end{aligned} \tag{2.7}$$

y se le conoce como *la curvatura de Ricci en la dirección de* X sobre T_pG. De ahora en adelante se denotará la curvatura de Ricci en la dirección de $X \in \mathfrak{g} = T_eG$ como $\mathrm{Ric}(X)$

2.4. Métrica canónica invariante por la izquierda en un grupo de Lie con estructura de producto semi-directo

Considérese un grupo de Lie G de dimensión 3 con una métrica invariante por la izquierda y una base ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^3$ para su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dicha base está escrita en términos de una base inducida por una carta fija $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^3$. Denotemos $A = M_\partial(\langle,\rangle)$ y $A' = M_E(\langle,\rangle)$ como las matrices con las entradas iguales a las componentes del tensor métrico en términos de las bases $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^3$ y $\{E_i\}_{i=1}^3$ respectivamente. Primero, se observa lo siguiente:

Para un grupo de Lie de dimension 3, se sabe por el teorema de cambio de base, que existe una matriz $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tal que se satisface la igualdad

$$M_E = P^T M_\partial P \tag{2.8}$$

donde

$$P = M\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}, \{E_i\}\right) \tag{2.9}$$

es la matriz de cambio de base que tiene las entradas de los vectores E_i en términos de la base $\frac{\partial}{\partial x_i}$, M_∂ es la matriz que tiene como entradas las componentes de la métrica en términos de la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^3$ y M_E es la matriz que tiene como entradas a las componentes de la métrica en términos de la base $\{E_i\}_{i=1}^3$.

Debido a que $\{E_i\}_{i=1}^3$ es una base ortonormal, $I = M_E$, despejando de la ecuación de cambio de base se obtiene que

$$\begin{aligned} M_\partial &= (P^T)^{-1}P^{-1} \\ &= \left(M^T\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\},\{E_i\}\right)\right)^{-1}\left(M\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\},\{E_i\}\right)\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

De esta forma, usando la ecuación anterior, el elemento de linea se puede escribir como

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{3} [M_\partial]_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \tag{2.11}$$

donde $[M_\partial]_{ij}$ son las componentes de la métrica escrita en la base $\frac{\partial}{\partial x_i}$, dadas por el producto de la matriz inversa transpuesta de P y la inversa de la matriz P en (2.10).

Ahora supóngase que G es un grupo de Lie métrico con estructura de producto semi-directo $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$. En este caso, la base está dada de manera más específica:

$$\begin{aligned} E_1(x,y,z) &= a_{11}(z)\frac{\partial}{\partial x} + a_{21}(z)\frac{\partial}{\partial y}, \\ E_2(x,y,z) &= a_{12}(z)\frac{\partial}{\partial x} + a_{22}(z)\frac{\partial}{\partial y}, \\ E_3(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

y así se tiene que la matriz de cambio de base está dada por

$$\begin{aligned} P &= M\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\},\{E_i\}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) & 0 \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

el primer bloque de esta matriz es el automorfismo $\psi_z = e^{zA}$, entonces al aplicar el resultado (2.10) se obtiene que

$$M_\partial = \begin{pmatrix} (a^{11})^2 + (a^{21})^2 & a^{12}a^{11} + a^{22}a^{21} & 0 \\ a^{12}a^{11} + a^{22}a^{21} & (a^{12})^2 + (a^{22})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, se puede escribir al elemento de línea como

$$\begin{aligned} ds^2 &= [(a^{11}(z))^2 + (a^{21}(z))^2]dx^2 \\ &\quad +[(a^{12}(z))^2 + (a^{22}(z))^2]dy^2 + dz^2 \\ &\quad +[a^{12}(z)a^{11}(z) + a^{22}(z)a^{21}(z)](dx \otimes dy + dy \otimes dx) \\ &= e^{-2\text{traza}(A)z}\Big([a_{21}^2(z) + a_{22}^2(z)]dx^2 + [a_{11}^2(z) + a_{12}^2(z)]dy^2\Big) + dz^2 \\ &\quad -e^{-2\text{traza}(A)z}[a_{11}(z)a_{21}(z) + a_{12}(z)a_{22}(z)](dx \otimes dy + dy \otimes dx). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Grupos de Lie métricos unimodulares de 3 dimensiones

En este capítulo se presenta la clasificación de los grupos de Lie métricos unimodulares de 3 dimensiones. Primero se analizan sus constantes de estructura partiendo de la construcción de un operador lineal que relaciona el producto cruz entro dos elementos del álgebra con el corchete de Lie del álgebra entre los mismos elementos. Después, de manera general, se hacen las construcciones de la conexión, y se determinan los tensores de curvatura de Riemann y de Ricci. Al final del capítulo se presenta la clasificación de los grupos en términos de los signos de sus constantes de estructura.

3.1. Preliminares

En el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G métrico conexo de dimensión 3 se puede definir el producto cruz de la siguiente manera: dados tres campos invariantes por la izquierda $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, la operación producto cruz es tal que se cumple lo siguiente

$$\langle X \times Y, Z\rangle = \det(X, Y, Z).$$

Al definir el tensor de permutaciones o tensor de Levi-Civita como

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk) \text{ es permutación par} \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es permutación impar} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \tag{3.1}$$

se puede tomar la expresión tensorial

$$(X \times Y)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} x_j y_k,$$

x_i, y_i son las componentes de X y Y respectivamente. Esto permite que el grupo de Lie G tenga una orientación positiva de tal forma que el conjunto $\{X, Y, X \times Y\}$ sea una base orientada de $\mathfrak{g}$. Entonces existe un único endomorfismo $\mathfrak{L} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que

$$\mathfrak{L}(X \times Y) = [X, Y] \tag{3.2}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. En efecto, considérese una base ortonormal de $\mathfrak{g}$ orientada positivamente, denotada por $\{e_1, e_2, e_3\}$, entonces se puede definir el endomorfismo $\mathfrak{L} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ como sigue

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(e_1) &:= [e_2, e_3] \\ \mathfrak{L}(e_2) &:= [e_3, e_1] \\ \mathfrak{L}(e_3) &:= [e_1, e_2] \end{aligned} \tag{3.3}$$

y de esta forma se puede garantizar que se cumple

$$\mathfrak{L}(e_i \times e_j) = [e_i, e_j]. \tag{3.4}$$

Por lo tanto, al usar la bilinealidad del producto cruz y del corchete de Lie se obtiene que

$$\mathfrak{L}(X \times Y) = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Esto motiva la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1 *El grupo de Lie G es unimodular si y solo si el operador $\mathfrak{L} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, visto como transformación lineal, es autoadjunto*[1].

[1] En [4], sección 6.4:

Definición 3.1.1 *Sea V un espacio con producto interior, y sea T un operador lineal en V. T se denomina operador autoadjunto o Hermitiano si $T = T^*$. Una matriz A cuadrada $n \times n$ es autoadjunta o Hermitiana si $A = A^*$.*

Demostración. Sea G un grupo de Lie donde la base de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es $\{e_1, e_2, e_3\}$. Entonces

$$\mathfrak{L}(e_i) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} e_j,$$

evaluando $\mathfrak{L}$ en cada e_i se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(e_1) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{1j} e_j &= [e_2, e_3] = \mathrm{ad}_{e_2}(e_3) \\
\mathfrak{L}(e_2) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{2j} e_j &= [e_3, e_1] = \mathrm{ad}_{e_3}(e_1) \\
\mathfrak{L}(e_3) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{3j} e_j &= [e_1, e_2] = \mathrm{ad}_{e_1}(e_2),
\end{aligned}$$

ahora, nótese que

$$\begin{aligned}
-\mathrm{ad}_{e_i}(e_j) &= -[e_i, e_j] \\
&= [e_j, e_i] \\
&= \mathrm{ad}_{e_j}(e_i),
\end{aligned}$$

entonces se obtiene

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^{3} \alpha_{1j} e_j = -\mathrm{ad}_{e_2}(e_3) &= \mathrm{ad}_{e_3}(e_2) \\
-\sum_{j=1}^{3} \alpha_{2j} e_j = -\mathrm{ad}_{e_3}(e_1) &= \mathrm{ad}_{e_1}(e_3) \\
-\sum_{j=1}^{3} \alpha_{3j} e_j = -\mathrm{ad}_{e_1}(e_2) &= \mathrm{ad}_{e_2}(e_1).
\end{aligned}$$

Además, se satisface la relación

$$0 = [e_i, e_i] = \mathrm{ad}_{e_i}(e_i).$$

Reacomodando se obtienen los vectores columna de las matrices ad_{e_i} para $i = 1, 2, 3$ en la base $\{e_i\}$;

- Para ad_{e_1}:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{e_1}(e_1) &= (0,0,0)\\ \mathrm{ad}_{e_1}(e_2) &= (\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33})\\ \mathrm{ad}_{e_1}(e_3) &= -(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})\end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{ad}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{31} & -\alpha_{21} \\ 0 & \alpha_{32} & -\alpha_{22} \\ 0 & \alpha_{33} & -\alpha_{23} \end{pmatrix}.$$

- Para ad_{e_2}:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{e_2}(e_1) &= -(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33})\\ \mathrm{ad}_{e_2}(e_2) &= (0,0,0)\\ \mathrm{ad}_{e_2}(e_3) &= (\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13})\end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{ad}_{e_2} = \begin{pmatrix} -\alpha_{31} & 0 & \alpha_{11} \\ -\alpha_{32} & 0 & \alpha_{12} \\ -\alpha_{33} & 0 & \alpha_{13} \end{pmatrix}.$$

- Para ad_{e_3}:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{e_3}(e_1) &= (\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})\\ \mathrm{ad}_{e_3}(e_2) &= -(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13})\\ \mathrm{ad}_{e_3}(e_3) &= (0,0,0)\end{aligned}$$

luego

$$\mathrm{ad}_{e_3} = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{22} & -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{23} & -\alpha_{13} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{traza}(\mathrm{ad}_{e_1}) &= \alpha_{32}-\alpha_{23}\\ \mathrm{traza}(\mathrm{ad}_{e_2}) &= -\alpha_{31}+\alpha_{13}\\ \mathrm{traza}(\mathrm{ad}_{e_3}) &= \alpha_{12}-\alpha_{21}.\end{aligned}$$

Por hipótesis G es unimodular y esto se cumple si y solo si $\mathrm{traza}(\mathrm{ad}_X)=0$ para todo $X\in\mathfrak{g}$, es decir, G es unimodular si y solo si las componentes fuera de la diagonal en la matriz del operador $\mathfrak{L}$ cumplen que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Por lo tanto, G es unimodular si y solo si el operador $\mathfrak{L} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es autoadjunto[2]. $\square$

3.2. Constantes de estructura del álgebra de Lie de un grupo unimodular de 3 dimensiones

La consecuencia más importante de la proposición anterior es que, si el grupo de Lie es unimodular, existe una base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ formada por vectores propios del operador $\mathfrak{L} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Nuevamente, tomando la orientación positiva, se cumple

$$\begin{aligned}
[E_2, E_3] = \mathfrak{L}(E_2 \times E_3) &= \mathfrak{L}(E_1) = c_1 E_1 \\
[E_3, E_1] = \mathfrak{L}(E_3 \times E_1) &= \mathfrak{L}(E_2) = c_2 E_2 \\
[E_1, E_2] = \mathfrak{L}(E_1 \times E_2) &= \mathfrak{L}(E_3) = c_3 E_3,
\end{aligned}$$

es decir, los valores propios $\{c_i\}_{i=1}^3$ son las constantes de estructura del grupo de Lie métrico unimodular.

Observación:
Las constantes de estructura c_1, c_2 y c_3 son invariantes de la estructura de grupo de Lie métrico, es decir, a la vez son invariantes de la métrica y de la estructura de grupo de Lie. Al cambiar la orientación se cambian todos los signos de las constantes y al cambiar la métrica se cambian las constantes de estructura.

- Considérese $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ entonces se puede definir

$$\begin{aligned}
\Xi_1 &= bcE_1, \\
\Xi_2 &= acE_2, \\
\Xi_3 &= abE_3;
\end{aligned}$$

  ahora considérese una métrica invariante por la izquierda de G tal que $\{\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3\}$ sea base ortonormal. De esta forma se puede ver que

[2] De la definición de operador autoadjunto en [4], se sigue inmediatamente que T es autoadjunto si y solo si la matriz que representa al operador T, escrita en términos de una base ortonormal, es autoadjunta.

las constantes de estructura cambian:

$$\begin{aligned} [\Xi_2, \Xi_3] &= \mathfrak{L}(\Xi_2 \times \Xi_3) \\ &= a^2 bc \mathfrak{L}(E_2 \times E_3) \\ &= a^2 bc \mathfrak{L}(E_1) \\ &= a^2 (bc) c_1 E_1 \\ &= a^2 c_1 \Xi_1. \end{aligned}$$

Las nuevas constantes de estructura son:

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= a^2 c_1, \\ \bar{c}_2 &= b^2 c_2, \\ \bar{c}_3 &= c^2 c_3. \end{aligned}$$

Estas constantes de estructura cambian con respecto a las anteriores pero su signo se mantiene, es decir, la estructura de grupo de Lie se mantiene y se cambia la métrica.

- Al cambiar la orientación de la base, se cambia el signo de la permutación de los índices de dicha base. Se sabe que, con la orientación positiva (orientación inicial), se cumple la relación

$$[E_i, E_j] = \varepsilon^{ijk} c_k E_k$$

donde ε^{ijk} es el tensor de Levi-Civita. Al tomar, por ejemplo, la orientación $\{E_2, E_1, E_3\}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} [E_2, E_1] &= -c_3 E_3 \\ [E_1, E_3] &= -c_2 E_2 \\ [E_3, E_2] &= -c_1 E_1, \end{aligned}$$

esto es, el signo de las tres constantes de estructura cambió.

3.3. Geometría de los grupos de Lie unimodulares

Ahora se calculará el tensor de curvatura de Ricci. Para esto, primero se verá cómo está dada la conexión Riemanniana ∇:

Para ∇_{E_1} se tiene lo siguiente:

- Notése que los términos $\alpha_{ijk} = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle$ son iguales a cero cuando se repite algún indice, entonces por la fórmula de Koszul (2.3) $\nabla_{E_i} E_i = 0$ para todo i. En particular

$$\nabla_{E_1} E_1 = 0.$$

- Al desarrollar la expresión (2.3) para $\nabla_{E_1} E_2$ se obtiene;

$$\begin{aligned} 2\nabla_{E_1} E_2 &= \sum_{k=1}^{3} (\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12}) E_k \\ &= (\alpha_{123} - \alpha_{231} + \alpha_{312}) E_3 \\ &= (\langle [E_1, E_2], E_3 \rangle - \langle [E_2, E_3], E_1 \rangle + \langle [E_3, E_1], E_2 \rangle) E_3 \\ &= (c_3 - c_1 + c_2) E_3. \end{aligned}$$

- Ahora para $\nabla_{E_1} E_3$;

$$\begin{aligned} 2\nabla_{E_1} E_3 &= \sum_{k=1}^{3} (\alpha_{13k} - \alpha_{3k1} + \alpha_{k13}) E_k \\ &= (\alpha_{132} - \alpha_{321} + \alpha_{213}) E_3 \\ &= (\langle [E_1, E_3], E_2 \rangle - \langle [E_3, E_2], E_1 \rangle + \langle [E_2, E_1], E_3 \rangle) E_2 \\ &= -(c_3 - c_1 + c_2) E_2. \end{aligned}$$

De manera similar se obtienen las combinaciones restantes. Por lo que las componentes de la derivada covariante $\nabla_{E_i} E_j$ quedan expresadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1} E_2 &= \frac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3) E_3, \\ \nabla_{E_2} E_3 &= \frac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3) E_1, \\ \nabla_{E_3} E_1 &= \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3) E_2, \\ \nabla_{E_1} E_3 &= -\frac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3) E_2, \\ \nabla_{E_2} E_1 &= -\frac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3) E_3, \\ \nabla_{E_3} E_1 &= -\frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3) E_1, \\ \nabla_{E_i} E_i &= 0 \text{ para todo índice } i. \end{aligned}$$

Así, se definen las nuevas constantes

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3), \tag{3.5}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3), \tag{3.6}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3). \tag{3.7}$$

Entonces las componentes de la derivada covariante son:

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1} E_2 &= \mu_1 E_3\\
\nabla_{E_2} E_3 &= \mu_2 E_1\\
\nabla_{E_3} E_1 &= \mu_3 E_2\\
\nabla_{E_1} E_3 &= -\mu_1 E_2\\
\nabla_{E_2} E_1 &= -\mu_2 E_3\\
\nabla_{E_3} E_1 &= -\mu_3 E_1\\
\nabla_{E_i} E_i &= 0 \text{ para todo índice } i.
\end{aligned}$$

Con respecto a la curvatura de Ricci en la dirección de E_1, por definición está dada por

$$\mathrm{Ric}(E_1) = \sum_{i=1}^{3} \langle \mathrm{R}(E_1, E_i)E_1, E_i\rangle.$$

- El primer término de la suma está dado por

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{1111} &= \mathrm{R}(E_1, E_1, E_1, E_1)\\
&= \langle \mathrm{R}(E_1, E_1)E_1, E_1\rangle\\
&= \langle \nabla_{E_1}\nabla_{E_1}E_1 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_1}E_1 + \nabla_{[E_1,E_1]}E_1, E_1\rangle\\
&= 0.
\end{aligned}$$

- El segundo término de la suma queda expresado como

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{1212} &= \mathrm{R}(E_1, E_2, E_1, E_2)\\
&= \langle \mathrm{R}(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle\\
&= \langle \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + \nabla_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\rangle\\
&= \langle -\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + \nabla_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\rangle\\
&= \langle -\mu_2\nabla_{E_1}E_3 + c_3\nabla_{E_3}E_1, E_2\rangle\\
&= \langle -\mu_2\mu_1E_2 + c_3\mu_3E_2, E_2\rangle\\
&= -\mu_2\mu_1 + c_3\mu_3.
\end{aligned}$$

- Por último, el tercer término de la suma es

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{1313} &= \mathrm{R}(E_1, E_3, E_1, E_3) \\
&= \langle \mathrm{R}(E_1, E_3)E_1, E_3 \rangle \\
&= \langle \nabla_{E_3}\nabla_{E_1}E_1 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_3}E_1 + \nabla_{[E_1,E_3]}E_1, E_3 \rangle \\
&= \langle -\nabla_{E_1}\nabla_{E_3}E_1 + \nabla_{[E_1,E_3]}E_1, E_3 \rangle \\
&= \langle -\mu_3\nabla_{E_1}E_2 - c_2\nabla_{E_2}E_1, E_3 \rangle \\
&= \langle -\mu_3\mu_1E_3 + c_2\mu_2E_3, E_3 \rangle \\
&= -\mu_3\mu_1 + c_2\mu_2.
\end{aligned}$$

Luego, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_1) &= \sum_{i=1}^{3}\langle \mathrm{R}(E_1, E_i)E_1, E_i \rangle \\
&= \langle \mathrm{R}(E_1, E_1)E_1, E_1 \rangle + \langle \mathrm{R}(E_1, E_2)E_1, E_2 \rangle + \langle \mathrm{R}(E_1, E_3)E_1, E_3 \rangle \\
&= 0 - \mu_2\mu_1 + c_3\mu_3 - \mu_3\mu_1 + c_2\mu_2 \\
&= -\mu_1(\mu_2 + \mu_3) + c_2\mu_2 + c_3\mu_3 \\
&= -\frac{1}{2}c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + c_3\mu_3 \\
&= \frac{1}{2}(c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + 2c_2c_3),
\end{aligned}$$

por otro lado

$$2\mu_2\mu_3 = \frac{1}{2}(c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 + 2c_2c_3),$$

por lo tanto

$$\mathrm{Ric}(E_1) = 2\mu_2\mu_3. \tag{3.8}$$

De forma análoga se encuentra que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_2) &= 2\mu_1\mu_3 && (3.9) \\
\mathrm{Ric}(E_3) &= 2\mu_1\mu_2. && (3.10)
\end{aligned}$$

3.4. Clasificación

La clasificación de las estructuras de grupo de los grupos de Lie métricos unimodulares de tres dimensiones se basa en los signos de las constantes de

Signos de c_1, c_2, c_3	Grupo de Lie unimodular
+ + +	$SU(2,\mathbb{C})$
+ + -	$SL(2,\mathbb{R})$
+ + 0	$\widetilde{E}(2)$
+ - 0	Sol_3
+ 0 0	Nil_3
0 0 0	$\mathbb{R}^3$

Cuadro 3.1: Signos de las constantes de estructura.

estructura, los seis posibles casos se muestran en el Cuadro 3.1 y representan a seis posibles álgebras de Lie diferentes. Para comprobar esta afirmación se observará que la signatura de la forma de Killing es diferente.

Definición 3.4.1 *A la función $\mathcal{B} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\mathcal{B}(X,Y) = \operatorname{traza}(\operatorname{ad}_X \circ \operatorname{ad}_Y) \tag{3.11}$$

se le conoce como la forma de Killing del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. $\mathcal{B}$ satisface las siguientes propiedades:

- *Es una forma simétrica y bilineal en $\mathfrak{g}$.*
- *Es* Ad-*invariante, es decir, si G es un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ entonces*

  $$\mathcal{B}(\operatorname{Ad}_g(X), \operatorname{Ad}_g(Y)) = \mathcal{B}(X,Y)$$

  para todo $g \in G$ y para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.
- *Dado un $Z \in \mathfrak{g}$ se cumple que ad_Z es anti-simétrica con respecto a la forma de Killing, esto es*

  $$\mathcal{B}(\operatorname{ad}_Z(X), Y) = -\mathcal{B}(X, \operatorname{ad}_Z(Y))$$

  para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. También se puede escribir como $\mathcal{B}([X,Z],Y) = \mathcal{B}(X,[Z,Y])$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Las componentes de la forma de Killing están dadas por la relación

$$\mathcal{B}_{ij} = \mathcal{B}(E_i, E_j) = \operatorname{traza}(\operatorname{ad}_{E_i} \circ \operatorname{ad}_{E_j}) \tag{3.12}$$

donde $\{E_i\}$ es una base invariante por la izquierda del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. El término dentro de la traza se desarrolla de la siguiente forma:

Sea n un índice tal que $[E_j, E_k] = \varepsilon^{jkn} c_{jk}^n E_n$. Entonces como el álgebra de Lie unimodular es de dimensión tres se puede decir que $n \neq j, k$ y su elección depende de los valores de j y de k. Entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{E_i} \circ \mathrm{ad}_{E_j}(E_k) &= [E_i, [E_j, E_k]] \\ &= [E_i, \varepsilon^{jkn} c_{jk}^n E_n] \\ &= \varepsilon^{jkn} c_{jk}^n [E_i, E_n]. \end{aligned}$$

Después, considérese el índice m tal que $[E_i, E_n] = \varepsilon^{inm} c_{in}^m E_m$, de igual forma se puede decir que $m \neq i, n$ y la elección d m depende de los valores de i y de n. Finalmente se obtiene la expresión:

$$\mathrm{ad}_{E_i} \circ \mathrm{ad}_{E_j}(E_k) = \varepsilon^{inm} \varepsilon^{jkn} c_{in}^m c_{jk}^n E_m \tag{3.13}$$

donde c_{jk}^n es la constante de estructura n-esima obtenida mediante el conmutador de E_j con E_k.

Para obtener las componentes $\mathcal{B}_{ij}$ de la forma de Killing primero se calcularán las matrices $\mathrm{ad}_{E_i} \circ \mathrm{ad}_{E_j}$ para todo par de indices $i, j = 1, 2, 3$ mediante la ecuación (3.13) y la definición del tensor de Levi-Civita (3.1).

- Cuando $i = 1, j = 2$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{E_1} \circ \mathrm{ad}_{E_2}(E_1) &= c_3 c_2 E_2 \\ \mathrm{ad}_{E_1} \circ \mathrm{ad}_{E_2}(E_2) &= (0, 0, 0) \\ \mathrm{ad}_{E_1} \circ \mathrm{ad}_{E_2}(E_3) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

- Cuando $i = 1, j = 3$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{E_1} \circ \mathrm{ad}_{E_3}(E_1) &= (0, 0, 0) \\ \mathrm{ad}_{E_1} \circ \mathrm{ad}_{E_3}(E_2) &= c_2 c_3 E_3 \\ \mathrm{ad}_{E_1} \circ \mathrm{ad}_{E_3}(E_3) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

- Cuando $i = 2, j = 3$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{E_2} \circ \mathrm{ad}_{E_3}(E_1) &= (0, 0, 0) \\ \mathrm{ad}_{E_2} \circ \mathrm{ad}_{E_3}(E_2) &= c_1 c_3 E_3 \\ \mathrm{ad}_{E_2} \circ \mathrm{ad}_{E_3}(E_3) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

- Cuando $i, j = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{E_1} \circ \mathrm{ad}_{E_1}(E_1) &= (0,0,0) \\
\mathrm{ad}_{E_1} \circ \mathrm{ad}_{E_1}(E_2) &= -c_3c_2E_2 \\
\mathrm{ad}_{E_1} \circ \mathrm{ad}_{E_1}(E_3) &= -c_3c_2E_3.
\end{aligned}$$

- Cuando $i, j = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{E_2} \circ \mathrm{ad}_{E_2}(E_1) &= -c_1c_3E_1 \\
\mathrm{ad}_{E_2} \circ \mathrm{ad}_{E_2}(E_2) &= (0,0,0) \\
\mathrm{ad}_{E_2} \circ \mathrm{ad}_{E_2}(E_3) &= -c_1c_3E_3.
\end{aligned}$$

- Cuando $i, j = 3$ tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{E_3} \circ \mathrm{ad}_{E_3}(E_1) &= -c_2c_1E_1 \\
\mathrm{ad}_{E_3} \circ \mathrm{ad}_{E_3}(E_2) &= -c_2c_1E_2 \\
\mathrm{ad}_{E_3} \circ \mathrm{ad}_{E_3}(E_3) &= (0,0,0).
\end{aligned}$$

Obteniendo la traza de cada matriz resultante y usando la simetría de la forma de Killing obtenemos que las componentes están dadas por

$$(\mathcal{B})_{ij} = \begin{pmatrix} -c_2c_3 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1c_3 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1c_2 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Definición 3.4.2 *Llamaremos signatura de una forma cuadrática Υ, denotada por $sig(\Upsilon)$, a la pareja ordenada (σ, ρ) donde σ es el número de elementos positivos y ρ es el número de elementos negativos de la matriz diagonal que representa a Υ en una base ortogonal.*

La signatura de la forma de Killing solo depende de la estructura de grupo de Lie. Por lo tanto, la expresión de la forma de Killing (3.14) muestra que los seis posibles casos del Cuadro 3.1 corresponden a álgebras de Lie que no son isomorfas.

A continuación se estudian los grupos $SU(2,\mathbb{C})$, $SL(2,\mathbb{R})$, $\widetilde{E}(2)$, Sol_3, Nil_3 y $\mathbb{R}^3$ con el fin de mostrar que cada uno de estos grupos corresponde a cada uno de los seis casos del Cuadro 3.1. En la última parte de **3.4.4** *Sol_3*, se hace el cálculo de las matrices $\mathrm{ad}_{\tilde{E}_i}$ y de sus trazas para comprobar que el grupo es unimodular.

3.4.1. $SU(2,\mathbb{C})$

El grupo especial unitario con entradas complejas es el conjunto de matrices

$$SU(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^t = I, \det(A) = 1\}.$$

Dicho grupo es isomorfo a la esfera de dimensión tres $\mathbb{S}^3$ con la estructura dada por los cuaterniones unitarios

$$\{q = t + xi + yj + zk \in \mathfrak{H} \mid ||q|| = 1\},$$

esto mediante el mapeo $\xi : \mathbb{S}^3 \subset \mathfrak{H} \to SU(2,\mathbb{C})$ dado por

$$\begin{aligned} \xi(q) &= \xi(q_1 + q_2 j) \\ &= \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ -\bar{q}_2 & \bar{q}_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$. Escrito en coordenadas toma la forma

$$\xi(q) = \begin{pmatrix} t + xi & y + zi \\ -y + zi & t - xi \end{pmatrix}.$$

La base del álgebra de Lie de $SU(2,\mathbb{C})$, denotada por $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$, está dada por las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Y las relaciones del conmutador, dadas por la multiplicación de matrices, son:

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 2\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2\sigma_2 \quad [\sigma_1, \sigma_2] = 2\sigma_3.$$

es decir, $c_1 = c_2 = c_3 = 2 > 0$. De esta manera, la forma de Killing de $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$ es

$$(\mathcal{B}_{\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})})_{ij} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

y su signatura es

$$sig\left(\mathcal{B}_{\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})}\right) = (0,3).$$

3.4.2. $SL(2,\mathbb{R})$

El grupo especial lineal con entradas reales es el conjunto de matrices

$$SL(2,\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Contiene tres familias de subgrupos uniparamétricos disjuntos que se clasifican en términos del discriminante del polinomio característico. Para una matriz $A \in SL(2,\mathbb{R})$ su polinomio característico es

$$\lambda^2 - \mathrm{traza}(A)\lambda + \det(A)$$

y como $\det(A) = 1$ entonces los valores propios de la matriz A están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{traza}(A) \pm \sqrt{\mathrm{traza}^2(A) - 4}\right).$$

Dependiendo de cuál sea el valor de traza(A) se tendrán pares diferentes de valores propios, a cada par le corresponderá una familia de subgrupos. En efecto, las tres familias de subgrupos están representadas por los casos $|\mathrm{traza}(A)| < 2$, $|\mathrm{traza}(A)| > 2$ o $|\mathrm{traza}(A)| = 2$.

- Subgrupos elípticos: Corresponden a las matrices $A \in SL(2,\mathbb{R})$ con $|\mathrm{traza}(A)| < 2$, es decir, tienen valores propios complejos. En este caso A tiene la forma
$$A = P^{-1} R_\theta P$$
para alguna $P \in GL(2,\mathbb{R})$ y para algún $\theta \in [0, 2\pi)$. La familia
$$(P^{-1} R_\theta P)_{\theta \in [0,2\pi)}$$
es un subgrupo uniparamétrico elíptico.

- Subgrupos parabólicos: Considérese una matriz $A \in SL(2,\mathbb{R})$ tal que $|\mathrm{traza}(A)| = 2$, así sus valores propios son $\lambda = \pm 1$.
  - Si A es diagonalizable, entonces $A = \pm I$.
  - Si A no es diagonalizable, entonces
  $$A = \pm P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P$$
  con $P \in GL(2,\mathbb{R})$ y $t \in \mathbb{R}$. Esto define un subgrupo uniparamétrico parabólico.

- Subgrupos hiperbólicos: Estos subgrupos corresponden a las matrices $A \in SL(2,\mathbb{R})$ con $|\text{traza}(A)| > 2$. Sus valores propios son reales e inversos uno del otro. En este caso A tiene la forma
$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P$$
para algún $\lambda \neq 0$ y $P \in GL(2,\mathbb{R})$. Esto define un subgrupo uniparamétrico hiperbólico.

Para cada familia de subgrupos del grupo $SL(2,\mathbb{R})$ se definen los subgrupos uniparamétricos como sigue:

- $\phi_E : \mathbb{R} \to SL(2,\mathbb{R})$ dado por $\phi_E(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.
- $\phi_P : \mathbb{R} \to SL(2,\mathbb{R})$ dado por $\phi_P(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $\phi_H : \mathbb{R} \to SL(2,\mathbb{R})$ dado por $\phi_H(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

Luego, tomando derivadas y evaluando en $t = 0$ se obtiene
$$\begin{aligned} \phi'_E(0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \phi'_P(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \phi'_H(0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De los cuales, sin pérdida de generalidad se escoge $E_1 = \phi'_H(0)$ y $E_3 = \phi'_E(0)$. Ahora, considerando el producto interior usual de las matrices, se tiene que $\langle \phi'_E(0), \phi'_P(0) \rangle \neq 0$, es decir, no son ortogonales. Entonces sea $E_2 \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cap W^{\perp}$, donde $W \subset \mathfrak{g}$ es el conjunto generado por los elementos E_1 y E_3. Así, se obtiene que
$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El corchete de Lie está dado por

$$\begin{aligned}[E_2, E_3] &= 2E_1\\ [E_3, E_1] &= 2E_2\\ [E_1, E_2] &= -2E_3\end{aligned}$$

es decir, las constantes de estructura son $c_1 = c_2 = 2$ y $c_3 = -2$. Después, usando las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) se obtiene que $\mu_1 = \mu_2 = -1$ y $\mu_3 = 3$ y, usando las formulas de las curvaturas de Ricci (3.8), (3.9) y (3.10) se obtiene que $\mathrm{Ric}(E_1) = \mathrm{Ric}(E_2) = -6$ y $\mathrm{Ric}(E_3) = 2$.

Las componentes de la forma de Killing son

$$(\mathcal{B}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})})_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix},$$

por lo tanto, la signatura de la forma de Killing está dada por

$$sig(\mathcal{B}_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})}) = (2, 1).$$

3.4.3. $\widetilde{E}(2)$

El cubriente universal del grupo de transformaciones rígidas que preservan la orientación del plano euclidiano es un grupo isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_E \mathbb{R}$ donde $E = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ dada por $\psi(z) = \psi_z = e^{zE} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Se sabe que

$$\psi_z = e^{zE} = \begin{pmatrix} \cos(z) & -\sin(z)\\ \sin(z) & \cos(z)\end{pmatrix},$$

así, dos elementos $(x, y, z), (\alpha, \beta, \gamma) \in \widetilde{E}(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes_E \mathbb{R}$ operan de la siguiente manera:

$$(x, y, z)(\alpha, \beta, \gamma) = (x + \alpha\cos(z) - \beta\sin(z),\ y + \alpha\sin(z) + \beta\cos(z),\ z + \gamma).$$

Con esto se puede generar la base del álgebra de Lie de $\widetilde{E}(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes_E \mathbb{R}$, la cual se denotará por $\mathfrak{e}(2)$:

$$\begin{aligned} E_1(x,y,z) &= \cos(z)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(z)\frac{\partial}{\partial y} \\ E_2(x,y,z) &= -\sin(z)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(z)\frac{\partial}{\partial y} \\ E_3(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

y entonces el corchete de Lie entre los elementos de la base queda expresado como

$$\begin{aligned} [E_2, E_3] &= E_1 \\ [E_3, E_1] &= E_2 \\ [E_1, E_2] &= 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto las constantes de estructura son $c_1 = c_2 = 1$ y $c_3 = 0$. Entonces por (3.5), (3.6) y (3.7) $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y $\mu_3 = 1$, luego por (3.8), (3.9) y (3.10) $\mathrm{Ric}(E_1) = \mathrm{Ric}(E_2) = \mathrm{Ric}(E_3) = 0$.

Para describir la familia de métricas sobre este grupos se define ahora $\{\tilde{E}_i\}_{i=1}^3$ donde $\tilde{E}_i = \varepsilon_i E_i$ con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ fijos y $\varepsilon_3 = 1$ entonces

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_2, \tilde{E}_3] &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tilde{E}_1 \\ [\tilde{E}_3, \tilde{E}_1] &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tilde{E}_2 \\ [\tilde{E}_1, \tilde{E}_2] &= 0 \end{aligned}$$

de donde las nuevas constantes de estructura son $c_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, $c_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ y $c_3 = 0$, además se cumple que $c_2 = \frac{1}{c_1}$. Así, $\widetilde{E}(2)$ es isométrico e isomorfo al grupo de Lie $\mathbb{R}^2 \rtimes_{E(c_1)} \mathbb{R}$ con $E(c_1) = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 \\ \frac{1}{c_1} & 0 \end{pmatrix}$.

La familia de métricas del grupo $\widetilde{E}(2)$ está parametrizada por la constante c_1 de la matriz $E(c_1)$.

Con respecto a la signatura, las componentes de la forma de Killing son

$$(\mathcal{B}_{\mathfrak{e}(2)})_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces, la signatura de la forma de Killing es

$$sig(\mathcal{B}_{\mathfrak{e}(2)}) = (0,1).$$

3.4.4. Sol_3

El grupo Sol_3 se puede ver como el conjunto de matrices

$$Sol_3 = \left\{ \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x,y,z \in \mathbb{R} \right\} \subset SL(3,\mathbb{R})$$

dotado con la operación del producto usual de matrices, el cual es un subgrupo del grupo especial lineal real. Además, es un grupo isomorfo al producto semi-directo $\mathbb{R}^2 \rtimes_S \mathbb{R}$ donde $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Así, se define $\psi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ como

$$\psi(z) = e^{zS} = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Dados dos elementos $(x,y,z), (\alpha,\beta,\gamma) \in Sol_3 = \mathbb{R}^2 \rtimes_S \mathbb{R}$, la operación del producto semi-directo es

$$(x,y,z)(\alpha,\beta,\gamma) = (x + e^{-z}\alpha,\ y + e^z\beta,\ z+\gamma).$$

Sea $\mathfrak{sol}_3$ el álgebra de Lie del grupo Sol_3, entonces, por lo anterior, una base ortonormal está dada por

$$\begin{aligned} E_1(x,y,z) &= e^{-z}\frac{\partial}{\partial x} \\ E_2(x,y,z) &= e^{z}\frac{\partial}{\partial y} \\ E_3(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

y el corchete de Lie queda expresado como

$$\begin{aligned} [E_3,E_2] &= E_2 \\ [E_3,E_1] &= -E_1 \\ [E_1,E_2] &= 0, \end{aligned}$$

por lo que las constantes de estructura son $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ y $c_3 = 0$. Entonces $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$ y $\mu_3 = 0$. Luego $\mathrm{Ric}(E_1) = \mathrm{Ric}(E_2) = 0$ y $\mathrm{Ric}(E_3) = -2$.

Ahora, la matriz de cambio de base entre $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ y $\{E_i\}$ es

$$P = \begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces la matriz de la métrica es

$$M_\partial(\langle , \rangle) = \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el elemento de linea queda expresado como

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2.$$

De igual forma que en el grupo $\widetilde{E}(2)$, para describir la familia de métricas se tomará la nueva base del álgebra de Lie:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \varepsilon_1(E_1 + E_2) \\ \tilde{E}_2 &= \varepsilon_2(E_1 - E_2) \\ \tilde{E}_3 &= E_3 \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ son constantes positivas. Entonces el corchete de Lie entre los vectores de esta nueva base es:

$$\begin{aligned} [\tilde{E}_2, \tilde{E}_3] &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tilde{E}_1 \\ [\tilde{E}_3, \tilde{E}_1] &= -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tilde{E}_2 \\ [\tilde{E}_1, \tilde{E}_2] &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma, las nuevas constantes de estructura son $c_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, $c_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{-1}{c_1}$ y $c_3 = 0$. Ahora, reetiquetando $\tilde{E}_i$ por E_i se obtiene que la matriz del producto semi-directo está dada por

$$A(c_1) = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ \frac{-1}{c_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, la familia de métricas en el grupo Sol_3 es descrita por la constante c_1.

Por último, las componentes de la forma de Killing están dadas por

$$(\mathcal{B}_{\mathfrak{sol}_3})_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así, la signatura es

$$sig(\mathcal{B}_{\mathfrak{sol}_3}) = (1,0).$$

Para comprobar que Sol_3 es unimodular considérese la base $\{\tilde{E}_i\}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{sol}_3$ dada por

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \varepsilon_1(E_1 + E_2) \\ \tilde{E}_2 &= \varepsilon_2(E_1 - E_2) \\ \tilde{E}_3 &= E_3, \end{aligned}$$

donde $\{E_i\}$ es la base canónica. Dadas las definiciones (3.3) se puede escribir

$$\mathfrak{L}(\tilde{E}_i) = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} \tilde{E}_j.$$

Siguiendo la demostración de la **Proposición** 3.1.1 se obtienen las matrices:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\tilde{E}_1} &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{31} & -\alpha_{21} \\ 0 & \alpha_{32} & -\alpha_{22} \\ 0 & \alpha_{33} & -\alpha_{23} \end{pmatrix} \\ \mathrm{ad}_{\tilde{E}_2} &= \begin{pmatrix} -\alpha_{31} & 0 & \alpha_{11} \\ -\alpha_{32} & 0 & \alpha_{12} \\ -\alpha_{33} & 0 & \alpha_{13} \end{pmatrix} \\ \mathrm{ad}_{\tilde{E}_3} &= \begin{pmatrix} \alpha_{21} & -\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{22} & -\alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{23} & -\alpha_{13} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

donde $\alpha_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$, $\alpha_{11} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, $\alpha_{22} = \frac{-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ y $\alpha_{33} = 0$. Por lo que las matrices son

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\tilde{E}_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{22} \\ 0 & \alpha_{33} & 0 \end{pmatrix} \\
\mathrm{ad}_{\tilde{E}_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{11} \\ 0 & 0 & \\ -\alpha_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathrm{ad}_{\tilde{E}_3} &= \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

las cuales satisfacen la condición $\mathrm{traza}(\mathrm{ad}_{\tilde{E}_i}) = 0$.

3.4.5. Nil_3

El grupo Nilpotente, o grupo de Heisenberg, está dado por el conjunto de matrices

$$Nil_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dicho grupo, dotado con la multiplicación de matrices, es isomorfo al producto semi-directo $\mathbb{R}_2 \rtimes_N \mathbb{R}$ donde $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y se define $\psi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ como $\psi(z) = e^{zN} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La operación del producto semi-directo $\mathbb{R}_2 \rtimes_N \mathbb{R} = Nil_3$ es

$$(x, y, z)(\alpha, \beta, \gamma) = (x + \alpha + z\beta,\ y + \beta,\ z + \gamma),$$

o en términos de matrices queda expresada como

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + \alpha + z\beta & z + \gamma \\ 0 & 1 & y + \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para todo $(x, y, z), (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_2 \rtimes_N \mathbb{R} = Nil_3$.

Ahora, sea $\mathfrak{nil}_3$ el álgebra de Lie del grupo Nil_3, entonces una base queda dada por

$$\begin{aligned} E_1(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x} \\ E_2(x,y,z) &= z\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ E_3(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

y el corchete de Lie entre estos elementos queda expresado por

$$\begin{aligned} [E_2, E_3] &= -E_1 \\ [E_3, E_1] &= 0 \\ [E_1, E_2] &= 0; \end{aligned}$$

entonces $c_1 = -1$ y $c_2 = c_3 = 0$. Después, $\mu_1 = \frac{1}{2}$ y $\mu_2 = \mu_3 = \frac{-1}{2}$. Así, la curvatura de Ricci es $\mathrm{Ric}(E_1) = \frac{1}{2}$ y $\mathrm{Ric}(E_2) = \mathrm{Ric}(E_3) = \frac{-1}{2}$.

La matriz de cambio de base entre la base $\{E_i\}$ y la base dada por la carta es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces, la métrica es

$$M_\partial(\langle,\rangle) = \begin{pmatrix} 1 & -z & 0 \\ -z & 1+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, el elemento de linea es

$$ds^2 = (dx - zdy)^2 + dy^2 + dz^2.$$

Para este caso, las componentes de la forma de Killing son idénticamente cero, esto es

$$(\mathcal{B}_{\mathfrak{nil}_3})_{ij} = \bar{0},$$

la matriz con todas las entradas cero, entonces, la signatura es

$$sig(\mathcal{B}_{\mathfrak{nil}_3}) = (0,0).$$

3.4.6. $\mathbb{R}^3$

El espacio real de tres dimensiones $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de ternas tales que cada entrada es un número real. $\mathbb{R}^3$ tiene estructura de grupo con la operación *suma de vectores*. Este grupo es isomorfo al producto semi-directo $\mathbb{R}^2 \rtimes_{\bar{0}_{2\times 2}} \mathbb{R}$ donde $\bar{0}_{2\times 2} \in M_2(\mathbb{R})$ es la matriz con entradas iguales a cero. Con esta estructura de producto semi-directo, se tiene que $\psi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ está definida como $\psi_z = e^{z\bar{0}_{2\times 2}} = I_{2\times 2}$. La operación del producto semi-directo coincide con la operación usual de $\mathbb{R}^3$.

La base del álgebra de Lie de $\mathbb{R}^3$ coincide con la base usual salvo un término que multiplica a los vectores

$$\begin{aligned} E_1(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x} \\ E_2(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y} \\ E_3(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Luego, los corchetes satisfacen la relación $[E_i, E_j] = 0$ para todo $i, j = 1, 2, 3$, así, las constantes de estructura son $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Luego $\mu_i = 0$ y $\mathrm{Ric}(E_i) = 0$ para toda $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto, el álgebra de Lie del grupo $\mathbb{R}^3$ es conmutativa.

De igual forma, las componentes de la forma de Killing son iguales a cero

$$(\mathcal{B}_{\mathfrak{r}^3})_{ij} = \bar{0},$$

es decir, la signatura es

$$sig(\mathcal{B}_{\mathfrak{r}^3}) = (0, 0).$$

3.5. Conclusiones

En la sección 3.2 de este trabajo se establece que, cuando el valor de la constante de estructura cambia, se cambia la métrica en el grupo de Lie. Los posibles grupos de Lie unimodulares y los signos de sus constantes de estructura están descritos en el Cuadro 3.1.

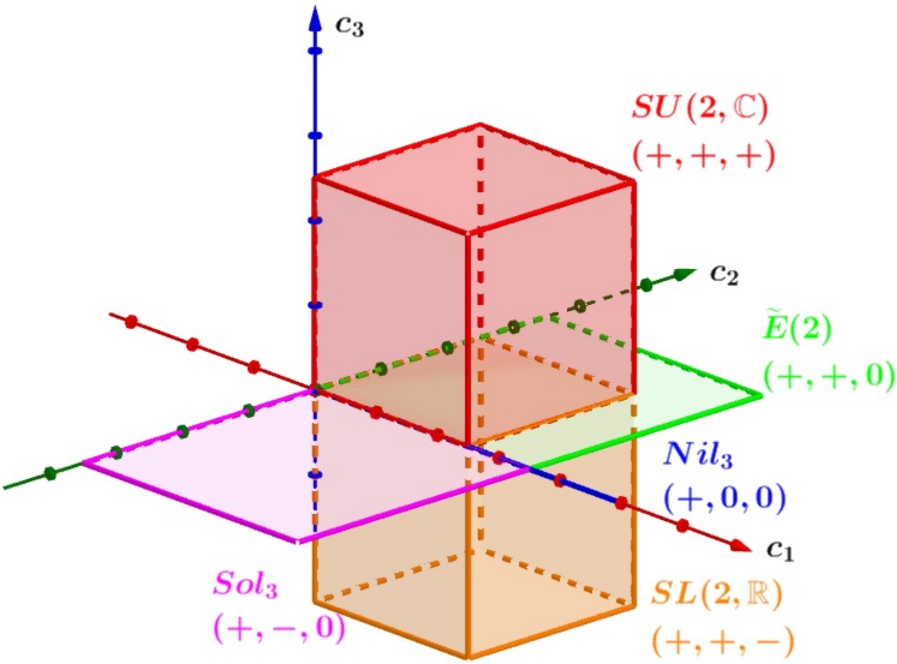

Figura 3.1: Representación de los grupos de Lie métricos unimodulares de tres dimensiones.

La Figura 3.5 Es la representación pictórica del espacio Moduli de los grupos de Lie métricos unimodulares. Los conjuntos que le corresponden a cada grupo son:

- $SU(2,\mathbb{C})$: $\{(c_1,c_2,c_3)|c_i > 0 \text{ para } i = 1,2,3\}$.
- $SL(2,\mathbb{R})$: $\{(c_1,c_2,c_3)|c_1,c_2 > 0 \text{ y } c_3 < 0\}$.
- $\widetilde{E}(2)(2)$: $\{(c_1,c_2,c_3)|c_1,c_2 > 0 \text{ y } c_3 = 0\}$.
- Sol_3: $\{(c_1,c_2,c_3)|c_1 > 0,\ c_2 < 0 \text{ y } c_3 = 0\}$.
- Nil_3: $\{(c_1,c_2,c_3)|c_1 > 0 \text{ y } c_2 = c_3 = 0\}$.
- $\mathbb{R}^3$: El origen, $(c_1,c_2,c_3) = (0,0,0)$.

Capítulo 4

Grupos de Lie métricos no unimodulares de 3 dimensiones

En el presente capítulo se exponen resultados importantes acerca de los grupos de Lie no unimodulares de tres dimensiones. El *teorema* 4.1.1 establece que estos grupos de Lie tienen la estructura de producto semi-directo. El *teorema* 4.2.1 muestra la relación del determinante de la matriz del producto semi-directo y la curvatura del grupo. Como conclusión, el *teorema* 4.3.1 clasifica los grupos de Lie no unimodualares en términos de cómo es su matriz de producto semi-directo, si es múltiplo de la matriz identidad o si es diferente. Finalmente, el *teorema de Milnor* 4.3.2 establece condiciones necesarias y suficientes para que los grupos de Lie no unimodulares admitan una métrica invariante por la izquierda con signaturas específicas en la forma cuadrática de Ricci y se establece bajo qué condiciones existen métricas invariantes de curvatura constante. En particular, se concluye que existen grupos de Lie métricos no isomorfos que son isométricos.

4.1. Caracterización de los grupos de Lie métricos no unimodulares

Definición 4.1.1 *Sea $\mathfrak{m}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$ un subespacio vectorial de $\mathfrak{m}$.*

- *$\mathfrak{n}$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{m}$ si $[X, Y] \in \mathfrak{n}$ para todo par $X, Y \in \mathfrak{n}$*
- *Se dice que $\mathfrak{n}$ es un ideal de $\mathfrak{m}$ si se cumple que $[X, Y] \in \mathfrak{n}$ para todo $Y \in \mathfrak{n}$ y $X \in \mathfrak{m}$.*

Proposición 4.1.1 *La aplicación lineal $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\varphi(X) = \mathrm{traza}(\mathrm{ad}_X) \tag{4.1}$$

es un homomorfismo entre álgebras de Lie. Y al conjunto

$$ker(\varphi) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \varphi(X) = \mathrm{traza}(\mathrm{ad}_X) = 0\}$$

se le conoce como el kernel unimodular, se denota por $\mathfrak{u} = ker(\varphi)$. Más aún, $\mathfrak{u}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$

Demostración. Primero, como G es no unimodular, entonces, por el *Corolario* 1.5.1, existe un campo vectorial invariante por la izquierda $X \in \mathfrak{g}$ tal que no satisface la ecuación (1.17), es decir, traza$(ad_X) \neq 0$, entonces la aplicación $\varphi \neq 0$. Ahora, debido a que ad es una representación, para todo par de campos invariantes por la izquierda $X, Y \in \mathfrak{g}$ se satisface la relación

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X, \tag{4.2}$$

entonces

$$\mathrm{traza}(\mathrm{ad}_{[X,Y]}) = \mathrm{traza}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_Y) - \mathrm{traza}(\mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_X) = 0.$$

De esta forma se tiene que φ es un homomorfismo de álgebras de Lie. Más aún, la relación anterior implica que $[X, Y] \in \mathfrak{u}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Y en particular $\mathfrak{u}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. □

Observación:

El kernel unimodular $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ de un grupo de Lie métrico no unimodular de dimensión 3 es de dimensión 2: Al ser $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ un homomorfismo entre álgebras de Lie se tiene que su imagen es $Im(\varphi) = \mathbb{R}$, entonces por el teorema de la dimensión de espacios vectoriales[1] se tiene:

$$dim(\mathfrak{g}) = dim(Im(\varphi)) + dim(ker(\varphi))$$

por lo que $dim(ker(\varphi)) = dim(\mathfrak{u}) = 2$.
El siguiente teorema presenta la estructura que todo grupo no unimodular posee.

Teorema 4.1.1 (Caracterización) *Todo grupo de Lie métrico, simplemente conexo, 3-dimensional, no unimodular es isomorfo e isométrico a un producto semi-directro $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ con su métrica canónica. Donde $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ determina la relación de los corchetes de Lie*

$$\begin{aligned} [E_3, E_1] &= \alpha E_1 + \gamma E_2 \\ [E_3, E_2] &= \beta E_1 + \delta E_2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

con traza$(A) = \alpha + \delta \neq 0$.

Demostración. Considérese un grupo de Lie métrico G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ generada por una base ortonormal de campos vectoriales $\{E_i(x, y, z)\}_{i=1}^3$. Como el kernel unimodular es de dimensión 2, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $E_1, E_2 \in \mathfrak{u}$ y $E_3 \in \mathfrak{u}^\perp$.

Con respecto al corchete de Lie, se sabe que $[X, Y] \in \mathfrak{u}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, en particular, se tiene que $[E_1, E_2],\ [E_2, E_3],\ [E_3, E_1] \in \mathfrak{u}$, y entonces se cumple que

$$[E_1, E_2],\ [E_2, E_3],\ [E_3, E_1] \perp E_3.$$

[1]**Teorema (Dimensión de espacios vectoriales)** *Sean dos espacios vectoriales V y W, considérese una transformación lineal $T : V \to W$. Si V es dimensionalmente finito, entones*

$$dim(Im(T)) + dim(ker(T)) = dim(V).$$

Por otro lado, como $E_1, E_2 \in \mathfrak{u}$ se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{traza}(ad_{E_1}) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle ad_{E_1}(E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle [E_1, E_i], E_i \rangle \\ &= \langle [E_1, E_1], E_1 \rangle + \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle + \langle [E_1, E_3], E_3 \rangle \\ &= \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle, \end{aligned}$$

de igual forma

$$\begin{aligned} 0 &= \text{traza}(ad_{E_2}) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle ad_{E_2}(E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle [E_2, E_i], E_i \rangle \\ &= \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle + \langle [E_2, E_2], E_2 \rangle + \langle [E_2, E_3], E_3 \rangle \\ &= \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle. \end{aligned}$$

En resumen, se tiene que

$$\langle [E_1, E_2], E_1 \rangle = \langle [E_1, E_2], E_2 \rangle = \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle = 0$$

por lo tanto

$$[E_1, E_2] = 0,$$

es decir, la subalgebra de Lie $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ es conmutativa. Por los teoremas fundamentales de Lie[2] el ideal conmutativo $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ es isomorfo al álgebra del grupo $\mathbb{R}^2$ y además le corresponde un único subgrupo de Lie abeliano y conexo $H \subset G$ el cual es isomorfo al grupo $\mathbb{R}^2$. De igual forma se tiene que el subgrupo $F \subset G$ asociado a la subalgebra de Lie $\mathfrak{u}^\perp$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Finalmente, como $[E_3, E_1], [E_3, E_2] \in \mathfrak{u}$ y son no nulos, se pueden escribir en términos de E_1 y E_2:

$$\begin{aligned} [E_3, E_1] &= \alpha E_1 + \gamma E_2 \\ [E_3, E_2] &= \beta E_1 + \delta E_2 \end{aligned}$$

[2] ***Teoremas 1.4.0.1, 1.4.0.2*** y ***1.4.0.3***

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Notese que

$$\begin{aligned} 0 &\neq \operatorname{traza}(\operatorname{ad}_{E_3}) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle ad_{E_3}(E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle [E_3, E_i], E_i \rangle \\ &= \langle [E_3, E_1], E_1 \rangle + \langle [E_3, E_2], E_2 \rangle + \langle [E_3, E_3], E_3 \rangle \\ &= \langle \alpha E_1 + \gamma E_2, E_1 \rangle + \langle \beta E_1 + \delta E_2, E_2 \rangle \\ &= \alpha + \delta. \end{aligned}$$

De esta forma, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

con $\operatorname{traza}(A) = \alpha + \delta \neq 0$, determina el grupo de Lie métrico no unimodular, es decir,

$$G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}.$$

$\square$

Ahora, al ser el grupo G no unimodular, los corchetes de Lie entre los elementos de la base del álgebra de Lie tienen conmutadores más generales que en el caso unimodular. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.1.2 *Las constantes de estructura de un grupo de Lie G de dimensión n están dadas por la fórmula*

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k E_k \tag{4.4}$$

para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$. En el caso de los grupos de Lie no unimodulares de tres dimensiones se tiene la ecuación

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{2} c_{ij}^k E_k \tag{4.5}$$

donde $c_{31}^1 = \alpha$, $c_{31}^2 = \gamma$, $c_{32}^1 = \beta$, $c_{32}^2 = \delta$ y $c_{ij}^k = 0$ en otro caso.

La siguiente definición[3] y la siguiente proposición[4] son herramientas para el análisis de la geometría Riemanniana de los grupos de Lie no unimodulares.

Definición 4.1.3 *Se define el operador lineal $L : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}$ por*

$$L(X) = \mathrm{ad}_{E_3}(X) = [E_3, X] \tag{4.6}$$

y su parte autoadjunta S por

$$S(X) = \frac{1}{2}(L + L^*)(X) \tag{4.7}$$

donde L^* es la transformación adjunta de L.

Proposición 4.1.2 *Sea G un grupo de Lie métrico, donde su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es tal que contiene un ideal $\mathfrak{u}$ de dimensión 2 que es asociado a un subgrupo normal $U \subset G$. Considérese en U la métrica inducida de G y sea $b \in \mathfrak{u}^\perp$ tal que $L(u) = [b, u]$ para cada $u \in \mathfrak{g}$. Si ∇ denota la conexión Riemanniana de G y $\overline{\nabla}$ denota la conexión Riemanniana de U con la métrica inducida, entonces:*

- *El operador ∇_b satisface las igualdades*

$$\nabla_b b = 0 \tag{4.8}$$

$$\nabla_b u = \frac{1}{2}(L - L^*)(u) \tag{4.9}$$

  para cada $u \in \mathfrak{u}$.

- *De igual forma, el operador ∇_u satisface las igualdades*

$$\nabla_u b = -S(u) \tag{4.10}$$

$$\nabla_u v = \overline{\nabla}_u v + \langle S(u), v \rangle b \tag{4.11}$$

  para cada $u, v \in \mathfrak{u}$.

[3] En [10], pagina 311

[4] La demostración de esta proposición se hace con un cálculo directo. El resumen de dicha demostración está en [10] pagina 312.

4.2. Clasificación de los grupos de Lie métricos no unimodulares

Antes de avanzar en la clasificación de estos grupos, primero se establecen los invariantes que esta categoría satisface. El siguiente lema muestra que la traza y el determinante de la matriz del producto semi-directo son invariantes bajo isomorfismos de álgebras de Lie.

Lemma 4.2.1 *La traza y el determinante de la matriz asociada al producto semi-directo de un grupo de Lie no unimodular son invariantes bajo isomorfismos de álgebras de Lie.*

Demostración. Sean dos grupos de Lie no unimodulares $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ y $H = \mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$. Considérese un isomorfismo de álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$; dicho isomorfismo satisface la siguiente condición entre corchetes:

$$[f(X), f(Y)]_{\mathfrak{h}} = f([X, Y]_{\mathfrak{g}}) \tag{4.12}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.
Debido a la estructura de producto semi-directo del grupo de Lie G, se puede calcular el corchete de Lie entre $f(E_3)$ y $f(E_1)$ en el álgebra de Lie de H mediante las ecuaciones (4.3)

$$\begin{aligned}
[f(E_3), f(E_1)]_{\mathfrak{h}} &= f([E_3, E_1]_{\mathfrak{g}}) \\
&= f(\alpha E_1 + \gamma E_2) \\
&= \alpha f(E_1) + \gamma f(E_2).
\end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento se tiene que el corchete de Lie entre $f(E_3)$ y $f(E_2)$ tiene la expresión:

$$[f(E_3), f(E_2)]_{\mathfrak{h}} = \beta f(E_1) + \delta f(E_2),$$

entonces las matrices de los grupos $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ y $H = \mathbb{R}^2 \rtimes_B \mathbb{R}$ que representan al producto semi-directo, son las mismas, es decir $A = B$. Por lo tanto $\det(A) = \det(B)$ y $\mathrm{traza}(A) = \mathrm{traza}(B)$. □

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para determinar a los grupos de Lie no unimodulares.

Teorema 4.2.1 *La traza y el determinante de la matriz A del producto semi-directo, son suficientes para determinar el álgebra de Lie y al grupo no unimodular.*

Demostración. Considérese el operador lineal $L : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}$ dado por $L(X) = [E_3, X]$. Considérese el caso no trivial $A \neq \alpha I$. Entonces si $e_1 \in \mathfrak{u}$ está dado por $e_1 = aE_1 + bE_2$ con $a, b \in \mathbb{R}$, existe $e_2 \in \mathfrak{u}$ tal que el conjunto $\{e_1, e_2\}$ es linealmente independiente. En efecto, sea $e_2 = L(e_1)$, entonces

$$\begin{aligned} e_2 &= L(e_1) \\ &= [E_3, e_1] \\ &= [E_3, aE_1 + bE_2] \\ &= (a\alpha + b\beta)E_1 + (a\gamma + b\delta)E_2; \end{aligned}$$

como $\beta, \gamma \neq 0$ y $\alpha, \delta \neq 1$ se da la independencia lineal entre e_1 y $e_2 = L(e_1)$ y por lo tanto $\{e_1, e_2\}$ es una base de $\mathfrak{u}$.
En cuanto al operador lineal L, su matriz en la base $\{e_i\}$ está dada de la siguiente forma:

- Para la primera columna, se tiene que

$$L(e_1) = 0e_1 + e_2.$$

- Para la segunda columna, se desarrolla

$$\begin{aligned} L(e_2) &= [E_3, (a\alpha + b\beta)E_1 + (a\gamma + b\delta)E_2] \\ &= (a\alpha + b\beta)[E_3, E_1] + (a\gamma + b\delta)[E_3, E_2] \\ &= (a\alpha + b\beta)(\alpha E_1 + \gamma E_2) + (a\gamma + b\delta)(\beta E_1 + \delta E_2). \end{aligned}$$

  Desarrollando los paréntesis y factorizando se obtiene

$$\begin{aligned} L(e_2) &= (a\alpha^2 + b\beta\alpha + a\gamma\beta + b\delta\beta)E_1 \\ &\quad +(a\alpha\gamma + b\beta\gamma + a\gamma\delta + b\delta^2)E_2 \\ &= [(\alpha + \delta)(a\alpha + b\beta) - (a\alpha\delta - a\beta\gamma)]E_1 \\ &\quad +[(\alpha + \delta)(a\gamma + b\delta) - (b\alpha\delta - b\beta\gamma)]E_2 \\ &= -(a\alpha\delta - a\beta\gamma)E_1 - (b\alpha\delta - b\beta\gamma)E_2 \\ &\quad +(\alpha + \delta)(a\alpha + b\beta)E_1 + (\alpha + \delta)(a\gamma + b\delta)E_2 \\ &= -(\alpha\delta - \beta\gamma)(aE_1 + bE_2) \\ &\quad +(\alpha + \delta)[(a\alpha + b\beta)E_1 + (a\gamma + b\delta)E_2] \\ &= -(\alpha\delta - \beta\gamma)e_1 + (\alpha + \delta)e_2, \end{aligned}$$

  es decir

$$L(e_2) = -De_1 + Te_2 \tag{4.13}$$

  donde $T = \text{traza}(A)$ y $D = \det(A)$.

Entonces, la matriz del operador L en la nueva base es

$$[L]_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ 1 & T \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Se demostró que las constantes T y D son suficientes para determinar al álgebra de Lie y, por los teoremas fundamentales de Lie[5], dichas constantes también son suficientes para determinar al grupo G. Lo anterior se logra bajo un isomorfismo de álgebras de Lie o un isomorfismo de grupos de Lie. La ecuación (4.14) describe la matriz del producto semi-directo $\mathbb{R}^2 \rtimes_{[L]_{e_i}} \mathbb{R}$ isomorfo y con álgebra de Lie isomorfa al producto semi-directo $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$. $\square$

4.2.1. Caso 1. $A = \alpha I_2$

En el caso de los grupos de Lie no unimodulares donde su matriz del producto semi-directo sea múltiplo de la matriz identidad se tiene que las constantes de estructura son $\delta = \beta = 0$ y $\gamma = \alpha$. En este caso, por la relación de corchetes en productos semi-directos el corchete de Lie del álgebra $\mathfrak{g}$ queda dado por la relación (4.3)

$$[E_3, E_i] = \alpha E_i$$

para $i = 1, 2$.

Por otra parte, al considerar en la definición 4.1.3 del operador lineal $L : \mathfrak{u} \to \mathfrak{u}$ en (4.6), la imagen por L de cualquier elemento de la base que genera a $\mathfrak{u}$ se escribe como múltiplo de sí mismo

$$L(E_i) = \alpha E_i. \tag{4.15}$$

Más aún, el operador lineal L es autoadjunto, en efecto, cumple lo siguiente para i, j indices que toman valores iguales a 1 y 2:

$$\begin{aligned} \langle E_i, L(E_j)\rangle &= \langle E_i, \alpha E_j\rangle \\ &= \langle \alpha E_i, E_j\rangle \\ &= \langle L(E_i), E_j\rangle, \end{aligned}$$

de esta forma

$$L = L^*. \tag{4.16}$$

[5] ***Teoremas 1.4.0.1, 1.4.0.2*** y ***1.4.0.3***

Luego

$$S = \frac{1}{2}(L + L^*) = L. \tag{4.17}$$

Determinación de la conexión Riemanniana

Con base en la *Proposición 4.1.2*, la conexión Riemanniana del grupo de Lie métrico se puede expresar como sigue:

- Con respecto al operador ∇_{E_3}, por la ecuación (4.9) y debido a que $L = L^*$, se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla_{E_3} E_i &= \frac{1}{2}(L - L^*)(E_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  para $i = 1, 2$, por lo tanto, usando la linealidad de la conexión Riemanniana, se cumple que

$$\nabla_b = 0 \tag{4.18}$$

  para todo $b \in \mathfrak{u}^{\perp}$.

- De igual forma, para $i = 1, 2$, el operador ∇_u cumple lo siguiente para algún $\bar{z} = \sum_{j=1}^{3} z_j E_j \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \nabla_u \bar{z} &= \nabla_u \sum_{j=1}^{3} z_j E_j \\ &= z_3 \nabla_u E_3 + z_2 \nabla_u E_2 + z_1 \nabla_u E_1. \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (4.10),(4.11) y (4.17) se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_u \bar{z}, E_3 \rangle &= \Big\langle - z_3 S(u) + z_2 \left(\overline{\nabla}_u E_2 + \langle S(u), E_2 \rangle b \right) \\
&\quad + z_1 \left(\overline{\nabla}_u E_1 + \langle S(u), E_1 \rangle E_3 \right), E_3 \Big\rangle \\
&= \Big\langle - z_3 L(u) + z_2 \left(\overline{\nabla}_u E_2 + \langle L(u), E_2 \rangle b \right) \\
&\quad + z_1 \left(\overline{\nabla}_u E_1 + \langle L(u), E_1 \rangle b \right), E_3 \Big\rangle \\
&= \Big\langle - z_3 L(u) + z_2 \langle L(u), E_2 \rangle b + z_1 \langle L(u), E_1 \rangle b, E_3 \Big\rangle \\
&\quad \Big\langle z_2 \overline{\nabla}_u E_2 + z_1 \overline{\nabla}_u E_1, E_3 \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Notése que, con la métrica inducida en $\mathfrak{u}$, $\langle \overline{\nabla}_u E_j, E_3 \rangle = 0$ para todo índice j con valores iguales a 1 y 2 ya que $E_j \in \mathfrak{u}$ y $E_3 \in \mathfrak{u}^{\perp}$. Entonces se tiene

$$\nabla_u \bar{z} = -z_3 L(u) + z_2 \langle L(u), E_2 \rangle b + z_1 \langle L(u), E_1 \rangle b.$$

Escribiendo $u \in \mathfrak{u}$ como combinación lineal de E_1 y E_2, usando la linealidad de $L = \mathrm{ad}_b$ con $b = b_3 E_3$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
L(u) &= [b, u] \\
&= \left[b_3 E_3, \sum_{i=1}^{2} u_i E_i \right] \\
&= b_3 \sum_{i=1}^{2} u_i [E_3 E_i] \\
&= \alpha b_3 \sum_{i=1}^{2} u_i E_i \\
&= \alpha b_3 u.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\nabla_u \bar{z} &= -z_3 \alpha b_3 u + z_2 \langle \alpha b_3 u, E_2 \rangle E_3 + z_1 \langle \alpha b_3 u, E_1 \rangle E_3 \\
&= \alpha \Big(-z_3 b_3 u + z_2 \langle u, E_2 \rangle b + z_1 \langle u, E_1 \rangle b \Big) \\
&= \alpha \Big(b \langle u, z_1 E_1 + z_2 E_2 \rangle - b_3 u \langle E_3, z_3 E_3 \rangle \Big) \\
&= \alpha \Big(b \langle u, z_1 E_1 + z_2 E_2 \rangle - u \langle b, z_3 E_3 \rangle \Big).
\end{aligned}$$

Debido a que $E_1, E_2 \in \mathfrak{u}$ se cumple que $\langle E_i, E_3 \rangle = 0$ para $i = 1, 2$, se puede escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\nabla_u \bar{z} &= \alpha \Big(b \langle u, z_1 E_2 + z_2 E_2 + z_3 E_3 \rangle \\
&\quad - u \langle b, z_1 E_2 + z_2 E_2 + z_3 E_3 \rangle \Big) \\
&= \alpha \Big(b \langle u, \bar{z} \rangle - u \langle b, \bar{z} \rangle \Big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\nabla_u \bar{z} = \alpha \Big(b \langle u, \bar{z} \rangle - u \langle b, \bar{z} \rangle \Big) \tag{4.19}$$

para $u \in \mathfrak{u}$ y $b \in \mathfrak{u}^{\perp}$ tales que $L(u) = [b, u]$ y $\bar{z} \in \mathfrak{g}$.

Determinación de la Curvatura

Sea $\bar{x} \in \mathfrak{g}$, entonces $\bar{x} = x + x^{\perp}$ donde $x = x_1 E_1 + x_2 E_2 \in \mathfrak{u}$ y $x^{\perp} = x_3 E_3 \in \mathfrak{u}^{\perp}$. Así, el tensor de curvatura se puede calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z} &= \nabla_{\bar{y}} \nabla_{\bar{x}} \bar{z} - \nabla_{\bar{x}} \nabla_{\bar{y}} \bar{z} + \nabla_{[\bar{x}, \bar{y}]} \bar{z} \\
&= \nabla_{y+y^{\perp}} \nabla_{x+x^{\perp}} \bar{z} - \nabla_{x+x^{\perp}} \nabla_{y+y^{\perp}} \bar{z} + \nabla_{[x+x^{\perp}, y+y^{\perp}]} \bar{z}.
\end{aligned}$$

Por las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.16) el operador ∇ satisface

$$\nabla_b = 0 \tag{4.20}$$

para $b \in \mathfrak{u}^{\perp}$ Ahora, dado un elemento $\bar{x} \in \mathfrak{g}$ se puede escribir como $\bar{x} = x + x^{\perp}$ con $x \in \mathfrak{u}$ y $x^{\perp} \in \mathfrak{u}^{\perp}$, de esta forma se tiene que $x = x_1 E_1 + x_2 E_2$ y $x^{\perp} = x_3 E_3$. En particular, por la ecuación (4.20) se tiene que

$$\nabla_{x^{\perp}} = \nabla_{y^{\perp}} = 0. \tag{4.21}$$

Entonces, usando la expresión (4.19) de $\nabla_u \bar{z}$:

$$\begin{aligned} R(\bar{x},\bar{y})\bar{z} &= \nabla_y\nabla_x\bar{z} - \nabla_x\nabla_y\bar{z} + \nabla_{[x,y^\perp]+[x^\perp,y]}\bar{z} \\ &= \nabla_y\alpha(E_3\langle x,\bar{z}\rangle - x\langle E_3,\bar{z}\rangle) - \nabla_x\alpha(E_3\langle y,\bar{x}\rangle - y\langle E_3,\bar{z}\rangle) \\ &\quad +\nabla_{[x,y^\perp]+[x^\perp,y]}\bar{z} \end{aligned}$$

El ultimo término de la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \nabla_{[x,y^\perp]+[x^\perp,y]}\bar{z} &= \nabla_{[x,y^\perp]}\bar{z} + \nabla_{[x^\perp,y]}\bar{z} \\ &= \nabla_{[x_1E_1+x_2E_2,\ y_3E_3]}\bar{z} + \nabla_{[x_3E_3,\ y_1E_1+y_2E_2]}\bar{z} \\ &= -\nabla_{y_3x_1[E_3,E_1]+y_3x_2[E_3,E_2]}\bar{z} \\ &\quad +\nabla_{x_3y_1[E_3,E_1]+x_3y_2[E_3,E_2]}\bar{z} \\ &= -\alpha\nabla_{y_3(x_1E_1+x_2E_2)}\bar{z} + \alpha\nabla_{x_3(y_1E_1+y_2E_2)}\bar{z} \\ &= -\alpha\nabla_{y_3x}\bar{z} + \alpha\nabla_{x_3y}\bar{z}, \end{aligned}$$

entonces se puede escribir la curvatura como

$$\begin{aligned} R(\bar{x},\bar{y})\bar{z} &= \nabla_y\alpha(E_3\langle x,\bar{z}\rangle - x\langle E_3,\bar{z}\rangle) - \nabla_x\alpha(E_3\langle y,\bar{x}\rangle - y\langle E_3,\bar{z}\rangle) \\ &\quad -\alpha\nabla_{y_3x}\bar{z} + \alpha\nabla_{x_3y}\bar{z}, \end{aligned}$$

y usando la ecuación (4.19) se tiene

$$\begin{aligned} R(\bar{x},\bar{y})\bar{z} &= \alpha[\langle x,\bar{z}\rangle\nabla_yE_3 - \langle E_3,\bar{z}\rangle\nabla_yx - \langle y,\bar{z}\rangle\nabla_xE_3 + \langle E_3,\bar{z}\rangle\nabla_xy \\ &\quad -\alpha y_3(E_3\langle x,\bar{z}\rangle - x\langle E_3,\bar{z}\rangle) + \alpha x_3(E_3\langle y,\bar{z}\rangle - y\langle E_3,\bar{z}\rangle)]. \end{aligned}$$

La conexión Riemanniana satisface $\nabla_xy - \nabla_yx = [x,y]$ y además x y y están escritos como combinación lineal de E_1 y E_2 por lo que la suma del segundo y cuarto término es cero, es decir,

$$\begin{aligned} -\langle E_3,\bar{z}\rangle\nabla_yx + \langle E_3,\bar{z}\rangle\nabla_xy &= \langle E_3,\bar{z}\rangle(\nabla_xy - \nabla_yx) \\ &= \langle E_3,\bar{z}\rangle[x,y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando nuevamente la ecuación (4.19) se obtiene:

$$\begin{aligned} R(\bar{x},\bar{y})\bar{z} &= \alpha[\langle x,\bar{z}\rangle\nabla_yE_3 - \langle y,\bar{z}\rangle\nabla_xE_3 - \alpha y_3(E_3\langle x,\bar{z}\rangle \\ &\quad -x\langle E_3,\bar{z}\rangle) + \alpha x_3(E_3\langle y,\bar{z}\rangle - y\langle E_3,\bar{z}\rangle)] \\ &= \alpha^2[\langle x,\bar{z}\rangle(E_3\langle y,E_3\rangle - y\langle E_3,E_3\rangle) - \langle y,\bar{z}\rangle(E_3\langle x,E_3\rangle - x\langle E_3,E_3\rangle) \\ &\quad -y_3(E_3\langle x,\bar{z}\rangle - x\langle E_3,\bar{z}\rangle) + x_3(E_3\langle y,\bar{z}\rangle - y\langle E_3,\bar{z}\rangle)] \\ &= \alpha^2[-\langle x,\bar{z}\rangle y + \langle y,\bar{z}\rangle x - y_3E_3\langle x,\bar{z}\rangle \\ &\quad +y_3x\langle E_3,\bar{z}\rangle + x_3E_3\langle y,\bar{z}\rangle - x_3y\langle E_3,\bar{z}\rangle]. \end{aligned}$$

Usando la bilinealidad del tensor métrico, se obtiene la expresión final del operador de curvatura:

$$R(\bar{x},\bar{y})\bar{z} = \alpha^2(\bar{x}\langle\bar{y},\bar{z}\rangle - \bar{y}\langle\bar{x},\bar{z}\rangle). \tag{4.22}$$

Con respecto a la curvatura seccional, se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} K(\bar{x},\bar{y}) &= \langle R(\bar{x},\bar{y})\bar{x},\bar{y}\rangle \\ &= \alpha^2\langle\bar{x}\langle\bar{y},\bar{x}\rangle - \bar{y}\langle\bar{x},\bar{x}\rangle,\bar{y}\rangle \\ &= \alpha^2\left(\langle\bar{x},\bar{y}\rangle^2 - \langle\bar{x},\bar{x}\rangle\langle\bar{y},\bar{y}\rangle\right). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Finalmente, considerando la base ortonormal $\{E_i\}$:

$$\begin{array}{rcl} K(E_i,E_j) &=& K_{ij} \\ &=& \alpha^2(g_{ij}^2 - g_{ii}g_{jj}) \\ &=& \alpha^2(\delta_{ij}^2 - \delta_{ii}\delta_{jj}) \\ &=& -\alpha^2 \end{array}$$

para todo par de índices distintos que toman los valores $i,j = 1,2,3$.

De esta forma se concluye que, en el caso $A = \alpha I_2$ con $\alpha = 1$, el grupo de Lie es el espacio hiperbólico dimensión 3

$$\mathbb{H}^3 = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}.$$

4.2.2. Caso 2. A no es múltiplo de I_2

Considere $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, se denota la traza y el determinante de A por T y D respectivamente:

$$T = \alpha + \delta, \qquad D = \alpha\delta - \beta\gamma. \tag{4.24}$$

Teorema 4.2.2 *Dado un grupo de Lie métrico no unimodular, con estructura de producto semi-directo, si D es el determinante de la matriz del producto semi-directo entonces se cumple lo siguiente:*

- *Si $D < 0$ entonces toda métrica invariante por la izquierda produce una forma cuadrática de Ricci con signatura (+,-,-).*

- *Si* $D \geq 0$ *la signatura (0,-,-) es posible para la forma cuadrática de Ricci.*
- *Si* $D > 0$ *la forma cuadrática de Ricci puede tener signatura (-,-,-). De hecho, para* $D > 0$ *existe una métrica invariante por la izquierda de curvatura seccional estrictamente negativa. Y para* $D > 1$ *existe una métrica invariante por la izquierda de curvatura negativa constante.*

En todos los casos la curvatura escalar es estrictamente negativa.

Antes de proceder a la demostración de este teorema, se determinará la conexión Riemanniana y la curvatura de Ricci.

Determinación de la Conexión

Para el caso $A \neq \alpha I$ podemos describir la conexión Riemanniana de la siguiente forma:

- Para $i, j = 1, 2$ se tiene:

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i} E_j &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij})E_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}(\langle [E_i, E_j], E_k\rangle - \langle [E_j, E_k], E_i\rangle + \langle [E_k, E_i], E_j\rangle)E_k.\end{aligned}$$

  Para todo i, j con valores iguales a 1 y 2 se cumple $[E_i, E_j] = 0$, también, para $k = 1, 2$, $[E_j, E_k] = [E_i, E_k] = 0$ lo que implica:

$$\begin{aligned}\nabla_{E_i} E_j &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}(-\langle [E_j, E_k], E_i\rangle + \langle [E_k, E_i], E_j\rangle)E_k \\ &= \frac{1}{2}(-\langle [E_j, E_3], E_i\rangle + \langle [E_3, E_i], E_j\rangle)E_3.\end{aligned}$$

  Por lo tanto, en términos de las constantes de estructura, se obtiene la ecuación:

$$\nabla_{E_i} E_j = \frac{1}{2}(-c_{j3}^{i} + c_{3i}^{j})E_3, \tag{4.25}$$

  para $i, j = 1, 2$ distintos.

- En el caso $i = j$ se tiene la ecuación:

$$\nabla_{E_i} E_i = c_{3i}^i E_3. \tag{4.26}$$

- Para $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i} E_3 &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}(\alpha_{i3k} - \alpha_{3ki} + \alpha_{ki3})E_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}(\langle [E_i, E_3], E_k\rangle - \langle [E_3, E_k], E_i\rangle + \langle [E_k, E_i], E_3\rangle)E_k. \end{aligned}$$

  Notése que $\langle [E_k, E_i], E_3\rangle = 0$ para todo k y que los otros dos términos de la suma se anulan para $k = 3$. Por lo tanto se deduce de lo anterior que

$$\nabla_{E_i} E_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\langle [E_i, E_3], E_k\rangle - \langle [E_3, E_k], E_i\rangle)E_k.$$

  El operador ∇_{E_i}, evaluado en E_3, satisface la ecuación:

$$\nabla_{E_i} E_3 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{i3}^k - c_{3k}^i)E_k. \tag{4.27}$$

- Para $E_3 \in \mathfrak{u}^\perp$ se cumple

$$\nabla_{E_3} E_3 = 0. \tag{4.28}$$

- Por último, cuando $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \nabla_{E_3} E_j &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}(\alpha_{3jk} - \alpha_{jk3} + \alpha_{k3j})E_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}(\langle [E_3, E_j], E_k\rangle - \langle [E_j, E_k], E_3\rangle + \langle [E_k, E_3], E_j\rangle)E_k. \end{aligned}$$

  Los términos $\langle [E_3, E_j], E_k\rangle$ y $\langle [E_k, E_3], E_j\rangle$ se anulan cuando $k = 3$ y el segundo término de la suma se anula para todo k, lo que implica

$$\nabla_{E_3} E_j = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\langle [E_3, E_j], E_k\rangle + \langle [E_k, E_3], E_j\rangle)E_k.$$

En términos de las constantes de estructura se obtiene

$$\nabla_{E_3} E_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} (c_{3j}^k + c_{k3}^j) E_k. \tag{4.29}$$

Determinación de la Curvatura de Ricci

Ahora, la base ortonormal de $\mathfrak{g}$ diagonaliza al tensor de curvatura de Ricci. En efecto, de manera general, las componentes del tensor de curvatura de Ricci están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(E_i, E_j) &= \sum_{k=1}^{3} R(E_i, E_k, E_j, E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{3} \langle \nabla_{E_k} \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_i} \nabla_{E_k} E_j + \nabla_{[E_i, E_k]} E_j, E_k \rangle. \end{aligned}$$

El tensor de Ricci en la dirección de $E_j \in \mathfrak{g}$ esta dado por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(E_j) &= \mathrm{Ric}(E_j, E_j) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle R(E_j, E_i) E_j, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_j - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_j + \nabla_{[E_j, E_i]} E_j, E_i \rangle. \end{aligned} \tag{4.30}$$

- Para $j = 1, 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(E_j) &= \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_j - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_j + \nabla_{[E_j, E_i]} E_j, E_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_j} E_j - \nabla_{E_j} \nabla_{E_1} E_j + \nabla_{[E_j, E_1]} E_j, E_1 \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_{E_2} \nabla_{E_j} E_j - \nabla_{E_j} \nabla_{E_2} E_j + \nabla_{[E_j, E_2]} E_j, E_2 \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_{E_3} \nabla_{E_j} E_j - \nabla_{E_j} \nabla_{E_3} E_j + \nabla_{[E_j, E_3]} E_j, E_3 \rangle. \end{aligned}$$

Los corchetes de Lie $[E_j, E_1]$ y $[E_j, E_2]$ se anulan para $j = 1, 2$. Enconces, desarrollando las conexiones se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_j) &= \Big\langle \nabla_{E_1} c_{3j}^{j} E_3 - \nabla_{E_j} \frac{1}{2}(-c_{j3}^{1} + c_{31}^{j})E_3, E_1 \Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle \nabla_{E_2} c_{3j}^{j} E_3 - \nabla_{E_j} \frac{1}{2}(-c_{j3}^{2} + c_{32}^{j})E_3, E_2 \Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle \nabla_{E_3} c_{3j}^{j} E_3 - \nabla_{E_j} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{3j}^{k} + c_{k3}^{j})E_k \\
&\qquad - \nabla_{\sum_{k=1}^{2} c_{3j}^{k} E_k} E_j, E_3 \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Se cumple $\nabla_{E_3} E_3 = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_j) &= \Big\langle c_{3j}^{j} \nabla_{E_1} E_3 - \frac{1}{2}(-c_{j3}^{1} + c_{31}^{j})\nabla_{E_j} E_3, E_1 \Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle c_{3j}^{j} \nabla_{E_2} E_3 - \frac{1}{2}(-c_{j3}^{2} + c_{32}^{j})\nabla_{E_j} E_3, E_2 \Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{3j}^{k} + c_{k3}^{j})\nabla_{E_j} E_k - \sum_{k=1}^{2} c_{3j}^{k} \nabla_{E_k} E_j, E_3 \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Desarrollando los últimos operadores de la conexión, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_j) &= \Big\langle c_{3j}^{j} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{13}^{k} - c_{3k}^{1})E_k, E_1 \Big\rangle \\
&\quad - \Big\langle \frac{1}{4}(-c_{j3}^{1} + c_{31}^{j})\sum_{k=1}^{2}(c_{j3}^{k} - c_{3k}^{j})E_k, E_1 \Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle c_{3j}^{j} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{23}^{k} - c_{3k}^{2})E_k, E_2 \Big\rangle \\
&\quad - \Big\langle \frac{1}{2}(-c_{j3}^{2} + c_{32}^{j})\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{j3}^{k} - c_{3k}^{j})E_k, E_2 \Big\rangle \\
&\quad - \Big\langle \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{3j}^{k} + c_{k3}^{j})\frac{1}{2}(-c_{k3}^{j} + c_{3j}^{k})E_3, E_3 \Big\rangle \\
&\quad - \Big\langle \sum_{r=1}^{2} c_{3j}^{r} \frac{1}{2}(-c_{j3}^{r} + c_{3r}^{j})E_3, E_3 \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Al desarrollar las sumas y operar los productos interiores se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_j) &= \frac{1}{2}\Big(c_{3j}^{j}(c_{13}^{1}-c_{31}^{1}) - \frac{1}{2}(-c_{j3}^{1}+c_{31}^{j})(c_{j3}^{1}-c_{31}^{j}) \\ &\quad + c_{3j}^{j}(c_{23}^{2}-c_{32}^{2}) - \frac{1}{2}(-c_{j3}^{2}+c_{32}^{j})(c_{j3}^{2}-c_{32}^{j}) \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{3j}^{k}+c_{k3}^{j})(-c_{k3}^{j}+c_{3j}^{k}) - \sum_{r=1}^{2} c_{3j}^{r}(-c_{j3}^{r}+c_{3r}^{j})\Big).\end{aligned}$$

Notése que, por la ecuación (4.5), $c_{mn} = -c_{nm}$ para todo par de índices m, n. Entonces al reacomodar se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_j) = \frac{1}{2}\Big(&2c_{3j}^{j}(c_{13}^{1}+c_{23}^{2}) + \frac{1}{2}(c_{j3}^{1}-c_{31}^{j})^2 + \frac{1}{2}(c_{j3}^{2}-c_{32}^{j})^2 \\ &-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}[(c_{3j}^{k})^2-(c_{3k}^{j})^2] - \sum_{r=1}^{2} c_{3j}^{r}(-c_{j3}^{r}+c_{3r}^{j})\Big).\end{aligned} \tag{4.31}$$

- Cuando $j = 1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_1) &= \frac{1}{2}\Big(2c_{31}^{1}(c_{13}^{1}+c_{23}^{2}) + \frac{1}{2}(-c_{31}^{1}-c_{31}^{1})^2 + \frac{1}{2}(c_{13}^{2}-c_{32}^{1})^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}[(c_{31}^{1})^2-(c_{31}^{1})^2+(c_{31}^{2})^2-(c_{32}^{1})^2] \\ &\quad -c_{31}^{1}(-c_{13}^{1}+c_{31}^{1}) - c_{31}^{2}(-c_{13}^{2}+c_{32}^{1})\Big).\end{aligned}$$

  Por las ecuaciones (4.3) y (4.5) $c_{31}^{1}=\alpha$, $c_{31}^{2}=\gamma$, $c_{32}^{1}=\beta$, $c_{32}^{2}=\delta$ entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_1) &= \frac{1}{2}\Big(2\alpha(-\alpha-\delta) + \frac{1}{2}(-\alpha-\alpha)^2 + \frac{1}{2}(-\gamma-\beta)^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}[\alpha^2-\alpha^2+\gamma^2-\beta^2] - \alpha(\alpha+\alpha) - \gamma(\gamma+\beta)\Big) \\ &= -\alpha(\alpha+\delta) + \frac{1}{2}\Big(\beta^2-\gamma^2\Big).\end{aligned} \tag{4.32}$$

- Cuando $j = 2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_2) &= \frac{1}{2}\Big(2c_{32}^{2}(c_{13}^{1}+c_{23}^{2}) + \frac{1}{2}(c_{23}^{1}-c_{31}^{2})^2 + \frac{1}{2}(c_{23}^{2}-c_{32}^{2})^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}[(c_{32}^{1})^2-(c_{31}^{2})^2+(c_{32}^{2})^2-(c_{32}^{2})^2] \\ &\quad -c_{32}^{1}(-c_{23}^{1}+c_{31}^{2}) - c_{32}^{2}(-c_{23}^{2}+c_{32}^{2})\Big);\end{aligned}$$

nuevamente, por las ecuaciones (4.3) y (4.5) $c_{31}^1 = \alpha$, $c_{31}^2 = \gamma$, $c_{32}^1 = \beta$, $c_{32}^2 = \delta$ entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_2) &= \frac{1}{2}\Big(2\delta(-\alpha-\delta) + \frac{1}{2}(-\beta-\gamma)^2 + \frac{1}{2}(-\delta-\delta)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}[\beta^2-\gamma^2+\delta^2-\delta^2] - \beta(\beta+\gamma) - \delta(\delta+\delta)\Big) \\ &= -\delta(\alpha+\delta) + \frac{1}{2}\Big(\gamma^2-\beta^2\Big).\end{aligned} \tag{4.33}$$

- Para $j = 3$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_3) &= \langle \nabla_{E_1}\nabla_{E_3}E_3 - \nabla_{E_3}\nabla_{E_1}E_3 + \nabla_{[E_3,E_1]}E_3, E_1\rangle \\ &\quad + \langle \nabla_{E_2}\nabla_{E_3}E_3 - \nabla_{E_3}\nabla_{E_2}E_3 + \nabla_{[E_3,E_2]}E_3, E_2\rangle \\ &\quad + \langle \nabla_{E_3}\nabla_{E_3}E_3 - \nabla_{E_3}\nabla_{E_3}E_3 + \nabla_{[E_3,E_3]}E_3, E_3\rangle.\end{aligned}$$

Debido a la propiedad de la conexión $\nabla_{E_3}E_3 = 0$, dada por la ecuación (4.8), el último término de la suma se anula, así como los primeros sumandos de cada producto interior,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_3) &= \langle -\nabla_{E_3}\nabla_{E_1}E_3 + \nabla_{[E_3,E_1]}E_3, E_1\rangle \\ &\quad + \langle -\nabla_{E_3}\nabla_{E_2}E_3 + \nabla_{[E_3,E_2]}E_3, E_2\rangle \\ &= \Big\langle -\nabla_{E_3}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{13}^k - c_{3k}^1)E_k + \nabla_{\sum_{r=1}^2 c_{31}^r E_r}E_3, E_1\Big\rangle \\ &\quad + \Big\langle -\nabla_{E_3}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{23}^k - c_{3k}^2)E_k + \nabla_{\sum_{r=1}^2 c_{32}^r E_r}E_3, E_2\Big\rangle,\end{aligned}$$

luego, desarrollando los operadores de la conexión Riemanniana, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_3) &= \Big\langle -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{13}^k - c_{3k}^1)\nabla_{E_3}E_k + \sum_{r=1}^{2}c_{31}^r\nabla_{E_r}E_3, E_1\Big\rangle \\ &\quad + \Big\langle -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{23}^k - c_{3k}^2)\nabla_{E_3}E_k + \sum_{r=1}^{2}c_{32}^r\nabla_{E_r}E_3, E_2\Big\rangle.\end{aligned}$$

Al desarrollar los últimos operadores de conexión se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_3) &= \Big\langle -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{13}^k - c_{3k}^1)\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2}(c_{3k}^\mu + c_{\mu 3}^k)E_\mu, E_1\Big\rangle \\
&+\Big\langle \sum_{r=1}^{2} c_{31}^r \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2}(c_{r3}^\nu - c_{3\nu}^r)E_\nu, E_1\Big\rangle \\
&+\Big\langle -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{23}^k - c_{3k}^2)\sum_{\mu=1}^{2}(c_{3k}^\mu + c_{\mu 3}^k)E_\mu, E_2\Big\rangle \\
&+\Big\langle \sum_{r=1}^{2} c_{32}^r \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2}(c_{r3}^\nu - c_{3\nu}^r)E_\nu, E_2\Big\rangle.
\end{aligned}$$

De los primeros dos términos, se anulan los sumandos cuando $\mu = \nu = 2$ y, inversamente, de los últimos dos términos, se anulan los sumandos cuando $\mu = \nu = 1$. Se deduce que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_3) &= -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}(c_{13}^k - c_{3k}^1)(c_{3k}^1 + c_{13}^k) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2} c_{31}^r(c_{r3}^1 - c_{31}^r) \\
&\quad -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}(c_{23}^k - c_{3k}^2)(c_{3k}^2 + c_{23}^k) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2} c_{32}^r(c_{r3}^2 - c_{32}^r).
\end{aligned}$$

Al desarrollar las sumas se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_3) &= -\frac{1}{4}[(c_{13}^1 - c_{31}^1)(c_{31}^1 + c_{13}^1) + (c_{13}^2 - c_{32}^1)(c_{32}^1 + c_{12}^2)] \\
&\quad +\frac{1}{2}[c_{31}^1(c_{13}^1 - c_{31}^1) + c_{31}^2(c_{23}^1 - c_{31}^2)] \\
&\quad -\frac{1}{4}[(c_{23}^1 - c_{31}^2)(c_{31}^2 + c_{23}^1) + (c_{23}^2 - c_{32}^2)(c_{32}^2 + c_{23}^2)] \\
&\quad +\frac{1}{2}[c_{32}^1(c_{13}^2 - c_{32}^1) + c_{32}^2(c_{23}^2 - c_{32}^2)].
\end{aligned}$$

Después, por las ecuaciones (4.3) y (4.5) $c_{31}^1 = \alpha$, $c_{31}^2 = \gamma$, $c_{32}^1 = \beta$,

$c_{32}^2 = \delta$ y al sustituirlos se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_3) = & -\frac{1}{4}(-\gamma-\beta)(\beta-\gamma)+\frac{1}{2}[\alpha(-\alpha-\alpha)+\gamma(-\beta-\gamma)]\\ & -\frac{1}{4}(-\beta-\gamma)(\gamma-\beta)+\frac{1}{2}[\beta(-\gamma-\beta)+\delta(-\delta-\delta)]\\ & = -(\alpha^2+\delta^2)-\frac{1}{2}\Big(\gamma+\beta\Big)^2.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Para terminar de verificar que la forma cuadrática de Ricci sea diagonal basta ver que se cumple $\mathrm{Ric}(E_3, E_1) = \mathrm{Ric}(E_3, E_2) = \mathrm{Ric}(E_1, E_2) = 0$.

- Para desarrollar las componentes $\mathrm{Ric}(E_3, E_1)$ y $\mathrm{Ric}(E_3, E_2)$ sea $j = 1, 2$, entones:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(E_3, E_j) &= \sum_{k=1}^{3} R(E_3, E_k, E_j, E_k)\\ &= \sum_{k=1}^{3}\langle \nabla_{E_k}\nabla_{E_3}E_j - \nabla_{E_3}\nabla_{E_k}E_j + \nabla_{[E_3,E_k]}E_j, E_k\rangle,\end{aligned}$$

sustituyendo las expresiones (4.5), (4.25), (4.26) y (4.29) en los términos adecuados se obtiene

$$\begin{aligned}2\mathrm{Ric}(E_3, E_j) = & \sum_{k=1}^{3}\Big\langle \sum_{n=1}^{2}(c_{3j}^n + c_{n3}^j)\nabla_{E_k}E_n, e_k\Big\rangle\\ & -\sum_{k=1}^{2}(-c_{j3}^k + c_{3k}^j)\langle \nabla_{E_3}E_3, E_k\rangle\\ & -\sum_{n=1}^{2}(c_{3j}^n + c_{n3}^j)\langle \nabla_{E_3}E_n, E_3\rangle\\ & +\sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{2} c_{3k}^r(-c_{j3}^r + c_{3r}^j)\langle E_3, E_k\rangle.\end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (4.25), (4.26), (4.28) y (4.29) el término $\nabla_{E_3}E_3$ se anula, del último sumando se elimina el término $k = 3$. Al desarrollar la primera suma sobre k se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Ric}(E_3, E_j) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\Big\langle \sum_{n=1}^{2}(c_{3j}^n + c_{n3}^j)(-c_{n3}^k + c_{3k}^n)E_3, E_k\Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle \sum_{n=1}^{2}\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}(c_{3n}^m + c_{m3}^n)E_m, E_3\Big\rangle \\
&\quad - \sum_{n=1}^{2}(c_{3j}^n + c_{n3}^j)\Big\langle \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2}(c_{3n}^m + c_{m3}^n)E_m, E_3\Big\rangle \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{2} c_{3k}^r(-c_{j3}^r + c_{3r}^j)\langle E_3, E_k\rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, como la base $\{E_i\}$ es ortonormal la componente se anula, esto es $\mathrm{Ric}(E_3, E_j) = 0$ para j que toma valores iguales a 1,2.

- Por último, la componente $\mathrm{Ric}(E_1, E_2)$ es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_1, E_2) &= \sum_{k=1}^{3} R(E_1, E_k, E_2, E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{3}\langle \nabla_{E_k}\nabla_{E_1}E_2 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_k}E_2 + \nabla_{[E_1,E_k]}E_2, E_k\rangle,
\end{aligned}$$

las expresiones (4.26) y (4.29) se sustituyen en el desarrollo, entonces:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Ric}(E_1, E_2) &= (-c_{23}^1 + c_{31}^2)\sum_{k=1}^{3}\langle \nabla_{E_k}E_3, E_k\rangle \\
&\quad - \sum_{k=1}^{2}(-c_{23}^k + c_{3k}^2)\langle \nabla_{E_1}E_3, E_k\rangle \\
&\quad - \sum_{n=1}^{2}(c_{32}^n + c_{n3}^2)\langle \nabla_{E_1}E_n, E_3\rangle \\
&\quad + \sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{2} c_{13}^r(-c_{23}^r + c_{3r}^2)\langle E_3, E_k\rangle.
\end{aligned}$$

En la primera suma, el término con $k = 3$ se anula y en la ultima suma se anulan los términos con $k = 1$ y $k = 2$. Se sustituyen las expresiones (4.25) y (4.27), entonces se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_1,E_2) &= \frac{1}{4}(-c_{23}^1+c_{31}^2)\sum_{k=1}^{3}\Big\langle \sum_{n=1}^{2}(c_{k3}^n-c_{3n}^k)E_n,E_k\Big\rangle \\
&\quad -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}(-c_{23}^k+c_{3k}^2)\Big\langle \sum_{n=1}^{2}(c_{13}^n-c_{3n}^1)E_n,E_k\Big\rangle \\
&\quad -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{2}(c_{32}^n+c_{n3}^2)\langle(-c_{n3}^1+c_{31}^n)E_3,E_3\rangle \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}c_{13}^r(-c_{23}^r+c_{3r}^2)\langle E_3,E_3\rangle.
\end{aligned}$$

Los primeros dos sumandos son distintos de cero cuando $n=k$. Al desarrollar la métrica se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_1,E_2) &= \frac{1}{4}(-c_{23}^1+c_{31}^2)\sum_{k=1}^{3}(c_{k3}^k-c_{3k}^k) \\
&\quad -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}(-c_{23}^k+c_{3k}^2)(c_{13}^k-c_{3k}^1) \\
&\quad -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{2}(c_{32}^n+c_{n3}^2)(-c_{n3}^1+c_{31}^n) \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}c_{13}^r(-c_{23}^r+c_{3r}^2).
\end{aligned}$$

Al desarrollar las sumas y sustituir las constantes de estructura $c_{31}^1=\alpha$, $c_{31}^2=\gamma$, $c_{32}^1=\beta$ y $c_{32}^2=\delta$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_1,E_2) &= \frac{1}{4}(\beta+\gamma)(-\alpha-\delta)+\frac{1}{2}\alpha(\beta+\gamma)-\frac{1}{2}\delta(-\gamma-\beta) \\
&\quad -\frac{1}{2}\alpha(\beta-\gamma)-\frac{1}{2}\alpha(\beta+\gamma)-\gamma\delta \\
&= -(\alpha\beta+\gamma\delta),
\end{aligned}$$

al hacer la normalización de la métrica tal que $\alpha\beta+\gamma\delta=0$ se obtiene que $\mathrm{Ric}(E_1,E_2)=0$ y por lo tanto, la forma cuadrática de Ricci está diagonalizada.

Determinación de la Curvatura seccional

Con respecto a la curvatura seccional, considérese la base ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^3$. Entonces por la antisimetría del tensor de Riemann,

$$K(E_i, E_j) = K(E_j, E_i) \tag{4.35}$$

para todo $E_i, E_j \in \mathfrak{g}$ distintos. Entonces, las únicas componentes independientes son K_{12}, K_{31} y K_{32}.

La primera componente es:

$$\begin{aligned}
K(E_1, E_2) &= \langle R(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle \\
&= \langle \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + \nabla_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\rangle \\
&= \Big\langle \nabla_{E_2} c_{31}^1 E_3 - \nabla_{E_1}\frac{1}{2}(-c_{13}^2 + c_{32}^1)E_3, E_2\Big\rangle \\
&= \Big\langle c_{31}^1 \nabla_{E_2} E_3 - \frac{1}{2}(-c_{13}^2 + c_{32}^1)\nabla_{E_1}E_3, E_2\Big\rangle \\
&= \Big\langle c_{31}^1 \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{23}^k - c_{3k}^2)E_k, E_2\Big\rangle \\
&\quad -\Big\langle \frac{1}{2}(-c_{13}^2 + c_{32}^1)\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{13}^k - c_{3k}^1)E_k, E_2\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Al desarrollar los productos interiores se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
K(E_1, E_2) &= \frac{1}{2}c_{31}^1(c_{23}^2 - c_{32}^2) - \frac{1}{4}(-c_{13}^2 + c_{32}^1)(c_{13}^2 - c_{32}^1) \\
&= -\alpha\delta + \frac{1}{4}(\gamma+\beta)^2.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Las otras componentes de la curvatura seccional son:

$$\begin{aligned}
K(E_3, E_j) &= \langle \nabla_{E_j}\nabla_{E_3}E_3 - \nabla_{E_3}\nabla_{E_j}E_3 + \nabla_{[E_3,E_j]}E_3, E_j\rangle \\
&= \langle -\nabla_{E_3}\nabla_{E_j}E_3 + \nabla_{[E_3,E_j]}E_3, E_j\rangle \\
&= \Big\langle -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{j3}^k - c_{3k}^j)\nabla_{E_3}E_k + \sum_{r=1}^{2} c_{3j}^r \nabla_{E_r}E_3, E_j\Big\rangle \\
&= \Big\langle -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(c_{j3}^k - c_{3k}^j)\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{2}(c_{3k}^\mu + c_{\mu 3}^k)E_\mu, E_j\Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2} c_{3j}^r \sum_{\nu=1}^{2}(c_{r3}^\nu - c_{3\nu}^r)E_\nu, E_j\Big\rangle,
\end{aligned}$$

entonces, se otiene que

$$K(E_3, E_j) = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}(c_{j3}^k - c_{3k}^j)(c_{3k}^j + c_{j3}^k) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2} c_{3j}^r(c_{r3}^j - c_{3j}^r). \quad (4.37)$$

Luego, las curvaturas seccionales son:

$$K(E_3, E_1) = -2\alpha^2 + \frac{1}{4}(\gamma^2 - \beta^2) - \gamma(\beta+\gamma) \quad (4.38)$$

$$K(E_3, E_2) = -\frac{1}{4}\left((\beta+\gamma)^2 + 4\delta^2\right) - \frac{1}{2}\left(\beta(\gamma+\beta) + 2\delta^2\right) \quad (4.39)$$

Resultados geométricos

En resumen, se obtuvieron los siguientes resultados:
Conexión Riemanniana:

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_i}E_j &= \frac{1}{2}(-c_{j3}^i + c_{3i}^j) \text{ para } i, j = 1, 2 \text{ distintos} \\
\nabla_{E_i}E_i &= c_{3i}^i E_3 \text{ para } i = 1, 2 \\
\nabla_{E_i}E_3 &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(C_{i3}^k - c_{3k}^i)E_k \text{ para } i = 1, 2 \\
\nabla_{E_3}E_3 &= 0 \\
\nabla_{E_3}E_j &= \sum_{k=i}^{3}(c_{ej}^k + c_{ke}^j)E_k \text{ para } j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Curvatura de Ricci:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_1) &= -\alpha(\alpha+\delta) + \frac{1}{2}(\beta^2-\gamma^2) \\
\mathrm{Ric}(E_2) &= -\delta(\alpha+\delta) + \frac{1}{2}(\gamma^2-\beta^2) \\
\mathrm{Ric}(E_3) &= -(\alpha^2+\delta^2) - \frac{1}{2}(\gamma+\beta)^2
\end{aligned}$$

Componentes fuera de la diagonal de la curvatura de Ricci:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(E_3, E_1) &= 0 \\
\mathrm{Ric}(E_3, E_2) &= 0 \\
\mathrm{Ric}(E_1, E_2) &= -(\alpha\beta+\gamma\delta).
\end{aligned}$$

Curvatura seccional:

$$\begin{aligned}
K(E_1, E_2) &= -\alpha\delta + \frac{1}{4}(\gamma+\beta)^2 \\
K(E_3, E_1) &= -2\alpha^2 + \frac{1}{4}(\gamma^2-\beta^2) - \gamma(\beta+\gamma) \\
K(E_3, E_2) &= -\frac{1}{4}\left((\beta+\gamma)^2+4\delta^2\right) - \frac{1}{2}\left(\beta(\gamma+\beta)+2\delta^2\right).
\end{aligned}$$

Reescribiendo la curvatura

Ahora, las ecuaciones de la curvatura de Ricci (4.32), (4.33) y (4.34), y de la curvatura seccional (4.36), (4.38) y (4.39) se pueden simplificar de tal forma que se quede en términos del determinante D de la matriz del producto semi-directo, dicho determinante se le conoce como el *invariante de Milnor*. A partir de las cuatro entradas de la matriz A de $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ se definirán 3 nuevas constantes para que los análisis de curvatura se simplifiquen. En efecto, al normalizar la métrica se puede asumir que

$$\alpha+\delta = T > 0 \tag{4.40}$$

$$\alpha\beta+\gamma\delta = 0 \tag{4.41}$$

entonces, de (4.41)

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{-\gamma}{\alpha}$$

y como $\alpha+\delta=T$, luego $\delta=-(\alpha-T)$ y así se obtiene que

$$\frac{\beta}{\alpha-T}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

De esta forma se definen

$$a=\alpha-\frac{1}{2}T \qquad y \qquad b=\begin{cases} \frac{\beta}{\alpha-T}=\frac{\gamma}{\alpha}, & \text{si } \alpha\neq 0,T \\ \frac{-\beta}{T}, & \text{si } \alpha=0 \\ \frac{\gamma}{T}, & \text{si } \alpha=T \end{cases}. \tag{4.42}$$

Reescribiendo a α,β,γ y δ en términos de las nuevas constantes:

$$\alpha = \frac{1}{2}T+a \tag{4.43}$$

$$\beta = b(\alpha-T)=-b\left(\frac{1}{2}T-a\right) \tag{4.44}$$

$$\gamma = b\alpha=b\left(\frac{1}{2}T+a\right) \tag{4.45}$$

$$\delta = \frac{1}{2}T-a. \tag{4.46}$$

Se obtiene que la matriz del producto semi-directo toma la forma:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}T+a & -\left(\frac{1}{2}T-a\right)b \\ \left(\frac{1}{2}T+a\right)b & \frac{1}{2}T-a \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

En particular, si $\alpha\geq\delta$ entonces, de las definiciones (4.43) y (4.46) se obtiene que

$$a\geq\frac{1}{2}T,$$

entonces $a\geq 0$. Por otra parte, si $\gamma\geq\beta$ entonces

$$\left(\frac{1}{2}T+a\right)b\geq-\left(\frac{1}{2}T-a\right)b$$

de donde se obtiene que $b\geq 0$ ya que $T>0$.

Por otra parte, dada la expresión (4.47) de la matriz A se tiene que su determinante está dado por la relación

$$D=\left(1+b^2\right)\left(\frac{1}{4}T^2-a^2\right). \tag{4.48}$$

Entonces defínase la función real $a : [m(D), \infty) \to \mathbb{R}$ como

$$a(b) = \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}} \tag{4.49}$$

donde

$$m(D) = \begin{cases} \sqrt{D-1} & \text{si } D > 1 \\ 0 & \text{si } D \leq 1 \text{ y } D \neq 0 \end{cases} . \tag{4.50}$$

Entonces, en la expresión (4.47) se pueden sustituir la ecuación (4.49) para reescribir la matriz del producto semi-directo en términos del invariante de Milnor:

$$A(D,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T + \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}} & -\left(\frac{1}{2}T - \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}\right)b \\ \left(\frac{1}{2}T + \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}\right)b & \frac{1}{2}T - \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}} \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

De este modo, si se considera que la matriz del producto semi-directo está dada por la expresión (4.51) de $A(D,b)$, entonces las nuevas constantes de estructura son:

$$c_{31}^1 = \frac{1}{2}T + \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}} \tag{4.52}$$

$$c_{31}^2 = \left(\frac{1}{2}T + \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}\right)b \tag{4.53}$$

$$c_{32}^1 = -\left(\frac{1}{2}T - \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}\right)b \tag{4.54}$$

$$c_{32}^2 = \frac{1}{2}T - \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}. \tag{4.55}$$

Finalmente, se puede reescribir la forma cuadrática de Ricci de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(E_1) &= -T\left(\frac{1}{2}T + (b^2+1)\sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}\right) \\ \mathrm{Ric}(E_2) &= -T\left(\frac{1}{2}T - (b^2+1)\sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}\right) \\ \mathrm{Ric}(E_3) &= -2\left(\frac{1}{2}T + (b^2+1)\left(\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}\right)\right), \end{aligned} \tag{4.56}$$

además, se obtiene que las componentes de la curvatura seccional están dadas por:

$$\begin{aligned}
K(E_1,E_2) &= \frac{1}{4}T^2b^2 - D \qquad (4.57)\\
K(E_3,E_1) &= \frac{2}{T}\mathrm{Ric}(E_1)\left(\frac{1}{2}T + \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}\right)\\
&\quad + \frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{2}T^2 - \frac{D}{1+b^2}\right)\\
K(E_3,E_2) &= -\frac{1}{2}T\left(b^2\sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}} - 1\right)\\
&\quad -(2b^2+1)\left(\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}\right).
\end{aligned}$$

Con el desarrollo anterior, la demostración del *Teorema 4.2.1* se puede llevar acabo.
Demostración. **Teorema 4.2.1**

- Si $D < 0$, el término
$$-\frac{D}{1+b^2}$$
se vuelve positivo. Además, se tiene por las ecuaciones (4.48) y (4.49) del determinante
$$\frac{1}{2}T < \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}};$$
entonces, por (4.56) $sig(\mathrm{Ric}) = (1,2)$ para todo $b \in [m(D), \infty)$ con $m(D) = 0$.

- Si $D = 0$, nuevamente por las ecuaciones (4.48) y (4.49) se tiene que
$$\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}};$$
y por (4.56) la forma cuadrática de Ricci en la dirección de E_2 satisface la relación
$$\mathrm{Ric}(E_2)\Big|_{b=0} = 0$$
luego su signatura es $sig(\mathrm{Ric}) = (0,2)$ para el valor $b = 0$.

- Si $D > 0$, por (4.48) y (4.49) se cumple

$$\frac{1}{2}T > \sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}.$$

Por las ecuaciones (4.56), $sig(\mathrm{Ric}) = (0,3)$ cuando $b^2 + 1$ es muy pequeño y satisfaga la desigualdad

$$\frac{1}{2}T > (1+b^2)\sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}}.$$

Ahora, si además se pide que $D < 1$ y $0 < T < 1$ entonces las expresiones (4.57) de la curvatura seccional son estrictamente negativas para el valor $b = 0$.

- Si $D > 1$ y $a = 0$ entonces por (4.48) y (4.49) se tiene

$$\sqrt{\frac{1}{4}T^2 - \frac{D}{1+b^2}} = 0$$

y luego, por (4.56)

$$\mathrm{Ric}(E_1) = \mathrm{Ric}(E_2) = \frac{T}{2}\mathrm{Ric}(E_3) < 0;$$

más aún, si $T = 2$ se cumple que

$$\mathrm{Ric}(E_1) = \mathrm{Ric}(E_2) = \mathrm{Ric}(E_3) < 0.$$

Observación:
Dado el invariante de Milnor D y $T = 2$, el mapeo $[m(D), \infty) \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$b \to (\mathrm{Ric}(E_1), \mathrm{Ric}(E_2), \mathrm{Ric}(E_3))$$

es inyectivo; para todo $b_1, b_2 \in [m(D), \infty)$ distintos se tienen ternas de curvaturas distintas, es decir, para valores distintos de b se obtienen grupos de Lie con la misma estructura de grupo pero con métricas invariantes por la izquierda no isométricas.

□

4.3. Conclusiones

El análisis expuesto anteriormente sobre los grupos de Lie no unimodulares y sus matrices de producto semi-directo permite concluir con los siguientes teoremas:

Teorema 4.3.1 *Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$ una matriz de la forma*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}T + a & -(\frac{1}{2}T - a)b \\ (\frac{1}{2}T + a)b & \frac{1}{2}T - a \end{pmatrix}$$

con $a, b \geq 0$ y sea $D = \det(A)$ y $T > 0$ fija. Entonces:

- *Si $A = I_2$, $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{H}^3$ y solo hay una métrica invariante por la izquierda en G, la estándar con curvatura seccional constante igual a -1. En el caso general, $A = \alpha I_2$ se obtienen grupos de curvatura seccional constante $K = -\frac{1}{4}T^2$.*

- *Si $A \neq I_2$, la familia de métricas invariantes por la izquierda en $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ es parametrizada por los valores $b \in [m(D), \infty)$, por medio de la métrica canónica en $\mathbb{R}^2 \rtimes_{A(D,b)} \mathbb{R}$ con*

$$A(D,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T + \sqrt{\frac{1}{2}T - \frac{D}{1+b^2}} & -\left(\frac{1}{2}T - \sqrt{\frac{1}{2}T - \frac{D}{1+b^2}}\right)b \\ \left(\frac{1}{2}T + \sqrt{\frac{1}{2}T - \frac{D}{1+b^2}}\right)b & \frac{1}{2}T - \sqrt{\frac{1}{2}T - \frac{D}{1+b^2}} \end{pmatrix}.$$

  Además, la estructura de grupo de G está determinada por el invariante de Milnor, es decir, matrices diferentes con el mismo invariante de Milnor producen grupos de Lie isomorfos.

Teorema 4.3.2 (Milnor) *Una condición necesaria y suficiente para que un grupo de Lie no unimodular de dimensión 3 admita una métrica invariante por la izquierda con curvatura constante negativa es que $G = \mathbb{H}^3$ o el invariante de Milnor cumpla $D > 1$. En particular, existen grupos de Lie métricos no isomorfos que son isométricos.*

Bibliografía

[1] Arvanitogeorgos, A. *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces.* Student Mayhematical Library, Vol. 22. American Mathematical Society 2003.

[2] Buttsworth, T. *The Prescribed Ricci Curvature Problem on Three-Dimensional Unimodular Lie Groups.* arXiv preprint arXiv:1607.03233 2016.

[3] do Carmo Valero, M. P. *Riemannian Geometry.* Birkhäuser 1992.

[4] Friedberg, S. H., *Linear Algebra.* eE Spence 2002.

[5] Guediri, M. & Al-Balawi, K. *Complete left-invariant affine structures on solvable non-unimodular three-dimensional Lie groups.* Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 9:1 2015.

[6] Helgason, S. *Differential geometry and symmetric spaces.* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 34. American Mathematical Society, 1978, 2012.

[7] Lang, S. *Algebra.* Graduate texts in mathematics, Vol. 211. Springer 2002.

[8] Meeks III, W. H., & Pérez, J. *Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups.* Geometric analysis: partial differential equations and surfaces. Geometric Analysis, Vol. 570. 25-110 2012.

[9] Meeks III, W. H., Mira, P., *The geometry of stable minimal surfaces in metric Lie groups.* arXiv preprint arXiv:1610.07317 2016.

[10] Milnor, J. *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups.* Advances in mathematics, 21:3, 293-329 1976.

[11] Rotman, J. *An introduction to the theory of groups.* Graduate Text in Mathematics, Vol. 148. Springer 2012.

[12] Scott, P. *The geometries of 3-manifolds.* Bulletin of the London Mathematical Society, 15:5, 401-487 1983.

[13] Warner, F. W.*Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Graduate text in Mathematics Vol. 94. Springer 2013.

[14] Yi, S. *Left-invariant minimal unit vector fields on a Lie group of constant negative sectional curvature.* Bulletin of the Korean Mathematical Society, 46:4, 713-720 2009.

[15] Yi, S. *Left-invariant minimal unit vector fields on a the semi-direct product* $\mathbb{R}^n \rtimes_P \mathbb{R}$. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 47:5, 951-960 2010.