



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Estudio Comparativo de los
Métodos de Deconvolución
Usados en la Ingeniería
Petrolera**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Petrolero

P R E S E N T A N

Marcos Emiliano López Jiménez

Daniel Sánchez Esquivel

DIRECTOR DE TESIS

Ing. Héctor Erick Gallardo Ferrera



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos



Agradecemos a ExxonMobil y al Institute of International Education por el apoyo brindado con el programa de becas para la investigación 2019, con lo cual se logró finalizar el presente trabajo; asimismo, un especial agradecimiento a todas aquellas personas que nos acompañaron durante el programa de becas y que fueron parte fundamental de este proyecto.

Resumen

De forma reciente, los métodos de deconvolución han obtenido un mayor uso para la interpretación avanzada de pruebas de presión. Existiendo aún mucho desconocimiento sobre el tema, este trabajo tiene el propósito de brindar una guía general y sencilla que permita una introducción al problema de la deconvolución. A través de este trabajo se definirán conceptos clave como: convolución y deconvolución, como punto de partida. Más adelante, se plantean algunos de los métodos propuestos, partiendo desde los más sencillos hasta los más robustos. Se realiza una comparación de estos métodos en su aplicación a través de casos reales y sintéticos. Se analizan sus alcances y sus limitaciones, con la finalidad de que el usuario no utilice la deconvolución como una caja negra y obtenga resultados que no puedan ser interpretados.

A través de estos métodos, hacemos uso de nuestras propias versiones de algoritmos para su resolución (se encontrarán reunidos en los apéndices finales); esto con la finalidad de que puedan ser más entendibles. Actualmente los programas de cómputo comerciales más avanzados en pruebas de presión utilizan estos métodos en su paquetería. Este trabajo otorga una base para cualquiera que disponga de su tiempo a aprender a utilizar una herramienta poderosa, como lo es la deconvolución, y tenerla a su alcance mediante el uso de conocimientos intermedios de programación.

Contenido

Agradecimientos	I
Resumen	II
1. Introducción	1
2. Planteamiento de la problemática	3
3. Revisión de la literatura	7
3.1. Convolución	7
3.2. Caída de presión normalizada (CPN)	9
3.2.1. Normalización Gladfelter et al. (1955)	9
3.2.2. Normalización Winestock y Colpitts (1965)	10
3.2.2.1. Normalización para flujo de aceite	11
3.2.2.2. Normalización para flujo de gas	11
3.3. Deconvolución de balance de materia	12

3.3.1. Deconvolución de balance de materia (Bahabanian (2006) y Johnston (1992))	14
3.4. Deconvolución como un problema de mínimos cuadrados lineales (MCL) . . .	15
3.5. Deconvolución como un problema de mínimos cuadrados totales no lineales .	21
4. Marco conceptual	30
4.1. Problemas de mínimos cuadrados	30
4.1.1. Soluciones de mínimos cuadrados lineales	31
4.1.1.1. Factorización QR	31
4.1.1.2. Transformación SVD (Singular Value Decomposition) . . .	32
4.1.2. Mínimos cuadrados no lineales	33
4.2. Linealización de parámetros	35
4.2.1. Pseudopresión y pseudotiempo	35
4.2.2. Tiempo de producción equivalente	36
4.3. Función derivada	37
5. Desarrollo de la herramienta	39
5.1. Datos de entrada	40
5.2. Funciones principales	40
5.3. Funciones auxiliares	40
6. Aplicación y análisis de casos	41

6.1. Deconvolución de balance de materia y normalización de caída de presión . . .	41
6.1.1. Caso real 1, pozo multifásico	42
6.1.2. Caso real 2, pozo de gas	46
6.1.3. Caso real 1, inversión Stehfest	50
6.2. Deconvolución por mínimos cuadrados lineales	54
6.2.1. Caso real 2, pozo de gas	54
6.3. Deconvolución por mínimos cuadrados totales no lineales	58
6.3.1. Caso sintético 1	58
6.3.2. Caso sintético 2	63
6.3.3. Caso sintético 3	66
6.3.4. Caso Sintético 4	70
Conclusiones	75
Recomendaciones	77
Nomenclatura	78
Bibliografía	83
A. Derivación de la integral de convolución	87
B. Derivación de la deconvolución de balance de materia	90

C. Algoritmo de inversión Gaver-Stehfest	95
D. Algoritmo para solución de mínimos cuadrados	97
E. Expresiones analíticas para la integral de convolución (von Schroeter <i>et al.</i>, 2004)	99
F. Algoritmo de proyección variable	102

Lista de Figuras

3.1.1.Representación esquemática de la operación de convolución (Modificado de Kuchuk et al., 2010).	8
3.2.1.Caída de presión normalizada por distorsión con almacenamiento.	12
3.3.1.Esquematzación del Tiempo de Balance de materia.	13
3.3.2.Ilustración del efecto de la deconvolución de balance de materia.	14
3.5.1.Gráfico diagnóstico	22
3.5.2.Parámetros de interpolación, donde q_j representa el gasto para un intervalo de tiempo $a_j \leq t \leq b_j$. Durante ese intervalo de tiempo, el interpolante θ_j es 1, de otro modo θ_j es 0.	24
3.5.3. $Z(\tau)$ dado por k nodos $z_k = Z(\tau_k)$. Entre los nodos z_{k-1} y z_k , $Z(\tau)$ se interpola de forma lineal con el esquema $\alpha_k + \beta_k \tau$	25
6.1.1.Datos de prueba de incremento (Fetkovich <i>et al.</i> , 1984).	43
6.1.2.Comparativo de caída de presión normalizada, deconvolución de balance de materia con distorsión por almacenamiento.	44
6.1.3.Ajuste de deconvolución con datos simulados de caso real 1.	45

6.1.4.Histórico de producción y presión de fondo del caso real 2.	47
6.1.5.Datos caso real 2, sin distorsión por almacenamiento; comparativo de histórico de producción con datos deconvolucionados.	48
6.1.6.Ajuste de deconvolución con datos simulados de caso real 2	49
6.1.7.Modelo de flujo de la inversión y datos de la prueba de incremento.	51
6.1.8.Comparativa de DBM por Johnston (1992) con inversión por Stehfest y Bahabanian (2006) con distorsión por almacenamiento.	52
6.1.9.Método de Bahabanian (2006), Johntston (1992) con polinomio de Laplace contra datos simulados; caso real 1, inversión Stehfest.	53
6.2.1.Deconvolución por Mínimos Cuadrados Lineales.	55
6.2.2.Comparativa de deconvolución por balance de materia y mínimos cuadrados lineales.	56
6.2.3.Deconvolución por MCL contra datos simulados.	57
6.3.1.Datos de presión obtenidos de la simulación del modelo de Cinar <i>et al.</i>	60
6.3.2.Datos deconvolucionados y periodo de incremento de la prueba.	61
6.3.3.Ajuste de curva de deconvolución y modelo exacto para yacimiento de doble porosidad.	62
6.3.4.Periodos de flujo para un tiempo de prueba de 2700 hrs.	64
6.3.5.Deconvolución generada tomando todos los periodos mostrados y sexto periodo de flujo de la prueba en la Figura 6.3.4.	65
6.3.6.Modelo exacto y curva reconstruida por deconvolución.	66
6.3.7.Esquematación de la posición y fractura del pozo en caso sintético 3.	68

Lista de Figuras

6.3.8. Datos de presión y gasto de aceite obtenidos de prueba sintética.	68
6.3.9. Datos deconvolucionados y segundo periodo de flujo de caso sintético 3.	69
6.3.10 Curva reconstruida por deconvolución y modelo exacto tomado de Ilk (2005).	70
6.3.11 Colocación del pozo en un yacimiento con frontera cerrada (cuadrado) (modificado de Onur <i>et al.</i> , 2010).	71
6.3.12 Datos de presión y gasto con 5 % y 15 % de error respectivamente.	72
6.3.13 Curva deconvolucionada y curva con datos con 5 % de error en presión y 15 % en gasto.	73
6.3.14 Curva reconstruida y modelo exacto el yacimiento.	74
C.1. Diagrama de flujo de algoritmo de inversión Gaver-Stehfest.	96
D.1. Proceso para estimar la respuesta por Mínimos Cuadrados.	98
F.1. Diagrama de flujo general del algoritmo de proyección variable	104

Lista de Tablas

1.1. Avance de los métodos de análisis de datos de presión producción (modificado de Gringarten, 2008).	2
2.1. Métodos de solución para la integral de convolución (modificado de von Schroeter et al., 2004).	5
2.2. Categorización de los distintos métodos de convolución y deconvolución (modificado de Ilk, 2005).	6
6.1.1. Propiedades del yacimiento de caso real 1 (tomado de Fetkovich <i>et al.</i> , 1984).	42
6.1.2. Comparativa de propiedades de caso real 1 (Fetkovich <i>et al.</i> , 1984).	45
6.1.3. Propiedades del yacimiento de caso real 2 (tomado de Jesus ^[22]).	46
6.1.4. Comparativa de propiedades de fractura en caso real 2.	50
6.1.5. Comparativa de propiedades caso real 1, inversión Stehfest (Fetkovich <i>et al.</i> , 1984).	53
6.2.1. Análisis de parámetros simulados (Figura 6.2.3) con parámetros obtenidos por Autores.	57
6.3.1. Propiedades de caso sintético 1 (tomado de Cinar <i>et al.</i> , 2006).	59

Lista de Tablas

6.3.2. Parámetros de entrada para caso sintético 2 de yacimiento de gas.	63
6.3.3. Parámetros de caso sintético 3 (tomado de Ilk, 2005).	67
6.3.4. Propiedades de caso sintético 4 (modificado de Onur <i>et al.</i> , 2010).	71

Capítulo 1

Introducción

El uso de pruebas de presión desde hace muchos años ha permitido conocer las condiciones de los pozos y obtener parámetros del yacimiento. Retrocediendo en perspectiva, los primeros métodos para el análisis de pruebas de presión basados en el uso de líneas rectas y uso de gráficos log – log de presión tenían muchas limitaciones al momento de evaluar el comportamiento del pozo. A través de la introducción del análisis de la derivada de presión en 1983 y el desarrollo de modelos complejos de interpretación permitieron tomar en cuenta características geológicas en detalle, el análisis de las pruebas de presión se convirtieron en una herramienta poderosa para la caracterización de yacimientos. Un nuevo hito se alcanzó con la introducción de la deconvolución. La deconvolución es un proceso que convierte datos de presión de gasto variable en una respuesta a gasto constante, esto hace que más datos estén disponibles para la interpretación que un conjunto original de datos, en el que solo periodos a gasto constante pueden analizarse. Con esto, es posible ver fronteras en los datos deconvolucionados, una ventaja considerable comparada al análisis convencional, en el cual las fronteras no son posibles de observar y se deben inferir. El impacto general de esto es la habilidad para certificar reservas.

Esta tesis tiene como objetivo realizar una comparativa de los métodos de deconvolución desde su más básica adaptación hasta uno de los algoritmos más robustos que existen,

con la finalidad de que el lector se interese en profundizar en un tema que requiere de una mayor atención. De igual forma, se pretende acercar cada vez más a la comunidad estudiantil al uso de las herramientas computacionales para el análisis de pruebas de presión a través del flujo de trabajo en caracterización dinámica.

Muestra de esto, en la Tabla 1.1 modificada del artículo realizado por Gringarten en 2008, se observa la evolución que ha tenido el análisis de pruebas de presión y el desarrollo de nuevas aplicaciones para obtener datos fundamentales del yacimiento.

Tabla 1.1: Avance de los métodos de análisis de datos de presión producción (modificado de Gringarten, 2008).

Años	Método	Herramienta	Análisis
1950	Líneas rectas	Transformada de Laplace	Yacimiento homogéneo
1960-1970	Curvas tipo	Funciones Green	Efectos en cercanías del pozo
Finales 1970	Curvas tipo (adimensional)	Inversión numérica (Stehfest)	Doble porosidad
1980	Derivada logarítmica	Análisis en cómputo	Yacimiento heterogéneo y fronteras
1990		Ajuste de modelos con integración de datos medidos	Yacimientos multi-capa
2000	Ajuste con modelos	Deconvolución	Mejora en el radio de investigación (fronteras)

Capítulo 2

Planteamiento de la problemática

El análisis de pruebas de presión-producción permite interpretar y conceptualizar el comportamiento del pozo/yacimiento. Los datos obtenidos de dichas pruebas usualmente se toman mediante condiciones establecidas de gasto o presión constante. Una prueba de decremento de presión clásica, en un pozo produciendo a gasto constante, es un claro ejemplo del cual se obtiene el carácter primario del pozo/yacimiento, ya que permite conocer el comportamiento en la vecindad del pozo, subsecuentemente el área de drene, y de cómo las fronteras afectan al comportamiento de éste. Asimismo, una prueba a gasto múltiple (a través de una secuencia de decrementos e incrementos controlados) o bien, una prueba de incremento a un solo gasto de producción, permiten interpretar parámetros de flujo del sistema. Sin embargo, hay fenómenos que alteran la respuesta del sistema y no permiten determinar el modelo de flujo en primera instancia; ejemplos claros de ellos son: el almacenamiento y las variaciones en el gasto (sólo por mencionar algunos), las cuales enmascaran o distorsionan el carácter principal de las respuestas de presión.

A partir de los años 50's, se han implementado distintas técnicas de deconvolución de presión/gasto a pruebas de presión-producción. Actualmente en algunos campos, la implementación de sensores permanentes dentro de los pozos permite registrar de manera continua los cambios de presión y de gasto. Así, la deconvolución se vuelve una herramienta importan-

te debido a su capacidad para procesar de forma simultánea los datos de pruebas de presión y los datos de producción que permitan analizar el modelo del pozo/yacimiento (en la forma de una respuesta a gasto constante o presión constante).

El objetivo de la deconvolución es generar mediante una serie de datos de presión (como respuesta de una prueba a gasto variable o una secuencia de datos de producción) un perfil de presión equivalente que se obtendría si el pozo fuese producido a gasto constante durante toda la historia de producción. Con esto, poder interpretar el comportamiento que gobierna en el pozo/yacimiento.

En ciencias y en ingeniería es común utilizar los términos de problema directo y de problema inverso. El término de problema directo involucra tomar un modelo y calcular los valores que se deberían observar en un fenómeno o en una prueba, de forma práctica esto se resume en analizar los datos de un pozo a través de un modelo flujo determinado previamente (radial, esférico, doble porosidad, etc.). En cuanto al problema inverso, esto involucra determinar los valores o las variaciones características de un fenómeno a través de datos medidos; la deconvolución funciona de esta manera, a través de datos medidos se genera la solución que gobierna el sistema. Sin embargo, debido a que la deconvolución funciona como un problema inverso, la solución no es única y ésta puede verse afectada por datos erróneos.

Debido a la naturaleza del problema inverso en la deconvolución, la aplicación de esta técnica se vuelve un reto debido a los errores inherentes de los datos obtenidos de presión y gasto. Un algoritmo robusto de deconvolución que tolere los errores se encuentra en los trabajos desarrollados por Von Schroeter *et al.* (2002, 2004) y Levitan (2005), ya que brindan una herramienta viable para el análisis de las pruebas de presión y de los datos de producción.

A lo largo del tiempo se han desarrollado distintos métodos para aplicar la deconvolución de datos. Actualmente existen diferentes herramientas de análisis asistido por programas de computo que integran el uso de algoritmos de deconvolución como parte de flujo de trabajo para el análisis de datos de presión-producción (F.A.S.T. Fekete, Pansystem, Saphir); no obstante su uso práctico no ha sido generalizado en la industria debido a la falta de conocimiento

sobre las características del modelo de deconvolución.

Cabe señalar que en el presente trabajo solo se abordarán ciertos métodos de deconvolución donde su solución es en el dominio del tiempo, siendo así necesaria métodos numéricos para minimizar y optimizar funciones objetivo que buscan reducir los errores en la solución final. En la Tabla 2.1 se muestran algunos de los métodos de solución a la integral de convolución en el dominio del tiempo, lo cuales desarrollaron distintos autores al paso de los años.

Tabla 2.1: Métodos de solución para la integral de convolución (modificado de von Schroeter et al., 2004).

Autores	Problema	Restricciones	Solución
Coats <i>et al.</i> , 1964	$\min_G \ \Delta p - \dot{Q} * G\ _1$	$G \geq 0, \dot{G} \geq 0, \ddot{G} \leq 0$	Optimización lineal
Bostič <i>et al.</i> , 1980 Kuchuk y Ayestaran, 1985	$\Delta m(p) = \dot{Q} * G$ $\Delta p = Q * g$	Ninguna Ninguna	Lineal recursivo Lineal recursivo
Thompson <i>et al.</i> , 1986	$\Delta p = Q * g$	Ninguna	Lineal recursivo
Gajdica <i>et al.</i> , 1988	$\min_G (w \Delta p - G * \dot{Q})$	$G \geq 0, \dot{G} \geq 0, \ddot{G} \leq 0$	Optimización lineal
Kuchuk <i>et al.</i> , 1990	$\min_G \ \Delta p - \dot{Q} * G\ _2$	$G \geq 0, \dot{G} \geq 0, \ddot{G} \leq 0$	Mínimos cuadrados lineales

Muchos de estos métodos se pueden clasificar en diferentes técnicas, las cuales a su vez pueden ser divididas con base en el método de solución y el dominio que ocupan (Tabla 2.2).

Tabla 2.2: Categorización de los distintos métodos de convolución y deconvolución (modificado de Ilk, 2005).

Autor	Método
Convolución/Superposición	
van Everdingen y Hurst (1949)	Convolución/Superposición
Stewart <i>et al.</i> (1983)	Convolución/Superposición
Fetkovitch y Vienot (1984)	Convolución/Superposición
Agarwal (1980)	Convolución/Superposición
Caída de presión normalizada/Deconvolución de balance de materia	
Fetkovich y Vienot (1984)	Caída de presión normalizada
Gladfelter <i>et al.</i> (1955)	Caída de presión normalizada
Thompson (1985)	Caída de presión normalizada
Blasingame (1986)	Caída de presión normalizada
Johnston (1992)	Deconvolución de balance de materia
Bahabanian (2006)	Deconvolución de balance de materia
Deconvolución en el dominio del tiempo	
Bostic y Agarwal (1980)	Deconvolución en el dominio del tiempo
Kuchuk <i>et al.</i> (1985)	Deconvolución en el dominio del tiempo
von Schroeter <i>et al.</i> (2004)	Deconvolución en el dominio del tiempo
Levitan (2003)	Deconvolución en el dominio del tiempo
Onur <i>et al.</i> (2008)	Deconvolución en el dominio del tiempo
Deconvolución con cambio de dominio	
Roumboutsos y Stewart (1980)	Deconvolución en el dominio de Laplace
Bourgeois y Horne (1993)	Deconvolución en el dominio de Laplace
Mendes <i>et al.</i> (1989)	Deconvolución en el dominio de Laplace
Ilk (2005)	Deconvolución en el dominio de Laplace
Cheng <i>et al.</i> (2003)	Deconvolución en el dominio de Fourier

Capítulo 3

Revisión de la literatura

3.1. Convolución

La integral de convolución es una expresión matemática de la presión del pozo en términos del gasto medido y del comportamiento de la presión a un gasto constante. Por ejemplo, una prueba a gasto variable es una aplicación especial del principio de superposición.

La convolución puede se define como un operador matemático que toma dos funciones, f y g , las cuales producen una tercera función. Esto genera la representación de la superposición (la suma del producto) entre ambas. La convolución entre las funciones f y g se representa como:

$$\psi(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (3.1.1)$$

El kernel $g(t)$ es llamado impulso o función influencia, y es continua en el dominio de $0 \geq t$. El kernel $g(t)$ en pruebas de presión es una solución de la ecuación de difusión que incluye el almacenamiento y daño. Por otro lado, la función $f(t)$ puede ser continua o

continua a trozos y es usualmente dependiente del tiempo en la condición de frontera.

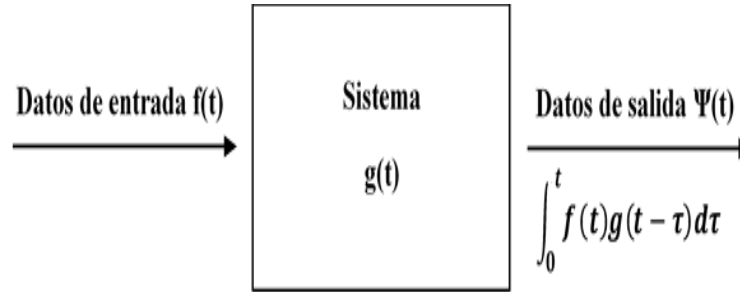


Figura 3.1.1: Representación esquemática de la operación de convolución (Modificado de Kuchuk et al., 2010).

La respuesta de un sistema lineal es la convolución de los datos de entrada medidos con la función impulso. Con lo anterior, la **Ecuación 3.1.1** puede ser aproximada de forma discreta en un intervalo finito de puntos tal que:

$$\psi(t) \approx \sum_{i=0}^n f(\tau_{i+1}) g(t - \tau_{i+1}) \Delta \tau. \quad (3.1.2)$$

El principio de Duhamel (1833), el cual se introdujo en la ingeniería petrolera por van Everdingen y Hurst en 1949 (con el objetivo de obtener la presión adimensional en el pozo en términos de la integral de convolución (**Ecuación 3.1.3**) a gasto variable, se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales parciales aplicables a la transferencia de calor y masa, así como la difusión de la presión en el medio poroso con condiciones de frontera en tiempo y espacio. En otras palabras, la integral de convolución o el principio de superposición de Duhamel (1833) es utilizado para manejar los periodos de flujo dependientes del tiempo y a las condiciones de frontera.

$$p_D = \int_0^{t_D} q_D(\tau) p'_{sD}(t_D - \tau) d\tau. \quad (3.1.3)$$

La **Ecuación 3.1.3** se puede escribir en términos de una función de gasto de entrada y

la derivada de la respuesta de presión a un gasto constante. Esto brinda una aproximación de la caída de presión total en el sistema por cada intervalo de forma continua como se muestra en la **Ecuación 3.1.4**:

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(\tau) p'_s(t - \tau) d\tau. \quad (3.1.4)$$

Asimismo, la **Ecuación 3.1.4** se puede definir como una suma finita de intervalos discretos de gasto en función del tiempo como:

$$\Delta p(t) \approx \sum_{i=0}^n (q - q_{i+1}) (p_s(t - t_{i+1})). \quad (3.1.5)$$

Una limitación del principio de superposición es que sólo es válido para sistemas lineales. Esto implica que ante la presencia de no linealidad (por ejemplo, flujo no-Darciano) el principio de superposición no es aplicable; es por ello que se debe de utilizar algún tipo de linealización (por ejemplo, pseudopresión y pseudotiempo) para poder aplicar el principio. La derivación de la **Ecuación 3.1.4** se muestra en el **Apéndice A**.

3.2. Caída de presión normalizada (CPN)

3.2.1. Normalización Gladfelter et al. (1955)

Los primeros autores en proponer el uso de la normalización en pruebas de incremento fueron Gladfelter *et al.* en 1955. Aunque dicho análisis se realizó para pozos con poca producción, debido a la baja permeabilidad derivada de distintos factores, para estimar las propiedades de los pozos y con ello poder elegir un método de estimulación que incrementara el índice de productividad. Se requería de un cierre del pozo para monitorear los cambios

de presión. Sin embargo, para que los datos de presión registrados fuesen los más representativos, el flujo dentro del pozo durante el cierre debía de ser menor al momento del mismo, lo cual en pozos con baja productividad esto puede durar más de 48 horas. Esto hacía inviable este tipo de pruebas en aquellos pozos.

Debido a lo anterior, estos autores sugirieron que el incremento de la presión después de un cierre (shut-in) dividido entre el cambio inmediato del gasto obtenido posterior al cierre y restado por cada cambio de flujo durante el cierre (**Ecuación 3.2.2**) corregiría los datos de presión para distintos análisis.

$$(p_{ws}(\Delta t) - p_{wf,c}) \left(\frac{q_0}{q_0 - q(\Delta t)} \right) = \frac{m}{2.303} \ln \left(\frac{k\Delta t}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) + 0.80907 + s. \quad (3.2.1)$$

De la **Ecuación 3.2.2** en escala log – log se grafica lo siguiente:

$$(p_{ws}(\Delta t) - p_{wf,c}) \left(\frac{q_0}{q_0 - q(\Delta t)} \right) \text{ vs } \log(\Delta t). \quad (3.2.2)$$

3.2.2. Normalización Winestock y Colpitts (1965)

Asimismo, Winestock y Colpitts en 1965 propusieron una caída de presión normalizada con el gasto, similar al de Gladfelter *et al.* (1955), para el análisis de pruebas de decremento en pozos de gas. Con lo anterior, los autores observaron que los datos de presión en distintos análisis no mostraban efectos de almacenamiento y se aproximaban más a una prueba con condición de presión de fondo constante, lo que ayudaba a obtener una mejor estimación de las propiedades del yacimiento.

Cabe señalar que este tipo de normalización funciona de mejor forma cuando los cambios en los gastos en cada decremento son discretos o el cambio no es tan rápido.

3.2.2.1. Normalización para flujo de aceite

$$\frac{p_0 - p_{wf}(t)}{q(t)} = 141.2 \frac{\mu}{kh} \left\{ \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{kt}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) + 0.809 \right] + s \right\}. \quad (3.2.3)$$

Se gráfica la normalización de la prueba de decremento contra el logaritmo (base 10) de t , como se muestra en la **Ecuación 3.2.4**:

$$(p_0 - p_{wf}(t)) \left(\frac{q_0}{q(t)} \right) \text{ vs } \log(t). \quad (3.2.4)$$

3.2.2.2. Normalización para flujo de gas

$$\frac{m(p_0) - m(p_{wf}(t))}{q_g(t)} = 141.2 \frac{\mu}{kh} \left\{ \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{kt}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) + 0.809 \right] + s \right\}. \quad (3.2.5)$$

Posteriormente Fetkovich *et al.* en 1984 analizaron la normalización de pruebas de incremento y decremento propuestas por Gladfelter *et al.* (1955) y Winestock y Colpitts (1965), respectivamente. En pruebas con flujo multifásico observaron que la normalización generaba buenos resultados para el análisis de curvas tipo sin distorsión por almacenamiento.

Finalmente, Thompson en 1986 propuso un criterio de normalización más explícito en el cual, con base en la integral del Teorema de Duhamel, discretizó la integral aproximándola (Integral de Hamming (1973)) numéricamente como una extensión de los métodos propuestos por Kuchuk *et al.* en 1990 y Bostic *et al.* en 1980 como se muestra en las **Ecuaciones 3.2.6** y **3.2.7** para pruebas de decremento e incremento, respectivamente:

$$\Delta p_N(t_j) = \frac{[p_0 - p_{wf}(t_{j+1})] - \sum_{i=0}^{j-1} \Delta p_N(t_i) [q(t_{j+1} - t_i) - q(t_{j+1} - t_{i+1})]}{q(t_{j+1} - t_j)}. \quad (3.2.6)$$

$$\Delta p_N(t_j) = \frac{[p_{ws}(t_{j+1}) - p_{wf,s}] + \sum_{i=0}^{j-1} \Delta p_N(t_i) [q(t_{j+1} - t_i) - q(t_{j+1} - t_{i+1})]}{q(t_{j+1} - t_j)}. \quad (3.2.7)$$

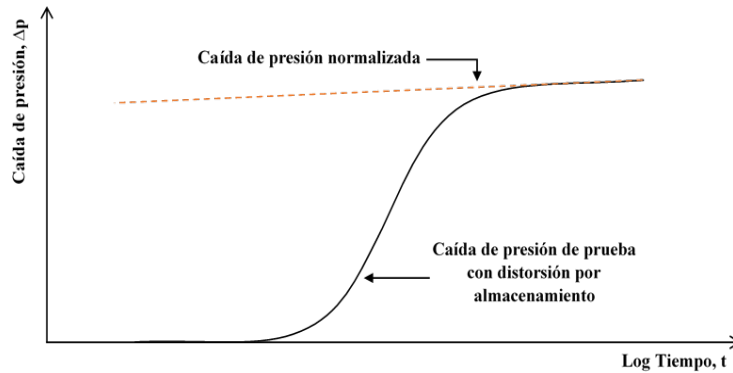


Figura 3.2.1: Caída de presión normalizada por distorsión con almacenamiento.

3.3. Deconvolución de balance de materia

Una historia de producción o una prueba de presión (incremento/decremento) de gasto variable puede ser aproximada a una historia y/o pruebas a gasto constante. Ésto, a través de una alternativa que reemplaza el modelo de superposición en la forma de deconvolución de balance de materia; la cual propuso Horner (1951) y en el caso de contar con una historia de producción, para realizar la aproximación con balance de materia. Se toma el último dato de gasto producido antes de ser cero (si es que existe un último gasto con este valor) q_n y divide a la producción acumulada; con lo cual se obtendrá un valor llamado **tiempo de producción**

estimado como se muestra en la **Ecuación 3.3.1**:

$$t_{p,e} = \frac{\text{Producción acumulada}}{\text{Gasto más reciente}} = \frac{Q_p}{q_n}. \quad (3.3.1)$$

Con base en lo anterior, por cada cambio de gasto para una historia de producción, dicho gasto divide a la producción acumulada hasta el último periodo de producción de interés. Si se tiene una prueba, de incremento o decremento o ya sea un histórico de producción, cada gasto reportado dividirá al volumen acumulado por cada periodo de tiempo hasta un tiempo de interés. Así, se obtendrá un tiempo al cual se le denomina **Tiempo de Balance de Materia (TBM)** y que se representa por la **Ecuación 3.3.2**:

$$t_{bm} = \frac{Q_p}{q}. \quad (3.3.2)$$

Dicho tiempo podrá ser mayor o igual al tiempo de la prueba, y representa un periodo de producción a gasto constante, con un volumen acumulado igual al obtenido con una producción a gasto variable como se esquematiza en la Figura 3.3.1. Una caída de presión normalizada graficada en escala log-log contra el TBM se le denominará Deconvolución de Balance de Materia. Cabe señalar que al igual que en una CPN, mientras los cambios de gasto sean más suaves lo representado gráficamente será más representativo.

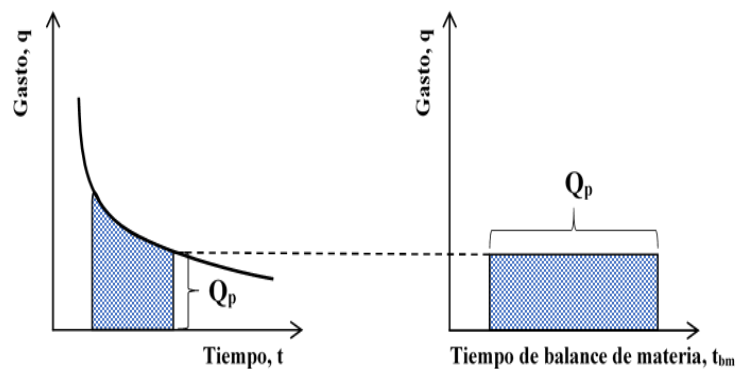


Figura 3.3.1: Esquematización del Tiempo de Balance de materia.

3.3.1. Deconvolución de balance de materia (Bahabanian (2006) y Johnston (1992))

La deconvolución de Balance de Materia es una extensión de la Normalización de la Caída de Presión con el Gasto. Johnston en 1992 sugiere el uso de una relación gráfica para el análisis de pruebas de gasto variable. Para ello, el eje Y de la función a graficar es la normalización de la presión (**Ecuación 3.2.4**), y el eje X de la función de la función a graficar corresponde al TBM (**Ecuación 3.3.2**). Esta relación se esquematiza en la Figura 3.3.2:

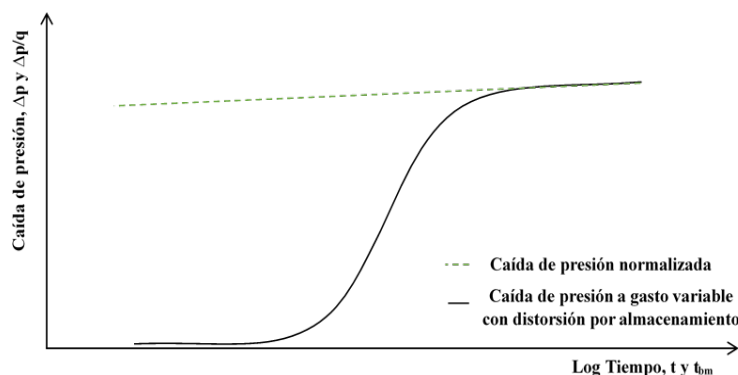


Figura 3.3.2: Ilustración del efecto de la deconvolución de balance de materia.

Para obtener esta función gráfica, es necesario el gasto en la cara del pozo en cada punto de los datos de presión. Los gastos en la cara del pozo son raramente medidos durante las pruebas de presión, debido a que los instrumentos para medición en el fondo del pozo son caros, y para pozos de gas muy imprecisos. Johnston (1992) desarrolló un método semi-analítico, con una base teórica, derivada de un balance de materia de los fluidos en el pozo durante las pruebas. Bahabanian (2006) en un esfuerzo por proveer fórmulas explícitas de deconvolución, para utilizarse en datos de pruebas de presión afectados por almacenamiento, recurrió al método de Johnston (1992) y presenta una forma sencilla para obtener el Tiempo de Balance de Materia (TBM) y la Caída de Presión Normalizada (CPN), como se muestra en las **Ecuaciones 3.3.3, 3.3.4 y 3.3.5** (para el caso de una prueba de incremento):

$$\Delta t_{bm} = \frac{Q_p}{1 - q_{wbs,i}} = \frac{\Delta t - \frac{1}{m_{wbs}} \Delta p}{1 - \frac{1}{m_{wbs}} \frac{d}{d\Delta t} (\Delta p)}, \quad (3.3.3)$$

$$\Delta p_s = \frac{\Delta p}{1 - q_{wbs,i}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{m_{wbs}} \frac{d}{d\Delta t} (\Delta p)} (\Delta p), \quad (3.3.4)$$

$$m_{wbs} = \frac{qB}{24C}. \quad (3.3.5)$$

3.4. Deconvolución como un problema de mínimos cuadrados lineales (MCL)

En un sistema lineal (yacimientos), la relación entre los datos de entrada (condición de frontera dependiente del tiempo que puede ser el gasto o la presión) y los datos de salida (la respuesta del sistema medida como gasto o presión) se describe a través de una operación de convolución, como se ha mencionado anteriormente. De esta manera, partiendo de la **Ecuación 3.1.1**, puede obtenerse que:

$$\psi(t) = \int_0^t g'(\tau) f(t - \tau) d\tau = f(0)g(t) - f(t)g(0) + \int_0^t f'(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad (3.4.1)$$

donde $f(0) = \Delta p$ para el caso de gasto constante, $\psi(0) = \Delta p_{wf}(t) = p_{wf}(t=0) - p_{wf}(t)$, $f'(t) = \Delta p'_w(t)$, y $g(t) = \Delta q_D = \left| \frac{q_{wf}(t=0) - q_{wf}(t)}{q_r} \right|$. La función $\Delta p_w(t)$ es la solución a la ecuación de difusividad para el caso de gasto constante con o sin los efectos de daño y almacenamiento.

La deconvolución es la determinación de la función influencia, $f(t)$, a gasto constan-

te a través de la representación del comportamiento de la presión, de cualquier historia de presión-producción, en la situación de un pozo a una producción constante. De esta manera, la función influencia calculada (deconvolución de la presión) se puede usar directamente para la estimación de parámetros, así como para la identificación del sistema.

La **Ecuación 3.4.1** que representa la convolución se debiera discretizar. A través de una linealización simple, como se muestra en la **Ecuación 3.4.2**:

$$\Delta p_{wf}(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} q'_{wf}(t_{n+1} - \tau) \Delta p_s(\tau) d\tau. \quad (3.4.2)$$

Una forma de solucionar la **Ecuación 3.4.2** resulta de aplicar la regla de integración trapezoidal, para lo que se obtiene:

$$\Delta p_{wf}(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \left[\Delta p_s(t_{i+1}) q'_{wf}(t_{n+1} - t_{i+1}) + \Delta p_s(t_i) q'_{wf}(t_{n+1} - t_i) \right] \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2}; \quad (3.4.3)$$

no obstante, el método de integración trapezoidal promueve resultados oscilatorios. Cabe señalar que, otros métodos de mayor orden (como la Regla de Simpson) también afectan los resultados obtenidos (Kuchuk, 1990).

Hamming (1973) sugiere el uso de un esquema estable de integración para la evaluación de la integral de convolución, el cual consiste en interpolar los datos de gasto de manera que no sea necesaria una derivación numérica de los mismos, ya que la implementación de un esquema de derivación también afectará la estabilidad de la solución obtenida. Asimismo, el autor muestra que integraciones directas al problema de deconvolución usualmente resultarán en oscilaciones.

De esta manera, al aplicar la aproximación de Hamming (1973), la integral mostrada en la **Ecuación 3.4.2** se puede aproximar de la siguiente manera:

$$p_{wf}(t_{n+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} q'_{wf}(t_{n+1} - \tau) p_s(\tau) d\tau = p_s\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} q'_{wf}(t_{n+1} - \tau) d\tau, \quad (3.4.4)$$

el lado derecho de la **Ecuación 3.4.4** se integra de forma directa. La sustitución de los resultados de la integración en la **Ecuación 3.4.4** y resolviendo para p_s genera la siguiente estructura:

$$p_s\left(t_{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{q_{wf}(t_{n+1} - t_n)} \left\{ p_{wf}(t_{n+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} p_s\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right) [q_{wf}(t_{n+1} - t_i) - q_{wf}(t_{n+1} - t_{i+1})] \right\}, \quad (3.4.5)$$

donde:

$$\begin{aligned} 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = t \\ n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Este esquema de discretización del gasto en una deconvolución numérica en el dominio del tiempo se puede describir como un sistema lineal triangular inferior, $A\bar{x} = \bar{b}$, con los componentes de \bar{x} representando los valores de p_s , y los componentes de \bar{b} representando los valores medidos de p_{wf} .

$$p_s\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{q_{wf}(t_1)} p_{wf}(t_1) \quad \text{para } n = 0, \quad (3.4.7)$$

$$\begin{aligned} p_s\left(t_{1+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{q_{wf}(t_2 - t_1)} \dots \\ \dots \left\{ p_{wf}(t_2) - \left[p_s\left(t_{\frac{1}{2}}\right) (q_{wf}(t_2 - t_1) - q_{wf}(t_0)) \right] \right\} \end{aligned} \quad \text{para } n = 1, \quad (3.4.8)$$

$$p_s \left(t_{2+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{q_{wf}(t_3 - t_2)} \left\{ p_{wf}(t_3) - \left[p_s \left(t_{\frac{1}{2}} \right) (q_{wf}(t_3 - t_0) - q_{wf}(t_3 - t_1)) \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + p_s \left(t_{1+\frac{1}{2}} \right) (q_{wf}(t_3 - t_1) - q_{wf}(t_3 - t_2)) \right] \right\} \quad \text{para } n = 2. \quad (3.4.9)$$

Es importante resaltar que la inestabilidad de este algoritmo de deconvolución es evidente en la **Ecuación 3.4.5**, ya que cada valor computado de p_s será afectado por el error en el primer punto de los datos en $q(t_1)$. Tomando en cuenta esto, pequeños errores de medición, incluso menores al 1 % generarían resultados muy oscilatorios.

En un primer acercamiento Coats *et al.* en 1964 sugiere un método basado en programación lineal que introduce ciertas restricciones para suavizar y estabilizar la curva de los datos de la función influencia. La función $p_s(t)$ y sus derivadas deben satisfacer las siguientes restricciones de desigualdad:

$$p_s > 0$$

$$\frac{d^{2k-1} p_s(t)}{dt^{2k-1}} \geq 0 \quad \text{para } k = 1, 2, 3 \dots N. \quad (3.4.10)$$

$$\frac{d^{2k} p_s(t)}{dt^{2k}} \leq 0$$

Como parte de una extensión del método de Coats^[10] *et al.* (1964), Kuchuk^[18] *et al.* (1990) observaron que los errores presentes en una prueba en su mayor proporción eran por parte de mediciones erróneas o con falta de sincronía en el gasto; con esto, se genera una inestabilidad en el sistema de programación lineal. Como se ha mencionado anteriormente, todos los errores provenientes desde el primer p_s calculado serán acumulados hasta el último dato de p_s obtenido. Por ello, Kuchuk *et al.* (1990) discretizaron los gastos de tal forma para formar una matriz cuadrada de diagonal inferior, y al mismo tiempo introdujeron un error

arbitrario (epsilon) constante que se ingresa durante el cálculo.

$$\hat{q}(t) = q(t) + \varepsilon. \quad (3.4.11)$$

El término $\varepsilon(t)$ es el error mencionado. De la **Ecuación 3.1.1**

$$p_{wf}(t_n) = p_0 - \int_0^{t_n} (\hat{q}(t)) p_s(t_n - \tau) d\tau, \quad (3.4.12)$$

y sustituyendo en la **Ecuación 3.1.1**:

$$p_{wf}(t_n) = p_0 - \int_0^{t_n} (q(t) + \varepsilon) p_s(t_n - \tau) d\tau. \quad (3.4.13)$$

De forma ilustrativa, el sistema matricial que representa al modelo $A\bar{x} = \bar{b}$ se describe como:

$$A = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_2 - q_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_3 - q_4 & q_2 - q_1 & q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & q_1 & \cdots & 0 \\ q_N - q_{N-1} & q_{N-1} - q_{N-2} & q_{N-3} - q_{N-4} & \cdots & \cdots & q_1 \end{bmatrix}, \quad (3.4.14)$$

$$b = \left[p_{wf_1}, p_{wf_2}, p_{wf_3}, \dots, p_{wf} \right]^T, \quad (3.4.15)$$

$$x = \left[p_{s_1}, p_{s_2}, p_{s_3}, \dots, p_{s_N} \right]^T. \quad (3.4.16)$$

Como se indico anteriormente, en este caso, la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (**Ecuación 3.4.14**) está conformada de $m = n$ elementos y generan una matriz triangular inferior. El vector \bar{b} esta conformado por las mediciones de la presión a los tiempos reportados; asimismo, el vector \bar{x} contiene los datos de la función influencia (kernel), y es el vector de parámetros a estimar por MCL de tal forma que la función objetivo a minimizar es:

$$E(\bar{x}) = \|A\bar{x} - \bar{b}\|_2^2, \quad (3.4.17)$$

donde el subíndice 2 de la norma cuadrática de la función objetivo $E(\bar{x})$ indica que la estimación del vector \bar{x} es por Mínimos Cuadrados, y que deberá de satisfacer las restricciones propuestas por Coats *et al.* (1964)

Para realizar la deconvolución por Mínimos Cuadrados se realizó una interpolación tanto en gastos como en los datos de caídas de presión como se muestra en las **Ecuaciones 3.4.18 y 3.4.19**:

$$q(\tau) = q_{i-1} + \frac{\tau - t_{i-1}}{\Delta t} (q_i - q_{i-1}), \quad (3.4.18)$$

$$\Delta p_m(\tau) = \Delta p_{mi-1} + \frac{\tau - t_{i-1}}{\Delta t} (\Delta p_{mi} - \Delta p_{mi-1}). \quad (3.4.19)$$

donde τ representa los nodos de interpolación siendo el mismo número de datos de tiempo reportados pero espaciados logarítmicamente y Δt se propone constante, espaciado logarítmicamente al igual que los nodos.

3.5. Deconvolución como un problema de mínimos cuadrados totales no lineales

Partiendo de la **Ecuación 3.4.1**, la caída de presión está gobernada por ecuaciones que son lineales en presión y en gasto. Por efectos de la siguiente implementación hemos de cambiar la nomenclatura con el fin de hacer más entendible la implementación del algoritmo.

$$\Delta p(t) = q(t) * g(t) = \int_0^t q(t') g(t-t') dt'. \quad (3.5.1)$$

donde $g(t)$, la respuesta impulso, es la derivada en tiempo de un cambio en la respuesta $f(t)$:

$$g(t) = f'(t) = \frac{df}{dt}. \quad (3.5.2)$$

Las funciones objetivo de los problemas de deconvolución tienden a ser numéricamente inestables cuando no existen restricciones en su espacio de solución. De manera sencilla existen dos formas para incluir restricciones: de forma explícita y de forma implícita. Las restricciones de tipo explícita se generan a través de ecuaciones adicionales o desigualdades que han de satisfacer la solución, este tipo de restricciones añaden un grado mayor de dificultad al algoritmo para su solución. La segunda forma incluye las restricciones, como el método de Kuchuk, de forma implícita a su algoritmo para mejorar la estabilidad de la solución. Von Schroeter *et al.* (2004) propone que el espacio de solución sea parametrizado de tal forma que las restricciones se cumplan de forma automática. Para ello hay que apuntar en la dirección de los gráficos diagnósticos, en donde los logaritmos $\log_{10}[f(t)]$ y $\log_{10}[tg(t)] = \log_{10}\left(\frac{df}{dln t}\right)$ son graficados contra $\log_{10}(t)$ (Figura 3.5.1).

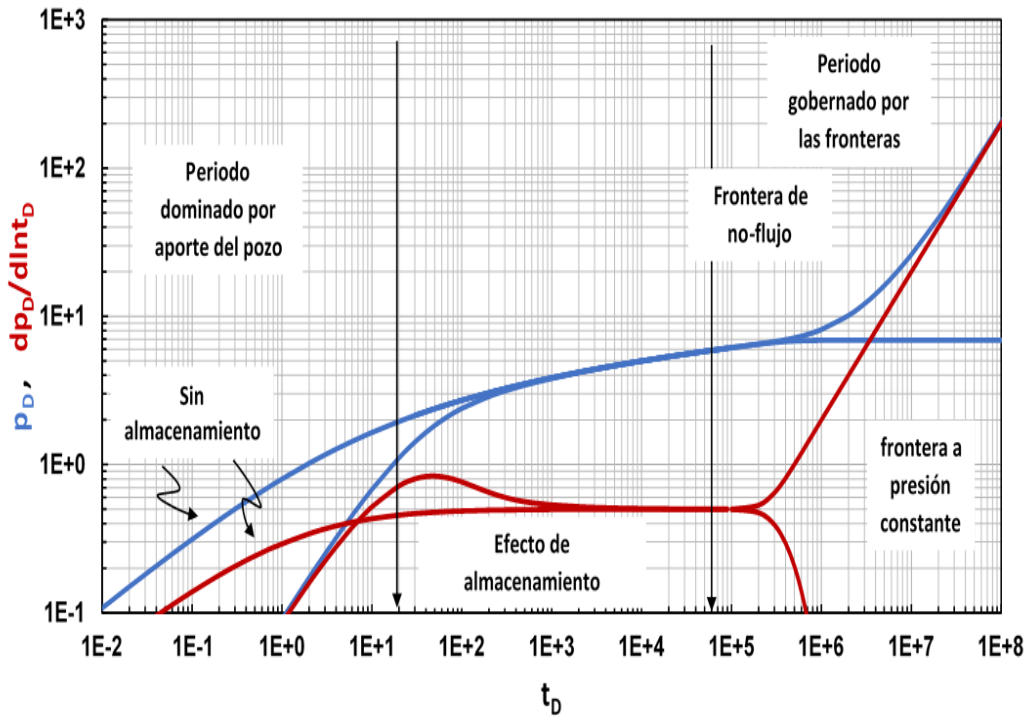


Figura 3.5.1: Gráfico diagnóstico

De esta forma el objetivo es obtener la solución del problema de la integral de convolución a través de un cambio de variable y calcular una estimación de la siguiente función:

$$Z(\tau) = \ln[tg(t)], \quad (3.5.3)$$

donde $\tau = \ln(t)$. Aplicando estas sustituciones al principio de Duhamel (1833), la integral de convolución se transforma en la **Ecuación 3.5.4**:

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(t-t') t' g(t') \frac{dt'}{t'} = \int_{-\infty}^{\ln t} q(t - e^\tau) e^{Z(\tau)} d\tau. \quad (3.5.4)$$

Una vez transformada la integral de convolución es claro señalar un punto importante. El lado derecho de la ecuación sigue siendo lineal en la señal del gasto, q , pero no así en la

función de respuesta $Z(\tau)$, lo cual genera la no linealidad.

La formulación matemática para este problema denota la presión del pozo y la caída de presión medidos a tiempos $t_i, i = 1, \dots, m$ por $p_i = P(t_i)$ y $\Delta p_i = p_0 - p_i$, respectivamente. Con los métodos anteriores para aproximar la integral de forma numérica era necesario el uso de esquemas de interpolación, y para este modelo se utilizan los siguientes:

Para el gasto que se asume constante entre las mediciones es expresado como muestra la **Ecuación 3.5.5**

$$q(t) = \sum_{j=1}^N q_j \theta_j(t), \quad (3.5.5)$$

los coeficientes q_j son dados por los gastos medidos en intervalos de tiempo $a_j \leq t \leq b_j$, $j = 1, \dots, N$. La función de interpolación θ_j está definida como:

$$\theta_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_j \leq t \leq b_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} . \quad (3.5.6)$$

Una forma sencilla de visualizar el esquema de interpolación representado por la **Ecuación 3.5.6** es apreciable con la Figura 3.5.2:

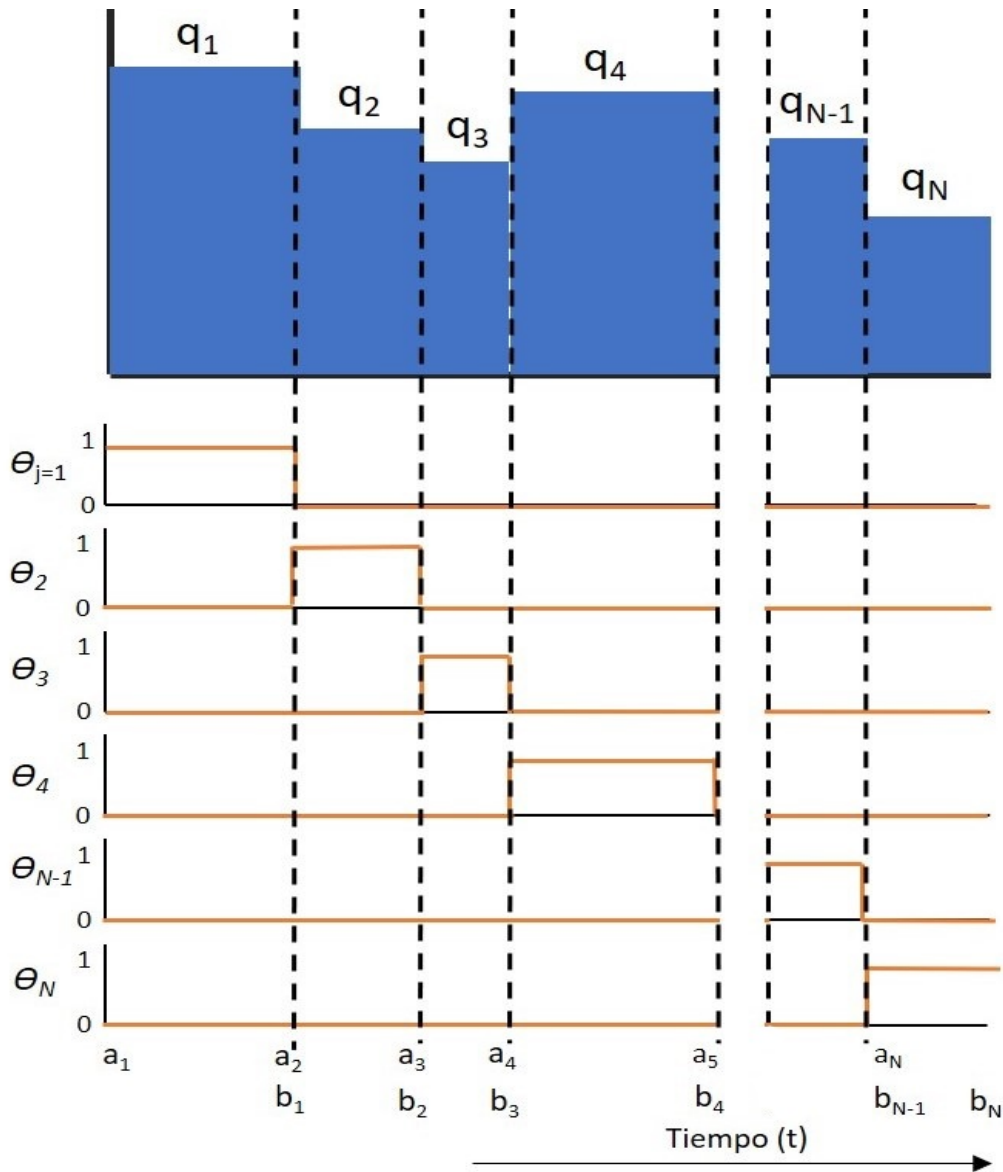


Figura 3.5.2: Parámetros de interpolación, donde q_j representa el gasto para un intervalo de tiempo $a_j \leq t \leq b_j$. Durante ese intervalo de tiempo, el interpolante θ_j es 1, de otro modo θ_j es 0.

La estimación de la función $Z(t)$ es a través del cálculo de K puntos de esta función. Estos puntos a los cuales llamaremos nodos tienen el índice $k = 1, \dots, n$. $Z(t_k)$ es indicado por z_k . El esquema de interpolación entre nodos es lineal en el dominio log-log. En el eje logarítmico x , los nodos son igualmente distribuidos: $-\infty = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = \ln T$. T es el tiempo total de la prueba. Con $z_k = Z(t_k)$, $\alpha_k = z_k - \beta_k \tau_k$ y $\beta_k = \frac{z_k - z_{k-1}}{\tau_k - \tau_{k-1}}$. La función

es aproximada por:

$$Z(\tau) \approx \alpha_k + \tau\beta_k, \quad (3.5.7)$$

este esquema de interpolación se ilustra en la Figura 3.5.3:

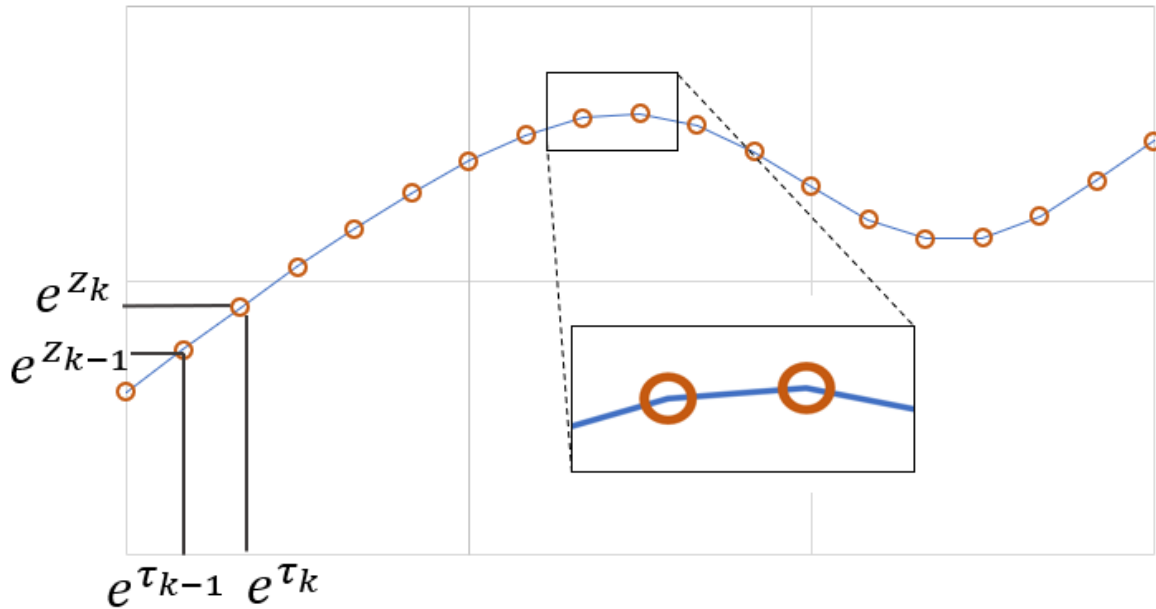


Figura 3.5.3: $Z(\tau)$ dado por k nodos $z_k = Z(\tau_k)$. Entre los nodos z_{k-1} y z_k , $Z(\tau)$ se interpola de forma lineal con el esquema $\alpha_k + \beta_k \tau$.

Evaluando la **Ecuación 3.5.1** a tiempos $t = t_i$, de modo que $\Delta p(t)$ la respuesta medida sea $\Delta p(t_i)$, para todos los M instantes de tiempo ($i = 1 \dots M$). Esto lleva a un sistema de ecuaciones que en forma matriz-vector, puede ser escrita como:

$$\Delta p(t) = C(Z)q(t), \quad (3.5.8)$$

donde $q = [q_1, \dots, q_N]^T$ y $C(Z)$ es una matriz $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de los coeficientes de respuesta con componentes dados por la **Ecuación 3.5.9**:

$$C_{ij}(Z) = \int_{-\infty}^{\ln T} \theta_j (t_i - e^\tau) e^{Z(\tau)} d\tau. \quad (3.5.9)$$

Las expresiones para los coeficientes $C_{ij}(Z)$ y sus derivadas se encuentran en el **Apéndice E**.

Debido a que las herramientas de medición tienen un porcentaje de error asociado a las señales medidas de $\Delta p(t)$ y $q(t)$, los errores pueden ser implementados definiendo $\Delta p(t) + \varepsilon$ y $q(t) + \delta$ como las verdaderas señales. En este caso la **Ecuación 3.5.8** puede ser escrita como:

$$\Delta p(t) + \varepsilon = C(Z)(q(t) + \delta). \quad (3.5.10)$$

La formulación de mínimos cuadrados totales en este problema de deconvolución es encontrar los coeficientes de respuesta Z con las menores perturbaciones ε y δ , y con la menor curvatura. Para medir el tamaño de las perturbaciones es preciso utilizar la norma cuadrada:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots} \quad (3.5.11)$$

Hemos de considerar una clase de medida de error de la forma:

$$E = \|\varepsilon\|_2^2 + \nu \|\delta\|_2^2 + \lambda \kappa(z)^2, \quad (3.5.12)$$

donde ν y λ son pesos fijos y $\kappa(z)$ es una medida de la curvatura de la gráfica de Z . La **Ecuación 3.5.12** es la función objetivo que busca minimizar el error global sujeto a la restricción que representa la **Ecuación 3.5.12**.

Una forma de obtener los pesos predeterminados:

$$v_{def} = \frac{N}{M} \frac{\|\Delta p\|_2^2}{\|q\|_2^2}, \quad (3.5.13)$$

$$\lambda_{def} = \frac{\|\Delta p\|_2^2}{M}. \quad (3.5.14)$$

La función objetivo expresada en términos de z , la presión inicial p_0 , y los verdaderos gastos $y = q + \delta$, se define de la siguiente forma:

$$E = \|p_0 \Upsilon_M - p - C(z)y\|_2^2 + v \|y - q\|_2^2 + \lambda \|Dz - k\|_2^2, \quad (3.5.15)$$

donde Υ_m es el vector de dimensión M con cada componente igual a 1. El grupo $\|\delta\|_2 = \|y - q\|_2$ hace referencia al ajuste del gasto y el grupo $\|\varepsilon\|_2 = \|p_0 \Upsilon_M - p - C(z)y\|_2$ como el ajuste a la presión.

El tercer término de control de curvatura para los nodos $\kappa = \|Dz - k\|_2$. Donde:

$$k = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (3.5.16)$$

y D es una matriz de tamaño $(n-1) \times n$ con su primer fila dada por:

$$D_{ij} = \begin{cases} -(\tau_2 - \tau_1)^{-1} & j = 1 \\ (\tau_2 - \tau_1)^{-1} & j = 2 \\ 0 & j = 3 \dots n \end{cases}, \quad (3.5.17)$$

y las filas $i = 2 \dots n - 1$ están dadas por:

$$D_{ij} = \begin{cases} (\tau_i - \tau_{i-1})^{-1} & j = i - 1 \\ -\frac{(\tau_{i+1} - \tau_{i-1})^{-1}}{(\tau_{i+1} - \tau_i)(\tau_i - \tau_{i-1})} & j = i \\ (\tau_{i+1} - \tau_i)^{-1} & j = i + 1 \\ 0 & \text{otro} \end{cases}. \quad (3.5.18)$$

Para resolver este problema de mínimos cuadrados es necesario hacer uso de un algoritmo especial para encontrar el mínimo global. Para ello las variables se agrupan para generar un forma más compacta de la siguiente forma:

$$E(x', x'') = \|F(x'')x' - v(x'')\|_2^2, \quad (3.5.19)$$

donde $x' = [p_0, y]^T$ y $x'' = z$.

$F(x'')$ es una matriz de tamaño $(M + N + n - 1) \times (N + 1)$ y el vector $v(x'')$ están dados por las **Ecuaciones 3.5.20** y **3.5.21**:

$$F(x'') = \begin{bmatrix} \Upsilon_M & -C(x'') \\ 0 & \sqrt{v}I_N \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5.20)$$

$$v(x'') = \begin{bmatrix} p \\ \sqrt{v}q \\ -\sqrt{\lambda}(Dx'' - \kappa) \end{bmatrix}, \quad (3.5.21)$$

donde I_N representa la matriz identidad de tamaño N .

De esta forma el residuo:

$$r(x', x'') = F(x'')x' - v(x''), \quad (3.5.22)$$

depende linealmente en x' y de forma no lineal en x'' . En términos simples esto refiere a minimizar el residuo a través de resolver un problema separable no lineal de mínimos cuadrados. Esto hace más sencillo el proceso de solución ya que se tiene que resolver un problema de mínimos cuadrados lineales y otro de mínimos cuadrados no lineales. Se utilizó una versión del Algoritmo de Proyección Variable dado por Bjorck en 1996. El algoritmo y diagrama de flujo se encuentran en el **Apéndice F**.

Capítulo 4

Marco conceptual

4.1. Problemas de mínimos cuadrados

Una de las mayores tareas que existen en el cómputo científico es la de estimar parámetros en un modelo matemático de datos obtenidos los cuales están sujetos a errores. La influencia de errores se puede reducir al utilizar un mayor número de datos que el número de incógnitas. Si el modelo es lineal, el problema resultante se puede resolver a través de un sistema lineal $A\bar{x} = \bar{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $m \geq n$. En este sentido el problema se reduce a encontrar un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que para $A\bar{x}$ sea en cierto sentido la mejor aproximación al vector conocido $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$.

Existen distintas formas de definir la mejor aproximación a un sistema inconsistente lineal. En forma computacional este problema se centra en encontrar un vector x que minimice la norma Euclidiana del vector residuo $\bar{r} = \bar{b} - A\bar{x}$; la solución a este problema de minimización es encontrar un vector x que minimice la función a una tolerancia tal que:

$$\min_x \|A\bar{x} - \bar{b}\|_2. \quad (4.1.1)$$

Este problema resulta ser equivalente al proceso de minimizar la suma de los cuadrados de los residuos $\sum_{i=1}^m r_i^2$.

4.1.1. Soluciones de mínimos cuadrados lineales

Existen muchos métodos numéricos para resolver la **Ecuación 4.1.1**. Para no profundizar demasiado, y evitar perder de vista lo importante, haremos mención de dos métodos. Éstos son: las transformaciones **QR** y **SVD**. Es importante señalar que éstas son herramientas muy poderosas y entender su funcionamiento a fondo requiere de un mayor conocimiento en temas de álgebra lineal y cómputo de matrices. Por ello daremos una breve explicación, ya que su finalidad es se utilicen como los métodos para resolver los algoritmos de deconvolución.

4.1.1.1. Factorización QR

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$, se busca una matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, y la cual se particiona para obtener una matriz $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = [Q_1 Q_2] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R, \quad (4.1.2)$$

donde R es una matriz triangular superior $n \times n$.

Entonces el problema de mínimos cuadrados lineales es transformado en un problema de mínimos cuadrados triangulares

$$\|r\|_2^2 = \|A\bar{x} - \bar{b}\|_2^2 = \left\| Q_1 \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x} - \bar{b} \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x} - Q_1^T \bar{b} \right\|_2^2. \quad (4.1.3)$$

La solución al problema $A\bar{x} \approx \bar{b}$ está dada por:

$$R\bar{x} = Q_1^T \bar{b}, \quad (4.1.4)$$

donde la solución al vector \bar{x} es:

$$\bar{x} = R^{-1} (Q_1^T \bar{b}). \quad (4.1.5)$$

4.1.1.2. Transformación SVD (Singular Value Decomposition)

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \leq n$, la descomposición del valor singular se define como el producto de tres matrices tal que:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_m \\ | & | & | & | \end{bmatrix}_{m \times m} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} - & v_1^T & - \\ - & v_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & v_n^T & - \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.1.6)$$

La SVD de la matriz será importante al momento de resolver el sistema $A\bar{x} \approx \bar{b}$, ya que aplicando esta transformación al sistema:

$$\begin{aligned}
 \bar{b} &= A\bar{x} \\
 \bar{b} &= U\Sigma V\bar{x} \\
 U^T\bar{b} &= U^T U\Sigma V^T x = \Sigma V^T \bar{x} \\
 \Sigma^{-1}U^T\bar{b} &= \Sigma^{-1}\Sigma V^T \bar{x} = V^T \bar{x} \quad , \\
 V\Sigma^{-1}U^T\bar{b} &= VV^T \bar{x} = x \\
 X^\dagger b &= \bar{x}
 \end{aligned}
 \tag{4.1.7}$$

donde $X^\dagger = V\Sigma^{-1}U^T$ es la inversa de Moore-Penrose generalizada. Entonces la solución al vector \bar{x} :

$$\bar{x} = (V\Sigma^{-1}U^T)\bar{b}.
 \tag{4.1.8}$$

4.1.2. Mínimos cuadrados no lineales

Debido a que la integral de convolución dada en la **Ecuación 3.5.4** tiene la siguiente forma:

$$\Delta p(t) = \int_{-\infty}^{Int} q(t - e^\tau) e^{Z(\tau)} d\tau.
 \tag{4.1.9}$$

se puede notar que la caída de presión (Δp) resulta de la convolución de dos parámetros: el gasto (q) y la función influencia (Z). Siendo lineal en el gasto pero no lineal en la función Z . Por consiguiente, este problema no puede manejarse por los métodos antes mencionados. Este tipo de problemas no lineales son recurrentes en Ingeniería Petrolera, y una analogía son los métodos para encontrar el factor de desviación z de los gases, encontrar soluciones a sistemas de matrices para simulación numérica de yacimientos, etc.

Los métodos estándar para los problemas de mínimos cuadrados no lineales requieren

información de la derivada de la función objetivo $f(x)$. Donde $f(x)$ es la función que hace referencia al residuo que se busca minimizar $\|r\|_2^2$. Entonces $f(x)$ se puede aproximar a un modelo lineal alrededor de punto dado x_l .

$$\tilde{f}(x) = f(x_l) + J(x_l)(x - x_l), \quad (4.1.10)$$

y usar la solución d_l al problema de mínimos cuadrados lineales:

$$\underset{d}{\text{mín}} = \|f(x_l) + J(x_l)d\|_2, \quad (4.1.11)$$

$$d_l = -J(x_l)^\dagger f(x_l). \quad (4.1.12)$$

Para obtener una mejor aproximación a la solución $x_{l+1} = x_l + d_l$, haciendo de éste un problema iterativo. Esta aproximación, que sólo utiliza la información de la primer derivada de $f(x)$, nos dirige a la clase de métodos de tipo **Gauss-Newton**. Debido a que el Jacobiano ($J(x_l)$) de la matriz $f(x)$ puede estar mal condicionada o ser singular, éste se puede transformar por los métodos estables vistos anteriormente (**QR** y **SVD**).

El método de Gauss-Newton se puede modificar para convergencia global, ya que la dirección de búsqueda es descendiente, se ha de buscar un valor α que propicie una mayor precisión al modificar $x_{l+1} = x_l + \alpha_l d_l$. Esto se conoce como método de búsqueda de línea. El que se implementa en nuestra versión del algoritmo de Gauss-Newton para la deconvolución es el de la condición Armijo-Goldstein (1996). Donde el objetivo es tomar α como el valor más grande en la secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ para el cual se cumpla el siguiente criterio:

$$\|f(x_l)\|_2^2 - \|f(x_l + \alpha_l d_l)\|_2^2 \geq \frac{1}{2} \alpha_l \|P_{Jl} f(x_l)\|_2^2. \quad (4.1.13)$$

4.2. Linealización de parámetros

Como se ha mencionado la integral de convolución solo es válida para sistemas lineales, por lo cual algún tipo de no linealidad en los datos de entrada harán que los resultados obtenidos de la solución de la integral oscilen, aún cuando no haya errores en los datos ingresados. Por ello, se requiere en ciertos casos algún tipo de linealización tanto en los datos de entrada como en los resultados obtenidos, permitiendo que la integral de convolución sea aplicable.

4.2.1. Pseudopresión y pseudotiempo

Para el caso de sistemas que no se ajustan al comportamiento de flujo de gas, se realiza un proceso de linealización y cambio de variables, para lo que se definen a la pseudopresión y al pseudotiempo con base en la **Ecuación 4.2.1** y **Ecuación 4.2.2**, respectivamente:

$$m(p) = 2 \int_{p_0}^p \frac{P}{\mu(p)z} dp, \quad (4.2.1)$$

$$t_{ap}(t) = \int_0^t \frac{dt}{c_t(p)\mu(p)}. \quad (4.2.2)$$

Asimismo, Raghava en 1972 propuso un método de linealización similar a la pseudopresión propuesta por Al-Hussainy (1966); la cual es aplicable para fluidos ligeramente compresibles donde los cambios en las propiedades son significativas para el flujo en el medio poroso (por ejemplo, aceite ligero o condensados), sin embargo, este tipo de pseudopresión esta en función de las propiedades tanto de la roca como de los fluidos mencionados donde es aplicable dicha pseudopresión, además, se requiere de los datos de curvas de permeabilidad relativa. Dicha linealización se muestra en la **Ecuación 4.2.3**:

$$m^*(p) = \int_{p_0}^p \frac{\rho(p) k_r k(p)}{[1 - \phi(p)] \mu(p)} dp. \quad (4.2.3)$$

4.2.2. Tiempo de producción equivalente

Agarwal en 1980 propuso un tiempo de producción equivalente (**Ecuación 4.2.4**) para analizar pruebas de incremento y poder utilizar curvas tipo para estimar parámetros del yacimiento. Dicho tiempo permite analizar pruebas de incremento a un tiempo de producción interpretandolas como periodos de flujo (pruebas de decremento).

Asimismo, dicho análisis se extendió para 2 o mas periodos de flujo de una sola fase, en este caso solo se presentara para la fase aceite:

$$\frac{kh [p_{ws}(t_p + \Delta t) - p_{ws}(\Delta t = 0)]}{141.2 q_o B_o \mu_o} = \frac{1}{2} [\ln(\Delta t_e) + 0.80907 + 2s], \quad (4.2.4)$$

donde:

$$\Delta t_e = \frac{t_p \times \Delta t}{t_p + \Delta t}. \quad (4.2.5)$$

De igual forma para pruebas con 2 o más periodos de flujo queda como se muestra en la **Ecuación 4.2.7**:

$$\frac{kh [p_{wfn}(\Delta t) - p_{wfn-1}(t_{n-1})]}{141.2 (q_{n-1} - q_n) B_o \mu_o} = \frac{1}{2} [\ln(\Delta t_{en}) \cdot \Delta t + 0.80907 + 2s], \quad (4.2.6)$$

donde:

$$\Delta t_{en} = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{t_{n-1} - t_{j-1}}{\Delta t + t_{n-1} - t_{j-1}} \right)^{\left(\frac{q_j - q_{j-1}}{q_{n-1} - q_n} \right)}. \quad (4.2.7)$$

4.3. Función derivada

Las aplicaciones de esta función aparecieron a finales de 1970's; siendo la gráfica $\log - \log$ de $\frac{d\Delta p}{d\Delta t}$ vs. Δt sugerida como un análisis alternativo a las líneas rectas para pruebas de interferencia (Tiab y Kumar, 1980), pruebas en yacimientos fracturados (Tiab y Puthigai), por mencionar algunos. Un cambio en la función con la finalidad de analizar el flujo radial llevó a tomar la derivada en base al logaritmo natural del tiempo, $\frac{d\Delta p}{d(\log \Delta t)}$ (Perez-Rosales, 1978). La practicidad y el poder de la derivada para pruebas de presión se reconoció solamente después de las publicaciones de Bourdet (1983) y su uso en curvas tipo de derivada expresadas en términos de variables independientes para diferentes modelos de interpretación. La mayor ventaja de la derivada de presión reside en un mayor alcance en el diagnóstico y verificación que el cambio de presión por sí mismo con la exactitud de los métodos de líneas rectas.

La curva de derivada no se mide, sino que se obtiene a través de un algoritmo. Obtener curvas suaves de derivadas puede ser un reto debido al ruido en la presión y que se ve amplificado en la derivada. La fórmula de Bourdet emplea un esquema central de aproximación por diferencias finitas para calcular la derivada. Esta derivada se calcula usando los puntos a la izquierda y derecha del punto de interés.

$$t \left(\frac{d\Delta p}{d\Delta t} \right)_i = \left(\frac{d\Delta p}{d \ln(\Delta t)} \right) = a\Delta p_{i-1} + b\Delta p_i + c\Delta p_{i+1}, \quad (4.3.1)$$

de la **Ecuación 4.3.1** los pesos a, b, y c están dados por:

$$a = -\frac{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right)}{\ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right) \ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_{i-1}}\right)},$$

$$b = \frac{\ln\left(\frac{t_{i+1} \cdot t_{i-1}}{t_i^2}\right)}{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right) \ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)}, \quad (4.3.2)$$

$$c = \frac{\ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)}{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right) \ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_{i-1}}\right)}.$$

Capítulo 5

Desarrollo de la herramienta

Para el desarrollo de la herramienta computacional se optó por utilizar la plataforma de programación Matlab[®] que también cuenta con ambiente gráfico intuitivo, su facilidad en la manipulación de gráficos, optimización en cálculos matemáticos por el uso de matrices e interfaz gráfica fácil de utilizar. Matlab[®] al igual que otros programas, utiliza funciones que realizan el trabajo de clases de programación como en otros lenguajes.

Debido a que se requiere solucionar matrices con una gran cantidad de datos lo que conlleva a un proceso de cálculo robusto y eficiente, se utilizó el lenguaje M (desarrollado en Matlab[®]), el cual es adecuado para resolver un conjunto de matrices y vectores por medio de transformaciones QR y SVD; lo anterior, es posible por funciones que ya están dentro del programa llamadas *qr* y *svd*.

Se crearon funciones que incluyen algoritmos para la solución y los cálculos necesarios en los distintos métodos de deconvolución:

5.1. Datos de entrada

En esta función se cargan los datos necesarios para el proceso de deconvolución; éstos datos se leen desde un documento externo, ya sea de una hoja de calculo (.xls) o de un archivo de texto (.dat), donde posteriormente se asignaron a variables que se utilizan en otra función para el proceso de cálculo.

5.2. Funciones principales

Se creó una función para cada tipo de modelo de deconvolución teniendo cinco funciones que permiten generar la curva de deconvolución dependiendo de la condición de la prueba lo que quiere decir que si se desea estimar el modelo removiendo la distorsión por almacenamiento se hace uso de los métodos propuestos por Bahabanian (2006) o DBM; ahora bien, si se desea reconstruir la prueba con o sin distorsión por almacenamiento se hace uso de los métodos propuestos por Kuchuk *et al.* (1990) o von Schroeter *et al.* (2004).

5.3. Funciones auxiliares

En este tipo de funciones incluyen los métodos para calcular propiedades de los fluidos (en el caso de gas); asimismo, se calculan los parámetros de linealización (pseudopresión, pseudotiempo y tiempo de balance de materia).

Capítulo 6

Aplicación y análisis de casos

En este capítulo se muestra los modelos generados con los diferentes métodos de deconvolución estudiados y los cuales se aplicaran a pruebas con datos de presión-producción; dichas pruebas están documentadas. Estas pruebas fueron analizadas por Fetkovich *et al.* (1984) y Jesus (2018)

6.1. Deconvolución de balance de materia y normalización de caída de presión

A continuación, se muestran los análisis realizados por la deconvolución de balance de materia (DBM) de las pruebas anteriormente mencionadas (con y sin distorsión por almacenamiento)

6.1.1. Caso real 1, pozo multifásico

Como se ha mencionado, la **Ecuación 3.1.1** es aplicable para flujo en una sola fase, lo cual hace que la deconvolución solo sea válida para el flujo de fluido en una sola fase. Sin embargo, en este caso se aplicará la deconvolución para un pozo que fluye multifásicamente donde las propiedades y datos a obtener van a ser en función del flujo total de fluido, principalmente, en los datos de entrada como el gasto (gasto total de fluido).

Tabla 6.1.1: Propiedades del yacimiento de caso real 1 (tomado de Fetkovich *et al.*, 1984).

<u>Propiedades del yacimiento</u>	
Porosidad, ϕ , fracción	0.14
Espesor, h, ft	47
Radio de pozo, r_w , ft	0.31
Compresibilidad total, c_t , $psia^{-1}$	2×10^{-5}
<u>Propiedades de los fluidos</u>	
Viscosidad del aceite, μ_o , cP	3.18
Viscosidad del gas, μ_g , cP	0.0155
Viscosidad de agua, μ_w , cP	0.56

En la Tabla 6.1.1 se muestran las propiedades para el análisis de la prueba de incremento en el caso real 1, siendo éste, un caso real con la referencia previamente citada.

En la Figura 6.1.1 se muestran los datos de gasto total y presión de fondo al momento del cierre. Cabe señalar que el análisis se realizará con base en un gasto total de fluido, lo cual indicará que las propiedades obtenidas de dicho análisis se expondrán con base en flujo multifásico. Asimismo, se compararán con modelos de simulación para observar la aproximación de las propiedades del yacimiento obtenidas.

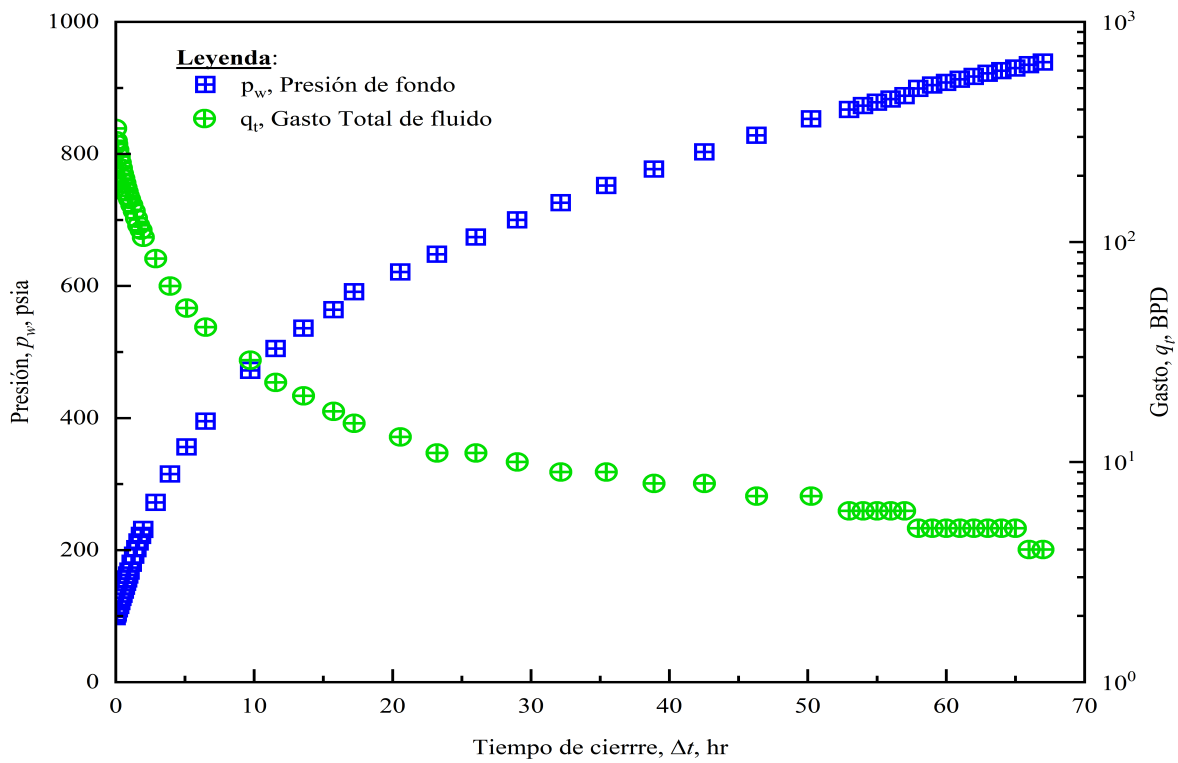


Figura 6.1.1: Datos de prueba de incremento (Fetkovich *et al.*, 1984).

En la Figura 6.1.2 se observan los ajustes de las curvas deconvolucionadas removiendo el almacenamiento de la prueba original, sin embargo, el modelo propuesto por Bahabanian (2006) tiene ligeras oscilaciones puesto que se realiza una derivada numérica.

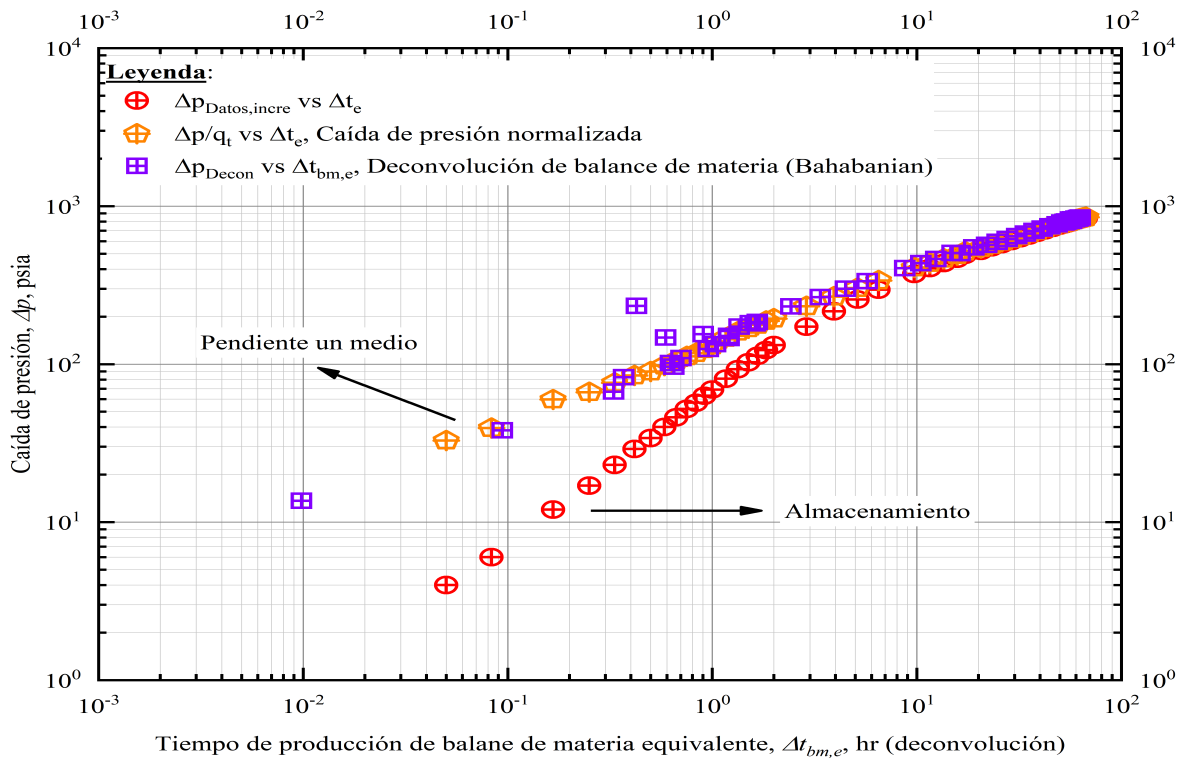


Figura 6.1.2: Comparativo de caída de presión normalizada, deconvolución de balance de materia con distorsión por almacenamiento.

Finalmente, se ajustaron las curvas sin distorsión por almacenamiento obtenidos por la deconvolución y los modelos aproximados de la prueba con base en los parámetros de entada como se muestra en la Figura 6.1.3.

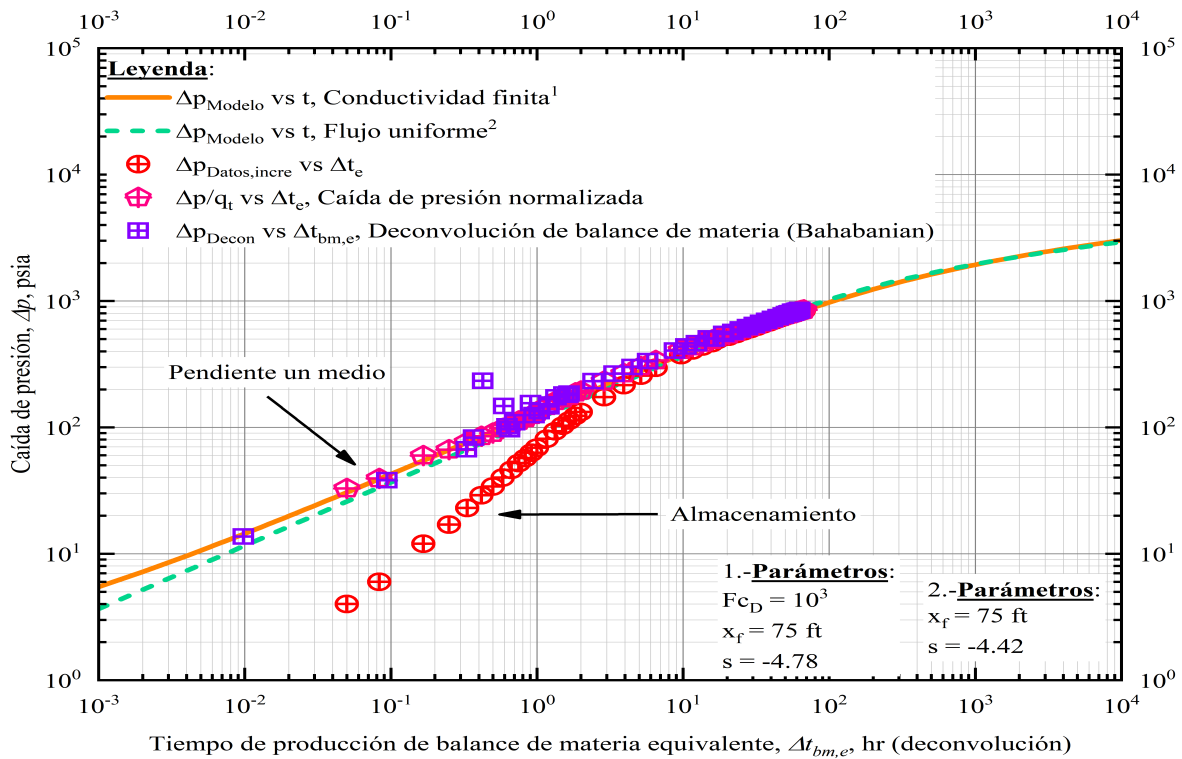


Figura 6.1.3: Ajuste de deconvolución con datos simulados de caso real 1.

En la Tabla 6.1.2 se muestran los parámetros ajustado con la simulación de los modelos por software comercial y se compara con los datos obtenidos por Fetkovich *et al.* (1984) en su análisis.

Tabla 6.1.2: Comparativa de propiedades de caso real 1 (Fetkovich *et al.*, 1984).

	F_{CD} , adim	s , adim	x_f , ft
Fetkovich et al. (1986)	Flujo uniforme	-4.7	93.3
Caída de presión normalizada	10^3	-4.78	75
Bahabanian (2006)	Flujo uniforme	-4.42	75

6.1.2. Caso real 2, pozo de gas

Tabla 6.1.3: Propiedades del yacimiento de caso real 2 (tomado de Jesus^[22]).

<u>Propiedades del yacimiento</u>	
Presión inicial, p_0 , $psia$	4351.13
Permeabilidad de matriz, k_m , mD	2
Compresibilidad total, c_t , $psia^{-1}$	1.73×10^{-4}
Porosidad, ϕ , fracción	0.10
Espesor, h , ft	32.8
Radio del pozo, r_w , ft	0.328
Radio de drene, r_e , ft	1640.42
<u>Propiedades del fluido</u>	
Densidad relativa del gas, γ_g , fracción	0.6

En la Tabla 6.1.3 se muestran las propiedades del yacimiento y fluido; se sabe que el yacimiento fue fracturado hidráulicamente y es productor de gas seco, con base en ello y la aplicación de la deconvolución de balance de materia (DBM), se estimaron las propiedades promedio de la fractura como son: el daño producido por la fractura, la conductividad y longitud media de la misma.

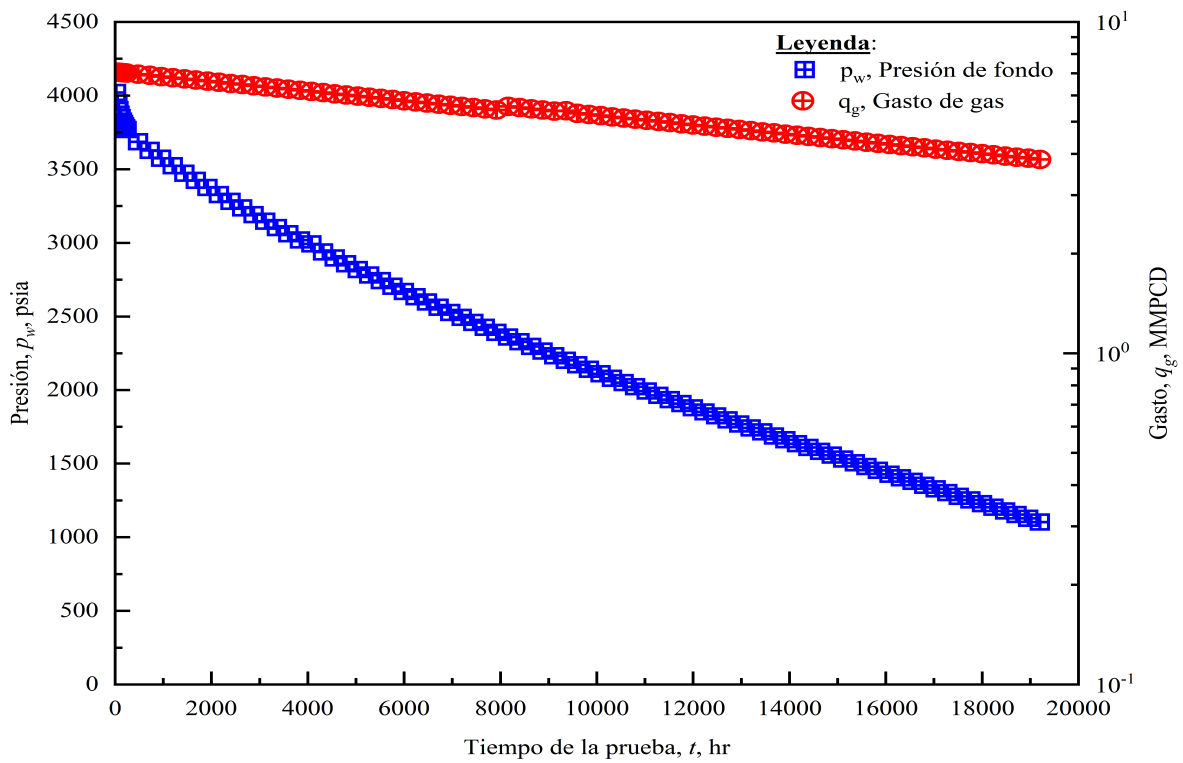


Figura 6.1.4: Histórico de producción y presión de fondo del caso real 2.

Los datos de presión de fondo y gasto por cada intervalo se muestran en la Figura 6.1.4, cabe señalar que los datos mostrados representan un periodo de producción de un pozo de gas seco, lo cual muestran un tiempo aproximado de 19, 200 horas (2 años 2 meses y 1 día).

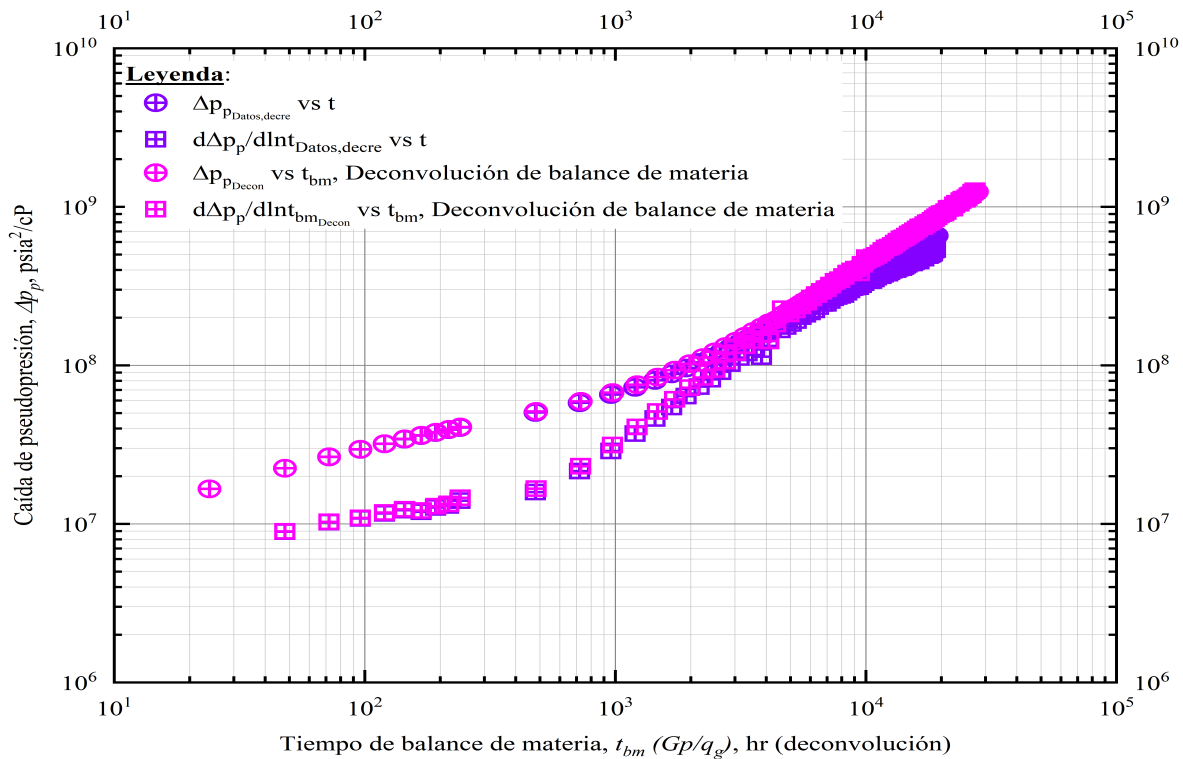


Figura 6.1.5: Datos caso real 2, sin distorsión por almacenamiento; comparativo de histórico de producción con datos deconvolucionados.

Los resultados de la deconvolución de balance de materia (DBM) se muestran en la Figura 6.1.5, donde al realizar un ajuste de las curvas tanto de los datos originales como de la DBM, arrojan una corrección de pendientes de periodos tempranos y tardíos. A tiempos cortos se observa un cambio de pendientes en la curva obtenida por la DBM; mostrando a tiempos cortos un flujo bilineal caracterizada por una pendiente de 1/4 y que, como se logra apreciar, su duración es muy corta; posteriormente, se aprecia muy débilmente un flujo lineal caracterizada por pendiente de 1/2 que, comparada con el flujo bilineal, es mucho más pequeña su duración. Adicional y, posterior al flujo mencionado, se podría interpretar un flujo pseudoradial, sin embargo, no es marcado como se esperaría puesto que dicha transición es observada para dar paso a efectos de frontera, lo que en consecuencia sigue una tendencia el flujo bilineal. Finalmente, un flujo dominado por frontera con pendiente de uno y que es caracterizada principalmente por un régimen pseudoestacionario mejor marcada en la DBM

que en los datos originales; cabe señalar que los datos de presión fueron linealizados por pseudopresión (Δp_p y $\frac{d\Delta p_p}{d\ln t}$) para corregir las presiones por cambios en las propiedades del fluido.

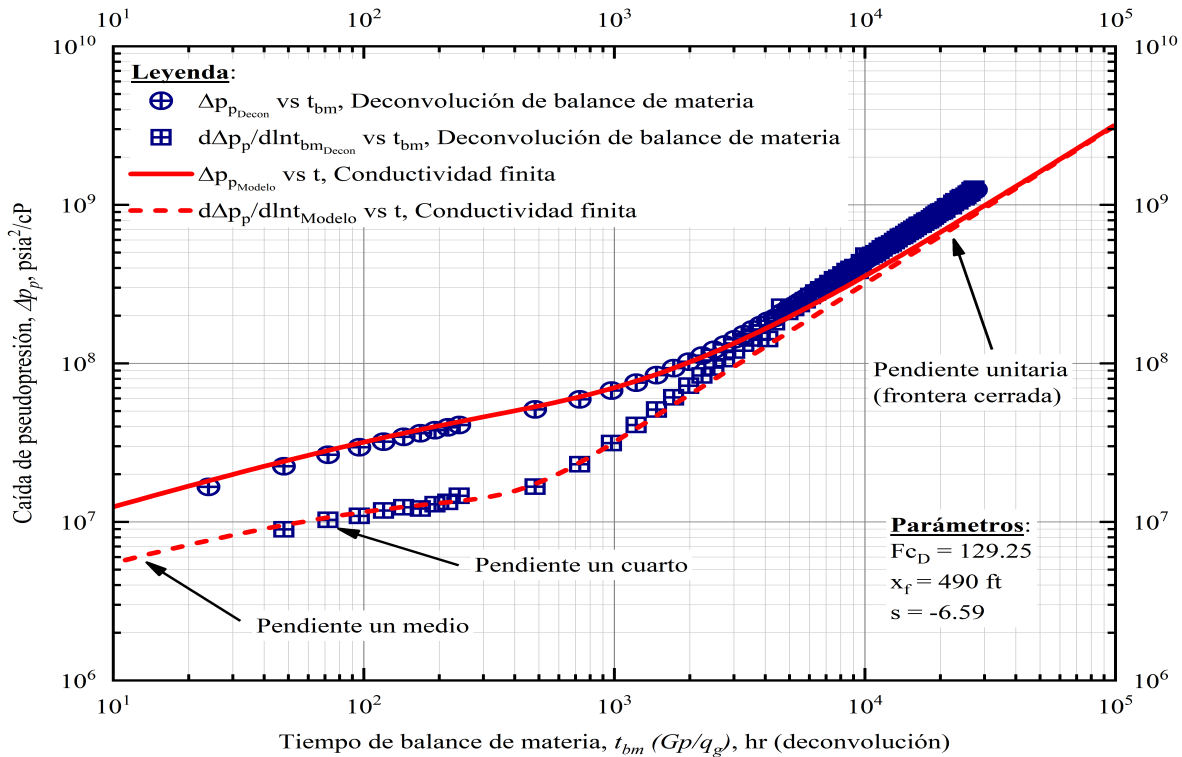


Figura 6.1.6: Ajuste de deconvolución con datos simulados de caso real 2 .

En la Figura 6.1.6 se puede observar el ajuste de la curva simulada y su derivada logarítmica con software comercial. Inicialmente, en la Figura 6.1.5 muestra el ajuste realizado por la DBM, la cual corrige los efectos de periodos de flujo tempranos y tardíos (efectos de frontera), aunque la pendiente unitaria de la DBM en la Figura 6.1.3 se observa mucho más pronunciada y desplazada en comparación con los datos originales de la prueba se comprobaba que dicha pendiente marca efectos de frontera y la diferencia de pendientes entre datos es debido al Tiempo de Balane de Materia. Lo anterior ayuda a la estimación más acertada de las propiedades de la fractura si se hace un ajuste con un modelo aproximado.

Tabla 6.1.4: Comparativa de propiedades de fractura en caso real 2.

	F_{CD} , adim	s , adim	x_f , ft	k , mD
Jesus (2018)	-	-5.58	195	2.03
DBM	73	-5.27	360	2.073

Un comparativo de las propiedades obtenidas de la fractura con la DBM, y un análisis anterior a este, el cual es presentado en la referencia, se muestra en la Tabla 6.1.4.

6.1.3. Caso real 1, inversión Stehfest

Como una extensión del caso real 1, se tomó el principio de la DBM para realizar una comparativa de los métodos de deconvolución entre los modelos propuestos por Bahabanian (2006) y Johnston (1992) cuando se tiene una distorsión causada por el almacenamiento. Sin embargo, para desarrollar el modelo antes mencionado, dicho modelo requiere de un polinomio que ajuste la historia de producción o el gasto medido de una prueba. Como propuesta a este polinomio se optó por realizar un ajuste proponiendo un modelo de flujo^[25] (**Ecuación 6.1.1**) que se aproximara al modelo generado por los datos de la prueba. La ecuación de ajuste al modelo se ha invertido del espacio de Laplace al espacio real mediante un inversor numérico (Ghaver-Stehfest, 1976) considerando la presión, tiempo y coeficiente de almacenamiento adimensional descritos por las **Ecuaciones 6.1.2, 6.1.3 y 6.1.4**; posteriormente, se obtuvieron los valores de Δp y Δt (para pruebas de incremento) y con ellos aplicar la deconvolución propuesta por Bahabanian (2006).

$$p_D(u) = \frac{K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})}{u[C_{Du}[K_0(\sqrt{u}) + s\sqrt{u}K_1(\sqrt{u})] + \sqrt{u}K_1(\sqrt{u})]}, \quad (6.1.1)$$

donde:

$$p_D = \frac{141.2kh}{qB\mu} \Delta p, \quad (6.1.2)$$

$$\Delta t_D = \frac{2.364 \times 10^{-4} k}{\phi \mu c_t r_w^2} \Delta t, \quad (6.1.3)$$

$$C_D = \frac{0.894}{\phi c_t r_w^2 h} C. \quad (6.1.4)$$

En la Figura 6.1.7 se observa que el modelo propuesto se ajusta a los modelos de normalización de la caída de presión y del modelo de Bahabanian (2006), sin embargo, al predisponer de un modelo de flujo que, en primera instancia, no es considerado una deconvolución dicho ajuste funcionará para comprobar los métodos de deconvolución anteriores cuando se tiene una distorsión por almacenamiento.

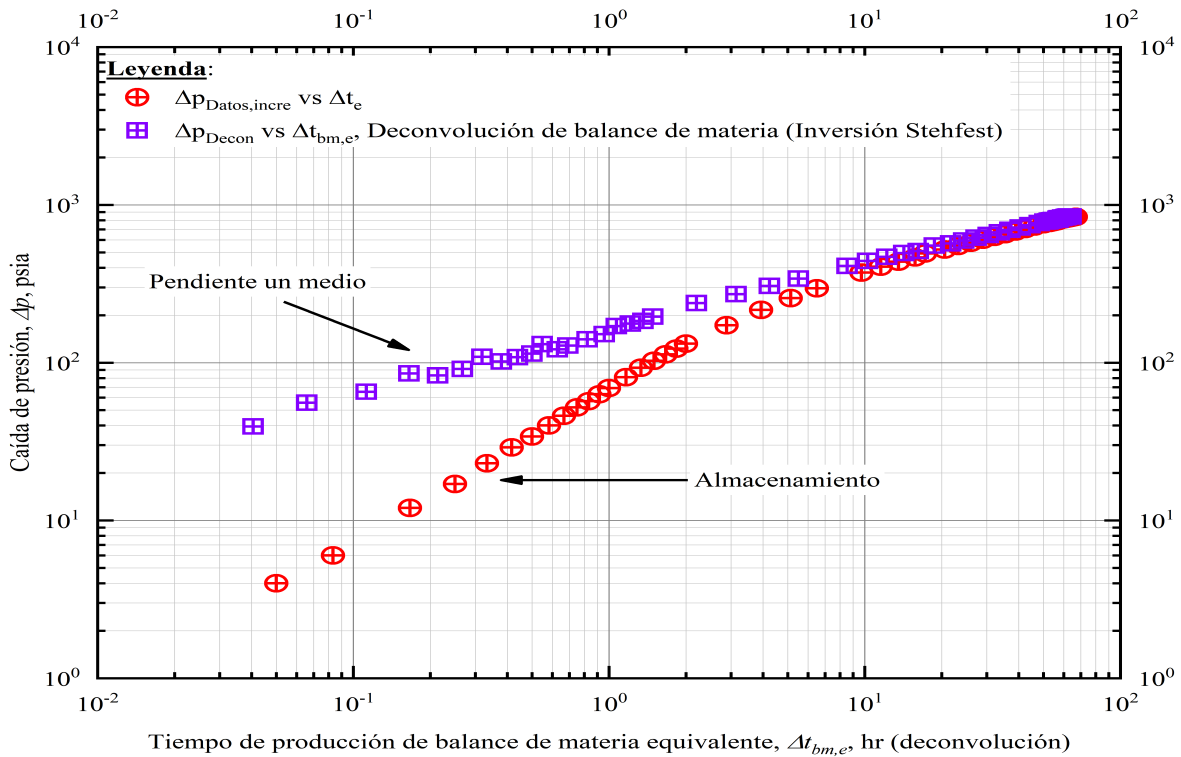


Figura 6.1.7: Modelo de flujo de la inversión y datos de la prueba de incremento.

En la Figura 6.1.8 se logra apreciar una diferencia entre la DBM sin polinomio de Laplace y con polinomio, esto principalmente a tiempos tempranos con un cambio de pendiente

que puede señalar distintas formas de flujo y del tipo de fractura (conductividad de la fractura) que se tiene. Sin embargo, a tiempos largo mantiene una tendencia hacia un posible periodo de flujo radial.

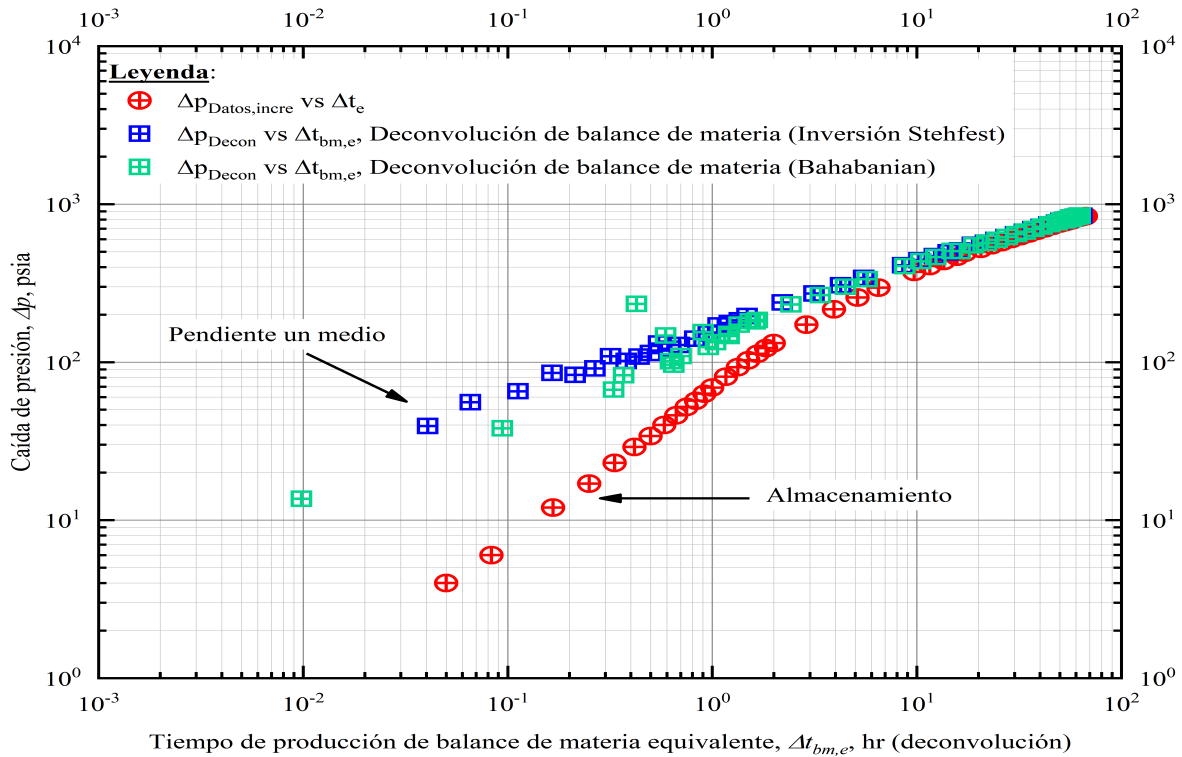


Figura 6.1.8: Comparativa de DBM por Johnston (1992) con inversión por Stehfest y Bahabian (2006) con distorsión por almacenamiento.

Lo anterior se observa al sobreponer las curvas de Deconvolución con datos simulados con software comercial como lo muestra la Figura 6.1.9 y que, logran estimar ciertas propiedades características del yacimiento. Cabe señalar que no se utilizó la derivada logarítmica de ninguno de los datos por ser demasiado dispersa lo cual no permite identificar correctamente periodos de flujo.

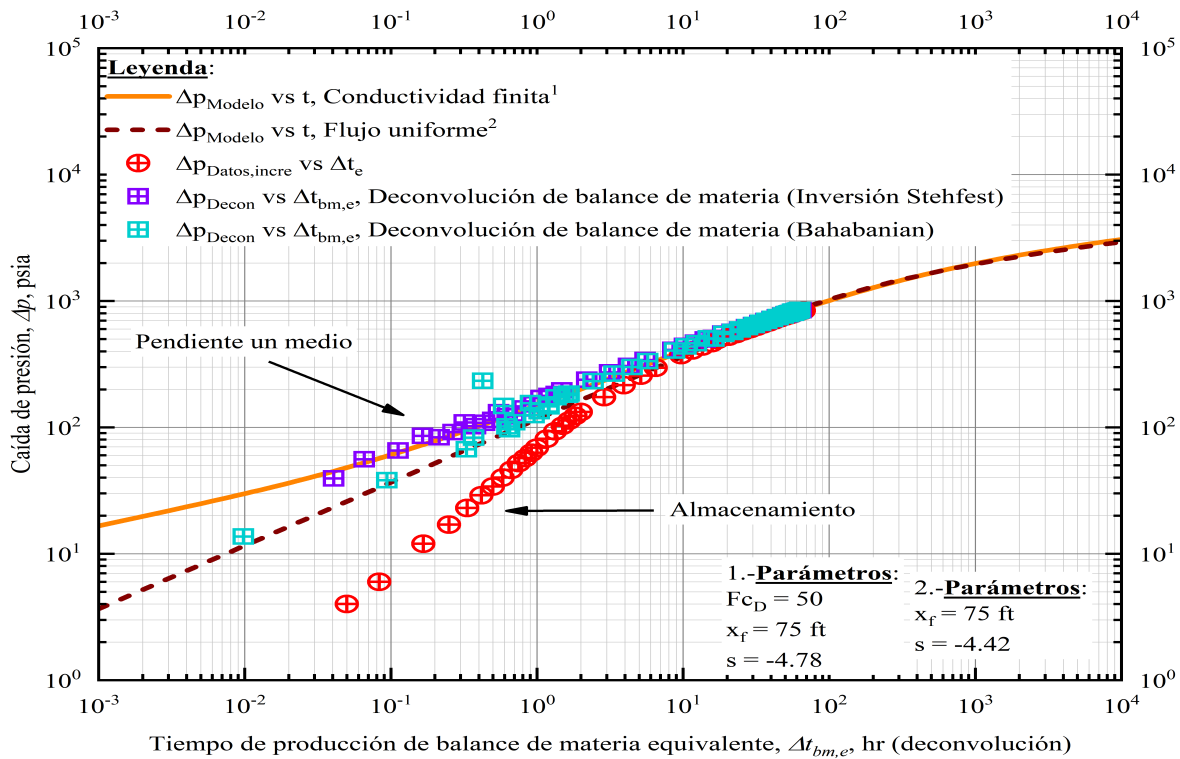


Figura 6.1.9: Método de Bahabanian (2006), Johnstson (1992) con polinomio de Laplace contra datos simulados; caso real 1, inversión Stehfest.

En la Tabla 6.1.5 se muestran ciertos parámetros de yacimiento estimados con el ajuste de las curvas Deconvolucionadas y los datos simulados, se realiza una comparativa con distintos autores que también analizaron esta prueba.

Tabla 6.1.5: Comparativa de propiedades caso real 1, inversión Stehfest (Fetkovich *et al.*, 1984).

	F_{cD} , adim	s , adim	x_f , ft
Fetkovich <i>et al.</i> (1986)	Flujo uniforme	-4.7	93.3
Inversión Stehfest (modelo ajustado)	50	-4.78	75
Johnston (1992)	100	-4.7	74
Bahabanian (2006)	Flujo uniforme	-4.42	75

6.2. Deconvolución por mínimos cuadrados lineales

En este apartado se mostrará el análisis realizado por la deconvolución por mínimos cuadrados lineales, los datos y propiedades obtenidas de la deconvolución; así como una comparativa entre los métodos de deconvolución de balance de materia y la deconvolución por mínimos cuadrados lineales.

6.2.1. Caso real 2, pozo de gas

Como se ha reportado en los métodos anteriores, se tomó el mismo caso mostrado en la Tabla 6.1.3, para realizar un análisis posterior generando la curva de deconvolución a través del problema de mínimos cuadrados lineales. Cabe señalar que, el método de interpolación utilizado para aplicar la deconvolución fue por *splines cúbicos* haciendo uso de la función ya cargado en Matlab[®] llamada *interp1*.

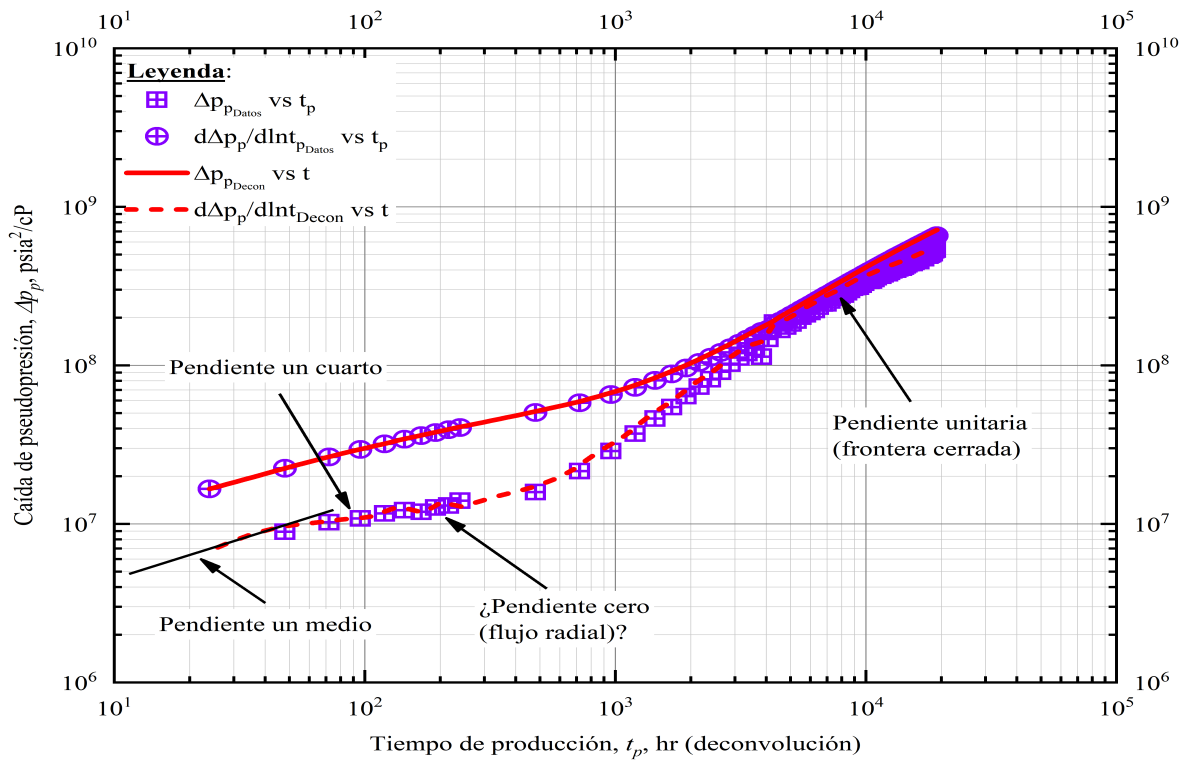


Figura 6.2.1: Deconvolución por Mínimos Cuadrados Lineales.

En la Figura 6.2.1 se muestra la curva generada por mínimos cuadrados y la curva original de datos reportados. Se observa un claro ajuste a tiempos cortos de la prueba generando una mejor perspectiva de los modelos de flujo que predominan en el yacimiento.

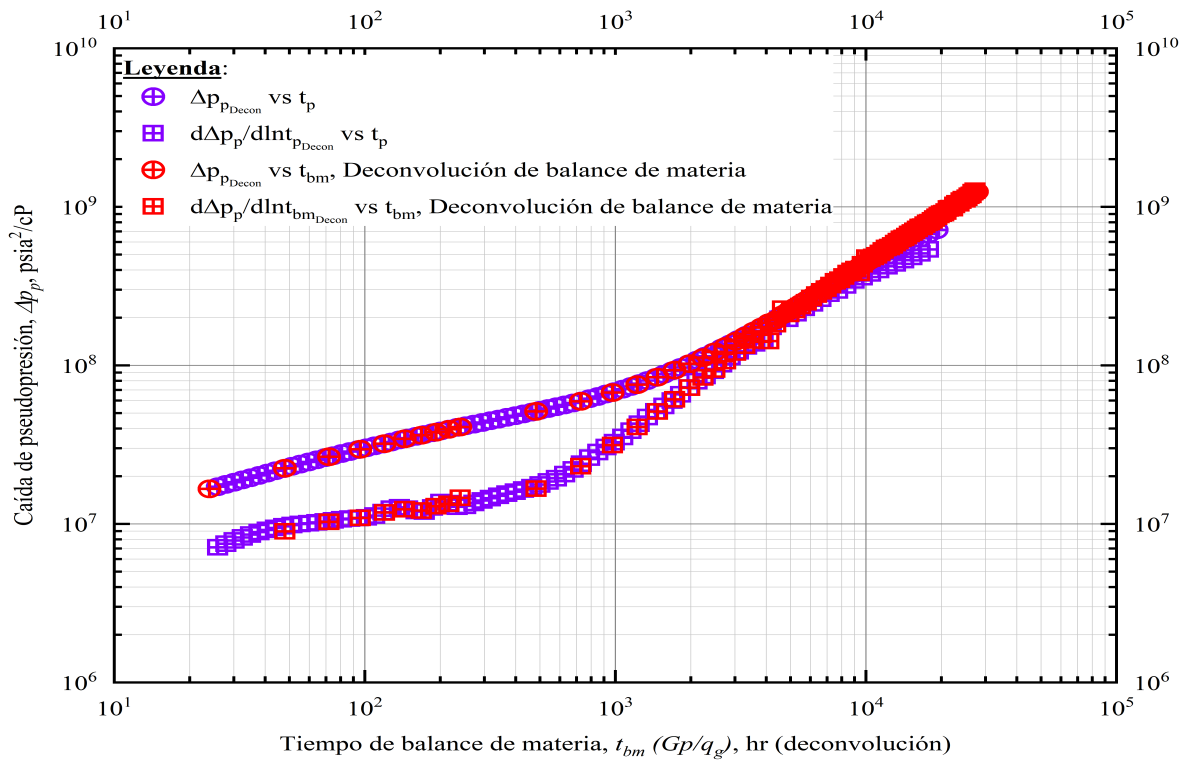


Figura 6.2.2: Comparativa de deconvolución por balance de materia y mínimos cuadrados lineales.

En la Figura 6.2.2 se realiza un ajuste entre los métodos de deconvolución por mínimos cuadrados y la DBM, donde de manera análoga a la Figura 6.2.1 se observa un mejor análisis de los datos a tiempos cortos; sin embargo, el periodo de flujo dominado por la frontera es más prolongado y mejor marcado por la DBM, no obstante se considera que el tiempo de balance de materia realiza este ajuste mostrando dicha notoriedad.

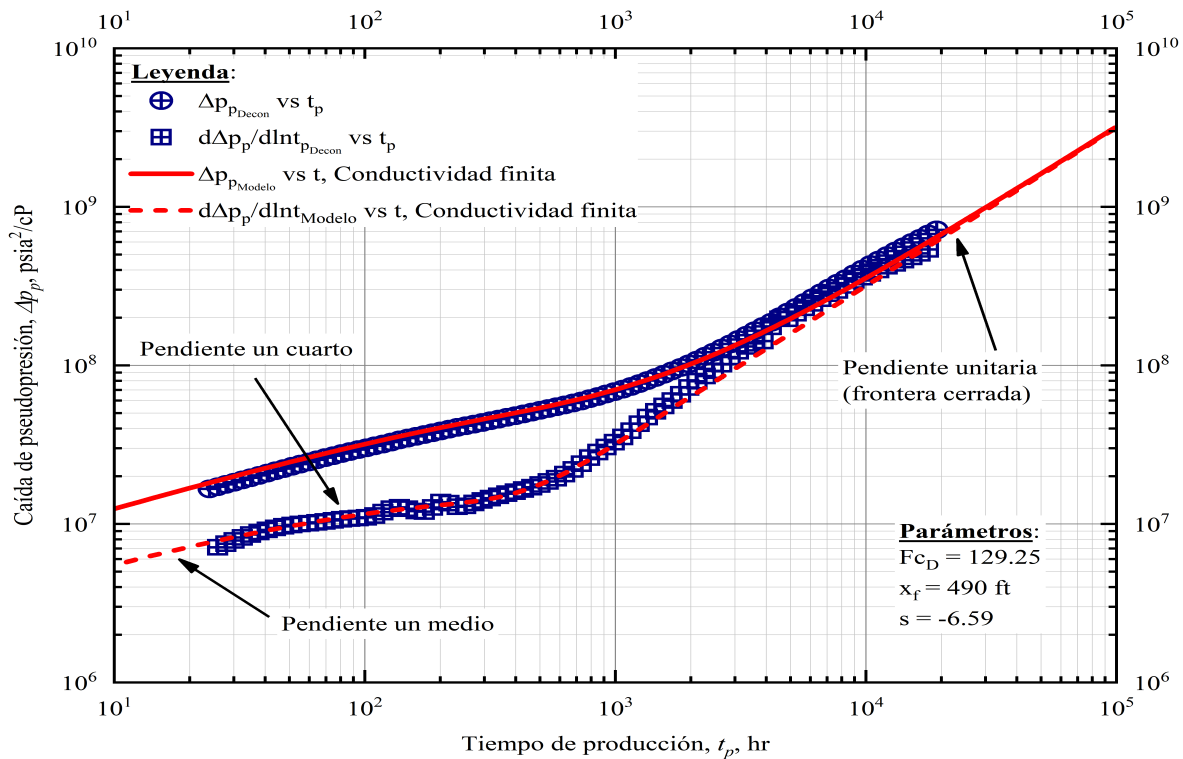


Figura 6.2.3: Deconvolución por MCL contra datos simulados.

Posteriormente, en la Figura 6.2.3 se realizó un ajuste simulando un modelo con software comercial aproximando parámetros del yacimiento que marcan mejor su comportamiento con la deconvolución por mínimos cuadrados.

Tabla 6.2.1: Análisis de parámetros simulados (Figura 6.2.3) con parámetros obtenidos por Autores.

	Fc_D , adim	s , adim	x_f , ft	k , mD
Jesus (2018)	-	-5.58	195	2.03
Deconvolución MCL	191.01	-6.58	490	2.05
DBM	129.25	-6.58	490	3

Finalmente, en la Tabla 6.2.1 se muestran las propiedades de ajuste obtenidas del modelo generado y los métodos de deconvolución aplicados a este caso. Asimismo, se comparó con las propiedades obtenidas anteriormente por Jesus (2018).

6.3. Deconvolución por mínimos cuadrados totales no lineales

En este apartado se muestra el análisis de distintos caso sintéticos tomados por otros autores y generados con software comercial, donde se observa una clara diferencia de los métodos previamente reportados que, como se ha mencionado, un ajuste por Mínimos Cuadrados Totales es mucho más robusto y preciso que otros métodos de solución.

Cabe resaltar que para todos las curvas generadas por deconvolución fueron generadas con 80 nodos, esto como parte del desarrollo de nuestro algoritmo de solución puesto que von Schroeter *et al.* (2004) propone un número de nodos diferente, para más detalle se puede consultar le **Apéndice F**.

6.3.1. Caso sintético 1

En la Tabla 6.3.1 se muestran las propiedades tomadas de Cinar *et al.* (2006) realizado con dichas propiedades al caso sintético para su posterior análisis.

Tabla 6.3.1: Propiedades de caso sintético 1 (tomado de Cinar *et al.*, 2006).

<u>Propiedades del yacimiento</u>	
Porosidad, ϕ , fracción	0.15
Espesor, h, ft	50
Compresibilidad total, c_t , $psia^{-1}$	5×10^{-6}
Radio del pozo, r_w , ft	0.30
Daño promedio, s, adim	4
Radio de drene, r_e , ft	420
Permeabilidad de matriz, k_m , mD	2
Presión inicial, p_0 , psia	8000
Relación de almacenamiento, ω , adim	0.2
Coefficiente de flujo interporoso, λ , adim	5×10^{-5}
Coefficiente de almacenamiento, C , $\frac{bl}{psi}$	9.44215×10^{-5}
<u>Propiedades del fluido</u>	
Viscosidad del aceite, μ_o , cP	1
Factor de volumen del aceite, B_o , $\frac{bl@c.y.}{bl@c.e.}$	1

En la Figura 6.3.1 se muestran los periodos de flujo y el comportamiento de la presión durante la prueba cabe señalar que, para realizar la deconvolución, se tomaron todos los periodos de flujo de la misma

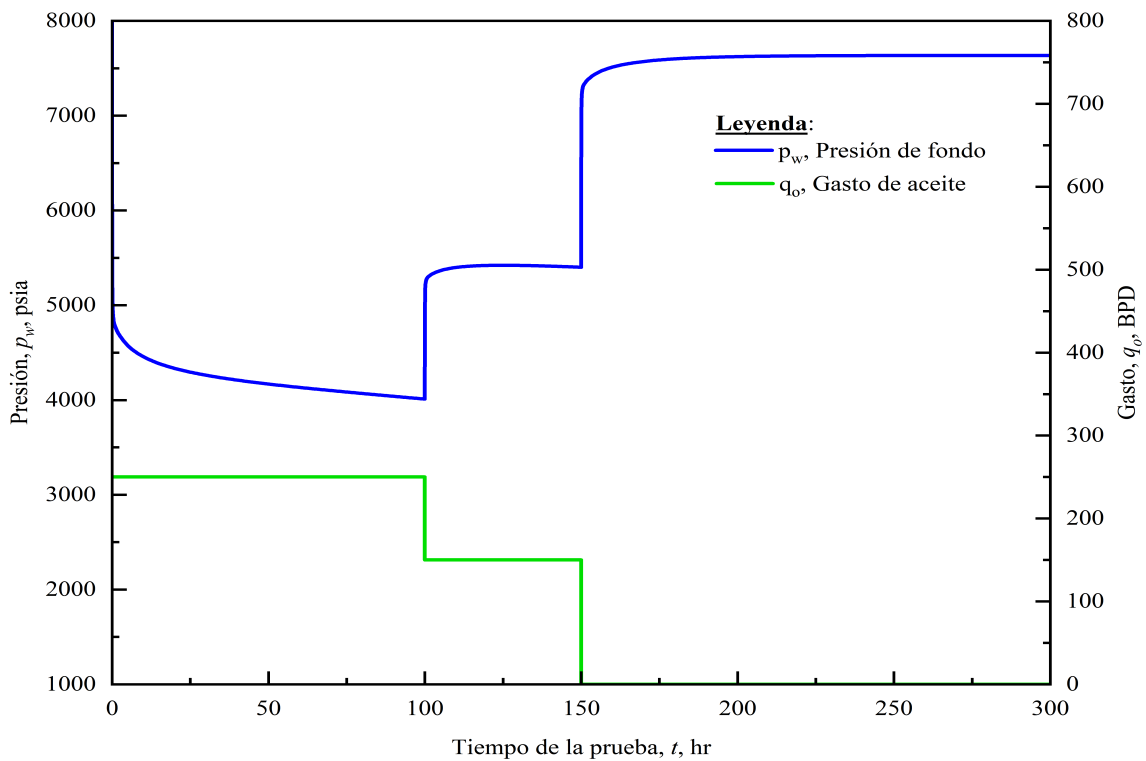


Figura 6.3.1: Datos de presión obtenidos de la simulación del modelo de Cinar *et al.*

Como se muestra en la Figura 6.3.2, el modelo generado por la deconvolución corrige los periodos de cierre cuando éste rebasa el límite de $0.2t_p$ lo que hace que la curva deconvolucionada modele los periodos de flujo tardíos marcando un frontera de no flujo (periodo pseudoestacionario), como se observa en la derivada logarítmica.

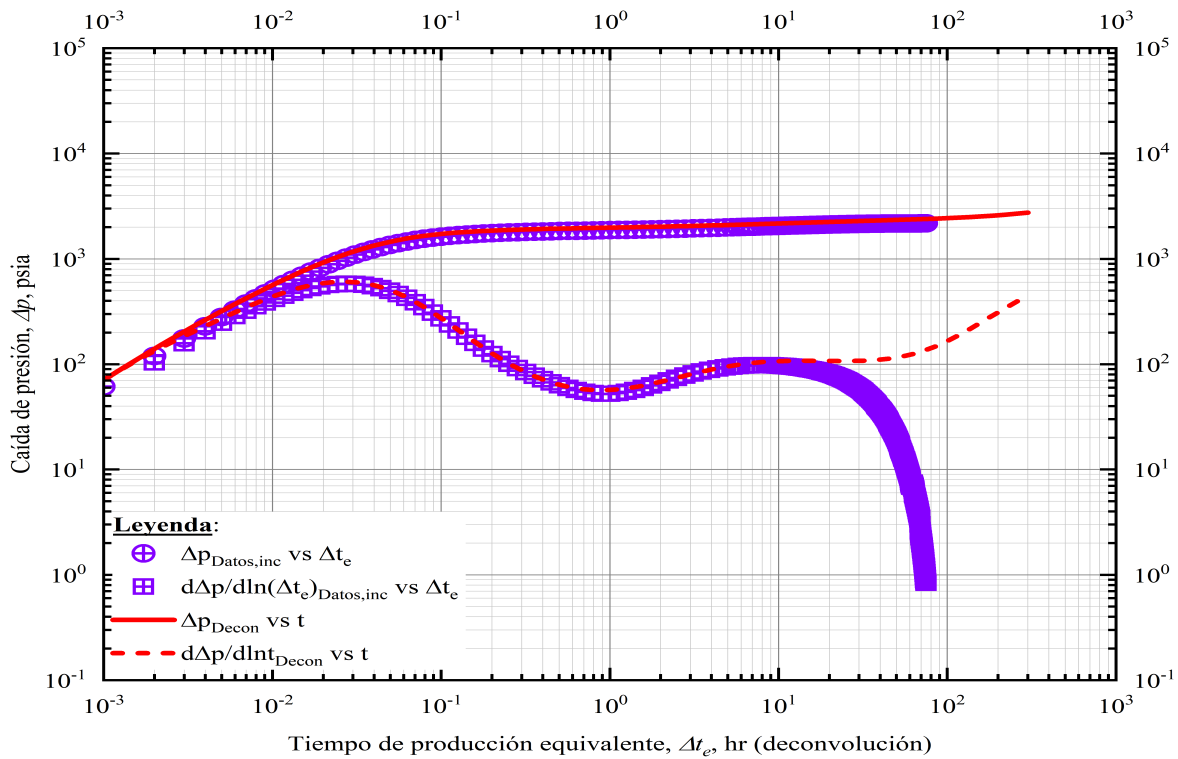


Figura 6.3.2: Datos deconvolucionados y periodo de incremento de la prueba.

Asimismo, como se ha ajustado en métodos anteriores, se generó el modelo de flujo exacto con software comercial y se ajustó con la curva deconvolucionada como lo muestra la Figura 6.3.3 donde se observa que hay un ajuste idéntico entre las mismas; lo anterior, hace énfasis en la funcionalidad y robustez del método.

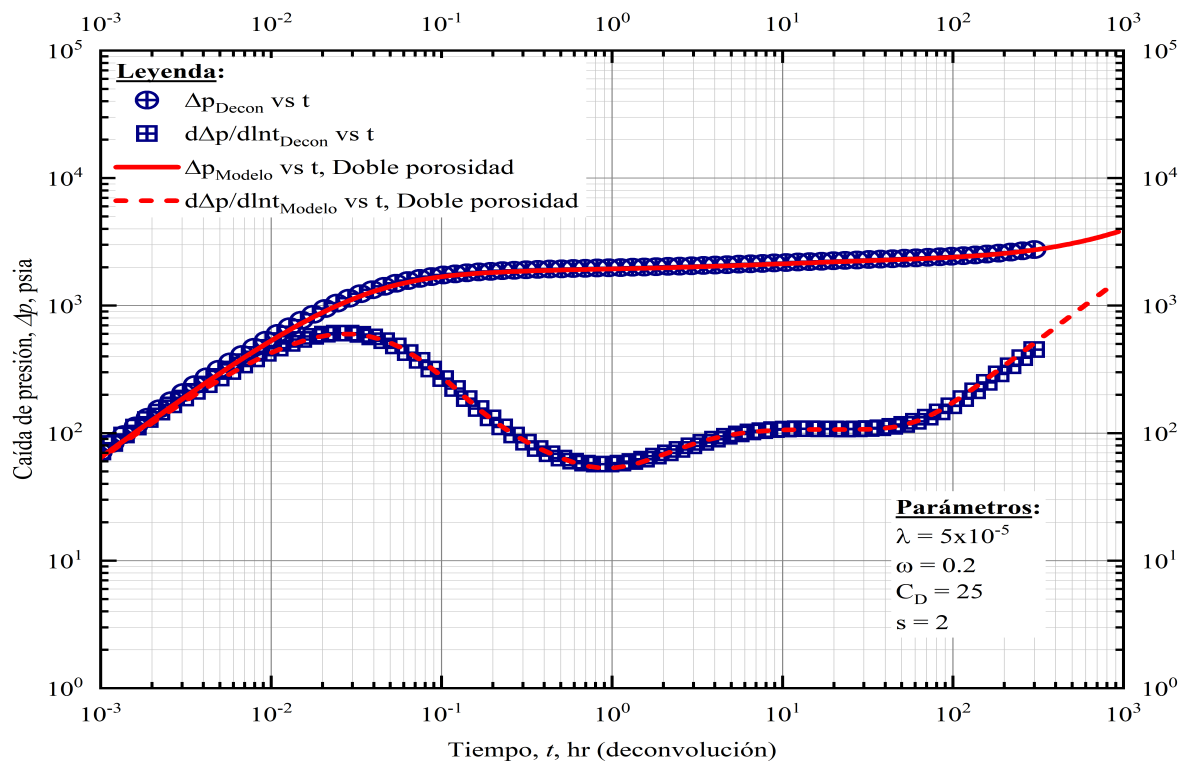


Figura 6.3.3: Ajuste de curva de deconvolución y modelo exacto para yacimiento de doble porosidad.

6.3.2. Caso sintético 2

Tabla 6.3.2: Parámetros de entrada para caso sintético 2 de yacimiento de gas.

<u>Propiedades del yacimiento</u>	
Radio del pozo, r_w , ft	0.276
Espesor, h, ft	17.5
Porosidad, ϕ , fracción	0.36
Presión inicial, p_0 , psia	5000
Temperatura, T, °F	200
Compresibilidad total, c_t , $psia^{-1}$	9.8985×10^{-6}
<u>Propiedades del fluido</u>	
Densidad relativa del gas, γ , fracción	0.7
Factor de volumen del gas, B_g , $\frac{ft^3@c.y.}{ft^3@c.e.}$	3.693×10^{-3}
Viscosidad del gas, μ_g , cP	0.025991

En la Tabla 6.3.2 se muestran los parámetros de entrada, en este caso se analiza un yacimiento de gas seco.

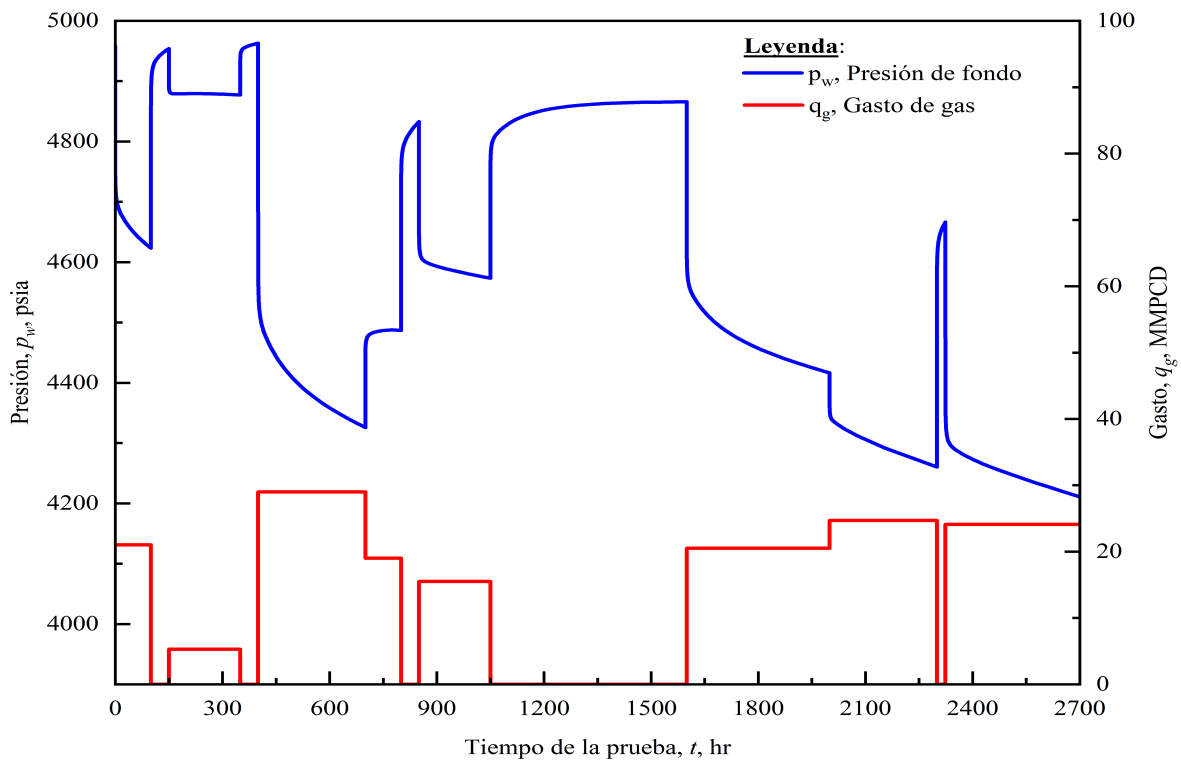


Figura 6.3.4: Periodos de flujo para un tiempo de prueba de 2700 hrs.

En la Figura 6.3.4 se observan los periodos de flujo y de cierre, donde la prueba tiene una duración de 2700 horas. Cabe señalar que hay cambios de almacenamiento en distintos periodos de flujo lo que hace que la deconvolución se vuelva un poco inestable.

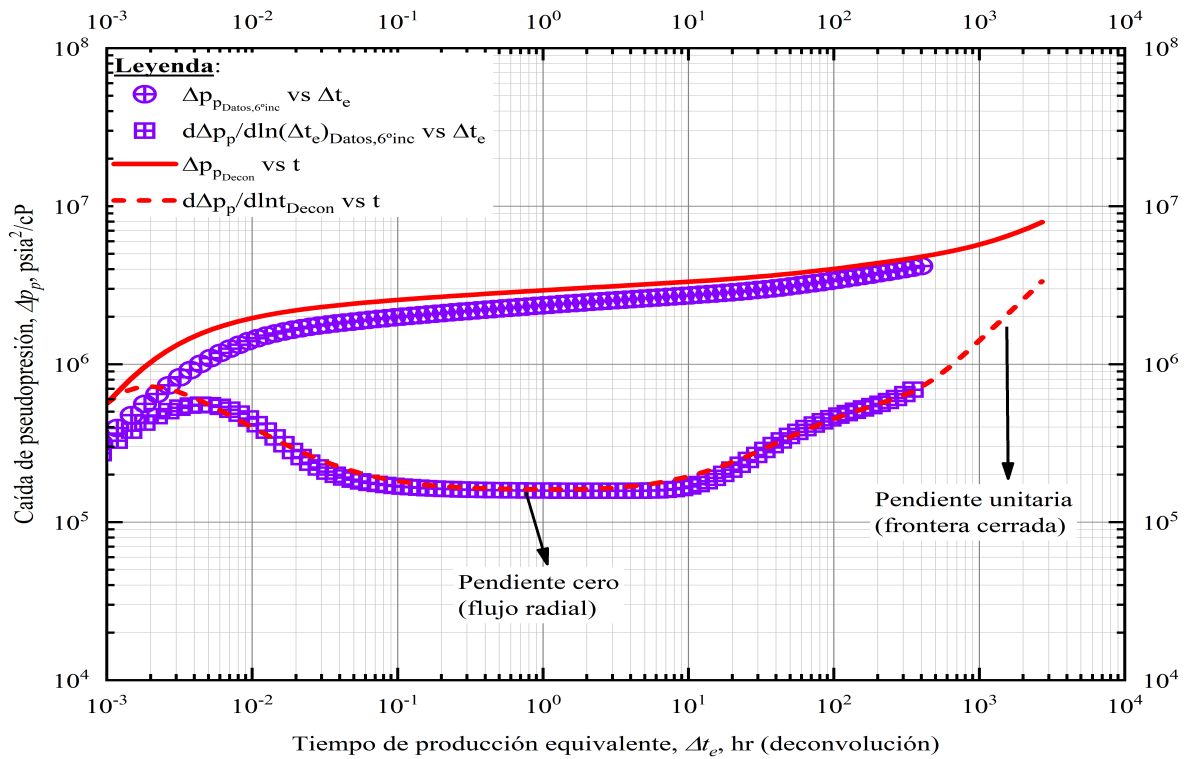


Figura 6.3.5: Deconvolución generada tomando todos los periodos mostrados y sexto periodo de flujo de la prueba en la Figura 6.3.4.

Finalmente, en la Figura 6.3.5 se muestra la curva reconstruida por la deconvolución y la curva determinada por el sexto periodo de flujo; la curva de deconvolución reconstruye la parte de tiempos tardíos que no muestran ningún periodo durante la prueba. El desplazamiento entre la curva de deconvolución y el periodo de flujo se debe a los diversos cambios en los almacenamientos lo que, como se menciono anteriormente, hace un poco inestable la solución teniendo que modificar los pesos en presión y gasto a diferencia de las otras pruebas.

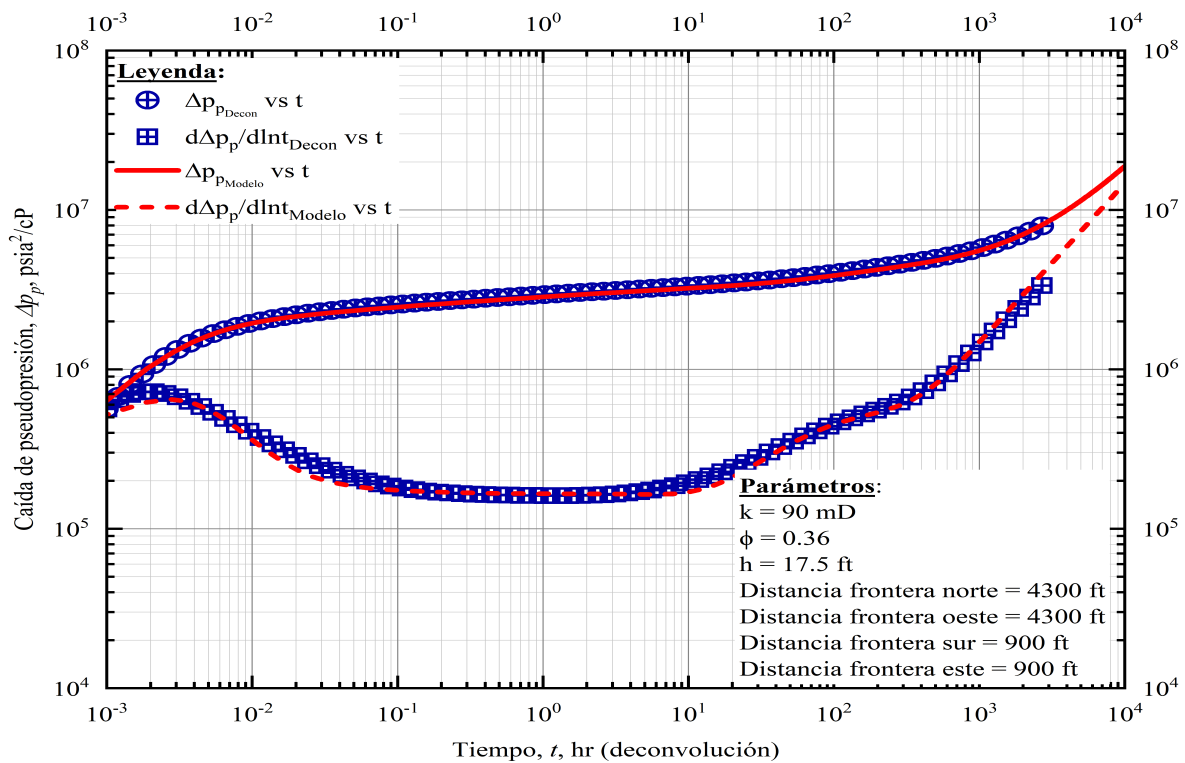


Figura 6.3.6: Modelo exacto y curva reconstruida por deconvolución.

6.3.3. Caso sintético 3

En este caso se recurrió a una prueba mostrada por Ilk (2005) donde se toma íntegramente dicha prueba y se simulo con software comercial.

Tabla 6.3.3: Parámetros de caso sintético 3 (tomado de Ilk, 2005).

<u>Propiedades del yacimiento</u>	
Radio de pozo, r_w , ft	0.3
Espesor, h, ft	30
Permeabilidad de formación, k, mD	3.333
Compresibilidad total, c_t , $psia^{-1}$	3×10^{-6}
Porosidad, ϕ , fraccion	0.10
Distancia Frontera Norte, ft	500
Distancia Frontera Sur, ft	1500
Distancia Frontera Este, ft	1500
Distancia Frontera Oeste, ft	500
Presión inicial, p_0 , psia	5000
Coeficiente de almacenamiento, C_D , adim	
Daño, s, adim	0
Longitud de fractura, x_f , ft	200
Conductividad de fractura, F_{CD} , adim	7.5
Relación de almacenamiento, ω , adim	0.1
Parametro de flujo interposoro, λ , adim	1×10^{-6}
<u>Propiedades del fluido</u>	
Viscosidad del aceite, μ_o , cP	1
Factor de volumen del aceite, B_o , $\frac{bl@c.y}{bl@c.e.}$	1

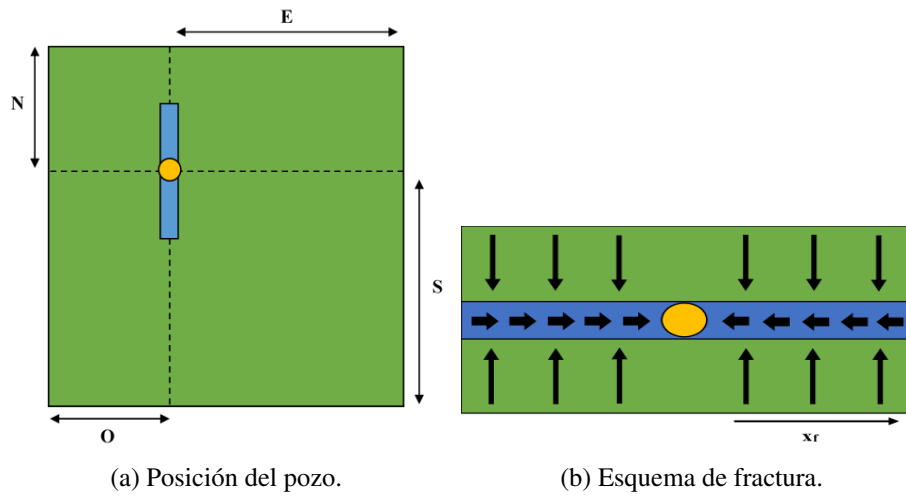


Figura 6.3.7: Esquematación de la posición y fractura del pozo en caso sintético 3.

La Figura 6.3.8 muestra los periodos de flujo y de cierre, lo cuales son idénticos a la prueba analizada por Ilk (2005).

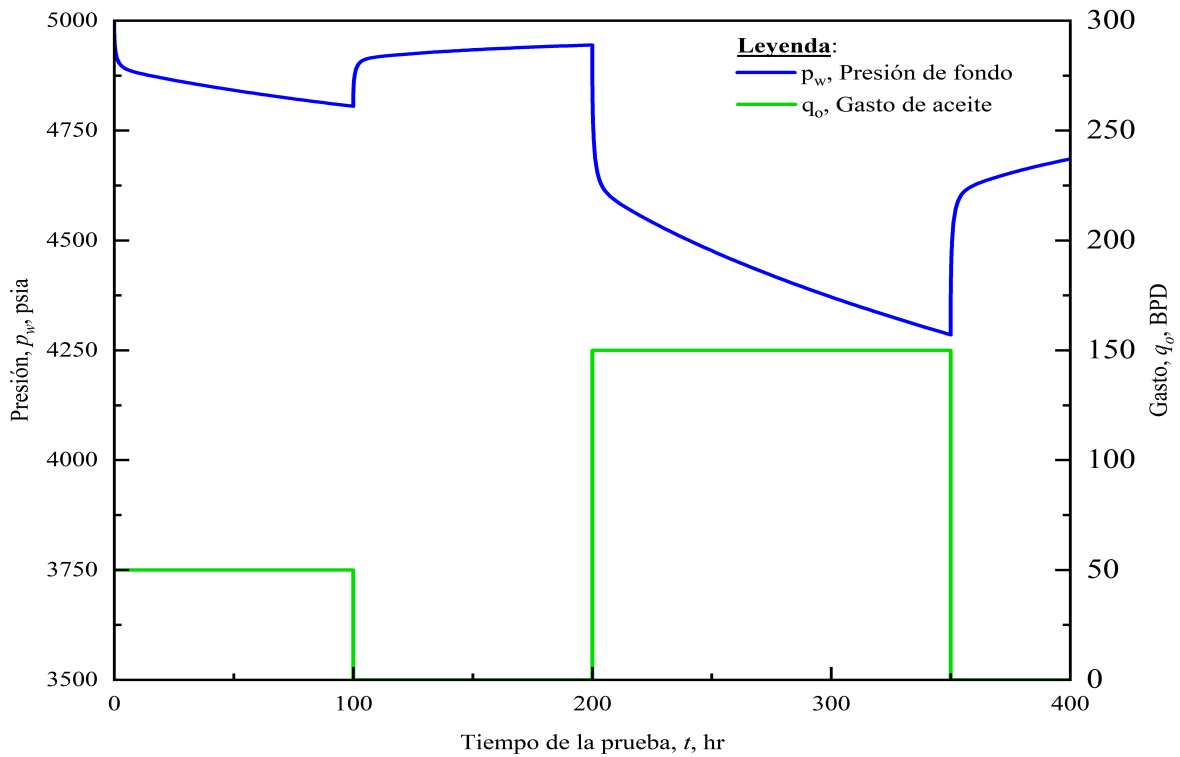


Figura 6.3.8: Datos de presión y gasto de aceite obtenidos de prueba sintética.

Posteriormente, como se ha venido desarrollando, se construyó la prueba tomando todos los periodos de la ésta y se comparo con el segundo periodo de decremento. En la Figura 6.3.9 se observa un buen ajuste en cierta manera de las tendencias de las curvas, aunque un poco desplazadas al inicio aun tomando en consideración el tiempo de producción equivalente.

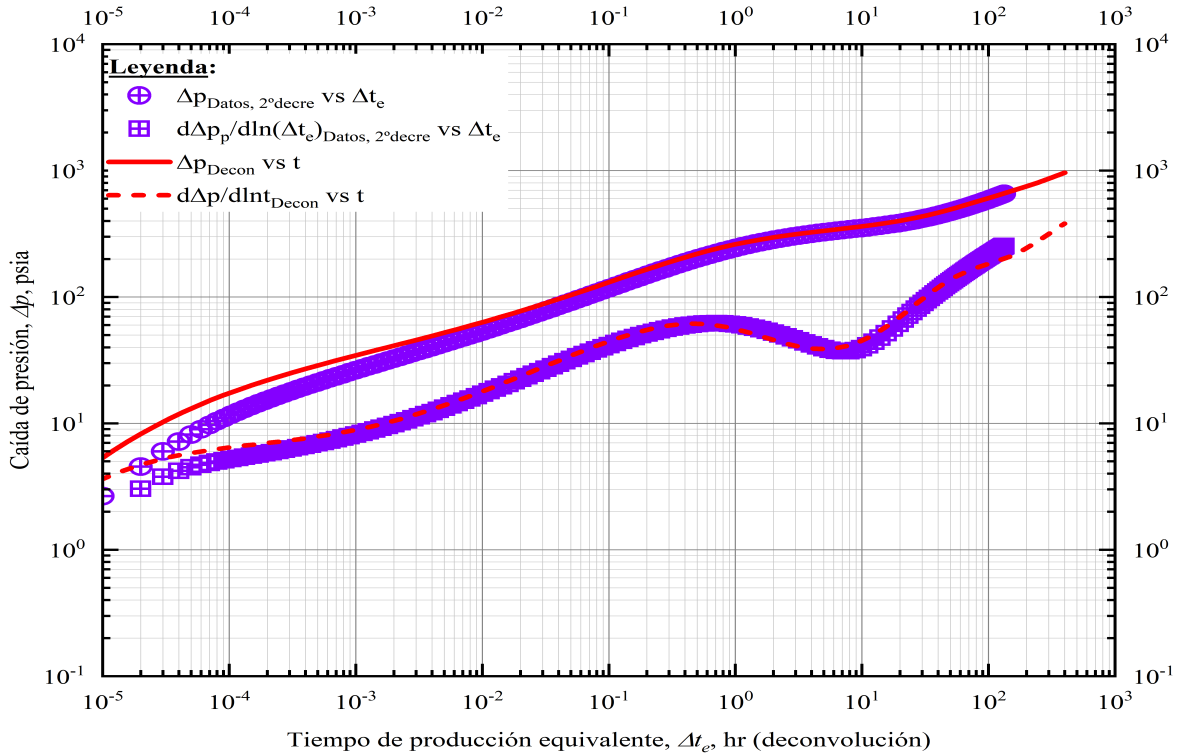


Figura 6.3.9: Datos deconvolucionados y segundo periodo de flujo de caso sintético 3.

Finalmente, en la Figura 6.3.10 se logra observar un muy buen ajuste entre la curva reconstruida y el modelo exacto de la prueba analizada. Cabe señalar que Ilk (2005) en su trabajo no reconstruye los tiempos tempranos de la prueba.

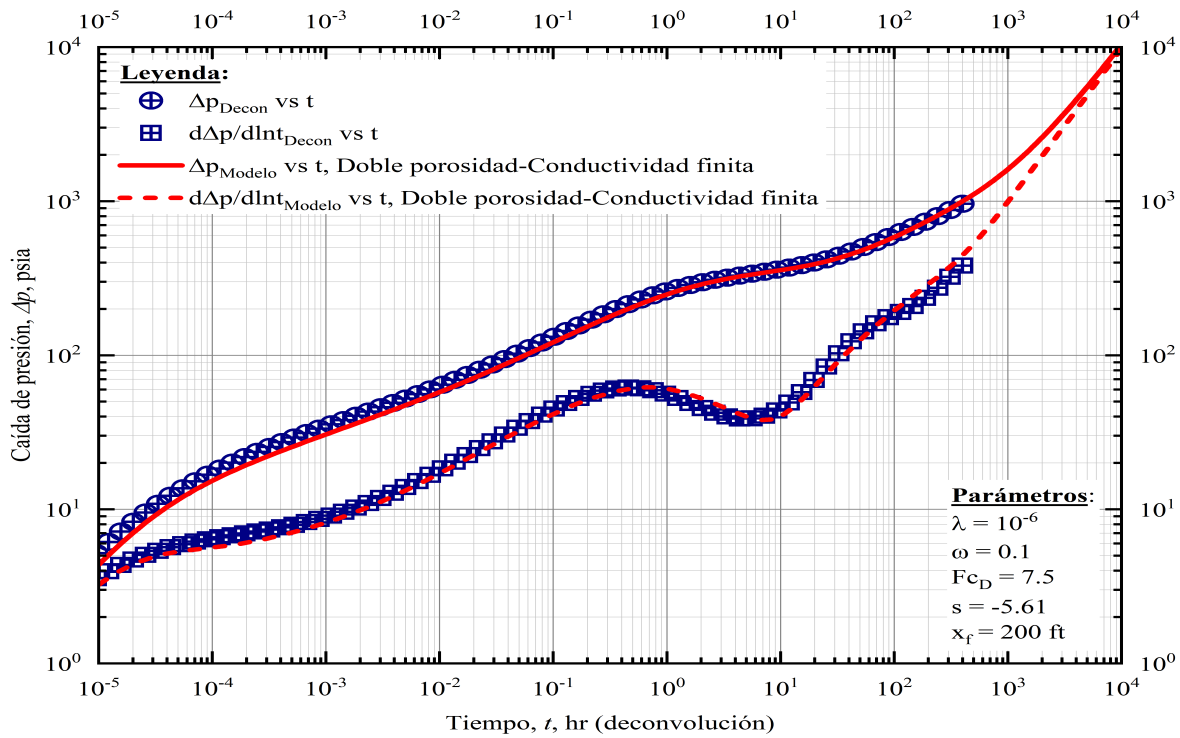


Figura 6.3.10: Curva reconstruida por deconvolución y modelo exacto tomado de Ilk (2005).

6.3.4. Caso Sintético 4

En este caso, al igual que en anteriores, se tomo una prueba mostrada por Onur *et al.* (2010) en su trabajo donde fue analizada para comparar su modelo de deconvolución. A diferencia del trabajo de Onur *et al.* (2010), en esta prueba se agregó error durante la medición de presión y gasto siendo estos del 5 y 15 %, respectivamente. La Tabla 6.3.4 muestra los parámetros de entrada de la prueba así como las coordenadas del pozo colocado en un cuadrado como lo indica la Figura 6.3.11.

Tabla 6.3.4: Propiedades de caso sintético 4 (modificado de Onur *et al.*, 2010).

Propiedades del yacimiento

Presión inicial, p_0 , psia	5000
Porosidad, ϕ , fracción	0.10
Espesor, h , ft	30
Compresibilidad total, c_t , $psia^{-1}$	3×10^{-5}
Radio del pozo, r_w , ft	0.354
Daño promedio, s , adim	2
Permeabilidad, k , mD	100
Distancia Frontera Norte, N , ft	1500
Distancia Frontera Sur, S , ft	500
Distancia Frontera Este, E , ft	500
Distancia Frontera Oeste, O , ft	1500

Propiedades del fluido

Viscosidad del aceite, μ_o , cP	1
Factor de volumen del aceite, B_o , $\frac{bls@c.y.}{bls@c.e.}$	1

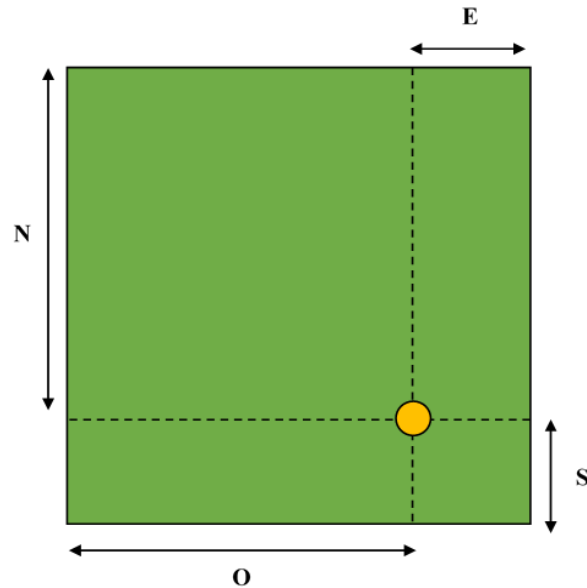


Figura 6.3.11: Colocación del pozo en un yacimiento con frontera cerrada (cuadrado) (modificado de Onur *et al.*, 2010).

La Figura 6.3.12 muestra los datos de presión y gasto obtenidos de la simulación, donde se puede apreciar la variación de dichos datos con y sin error, previamente mencionado.

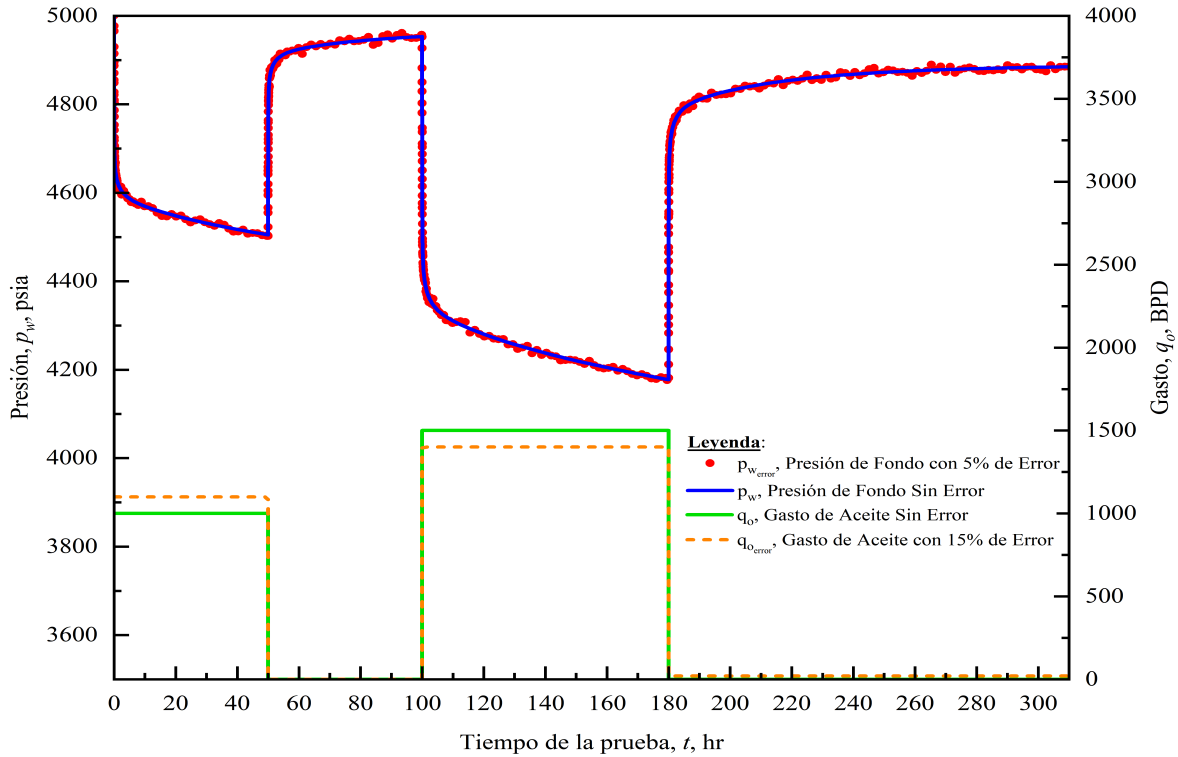


Figura 6.3.12: Datos de presión y gasto con 5% y 15% de error respectivamente.

Se construyó la curva de deconvolución y se comparó con el segundo periodo de flujo, así es como la Figura 6.3.13 marca notablemente la robustez del método para manejar los datos de entrada con errores mayores al $\pm 2\%$. Cabe señalar que para reconstruir la prueba solo se modificó la curvatura de su valor inicial en menor medida por el ruido mostrado.

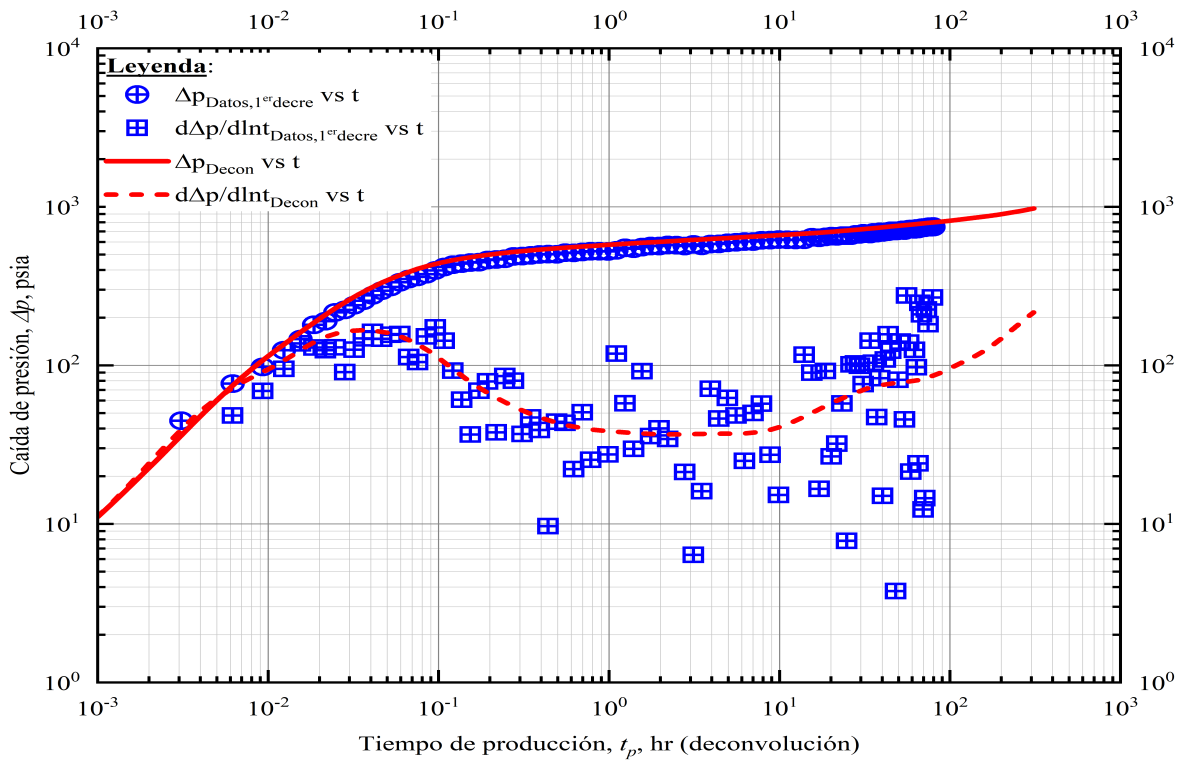


Figura 6.3.13: Curva deconvolucionada y curva con datos con 5 % de error en presión y 15 % en gasto.

Finalmente, se compara la curva de deconvolución con el modelo exacto de la prueba (sin error) mostrando en la Figura 6.3.14 un ajuste casi perfecto excepto por los periodos tardíos (frontera) aunque con una ligera separación del modelo exacto la curva de deconvolución sigue la misma tendencias que el modelo exacto.

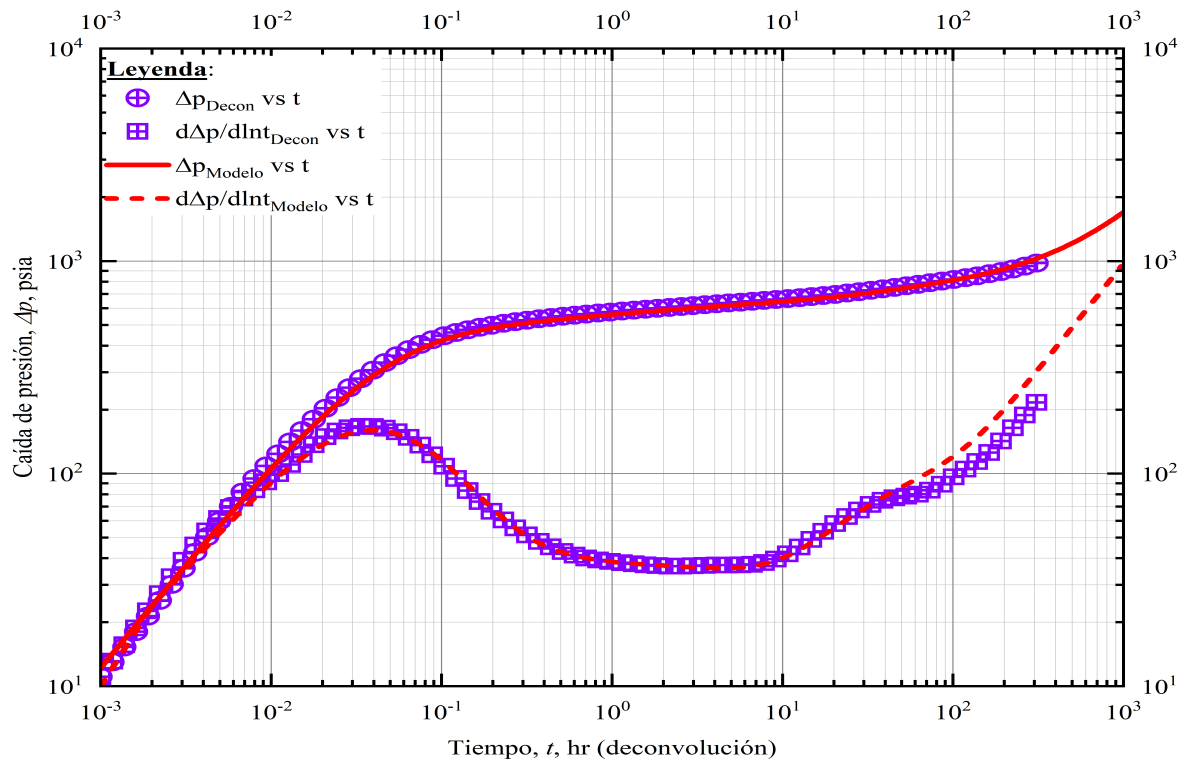


Figura 6.3.14: Curva reconstruida y modelo exacto el yacimiento.

Conclusiones

1. En este trabajo se realizó un estudio comparativo entre cuatro diferentes métodos de deconvolución. Para ello se desarrolló una herramienta de cómputo que plasma esos métodos a través de diferentes algoritmos en lenguaje M de Matlab[®], debido a la gran habilidad de este entorno para el cómputo de matrices.
2. El uso de los métodos de deconvolución no debe realizarse sin una previa documentación del tema en cuestión.
3. Pese a que la deconvolución transforma históricos de producción de gasto variable a un gasto constante, el uso de los diferentes métodos depende en gran medida de dos factores: de la aplicación deseada, y de la calidad de los datos para procesar.
4. La deconvolución por balance de materia (DBM) para poder analizar lo que sucede durante el almacenamiento es práctica para el análisis de periodos fluyentes, sin embargo esta implementación no reduce el efecto de errores asociados a las mediciones. Por su parte, los métodos que consideran efectos dominados por las fronteras permiten un mejor análisis de los datos de producción.
5. Los métodos basados en MCL se encuentran altamente influenciados por los errores en las mediciones debido a la falta de restricciones adecuadas para la optimización. El método de von Schroeter *et al.* (2004) que implementa mínimos cuadrados totales es el más robusto y por ende el que tiene mayor aplicación y que abrió una nueva brecha en el análisis de pruebas de presión. Sin embargo, los métodos de mínimos cuadrados tienen

una gran base en resolver problemas asociados a errores con distribuciones normales, es decir que cuando existen errores que no siguen la distribución normal, estos algoritmos fallan, lo que nos lleva al siguiente punto.

6. Los datos de campo deben de ser analizados con cautela debido a que los errores en las herramientas de medición pueden registrar fenómenos inherentes a la respuesta real del pozo.
7. No hay métodos mejores ni absolutos. El uso conjunto de diferentes herramientas debe propiciar un mejor análisis de los datos.

Recomendaciones

- Debido a que la deconvolución de pruebas de presión-producción requiere de herramientas computacionales más sofisticadas que el uso de curvas tipo (solo por mencionar un ejemplo) la comunidad estudiantil no ha tenido acceso a estos temas, es importante que se incursionen en temas actuales. Por ello como primera recomendación se propone que aquellos interesados en el tema busquen otros métodos robustos que existen actualmente como los desarrollados por: Levitan *et al.* (2005), Onur *et al.* (2010) e İlk (2005).
- Los métodos podrían utilizar otros algoritmos para su resolución y comparar su efecto.
- Para generar un análisis más robusto de las pruebas de presión-producción es necesario incorporar herramientas de filtrado de datos. Esto con el fin de mejorar la resolución de los datos y de la respuesta que está brindando el sistema del pozo.
- Es necesario que aquella persona que incursione en estos temas sea capaz de dominar métodos numéricos para la solución de problemas de optimización.
- Como recomendación final se sugiere que se elabore un estudio del flujo de trabajo que incorpore a la deconvolución, con el objetivo de mejorar la caracterización dinámica del yacimiento.

Nomenclatura

Funciones

- F = Función algoritmo Stehfest
- $f(t)$ = Función de entrada
- $g(t)$ = Función respuesta
- u = Transformada de Laplace
- $Z(\tau)$ = Función respuesta interpolada

Variables

- A = Matriz de coeficientes
- a = Peso para función derivada
- b = Peso para función derivada
- \bar{b} = Vector de datos de entrada
- C = Coeficiente de almacenamiento, $\left[\frac{Bls}{psia} \right]$
- c = Peso para función derivada
- c_t = Compresibilidad total, $[psia^{-1}]$
- D = Matriz de nodos
- h = Espesor, $[ft]$

Nomenclatura

J	=	Jacobiano
k	=	Permeabilidad, $[mD]$
k_r	=	Permeabilidad relativa
\bar{k}	=	Vector de $[1, \dots, 0]^T$
m	=	Pendiente logarítmica, $\left[\frac{cP \cdot BPD}{mD \cdot ft}\right]$
$m(p)$	=	Pseudopresión, $\left[\frac{psia^2}{cP}\right]$
$m^*(p)$	=	Pseudopresión modificada, $\left[\frac{psia^2}{cP}\right]$
p_0	=	Presión inicial, $[psia]$
p	=	Presión, $[psia]$
$p_{wf,c}$	=	Presión de fondo fluyendo al cierre, $[psia]$
p_{wf}	=	Presión de fondo fluyendo, $[psia]$
p_{ws}	=	Presión de fondo estática, $[psia]$
p_s	=	Presión a gasto unitario, $\left[\frac{psia}{BPD}\right]$ o $\left[\frac{psia}{MMPCD}\right]$
q	=	Gasto, $[BPD]$ o $[MMPCD]$
q_m	=	Gasto medido, $[Bls]$ o $[MMPC]$
Q_p	=	Producción acumulada, $[Bls]$ o $[MMPC]$
q_{ref}	=	Gasto de referencia, $[BPD]$ o $[MMPCD]$
q_w	=	Gasto del pozo, $[BPD]$ o $[MMPCD]$
$q_{wbs,i}$	=	Gasto en almacenamiento durante incremento, $[BPD]$ o $[MMPCD]$
q_0	=	Gasto inicial, $[BPD]$ o $[MMPCD]$
\bar{r}	=	Vector de residuos
r_w	=	Radio del pozo, $[ft]$

Nomenclatura

s	=	Daño promedio, <i>Adimensional</i>
t	=	Tiempo, [hr] o [día]
$t_{ap}(t)$	=	Pseudotiempo, $[\frac{hr}{cP \cdot mD}]$ o $[\frac{día}{cP \cdot mD}]$
t_{bm}	=	Tiempo de balance de materia, [hr] o [día]
t_e	=	Tiempo equivalente de producción, [hr] o [día]
$t_{p,e}$	=	Tiempo de producción estimado, [hr] o [día]
V	=	Variable algoritmo Stehfest
\bar{x}	=	Vector de variables a estimar
x'	=	Vector de parámetros z
x''	=	Vector de parámetros p_0 y y
\bar{y}	=	Vector de gastos corregidos
z_k	=	Respuesta inicial a interpolar

Funciones matemáticas

K_0	=	Función Bessel modificada de orden cero
K_1	=	Función Bessel modificada de primer orden

Letras griegas

$\psi(t)$	=	Función resultante
α	=	Factor de búsqueda de línea
α_k	=	Valor interpolado
β	=	Pendiente interpoladora
γ_g	=	Densidad relativa del gas, fracción
δ	=	Error (von Schroeter <i>et al.</i> , 2004)

Nomenclatura

ε	=	Error (Kuchuk <i>et al.</i> , 1990)
θ	=	Interpolante unitario (gasto)
ϑ	=	Error de convergencia, 10^{-5} a 10^{-8} (von Schroeter <i>et al.</i> , 2004)
κ	=	Curvatura
λ_{def}	=	Peso en presión, [$psia^2$]
λ	=	Coefficiente de flujo interporoso, fracción
μ	=	Punto medio en parametrización (von Schroeter <i>et al.</i> , 2004)
$\mu_{g,o}$	=	Viscosidad de aceite o gas, [cP]
ν_{def}	=	Peso en gasto, [$\frac{psia^2}{BPD^2}$] o [$\frac{psia^2}{MMPCD^2}$]
ρ	=	Radio de parametrización (von Schroeter <i>et al.</i> , 2004)
σ	=	Valores característicos (SVD)
τ	=	Variable de integración
τ_k	=	Valor a interpolar, [hr] o [$día$]
ϕ	=	Porosidad, fracción
ω	=	Relación de almacenamiento, fracción

Índices

i	=	i-esimo componente
k	=	k-esimo componente
n	=	n-esimo componente

Subíndices

c	=	Momento de cierre de pozo
D	=	Adimensionalidad

Nomenclatura

d = Prueba de decremento

i = Prueba de incremento

N = N-ésimo componente

w = En pozo

wbs = Almacenamiento

Superíndices

T = Transpuesta

\dagger = Pseudoinversa de Moore-Penrose

Bibliografía

- [1] Al-Hussainy, R., Crawford, P. B. y Ramey, H. J., Jr.: “*The Real of Flow Gases Throught The Porous Media*”, Texas A&M, Imperial College (1961).
- [2] Agarwal, R. G.: “‘*Real Gas Pseudo-Time*’ A New Function for Pressure Buildup Analysis of MHF Gas Wells”, SPE 8279, Las Vegas, Sept. 23-26.
- [3] Agarwal, R. G.: “A New Method to Account for Producing Time Effects When Draw-down Type Curves Are Used to Analyze Pressure BuildUp and Other Test Data”, SPE 9289, presentado en la conferencia y exhibición técnica anual, 21-24 de septiembre, Dallas, Texas. (1980).
- [4] Bahabanian, O.: “*Explicit Deconvolution of Wellbore Storage Distorted Well Data*”, Msc. Thesis, Texas A & M U (2006).
- [5] Blasingame, T. A.: “*Variable Rate Analysis: Transient and Pseudosteady State Methods of Interpretation and Applications*”, M.S. Thesis, Texas A&M University, Texas (1986).
- [6] Björck, Å.: “*Numerical Methods for Least Squares Problems*”, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, EE. UU. (1996),
- [7] Bostic, J. N., Agarwal, R. G., y Carter, R. D.: “*Combined Analysis of Postfracturing Performance and Pressure Buildup Data for Evaluating an MHF Gas Well*”, JPT (1980).

Bibliografía

- [8] Cheng, Y., Lee, W. J. y McVay, D. A.: “*A Deconvolution Technique Using Fast-Fourier Transforms*”, Artículo SPE 84471, presentado en la conferencia y exhibición técnica anual, 5-8 de octubre, Denver, Colorado (2010).
- [9] Cinar, M. et al.: “*A Comparative Study of Recent Robust Deconvolution Algorithms for Well-Test and Production-Data Analysis*”, SPE 102575, presentado en la conferencia y exhibición técnica anual, 24-27 de septiembre, San Antonio, Texas. (2006).
- [10] Coats, K. H., Rapoport, L. A. y McCord, J. R.: “*Determination of Aquifer Influence Functions From Field Data*”, Artículo SPE 897, pp. 1417-1424, JPT (1964).
- [11] Duhamel, J. M. C.: “*Mémoire sur la méthode générale relative au mouvement de la chaleur dans les corps solides plongés dans les milieux dont la température varie avec le temps*”, J. de Ec. Polyt., Paris (1833).
- [12] Fetkovitch, M. J. y Vienot, M. E.: “*Rate Normalization of Buildup Pressure By Using Afterflow Data*”, JPT (1984).
- [13] Gajdica, R. J., Wattenbarger, R. A. y Startzman, R. A.: “*A new Method of Matching Aquifer Performance and Determining Original Gas in Place*”, SPE agosto (1988).
- [14] Gladfelter R. E., Tracy G. W. y Wilsey L. E.: “*Selecting Wells Which Will Respond to Production-stimulation Treatment*”, Presented at the spring meeting of the Mid-Continent District, Division of production (1955).
- [15] Hamming, R. W.: “*Numerical Methods for Scientists and Engineers*”, New York (1973), McGraw-Hill, Segunda Edición.
- [16] Ilk, D.: “*Deconvolution of Variable Rate Reservoir Performance Data Using B-Splines*”, Msc.Thesis, Texas A & M U (2005).
- [17] Johnston, J. L.: “*Variable Rate Analysis of Transient Well Test Data Using Semi-Analytical Methods*”, Msc. Thesis, Texas A & M U (1992).

Bibliografía

- [18] Kuchuk, F. J. y Ayestaran, L.: “*Analysis of Simultaneously Measured Pressure and Sandface Flow Rate in Transient Well Testing*”, JPT (1985).
- [19] Kuchuk, F. J., Carter, R. G. y Ayestaran, L.: “*Deconvolution of Wellbore Pressure and Flow Rate*”, SPE marzo (1990)
- [20] Kuchuk, F. J., Onur, M. y Hollaender, F.: “*Pressure Transient Formation and Well Testing*”, ELSEVIER (2010).
- [21] Levitan, M. M.: “*Practical Application of Pressure/Rate Deconvolution to Analysis of Real Well Tests*”, SPE 84290, presentado en la conferencia y exhibición técnica anual, 5-8 de octubre, Denver, EE. UU. (2005).
- [22] Martínez, J. A.: “*Estudio comparativo entre los modelos y métodos de análisis de pruebas de presión y datos de producción como herramientas para la caracterización dinámica de yacimientos*”, Tesis Licenciatura, UNAM (2018).
- [23] Matlab® Version 2019a
- [24] Marquardt, D. W.: “*An Algorithm Least-Squares Estimation Nonlinear Parameters*”, pp. 431-441, Vol. 11, NO. 2, June (1963).
- [25] Mavor, M. J. y Cinco-Ley, H.: “*Transient Pressure Behavior of Naturally Fractured Reservoirs*”, Artículo SPE 7977 (1979).
- [26] Mendes, L. C. C., Tygel, M. y Correa, A. C. F.: “*A Deconvolution Algorithm for Analysis of Variable-Rate Well Test Pressure Data*”, Artículo SPE, 19815 presentado en la conferencia y exhibición técnica anual, 8-11 de octubre, San Antonio, Texas (1989).
- [27] Onur, M. y Kuchuk, F. J.: “*A New Pressure-Rate Deconvolution Technique Based on Pressure Derivatives for Pressure Transient Test Interpretation*”, Artículo SPE 134315, presentado en la conferencia y exhibición técnica anual, 19-22 de septiembre, Florencia, Italia (2010).

Bibliografía

- [28] Raghavan, R.: “*Well Test Analysis: Wells Producing by Solution Gas Drive*”, Artículo SPE 5588, SPE Journal (1976).
- [29] Rouboutsos, A. y Stewart, G.: “*A Direct Deconvolution or Convolution Algorithm for Well Test Analysis*”, Artículo SPE 18157, presentado en la conferencia y exhibición técnica anual, 2-5 de octubre, Houston, Texas (2010).
- [30] Stehfest, H.: “*Numerical Inversion of Laplace Transforms*”, ACM 13 (1), pp. 47-49 (1970).
- [31] Stewart, G., Wittmann, M.J. y Meunier, D.: “*Afterflow Measurement and Deconvolution in Well Test Analysis*”, Artículo SPE 12174, presentado en la conferencia y exhibición técnica anual, 5-8 de octubre, San Francisco, California (2010).
- [32] Thompson, L. G. y Reynolds, A. C.: “*Analysis of Variable-Rate Well-Test Pressure Data Using Duhamel’s Principle*”, SPE octubre (1986).
- [33] van Everdingen, A. S. y Hurst, W.: “*The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs*”, Trans., AIME (1949).
- [34] von Schroeter, T., Hollander, F. y Gringarten, A. C.: “*Deconvolution of Well-Test Data as a Non-Linear Total Least-Squares Problem*”, SPE Journal (2004).
- [35] Winestock, A. G. y Colpitts, G. P.: “*Advances in Estimating Gas Well Deliverability*”, The Petroleum Society of C.I.M., Calgary (1965).

Apéndice A

Derivación de la integral de convolución

Si se asume flujo en una sola fase de un fluido ligeramente compresible, la ecuación de difusividad puede presentarse como una relación lineal entre el gasto y los cambios de presión. La caída de presión total en el sistema se presenta como la suma de los cambios de presión causados por cada gasto desde el tiempo en el cual éste ha cambiado:

$$p(t) = p_0 - \{q_1 p_s(t) - [(q_2 - q_1) p_s(t - t_1)] - [(q_3 - q_2) p_s(t - t_2)] - \dots\}. \quad (\text{A.1})$$

La **Ecuación A.1** se muestra como una suma de las caídas en cada cambio discreto:

$$p(t_{n+1}) = p_0 - \sum_{i=0}^n (q_{i+1} - q_i) p_s(t - t_i), \quad (\text{A.2})$$

donde $p_s(t - t_i)$ es la respuesta de la presión en el sistema a un gasto unitario ($q = 1$). Para desarrollar la **Ecuación A.2** de manera condensada, se considera que $\tau = t_i$ y $\Delta\tau = t_{i+1} - t_i$, además, multiplicando por $\frac{\Delta\tau}{\Delta\tau}$.

$$\Delta p(t) = p_0 - p(t_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta q}{\Delta \tau} p_s(t - \tau) \Delta \tau. \quad (\text{A.3})$$

Aplicando $\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0}$ a la **Ecuación A.3**:

$$\Delta p(t) = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n \frac{\Delta q}{\Delta \tau} p_s(t_{i+1} - \tau) \Delta \tau. \quad (\text{A.4})$$

Se asume que $q(t)$ es diferenciable para $t > 0$, entonces $n \rightarrow \infty$ y $t_{i+1} = t$; mostrando incrementos infinitesimales de tiempo, así la **Ecuación A.4** puede presentarse como una integral de la forma:

$$\Delta p(t) = \int_0^t \frac{dq}{d\tau} p_s(t - \tau) d\tau, \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta p(t) = \int_0^t q'(\tau) p_s(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.6})$$

Si se integra la **Ecuación A.6** por partes de tal manera que: $dv = \frac{dq}{d\tau}(\tau) d\tau$ y $u = p_s(t - \tau)$ entonces, $v = q(\tau)$ y $du = -p'_s(t - \tau) d\tau$:

$$\Delta p(t) = q(\tau) p_s(t - \tau) \Big|_0^t + \int_0^t q(\tau) p'_s(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.7})$$

Evaluando la **Ecuación A.7**:

$$\Delta p(t) = \{q(t) p_s(0) - q(0) p_s(t)\} + \int_0^t q(\tau) p'_s(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.8})$$

Si $p_s(0) = 0$ y $q(0) = 0$, la **Ecuación A.8** queda de la forma:

$$\Delta p(t) = \int_0^t q(\tau) p'_s(t - \tau) d\tau. \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Derivación de la deconvolución de balance de materia

Tomando en cuenta la definición de la normalización de la caída de presión con el gasto, dado por:

Para pruebas de incremento:

$$\Delta p_{s,i} = \frac{p_{ws} - p_{wf,c}}{1 - q_{wbs,i}}. \quad (\text{B.1})$$

Para pruebas de decremento:

$$\Delta p_{s,d} = \frac{p_0 - p_{wf}}{q_{wbs,d}}. \quad (\text{B.2})$$

El gasto del pozo en función del almacenamiento esta dado por:

$$q_w = C \frac{d\Delta p}{dt}. \quad (\text{B.3})$$

De la definición del gasto medido (total):

$$q_m(t) = q_{sf}(t) + q_w(t). \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo la **Ecuación B.3** en la **Ecuación B.4**:

$$q_m(t) = q_{sf}(t) + C \frac{d\Delta p}{dt}. \quad (\text{B.5})$$

De la **Ecuación B.5** se despeja q_{sf} teniendo que:

$$q_{sf}(t) = q_m(t) - C \frac{d\Delta p}{dt}. \quad (\text{B.6})$$

Normalizando la **Ecuación B.6**, considerando que produce a gasto constante:

$$\frac{q_{sf}(t)}{q_{ref}(t)} = \frac{q_m(t)}{q_{ref}(t)} - \frac{C}{q_{ref}(t)} \frac{d\Delta p}{dt}. \quad (\text{B.7})$$

Dado que en la **Ecuación B.5** se considera un aporte total de fluido (cara de la formación y pozo), la **Ecuación B.7** es considerada como flujo por parte de la formación en una prueba de decremento, quedando:

$$q_{wbs,d} = 1 - \frac{C}{q_m(t_1)} \frac{d\Delta p}{dt}. \quad (\text{B.8})$$

Para pruebas de incremento, se considera que el aporte por parte del pozo a la superficie es nulo $q_{m,i} = 0$ y $q_{m,c}(t_1) = q_{ref}(t)$, la **Ecuación B.8** queda:

$$q_{wbs,i} = \frac{C}{q_m(t_1)} \frac{d\Delta p}{d\Delta t}. \quad (\text{B.9})$$

En la **Ecuación B.8** y la **Ecuación B.9**, el gasto tomado sera el primero de la prueba de decremento o el primer inmediato al cierre de la prueba de incremento.

Ahora, tomando la **Ecuación B.1** y la **Ecuación B.2**, y sustituyendo las **Ecuaciones B.8** y **B.9**, respectivamente.

Para pruebas de incremento:

$$\frac{p_{ws} - p_{wf,c}}{1 - q_{wbs,i}} = \frac{p_{ws} - p_{wf,c}}{1 - \frac{C}{q_m(t_1)} \frac{d\Delta p}{d\Delta t}}, \quad (\text{B.10})$$

$$\Delta p_{s,i} = \frac{\Delta p_{ws}}{1 - \frac{C}{q_m(t_1)} \frac{d\Delta p}{d\Delta t}}. \quad (\text{B.11})$$

Para pruebas de decremento:

$$\frac{p_0 - p_{wf}}{q_{wbs,d}} = \frac{p_0 - p_{wf}}{1 - \frac{C}{q_m(t_1)} \frac{d\Delta p}{dt}}, \quad (\text{B.12})$$

$$\Delta p_{s,d} = \frac{\Delta p_{wf}}{1 - \frac{C}{q_m(t_1)} \frac{d\Delta p}{d\Delta t}}. \quad (\text{B.13})$$

El tiempo de balance de materia se define como:

Para pruebas de incremento:

$$t_{bm,i} = \frac{Q_p}{1 - q_{wbs,i}(\Delta t)}. \quad (\text{B.14})$$

Para pruebas de decremento:

$$t_{bm,d} = \frac{Q_p}{q_{wbs,d}(t)}. \quad (\text{B.15})$$

Calculando el gasto acumulado:

Para pruebas de incremento:

$$Q_{p,wbs,i} = \int_0^{\Delta t} (1 - q_{wbs}(\Delta t)) d\Delta t. \quad (\text{B.16})$$

Para pruebas de decremento:

$$Q_{p,wbs,d} = \int_0^t q_{wbs}(t) dt. \quad (\text{B.17})$$

Sustituyendo la **Ecuación B.8** y la **Ecuación B.9** en las **Ecuaciones B.16** y **B.17**, respectivamente.

Para pruebas de incremento:

$$Q_{p,wbs,i}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \left(1 - \frac{C}{q_m(\Delta t_1)} \frac{d\Delta p}{d\Delta t} \right) d\Delta t = \int_0^{\Delta t} d\Delta t - \int_0^{\Delta t} \left(\frac{C}{q_m(\Delta t_1)} \frac{d\Delta p}{d\Delta t} \right) d\Delta t, \quad (\text{B.18})$$

integrando:

$$Q_{p,wbs,i}(\Delta t) = \Delta t - \frac{C}{q_m(\Delta t_1)} \Delta p. \quad (\text{B.19})$$

Para pruebas de decremento:

$$Q_{p,wbs,d}(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{C}{q_m(t_1)} \frac{d\Delta p}{dt}\right) dt = \int_0^t dt - \int_0^t \left(\frac{C}{q_m(t_1)} \frac{d\Delta p}{dt}\right) dt. \quad (\text{B.20})$$

integrando:

$$Q_{p,wbs,d}(t) = t - \frac{C}{q_m(t_1)} \Delta p. \quad (\text{B.21})$$

Finalmente, de las **Ecuaciones B.14** y **B.15** para el tiempo de balance de materia, se sustituye la producción acumulada y el gasto.

Para pruebas de incremento:

$$t_{bm,i} = \frac{\Delta t - \frac{C}{q_m(\Delta t_1)} \Delta p}{1 - \frac{C}{q_m(\Delta t_1)} \frac{d\Delta p}{d\Delta t}}. \quad (\text{B.22})$$

Para pruebas de decremento:

$$t_{bm,d} = \frac{t - \frac{C}{q_m(t_1)} \Delta p}{1 - \frac{C}{q_m(t_1)} \frac{d\Delta p}{dt}}. \quad (\text{B.23})$$

Apéndice C

Algoritmo de inversión Gaver-Stehfest

Stehfest en 1970 realizó una extensión del algoritmo propuesto por Gaver, como optimización de inversión numérica, el cual es modelado por las **Ecuaciones C.1** y **C.2**:

$$f(t) = \frac{\ln(2)}{t} \sum_{j=1}^{2N} \left[V_j \bar{F} \left(j \frac{\ln(2)}{t} \right) \right], \quad (\text{C.1})$$

donde:

$$V_j = (-1)^{j+\frac{N}{2}} \sum_{k=\left(\frac{j+1}{2}\right)}^{\min\left(j, \frac{N}{2}\right)} \left[\frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-i)!} \right]. \quad (\text{C.2})$$

El procedimiento a seguir para realizar la inversión numérica requiere de un valor de N adecuado que ajuste el modelo lo mejor posible al espacio real; en la Figura C.1 se muestra el diagrama de flujo del método de Gaver-Stehfest (1970).

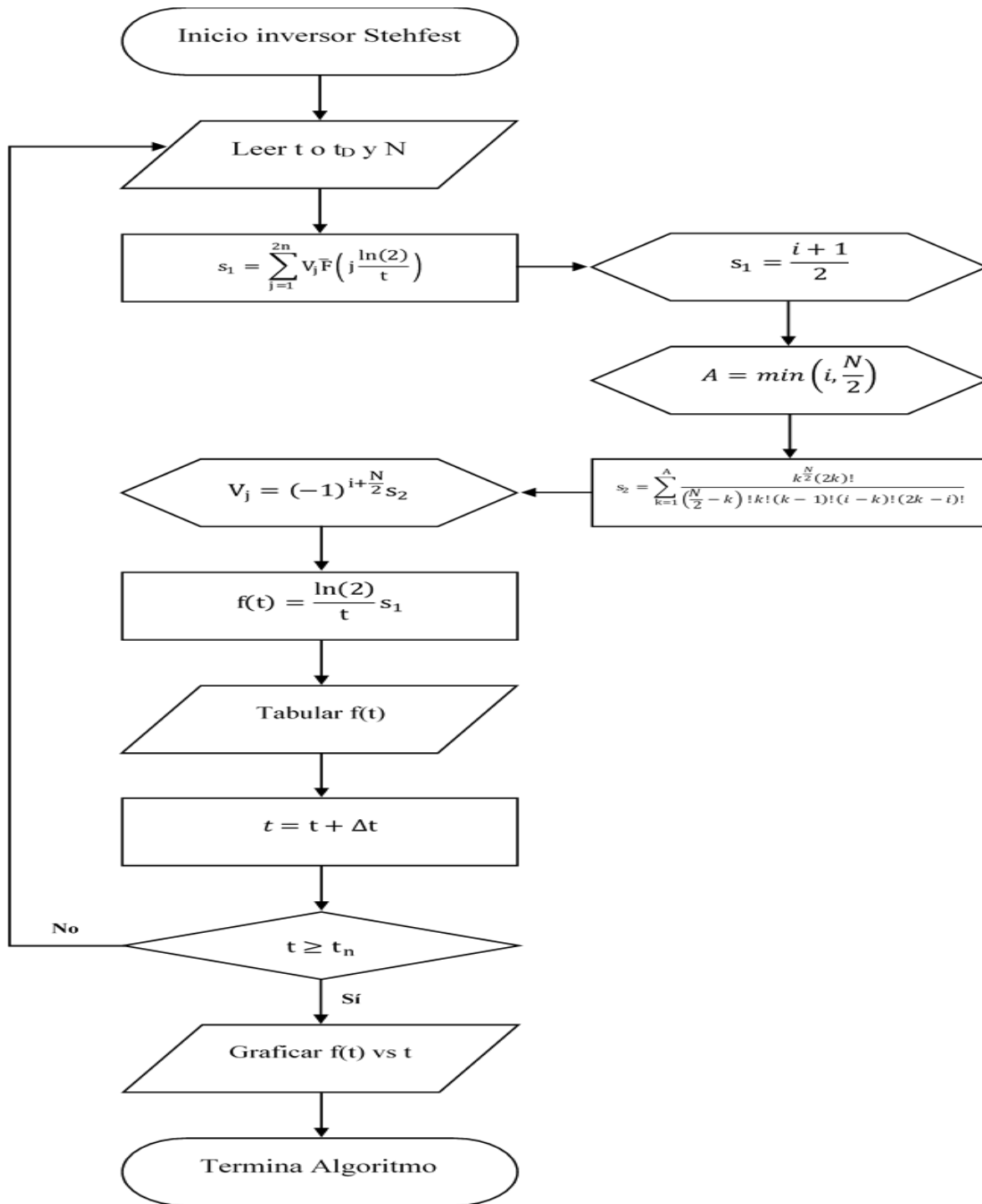


Figura C.1: Diagrama de flujo de algoritmo de inversión Gaver-Stehfest.

Apéndice D

Algoritmo para solución de mínimos cuadrados

Para solucionar un sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ por mínimos cuadrados donde \bar{x} es el vector a estimar y que, en el caso de la deconvolución, es el vector de la función respuesta; utilizando un proceso iterativo como Newton-Raphson, tal que se encuentre el mínimo de la **Ecuación D.1**:

$$\min_x \|A\bar{x} - \bar{b}\|_2, \quad (\text{D.1})$$

en cada paso se que minimiza la **Ecuación D.1**, se cumplan las restricciones:

$$\Delta p_s(\tau) \geq 0, \frac{d\Delta p_s(\tau)}{d\tau} \geq 0, \frac{d^2\Delta p_s(\tau)}{d\tau^2} \leq 0. \quad (\text{D.2})$$

En la Figura D.1 se muestra un diagrama de flujo del proceso.

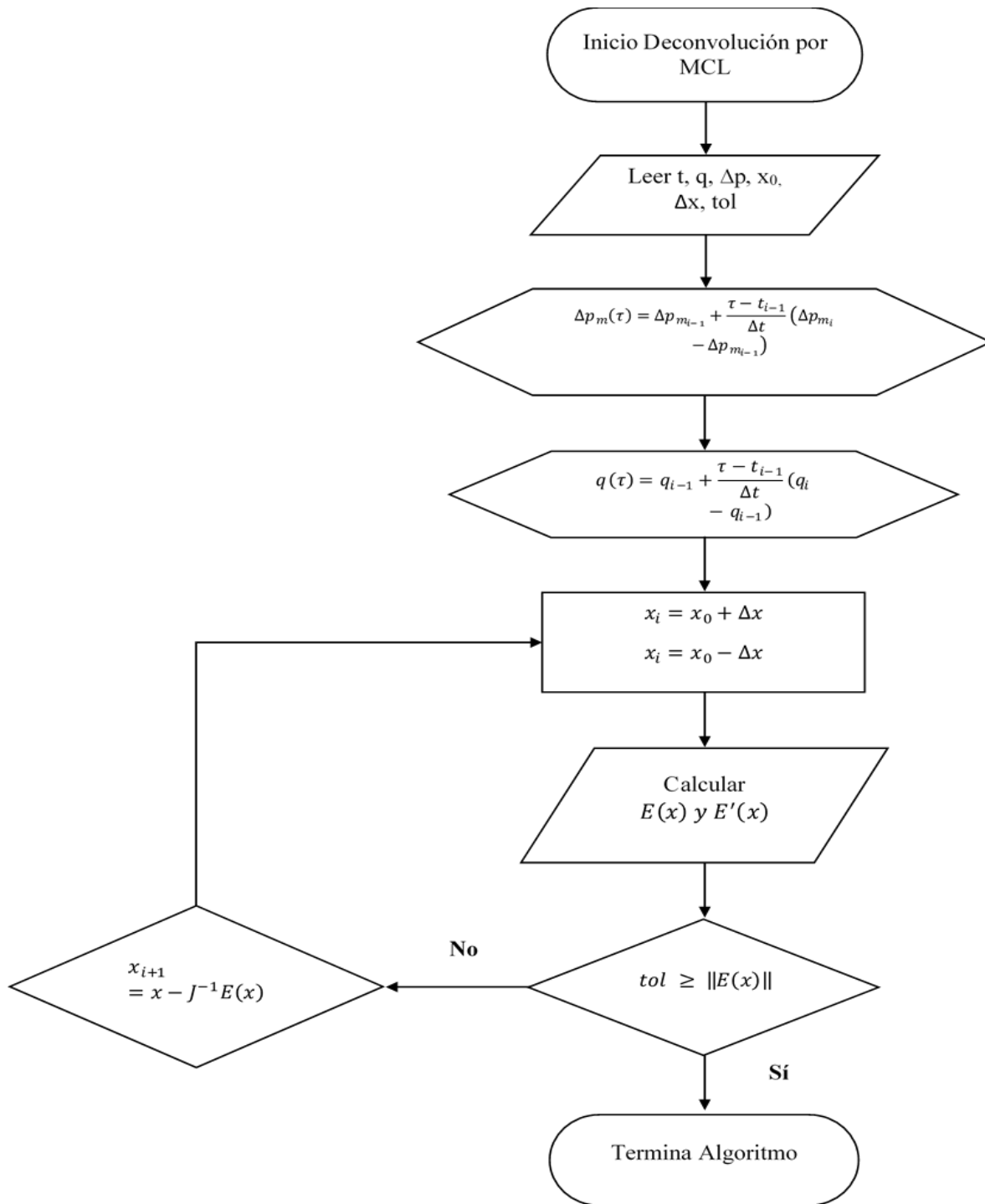


Figura D.1: Proceso para estimar la respuesta por Mínimos Cuadrados.

Apéndice E

Expresiones analíticas para la integral de convolución (von Schroeter *et al.*, 2004)

Este apéndice brinda las expresiones de la matriz C y sus derivadas para el caso en el cual los gastos se modelan como escalones constantes, y el esquema de interpolación de la respuesta es lineal en los coeficientes de respuesta z_k . las contribuciones al componente:

$$C_{ij}(z) = \int_{-\infty}^{\ln T} \theta_j(t_i - e^\tau) e^{Z(\tau)} d\tau, \quad (\text{E.1})$$

surgen solamente del subconjunto del dominio de integración donde $\theta_j(t_i - e^\tau) = 1$. Esto genera intervalos $I_{ijk} := \{\tau \in (\tau_{k-1}, \tau_k) : \theta_j(t_i - e^\tau) = 1\}$, $k=1 \dots n$. Entonces la **Ecuación E.1** queda:

$$C_{ij}(z) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k} C_{ijk}(z), \quad (\text{E.2})$$

donde:+

$$C_{ijk}(z) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \theta_j(t_i - e^\tau) e^{\tau\beta_k} d\tau = \int_{I_{ijk}} e^{\tau\beta_k} d\tau \quad (\text{E.3})$$

Cada uno de los conjuntos I_{ijk} es vacío, intervalo semi-infinito $[-\infty, b]$ o un intervalo finito de la forma $[a, b] = [\mu - \rho, \mu + \rho]$ con punto medio μ y radio ρ , de acuerdo a esto se obtiene:

$$C_{ijk}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } I_{ijk} = \emptyset \\ \frac{1}{\beta_k} e^{b\beta_k} & \text{si } a = -\infty \\ 2\rho & \text{si } a \neq -\infty, \beta_k = 0 \\ 2\frac{1}{\beta_k} e^{\mu\beta_k} \sinh(\rho\beta_k) & \text{si } a \neq -\infty, \beta_k \neq 0 \end{cases} . \quad (\text{E.4})$$

El algoritmo de proyección variable requiere el Jacobiano del residuo $r(x', x'') = F(x'')x' - v(x'')$ respecto a sus parámetros x' y $x'' = z$.

$$\frac{\partial r}{\partial x'} = F(x''), \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial z_k} = \begin{cases} -\sum_{j=1}^N y_j \frac{\partial C_{ij}}{\partial z_k} & \text{si } 1 \leq i \leq M \\ 0 & \text{si } M < i \leq M + N \\ \sqrt{\lambda} D_{i-M-N, k} & \text{si } i > M + N \end{cases} . \quad (\text{E.6})$$

Para obtener las derivada $\frac{\partial C_{ij}}{\partial z_k}$ se ha de introducir un nuevo término:

$$D_{ijk}(z) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \tau \theta_j(t_i - e^\tau) e^{\tau \beta_k} d\tau = \int_{I_{ijk}} \tau e^{\tau \beta_k} d\tau, \quad (\text{E.7})$$

esta integral se evalúa por los siguientes casos:

$$D_{ijk}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } I_{ijk} = \emptyset \\ \left(\frac{b}{\beta_k} - \frac{1}{\beta_k^2}\right) e^{b\beta_k} & \text{si } a = -\infty \\ 2\mu\rho & \text{si } a \neq -\infty, \beta_k = 0 \\ \frac{2}{\beta_k} e^{\mu\beta_k} \left\{ \left(\mu - \frac{1}{\beta_k}\right) \sinh(\rho\beta_k) + \rho \cosh(\rho\beta_k) \right\} & \text{si } a \neq -\infty, \beta_k \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{E.8})$$

obteniendo para k=1:

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial z_1} = e^{\alpha_1} C_{ij1}(z) + e^{\alpha_2} \frac{D_{ij,2}(z) - \tau_2 C_{ij,2}(z)}{\tau_1 - \tau_2}, \quad (\text{E.9})$$

para k=2...n-1:

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial z_n} = e^{\alpha_k} \frac{D_{ij,k}(z) - \tau_{k-1} C_{ij,k}(z)}{\tau_k - \tau_{k-1}} + e^{\alpha_{k+1}} \frac{D_{ij,k+1}(z) - \tau_{k+1} C_{ij,k+1}(z)}{\tau_k - \tau_{k+1}}, \quad (\text{E.10})$$

y para k=n:

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial z_n} = e^{\alpha_n} \frac{D_{ij,n}(z) - \tau_{n-1} C_{ij,n}(z)}{\tau_n - \tau_{n-1}}. \quad (\text{E.11})$$

Apéndice F

Algoritmo de proyección variable

En problemas de mínimos cuadrados no lineales es de gran ventaja separar los parámetros en dos conjuntos. Partiendo de la función objetivo (**Ecuación 3.5.19**) y sus definiciones:

$$E(x', x'') = \|F(x'')x' - v(x'')\|_2^2, \quad (\text{F.1})$$

$$x' = [p_0, y]^T, \quad (\text{F.2})$$

$$x'' = z. \quad (\text{F.3})$$

- **Valores Iniciales:** debido a que el problema requiere de un valor inicial $x_0 = [x'_0, x''_0]$, se recomienda que los valores de $x'_0 = [p_0, y]^T$ para p_0 sea el valor de presión mayor de la prueba, y y los gastos (q) medidos, $y = [q_1, \dots, q_N]^T$.
- **Criterio de convergencia:** el valor ΔE es monitoreado como la medida de error de la **Ecuación F.1** de su valor inicial E_0 y el criterio de convergencia termina una vez que

se satisface que:

$$\Delta E \leq \vartheta E_0, \quad (\text{F.4})$$

donde ϑ es un valor dado por el usuario normalmente en el rango de $10^{-8} \dots 10^{-5}$.

- **Nodos:** la elección de los nodos internos es de forma arbitraria en un principio. El número de nodos debe ser lo suficiente grande para permitir una resolución suficiente de las características de la función respuesta, y lo suficientemente pequeña para no llevar a un problema bajo-determinado. El espaciamiento no-uniforme es deseado para obtener detalles específicos a mayor resolución. De forma general se utilizan nodos uniformemente espaciados:

$$t_k = t_1 + \frac{k-1}{n-1} (\tau_n - \tau_1) \quad \text{para } k = 1 \dots n. \quad (\text{F.5})$$

Con un valor inicial de $n = 20$ para simulaciones y $n = 40$ en datos de campo.

Para poder resolver el algoritmo se requiere de tener conocimiento básico de sistemas de ecuaciones y métodos de solución.

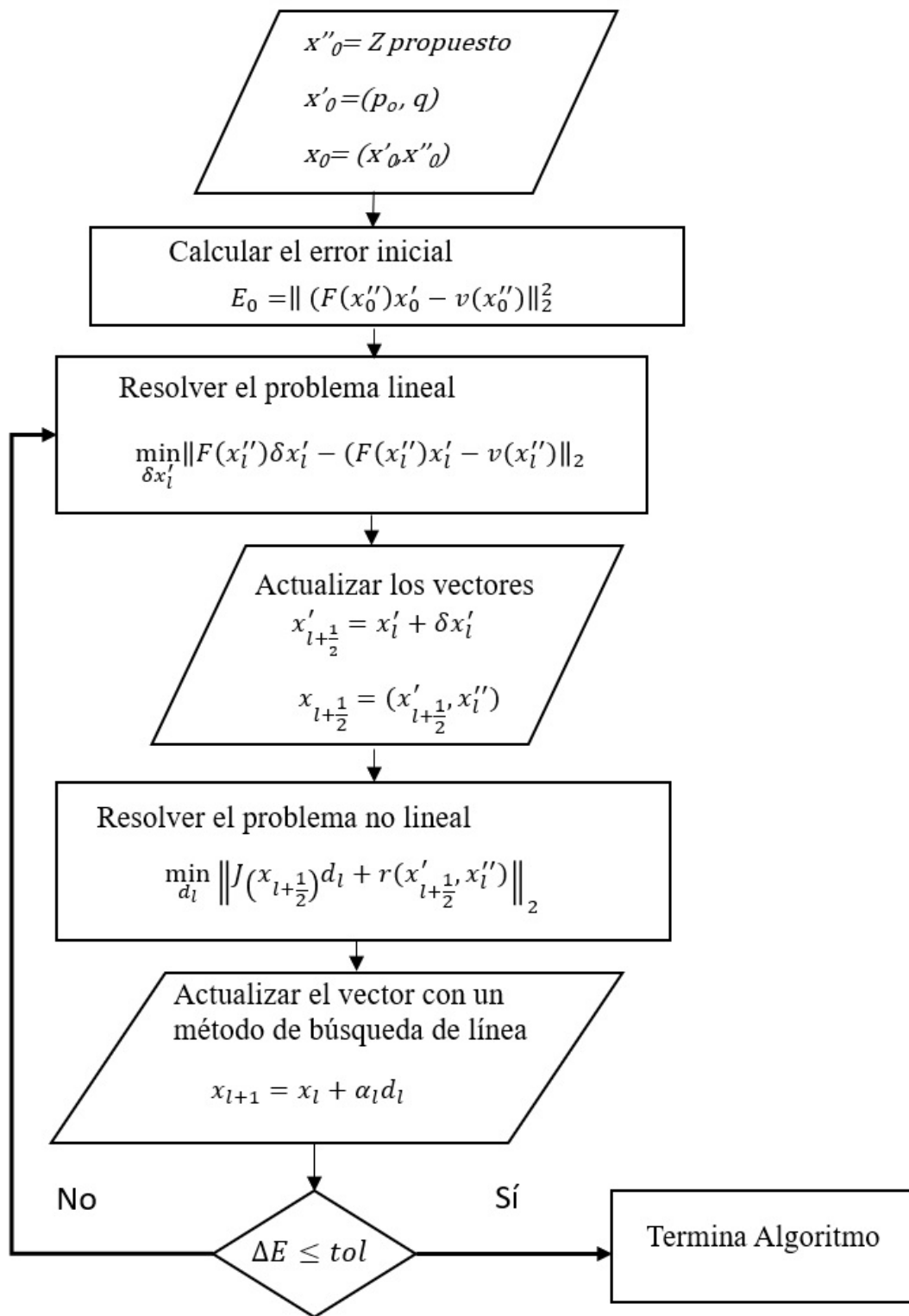


Figura F.1: Diagrama de flujo general del algoritmo de proyección variable