UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CLASIFICACIÓN DE ESTRUCTURAS ELEMENTALES MEDIANTE EL ORDEN DE KEISLER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

L U I S F E L I P E B E N Í T E Z L L U I S

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DAVID MEZA ALCÁNTARA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Clasificación de Estructuras Elementales Mediante el Orden de Keisler

por

Luis Felipe Benítez Lluis

Tesis presentada para obtener el título de

Matemático

en la

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Datos del jurado

1.-Datos del Alumno:
Benítez
Lluis
Luis Felipe
5541789664
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
311269176

2.-Datos del Tutor
Dr.
David
Meza
Alcántara

3.- Datos del Sinodal 1
Dra.
Gabriela
Campero
Arena

4.- Datos del Sinodal 2
Dr.
Erick
García
Ramírez

5.- Datos del Sinodal 3
M. en C.
Fernando Javier
Nuñes
Rosales

6.- Datos del Sinodal 4
Dr.
Carlos
Torres
Alcaraz

7.-Datos del Trabajo Escrito
Clasificación de Estructuras Elementales
Mediante el Orden de Keisler
88p
2019

Agradecimientos

En la academia: Comienzo agradeciendo a la *Universidad Nacional Autónoma de México* por poner a mi disposición a toda la infraestructura y a tantas personas que colaboraron en mi formación tanto académica como deportiva, además de ofrecerme diversas becas que me apoyaron durante toda esta gran etapa en mi vida. A todos mis profesores y profesoras quienes me otorgaron generosamente un poco de sus conocimientos. En particular agradezco a Diana, Julio César y Escuadra, de quienes aprendí mucho. Agradezco a EL Profesor, quien no sólo me proporcionó varios de los mejores cursos de mi carrera y quien colaboró a despertar mi interés en la Lógica, sino también formó a muchas de las personas sin las cuales no habría podido llevar a cabo este proyecto. Agradezco a mis sinodales por su tiempo y esfuerzo en este proyecto, particularmente a David por sus labores como asesor, por su paciencia y por el increíble malabareo que hizo para poderme ayudar.

En el deporte: El camino del aprendizaje fue muy grato gracias a poder combinarlo con el ambiente deportivo. Agradezco a *Cougars UNAM*, *Tigres CCH Sur* por enseñarme a ser deportista y dar siempre todo de mí. A *Buitres de Medicina* por otorgarme un segundo hogar y enseñarme a no rendirme ante la adversidad. A *Prometeos Facultad de Ciencias* y a *Pumas Beisbol* por enseñarme a exigirme un buen desempeño siempre. A todos mis coaches y compañeros con quienes compartí el campo, en especial a Isaac y Paris con quienes compartí colores en múltiples ocasiones.

En la carrera: Agradezco mis grupos de amigos y amigas con quienes conviví en algún momento el aula y compartí diversas experiencias. A *Chiquitas*, *Betches*, $(\mathbb{Z}, +)$, etc. A Dani y Roger, intersección de la mayoría de los anteriores (¡vaya ejemplo de grupo!). A Liz, Emiliano y Mario, personas sumamente importantes en mi vida.

En la familia: Doy gracias a todos los miembros que mi familia por acompañarme en todo este trayecto. A todas mis tías quienes siempre me apoyaron de múltiples formas. A mi hermano y mis padres con quienes crecí y me enseñaron tanto. Finalmente, el máximo agradecimiento es para mi madre. Todos mis éxitos pasados, presentes y futuros son, sin duda alguna, tuyos. Todo tu esfuerzo, trabajo y enseñanzas son el pilar de quien soy. Este trabajo es tuyo.

A todas y todos, ¡gracias!
LL11

Clasificación de Estructuras Elementales Mediante el Orden de Keisler
por
Luis Felipe Benítez Lluis

Resumen

En esta tesis se abordan las ideas necesarias para definir el *Orden de Keisler*, propuesto por Jerome Keisler en 1967. Este orden es construido para medir la complejidad de una teoría de primer orden, de forma que las teorías más complejas estén en un nivel superior en el orden. Se pretende medir la complejidad de una teoría a partir de qué tan difícil pueda ser saturar la ultrapotencia de cualquier modelo de ésta sobre un ultrafiltro regular arbitrario.

El presente escrito desarrolla los temas requeridos para poder plantear la definición del orden de Keisler. Se prueba que si un elemento es mínimo en el orden de Keisler, entonces éste debe de carecer de la propiedad de la cobertura finita, además de probar que todo modelo que satisfaga una fórmula versátil es máximo en este orden.

La tesis se divide en cuatro capítulos, el primero de los cuales describe todas las ideas básicas acerca del lenguaje. El segundo capítulo desarrolla las nociones de ultrafiltros numerablemente incompletos, así como los regulares, para enseguida definir formalmente el ultraproducto y la ultrapotencia. El tercer capítulo plantea la definición de un n-tipo y, con ayuda de dicha definición, desarrolla la noción de la saturación. Luego, se aplican estas ideas con la de ultraproducto y se enuncian algunas propiedades inmediatas que surgen, probando que, con un lenguaje numerable y un ultrafiltro numerablemente incompleto, toda estructura es $\aleph_1$-saturada.

Finalmente, el cuarto capítulo comienza desarrollando los ultrafiltros buenos con el fin de probar que con un ultrafiltro bueno, la ultrapotencia de cualquier estructura es saturada. A continuación, se introduce el orden de Keisler y se concluye probando los resultados sobre minimalidad y maximalidad antes mencionados.

Clasificación de Estructuras Elementales Mediante el Orden de Keisler
by
Luis Felipe Benítez Lluis

Abstract

In the following thesis we present the necessary ideas to define *Keisler's Order*, developed by Jerome Keisler in 1967. This order aims to measure the complexity of a first order theory, so the more complex theories are, the higher in the order they lie. The procedure to measure a theory relies on the difficulty to saturate the ultrapower of any model over an arbitrary regular ultrafilter.

In this text, we develop all the ideas required for defining Keisler's order. We show that all the minimul theories in this order cannot satisfy the finite cover property. Additionally, we prove that every model that satisfies a versatile formula is maximum within the order.

This thesis is divided into four chapters, the first of which sets all the basic ideas relating to languages. The second chapter defines the notion of countably incomplete as well as regular ultrafilters, which are straight away used to formally define the ultraproduct and ultrapower. The third chapter defines an n-type and, with this definition, develops the notion of saturation. Next, we apply these ideas to ultraproducts and show some immediate results. We prove that with a countable language and a countably incomplete ultrafiter every ultraproduct is $\aleph_1$-saturated.

Finally, the fourth chapter starts by developing the concept of good ultrafilters with the purpose of showing that every ultrapower of any structure is saturated, provided that we have a good ultrafilter. This is followed by introducing Keisler's Order, and we conclude by proving the results regarding minimality and maximality previously mentioned.

Índice general

Introducción

La Lógica es una rama del conocimiento sumamente antigua, y es fundamental en cualquier ámbito científico y formal. Ésta ha sido estudiada desde la antigüedad, por ejemplo, con los trabajos de Aristóteles sobre silogismos en el Siglo IV a.C., los cuales tomaban a los argumentos lógicos como objetos de estudio por sí mismos más que por su significado.

La motivación para estudiar la Lógica provino por un largo tiempo del carácter filosófico de ésta. El paradigma con el que se estudió la Lógica evolucionó gradualmente para enfocarse en los aspectos sintácticos de la misma, como se puede ver en los trabajos de los Escolásticos del Siglo XII al XV. Esta tendencia de desarrollar un lenguaje formal para estudiar la Lógica fue retomada por varios personajes como Gottfried Leibniz, George Boole y Augustus De Morgan. Fue a finales del Siglo XIX cuando Gottlob Frege sentó las bases de lo que actualmente es la Lógica de primer orden. A partir de este punto, la Lógica Matemática fue estudiada enfocándose en su aspecto sintáctico, como se puede ver en los trabajos de Kurt Gödel, Giuseppe Peano, David Hilbert, entre otros. No obstante, el aspecto semántico continuó siendo estudiado por algunos matemáticos como Leopold Löwenheim y Alfred Tarski.

El Teorema de Löwenheim de 1915, complementado por Skolem en 1920, seguido del Teorema de Correctud-Completud de Gödel en 1930, fungen como los primeros resultados importantes en el estudio semántico de la Lógica Matemática. Fue con la definición de satisfacción de Tarski en 1933 que se terminaron de plantar los cimientos de la Teoría de Modelos actual, la cual fue descrita en [Chang y Keisler, 1990] como la suma del Álgebra Universal y la Lógica. Poco después se fueron agregando resultados, como el Teorema de Categoricidad de Morley en 1964.

El Teorema de Categoricidad de Morley resolvió una pregunta formulada por Jerzy Łoś en 1954, y atrajo el interés de diversos matemáticos como Jerome Keisler y Saharon Shelah, para estudiar la clasificación de teorías de primer orden. Shelah propuso clasificar las teorías en sencillas y complejas, basándose en la cantidad de tipos que éstas tengan, como parte de su Programa de Clasificación. Le llamó *estables* a aquellas teorías que tuviesen relativamente pocos tipos e *inestables* al resto. El orden de Keisler intenta mostrar una gama más fina en las teorías, ordenándolas según su complejidad.

El orden de Keisler, introducido en el artículo *Ultraproducts which are not saturated*, en 1967, propone medir la complejidad de una teoría según la dificultad de saturar las ultrapotencias de sus modelos. En un sentido intuitivo, podemos establecer el orden de Keisler como: a mayor dificultad de saturar la ultrapotencia de un modelo de una teoría, más alto en el orden se encuentra la teoría. Se puede verificar que esta definición es un preorden para las teorías numerables, esto es, aquellas cuyo lenguaje es numerable.

El orden de Keisler resultó relevante en la clasificación de estructuras, pues los elementos minimales en el orden resultan ser estables. Además, el orden de Keisler ha ofrecido resultados sobre teorías inestables. De forma inesperada, este orden probó ser particularmente útil para verificar si la igualdad entre los cardinales $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{t}$ era demostrable desde ZFC. Este problema de más de 50 años de antigüedad fue resuelto en 2013 por Maryanthe Malliaris y Saharon Shelah en su artículo *General Topology Meets Model Theory, on P and T*, tras buscar una caracterización de la clase minimal en el orden de Keisler.

El objetivo de esta tesis es presentar un estudio detallado sobre el orden de Keisler a cualquier estudiante de licenciatura en matemáticas. Para esto se desarrollarán todas las herramientas básicas para poder definirlo, además de probar algunos resultados conocidos sobre él.

Se supondrá que el lector tiene conocimientos básicos de Lógica Matemática, sobre todo en Lógica de primer orden, así como conocimientos en Teoría de Conjuntos, particularmente en ordinales y cardinales. El siguiente escrito se encuentra en el paradigma de la teoría de conjuntos bajo los axiomas **ZFC** y consta de cuatro capítulos en los que se desarrolla cada una de las herramientas necesarias para definir el orden de Keisler.

El primer capítulo aborda las ideas preliminares, repasando los conceptos necesarios para definir el lenguaje de primer orden y, entre otras cosas, convenir la notación, además de enunciar algunos teoremas importantes.

El segundo capítulo inicia estudiando el concepto de ultrafiltro, tomando particular interés en los ultrafiltros no principales, numerablemente incompletos y regulares, así como las relaciones entre éstos. Consecuentemente, se define el ultraproducto de una familia de estructuras de primer orden sobre un ultrafiltro y un caso particular de éste, es la ultrapotencia, la cual es clave para definir el orden de Keisler. Se enuncia y demuestra el Teorema de Łoś para ultraproductos el cual tendrá relevancia por lo que resta del escrito.

El tercer capítulo se adentra en la noción de n-tipo, con la cual desarrolla el concepto de saturación. Seguidamente, se emplean estas ideas en el ultraproducto de una familia de estructuras. El qué tan fácilmente de saturar sea la ultrapotencia de una estructura mediante ultrafiltros regulares arbitrarios será la noción de complejidad utilizada en el orden Keisler.

Finalmente, el cuarto capítulo define a los ultrafiltros buenos y prueba que cualquier ultraproducto de una familia de estructuras sobre filtros de esta naturaleza es saturado. Posteriormente, se enuncia una definición formal del orden de Keisler y se prueba que estructuras elementalmente equivalentes son equivalentes en el orden. Se usa una sección del capítulo para definir la propiedad de la cobertura finita y se prueba que estructuras mínimas en el orden carecen de esta propiedad. Se concluye probando que estructuras que satisfagan una fórmula versátil son máximas en el orden.

Capítulo 1

Preliminares

Para abordar el *Orden de Keisler* debemos hacer un recuento de los elementos básicos de la Teoría de Modelos, misma que se inscribe en la Lógica Matemática. En particular, nos interesan los modelos de primer orden o elementales, para los que se definirán lenguajes apropiados y se provee de interpretación. En esta sección se definirán todos los conceptos básicos, así como todas las convenciones sobre la notación.

1.1. Lenguajes de Primer Orden

Todo lenguaje se construye a partir de sucesiones finitas de símbolos, con la intención de codificar frases declarativas posiblemente cuantificadas acerca de un universo en las que se puedan interpretar. Dividiremos a los símbolos en: *relacionales*, *funcionales*, *de constante*, *de variable*, *lógicos*, *cuantificadores*, *de igualdad* y *auxiliares*. Se esperará que quien lea este escrito ya maneje las nociones de Lógica Matemática, por lo que en esta sección se procederá sin ejemplos.

Definición 1.1.1. Se define un *tipo de semejanza* ρ como la unión de tres conjuntos de símbolos: relacionales, funcionales y de constante, denotados por $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$, respectivamente.

Se convendrá que $\mathcal{R} := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{R}_m$, donde $\mathcal{R}_m := \{\, R_i^m \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ y que R_i^m es un símbolo relacional de aridad m [1]. De forma semejante, $\mathcal{F} := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathcal{F}_n$ donde $\mathcal{F}_n := \{\, f_j^n \mid j \in \mathbb{N} \,\}$ y f_j^n

[1]Intuitivamente hablando, la aridad de una relación es la cantidad de argumentos que la relación tiene. De forma semejante, la aridad de una función es la cantidad de parámetros que recibe.

es un símbolo funcional de aridad n. Finalmente, $\mathcal{C} := \{ c_i \mid i \in I \}$ con I un conjunto. De esta manera queda definido $\rho := \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$.

Notación 1.1.2. Cuando se quiera referir a una clase de símbolos en un tipo de semejanza $\rho = \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$, se denotará por $\operatorname{Rel} \rho := \mathcal{R}$, $\operatorname{Func} \rho := \mathcal{F}$ y $\operatorname{Cons} \rho := \mathcal{C}$. De forma análoga, se convendrá que $\operatorname{Rel}_m \rho := \mathcal{R}_m$ y $\operatorname{Func}_n \rho := \mathcal{F}_n$.

Definición 1.1.3.

1. Se define el conjunto de *símbolos de variable* como $\mathrm{VAR} := \{ x_i \mid i \in \mathbb{N} \}$.

2. En conjunto con los símbolos lógicos y auxiliares se define el *alfabeto* del lenguaje con tipo de semejanza ρ como:

$$\mathcal{L}_\rho := \rho \cup \mathrm{VAR} \cup \{=\} \cup \{\wedge, \neg\} \cup \{\forall\} \cup \{\,) \, , \, , \, (\,\}.$$

Proseguimos definiendo los términos de un lenguaje de primer orden, los cuales fungen como la representación en símbolos de todos los posibles nombres de elementos del universo modelado. Por ejemplo, en $\mathbb{N}$, 4, $2+2$, $2 \bullet 2$, $3+1$ son todos nombres distintos de un mismo elemento. Nótese que para algunas representaciones del elemento es necesario que haya operadores como $+$ ó $\bullet$.

Definición 1.1.4. Se define $\operatorname{TRM} \rho$ el conjunto de *términos* de alfabeto $\mathcal{L}_\rho$ recursivamente como [2]:

1. Para cualquier $c \in \operatorname{Cons} \rho$ y cualquier $x \in \mathrm{VAR}$ se tiene que las sucesiones de un sólo símbolo c y x pertenecen a $\operatorname{TRM} \rho$.

2. Si $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \operatorname{TRM} \rho$ y $f \in \operatorname{Func}_n \rho$, entonces $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ pertenece a $\operatorname{TRM} \rho$.

Ahora bien, definamos las fórmulas de nuestro lenguaje que básicamente representarán las afirmaciones, o frases declarativas o enunciativas.

[2] Se entiende que TRM_ρ es la clase más pequeña de expresiones que definida con las reglas 1 y 2, esto es, los términos únicamente se pueden construir con una cantidad finita de aplicaciones de las reglas 1 y 2.

Definición 1.1.5. Se define $\mathscr{L}_\rho$ el conjunto de *fórmulas* de forma recursiva de la siguiente manera [3]:

1. Para cualesquiera $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{TRM}\,\rho$, se tiene que $(\tau_1 = \tau_2)$ pertenece a $\mathscr{L}_\rho$.

2. Si $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{TRM}\,\rho$ y $R \in \mathrm{Rel}_m\,\rho$, entonces $R(\tau_1, \ldots, \tau_m) \in \mathscr{L}_\rho$.

3. Si φ, $\psi \in \mathscr{L}_\rho$, y $x \in \mathrm{VAR}$, entonces $\neg\psi$, $(\psi \wedge \varphi)$ y $\forall x\, \psi$ pertenecen a $\mathscr{L}_\rho$.

A continuación, se trabajará con la noción de variable libre en una fórmula. Intuitivamente no se puede saber si una fórmula con este tipo de variables es verdadera o falsa en tanto no se tenga un valor específico que asignarle a la variable. Por ejemplo $x < 1$, es una afirmación para la cual no podemos confirmar su veracidad hasta que tengamos un valor que otorgar a x.

Definición 1.1.6. Construyamos las siguientes funciones para poder definir con ellas la noción de variable libre en una fórmula.

1. Definimos de forma recursiva sobre la construcción de términos la función $\mathrm{Oc} : \mathrm{TRM}\,\rho \to \mathcal{P}(\mathrm{VAR})$, que a cada término le asigna las variables que aparecen en él:

   a) Para toda $c \in \mathrm{Cons}$ y $x \in \mathrm{VAR}$ se define $\mathrm{Oc}(c) = \varnothing$ y $\mathrm{Oc}(x) = \{x\}$.

   b) Si $f \in \mathrm{Func}_n\,\rho$ y $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathrm{TRM}\,\rho$, entonces $\mathrm{Oc}(f(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Oc}(\tau_\imath)$.

2. Definimos las función $\mathrm{OcL} : \mathscr{L}_\rho \longrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{VAR})$ de manera recursiva sobre la construcción de fórmulas como sigue:

   a) Si $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{TRM}\,\rho$, entonces $\mathrm{OcL}(\tau_1 = \tau_2) = \mathrm{Oc}(\tau_1) \cup \mathrm{Oc}(\tau_2)$

   b) Si $\tau_1, \cdots, \tau_m \in \mathrm{TRM}\,\rho$ y $R \in \mathrm{Rel}_m\,\rho$, entonces $\mathrm{OcL}(R(\tau_1, \cdots, \tau_m)) = \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{Oc}(\tau_j)$

   c) Si $\varphi, \psi \in \mathscr{L}_\rho$ y $x \in \mathrm{VAR}$, entonces:

      1) $\mathrm{OcL}((\varphi \wedge \psi)) = \mathrm{OcL}(\varphi) \cup \mathrm{OcL}(\psi)$

      2) $\mathrm{OcL}(\neg\varphi) = \mathrm{OcL}(\varphi)$

      3) $\mathrm{OcL}(\forall x \varphi) = \mathrm{OcL}(\varphi) \backslash \{x\}$

   Decimos que $x \in \mathrm{VAR}$ *ocurre libre* en φ si $x \in \mathrm{OcL}(\varphi)$.

[3] Igual que con TRM_ρ, las fórmulas son la clase más pequeña que se puede construir con las reglas 1, 2 y 3.

3. Finalmente, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos $\mathscr{L}_\rho^n := \{\varphi \in \mathscr{L}_\rho \mid |\operatorname{OcL}(\varphi)| = n\}$. Asímismo, se define el conjunto de enunciados como: $\mathscr{L}_\rho^0 := \{\varphi \in \mathscr{L}_\rho \mid \operatorname{OcL}(\varphi) = \varnothing\}$.

Notación 1.1.7.

- Sea $\tau \in \operatorname{TRM}\rho$ y $v_1, \ldots, v_n \in \operatorname{VAR}$, se escribirá $\tau(v_1, \ldots, v_n)$ cuando sea el caso de que $\operatorname{Oc}(\tau) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Análogamente, si $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^n$, se escribirá $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ cuando se requiera dejar claro que $\operatorname{OcL}(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
- Sean $\varphi,\psi \in \mathscr{L}_\rho$ y $x \in \operatorname{VAR}$. Abreviamos al cuantificador existencial $\exists$ y los conectivos lógicos binarios, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ mediante las siguientes fórmulas:

$$
\begin{aligned}
(\varphi \vee \psi) &\fallingdotseq \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\
(\varphi \rightarrow \psi) &\fallingdotseq \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &\fallingdotseq (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)) \\
\exists x\, \varphi(x) &\fallingdotseq \neg\forall x \neg\varphi(x)
\end{aligned}
$$

1.2. Estructuras y Satisfacibilidad

Una vez definidos los lenguajes de primer orden, procedamos a definir la materia prima más importante para el estudio de modelos, que son las estructuras. Estas serán los universos o mundos de los cuales nuestro lenguaje hablará. Estos mundos pueden ser, por ejemplo, en Álgebra, los *campos*, *grupos* o *anillos*.

Definición 1.2.1.

1. Si A es un conjunto no vacío, definimos una *interpretación* de ρ en A como una función $\mathbb{I} : \rho \longrightarrow \mathcal{P}(A^{<\omega}) \cup A$ en la cual:
   - Para toda $R \in \operatorname{Rel}_m \rho$ se tiene $\mathbb{I}(R) \subseteq A^m$.
   - Para cualquier $f \in \operatorname{Func}_n \rho$ tenemos que $\mathbb{I}(f) : A^n \longrightarrow A$.
   - Para todas las $c \in \operatorname{Cons}\rho$ se cumple que $\mathbb{I}(c) \in A$.

2. Dada una interpretación $\mathbb{I}$ de ρ en A, se define una *estructura* o *modelo* $\mathfrak{A}$ de tipo ρ con *soporte* o *universo* en A como: $\mathfrak{A} := \langle A, \mathbb{I} \rangle$.

Denotaremos también a $\mathbb{I}(y)$ por $y^{\mathfrak{A}}$ para cualquier $y \in \rho$.

Notación 1.2.2.

- Denotaremos a la clase de todas las estructuras de tipo ρ como $V_\rho := \{\mathfrak{A} := \langle A, \mathbb{I} \rangle \mid A \neq \varnothing$ e $\mathbb{I}$ es una interpretación de ρ en $A\}$

- Se convendrá que si una letra gótica denota una estructura, esta misma letra en redonda denota su soporte o universo. Es decir, si $\mathfrak{A}$ es una estructura de tipo ρ, entonces tendrá como soporte a A. De forma análoga, B y C serán los soportes para las estructuras $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$, respectivamente. Esta notación se preserva para índices; por ejemplo, $\mathfrak{A}_{i_0}$ tendrá soporte A_{i_0}, $\mathfrak{B}_{j^2}$ tendrá soporte B_{j^2}, etcétera.

- Cuando no se quiera escribir explícitamente la interpretación, esta se podrá definir escribiendo sencillamente sus constantes, funciones y relaciones y entendiéndose que hay símbolos respectivos que se interpretan como los escritos. Por ejemplo, la estructura $(\mathbb{Q}, <)$ se refiere al conjunto de los racionales con su única relación de orden usual.

Como se ha mencionado antes, a fórmulas con variables libres no se les puede determinar su veracidad hasta que se asigne un valor para la variable.

Definición 1.2.3. Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$.

1. Se define una *asignación* sobre $\mathfrak{A}$ como una función $s : \mathrm{VAR} \longrightarrow A$.

2. Se define la *extensión de una asignación*, $\bar{s} : \mathrm{TRM}\,\rho \longrightarrow A$, recursivamente sobre la construcción de términos como:

   a) Para toda $x \in \mathrm{VAR}$, se tiene $\bar{s}(x) = s(x)$.

   b) Para cualquier $c \in \mathrm{Cons}\,\rho$, se define $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.

   c) Si $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathrm{TRM}\,\rho$ y $f \in \mathrm{Func}_n\,\rho$, entonces $\bar{s}(f(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(\tau_1), \ldots, \bar{s}(\tau_n))$.

3. Sean $y \in \mathrm{VAR}$, $a \in A$ y s una asignación. Se define la asignación *sustituir y por a* como una asignación que se denotará por $s(y/a) : \mathrm{VAR} \longrightarrow A$ y se comporta de la siguiente manera:
$$s(y/a)(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = y; \\ s(x) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Para múltiples asignaciones simultáneas escribiremos $s(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)$ en lugar de la asignación $s(x_1/a_1) \cdots (x_n/a_n)$.

Ahora discutiremos el significado de "una estructura haga verdad a una fórmula".

Definición 1.2.4 (Definición de satisfacción de Tarski)**.** Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Definimos por recursión sobre la construcción de fórmulas, lo que significa que una fórmula φ *sea satisfecha* o *se modele* por $\mathfrak{A}$ bajo una asignación s; en símbolos $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$.

1. Si τ_1 y $\tau_2 \in \mathrm{TRM}\,\rho$, sucede que $\mathfrak{A} \models (\tau_1 = \tau_2)[s]$ si y sólo si $\bar{s}(\tau_1) = \bar{s}(\tau_2)$.

2. Si $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{TRM}\,\rho$ y $R \in \mathrm{Rel}_m\,\rho$, tenemos que $\mathfrak{A} \models R(\tau_1, \ldots, \tau_m)[s]$ si y sólo si $(\bar{s}(\tau_1), \ldots, \bar{s}(\tau_m)) \in R^{\mathfrak{A}}$.

3. Si $x \in \mathrm{VAR}$ y además $\varphi, \psi \in \mathscr{L}_\rho$,

   a) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[s]$ si y sólo si no es cierto que $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$.

   b) $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ y además $\mathfrak{A} \models \psi[s]$.

   c) $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi(x)[s]$ si y sólo si para cualquier $a \in A$ es cierto que $\mathfrak{A} \models \varphi[s(x/a)]$.

Lema 1.2.5. *Sea $\tau \in \mathrm{TRM}\,\rho$. Si s_1 y s_2 son asignaciones tales que $s_1(x) = s_2(x)$ para cualquier $x \in \mathrm{Oc}(\tau)$, entonces se cumple que $\bar{s_1}(\tau) = \bar{s_2}(\tau)$.*

Demostración. Por inducción sobre la construcción de términos.

1. Para $x \in \mathrm{VAR}$, tenemos que $\mathrm{Oc}(x) = \{x\}$, y así $\bar{s_1}(x) = s_1(x) \overset{\text{hip}}{=} s_2(x) = \bar{s_2}(x)$.

2. Si $c \in \mathrm{Cons}\,\rho$, sucede que $\bar{s_1}(c) = c^{\mathfrak{A}} = \bar{s_2}(c)$.

3. Supongamos que el resultado se cumple para $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathrm{TRM}\,\rho$. Sea $f \in \mathrm{Func}_n\,\rho$; tenemos que $(\bar{s_1}(\tau_1), \ldots, \bar{s_1}(\tau_n)) = (\bar{s_2}(\tau_1), \ldots, \bar{s_2}(\tau_n))$ y por hipótesis inductiva sucede que $f^{\mathfrak{A}}(\bar{s_1}(\tau_1), \ldots, \bar{s_1}(\tau_n)) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s_1}(\tau_1), \ldots, \bar{s_1}(\tau_n))$, gracias a que $f^{\mathfrak{A}}$ es función, esto último implica que $\bar{s_1}(f(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = \bar{s_2}(f(\tau_1, \ldots, \tau_n))$.

QED

Proposición 1.2.6. *Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\varphi \in \mathscr{L}_\rho$. Si s_1 y s_2 son dos asignaciones tales que $s_1(x) = s_2(x)$ para cualquier $x \in \mathrm{OcL}(\varphi)$, entonces se cumple que $\mathfrak{A} \models \varphi[s_1]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi[s_2]$.*

Demostración.

1. Sean $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{TRM}\,\rho$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models (\tau_1 = \tau_2)[s_1] &\text{ si y sólo si } \bar{s}_1(\tau_1) = \bar{s}_1(\tau_2), \\
&\text{ si y sólo si } \bar{s}_2(\tau_1) = \bar{s}_2(\tau_2), && \text{(Lema 1.2.5)} \\
&\text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models (\tau_1 = \tau_2)[s_2].
\end{aligned}$$

2. Si $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{TRM}\,\rho$ y $R \in \mathrm{Rel}_m\,\rho$, como $\mathrm{OcL}(R(\tau_1, \ldots, \tau_m)) = \bigcup_{i=1}^m \mathrm{Oc}(\tau_i)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models R(\tau_1, \ldots, \tau_m)[s_1] &\text{ si y sólo si } (\bar{s}_1(\tau_1), \ldots, \bar{s}_1(\tau_m)) \in R^{\mathfrak{A}}, \\
&\text{ si y sólo si } (\bar{s}_2(\tau_1), \ldots, \bar{s}_2(\tau_m)) \in R^{\mathfrak{A}}, && \text{(Lema 1.2.5)} \\
&\text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models R(\tau_1, \ldots, \tau_m)[s_2].
\end{aligned}$$

3. Supongamos que el resultado se cumple para φ y ψ.

   a) Para la negación, tenemos que $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[s_1]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \not\models \varphi[s_1]$. Nuestra hipótesis inductiva nos garantiza que esto último equivale a $\mathfrak{A} \not\models \varphi[s_2]$, que equivale a su vez a $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[s_2]$.

b) Para la conjunción, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[s_1] &\text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi[s_1] \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \models \psi[s_1],\\ &\text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi[s_2] \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \models \psi[s_2],\\ &\text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[s_2].\end{aligned}$$

c) Finalmente, para la cuantificación universal se tiene que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi[s_1]$ si y sólo si para cualquier $a \in A$ ocurre que $\mathfrak{A} \models \varphi[s_1(x/a)]$. Esto último equivale a que para toda $a \in A$ suceda que $\mathfrak{A} \models \varphi[s_2(x/a)]$ pues $s_1(x/a)$ y $s_2(x/a)$ coinciden en las variables libres de φ. Así lo anterior es equivalente a que $\mathfrak{A} \models \forall x\, \varphi[s_2]$.

QED

Corolario 1.2.7. *Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Para cualquier $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^0$ se cumple una y sólo una de las siguientes:*

1. *Para toda asignación s se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi\,[s]$.*
2. *Para toda asignación s se tiene que $\mathfrak{A} \not\models \varphi\,[s]$.*

Notación 1.2.8.
Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $\tau \in \mathrm{TRM}\,\rho$, s una asignación y $a_1, \ldots, a_n \in A$. Escribiremos $\tau(a_1, \ldots, a_n)$ para abreviar $\tau(x_1, \ldots, x_n)\big[s(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)\big]$. De forma muy similar, si $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_\rho^n$, entonces $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ denota $\varphi(x_1, \ldots, x_n)\big[s(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)\big]$. Así podemos afirmar que $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)\big[s(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)\big]$.

Observemos que por la Proposición 1.2.6 realmente no tiene relevancia qué asignación tomemos pues en las únicas variables en las que la satisfacción de la fórmula podría diferir son aquellas en las que se obliga a tomar el valor a_i correspondiente.

Definición 1.2.9. Decimos que $\varphi \in \mathscr{L}_\rho$ es *satisfacible* si y sólo si existen $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y una asignación s tales que $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$. Diremos que φ *insatisfacible* en caso contrario.

Observación 1.2.10. Gracias al Corolario 1.2.7, el que un enunciado sea satisfacible se reduce a que haya una estructura que lo satisfaga.

Definición 1.2.11. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\varphi \in \mathscr{L}_\rho$.

1. Decimos que $\mathfrak{A}$ *hace verdadera* o *modela* a φ si y sólo si para cualquier s asignación $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$. Esto se denotará por $\mathfrak{A} \models \varphi$.

2. Decimos que $\mathfrak{A}$ *hace falsa* a φ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

3. Decimos que φ es *universalmente válida* si y sólo si para cualquier $\mathfrak{A} \in V_\rho$ se cumple que $\mathfrak{A} \models \varphi$ y se denotará por $\models \varphi$.

4. Decimos que φ es *universalmente falsa* si y sólo si $\models \neg\varphi$.

Es importante notar que gracias al Corolario 1.2.7, si φ es un enunciado y $\mathfrak{A} \models \varphi[s]$ para alguna asignación s, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi$. Así, si φ es satisfacible, entonces hay un modelo en el cual es verdad.

Definición 1.2.12. Sean $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\rho^0$ y $\mathfrak{A} \in V_\rho$.
Diremos que $\mathfrak{A}$ *satisface* a Γ, en símbolos $\mathfrak{A} \models \Gamma$, si y sólo si para cualquier $\gamma \in \Gamma$ se tiene $\mathfrak{A} \models \gamma$. De forma similar, diremos que Γ es *satisfacible* o *consistente* si existe $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal que $\mathfrak{A}$ satisface a Γ. A los conjuntos satisfacibles de enunciados también se les conoce como *teorías* y es más común utilizar T para denotarlas.

Nota 1.2.13. La *inconsistencia* de un conjunto de fórmulas es un concepto sintáctico que refiere a que el conjunto traiga consigo contradicciones lógicas, es decir, que de las fórmulas de este conjunto se pueda inferir lógicamente algo contradictorio. Esto se plantea verificando si el conjunto *deduce* alguna fórmula de la forma $p \wedge \neg p$. Para hacer esto se requiere trabajar con las nociones de un *sistema formal* y *deducción*, entre otros conceptos, los cuales omitiremos pues no son fundamentales en el estudio del orden de Keisler. Cabe mencionar que gracias al *Teorema de Completud* de Gödel (1930) resultan equivalentes la *satisfacibilidad* y la *consistencia*. En lo que sigue en este escrito *satifacibilidad* y *consistencia* se tomarán como sinónimos, a sabiendas de que hay todo un desarrollo que distingue estas nociones.

Definición 1.2.14. Sea $T \subseteq \mathscr{L}^0_\rho$; definimos los *modelos* de T como la siguiente clase:

$$\mathrm{Mod}(T) := \{\, \mathfrak{A} \in V_\rho \mid \text{ para cualquier } \varphi \in T \text{ se cumple } \mathfrak{A} \models \varphi\}.$$

Definición 1.2.15. Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Definimos la *teoría de un modelo* como todos los enunciados que son verdaderos por el modelo. Esto es, $\mathrm{Teo}(\mathfrak{A}) := \{\, \varphi \in \mathscr{L}^0_\rho \mid \mathfrak{A} \models \varphi \,\}$.

Definición 1.2.16. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B} \in V_\rho$. Decimos que $\mathfrak{A}$ es *elementalmente equivalente* a $\mathfrak{B}$, en símbolos $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ si y sólo si para cualquier $\varphi \in \mathscr{L}^0_\rho$ se cumple que $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \varphi$ (equivalentemente si $\mathrm{Teo}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Teo}(\mathfrak{B})$).

1.3. Subestructuras y Morfismos

Prosigamos a estudiar cómo obtener estructuras a partir de estructuras dadas, y revisar las distintas formas de relacionarlas. Establecer estas relaciones será útil para estudiar el ultraproducto, estructura construida a partir de una familia de estructuras dada.

Definición 1.3.1. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B} \in V_\rho$ con soportes A y B, respectivamente. Decimos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$, en símbolos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, si y sólo si:

1. $A \subseteq B$.
2. Para cualquier $c \in \mathrm{Cons}\,\rho$, $\quad c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.
3. Para cualquier $f \in \mathrm{Func}_n\,\rho$, $\quad f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction_{A^n}$.
4. Para cualquier $R \in \mathrm{Rel}_m\,\rho$, $\quad R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^m$.

Observación 1.3.2. No es difícil ver que $\subseteq$ es una orden parcial en V_ρ.

Ya teniendo claro lo que es una subestructura, definamos aquellas subestructuras que satisfacen los mismos enunciados que las estructuras $\subseteq$-mayores y que preservan a elementos distinguidos. Esto significa que los elementos que satisfagan fórmulas en la subestructura, también lo harán en la superestructura. A estas subestructuras se les conoce como *subestructuras elementales*.

Definición 1.3.3. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B} \in V_\rho$. Decimos que $\mathfrak{A}$ es una *subestructura elemental* de $\mathfrak{B}$ o bien $\mathfrak{B}$ es una *superestructura elemental* de $\mathfrak{A}$, en símbolos $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, si y sólo si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, y para cualquier $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^n$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in A$, se cumple que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

Definición 1.3.4. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B} \in V_\rho$. Un *morfismo* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ es una función $M : A \longrightarrow B$ tal que:

1. Para cualquier constante $c \in \operatorname{Cons} \rho$, sucede $M(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

2. Si $f \in \operatorname{Func}_n \rho$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, entonces

$$M(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(M(a_1), \ldots, M(a_n)).$$

3. Si tomamos $R \in \operatorname{Rel}_m \rho$ y $a_1, \ldots, a_m \in A$, sucede que

$$(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ si y sólo si } (M(a_1), \ldots, M(a_m)) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

A los morfismos inyectivos de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ se les llamará *encajes*, y diremos que $\mathfrak{A}$ *se encaja en* $\mathfrak{B}$, en símbolos $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$. Se dice que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *isomorfos* si y sólo si existe un morfismo biyectivo entre ellos, y esto se denotará por $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Teorema 1.3.5 (Test de Tarski-Vaught)**.**
Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\rho$ tales que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Tenemos que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ si y sólo si para cualquier $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^{n+1}$ y cualesquiera $a_1 \ldots a_n \in A$, si $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x, a_1 \ldots, a_n)$, entonces tenemos que existe $a_0 \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. $\square$

Proposición 1.3.6. *Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.* $\square$

1.4. Teoremas Importantes, Consistencia y Completud

Continuaremos enunciando el *Teorema de Compacidad* y los Teoremas de Löwenheim-Skolem ascendente y descendente, que son tres de los teoremas más importantes de la Lógica Matemática. Para estos teoremas se omitirá la prueba, pues queda fuera de los propósitos de este trabajo.

Definición 1.4.1. Decimos que $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\rho^0$ es *completo* si y sólo si en la clase $\{\Delta \subseteq \mathscr{L}_\rho \mid \Delta \text{ satisfacible}\}$, Γ es $\subseteq$-maximal.

Definición 1.4.2. Decimos que $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\rho^0$ es $\in$-*completo* si y sólo si para cualquier $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^0$ se tiene que $\varphi \in \Gamma$, o bien, $\neg\varphi \in \Gamma$.

Teorema 1.4.3. *Sea $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\rho^0$ satisfacible.*

Γ es completo si y sólo si Γ es $\in$-completo. □

Definición 1.4.4. Decimos que Γ es *finitamente satisfacible* si y sólo si cualquier subconjunto finito de Γ es satisfacible.

Teorema 1.4.5 (Compacidad)**.** *Sea $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\rho^0$.*

Γ es satisfacible y sólo si Γ es finitamente satisfacible. □

Teorema 1.4.6 (Lindenbaum)**.**

Todo conjunto satisfacible de enunciados se puede extender a un conjunto completo de enunciados. □

Teorema 1.4.7 (Löwenheim-Skolem Descendente)**.**

Si $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\rho^0$ consistente, entonces existe un modelo de $\mathfrak{A} \in V_\rho$ tal que $|\mathfrak{A}| \leq |\mathcal{L}_\rho|$ □

Teorema 1.4.8 (Löwenheim-Skolem Ascendente)**.**

Si $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\rho^0$ tiene un modelo infinito, entonces tiene modelos de tamaño κ, para cualquier κ cardinal tal que $\kappa \geq |\mathcal{L}_\rho|$. □

Capítulo 2

Filtros y Ultraproductos

En este capítulo se trabajará la construcción, a partir de un conjunto de estructuras de tipo ρ, de la estructura denominada *ultraproducto*. El *orden de Keisler* se define a partir de la *ultrapotencia* de una estructura, que es un caso particular del *ultraproducto*. Se requerirá la noción de *filtro* para definir el *ultraproducto*, por lo que se comenzará por definirlo.

2.1. Filtros y Ultrafiltros

Intuitivamente hablando, un filtro es una familia de conjuntos "grandes". Se puede pensar que, dado un universo, las colecciones "grandes" serán conjuntos que ocupen casi todo el universo. Debido a esto, resulta intuitivo pensar que la intersección de cosas grandes será grande. De forma semejante, se puede pensar que superconjuntos de conjuntos grandes serán también grandes. Conjuntando lo anterior tiene lugar la siguiente definición.

Definición 2.1.1. Un *filtro* $\mathcal{F}$ sobre un conjunto no vacío I es una familia de subconjuntos de I que cumplen lo siguiente:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$ y $I \in \mathcal{F}$.

2. Para cualesquiera F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$, se tiene que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.

3. Si $F \in \mathcal{F}$ y X es un subconjunto de I que cumple que $F \subseteq X$, entonces $X \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 2.1.2. Para el conjunto $\mathbb{Q}$ y $a \in \mathbb{Q}$, consideramos el filtro $\{F \subseteq \mathbb{Q} \mid a \in F\}$.

Ejemplo 2.1.3. Para un conjunto infinito I, consideramos el filtro $\{F \subseteq I \mid I \setminus F \text{ es finito}\}$ (a este filtro se le conoce como el filtro de *Frechet*).

Ejemplo 2.1.4. Para el conjunto $\mathbb{R}$, consideremos el filtro

$$\{F \subseteq \mathbb{R} \mid \text{existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq F\}.$$

Resulta de suma importancia estudiar los filtros grandes, es decir los que tengan la mayor cantidad de elementos. La construcción de filtros grandes se hará extendiendo los filtros dados previamente. Esta extensión tiene que hacerse con cuidado, pues si agregamos elementos de más, podemos hacer que haya dos conjuntos ajenos en nuestra extensión. Por ejemplo, si tenemos un conjunto y tratamos de agregar su complemento relativo, caeremos en este problema. La siguiente clase de filtros está definida precisamente para que esto no ocurra.

Definición 2.1.5. Un *ultrafiltro* $\mathcal{U}$ sobre I es un filtro que cumple que para cualquier subconjunto X de I, o $X \in \mathcal{U}$, o bien , $I \setminus X \in \mathcal{U}$.

Notación 2.1.6. Si λ es un cardinal y A un conjunto, denotamos por $[A]^{\lambda}$ a la familia de subconjuntos de A de tamaño λ. De forma semejante, denotamos a $[A]^{<\lambda}$ a la familia de subconjuntos de tamaño menor que λ, y, finalmente, denotamos por $[A]^{\leq\lambda}$ a $[A]^{\lambda} \cup [A]^{<\lambda}$.

Cabe mencionar que una familia de subconjuntos de un conjunto no vacío I se puede extender a un filtro, y más aún, a un ultrafiltro, siempre y cuando cumplan con la siguiente propiedad.

Definición 2.1.7. Sea I un conjunto no vacío. Decimos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(I)$ es una *familia centrada* o que tiene la *propiedad de la intersección finita* (PIF) si y sólo si para cualquier $\mathcal{A}_0 \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ no vacío se tiene que $\bigcap \mathcal{A}_0 \neq \varnothing$.

Un *ultrafiltro* también se suele definir como un filtro $\subseteq$-maximal, y la razón es que estas definiciones son equivalentes. Para probar esto requeriremos el siguiente lema.

Lema 2.1.8. *Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(I)$ tiene la PIF, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre I tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$.*

Demostración. Consideremos a $\mathcal{F} = \{B \subseteq I \mid \text{existe } \mathcal{A}_0 \in [\mathcal{A}]^{<\omega} \text{ no vacío tal que } \bigcap \mathcal{A}_0 \subseteq B\}$ y probemos que es filtro:

1. Para mostrar que $I \in \mathcal{F}$, sea $A_1 \in \mathcal{A}$. Entonces $\bigcap\{A_1\} = A_1 \subseteq I$. Asimismo $\varnothing \notin \mathcal{F}$, pues de ser así habría $\mathcal{A}_0$ finito tal que $\bigcap \mathcal{A}_0 \subseteq \varnothing$ lo cual es una contradicción con el hecho de que $\mathcal{A}$ es una familia centrada.

2. Si $F_0, F_1 \in \mathcal{F}$, entonces existen $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ no vacíos tales que $\bigcap \mathcal{A}_0 \subseteq F_0$ y $\bigcap \mathcal{A}_1 \subseteq F_1$. Por lo que $\bigcap \mathcal{A}_0 \cap \bigcap \mathcal{A}_1 = \bigcap(\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1) \subseteq F_0 \cap F_1$ y claramente $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ es finito, por tanto $F_0 \cap F_1 \in \mathcal{F}$.

3. Si $F_0 \in \mathcal{F}$ y $F_0 \subseteq F_1 \subseteq I$, entonces existe $\mathcal{A}_0 \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ tal que $\bigcap \mathcal{A}_0 \subseteq F_0 \subseteq F_1$ y por tanto $F_1 \in \mathcal{F}$.

QED

Proposición 2.1.9. *Sea $\mathcal{U}$ un filtro sobre un conjunto no vacío I. Las siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre I.*

2. *$\mathcal{U}$ es $\subseteq$-maximal, esto es, si hay $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ filtro sobre I que cumpla que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.*

Demostración. **(1)→(2)** Supongamos que $\mathcal{U}$ no es maximal, entonces existe $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V}$. Tenemos que existe $A \in \mathcal{V}$ y $A \notin \mathcal{U}$, y, debido a que este último es ultrafiltro, entonces se tiene que $I \backslash A \in \mathcal{U} \subsetneq \mathcal{V}$. Por lo tanto, $A \in \mathcal{V}$ y $I \backslash A \in \mathcal{V}$, así $A \cap I \backslash A = \varnothing \in \mathcal{V}$ lo que es una contradicción con el hecho de que $\mathcal{V}$ es filtro.

(2)→(1) Por contrapositiva. Supongamos que $\mathcal{U}$ es un filtro pero no ultrafiltro. Veamos que no es maximal. Tenemos que al no ser ultrafiltro existe $A \subseteq I$ tal que $A \notin \mathcal{U}$ y $I \backslash A \notin \mathcal{U}$. Observemos que $\mathcal{U} \cup \{A\}$ tiene la PIF. Es claro que $\mathcal{U}$ tiene la PIF por ser filtro, por lo que basta corroborar que si $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n \neq \varnothing$.

Si fuera el caso de que $A \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n = \varnothing$, entonces $U_1 \cap \cdots \cap U_n \subseteq I \backslash A$, por tanto $I \backslash A \in \mathcal{U}$ por ser filtro, lo cual es una contradicción. Así, $\mathcal{U} \cup \{A\}$ tiene la PIF y por el Lema 2.1.8 se tiene que hay un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{U} \cup \{A\}$, y dado que $A \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{U}$ tenemos que $\mathcal{U}$ no es $\subseteq$-maximal. QED

Veamos ahora cómo extender familias centradas a ultrafiltros. Gracias al Lema 2.1.8 podemos extender familias centradas a filtros. Basta entonces establecer cómo extender filtros a ultrafiltros. El siguiente lema da detalle de cómo realizar esta extensión.

Lema 2.1.10. *Si $\alpha > 0$ es algún ordinal y $\{\mathcal{F}_\beta\}_{\beta<\alpha}$ es una familia de filtros de manera de que $\mathcal{F}_{\beta_1} \subseteq \mathcal{F}_{\beta_2}$ siempre que $\beta_1 < \beta_2$, entonces tenemos que $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta$ es un filtro.*

Demostración.

1. Para cualquier $\beta < \alpha$ tenemos que $I \in \mathcal{F}_\beta$, así $I \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta$.

2. Si $F_1, F_2 \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta$, entonces hay β_1, β_2 tales que $F_1 \in \mathcal{F}_{\beta_1}$ y $F_2 \in \mathcal{F}_{\beta_2}$. De esta manera $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\text{máx}\{\beta_1,\beta_2\}}$, por lo que podemos concluir que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{\text{máx}\{\beta_1,\beta_2\}}$. Con esto es claro que $F_1 \cap F_2 \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta$.

3. Consideremos $F \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta$ con $G \supseteq F$, entonces hay $\beta < \alpha$ tal que $F \in \mathcal{F}_\beta$. Así, $G \in \mathcal{F}_\beta$ y por tanto $G \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta$.

QED

Con este lema, la construcción de un ultrafiltro a partir de una familia centrada resulta muy sencilla.

Proposición 2.1.11. *Sea I un conjunto no vacío. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(I)$ es una familia centrada, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I que cumple que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración. Por el Lema 2.1.8, existe $\mathcal{F}$ filtro tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Consideremos la clase $\mathcal{F}^* := \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I) \mid \mathcal{U}$ es un filtro sobre I y $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}\}$, que es claramente no vacía.

Por el Lema 2.1.10, cualquier cadena en la clase $\mathcal{F}^*$ está superiormente acotada, y por el *Lema de Zorn* [1] hay un elemento maximal, digamos $\mathcal{U}_\mathcal{A}$. Por la Proposición 2.1.9, $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ es ultrafiltro. QED

Definición 2.1.12. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre I.

1. Decimos que $\mathcal{F}$ es *principal* si existe $a \in I$ de manera que $\mathcal{F} = \{F \subseteq I \mid a \in F\}$.

2. Diremos que $\mathcal{F}$ es *centrado* si existe $A \subseteq I$ (llamado *centro*) tal que $\mathcal{F} = \{F \subseteq I \mid A \subseteq F\}$.

Observación 2.1.13. Es fácil verificar que si un filtro es principal, entonces es centrado. Más aún, todo ultrafiltro centrado es principal, pues si tuviera un centro de más de un elemento, podríamos tomar uno de estos elementos y considerar a su singulete. Ni el singulete, ni su complemento, formarían parte del filtro pues no contendrían al centro.

Proposición 2.1.14. *Sean $\mathcal{F} = \{F \subseteq I \mid I \backslash F$ es finito$\}$ el filtro de Frechet y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I. Si $\mathcal{U}$ es no centrado, entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Demostración. Procedamos por contrapuesta. Si $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{U}$, entonces habría $F_0 \in \mathcal{F} \backslash \mathcal{U}$. Tenemos que por ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro es cierto que $I \backslash F_0 \in \mathcal{U}$ donde $I \backslash F_0$ es finito.

Consideremos la familia $\mathcal{A}_0 := \{(I \backslash F_0) \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}$, para la cual es claro que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{U}$. Debido a que $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(I \backslash F_0)$, se tiene que $\mathcal{A}_0$ es finito y por tanto posee un elemento $\subseteq$-minimal. Sea B un elemento $\subseteq$-minimal en $\mathcal{A}_0$ y veamos que es mínimo.

Supongamos que $A \in \mathcal{A}_0$ y demostremos $B \subseteq A$. Tenemos que $B, A \in \mathcal{U}$ y por tanto $B \cap A \in \mathcal{U}$; más aún, $B \cap A \in \mathcal{A}_0$. Debido a que $B \cap A \subseteq B$ y B es $\subseteq$-minimal, deducimos que $B \cap A = B$. Ahora bien, como $B \cap A \subseteq A$, concluimos que $B \subseteq A$, que es lo que se quería mostrar.

Siendo así si $U \in \mathcal{U}$, entonces $(I \backslash F_0) \cap U \in \mathcal{A}_0$, y así $B \subseteq I \backslash F_0 \cap U \subseteq U$, es decir, $B \subseteq U$. Entonces $\mathcal{U} = \{U \subseteq I \mid B \subseteq U\}$, y por tanto $\mathcal{U}$ es centrado. QED

[1] El *Lema de Zorn* establece que un orden parcial que cumpla que cualquier cadena esté superiormenete acotada tiene un elemento máximal.

En la siguiente sección se verá que los ultrafiltros principales trivializan el ultraproducto debido a que los ultrafiltros principales están anclados en el elemento del cual se generan. Esto permite que un conjunto como el unitario del elemento generador sea considerado grande. Debido a esto, es deseable que un filtro se reparta homogéneamente sobre su soporte. Esta idea se trata de construir con las siguientes nociones de filtro.

Definición 2.1.15. Decimos que un filtro $\mathcal{F}$ es *numerablemente incompleto* si existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ numerable tal que $\bigcap \mathcal{A} = \varnothing$.

Proposición 2.1.16. *Si $\mathcal{F}$ es numerablemente incompleto, entonces existe una cadena descendente $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} F_n = \varnothing$*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es numerablemente incompleto existen $A_0, A_1, A_2, \ldots$ elementos de $\mathcal{F}$ tales que $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \varnothing$. Definamos recursivamente los siguientes conjuntos: $F_0 := A_0$, y $F_{n+1} := F_n \cap A_{n+1}$.

Es claro que para cualquier $n \in \omega$ sucede que $F_n \in \mathcal{F}$ y $F_n \subseteq A_n$, además de que $F_0, F_1, \cdots$ es una cadena descendente. Con esto tenemos que $\bigcap_{n\in\omega} F_n \subseteq \bigcap_{n\in\omega} A_n = \varnothing$. QED

Continuemos estudiando la relación entre los filtros no centrados y los numerablemente incompletos.

Proposición 2.1.17. *Todos los filtros numerablemente incompletos son no centrados.*

Demostración. Probemos este hecho por contrapuesta. Sea $\mathcal{F}$ un filtro centrado sobre un conjunto I y veamos que que no puede ser numerablemente incompleto. Por ser centrado existe $B \subseteq I$ no vacío tal que $\mathcal{F} = \{ F \subseteq I \mid B \subseteq F \}$. Por otro lado, tomemos $F_1, F_2, \ldots$, una familia numerable cualquiera de elementos de $\mathcal{F}$. Observemos que $B \subseteq F_n$ para cualquier $n \in \omega$, y por tanto $B \subseteq \bigcap_{n\in\omega} F_n$. Esto implica que $\bigcap_{n\in\omega} F_n \neq \varnothing$, pues $B \neq \varnothing$. QED

Podemos ver que las nociones de ser un filtro numerablemente incompleto y ser un filtro no centrado coinciden cuando el soporte del filtro es numerable.

Teorema 2.1.18. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal sobre un conjunto numerable I, entonces es numerablemente incompleto.*

Demostración. Digamos que $I = \{a_n \mid n \in \omega\}$. Definimos $A_n = I \backslash \{a_n\}$ para cualquier $n \in \omega$. Por la Proposición 2.1.14 es claro que $A_n \in \mathcal{U}$ para cualquier $n \in \omega$. Sucede que $\bigcap_{n \in \omega} A_n = \varnothing$, pues para cualquier $n \in \omega$ se tiene $a_n \notin A_n$. QED

La noción de ultrafiltros numerablemente incompletos es bastante útil para modelar filtros que estén repartidos, sin embargo, se requerirá desarrollar una idea aún más fuerte. Los ultrafiltros regulares serán los filtros sobre los cuales se trabajará la saturación de la ultrapotencia de una estructura y los definiremos enseguida. Cabe mencionar que existen unos filtros más fuertes que los regulares, a los que les llamamos buenos. Estos filtros son tan poderosos que garantizan la saturación de la ultrapotencia de cualquier estructura y serán trabajados a principio del cuarto capítulo.

Definición 2.1.19. Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto I y sea κ un cardinal. Decimos que $\mathcal{F}$ es *κ-regular* si existe una familia $\{ F_\alpha \mid \alpha < \kappa \} \subseteq \mathcal{F}$ (a la cual llamamos *familia regularizadora*) tal que para toda $i \in I$ se tiene que $\{ \alpha < \kappa \mid i \in F_\alpha \}$ es finito. Dicho en otras palabras, para cualquier $\mathcal{A}_0 \subseteq \{ F_\alpha \mid \alpha < \kappa \}$ infinito sucede que $\bigcap \mathcal{A}_0 = \varnothing$. Diremos que $\mathcal{F}$ es *regular* si es $|I|$-regular.

Proposición 2.1.20. *Si un filtro es κ-regular, entonces es λ-regular para toda $\lambda \leq \kappa$.*

Demostración. Esto es claro, ya que si se tiene una familia regularizadora de tamaño κ, extraemos un conjunto de tamaño λ, y esta será una familia regularizadora. QED

De hecho, la intención es estudiar los ultrafiltros κ-regulares con κ lo más grande posible.

Proposición 2.1.21. *Todo filtro ω-regular es numerablemente incompleto.*

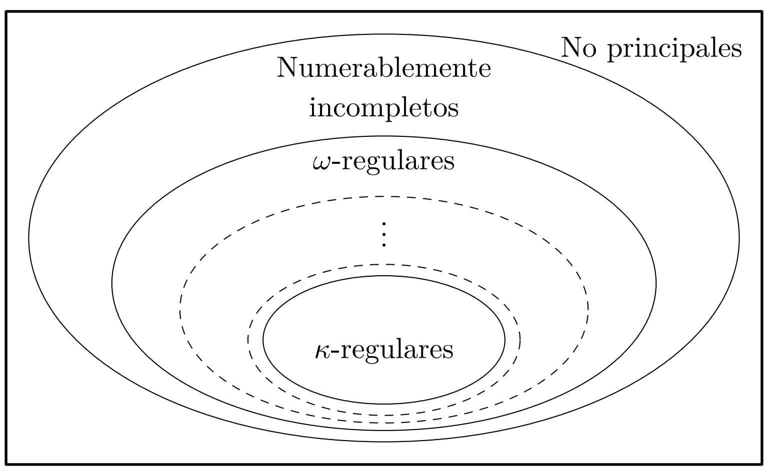
Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro ω-regular. Entonces existe $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ familia regularizadora numerable. Es decir, para cualquier $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ infinito se tiene que $\bigcap \mathcal{A}_0 = \varnothing$. Notemos que, en particular, $\mathcal{A}$ cumple esto, por lo que $\mathcal{A}$ es una familia numerable con intersección vacía. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es numerablemente incompleto. QED

Teorema 2.1.22. *Para cualquier conjunto infinito I, existe un ultrafiltro regular.*

Demostración. Como I es infinito entonces existe una función biyectiva $H : I \longrightarrow [I]^{<\omega}$. Consideremos $j \in I$ y definimos $K_j := \{ i \in I \mid j \in H(i) \}$. Veamos que la familia $R := \{ K_j \mid j \in I \}$ es regularizadora. Observemos que $i \in K_j$ si y sólo si $j \in H(i)$. De esta manera, la cantidad de elementos en R a los cuales i pertenece es finita, pues $H(i)$ es finito. Por lo tanto, tenemos que R es una familia regularizadora. Procedamos a demostrar que R es una familia con la propiedad de la intersección finita.

Sea $i \in I$ de forma que $H(i) = \{j_1, \dots, j_n\}$. Si $K_{j_1}, \dots, K_{j_n} \in R$, entonces para cualquier $k \in \{1, \dots, n\}$ sucede $i \in K_{j_k}$ pues $j_k \in \{j_1, \dots, j_n\} = H(i)$. Por lo tanto, para toda $i \in K_{j_k}$ pasa que $i \in \bigcap_{k=1}^{n} K_{j_k}$. Siendo así, por la Proposición 2.1.11 hay un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $R \subseteq \mathcal{U}$. QED

La forma en que se relacionan los tipos de filtros anteriores se puede resumir en la siguiente figura. La existencia de filtros κ-regulares garantizan la existencia de filtros numerablemente incompletos y no principales.



Podemos notar que gracias al Teorema 2.1.22 garantizamos la existencia de ultrafiltros regulares y por tanto numerablemente incompletos y no centrados. La utilidad de estos filtros es crear una clase de subconjuntos grandes de un conjunto de índices de manera que se encuentren repartidos sobre el mismo. Esto cobrará mayor sentido en el siguiente capítulo, cuando se trabaje con la saturación de estructuras, más precisamente, con la saturación de ultraproductos.

2.2. Ultraproductos y Ultrapotencias

En esta sección se abordará el ultraproducto, el cual es un cociente del producto de una familia indizada de estructuras módulo un ultrafiltro. Para esto se necesitará definir el producto de estructuras cuyo soporte, de forma muy semejante al producto directo de grupos o al producto topológico de espacios, será conjunto de funciones del conjunto de índices de la familia sobre la unión de los soportes. Estas funciones se pueden pensar como tuplas de tantos elementos como el conjunto de índices, y que se constituyen de elementos de los soportes en cada estructura. Verificar la satisfacibilidad de una fórmula en el producto se traducirá en comprobar su satisfacción en cada factor o miembro de la familia de estructuras.

Definición 2.2.1. Sea I un conjunto y sea $\{A_i \mid i \in I\}$ una clase de conjuntos no vacíos indizados sobre I. Definimos el *producto cartesiano* como:

$$\prod\{A_i \mid i \in I\} = \prod_{i\in I} A_i := \Big\{h : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \Big| \, h(i) \in A_i\Big\}.$$

Definición 2.2.2. Sea I un conjunto y $\mathfrak{A}_i \in V_\rho$ para cada $i \in I$. Definimos el *producto de estructuras* como

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i := \Big\langle \prod_{i\in I} A_i, \mathbb{I}\Big\rangle,$$

donde:

1. Para cada $c \in \operatorname{Cons}\rho$,

$$\mathbb{I}(c) : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$$
$$i \mapsto c^{\mathfrak{A}_i}.$$

2. Para cada $f \in \mathrm{Func}_n\, \rho$ y cualesquiera $h_1, \ldots, h_n \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(f) : \Big(\prod_{i\in I} A_i\Big)^n &\longrightarrow \prod_{i\in I} A_i\\ (h_1, \ldots, h_n) &\mapsto \mathbb{I}(f)(h_1, \ldots, h_n) : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i\\ &\qquad\qquad i \mapsto f^{\mathfrak{A}_i}\big(h_1(i), \ldots, h_n(i)\big).\end{aligned}$$

3. Para cualquier $R \in \mathrm{Rel}_m\, \rho$ y cualesquiera $h_1 \ldots, h_m \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$\big(h_1, \ldots, h_m\big) \in \mathbb{I}(R) \text{ si y sólo si para toda } i \in I \text{ se tiene } \big(h_1(i), \ldots, h_m(i)\big) \in R^{\mathfrak{A}_i}.$$

El producto es una estructura bastante refinada, ya que si una fórmula es satisfacible en cada factor, lo será en el ultraproducto, sin embargo, en general no es fácil determinar la veracidad de las fórmulas. Resulta relevante proponer una estructura un poco menos restrictiva en el sentido de la satisfacibilidad de fórmulas. El ultraproducto tiene la cualidad de que no necesita que se satisfaga una fórmula en absolutamente todos los factores para que ésta se satisfaga. Basta sólo que la fórmula se satisfaga en una cantidad grande de miembros de la familia para considerarse satisfecha por el ultraproducto. La noción de conjunto grande de miembros se traduce en que el conjunto de índices donde se satisface es grande, lo que a su vez se traduce en que este conjunto sea miembro de un ultrafiltro.

Definición 2.2.3. Sea I un conjunto no vacío y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$. Definimos la relación $\sim_{\mathcal{F}}$ sobre $\prod_{i\in I} A_i$ como:

$$h \sim_{\mathcal{F}} g \text{ si y sólo si } \{\, i \in I \mid h(i) = g(i) \,\} \in \mathcal{F}.$$

Lema 2.2.4. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre I, entonces $\sim_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia en $\prod_{i\in I} A_i$*

Demostración.

Reflexividad: Para cualquier $h \in \prod_{i\in I} A_i$ se tiene $\{\, i \in I \mid h(i) = h(i) \,\} = I \in \mathcal{F}$.

Simetría: Notemos que

$$\begin{aligned}
\text{si } h \sim_{\mathcal{F}} g, \qquad & \text{entonces } \{\, i \in I \mid h(i) = g(i) \,\} \in \mathcal{F}, \\
& \text{entonces } \{\, i \in I \mid g(i) = h(i) \,\} \in \mathcal{F}, \\
& \text{entonces } g \sim_{\mathcal{F}} h.
\end{aligned}$$

Transitividad: Supongamos que $h \sim_{\mathcal{F}} g$ y $g \sim_{\mathcal{F}} k$; tenemos que:

$$\begin{gathered}
\{\, i \in I \mid h(i) = g(i) \,\} \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \{\, i \in I \mid g(i) = k(i) \,\} \in \mathcal{F}, \qquad\qquad \text{entonces} \\
\{\, i \in I \mid h(i) = g(i) \,\} \cap \{\, i \in I \mid g(i) = k(i) \,\} \in \mathcal{F}.
\end{gathered}$$

Dándonos cuenta de que $\{\, i \in I \mid h(i) = g(i) \,\} \cap \{\, i \in I \mid g(i) = k(i) \,\} \subseteq \{\, i \in I \mid h(i) = k(i) \,\}$, concluimos que $\{\, i \in I \mid h(i) = k(i) \,\} \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $h \sim_{\mathcal{F}} k$. QED

La relación de equivalencia dice intuitivamente que dos I-tuplas son equivalentes si el conjunto de entradas donde coinciden es grande.

Definición 2.2.5. Sean I un conjunto, $\{\, A_i \mid i \in I \,\}$ una clase de conjuntos no vacíos y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ un filtro sobre I. Definimos el *producto reducido de conjuntos* como:

$$\prod \{\, A_i \,|\, i \in I \,\}/\mathcal{F} = \prod_{i \in I} A_i/\mathcal{F} := \left\{ h/\mathcal{F} \,\middle|\, h \in \prod_{i \in I} A_i \right\},$$

donde $h/\mathcal{F}$ es la clase de equivalencia de h módulo $\sim_{\mathcal{F}}$.

Lema 2.2.6. *Consideremos a $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto no vacío I y tomemos una familia $\{A_i \mid i \in I\}$. Sean $h_1, \ldots, h_n \in \prod_{i \in I} A_i$ y $g_1, \ldots, g_n \in \prod_{i \in I} A_i$.*

1. *Definamos f como*

$$\begin{aligned}
f : \Big(\prod_{i \in I} A_i \Big)^n &\longrightarrow \prod_{i \in I} A_i \\
(h_1, \ldots, h_n) &\mapsto f_i(h_1, \ldots, h_n),
\end{aligned}$$

donde $f_i(h_1,\ldots,h_n)(i) = f_i\big(d_1(i),\ldots,d_n(i)\big)$. *Si* $h_k \sim_{\mathcal{F}} g_k$ *para cada* $1 \leq k \leq n$, *entonces* $f(h_1,\ldots,h_n) \sim_{\mathcal{F}} f(g_1,\ldots,g_n)$.

2. *Tomemos* $R_i \subseteq A_i^n$ *para cada* I. *Si* $h_k \sim_{\mathcal{F}} g_k$ *para cada* $1 \leq k \leq n$, *entonces* $\{i \in I \mid \big(h_1(i),\ldots,h_m(i)\big) \in R_i\} \in \mathcal{F}$ *si y sólo si* $\{i \in I \mid \big(g_1(i),\ldots,g_m(i)\big) \in R_i\} \in \mathcal{F}$.

Demostración.

1. Sea $U_k := \{i \in I \mid h_k(i) = g_k(i)\}$ para toda $0 \leq k \leq n$. Es claro que $U_k \in \mathcal{F}$, más aún, tenemos que $\bigcap_{k=1}^n U_k = \{i \in I \mid h_1(i) = g_1(i),\ldots,h_n(i) = g_n(i)\} \in \mathcal{F}$. Por otro lado, como f_i es función para toda $i \in I$ se cumple que

$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k \subseteq \{i \in I \mid f_i\big(h_1(i),\ldots,h_n(i)\big) = f_i\big(g_1(i),\ldots,g_n(i)\big)\},$$

y así, $\{i \in I \mid f_i\big(h_1(i),\ldots,h_n(i)\big) = f_i\big(g_1(i),\ldots,g_n(i)\big)\} \in \mathcal{F}$.

Debido a que $\{i \in I \mid f_i\big(h_1(i),\ldots,h_n(i)\big) = f_i\big(g_1(i),\ldots,g_n(i)\big)\}$ es igual a $\{i \in I \mid f_i(h_1,\ldots,h_n)(i) = f_i(g_1,\ldots,g_n)(i)\}$, tenemos demostrado que $f(h_1,\ldots,h_n) \sim_{\mathcal{F}} f(g_1,\ldots,g_n)$.

2. Sea U_k definido igual que el inciso anterior. De nuevo $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \mathcal{F}$. Nombremos también $V_0 := \{i \in I \mid \big(h_1(i),\ldots,h_m(i)\big) = \big(g_1(i),\ldots,g_m(i)\big)\}$, y observemos que $\bigcap_{k=1}^n U_k \subseteq V$. Así sucede que $V_0 \in \mathcal{F}$. Supongamos que $V_1 := \{i \in I \mid \big(h_1(i),\ldots,h_m(i)\big) \in R_i\} \in \mathcal{F}$. Se tiene que $V_0 \cap V_1 \in \mathcal{F}$, además de que $V_0 \cap V_1 \subseteq \{i \in I \mid \big(g_1(i),\ldots,g_m(i)\big) \in R_i\} \in \mathcal{F}$.

El regreso es completamente análogo, por tanto $\{i \in I \mid \big(h_1(i),\ldots,h_m(i)\big) \in R_i\} \in \mathcal{F}$ si y sólo si $\{i \in I \mid \big(g_1(i),\ldots,g_m(i)\big) \in R_i\} \in \mathcal{F}$.

QED

Definición 2.2.7. Sean I un conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ un filtro sobre I. Sea $\mathfrak{A}_i \in V_\rho$ para cada $i \in I$. Definimos el *producto reducido de estructuras* como:

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{F} := \Big\langle \prod_{i\in I} A_i/\mathcal{F}, \mathbb{I} \Big\rangle.$$

Nombremos $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ por $\mathfrak{A}$ y a $\prod_{i\in I} A_i$ por A. Establezcamos el comportamiento de $\mathbb{I}$ mediante lo siguiente;

1. Para cualquier $c \in \operatorname{Cons}\rho$ escribimos $\mathbb{I}(c) = c^{\mathfrak{A}}/\mathcal{F}$.

2. Para cualquier $f \in \operatorname{Func}_n \rho$ y cualesquiera $h_1, \ldots, h_n \in A$ definimos

$$\mathbb{I}(f)(h_1/\mathcal{F}, \ldots, h_n/\mathcal{F}) = f^{\mathfrak{A}}(h_1, \ldots, h_n)/\mathcal{F}.$$

3. Para cualquier $R \in \operatorname{Rel}_m \rho$ y cualesquiera $h_1, \ldots, h_n \in A$,

$$(h_1/\mathcal{F}, \ldots, h_m/\mathcal{F}) \in \mathbb{I}(R) \text{ si y sólo si } \left\{ i \in I \;\middle|\; (h_1(i), \ldots, h_m(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i} \right\} \in \mathcal{F}.$$

En el caso de que $\mathcal{F}$ sea un ultrafiltro, al producto reducido se le denominará *ultraproducto de estructuras.*

Observación 2.2.8. Notemos que gracias al Lema 2.2.6 la interpretación de los símbolos funcionales y los símbolos relacionales están bien definidas, esto es, la definición del ultraproducto está bien planteada.

Enseguida probaremos un Teorema de Jerzy Łoś (ver [Łoś, 1955]) que resulta de alta relevancia para los resultados consecuentes. Este teorema da una herramienta para verificar si fórmulas en un ultraproducto son satisfacibles observando únicamente la satisfacibilidad de éstas en los factores del ultraproducto.

Para un planteamiento más sencillo del teorema será necesario describir cómo se interpretan los términos del lenguaje en los que aparecen variables al darles valores específicos a estás.

Notación 2.2.9. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\tau \in \operatorname{TRM}\rho$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathrm{VAR}$ de forma que $\operatorname{Oc}(\tau) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y s una asignación. Escribiremos $\tau^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ para denotar a $\overline{s(v_1/a_1, \ldots, v_n/a_n)}(\tau)$, la interpretación de τ bajo cualquier sucesión en la que las variables $v_1, \ldots, v_n$ son interpretadas por $a_1, \ldots, a_n$ respectivamente.

Observemos que la asignación tomada no forma parte de la notación. Esto es porque gracias al Lema 1.2.5, al darle valores específicos a las variables que ocurren en el término cualquier asignación, da el mismo resultado.

Teorema 2.2.10 (Łoś). *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I y sean $\mathfrak{A}_i \in V_\rho$ para cualquier $i \in I$. Escribamos $\mathfrak{B} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ y $\mathfrak{A} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ y tomemos $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Para cualesquiera $\tau \in \mathrm{TRM}\,\rho$, $i \in I$ y $h_1, \ldots, h_n \in B$ sucede que*

$$\tau^{\mathfrak{A}}(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) = \Big(\tau^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))\Big)_{i\in I}\Big/\mathcal{U}.$$

2. *Para cualesquiera $\varphi \in \mathscr{L}^n_\rho$ y $h_1, \ldots, h_n \in \prod_{i\in I} A_i$ se tiene que*

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) \text{ si y sólo si } \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}.$$

Demostración.

(1) Observemos que por definición $\tau^{\mathfrak{A}}(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) = \tau^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)/\mathcal{U}$, por lo que basta demostrar que $\tau^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)(i) = \tau^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))$ para cualquier $i \in I$, lo cual probaremos por inducción sobre la construcción de términos.

Para $c \in \mathrm{Cons}\,\rho$ se tiene que $c^{\mathfrak{B}}(i) = c^{\mathfrak{A}_i}$.

Para $x \in \mathrm{VAR}$ tenemos que $x^{\mathfrak{B}}(h_1)(i) = h_1(i) = x^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i))$.

Supongamos que $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{TRM}\,\rho$ tal que $\tau_k^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)(i) = \tau_k^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))$ con $1 \leq k \leq m$ y tomemos $f \in \mathrm{Func}_m\,\rho$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\Big[f\Big(\tau_1, \ldots, \tau_m\Big)\Big]^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)(i) &= f^{\mathfrak{B}}\Big(\tau_1^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n), \ldots, \tau_m^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)\Big)(i) \\
&= f^{\mathfrak{A}_i}\Big(\tau_1^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)(i), \ldots, \tau_m^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)(i)\Big) \\
&= f^{\mathfrak{A}_i}\Big(\tau_1^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)), \ldots, \tau_m^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))\Big) \quad \text{(HI)} \\
&= \Big[f\Big(\tau_1, \ldots, \tau_m\Big)\Big]^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)).
\end{aligned}$$

(2) Procederemos esta prueba por inducción sobre la construcción de fórmulas.

Sean $h_1, \ldots, h_n \in B$ y $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathrm{TRM}\,\rho$. Para igualdad de términos tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models &(\tau_1 = \tau_2)(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) \\
&\text{si y sólo si} \quad \tau_1^{\mathfrak{A}}(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) = \tau_2^{\mathfrak{A}}(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}), \\
&\text{si y sólo si} \quad \tau_1^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)/\mathcal{U} = \tau_2^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)/\mathcal{U}, \\
&\text{si y sólo si} \quad \tau_1^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n) \sim_{\mathcal{U}} \tau_2^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n), && \text{(Por (1))} \\
&\text{si y sólo si} \quad \Big\{ i \in I \,\Big|\, \tau_1^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)) = \tau_2^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)) \Big\} \in \mathcal{U}, \\
&\text{si y sólo si} \quad \Big\{ i \in I \,\Big|\, \mathfrak{A}_i \models (\tau_1 = \tau_2)(h_1(i), \ldots, h_n(i)) \Big\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Consideremos $R \in \mathrm{Rel}_m\,\rho$ y probemos para el resto de las atómicas:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models &R(\tau_1, \ldots, \tau_m)(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) \\
&\text{si y sólo si} \quad \Big(\tau_1^{\mathfrak{A}}(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}), \ldots, \tau_m^{\mathfrak{A}}(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U})\Big) \in R^{\mathfrak{A}}, \\
&\text{si y sólo si} \quad \Big\{ i \in I \,\Big|\, \Big(\tau_1^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)(i), \ldots, \tau_m^{\mathfrak{B}}(h_1, \ldots, h_n)(i)\Big) \in R^{\mathfrak{A}_i} \Big\} \in \mathcal{U}, && \text{(Por (1))} \\
&\text{si y sólo si} \quad \Big\{ i \in I \,\Big|\, \Big(\tau_1^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i)), \ldots, \tau_m^{\mathfrak{A}_i}(h_1(i), \ldots, h_n(i))\Big) \in R^{\mathfrak{A}_i} \Big\} \in \mathcal{U}, \\
&\text{si y sólo si} \quad \Big\{ i \in I \,\Big|\, \mathfrak{A}_i \models R\Big(\tau_1, \ldots, \tau_m\Big)(h_1(i), \ldots, h_n(i)) \Big\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Supongamos que el resultado se cumple para $\varphi, \psi \in \mathscr{L}_\rho$ y demostremos que se cumple en lo siguiente.

Primero tenemos que, para la negación:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \neg\varphi(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) \ &\text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \not\models \varphi(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}), \\
&\text{si y sólo si} \quad \{ i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i)) \} \notin \mathcal{U}, && \text{(HI)} \\
&\text{si y sólo si} \quad I \backslash \{ i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i)) \} \in \mathcal{U}, \\
&\text{si y sólo si} \quad \{ i \in I \mid \mathfrak{A}_i \not\models \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i)) \} \in \mathcal{U}, \\
&\text{si y sólo si} \quad \{ i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \neg\varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i)) \} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Para la conjunción:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models & (\varphi \wedge \psi)(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) \\
& \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models \varphi(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) \quad \text{y} \quad \mathfrak{A} \models \psi(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}), \\
& \text{si y sólo si} \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U} \quad \text{y} \\
& \qquad\qquad\quad\ \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}, \qquad \text{(HI)} \\
& \text{si y sólo si} \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \cap \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}, \\
& \text{si y sólo si} \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models (\varphi \wedge \psi)(h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}
$$

Por último, para las cuantificaciones, podemos equivalentemente resolver para el existencial. Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models & \exists x\, \varphi(x; h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}) \\
& \text{si y sólo si existe } g \in B \text{ tal que } \mathfrak{A} \models \varphi(g/\mathcal{U}, h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}), \\
& \text{si y sólo si existe } g \in B \text{ tal que } \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(g(i), h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}
$$

Veamos que esta última es equivalente a que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x\, \varphi(x; h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}$.

Para la ida, tomemos $g \in B$ tal que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(g(i), h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}$ y procedamos a demostrar que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x\, \varphi(x; h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}$. Si $i_0 \in \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(g(i), h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{i_0} \models & \varphi(g(i_0), h_1(i_0), \ldots, h_n(i_0)), \\
& \text{entonces, } g(i_0) \text{ es el testigo con el cual } \mathfrak{A}_{i_0} \models \exists x\, \varphi(x; h_1(i_0), \ldots, h_n(i_o)), \\
& \text{y por tanto } i_0 \in \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x\, \varphi(x; h_1(i), \ldots, h_n(i))\}.
\end{aligned}
$$

En resumen, probamos que $\{\, i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(h(i)) \,\} \subseteq \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi(x; h_1(i), \ldots, h_n(i))\}$. Así, hemos probado que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi(x; h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}$, pues teníamos que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(g(i), h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}$.

Ahora, para la conversa, supongamos que $J := \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x\varphi(x; h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}$. Veamos que existe $g \in B$ de manera que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(g(i), h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}$. Para cualquier $i \in J$ se tiene que $\mathfrak{A}_i \models \exists x\, \varphi(x; h_1(i), \ldots, h_n(i))$; dicho en otras palabras, existe $a_i \in A_i$ tal que $\mathfrak{A}_i \models \varphi(a_i, h_1(i), \ldots, h_n(i))$.

Construyamos mediante el Axioma de Elección, una función $g_0 \in B$ de forma que $g_0(i) = a_i$ si $i \in J$ y que $g_0(i) \in A_i$ si $i \in I \backslash J$. Por construcción $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x\varphi(x; h_1(i), \ldots, h_n(i))\} = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(g_0(i), h_1(i), \ldots, h_n(i))\}$.

Así queda demostrado que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(g(i), h_1(i), \ldots, h_n(i))\} \in \mathcal{U}$. QED

Intuitivamente, el Teorema de Łoś nos dice que el ultraproducto se comporta de manera similar a una democracia en el sentido de que las fórmulas que se satisfacen son aquellas satisfechas por una mayoría. El qué entendamos por una mayoría depende fuertemente del ultrafiltro, por lo que será de suma importancia tomar un filtro adecuado.

El caso más particular del ultraproducto de una sola estructura repetida tantas veces como haya elementos en el conjunto de índices será denominado ultrapotencia, la cual será el cimiento principal del orden de Keisler.

Definición 2.2.11. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto I y $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Definimos la *ultrapotencia* de $\mathfrak{A}$ como:

$$\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} := \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \quad \text{dónde para cada } i \in I \text{ se tiene } \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}.$$

Corolario 2.2.12 (Principio de transferencia)**.** *Si I es un conjunto no vacío, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre I y $\mathfrak{A} \in V_\rho$ entonces $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \equiv \mathfrak{A}$.*

Veamos ahora que podemos dar un encaje elemental de una estructura en su ultrapotencia.

Proposición 2.2.13. *Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto no vacío I. La función $M : A \longrightarrow A^I/\mathcal{U}$ definida como $a \mapsto h_a/\mathcal{U}$ es un morfismo, de donde $h_a : I \longrightarrow A$ denota la función constante con valor a.*

Demostración. Escribamos $\mathfrak{B} := \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ y mostremos que M es morfismo.

1. Sea $c \in \operatorname{Cons}\rho$. Observemos que $M(c^{\mathfrak{A}}) = h_{c^{\mathfrak{A}}}/\mathcal{U}$. Por otro lado, es claro por la definición de interpretación de constantes en el ultraproducto que $h_{c^{\mathfrak{A}}}/\mathcal{U} = c^{\mathfrak{B}}$, y por tanto $h_{c^{\mathfrak{A}}}/\mathcal{U} = c^{\mathfrak{B}}$.

2. Sean $f \in \operatorname{Func}_n \rho$ y $a_1, \dots, a_n \in A$.

   Demostremos que $M(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h_{a_1}/\mathcal{U}, \dots, h_{a_n}/\mathcal{U})$. Denotemos por b a $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)$ y recordemos que $f^{\mathfrak{B}}(h_{a_1}/\mathcal{U}, \dots, h_{a_n}/\mathcal{U}) = f^{\mathfrak{A}^I}(h_{a_1}, \dots, h_{a_n})/\mathcal{U}$.

   Observemos que para toda $i \in I$

   $$f^{\mathfrak{A}}(h_{a_1}(i), \dots, h_{a_n}(i)) = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = b = h_b(i),$$

   por lo que

   $$\left\{ i \in I \,\middle|\, f^{\mathfrak{A}}(h_{a_1}(i), \dots, h_{a_n}(i)) = h_b(i) \right\} = I.$$

   Es decir, tenemos que

   $$\left\{ i \in I \,\middle|\, f^{\mathfrak{A}}(h_{a_1}(i), \dots, h_{a_n}(i)) = h_b(i) \right\} \in \mathcal{U},$$

   y por tanto, $f^{\mathfrak{A}^I}(h_{a_1}, \dots, h_{a_n}) \sim_{\mathcal{U}} h_b$. De lo anterior concluimos que $f^{\mathfrak{A}^I}(h_{a_1}, \dots, h_{a_n})/\mathcal{U} = h_b/\mathcal{U}$, y esto es equivalente a lo que deseamos mostrar.

3. Sean $R \in \operatorname{Rel}_m \rho$ y $a_1, \dots, a_m \in A$.

   Demostremos que $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $\Big(M(a_1) \dots, M(a_m)\Big) \in R^{\mathfrak{B}}$. Tenemos que

   $$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathfrak{B}} &\text{ si y sólo si } \left\{ i \in I \,\middle|\, (a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathfrak{A}} \right\} \in \mathcal{U}, \\ &\text{ si y sólo si } \left\{ i \in I \,\middle|\, (h_{a_1}(i), \dots, h_{a_m}(i)) \in R^{\mathfrak{A}} \right\} \in \mathcal{U}, \\ &\text{ si y sólo si } \Big(h_{a_1}/\mathcal{U}, \dots, h_{a_m}/\mathcal{U}\Big) \in R^{\mathfrak{B}}, \\ &\text{ si y sólo si } \Big(M(a_1) \dots, M(a_m)\Big) \in R^{\mathfrak{B}}. \end{aligned}$$

Podemos observar que M es inyectiva, pues si $M(a) = M(b)$, entonces $h_a/\mathcal{U} = h_b/\mathcal{U}$, es decir, $h_a \sim_{\mathcal{U}} h_b$ y por tanto, $\{i \in I \mid h_a(i) = h_b(i)\} = \{i \in I \mid a = b\} \in \mathcal{U}$. Así, por ser filtro se tiene $a = b$. QED

Como se ha mencionado previamente, la elección del ultrafiltro es absolutamente relevante para entender comportamiento del ultraproducto. Si tomáramos un ultrafiltro "repartido" en el conjunto de índices, el ultraproducto se parece más a una democracia. Por el contratrio, si tomásemos un ultrafiltro acumulado en un punto, el ultraproducto se comporta más como una autocracia alrededor de este punto. Este es el caso cuando el ultrafiltro es principal.

Proposición 2.2.14. *Sea I un conjunto no vacío, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro principal sobre I y $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Entonces se cumple que $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{A}$.*

Demostración. Sea i_0 de forma que $\{i_0\} \in \mathcal{U}$. Consideremos el encaje M como se define en la Proposición 2.2.13. Observemos que en el caso en que el filtro sea principal, el encaje se vuelve suprayectivo. La razón es por que el conjunto $\{h_a \mid a \in A$ se convierte en un conjunto completo de representantes de clases y así $M[A] = \{h_a/\mathcal{U} \mid a \in A\} = A^I/\mathcal{U}$. Si $g \in A^I$ y consideramos el elemento $b := g(i_0)$, tenemos que $h_b(i_0) = g(i_0)$, y así $\{i_0\} \subseteq \{i \in I \mid h_b(i) = g(i)\}$. Como $\{i_0\} \in \mathcal{U}$, entonces $\{i \in I \mid h_b(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$ y así $h_b/\mathcal{U} = g/\mathcal{U}$. De esta manera queda claro que $M(b) = g$, por lo que M resulta un isomorfismo. QED

Capítulo 3

Saturación y n-tipos

En este capítulo se abordarán los n-tipos y con ellos se planteará la definición de saturación. Se estudiará la saturación para el caso específico de la ultrapotencia, lo que será fundamental para definir el orden de Keisler.

3.1. Satisfacibilidad y Completud en Fórmulas con Variables Libres

Los n-tipos son conjuntos de fórmulas con las mismas variables libres y en los cuales necesitaremos trabajar con nociones como satisfacibilidad y completud. En el primer capítulo se abordaron todas estas nociones, pero se limitaron a conjuntos de enunciados; en esta sección las extenderemos para que sean compatibles a fórmulas que no sean enunciados.

La Definición 1.2.9 establece las condiciones para que una fórmula con o sin variables libres sea satisfecha. El primer ajuste que tenemos que hacer es cuando tengamos un conjunto de fórmulas. Intuitivamente, se desea que para que sean satisfacibles conjuntos de fórmulas, exista una estructura que las modele simultáneamente a todas. Debido a que nos enfrentamos a fórmulas con variables libres, tenemos que pedir que haya una estructura y una asignación que las satisfaga a todas. Para librarnos de problemas, solicitaremos que las fórmulas coincidan en variables libres y convendremos la siguiente notación para no tener que estar aclarando esto.

Notación 3.1.1. Sean $\Gamma \subseteq \mathscr{L}_\rho$ y $x_1, \ldots, x_n \in$ VAR. Si para cualquier $\gamma \in \Gamma$ sucede que $\mathrm{OcL}(\gamma) = \{ x_1, \ldots, x_n \}$, se escribirá $\Gamma\ (x_1, \ldots\ x_n)$.

Definición 3.1.2. Sea $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{L}_\rho$. Decimos que Γ es *satisfacible* si y sólo si existe $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y una asignación s tal que para cualquier $\gamma \in \Gamma$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \gamma(x_1, \ldots, x_n)[s]$, y esto se denotará por $\mathfrak{A} \models \Gamma(x_1, \ldots, x_n)[s]$

Observación 3.1.3. Podemos notar que el que una fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sea satisfacible es equivalente a que exista una estructura $\mathfrak{A}$ y existan $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Análogamente, si encontráramos una estructura y elementos tales que para $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{L}_\rho^n$ tuviéramos que $\mathfrak{A} \models \Gamma(a_1, \ldots, a_n)$, podríamos concluir que Γ es satisfacible.

Nota 3.1.4. De forma semejante a la Nota 1.2.13 utilizaremos la palabra "consistencia" como sinónimo de "satisfacibilidad" en los términos de la Definición 3.1.2.

Definición 3.1.5. Sea $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{L}_\rho$. Decimos que Γ es *completo* si y sólo si en el conjunto $\{\Delta(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{L}_\rho^n \mid \Delta \text{ consistente}\}$, Γ es $\subseteq$-maximal.

Definición 3.1.6. Sea $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{L}_\rho$. Decimos que Γ es $\in$*-completo* si y sólo si para cualquier $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^n$ tal que $\mathrm{OcL}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ se tiene que $\varphi \in \Gamma$, o bien $\neg\varphi \in \Gamma$.

Teorema 3.1.7. *Sea* $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{L}_\rho$ *consistente.* Γ *es completo si y sólo si* Γ *es* $\in$*-completo.*

Demostración.

Para la ida supongamos que hay $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{L}_\rho^n$ tal que $\varphi \notin \Gamma$ y $\neg\varphi \notin \Gamma$. Como Γ es consistente, entonces existe $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y s asignación tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma(x_1, \ldots, x_n)[s]$. Es claro que $\mathfrak{A} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)[s]$. Así, tendríamos que ya sea $\Gamma \cup \{\varphi(x_1, \ldots, x_n)\}$ es consistente, o bien $\Gamma \cup \{\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)\}$.

Sea cual fuere el caso, habríamos encontrado un conjunto de fórmulas consistente que posee a Γ como subconjunto propio, lo que es una contradicción con el hecho de que Γ es completo.

Para la conversa, supongamos lo contrario. Sabemos que habría $\Gamma_1(x_1, \ldots, x_n)$ consistente tal que $\Gamma \subsetneq \Gamma_1$. Así, hay $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_1 \backslash \Gamma$. Tenemos que $\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ por ser $\in$-completo. Por lo tanto, tenemos que $\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma_1$, lo cual es una contradicción con el hecho de que Γ_1 es consistente, pues no hay una estructura y una asignación que satisfagan simultáneamente φ y $\neg\varphi$.

QED

3.2. Expansiones del Lenguaje

Otra base que nos será útil es la expansión de un lenguaje por constantes, la cual describiremos en breve.

Definición 3.2.1. Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$ con soporte A y sea $X \subseteq A$. Consideremos a $\{ c^a \mid a \in X \}$, un conjunto de constantes que no aparezcan en ρ con tantas constantes como elementos en X. Se define la *expansión* de ρ con X como el tipo $\rho(X)$ de forma que:

$$\rho(X) := \rho \cup \{ c^a \mid a \in X \}, \quad \text{donde} \quad \operatorname{Cons}\rho(X) := \operatorname{Cons}\rho \cup \{ c^a \mid a \in X \}.$$

Asimismo, $\mathscr{L}_{\rho(X)}$ denota al lenguaje construido con el tipo $\rho(X)$.

Una vez establecido esto, resulta útil construir estructuras con tipo de semejanza $\rho(X)$ a partir de estructuras de tipo de semejanza ρ.

Definición 3.2.2. Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$ de manera que $\mathfrak{A} = \langle A, \mathbb{I} \rangle$, y sea $X \subseteq A$. Definimos la expansión de $\mathfrak{A}$ con X, denotada por $\mathfrak{A}_X \in V_{\rho(X)}$, como $\mathfrak{A}_X := \langle A, \mathbb{I}_X \rangle$, donde $\mathbb{I}_X$ es la interpretación de $\rho(X)$ en A que se comporta de la siguiente manera:

Si $y \in \rho$ entonces $\mathbb{I}_X(y) = \mathbb{I}(y)$ y para elementos de $\{c^a \mid a \in X\}$, se define $\mathbb{I}_X(c^a) = a$.

En ocasiones resultará conveniente mencionar las constantes del lenguaje expandido que figuren en una fórmula φ. Esta clarificación será utilizada para cuando requiramos la constante, el lugar donde figura o el elemento del soporte al cual se le asignó dicha constante.

Notación 3.2.3. Si X es un conjunto, $a_1, \ldots, a_n \in X$, $c^{a_1}, \ldots, c^{a_n} \in \operatorname{Cons}\rho(X)$ y $\varphi \in \mathscr{L}_{\rho(X)}$, escribiremos $\varphi(; c^{a_1}, \ldots, c^{a_n})$ cuando queramos decir que $c^{a_1}, \ldots, c^{a_n}$ son las constantes que figuran en φ.

Si fuera el caso de que $\mathrm{OcL}(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_m\}$, podemos escribir $\varphi(v_1, \ldots, v_m; c^{a_1}, \ldots, c^{a_n})$. Más aún, cuando no nos sea relevante saber exactamente qué elementos simbolizan las constantes, podremos omitir escribirlos. Es decir, podemos escribir sencillamente $\varphi(v_1, \ldots, v_m; c_1, \ldots, c_n)$ con $c_k \in \mathrm{Cons}\,\rho(X)$ para $1 \leq k \leq n$. Podemos también reunir todas las contantes $c_1, \ldots, c_n$ que figuren en φ en un conjunto $\bar{c} \in [\mathrm{Cons}\,\rho(X)]^{<\omega}$ y escribir $\varphi(v_1, \ldots, v_m; \bar{c})$,o incluso $\varphi(\bar{v}; \bar{c})$ con $\bar{v} \in [\mathrm{VAR}]^{<\omega}$.

Finalmente, si tuviésemos $b_k \in A$ con $k \in \mathbb{N}$, cuando escribamos $\varphi(\bar{v}; b_1, \ldots, b_n)$ nos referiremos a la fórmula $\varphi(\bar{v}; c_1, \ldots, c_n)$ al interpretar la constante c_k por b_k con $1 \leq k \leq n$. De forma análoga, si $\bar{b} \in [B]^{<\omega}$ escribiremos $\varphi(\bar{v}; \bar{b})$ para denotar la interpretación de todas las apariciones de constantes de $\bar{c}$ por elementos respectivos de $\bar{b}$. Esto último se hará a sabiendas de que $\bar{c}$ y $\bar{b}$ tienen la misma cantidad de elementos y hay una manera adecuada de hacer la sustitución. Estaremos en este caso particularmente cuando $\bar{b}$ sea el conjunto de elementos del soporte que son simbolizados por $\bar{c}$, es decir, las constantes en $\bar{c}$ se interpretan como los elementos en $\bar{b}$.

Podemos observar que los modelos expandidos son compatibles con su estructura base. Esto es, los modelos expandidos no agregan más estructura, sencillamente facilitan la expresión de ciertas propiedades. Este hecho queda planteado en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.4. *Si $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $X_1, X_2 \subseteq A$ tal que $X_1 \subseteq X_2$, entonces se cumplen las siguientes:*

1. $\mathrm{TRM}\,\rho(X_1) \subseteq \mathrm{TRM}\,\rho(X_2)$.

2. $\mathscr{L}_{\rho(X_1)} \subseteq \mathscr{L}_{\rho(X_2)}$.

3. *Si $\varphi \in \mathscr{L}_{\rho(X_1)}$ y s es una asignación, entonces $\mathfrak{A}_{X_1} \models \varphi[s]$ si y sólo si $\mathfrak{A}_{X_2} \models \varphi[s]$.*

Demostración. Todas las pruebas se hacen por inducción.

(1) Si $c \in \mathrm{Cons}\,\rho(X_1)$ hay dos casos. Si $c \in \mathrm{Cons}\,\rho$, se tiene claramente que $c \in \mathrm{TRM}\,\rho(X_2)$. Si $c \in \{c^a \mid a \in X_1\}$, entonces $c \in \{c^a \mid a \in X_2\}$ y, por tanto, $c \in \mathrm{TRM}\,\rho(X_2)$. Es evidente que el resultado se sostiene para variables. Si suponemos el resultado para $\tau_1, \ldots, \tau_n$ y tomamos $f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \mathrm{TRM}\,\rho(X_1)$ con $f \in \mathrm{Func}_n\,\rho(X_1) = \mathrm{Func}_n\,\rho = \mathrm{Func}_n\,\rho(X_2)$, tenemos entonces que $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \operatorname{TRM} \rho(X_1)$, y por nuestra hipótesis inductiva $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \operatorname{TRM} \rho(X_2)$. Así es claro que $f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \operatorname{TRM} \rho(X_2)$.

(2) Si $(\tau_1 = \tau_2) \in \mathscr{L}_{\rho(X_1)}$, entonces $\tau_1, \tau_2 \in \operatorname{TRM} \rho(X_1) \subseteq \operatorname{TRM} \rho(X_2)$ por (1), por lo tanto $(\tau_1 = \tau_2) \in \mathscr{L}_{\rho(X_2)}$. Si $R(\tau_1, \ldots, \tau_m) \in \mathscr{L}_{\rho(X_1)}$ con $R \in \operatorname{Rel}_m \rho(X_1) = \operatorname{Rel}_m \rho = \operatorname{Rel}_m \rho(X_2)$, entonces $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \operatorname{TRM} \rho(X_1) \subseteq \operatorname{TRM} \rho(X_2)$ por (1). Por tanto, $R(\tau_1, \ldots, \tau_m) \in \mathscr{L}_{\rho(X_2)}$.

Si suponemos el resultado para φ y ψ, y tomamos $\varphi \wedge \psi$, $\forall x\, \varphi$, $\neg\varphi \in \mathscr{L}_{\rho(X_1)}$, tenemos que φ, $\psi \in \mathscr{L}_{\rho(X_1)}$. Nuestra hipótesis inductiva nos garantiza que φ, $\psi \in \mathscr{L}_{\rho(X_2)}$, por lo que queda claro que $\varphi \wedge \psi$, $\forall x\, \varphi$, $\neg\varphi \in \mathscr{L}_{\rho(X_2)}$, respectivamente.

(3) Para igualdad de términos tenemos que

$$\mathfrak{A}_{X_1} \models (\tau_1 = \tau_2)[s] \text{ si y sólo si } \bar{s}(\tau_1) = \bar{s}(\tau_2), \text{ si y sólo si } \mathfrak{A}_{X_2} \models (\tau_1 = \tau_2)[s].$$

Para relacionales aplicadas a términos tenemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{X_1} \models R(\tau_1, \ldots, \tau_m)[s] &\text{ si y sólo si } (\bar{s}(\tau_1), \ldots, \bar{s}(\tau_m))R^{\mathfrak{A}_{X_1}}, \\ &\text{ si y sólo si } (\bar{s}(\tau_1), \ldots, \bar{s}(\tau_m))R^{\mathfrak{A}_{X_2}}, \\ &\text{ si y sólo si } \mathfrak{A}_{X_2} \models R(\tau_1, \ldots, \tau_m)[s]. \end{aligned}$$

Si suponemos el resultado para φ y ψ tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_{X_1} \models \varphi \wedge \psi[s] \text{ si y sólo si} & \mathfrak{A}_{X_1} \models \neg\varphi[s] \text{ si y sólo si} \\ \mathfrak{A}_{X_1} \models \varphi[s] \text{ y } \mathfrak{A}_{X_1} \models \psi[s], \text{ si y sólo si} & \mathfrak{A}_{X_1} \not\models \varphi[s], \text{ si y solo si} \\ \mathfrak{A}_{X_2} \models \varphi[s] \text{ y } \mathfrak{A}_{X_2} \models \psi[s], \text{ si y sólo si} & \mathfrak{A}_{X_2} \not\models \varphi[s], \text{ si y solo si} \\ \mathfrak{A}_{X_2} \models \varphi \wedge \psi[s]. & \mathfrak{A}_{X_2} \models \neg\varphi[s]. \end{array}$$

Finalmente, $\mathfrak{A}_{X_1} \models \forall x\, \varphi[s]$ si y sólo si para cualquier $a \in A$ pasa que $\mathfrak{A}_{X_1} \models \varphi[s(x/a)]$. Esto sucede si y sólo si para cualquier $a \in A$ pasa que $\mathfrak{A}_{X_2} \models \varphi[s(x/a)]$, y esto último ocurre si y sólo si $\mathfrak{A}_{X_2} \models \forall x\, \varphi[s]$. QED

Lema 3.2.5. *Sean* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ *y* $X \subseteq A$*, entonces:*

1. *Si* $\varphi \in \mathscr{L}^0_{\rho(X)}$ *tal que* $\mathfrak{A}_X \models \varphi$*, entonces existe* $Y \subseteq B$ *finito tal que* $\mathfrak{B}_Y \models \varphi$*.*

2. *Si* $\Sigma = \{\sigma_1 \ldots, \sigma_n\} \subseteq \mathscr{L}^0_{\rho(X)}$ *tal que* $\mathfrak{A} \models \Sigma$*, entonces existe* $Y \subseteq B$ *finito tal que* $\mathfrak{B}_Y \models \Sigma$*; más aún* $|X| \geq |Y|$*.*

Demostración. **(1)** Escribamos $\varphi \rightleftharpoons \varphi(; c_1, \ldots, c_n)$ con $c_1, \ldots, c_n \in \operatorname{Cons} \rho(X)$. Sean $y_1, \ldots, y_n$ variables que no figuren en φ y definamos $\varphi' \rightleftharpoons \exists y_1 \cdots \exists y_n \, \varphi(; y_1, \ldots, y_n)$. Claramente, $\varphi' \in \mathscr{L}^0_\rho$ y además $\mathfrak{A} \models \varphi'$. Debido a que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, tenemos que $\mathfrak{B} \models \varphi'$ y por lo tanto existen $b_1, \ldots, b_n \in B$ elementos que satisfacen a φ'. Si definimos $Y = \{b_1, \ldots, b_n\}$ e interpretamos las constantes $c_1, \ldots, c_n$ en $\mathfrak{B}$ por los elementos $b_1, \ldots, b_n$, respectivamente, llegamos a que $\mathfrak{B}_Y \models \varphi(; c_1, \ldots, c_n)$, que es lo que se quería demostrar.

(2) Si tomamos $\varphi = \bigwedge_{t=1}^{n} \sigma_t$, por **(1)** se tiene el resultado. QED

Probemos ahora la versión para fórmulas con variables libres del teorema de compacidad. Hacemos esta prueba aplicando las expansiones del lenguaje.

Teorema 3.2.6 (Compacidad)**.** *Sea* $\Gamma \subseteq \mathscr{L}^m_\rho$ *con* $m > 0$*.*
Γ *es finitamente satisfacible si y sólo si* Γ *es satisfacible.*

Demostración. El regreso es evidente, pues si todas las fórmulas de Γ son satisfechas por una estructura, en particular, cualquier subconjunto finito de este lo será.

Para la ida, enumeremos $\Gamma = \{\gamma_i \mid i \in I\}$. Tenemos que para cualquier $u \in [I]^{<\omega}$ existe un modelo $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y s una asignación tal que $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i \in u} \gamma_i[s]$. Escribamos $a_n = s(x_n)$ para $n \in \omega$ y consideremos al conjunto $X := \{a_n \mid n \in \omega\}$ y a las constantes c^{a_n} con $n \in \omega$. Definamos las fórmulas γ'_i resultado de sustituir a c^{a_n} por todas las apariciones libres de x_n, siempre que $x_n \in \operatorname{OcL}(\gamma_i)$. Podemos notar que $\gamma'_i \in \mathscr{L}^0_{\rho(X)}$ para cualquier $i \in I$. Más aún, para $u \in [I]^{<\omega}$ hemos encontrado un modelo $\mathfrak{A}_X$ de modo que $\mathfrak{A}_X \models \bigwedge_{i \in u} \gamma'_i$. Por lo tanto, el conjunto $\Gamma' := \{\gamma'_i \mid i \in I\}$ es un conjunto de enunciados finitamente satifacible y, por el Teorema de Compacidad 1.4.5, Γ' es satisfacible y así Γ también lo es.

QED

3.3. Realización de n-tipos

Los n-tipos son conjuntos de fórmulas que tienen exactamente las mismas n variables libres y se pueden pensar como sistemas de ecuaciones lógicas o, en otras palabras, sistemas de condiciones para n-tuplas. A estas condiciones no se les ponen restricciones salvo que no traigan consigo contradicciones, es decir, que sean consistentes. Gracias al *Teorema de Compacidad* 3.2.6 basta pedirles que sean finitamente satisfacibles.

Definición 3.3.1. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ con soporte A y $X \subseteq A$. Consideremos el lenguaje extendido $\mathscr{L}_{\rho(X)}$ y la expansión $\mathfrak{A}_X$. Decimos que $\Gamma\ (x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{L}_{\rho(X)}$ es un *n-tipo sobre X en* $\mathfrak{A}$ si y sólo si para cualquier subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ se cumple que existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ de manera que cualquier $\gamma \in \Gamma_0$ es satisfecho por $\mathfrak{A}_X$. Equivalentemente, para cualquier $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito sucede que:

$$\mathfrak{A}_X \models \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma(x_1 \ldots, x_n).$$

En general podemos enumerar un n-tipo Γ sobre un conjunto X como $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \{\gamma_t(x_1, \ldots, x_n; \bar{c}_t) \mid t \in J \text{ y } \bar{c}_t \in [\mathrm{Cons}\, \rho(X)]^{<\omega}\}$, o bien, $\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \{\gamma_t(x_1, \ldots, x_n) \mid t \in J\}$ cuando no nos sea relevante especificar las constantes que figuren, donde J es un conjunto. Más adelante, cuando se estudien los n-tipos de un ultraproducto, se verá que podemos utilizar al conjunto base del ultrafiltro para enumerar al tipo, lo que tendrá consecuencias interesantes.

En la definición anterior se pide que haya elementos en el universo que satisfagan simultáneamente una cantidad finita de fórmulas del n-tipo. Es decir, que se satisfagan una cantidad finita de condiciones o que se resuelvan una cantidad finita de ecuaciones lógicas. La definición de que un n-tipo se realice es una generalización de este hecho.

Definición 3.3.2. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $X \subseteq A$ y sea $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ un n tipo. Decimos que Γ *se realiza en* $\mathfrak{A}$ *sobre* X, o, de forma más sencilla, que *se realiza en* $\mathfrak{A}_X$ si y sólo si existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que para cualquier $\gamma \in \Gamma$ se tiene que $\mathfrak{A}_X \models \gamma(a_1, \ldots, a_n)$. Esto lo denotaremos como $\mathfrak{A}_X \models \Gamma(a_1, \ldots, a_n)$.

La noción de *n-tipo* es complicada, pues involucra varios conceptos. La notación $\mathfrak{A}_X \models \Gamma(a_1, \ldots, a_n)$ trae consigo bastante información. Una forma sencilla en que se pueden ver a los *n-tipos* puede ser la siguiente.

Consideremos una prisión con sus respectivos presos, a los cuales se le asigna un perfil. El perfil contiene información de los presos como apariencia, talla, perfil psicológico, crimen cometido, etcétera. Podemos pensar a cada una de estas piezas de información como propiedades del preso.

Por ejemplo, consideremos al preso G, un hombre austrohúngaro de 25 años de ojos azules que padece de paranoias obsesivas acompañadas de toxicofobias, acusado de destruir el Programa Formalista de Hilbert. Podemos hacer "ser austrohúngaro" como la fórmula de una variable libre $AH(x)$. Análogamente, creamos una fórmula con los demás datos del preso G, así tenemos: $AH(x)$, $E25(x)$, $OA(x)$, $POAT(x)$, $DPHil(x)$, para las cuales es claro que pasa que $AH(G)$, $OA(G)$, $DPHil(G)$, etcétera. Podemos considerar al perfil de G como un *tipo* (en este caso sería 1-*tipo*, pues sólo son las propiedades de un objeto). Podemos observar que $DPHil(x)$ va a requerir tener a Hilbert como una constante en nuestro universo para poder expresar la fórmula de forma correcta. Como es posible que Hilbert no tenga una constante asignada en nuestro modelo, tendríamos que agregar una constante para referirnos a él; por esta razón se trabaja en la expansión $\mathfrak{A}_X$ en lugar de sencillamente trabajar en el modelo $\mathfrak{A}$.

En lo anterior tenemos un perfil gracias a la existencia de un preso. Ahora pensemos en lo recíproco; ¿podríamos tener un preso por cada posible perfil? Primero tenemos que asegurarnos de que el perfil que demos no sea contradictorio en sí mismo, es decir, si tuviéramos un perfil que dijera "joven barbero de 97 años acusado de rasurar a todos aquellos que no se rasuren a sí mismos", podemos notar que el perfil anterior jamás tendrá alguien que lo posea por el simple hecho de que no existen jóvenes de 97 años.

Precisamente, a todo 1-*tipo* lo podemos entender como un posible perfil consistente. Ahora bien, si para el perfil: "hombre de 59 años que padece de depresión crónica y ataques de ansiedad acusado de trabajar con el infinito" sucede que haya algún preso C que cumpla con este perfil, podemos decir que el perfil se realiza (el 1-tipo se realiza).

Los perfiles más interesantes son aquellos que posean toda la información de algún preso que no tenga consigo contradicciones, es decir, los completos. Siendo así, podemos formalizar esta idea de perfil completo considerando a los n-tipos completos.

Notación 3.3.3. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $X \subseteq A$ y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos al conjunto de n-tipos sobre X como $S_n(X)$. De forma semejante $\overline{S_n}(X)$ denota al conjunto de n-tipos completos sobre X.

Proposición 3.3.4. *Todo n-tipo se puede extender a un n-tipo completo.*

Demostración. Sea $\Gamma(x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathscr{L}^n_{\rho(X)}$ un n-tipo. Veamos que existe $\overline{\Gamma}(x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathscr{L}^n_{\rho(X)}$ un n-tipo completo tal que $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$. Escribamos $\{\, \varphi \in \mathscr{L}^n_{\rho(X)} \mid \mathrm{OcL}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\} \,\} = \{\, \varphi_\beta \mid \beta < \alpha \,\}$, con α un cardinal.

Definamos Γ_β recursivamente sobre α como $\Gamma_0 := \Gamma$ y para $\beta < \alpha$ definimos:

$$\Gamma_{\beta+1} := \begin{cases} \Gamma_\beta \cup \{\varphi_\beta\} & \text{si } \Gamma_\beta \cup \{\varphi_\beta\} \text{ es consistente,} \\ \Gamma_\beta & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que está bien definido por 3.1.7. Finalmente, para δ ordinal límite definimos:

$$\Gamma_\delta := \bigcup_{\beta<\delta} \Gamma_\beta.$$

Así, definimos la extensión de Γ como sigue:

$$\overline{\Gamma} := \bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma_\beta.$$

Probemos por inducción que $\overline{\Gamma}$ es consistente. Sea $\alpha_0 \leq \alpha$ para el cual supongamos que todo Γ_β es consistente para $\beta < \alpha_0$. Mostremos que esto implica que Γ_{α_0} es consistente. Basta mostrar que Γ_{α_0} es finitamente satisfacible. Tomemos $\Delta_0 \subseteq \overline{\Gamma}$ finito y, sin pérdida de generalidad, tenemos que $\Delta_0 = \{\varphi_{\beta_1}, \dots, \varphi_{\beta_n}\}$ con $\beta_m < \alpha_0$ para $1 \leq m \leq n$. Definamos $\beta_0 := \text{máx}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ y entonces $\beta_0 < \alpha_0$ y por lo tanto $\Delta_0 \subseteq \Gamma_{\beta_0}$. Esto último nos garantiza Δ_0 es consistente, y por tanto, Γ_{α_0} es satisfacible.

Ahora veamos que es $\overline{\Gamma}$ es completo. Sea $\Delta_1(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathscr{L}^n_{\rho(X)}$ tal que $\overline{\Gamma} \subsetneq \Delta_1$. Así, debe existir un $\varphi_\beta \in \Delta_1 \backslash \overline{\Gamma}$. Como $\varphi_\beta \notin \overline{\Gamma}$, entonces $\Gamma_\beta \cup \{\varphi_\beta\}$ es inconsistente. Pero dado que $\Gamma_\beta \subseteq \overline{\Gamma} \subseteq \Delta_1$, tendríamos entonces que $\Gamma_\beta \cup \{\varphi_\beta\} \subseteq \Delta_1$. Así concluimos que Δ_1 es inconsistente pues contiene un subconjunto inconsistente.

QED

Intuitivamente, cuando se plantea un n-tipo, no todas las fórmulas en éste ocupan absolutamente todas las variables disponibles. Por ejemplo, en la estructura $(\mathbb{N}, +, \cdot, >, \{0, 1\})$ podemos escribir el 2-tipo $\Gamma(x_1, x_2) = \{\exists y_1 \exists y_2 (y_1 x_1 + y_2 x_2 = 1), x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Si observamos, en las fórmulas $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ no ocurren todas las variables del tipo. Es muy sencillo arreglar esto reescribiendo las fórmulas como $(x_1 > 0) \wedge (x_2 = x_2)$ y $(x_2 > 0) \wedge (x_1 = x_1)$. Es evidente que si conjuntamos las fórmulas en $(x_1 > 0) \wedge (x_2 > 0)$ también se soluciona el problema, pero el procedimiento anterior es muy fácil de generalizar a conjuntos de fórmulas posiblemente infinitos, por lo que se opta por esta solución. Se va a sobreentender que las fórmulas llevan este proceso de corrección cuando se propone un tipo.

3.4. Saturación

Si recapitulamos la analogía anterior, podemos pensar en todos los perfiles completos posibles de presos. ¿Qué sucedería si para cualquier perfil haya un preso que lo tenga? A esto es lo que se le conoce como que el modelo sea *saturado*. Si se observa detenidamente, la condición de saturación es bastante fuerte y garantiza la existencia de elementos del modelo siempre que éstos se puedan representar completamente por un tipo. Esto nos habla de la complejidad de la estructura, o, en términos de la analogía, nos habla de la "diversidad" en la prisión.

Definición 3.4.1. Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y κ un cardinal. Decimos que $\mathfrak{A}$ es *κ-saturado* si y sólo si para cualquier $X \subseteq A$ de forma que $|X| < \kappa$, y cualquier $\Gamma \in S_1(X)$, se tiene que Γ se realiza en $\mathfrak{A}$ sobre X. Diremos que $\mathfrak{A}$ es *saturado* cuando sea $|A|$-saturado.

Ejemplo 3.4.2. Si A es un conjunto numerable y consideramos la estructura $(A, =)$ con sólo la igualdad, tenemos que ésta es saturada.

Consideramos $X \subseteq A$ un conjunto finito cualquiera y $\Gamma(x)$ un 1-tipo sobre el lenguaje extendido sobre X. Es sencillo observar que al existir sólo el símbolo relacional de la igualdad, el 1-tipo necesariamente afirma que x es igual a alguno de los elementos en X, o x es distinto a todos o alguna variación intermedia de éstas que no genere contradicciones. Sea cual fuere el caso, es sencillo proponer a un elemento que satisfaga todas las fórmulas simultáneamente.

Ejemplo 3.4.3. $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ no es saturado.

Si consideramos el conjunto $\{2\}$ podemos usar c_2 para simbolizar el natural 2 y así definimos las fórmulas $\varphi_n(x) \leftrightharpoons \exists y\, (c_2^n \cdot y = x)$, donde c_2^n representa la expresión $c_2 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_2$ n-veces. Definiendo el 1-tipo $\Gamma(x) = \{\varphi_n(x) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ es claro que cualquier subconjunto Γ_0 finito es satisfacible, pues si consideramos $m = \text{máx}\{n \in \omega \mid \varphi_n \in \Gamma_0\}$, entonces sucede que 2^m es el elemento que realiza $\Gamma_0(2^m)$. Sin embargo, no hay un número que sea divisible por todas las potencias de 2, por lo que Γ no es realizable.

Ejemplo 3.4.4. $(\mathbb{Q}, <)$ es saturado.

Intuitivamente, si consideramos $X \subseteq \mathbb{Q}$ finito y tomamos a $\Gamma(x)$ un 1-tipo, podemos observar que el 1-tipo puede afirmar que x es, menor, mayor o igual a algún elemento de X o alguna combinación consistente de éstas. Es decir, lo anterior se reduce a que x pertenezca a la intersección de una cantidad finita de intervalos, los cuales están propiamente acomodados gracias a la suposición de la consistencia. Gracias a la densidad de $\mathbb{Q}$ se pude garantizar la existencia de un elemento que realice el tipo.

Ejemplo 3.4.5. $(\mathbb{R}, <)$ no es saturado.

Consideremos a $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ y representamos a cualquier natural n por c_n para definir al tipo $\Gamma(x) = \{x > c_n \mid n \in \omega\}$. Estableciendo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, tomemos a m como el máximo de los naturales tales que $x > c_n \in \Gamma_0$. Así, $m + 1$ es el elemento que realiza Γ_0. Sin embargo, por el Principio Arquimediano, no hay un número real que sea mayor a todos los naturales. Debido a esto podemos afirmar que el 1-tipo no se realiza.

Ejemplo 3.4.6. $(\mathbb{Q}, <)$ no es $\aleph_1$-saturado.

A pesar de que $(\mathbb{Q}, <)$ sea $\aleph_0$-saturado, podemos definir un 1-tipo no realizable considerando una cantidad numerable de constantes. De manera muy semejante al ejemplo anterior, representemos a cualquier número natural n por c_n y definamos idénticamente $\Gamma(x) = \{x > c_n \mid n \in \omega\}$. Vemos que Γ no se realiza por exactamente la misma razón que en el ejemplo anterior.

Podemos notar que la definición de saturación sólo exige la realización de 1-tipos en lugar de n-tipos. Esto se debe a que basta con que todo 1-tipo se realice para que para que cualquier n-tipo también lo haga.

Proposición 3.4.7. *Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$, κ un cardinal y $X \subseteq A$ tales que $|X| < \kappa$. Si $\mathfrak{A}$ es κ-saturado, entonces todo n-tipo se realiza en $\mathfrak{A}$ sobre $X \cup Y$ con $Y \in [A]^{<\omega}$.*

Demostración. Procedamos por inducción sobre n. El caso base es inmediato, ya que por hipótesis todos los 1-tipos se realizan.

Supongamos que el resultado se tiene para n; veamos que el resultado se sostiene para $n+1$. Sea $\Gamma(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S_{n+1}(X)$. Consideremos el conjunto $\Gamma_1(x_1, \ldots, x_n) := \{\exists x_{n+1} \bigwedge_{\gamma \in \Delta} \gamma(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mid \Delta \in [\Gamma]^{<\omega}\}$, que es claramente consistente. Más aún, Γ_1 es un n-tipo el cual se realiza por hipótesis de inducción. Es decir, hay $a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que $\mathfrak{A}_X \models \exists x_{n+1} \bigwedge_{\gamma \in \Delta} \gamma(a_1, \ldots, a_n, x_{n+1})$ para toda $\Delta \in [\Gamma]^{<\omega}$.

Sea $\Gamma_2(x_{n+1}) := \{\gamma(c^{a_1}, \ldots, c^{a_n}, x_{n+1}) \mid \gamma \in \Gamma\}$ que es claramente consistente pues Γ lo es, y veamos que es un 1-tipo. Sea $\Delta \in [\Gamma]^{<\omega}$, es claro que $\mathfrak{A}_X \models \exists x_{n+1} \bigwedge_{\gamma \in \Delta} \gamma(a_1, \ldots, a_n, x_{n+1})$, por lo que sucede que $\mathfrak{A}_{X \cup Y} \models \exists x_{n+1} \bigwedge_{\gamma \in \Delta} \gamma(c^{a_1}, \ldots, c^{a_n}, x_{n+1})$ donde $Y := \{a_1, \ldots, a_n\}$. Esto último prueba que Γ_2 es un 1-tipo. Por hipótesis Γ_2 se realiza y así, existe $a_{n+1} \in A$ tal que $\mathfrak{A}_{X \cup Y} \models \gamma(c^{a_1}, \ldots, c^{a_n}; a_{n+1})$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$.

De esta manera tenemos que $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ realiza a Γ en X. Es decir, tenemos que $\mathfrak{A}_X \models \Gamma(a_1, \ldots, a_{n+1})$. QED

Ahora bien, enunciemos un par de resultados respecto a la saturación.

Proposición 3.4.8. *Si $\mathfrak{A}$ es κ-saturado, entonces $\mathfrak{A}$ es λ-saturado para cualquier $\lambda < \kappa$.*

Demostración. Sea $X \subseteq A$, tal que $|X| < \lambda$, así $|X| < \kappa$, y así claramente cualquier 1-tipo respecto a X se realiza. QED

Proposición 3.4.9. *Si $\mathfrak{A}$ es $|A|^+$-saturado, entonces es κ-saturado para cualquier κ cardinal.*

Demostración. Sea κ un cardinal. Si tomamos $X \subseteq A$ tal que $|X| < \kappa$, y debido a $X \subseteq A$ tenemos que $|X| \leq |A|$, es decir, $|X| < |A|^+$. Así, cualquier 1-tipo respecto a X se realiza. QED

Corolario 3.4.10.

1. *Si $\mathfrak{A}$ no es κ-saturado, entonces para cualquier $\lambda \geq \kappa$ se tiene que $\mathfrak{A}$ no es λ-saturado.*

2. *Si $\mathfrak{A}$ no es κ-saturado para alguna κ, entonces no es λ-saturado para cualquier $\lambda \geq |A|^+$.*

Debido a lo anterior, la saturación de una estructura sólo resulta interesante estudiar en cardinalidades menores o iguales al sucesor de la cardinalidad del soporte de la estructura.

3.5. Saturación de Ultraproductos

Veamos un resultado interesante para construir modelos saturados. Esta construcción se hace mediante el ultraproducto de una familia de estructuras, y por tanto combina todas las nociones trabajadas en este capítulo y en el pasado.

Notemos que un ultraproducto $\mathfrak{A} := \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ es saturado si cualquier 1-tipo $\Gamma(x)$ se realiza en $\mathfrak{A}_X$ para cualquier $X \subseteq \prod_{i\in I} A_i/\mathcal{U}$. El conjunto Γ está en el lenguaje $\mathscr{L}_{\rho(X)}$, que no es nada más que el lenguaje $\mathscr{L}_\rho$ en el que algunas fórmulas pueden contener constantes c^b con $b \in X$. Queremos que $\mathfrak{A} \models \gamma(x)$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$, y si aplicamos el Teorema de Łoś significaría que para cualquier $\gamma \in \Gamma$

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{iX} \models \gamma(x)\} \in \mathcal{U}.$$

El problema con esto es que $\mathfrak{A}_{iX}$ no tiene sentido, pues X no es un subconjunto del soporte de $\mathfrak{A}_i$. Si hacemos un pequeño ajuste tendremos una versión del Teorema de Łoś para estructuras expandidas.

Notación 3.5.1. Sea $X \in \left[\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{U}\right]^\kappa$ y escribamos $X = \{h_\mu/\mathcal{U} \mid \mu < \kappa\}$, de forma que $h_{\mu_1} \nsim_{\mathcal{U}} h_{\mu_2}$ si $\mu_1 \neq \mu_2$. Para $i \in I$ definamos el conjunto $X_i := \{h_\mu(i) \mid \mu < \kappa\}$ con $i \in I$ y denotemos a $\mathfrak{A}_{iX_i}$ por $\mathfrak{A}_{X_i}$.

Teorema 3.5.2 (Łoś para lenguajes expandidos)**.** *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I y sean $\mathfrak{A}_i \in V_\rho$ para cualquier $i \in I$. Escribamos $\mathfrak{B} = \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ y $\mathfrak{A} = \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ y sea $X \subseteq A$ y X_i definidos como se ha mencionado previamente. Tomemos $n, m \in \mathbb{N}$.*

1. *Para cualesquiera $\tau \in \mathrm{TRM}\,\rho$, $i \in I$, $h_1, \ldots, h_n \in B$ y $g_1/\mathcal{U}, \ldots, g_m/\mathcal{U} \in X$ sucede que*

$$\tau^{\mathfrak{A}_X}\Big(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}\,;\, c^{g_1/\mathcal{U}}, \ldots, c^{g_m/\mathcal{U}}\Big) =$$
$$\bigg(\tau^{\mathfrak{A}_{X_i}}\Big(h_1(i), \ldots, h_n(i)\,;\, c^{g_1}(i), \ldots, c^{g_m}(i)\Big)\bigg)_{i\in I}\Big/\mathcal{U}.$$

2. *Para cualesquiera $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^n$, $h_1, \ldots, h_n \in \prod_{i\in I} A_i$ y $g_1/\mathcal{U}, \ldots, g_m/\mathcal{U} \in X$ se tiene que*

$$\mathfrak{A}_X \models \varphi(h_1/\mathcal{U}, \ldots, h_n/\mathcal{U}\,;\, c^{g_1/\mathcal{U}}, \ldots, c^{g_m/\mathcal{U}}) \textit{ si y sólo si}$$
$$\Big\{i \in I \,\Big|\, \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi(h_1(i), \ldots, h_n(i)\,;\, c^{g_1}(i), \ldots, c^{g_m}(i))\Big\} \in \mathcal{U}.$$

Demostración. La prueba de este teorema es completamente análoga a la prueba del Teorema de Łoś 2.2.10. QED

Ahora veamos cómo construir ultraproductos saturados a partir de una familia de estructuras en un lenguaje numerable.

Teorema 3.5.3. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto I, y sean $\mathfrak{A}_i \in V_\rho$ para toda $i \in I$. Si $\mathcal{U}$ es numerablemente incompleto, entonces $\prod_{i\in I}\mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ es $\aleph_1$-saturado.*

Demostración. Escribamos $\mathfrak{A} := \prod_{i\in I}\mathfrak{A}_{X_i}/\mathcal{U}$, $A := \prod_{i\in I} A_i/\mathcal{U}$ y sean $X \subseteq A$ numerable y $\Gamma(x) \in S_1(X)$. Veamos que Γ se realiza en $\mathfrak{A}$ sobre X.

Como ρ y X son numerables, entonces $\mathscr{L}_{\rho(X)}$ es numerable y por tanto Γ lo es. Enumeremos a Γ como:

$$\Gamma(x) := \{\gamma_n(x) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Por el Teorema de Łoś 3.5.2, Γ se realiza en $\mathfrak{A}$ sobre X si y sólo si existe $h \in \prod_{i\in I} A_i$ tal que se cumpla que $\{\, i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \gamma_n(h(i)) \,\} \in \mathcal{U}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

Por otro lado, como Γ es un 1-tipo, cualquier subconjunto finito se realiza. Por lo que

$$\mathfrak{A}_X \models \exists x \left(\bigwedge_{k=1}^{n} \gamma_k(x) \right),$$

y esto implica que para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x\big(\bigwedge_{k=1}^{n} \gamma_k(x)\big) \,\} \in \mathcal{U}$. Definimos para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ el conjunto $Y_n := \{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x\big(\bigwedge_{k=1}^{n} \gamma_k(x)\big) \,\}$.

Por otro lado, al ser $\mathcal{U}$ numerablemente incompleto, por la Proposición 2.1.16 existe una cadena descendente $I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ tal que $\bigcap_{n\in\omega} I_n = \varnothing$. Definamos $U_0 = I$ y $U_n = I_n \cap Y_n$, por tanto $U_n \in \mathcal{U}$, y observemos que $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$ y $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \varnothing$.

Tenemos que para cualquier $i \in I$ existe $n \in \omega$ tal que $i \notin U_n$. Más aún existe un número máximo con la propiedad de que $i \in U_n$, ya que de no ser así, para cualquier $n \in \omega$ habría un $m > n$ de forma que $i \in U_m$. Debido a que $U_m \subseteq U_n$ cuando $m > n$, tendríamos que $i \in U_n$ para cualquier $n \in \omega$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \varnothing$.

Definamos $n_i := \text{máx}\{n \in \omega \mid i \in U_n\}$ y observemos que si $n_i > 0$ entonces $i \in U_{n_i}$ lo que implica que $\mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \left(\bigwedge_{k=1}^{n_i} \gamma_k(x)\right)$. Es decir, hay un $a_i \in A_i$ tal que $\mathfrak{A}_{X_i} \models \gamma_n(a_i)$ para cualquier $0 < n \leq n_i$.

Procedamos a definir la función $h : I \longrightarrow A$ como $h(i) = a_i$ si $n_i > 0$ y para el caso en que $n_i = 0$, elijamos un punto arbitrario de A_i (utilizando el Axioma de Elección si es necesario). Demostremos que h es tal que $\{\, i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \gamma_n(h(i)) \,\} \in \mathcal{U}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

Sea $n > 0$. Podemos observar que $U_n \in \mathcal{U}$, asimismo, si $i \in U_n$, entonces $n \leq n_i$ por definición. Así, queda claro que $U_n \subseteq \{i \in I \mid n \leq n_i\}$.

Ahora bien, si $i \in I$ es tal que $n \leq n_i$, entonces mediante $h(i)$ se tiene $\mathfrak{A}_{X_i} \models \bigwedge_{k=1}^{n_i} \gamma_k(h(i))$ pues $0 < n \leq n_i$. Esto implica que $\mathfrak{A}_{X_i} \models \gamma_n(h(i))$, y por tanto se prueba que $\{i \in I \mid n \leq n_i\} \subseteq \{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \gamma_n(h(i))\}$.

Reuniendo todo lo previo hemos probado que:

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \gamma_n(h(i))\} \supseteq \{i \in I \mid n \leq n_i\} \supseteq U_n \in \mathcal{U}.$$

Así, por ser $\mathcal{U}$ un filtro, concluimos que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \gamma_n(h(i))\} \in \mathcal{U}$ y por lo tanto $\mathfrak{A}_X \models \Gamma(h/\mathcal{U})$, lo que concluye la prueba. QED

Corolario 3.5.4. *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto I y $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Si $\mathcal{U}$ es numerablemente incompleto entonces $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ es $\aleph_1$-saturado.*

Corolario 3.5.5. *Sea $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal sobre ω. Se cumplen las siguientes:*

1. *Si $\mathfrak{A}_i \in V_\rho$, entonces $\prod_{i\in\omega} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ es $\aleph_1$-saturado.*

2. *Si $\mathfrak{A} \in V_\rho$, entonces $\mathfrak{A}^\omega/\mathcal{U}$ es $\aleph_1$-saturado.*

Capítulo 4

Orden de Keisler

En este capítulo se comenzará por estudiar los filtros buenos y su relación con la saturación de un ultraproducto. Posteriormente definiremos el orden de Keisler para teorías de primer orden, el cual será nuestra herramienta principal de clasificación. En las dos últimas secciones del capítulo se probará que todas las teorías que carezcan de la propiedad de la cobertura finita son minimales y que toda teoría que posea una fórmula versátil es máxima en el orden de Keisler. Este capítulo se abordan muchos conceptos que se pueden encontrar en [Keisler, 1967].

4.1. Distribuciones y Ultrafiltros Buenos

Determinar cuándo un ultraproducto es saturado depende mucho de la naturaleza del ultrafiltro que se utilice. En busca de encontrar un ultrafiltro que saturara la ultrapotencia de todo ultraproducto, Keisler definió los ultrafiltros *buenos* (ver [Keisler, 1961, 1964]).

Aplicando el Teorema de Łoś a un tipo del ultraproducto, se tiene que, para cualquier subconjunto finito del tipo, el conjunto de factores en los que este conjunto finito se satiface, pertenece al filtro. Así, si el tipo está enumerado por el conjunto de índices I, mismo que es base del ultrafiltro, resulta natural mapear los subconjuntos finitos de I en el elemento del ultrafiltro donde se satisfacen los miembros respectivos del tipo. Se puede observar que estos mapeos, llamados distribuciones, son monótonos decrecientes respecto a $\subseteq$.

Definición 4.1.1. Keisler [1964] Una *función de distribución* sobre un conjunto de índices I es una función $d : [I]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}(I)$.

Las distribuciones que más nos interesa estudiar son aquellas que tienen como imagen un subconjunto del filtro. Es decir, $d : [I]^{<\omega} \to \mathcal{F}$. A esto se le llama una distribución sobre filtro $\mathcal{F}$.

Definición 4.1.2. Sean d, e distribuciones sobre un conjunto de índices I.

1. Se dice que e es *refinamiento* de d si para todo $u \in [I]^{<\omega}$ sucede que $e(u) \subseteq d(u)$.

2. Se dice que d es *monótona* si para cualesquiera $u, w \in [I]^{<\omega}$ tales que $u \subseteq w$, se tiene que $d(u) \supseteq d(w)$.

3. Se dice que d es *aditiva* si para cualesquiera $u, w \in [I]^{<\omega}$ se cumple que $d(u \cup w) = d(u) \cap d(w)$.

Observemos que la monotonía invierte la contención, en la definición anterior. Además la aditividad convierte las uniones en intersecciones. Esto es así para que las distribuciones sean compatibles con la estructura de filtro. Dicho de otra forma, las distribuciones son funciones decrecientes respecto a la contención en el filtro.

Ejemplo 4.1.3. Si $\mathcal{A} := \{A_t \mid t \in I\}$ es una familia de subconjuntos de I indizada por el mismo conjunto I, podemos definir la distribución $d(u) = \bigcap_{t\in u} A_t$ para toda $u \in [I]^{<\omega}$.

Podemos observar que d es monótona, pues si $u \subseteq w$ tenemos que $d(u) = \bigcap_{t\in u} A_t \supseteq \bigcap_{t\in w} A_t = d(w)$. Más aún, si fuera el caso de que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, d tiene contradominio $\mathcal{F}$ y es monótona.

Lema 4.1.4. *Toda distribución aditiva es monótona.*

Demostración. Sea $d : [I]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}(I)$ aditiva y sean $u, w \in [I]^{<\omega}$ de forma que $u \subseteq w$. Por esto último es claro que $u \cup w = w$ y así $d(w) = d(u \cup w) = d(u) \cap d(w)$ y por tanto $d(u) \supseteq d(w)$. QED

Si Γ es un tipo indizado por I como $\Gamma = \{\gamma_i(x) \mid i \in I\}$, y tomamos $u, w \subseteq I$ finitos, entonces podemos garantizar la existencia de testigos en el ultraproducto para $\bigwedge_{i\in u} \gamma_i(x)$ y para $\bigwedge_{i\in w} \gamma_i(x)$. Sin embargo, estos testigos no necesariamente son iguales, por lo que un testigo para $\bigwedge_{i\in u\cup w}\gamma_i(x)$ no está en términos de los testigos para u y w. Para el caso en que el refinamiento sea aditivo, podremos garantizar la existencia de un testigo en común para $\bigwedge_{i\in u}\gamma_i(x)$ y $\bigwedge_{i\in w}\gamma_i(x)$ en el ultraproducto. Tener testigos en común para subconjuntos del tipo nos llevará a su realización. Siendo así, tiene sentido solicitar refinamientos aditivos para saturar el ultraproducto.

Definición 4.1.5. [Keisler, 1964] Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto I. Decimos que $\mathcal{F}$ es λ-*bueno* si para cualquier $\kappa<\lambda$ y cualquier $J\in[I]^\kappa$, toda distribución monótona $d:[J]^{<\omega}\longrightarrow\mathcal{F}$ tiene un refinamiento $e:[J]^{<\omega}\longrightarrow\mathcal{F}$ aditivo. Diremos que $\mathcal{F}$ es *bueno* si es $|I|^+$-bueno.

Observación 4.1.6. Dada una distribución $d:[I]^{<\omega}\longrightarrow\mathcal{P}(I)$, podemos construir la función $d^*:[I]^{<\omega}\longrightarrow\mathcal{P}(I)$ definida como $d^*(u):=\bigcap_{w\subseteq u}d(w)$, donde notamos que d^* es una distribución monótona y además es refinamiento de d. Más aún, si d es una distribución sobre el filtro $\mathcal{F}$, d^* también lo será, pues si $d(w)\in\mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{w\subseteq u}d(w)\in\mathcal{F}$, debido a que la cantidad de subconjuntos de u es finita al u ser finito.

Semejante a los filtros regulares, los filtros κ-buenos son "hereditarios", es decir, resultan λ-buenos para cualquier $\lambda<\kappa$. De igual forma, para cardinales superiores a la cardinalidad del índice del filtro, ser bueno deja de tomar relevancia. Lo anterior queda descrito en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.7. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre I.*

1. *Si $\mathcal{F}$ es λ-bueno, entonces es κ-bueno para cualquier $\kappa<\lambda$.*

2. *Si $\mathcal{F}$ es bueno, entonces es κ-bueno para cualquier κ.*

Demostración. **(1)** Sea $\kappa_0<\lambda$. Por definición, tenemos que para cualquier $\kappa<\lambda$, cualquier distribución monótona tiene un refinamiento aditivo. Esto se cumple en particular para cualquier $\kappa<\kappa_0$.

(2) Sea κ un cardinal. Si $\kappa\leq|I|^+$, el resultado ya se tiene por el inciso anterior. Si $\kappa>|I|^+$, veamos que se cumple que toda distribución monótona tiene un refinamiento aditivo.

Si $\beta < \kappa$ hay dos casos: $\beta \leq |I|$ o bien $\beta > |I|$. La hipótesis garantiza que se cumple el primer caso. Para el segundo caso se tiene $[I]^{\beta} = \varnothing$ y por vacuidad se tiene el resultado.

QED

Keisler, asumiendo la Hipótesis Generalizada del Continuo, probó la existencia de ultrafiltros numerablemente incompletos y buenos sobre conjuntos de cualquier cardinalidad ([Keisler, 1964]). Poco después, Kunen logró llegar a este mismo resultado desde ZFC [Kunen, 1972].

Muy semejante a la forma en que los ultrafiltros numerablemente incompletos garantizaban la $\aleph_1$-saturación (Teorema 3.5.3), los ultrafiltros buenos garantizarán la saturación de los ultraproductos que sean construidos con estos filtros.

Los ultrafiltros buenos están relacionados con los ultrafiltros regulares y numerablemente incompletos de la forma descrita en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.8. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro κ^+-bueno y numerablemente incompleto, entonces es κ-regular.*

Demostración. Sea $F_n \in \mathcal{F}$ una cadena numerable descendente de forma que $\bigcap_{n\in\omega} F_n = \varnothing$ (ver 2.1.16). Sea $J \in [I]^{\kappa}$ (donde I es la base del filtro), y consideremos la distribución $d : [J]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{F}$ definida como $d(u) = F_{|u|}$.

Consideremos a $u, w \in [J]^{<\omega}$ tales que $u \subseteq w$ y veamos que d es monótona. Observemos que

$$|u| \leq |w| \quad \Rightarrow \quad F_{|u|} \supseteq F_{|w|} \quad \Rightarrow \quad d(u) \supseteq d(w).$$

Sea $e : [J]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{F}$ un refinamiento aditivo de d. Propongamos a $\{e(\{a\}) \mid a \in J\}$ como la familia regularizadora y probemos este hecho. Supongamos que existe $i \in J$ tal que $i \in e(\{a\})$ para una infinidad de $a \in J$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $Y_n \in \Big[\{a \in J \mid i \in e(\{a\})\}\Big]^n$ de manera que $a \in Y_n$ sólo si $i \in e(\{a\})$. Es decir, para cualquier n tenemos que $i \in \bigcap_{a\in Y_n} e(\{a\})$, pero, dado que e es aditiva, tenemos que

$$i \in \bigcap_{a\in Y_n} e(\{a\}) = e\Bigg(\bigcup_{a\in Y_n} \{a\}\Bigg) = e(Y_n) \subseteq d(Y_n) = F_n.$$

Es decir, para cualquier $n \in \omega$ se tiene que $i \in F_n$ y por tanto $i \in \bigcap_{n\in\omega} F_n$, lo que contradice la selección de los F_n. La contradicción provino de suponer que había un índice que fuera elemento de una infinidad de conjuntos en nuestra familia $\{e(\{a\}) \mid a \in J\}$, por lo que queda probado que esta familia es regularizadora.

Es claro que la familia regularizadora tiene κ elementos, por lo que queda demostrado que $\mathcal{F}$ es κ-regular. QED

Observación 4.1.9. Si un filtro es bueno y numerablemente incompleto, entonces es regular.

Recordemos que nuestro objetivo es trabajar la saturación del ultraproducto de una estructura. Esto es, que todo 1-tipo del ultraproducto se realice.

Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I un conjunto infinito de índices de cardinalidad λ. Definamos $\mathfrak{B} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ con soporte B y consideremos a $X \in [B]^{\leq\lambda}$. Para que $\mathfrak{B}$ sea λ^+-saturado necesitamos que todo 1-tipo se realice sobre $\mathfrak{B}_X$. Si tomamos a $\Gamma \in S_1(X)$ un 1-tipo cualquiera, como ρ es numerable, tenemos que $|\mathscr{L}_{\rho(X)}| = |\mathcal{L}_{\rho(X)}| = |X| + \aleph_0 \leq \lambda + \aleph_0 = \lambda$. Así, $|\Gamma| \leq \lambda$, y por tanto podemos usar a I para enumerar a Γ. En otras palabras, podemos escribir:

$$\Gamma(x) = \{\varphi_t(x; \bar{c}_t) \mid t \in I\}, \qquad \text{donde } \bar{c}_t \in [\operatorname{Cons} \rho(X)]^{<\omega} \text{ para cada } t \in I.$$

Dado que Γ es un 1-tipo, podemos garantizar la existencia de un testigo que satisfaga simultáneamente una cantidad finita de fórmulas de Γ.

Es decir, si $u \in [I]^{<\omega}$, tenemos que $\mathfrak{B}_X \models \exists x \bigwedge_{t\in u} \varphi_t(x; \bar{c}_t)$, y aplicando el Teorema de Łoś, tenemos que $\{\, i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \bigwedge_{t\in u} \varphi_t(x; \bar{c}_t(i)) \,\} \in \mathcal{U}$.

Si definimos $d : [I]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{U}$ como $d(u) := \{\, i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \bigwedge_{t\in u} \varphi_t(x; \bar{c}_t(i)) \,\}$, tenemos una distribución sobre $\mathcal{U}$ que además es monótona.

Notación 4.1.10. Al conjunto $\{\, i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \bigwedge_{t\in u} \varphi_t(x; \bar{c}_t(i)) \,\}$ lo llamamos *mapeo de Łoś de* Γ *respecto a* u y lo denotamos por $\mathrm{ML}(\Gamma, u)$.

Observación 4.1.11. La distribución definida como $d(u) := \mathrm{ML}(\Gamma, u)$ es monótona y además tiene imagen en el ultrafiltro.

Ahora bien, para poder estudiar una distribución de un tipo con la cual podamos determinar cuándo éste se realice, necesitamos pedir que sea más que un refinamiento del mapeo de Łoś.

Definición 4.1.12. Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro regular sobre un conjunto I, d una distribución sobre $\mathcal{U}$ y Γ un tipo. Decimos que d es *una distribución de* Γ si:

1. d es monótona.

2. Para cualquier $u \in [I]^{<\omega}$ se tiene que $d(u) \subseteq \mathrm{ML}(\Gamma, u)$.

3. El conjunto $\{d(u) \mid u \in [I]^{<\omega}\}$ es una familia regularizadora.

Lema 4.1.13. *Sean I un conjunto de cardinalidad λ infinita, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro regular sobre I y $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Escribamos $\mathfrak{B} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U}$ y tomemos $X \in [B]^{\leq\lambda}$, entonces para todo 1-tipo $\Gamma \in S_1(X)$ existe una distribución.*

Demostración. Sea $\{\, U_t \mid t \in I \,\}$ una familia regularizadora. Definamos $d : [I]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{U}$ para $u \in [I]^{<\omega}$ como:

$$d(u) := \mathrm{ML}(\Gamma, u) \cap \bigcap_{t \in u} U_t$$

Es claro que d es un refinamiento del Mapeo de Łoś por construcción. Más aún, si $u \subseteq w$, entonces sucede tanto $\mathrm{ML}(\Gamma, u) \supseteq \mathrm{ML}(\Gamma, w)$ como que $\bigcap_{t \in u} U_t \supseteq \bigcap_{t \in w} U_t$, y por tanto $d(u) \supseteq d(w)$, es decir, se cumple monotonía.

Para ver que la imagen de d es una familia regularizadora, basta ver que todo subconjunto infinito interseca vacío. Si fuera el caso de que $\{d(u) \mid u \in [I]^{<\omega}\}$ fuera finito, el resultado se cumple por vacuidad. Para el caso de que sea infinito, tomemos $\mathcal{D} \subseteq \{d(u) \mid u \in [I]^{<\omega}\}$ infinito y veamos que interseca vacío. Podemos observar que $E := \{u \in [I]^{<\omega} \mid d(u) \in \mathcal{D}\}$ es infinito y así tenemos que

$$\bigcap \mathcal{D} = \bigcap_{u \in E} d(u) = \bigcap_{u \in E} \Big(\mathrm{ML}(\Gamma, u) \cap \bigcap_{t \in u} U_t \Big) \subseteq \bigcap_{u \in E} \bigcap_{t \in u} U_t = \varnothing,$$

pues estamos intersecando una cantidad infinita de miembros de la familia regularizadora.

QED

Estudiar la realización de tipos enfocándose en sus distribuciones será factible gracias al siguiente teorema.

Teorema 4.1.14. *Sea I un conjunto de cardinalidad λ infinita y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro regular sobre I. Sea $\mathfrak{B} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \mathcal{U}$ y $X \in [B]^{\leq \lambda}$. Consideremos $\Gamma \in S_1(X)$ y d una distribución de Γ. Si d tiene un refinamiento aditivo, entonces Γ se realiza en $\mathfrak{B}$ sobre X.*

Demostración. Sea $e : [I]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{U}$ refinamiento aditivo de d y escribamos $\Gamma(x) = \{\varphi_t(x; \bar{c}_t) \mid t \in I\}$ donde $\bar{c}_t \in [\operatorname{Cons} \rho(X)]^{<\omega}$. Basta mostrar un $b/\mathcal{U} \in B$ de forma que para toda $t \in I$ se cumpla que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi_t(b(i); \bar{c}_t(i))\} \in \mathcal{U}$.

Debido a que para toda $j \in I$, $\{d(u) \mid u \in [I]^{<\omega}\}$ es una familia regularizadora, tenemos que $\{d(u) \mid j \in d(u)\}$ es finito. Es decir, $\{u \in [I]^{<\omega} \mid j \in e(u)\}$ es también finito. Definamos para $j \in I$ a $u(j)$ como el elemento de cardinalidad máxima de $\{u \in [I]^{<\omega} \mid j \in e(u)\}$ (que existe por ser finito). Podemos ver que la aditividad de e nos garantiza que $u(j)$ esté bien definida pues si fuera el caso de que $u, w \in [I]^{<\omega}$ fueran tales que $j \in e(u)$, $j \in e(w)$ y $|u| = |w|$ de cardinalidad máxima, tendríamos que $j \in e(u) \cap e(w) = e(u \cup w)$ y entonces $|u \cup w| \leq |u|$, lo que sólo pasa cuando $u = w$.

Observemos que $j \in e(u(j)) \subseteq d(u(j)) \subseteq \operatorname{ML}(\Gamma, u(j))$, por tanto, $j \in \{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \bigwedge_{t \in u(j)} \varphi_t(x; \bar{c}(i))\}$, es decir

$$\mathfrak{A}_{X_j} \models \exists x \bigwedge_{t \in u(j)} \varphi_t(x; \bar{c}(i)). \tag{1}$$

Definamos a $b(j)$ como cualquier testigo de este hecho y probemos que $b/\mathcal{U}$ realiza Γ. Sea $t_0 \in I$ y veamos que $\mathfrak{B}_X \models \varphi_{t_0}(b/\mathcal{U}; \bar{c}_{t_0})$, es decir, probemos que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi_{t_0}(b(i); \bar{c}_{t_0}(i))\} \in \mathcal{U}$. Demostremos que $e(\{t_0\}) \subseteq \{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi_{t_0}(b(i); \bar{c}_{t_0}(i))\}$.

Tomemos a un $j \in e(\{t_0\})$ arbitrario. Debido a que $e(\{t_0\}) \subseteq d(\{t_0\}) \subseteq \operatorname{ML}(\Gamma, \{t_0\})$, tenemos que $j \in \{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \varphi_{t_0}(x : \bar{c}_{t_0}(i))\}$, es decir

$$\mathfrak{A}_{X_j} \models \exists x\, \varphi_{t_0}(x; \bar{c}_{t_0}(j)). \tag{2}$$

Por otro lado, recordemos que $j \in u(j)$, lo que hace que se cumpla (1). De ésta manera, podemos garantizar que existan testigos para las ecuaciones (1) y (2). En general, no es necesario que estos testigos sean el mismo para ambas ecuaciones, pero el hecho de tener un refinamiento aditivo justamente nos garantizará que lo son en al menos un conjunto grande de índices.

El que las ecuaciones (1) y (2) compartan testigo es equivalente a que $t_0 \in u(j)$. Como $j \in e(u(j))$ y $j \in e(\{t_0\})$, entonces $j \in e(u(j)) \cap e(\{t_0\}) = e(u(j) \cup \{t_0\})$. Dado que $u(j)$ lo tomamos de cardinalidad máxima, tenemos que $|u(j) \cup \{t_0\}| \leq |u(j)|$, lo que sólo ocurre cuando $t_0 \in u(j)$.

Por la elección de $b(j)$ se cumple que $\mathfrak{A}_{X_j} \models \bigwedge_{t \in u(j)} \varphi_t(b(j); \bar{c}_t(j))$, y en particular para t_0 se tiene que $\mathfrak{A}_{X_j} \models \varphi_{t_0}(b(j); \bar{c}_{t_0}(j))$, por lo que $j \in \{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi_{t_0}(b(j); \bar{c}_{t_0}(j))\}$.

Siendo así, hemos probado que $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi_{t_0}(b(j); \bar{c}_{t_0}(j))\} \supseteq e(\{t_0\}) \in \mathcal{U}$, es decir, $\mathfrak{B}_X \models \varphi_{t_0}(b/\mathcal{U}; \bar{c}_{t_0})$ para toda $t_0 \in I$, lo que concluye la prueba. QED

Teorema 4.1.15. *[Keisler, 1964] Sean I un conjunto de cardinalidad λ infinita y $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro bueno y numerablemente incompleto sobre I, entonces $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}/\mathcal{U}$ es λ^+-saturado.*

Demostración. Por la Proposición 4.1.8 tenemos que $\mathcal{U}$ es regular, y así, por el Lema 4.1.13 cualquier 1-tipo sobre un conjunto de cardinalidad a lo más λ tiene una distribución. Debido a que el ultrafiltro es bueno, cualquier distribución de un 1-tipo tiene un refinamiento aditivo. Finalmente, por el Teorema 4.1.14, todo 1-tipo se realiza y así $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ es λ^+-saturada. QED

Teorema 4.1.16. *Si I es un conjunto infinito, entonces existe un ultrafiltro bueno y numerablemente incompleto sobre I.* $\square$

La prueba del Teorema 4.1.15 se debe a Keisler y también se puede encontrar en [Chang y Keisler, 1990]. Por otro lado, para el Teorema 4.1.16 se requieren varias construcciones y se puede encontrar la prueba en [Kunen, 1972] la cual no supone la Hipótesis Generalizada del Continuo.

4.2. Definición del Orden de Keisler

Los lenguajes de primer orden han mostrado ser una herramienta poderosa y eficaz para el estudio de estructuras matemáticas, pues los presupuestos lógicos que requieren son mínimos y explícitos. Cabe mencionar que estudiar a las estructuras matemáticas con un lenguaje de primer orden tiene sus limitantes, por ejemplo, cualidades como tener modelos de sólo una cardinalidad infinita específica resultan inexpresables en lenguajes de primer orden debido los Teoremas de Löwenheim-Skolem. No obstante, nos será útil entender una estructura matemática desde el paradigma de los lenguajes de primer orden. Esto se hace considerando al conjunto de los enunciados que son verdaderos en dicha estructura, a saber, su teoría. La clasificación de estructuras se ha hecho desde esta heurística.

El gran Teorema de Categoricidad de Morley de 1960 (ver [Morley, 1965; Chang y Keisler, 1990]), puede reconocerse como el primer gran teorema en la clasificiación de la Teoría de Modelos. Éste afirma que una teoría puede ser sólo una de tres cosas: *totalmente categórica* (todos los modelos de cardinalidad κ son isomorfos para toda κ infinita), *contablemente categórica* (todos los modelos de cardinalidad κ son isomorfos si y sólo si κ es numerable) e *incontablemente categórica* (todos los modelos de cardinalidad κ son isomorfos si y sólo si κ es no-numerable).

Este último teorema fue retomado y extendido por Shelah, lo que eventualmente derivó en su Programa de Clasificación de Teorías, como se puede ver en [Kojman y Shelah, 1992] y [Malliaris y Shelah, 2013]. Es en este programa que se propone la noción de estabilidad.

La estabilidad de un modelo se define observando cuántos tipos tiene un modelo expandido por constantes en un conjunto determinado. Más precisamente, un modelo $\mathfrak{A}$ es λ-*estable* si para cualquier $X \in [A]^{\leq\lambda}$, sucede que $|S(X)| \leq \lambda$. Una teoría es *estable* si existe una λ tal que todo sus modelos sean λ-estables. Esto divide a las teorías en dos grupos: las estables y las inestables. Mucho del trabajo de Shelah se enfocó a las teorías estables utilizó y la noción de estabilidad como una medida de complejidad para las teorías.

Por otro lado, Keisler aportó otro enfoque para clasificar a las teorías, considerando a las teorías simples como aquellas para las cuales fuera "fácil" saturar su ultraproducto respecto a otras teorías, definiendo así una relación de orden que "compara complejidad". Este orden resultó compatible con la idea estabilidad que propuso Shelah, en el sentido de que las teorías mínimales en el orden de Keisler son, a su vez, estables (ver [Malliaris y Shelah, 2013]).

Un ejemplo de la compatibilidad entre estas ideas se puede ver en las teorías de campos algebraicamente cerrados de característica cero. Estas teorías tienen la cualidad de que todos sus modelos son saturados. Esto se debe a que todo tipo se traduce en un sistema de ecuaciones consistente sobre el campo, el cual se va a solucionar en el mismo campo. Siendo así, es claro que su ultraproducto es también saturado, mostrando su simplicidad en términos de la saturación de su ultraproducto. Por otro lado, se puede ver en [Malliaris y Shelah, 2013] que la teoría de un campo algebraicamente cerrado es estable, siendo simple en términos de estabilidad.

En el extremo opuesto, las teorías de ordenes lineales densos resultan altamente complejas por la cantidad de tipos que éstas tienen, ya que hay al menos un tipo por cada cortadura de Dedekind. Las teorías de órdenes totales densos son inestables por la gran cantidad de tipos que tienen, además de que sus ultraproductos son difíciles de saturar.

El orden de Keisler intenta proveer de una herramienta para clasificar todas las teorías y dar una gama más refinada para clasificar teorías en términos de su complejidad. Debido a que es más factible que la ultrapotencia de una estructura sea saturada a que la estructura en sí lo sea, este orden se plantea sobre ultrapotencias. Como se ha visto antes, la saturación del ultraproducto de una familia de estructuras depende fuertemente del ultrafiltro que se tome, a tal grado que de no tomarse un ultrafiltro suficientemente repartido, habrá factores del ultraproducto que tengan más peso, como sucede cuando el ultrafiltro es principal. Por esta razón, es conveniente tomar ultrafiltros "repartidos", esto es, ultrafiltros regulares.

Se dirá que $\mathfrak{A}$ es menor que $\mathfrak{B}$ en el orden de Keisler si la ultrapotencia de $\mathfrak{B}$ es tanto o más difícil de saturar que la ultrapotencia de $\mathfrak{A}$. En otras palabras, $\mathfrak{A} \trianglelefteq \mathfrak{B}$ si para cualquier ultrafiltro regular $\mathcal{U}$ sobre I, un conjunto de cardinalidad λ sucede que

$$\mathfrak{B}^I/\mathcal{U} \text{ es } \lambda^+\text{-saturado} \;\Rightarrow\; \mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \text{ es } \lambda^+\text{-saturado.}$$

Definición 4.2.1 (Orden de Keisler)**.** [Keisler, 1967] Sean T_1 y T_2 teorías en el mismo lenguaje.

1. Decimos que $T_1 \trianglelefteq_\lambda T_2$ si y sólo si para cualesquiera $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T_1)$ y $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(T_2)$, y cualquier ultrafiltro regular $\mathcal{U}$ sobre un conjunto I de cardinalidad λ, se tiene que:

$$\mathfrak{B}^I/\mathcal{U} \text{ es } \lambda^+\text{-saturado} \;\Rightarrow\; \mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \text{ es } \lambda^+\text{-saturado.}$$

2. Decimos que $T_1 \trianglelefteq T_2$ si $T_1 \trianglelefteq_\lambda T_2$ para cualquier cardinal infinito λ.

3. T_1 y T_2 son $\trianglelefteq_\lambda$-equivalentes ($\trianglelefteq$-equivalentes) si y sólo si $T_1 \trianglelefteq_\lambda T_2 \trianglelefteq_\lambda T_1$ ($T_1 \trianglelefteq T_2 \trianglelefteq T_1$).

Proposición 4.2.2. *Las relaciones $\trianglelefteq_\lambda$ y $\trianglelefteq$ son reflexivas y transitivas.*

Demostración. Basta probar el resultado para $\trianglelefteq_\lambda$ y se sigue para $\trianglelefteq$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro regular sobre un conjunto I de cardinalidad λ.

1. Sean T_1 una teoría cualquiera y $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T_1)$, entonces es claro que

$$\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \text{ es } \kappa^+\text{-saturado } \Rightarrow \mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \text{ es } \kappa^+\text{-saturado. Por lo tanto, } T_1 \trianglelefteq_\kappa T_1.$$

2. Supongamos que $T_1 \trianglelefteq_\lambda T_2$ y $T_2 \trianglelefteq_\lambda T_3$. Si $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T_1)$, $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(T_2)$ y $\mathfrak{C} \in \mathrm{Mod}(T_3)$. Por hipótesis, tendríamos que

$$\mathfrak{B}^I/\mathcal{U} \text{ es } \lambda^+\text{-saturado} \Rightarrow \mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \text{ es } \lambda^+\text{-saturado} \quad \text{y}$$
$$\mathfrak{C}^I/\mathcal{U} \text{ es } \lambda^+\text{-saturado} \Rightarrow \mathfrak{B}^I/\mathcal{U} \text{ es } \lambda^+\text{-saturado.}$$

Por lo tanto, si $\mathfrak{C}^I/\mathcal{U}$ es λ^+-saturado, entonces $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ es λ^+-saturado y así $T_1 \trianglelefteq_\lambda T_2$.

QED

Teorema 4.2.3. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro λ-regular sobre un conjunto infinito I y supongamos que $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{B}_i$ para todo $i \in I$, y también nombremos $\mathfrak{A} := \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ y $\mathfrak{B} := \prod \mathfrak{B}_i/\mathcal{U}$ con soportes A y B, respectivamente. Tenemos entonces que $\mathfrak{B}$ es λ^+-saturado si y sólo si $\mathfrak{A}$ es λ^+-saturado.*

Demostración. Notemos que será suficiente con probar una sola implicación. Supongamos entonces que $\mathfrak{B}$ es λ^+ saturado y procedamos a demostrar que $\mathfrak{A}$ lo es. La idea de la prueba será tomar un tipo Γ en $\mathfrak{A}$ sobre un subconjunto de A de cardinalidad λ y elegir adecuadamente un subconjunto Y de B, e interpretar adecuadamente las constantes que figuren en fórmulas de Γ de tal manera que Γ sea también tipo de $\mathfrak{B}$ sobre Y. La saturación de $\mathfrak{B}$ nos garantizará la existencia de $g/\mathcal{U}$ elemento de B que realice Γ, el cual utilizaremos para definir el elemento $h/\mathcal{U}$ de A que realice a Γ en $\mathfrak{A}$. Segmentaremos la prueba en los siguientes puntos.

1. Definiremos los conjuntos de fórmulas Γ_i y Σ_i, los cuales serán finitos.

2. Construiremos adecuadamente los conjuntos $Y_i \subseteq B_i$ sobre los cuales se expandirá el lenguaje de $\mathfrak{A}_i$. De esta manera podremos definir el conjunto $Y \subseteq B$ para expandir la estructura $\mathfrak{B}$ y que así el tipo tomado en $\mathfrak{A}$ lo sea también en $\mathfrak{B}$.

3. Demostraremos la propiedad de que una fórmula de Σ_i es satisfacible en $\mathfrak{A}_{X_i}$ si y sólo si lo es en $\mathfrak{B}_{Y_i}$ (ver Notación 3.5.1).

4. Probaremos que para cada $\varphi \in \Gamma$, el conjunto de índices $i \in I$ tales que $\varphi \in \Sigma_i$ es grande, esto es, para $\varphi \in \Gamma$ sucede que $\{i \in I \mid \varphi \in \Sigma_i\} \in \mathcal{U}$. Esto servirá para probar que el tipo Γ lo es también en $\mathfrak{B}_Y$.

5. Sabiendo que Γ es un tipo en $\mathfrak{B}_Y$, tomaremos al elemento que lo realiza y lo traduciremos en un elemento de $\mathfrak{A}_X$, y probaremos que realiza a Γ en $\mathfrak{A}_X$.

Podemos suponer que λ es infinito, pues el Teorema 3.5.3 nos garantiza el resultado para casos finitos. Tomemos $X \in [A]^\lambda$, $\Gamma \in S_1(X)$ un tipo en $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ una familia regularizadora de tamaño λ.

Podemos observar que $|\Gamma| \leq |\mathscr{L}^1_{\rho(X)}| \leq |X| + \aleph_0 \leq \lambda$, y así podemos enumerar a Γ, $\mathcal{F}$ y X con λ. Así, escribimos $\mathcal{F} = \{F_\mu \mid \mu < \lambda\}$ y $X = \{a_\mu/\mathcal{U} \mid \mu < \lambda\}$.

(1) Como $|\Gamma| \leq \lambda$ podemos enumerar a Γ como $\Gamma(x) = \{\gamma_\mu(x; \bar{c}_\mu) \mid \mu < \lambda\}$, donde $\bar{c}_\mu \in [\operatorname{Cons}\rho(X)]^{<\omega}$. Siendo así, definamos para cada $i \in I$ los conjuntos:

$$
\begin{aligned}
u(i) &= \{\mu < \lambda \mid i \in F_\mu\},\\
\Gamma_i &= \{\gamma_\mu(x; \bar{c}_\mu(i)) \mid \mu \in u(i)\} \text{ y}\\
\mathcal{F}_i &= \{F_\mu \mid \mu \in u(i)\}.
\end{aligned}
$$

De esta manera tenemos que $|\Gamma_i| = |\mathcal{F}_i| = |u(i)|$ finitos pues $\mathcal{U}$ es λ-regular. Definamos también, para $i \in I$, el conjunto de enunciados $\Sigma_i = \left\{\exists x \bigwedge_{\mu\in w} \gamma_\mu(x; \bar{c}_\mu(i)) \,\middle|\, w \subseteq u(i)\right\}$, el cual es claramente finito.

(2) Procedamos a construir un subconjunto $Y \subseteq B$, esto es, requerimos definir $Y_i \subseteq B_i$ para cada $i \in I$. Recordemos que podemos enumerar el conjunto X_i como $X_i = \{a_\mu(i) \mid \mu < \lambda\}$(ver 3.5.1), así como $\operatorname{Cons}\rho(X_i) = \{c^{a_\mu}(i) \mid \mu < \lambda\}$. Tomemos al conjunto de enunciados de $T_i = \Sigma_i \cap \operatorname{Teo}(\mathfrak{A}_{X_i})$ y consideremos al conjunto X_i^0 como el conjunto de las interpretaciones de constantes que figuren en fórmulas en T_i, el cual es finito.

Es claro que $\mathfrak{A}_{X_i^0} \models T_i$, y como $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{B}_i$ por hipótesis, el Lema 3.2.5(2) garantiza que existe $Y_i^0 \subseteq B_i$ tal que $\mathfrak{B}_{Y_i^0} \models T_i$ para cada $i \in I$. Escribamos $Y_i^0 = \{b^i_\mu \in B_i \mid a_\mu(i) \in X_i^0\}$, es decir, b^i_μ es el elemento de B_i en el cual vamos a interpretar la constante $c^{a_\mu}(i)$ de forma que $\mathfrak{B}_{Y_i^0} \models T_i$. Así, hemos construido los conjuntos Y_i^0 tales que si $\sigma \in \Sigma_i$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_{X_i^0} \models \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B}_{Y_i^0} \models \sigma, \qquad\qquad \text{es decir,} \qquad\qquad \textbf{(i)}\\
&\Sigma_i \cap \operatorname{Teo}(\mathfrak{A}_{X_i^0}) = \Sigma_i \cap \operatorname{Teo}(\mathfrak{B}_{Y_i^0}).
\end{aligned}
$$

Siendo así, definamos las funciones $b_\mu : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} B_i$ para $\mu < \lambda$ como $b_\mu(i) = b^i_\mu$ si $a_\mu(i) \in X_i^0$ y como un elemento arbitrario en caso contrario. Definiendo $Y := \{b_\mu/\mathcal{U} \mid \mu < \lambda\}$, tenemos el conjunto con el cual expandir $\mathfrak{B}$.

(3) Probemos que **(i)** se sostiene para X_i y Y_i, esto es, $\mathfrak{A}_{X_i} \models \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{B}_{Y_i} \models \sigma$. Para probar esto, observemos que $Y_i \supset Y_i^0$ para cualquier $i \in I$. En efecto, si $\sigma \in \Sigma_i$, gracias a la Proposición 3.2.4(3), tenemos que $\mathfrak{A}_{X_i} \models \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{A}_{X_i^0} \models \sigma$, que a su vez equivale a $\mathfrak{B}_{Y_i^0} \models \sigma$, y esto último es equivalente a que $\mathfrak{B}_{Y_i} \models \sigma$.

(4) Veamos que el tipo Γ de $\mathfrak{A}$ sobre X es también un tipo de $\mathfrak{B}$ sobre Y. Tomemos $u \in [\lambda]^{<\omega}$ y sea $\varphi = \exists x \bigwedge_{\mu \in u} \gamma_\mu(x; \bar{c}_\mu)$, y probemos que φ se satisface en $\mathfrak{B}_Y$. Definamos $\varphi^i = \exists x \bigwedge_{\mu \in u} \gamma_\mu(x; \bar{c}_\mu(i))$ y probemos que

$$\{i \in I \mid \varphi^i \in \Sigma_i\} \in \mathcal{U}. \tag{\textbf{ii}}$$

En efecto, como u es finito ocurre que

$$\begin{aligned} \{i \in I \mid \varphi^i \in \Sigma_i\} &\supseteq \{i \in I \mid \gamma_\mu \in \Gamma_i,\, \mu \in u\} \supseteq \{i \in I \mid i \in F_\mu, \mu \in u\} \\ &\supseteq \bigcap_{\mu \in u} \{\, i \in I \mid \ i \in F_\mu \,\} \supseteq \bigcap_{\mu \in u} F_\mu \ \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Procedamos a mostrar que $\mathfrak{B}_Y \models \varphi$. Como Γ es un tipo, pasa que $\mathfrak{A}_X \models \varphi$, y así tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Si } \mathfrak{A}_X \models \varphi \quad & \text{entonces } \big\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi^i\big\} \in \mathcal{U}, \\ & \text{entonces } \big\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi^i\big\} \cap \big\{i \in I \mid \varphi^i \in \Sigma_i\big\} \in \mathcal{U}, && \text{(Por ii)} \\ & \text{entonces } \big\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi^i, \varphi^i \in \Sigma_i\big\} \in \mathcal{U}, \\ & \text{entonces } \big\{i \in I \mid \mathfrak{B}_{Y_i} \models \varphi^i, \varphi^i \in \Sigma_i\big\} \in \mathcal{U}, && \text{(Por i)} \\ & \text{entonces } \big\{i \in I \mid \mathfrak{B}_{Y_i} \models \varphi^i\big\} \in \mathcal{U}, && \text{(Por ii)} \\ & \text{entonces } \mathfrak{B}_Y \models \varphi. \end{aligned}$$

(5) Por hipótesis $\mathfrak{B}$ es λ^+-saturado, por lo que Γ se realiza en $\mathfrak{B}_Y$ por un elemento, digamos $g/\mathcal{U}$. Definamos para cada $i \in I$ el conjunto $w(i) = \{\mu < \lambda \mid \mathfrak{B}_{Y_i} \models \gamma_\mu(g(i); \bar{c}_\mu(i)), \gamma_\mu \in \Gamma_i\}$, y la fórmula $\psi_i = \exists x \bigwedge_{\mu \in w(i)} \gamma_\mu(x; \bar{c}_\mu(i))$.

Podemos observar que $w(i) \subseteq u(i)$, por lo que es finito y así ψ_i está bien definida. Mas aún, hemos construido la fórmula ψ_i de forma que $\mathfrak{B}_{Y_i} \models \psi_i$, por lo que claramente $\psi_i \in \Sigma_i$. Así, por (3), tenemos que $\mathfrak{A}_{X_i} \models \psi_i$, y por tanto, existe $h(i) \in A_i$ un testigo de la satisfacción de ψ_i. Siendo así, definimos la función $h : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ de forma que $i \mapsto h(i)$, y probemos que $h/\mathcal{U}$ es un elemento de A que realiza Γ.

Sea $\gamma_\mu \in \Gamma$ y demostremos que $h/\mathcal{U}$ satisface γ_μ en $\mathfrak{A}_X$. Para γ_μ, podemos observar que $\{i \in I \mid \gamma_\mu(x; \bar{c}_\mu(i)) \in \Gamma_i\} \supseteq F_\mu \in \mathcal{U}$. Por otro lado. tenemos que $\mathfrak{B}_Y \models \gamma_\mu(g/\mathcal{U}; \bar{c}_\mu)$, por lo que $\{i \in I \mid \mathfrak{B}_{Y_i} \models \gamma_\mu(g(i); \bar{c}_\mu(i))\} \in \mathcal{U}$. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Si } \{i \in I \mid \mathfrak{B}_{Y_i} \models \gamma_\mu(g(i); \bar{c}_\mu(i))\} \cap \{i \in I \mid \gamma_\mu(x; \bar{c}_\mu(i)) \in \Gamma_i\} \in \mathcal{U}, \\ \text{entonces } \{i \in I \mid \mu \in w(i)\} \in \mathcal{U}, \\ \text{entonces } \{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \gamma_\mu(h(i); \bar{c}_\mu(i))\} \in \mathcal{U}, \\ \text{entonces } \mathfrak{A}_X \models \gamma_\mu(h/\mathcal{U}; \bar{c}_\mu). \end{aligned}$$

Por lo que Γ se realiza en $\mathfrak{A}$ sobre X, lo que finaliza la prueba. QED

4.3. $\trianglelefteq$-Minimalidad

Ejemplos de teorías $\trianglelefteq$-mínimas en el orden son las de campos algebraicamente cerrados de característica fija. Cabe mencionar que si tenemos dos de estos campos con característica distinta, sus teorías serán distintas, sin embargo, ambas teorías son $\trianglelefteq$-mínimas. Esto muestra que el orden de Keisler es un un preorden en la clase de teorías de primer orden. Dedicaremos esta sección a mostrar una cualidad sintáctica que todos las teorías $\trianglelefteq$-minimales poseen, a saber, todas carecen de la propiedad de la cobertura finita. Para llevar a cabo esto requeriremos definir en general la propiedad de la λ-cobertura.

Proposición 4.3.1. *Sean $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro regular sobre un conjunto I de cardinalidad λ. Si $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ no es κ^+-saturado para $\kappa \leq \lambda$, entonces $\mathfrak{A}$ no es $\trianglelefteq_\lambda$-minimal.*

Demostración. Observemos que el que $\mathfrak{A}$ no sea $\trianglelefteq_\lambda$-minimal equivale a que para cualquier ultrafiltro regular $\mathcal{U}$ sobre I de cardinalidad λ, suceda que exista $\mathfrak{B} \in V_\rho$ de forma que $\mathfrak{B} \trianglelefteq_\lambda \mathfrak{A}$. Sea $\mathfrak{B} \in V_\rho$ cualquiera. Equivalentemente se tiene que satisfacer $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ es λ^+-saturado $\Rightarrow \mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$ es λ^+-saturado. Esta implicación se satisface ya que es falso que $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ sea λ^+-saturado porque por hipótesis $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ no es κ^+-saturado y $\kappa \leq \lambda$. QED

Para establecer un criterio que identifique teorías $\trianglelefteq$-mínimas se desarrollará la noción de *cobertura*. Intuitivamente hablando, una cobertura puede pensarse como un conjunto de fórmulas que "cubren" todas la posibilidades semejante a $\{\varphi, \neg\varphi\}$.

Definición 4.3.2. [Keisler, 1967] Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y λ un cardinal.

1. Si $X \in [A]^\lambda$ y $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^{p+1}$, definimos *las instancias de* φ como $\{\varphi(x; c_0, \ldots, c_{p-1}) \mid c_0, \ldots, c_{p-1} \in \operatorname{Cons} \rho(X)\} \subseteq \mathscr{L}_{\rho(X)}^{p+1}$.

2. Si $X \in [A]^\lambda$, decimos que Σ es una (φ, λ)-*cobertura* de $\mathfrak{A}_X$ si Σ es un subconjunto de las instancias de φ de cardinalidad λ de forma que cualquier subconjunto propio es satisfacible en $\mathfrak{A}_X$, pero Σ no es satisfacible en $\mathfrak{A}_X$.

3. Decimos que $\mathfrak{A}$ *tiene la propiedad de la* λ-*cobertura* si existe $X \in [A]^\lambda$ y una (φ, λ)-cobertura para alguna $\varphi \in \mathscr{L}_{\rho(X)}^{p+1}$.

4. Decimos que $\mathfrak{A}$ *tiene la propiedad de la cobertura finita* si existe $X \in [A]^{\leq\omega}$ y $\varphi \in \mathscr{L}_{\rho(X)}^{p+1}$ tal que para cualquier $n \in \omega$ hay una (φ, m)-cobertura con $n \leq m$.

5. Una teoría tiene la *propiedad de la cobertura finita* (λ-*cobertura*) si cualquiera de sus modelos tiene la propiedad de la cobertura finita (λ-*cobertura*).

Veamos que la propiedad de la cobertura finita se puede establecer en términos de la satisfacibilidad, es decir, verificando la satisfacibilidad de un conjunto de fórmulas del lenguaje (cada fórmula de este conjunto funge como traducción al lenguaje de la cobertura). Más aún, todas estas fórmulas las podremos escribir en el lenguaje $\mathscr{L}_\rho$ en lugar de escribirlas en una expansión. Esto será útil para mostrar que la propiedad de la cobertura finita se preserva bajo la equivalencia elemental.

Proposición 4.3.3. *Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$. Se tiene que $\mathfrak{A}$ tiene la propiedad de la cobertura finita si y sólo si existe $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^{p+1}$ de forma que para toda $n_0 \in \omega$ existe $n > n_0$ tal que*

$$\mathfrak{A} \models \exists \bar{y}_0 \cdots \exists \bar{y}_{n-1}\left[\left(\neg \exists x \bigwedge_{m<n} \varphi(x;\bar{y}_m)\right) \wedge \bigwedge_{d \subsetneq n}\left(\exists x \bigwedge_{m \in d} \varphi(x;\bar{y}_m)\right)\right],$$

donde $\bar{y}_m = (y_{0,m}, \ldots, y_{p-1,m})$ y $\exists \bar{y}_m$ denota $\exists y_{0,m} \cdots \exists y_{p-1,m}$ para toda $m < n$.

Demostración. Para la ida, tomemos $n_0 \in \omega$. Debido a que $\mathfrak{A}$ tiene la propiedad de la cobertura finita, existen $X \in [A]^{\leq\omega}$, $\varphi \in \mathscr{L}^1_{\rho(X)}$ y $n > n_0$ de forma que hay Σ_n una (φ, n)-cobertura de $\mathfrak{A}_X$. Sin pérdida de generalidad, $\varphi = \varphi(x; c_0, \ldots, c_{p-1})$, donde $c_0, \ldots, c_{p-1} \in \operatorname{Cons}\rho(X)$. Al ser Σ_n un subconjunto de las instancias de φ de tamaño n, enumerémoslo como $\Sigma_n = \{\varphi(x;\bar{c}_m) \mid m < n \text{ y } \bar{c}_m = (c_{0,m}, \ldots, c_{p-1,m})\}$. Como Σ_n es cobertura, sucede que no se satisface en $\mathfrak{A}_X$ y, por tanto, $\mathfrak{A}_X \models \neg\exists x \bigwedge_{m<n} \varphi(x;\bar{c}_m)$, pero cualquier subconjunto propio sí se satisface, por lo que $\mathfrak{A}_X \models \bigwedge_{d \subsetneq n}\left(\exists x \bigwedge_{m \in d} \varphi(x;\bar{c}_m)\right)$. Por lo tanto, tenemos que

$$\mathfrak{A}_X \models \left(\neg \exists x \bigwedge_{m<n} \varphi(x;\bar{c}_m)\right) \wedge \bigwedge_{d \subsetneq n}\left(\exists x \bigwedge_{m \in d} \varphi(x;\bar{c}_m)\right).$$

Siendo así, es claro que $\mathfrak{A}_X \models \sigma_n$, donde

$$\sigma_n = \exists \bar{y}_0 \cdots \exists \bar{y}_{n-1}\left[\left(\neg \exists x \bigwedge_{m<n} \varphi(x;\bar{y}_m)\right) \wedge \bigwedge_{d \subsetneq n}\left(\exists x \bigwedge_{m \in d} \varphi(x;\bar{y}_m)\right)\right]. \tag{1}$$

Observemos que en σ_n no figuran constantes de $\operatorname{Cons}\rho(X)$, por lo que en virtud de la Proposición 3.2.4(3), sucede que $\mathfrak{A} \models \sigma_n$.

Para probar la conversa, sea $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^{p+1}$ tal que para cada $n_0 \in \omega$ existe $n > n_0$ de forma que $\mathfrak{A} \models \sigma_n$, donde σ_n está definido igual que en (1). Mostremos que existe $X \in [A]^{<\omega}$ para la cual hay una (φ, n)-cobertura. Como $\mathfrak{A} \models \sigma_n$, tenemos que existen $a_{0,0}, \ldots, a_{p-1,0}, a_{0,1} \ldots, a_{p-1,n-1} \in A$ testigos de la satisfacibilidad de σ_n. Definamos $X_n = \{a_{k,m} \mid m < n \text{ y } k < p\}$ e interpretamos la constante $c_{k,m}$ por $a_{k,m}$ para $m < n$ y $k < p$. Definiendo $\Sigma_n = \{\varphi(x;\bar{c}_m) \mid m < n \text{ y } \bar{c}_m = (c_{0,m}, \ldots, c_{p-1,m})\}$, es evidente que la satisfacción de σ_n en $\mathfrak{A}$ nos garantiza que Σ_n es una (φ, n)-cobertura de $\mathfrak{A}_{X_n}$. Tomando $X := \bigcup_{n\in\omega} X_n$, y gracias a la Proposición 3.2.4(3), concluimos que Σ_n es una (φ, n)-cobertura de $\mathfrak{A}_X$, lo que prueba que $\mathfrak{A}$ tiene la propiedad de la cobertura finita. QED

Corolario 4.3.4. *Si $\mathfrak{A}$ tiene la propiedad de la cobertura finita y $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B}$ tiene la propiedad de la cobertura finita.*

El estudio de las coberturas es relevante en la búsqueda de modelos no saturados pues por sí mismas son un tipo y, debido a que no son satisfacibles en el modelo, tenemos que son un tipo omitido.

Lema 4.3.5. *Si λ es infinito y $\mathfrak{A}$ tiene la propiedad de λ-cobertura, entonces $\mathfrak{A}$ no es λ^+-saturado.*

Demostración. Demostremos que hay un 1-tipo que no se realiza en $\mathfrak{A}_X$ para algún $X \in [A]^\lambda$. Por hipótesis, tenemos que existen $X \in [A]^{<\omega}$ y Σ una (φ, λ)-cobertura para alguna $\varphi \in \mathscr{L}^{p+1}_{\rho(X)}$ con $p \geq 0$. Como Σ es un subconjunto de las instancias de φ, es claro que $\Sigma \subseteq \mathscr{L}^1_{\rho(X)}$, por lo que Σ es un buen candidato a ser un 1-tipo no realizable en $\mathfrak{A}_X$.

Veamos ahora que Σ es un 1-tipo. Tenemos que probar que cualquier subconjunto finito es realizable en $\mathfrak{A}_X$. Esto es evidente, pues si $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ es finito tendríamos que $\Sigma_0 \subsetneq \Sigma$ por ser finito. Así, por hipótesis $\mathfrak{A} \models \exists x \bigwedge_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma(x; \bar{c})$ y, por tanto, Σ_0 se realiza en $\mathfrak{A}_X$, mostrando así que Σ es consistente, es decir, es un 1-tipo. Recordando que $|\Sigma| = \lambda$, concluimos que $\mathfrak{A}$ no es λ^+-saturado. QED

Veremos ahora que la propiedad de la cobertura finita impide que las ultrapotencias de un modelo de una teoría con esta propiedad sean todas saturadas. Esto es, si una teoría tiene la propiedad de la cobertura finita, existirá un cardinal κ y un ultrafiltro regular tales que la ultrapotencia de un modelo de esta teoría no es κ-saturada. Siendo así, por la Proposición 4.3.1, esta teoría no será $\trianglelefteq$-minimal.

Teorema 4.3.6. *[Keisler, 1967] Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro numerablemente incompleto sobre un conjunto I de cardinalidad λ. Si $\mathfrak{A}$ tiene la propiedad de la cobertura finita, entonces $\mathfrak{B} := \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ no es κ-saturado para alguna $\kappa \leq 2^\lambda$.*

Demostración. Consideremos una cadena descendente $I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, de forma que $I_m \in \mathcal{U}$ para $m \in \omega$ y $\bigcap_{m\in\omega} I_m = \varnothing$(ver 2.1.16). Para cada $i \in I$ definamos el natural $m(i) = \text{mín}\,\{m \in \omega \mid i \notin I_m\}$.

Teniendo en cuenta la Proposición 4.3.3, al tener $\mathfrak{A}$ la propiedad de la cobertura finita, existe $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^{p+1}$ (para alguna $p \in \omega$) de forma que para cualquier $i \in I$ existe un natural $n(i) \geq m(i)$ para el cual existe $\Sigma(n(i))$, una $(\varphi, n(i))$-cobertura de $\mathfrak{A}$.

Por la Proposición 4.3.3, para $i \in I$ podemos enumerar la cobertura $\Sigma(n(i))$ como:

$$\Sigma(n(i)) = \{\varphi(x; \bar{y}_m) \mid m < n(i) \text{ y } \bar{y}_m = (y_{0,m}, \ldots, y_{p-1,m})\},$$

y para toda $i \in I$ sucede que

$$\mathfrak{A} \models \exists \bar{y}_0 \cdots \exists \bar{y}_{n(i)-1} \left[\Big(\neg \exists x \bigwedge_{m<n(i)} \varphi(x; \bar{y}_m) \Big) \wedge \bigwedge_{d \subsetneq n(i)} \Big(\exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi(x; \bar{y}_m) \Big) \right] \qquad (1)$$

Por lo tanto, existen testigos de (1), digamos $a_{k,m}(n(i)) \in A$ con $k < p$ y $m < n(i)$, de forma que $\big(a_{0,m}(n(i)), \ldots, a_{p-1,m}(n(i))\big)$ es una p-tupla que satisface (1) en $\bar{y}_m$.

Consideremos un conjunto de funciones con dominio I y contradominio $\{a_{k,m}(n(i)) \mid k < p \text{ y } m < n(i)\}$, para que usando estas funciones como parámetros de instancias de φ, podamos definir un tipo en $\mathfrak{B}$. Tomemos $\prod_{i\in I} n(i)/\mathcal{U} = \{h/\mathcal{U} \mid h : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} n(i), h(i) \in n(i)\}$. Tomemos a S un conjunto de funciones representantes de los elementos de $\prod_{i\in I} n(i)/\mathcal{U}$, es decir para cualesquiera $r, s \in S$ distintas, tenemos que $r \nsim_{\mathcal{U}} s$, y para toda $h \in \prod_{i\in I} n(i)$ existe $s \in S$ de forma que $h \sim_{\mathcal{U}} s$.

Observemos que S es infinito, existen $i \in I$ que hacen a $n(i)$ arbitrariamente grande. Más aún, si $|S| = \kappa$ entonces $\kappa \leq |\prod_{i\in I} n(i)/\mathcal{U}| \leq |\prod_{i\in I} n(i)| \leq |\omega^\lambda| \leq \omega^\lambda \leq 2^\lambda$.

Habiendo planteado todo lo anterior, procedamos a definir un conjunto $Y \subseteq B$ y un tipo Γ sobre Y de forma que Γ no se realice en $\mathfrak{B}_Y$. Definamos las funciones $h_k^s : I \longrightarrow A$ para $k < p$ y $s \in S$ de forma que $h_k^s(i) = a_{k,s(i)}(n(i))$. Tomando $Y := \{h_k^s/\mathcal{U} \mid k < p, s \in S\}$, es claro que Y tiene cardinalidad menor o igual a κ, pues S es un conjunto de representantes. Sin pérdida de generalidad, enumeremos las constantes de $\operatorname{Cons}\rho(Y) = \{c_{k,s} \mid k < p, s \in S\}$ de forma que $c_{k,s}$ se interprete en $\mathfrak{B}$ como $h_k^s/\mathcal{U}$.

Finalmente, tomando la fórmula φ, definamos $\Gamma := \{\varphi(x; c_{0,s}, \ldots, c_{p-1,s}) \mid s \in S\}$, y probemos que es un tipo que no se realiza sobre $\mathfrak{B}_Y$. Mostremos que Γ es tipo. Tomemos $S_0 \in [S]^{<\omega}$ y veamos que $\mathfrak{B}_Y \models \exists x \bigwedge_{s \in S_0} \varphi(x; c_{0,s}, \ldots, c_{p-1,s})$. Definiendo $S_0(i) := \{s(i) \mid s \in S_0\}$, por el Teorema de Łoś basta probar que:

$$\left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{A} \models \exists x \bigwedge_{s \in S_0} \varphi(x; h_0^s(i), \ldots, h_{p-1}^s(i)) \right\} \in \mathcal{U} \qquad \text{es decir,}$$

$$\left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{A} \models \exists x \bigwedge_{m \in S_0(i)} \varphi(x;\, a_{0,m}(n(i)), \ldots, a_{p-1,m}(n(i))\,) \right\} \in \mathcal{U}$$

Para probar lo anterior, observemos que para cualquier $k \in \omega$, si $i \in I_k$, entonces $m(i) > k$ por la definición de I_m. De ésta manera sucede que $n(i) > k$, lo que muestra que:

$$\{i \in I \mid n(i) > k\} \supseteq I_m \in \mathcal{U} \tag{2}$$

Siendo así, podemos observar que $S_0 \subseteq n(i)$ para cada $i \in I$. Tomando en (2) $k = |S_0|$, concluimos que:

$$K_1 := \{i \in I \mid S_0(i) \subsetneq n(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Notemos que $\mathfrak{A} \models \exists x \bigwedge_{m \in S_0(i)} \varphi(x; a_{0,m}(n(i)), \ldots, a_{p-1,m}(n(i)))$, pues, por (1), para cada $i \in K_1$ sucede que $S_0 \supsetneq n(i)$.

Definiendo $g : I \longrightarrow A$ de forma que $g(i)$ sea el elemento que existe para $i \in K_1$ y un elemento arbitrario en otro caso, es evidente que:

$$\left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{A} \models \bigwedge_{m \in S_0(i)} \varphi(g(i);\, a_{0,m}(n(i)), \ldots, a_{p-1,m}(n(i))\,) \right\} \supseteq K_1 \in \mathcal{U},$$

y por lo tanto $\mathfrak{B}_Y \models \bigwedge_{s \in S_0} \varphi(g/\mathcal{U}; c_{0,s}, \ldots, c_{p-1,s})$.

Veamos ahora que Γ no se realiza en $\mathfrak{B}_Y$. Basta mostrar que para cualquier $g/\mathcal{U}$ hay un $s \in S$ de forma que $\mathfrak{B}_Y \not\models \varphi(g/\mathcal{U}; c_{0,s}, \ldots, c_{p-1,s})$. Para cualquier $i \in I$, por (1) sucede que $\mathfrak{A} \models \neg\exists x \bigwedge_{m < n(i)} \varphi(x; a_{0,m}(n(i)), \ldots, a_{p-1,m}(n(i)))$. Siendo así, debe de existir un $m < n(i)$ de forma que $\mathfrak{A} \not\models \varphi(g(i); a_{0,m}(n(i)), \ldots, a_{p-1,m}(n(i)))$.

Definiendo $r \in \prod_{i\in I} n(i)$ de forma que $r(i)$ sea exactamente este valor m, es claro que si $s \in S$ es tal que $s \sim_{\mathcal{U}} r$, tenemos que

$$\left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{A} \nvDash \varphi(g(i); a_{0,s(i)}(n(i)), \ldots, a_{p-1,s(i)}(n(i))) \right\} \supseteq \left\{ i \in I \,\middle|\, s(i) = r(i) \right\} \in \mathcal{U}.$$

Esto último implica que $\mathfrak{B}_Y \nvDash \varphi(g/\mathcal{U}; c_{0,s}, \ldots, c_{p-1,s})$, lo que concluye la prueba. QED

Finalmente, como consecuencia de 4.3.1, tenemos el siguiente resultado que establece una condición necesaria para la minimalidad en el orden de Keisler.

Teorema 4.3.7. *[Keisler, 1967] Si $\mathfrak{A}$ es $\trianglelefteq$-mínima, entonces carece de la propiedad de la cobertura finita.*

Demostración. Demostremos este hecho por contrapuesta. Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$ y supongamos que posee la propiedad de la cobertura finita, y además su soporte es de cardinalidad λ. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro regular sobre un conjunto I de cardinalidad λ. Por 4.3.6, tenemos que $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ no es $(2^\lambda)^+$-saturado. Por 4.3.1, $\mathfrak{A}$ no es $\trianglelefteq_{(2^\lambda)^+}$-minimal, y así $\mathfrak{A}$ no es $\trianglelefteq$-minimal. Esto último implica que $\mathfrak{A}$ no es $\trianglelefteq$-mínima. QED

4.4. $\trianglelefteq$-Maximalidad

Veamos ahora una condición suficiente para que una teoría sea máxima en el orden de Keisler. Para ello a continuación se desarrollará la noción de *fórmula versátil* y se probará que toda estructura que satisfaga una fórmula de este estilo tendrá la cualidad de ser máxima en el orden de Keisler.

Las fórmulas versátiles son de alto interés, pues ayudan a construir un 1-tipo en la ultrapotencia de una estructura $\mathfrak{A}$ a partir del mismo tipo en otra estructura $\mathfrak{B}$. Este puente nos es particularmente útil, ya que si tenemos que la ultrapotencia de la estructura $\mathfrak{A}$ es saturada, podremos construir un 1-tipo de ésta a partir de un 1-tipo de la ultrapotencia de la estructura $\mathfrak{B}$ y así tener un camino para probar su saturación de ésta. Comencemos definiendo la noción de un ideal débil.

Definición 4.4.1. Sea n un natural. Un *ideal débil* sobre n es un conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(n) \backslash \{\varnothing\}$ de forma que si $d \in \mathcal{D}$ y $s \subseteq d$ con $s \neq \varnothing$, entonces $s \in \mathcal{D}$.

Se les llama débiles pues, a pesar de tener la propiedad dual de cerradura bajo superconjuntos, carecen de la propiedad dual de cerradura bajo intersecciones finitas. Estos ideales son necesarios para la definición de *fórmula versátil* propuesta por Keisler en [Keisler, 1967], y que a continuación enunciamos.

Definición 4.4.2. Sea p un natural. Decimos que una fórmula $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^{p+1}$ es *versátil* en una estructura $\mathfrak{A}$ si para cualquier $n > 0$ y cualquier $\mathcal{D}$ ideal débil sobre n se cumple:

$$\mathfrak{A} \models \exists \bar{y}_0 \cdots \exists \bar{y}_{n-1} \left[\bigwedge_{d \in \mathcal{D}} \exists x \Big(\bigwedge_{m \in d} \varphi(x, \bar{y}_m) \Big) \wedge \bigwedge_{d \notin \mathcal{D}} \neg \exists x \Big(\bigwedge_{m \in d} \varphi(x, \bar{y}_m) \Big) \right],$$

donde $\bar{y}_m = (y_{0,m}, \ldots, y_{p-1,m})$ es una p-tupla de variables que ocurren en φ para $m < n$.

Una vez teniendo esto, podemos establecer una condición suficiente para ser máximo en el orden de Keisler.

Teorema 4.4.3. *[Keisler, 1967] Si $\mathfrak{A}$ satisface una fórmula versátil, entonces es $\trianglelefteq$-máximo.*

Demostración.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro λ-regular sobre un conjunto I. Observemos que para que $\mathfrak{A}$ sea máximo, tiene que suceder que si para cualquier $\mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ es λ^+-saturado, entonces $\mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$ es λ^+-saturado. Siendo así, supongamos que $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ es λ^+-saturado, tomemos $\mathfrak{B}$ una estructura cualquiera y mostremos que $\mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$ es λ^+-saturado.

Sea $Y \in [B^I/\mathcal{U}]^\lambda$ y consideremos a $\Gamma \in S_1(Y)$ un 1-tipo. Procedamos a demostrar que Γ se realiza en $\mathfrak{B}^I/\mathcal{U}_Y$. La idea será definir $X \in [A^I/\mathcal{U}]^{\leq \lambda}$ y construir un 1-tipo Σ sobre $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}_X$ a partir de Γ, de manera que la realización de uno dependa del otro. Dado que el ultraporducto de $\mathfrak{A}$ es saturado, tendremos que Σ se realiza en $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ y por tanto Γ lo hará en $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$.

Sea $\mathcal{F} = \{F_\mu \mid \mu < \lambda\} \subseteq \mathcal{U}$ una familia regularizadora. Es claro que $|\Gamma| \leq \lambda$ por lo que, podemos enumerar $\Gamma = \{\gamma_\mu(x; \bar{c}(i)) \mid \mu < \lambda\}$ e igual que en la prueba de 4.2.3 podemos definir los conjuntos:

$$\Gamma(i) = \{\gamma_\mu \in \Gamma \mid i \in f_\mu\} \text{ y el natural}$$
$$n(i) = |\Gamma(i)|.$$

Esto lo podemos hacer dado que $\Gamma(i)$ es finito para cualquier $i \in I$, ya que $\mathcal{F}$ es una familia regularizadora. Más aún, podemos escribir $\Gamma(i) = \{\gamma_0(x; \bar{c}), \ldots, \gamma_{n(i)-1}(x; \bar{c})\}$, y si fuera el caso de que $\sigma \in \Gamma(i)$, podemos definir el natural $m(\sigma, i) < n(i)$ de forma que $\gamma_{m(\sigma,i)} = \sigma$.

Para cada $i \in I$, definamos $\mathcal{D}(i) = \{d \subseteq n(i) \mid d \neq \varnothing \text{ y } \mathfrak{B}_{Y_i} \models \exists x \bigwedge_{m \in d} \gamma_m(x; \bar{c}(i))\}$, el cual es un ideal débil sobre $n(i)$. Por hipótesis, tenemos que existe una fórmula versátil $\varphi \in \mathscr{L}_\rho^{p+1}$ de forma que para toda $i \in I$

$$\mathfrak{A} \models \exists \bar{y}_0 \cdots \exists \bar{y}_{n(i)-1} \left[\bigwedge_{d \in \mathcal{D}(i)} \exists x \Big(\bigwedge_{m \in d} \varphi(x, \bar{y}_m) \Big) \wedge \bigwedge_{d \notin \mathcal{D}(i)} \neg \exists x \Big(\bigwedge_{m \in d} \varphi(x, \bar{y}_m) \Big) \right]. \tag{1}$$

Por lo tanto, existen elementos $a_{k,m}(i) \in A$ para $k < p$ y $m < n(i)$ de forma que $a_{0,m}(i), \ldots,$ $a_{p-1,m}(i)$ son testigos de la satisfacción de (1) en $(y_{0,m}, \ldots, y_{p-1,m}) = \bar{y}_m$.

Procedamos a definir $X \in [A^I/\mathcal{U}]^{\leq \lambda}$ conjunto sobre el cual se hará la expansión de $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$. Para cada $\gamma \in \Gamma$ y cada $k < p$, definamos la función $h_k^\gamma : I \longrightarrow A$ de forma que $h_k^\gamma(i) = a_{k,m}(i)$ con $m = m(\gamma, i)$ para el caso en que $\gamma \in \Gamma(i)$, y como un elemento arbitrario de A en otro caso. Definamos $X := \{h_k^\gamma/\mathcal{U} \mid \gamma \in \Gamma \text{ y } k < p\}$ el cual cumple que $|X| \leq |\Gamma \times p| \leq p \cdot \lambda \leq \lambda$.

Ahora bien, enumeremos las constantes expandidas en $\operatorname{Cons}\rho(X)$ como $c_{k,\gamma}$ con $k < p$ y $\gamma \in \Gamma$ de forma que cada $c_{k,\gamma}$ se interpreta como $h_k^\gamma/\mathcal{U}$ en $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$. Siendo así, escribamos φ_γ para la fórmula $\varphi(x; c_{0,\gamma}, \ldots, c_{p-1,\gamma})$. Definamos $\Sigma := \{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ y probemos que es un 1-tipo en $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ sobre X. Notemos que para toda $i \in I$ y para cualquier $d \subseteq n(i)$,

$$\text{si } \mathfrak{B}_{Y_i} \models \exists x \bigwedge_{m\in d} \gamma_m(x;\bar{c}(i)), \text{ entonces } d \in \mathcal{D}(i),$$

$$\text{entonces } \mathfrak{A} \models \exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi(x; a_{0,m}(i), \ldots, a_{p-1,m}(i)),$$

$$\text{entonces } \mathfrak{A} \models \exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi(x; h_0^{\gamma_m}(i), \ldots, h_{p-1}^{\gamma_m}(i)),$$

$$\text{entonces } \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi(x; c_{0,\gamma_m}(i), \ldots, c_{p-1,\gamma_m}(i)),$$

$$\text{entonces } \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi_{\gamma_m}$$

De forma muy semejante a la anterior, tomando $d \subseteq n(i)$

$$\text{si } \mathfrak{B}_{Y_i} \not\models \exists x \bigwedge_{m\in d} \gamma_m(x;\bar{c}(i)), \text{ entonces } d \notin \mathcal{D}(i),$$

$$\text{entonces } \mathfrak{A} \models \neg\exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi(x; a_{0,m}(i), \ldots, a_{p-1,m}(i)), \qquad \text{(Por 1)}$$

$$\text{entonces } \mathfrak{A} \models \neg\exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi(x; h_0^{\gamma_m}(i), \ldots, h_{p-1}^{\gamma_m}(i)),$$

$$\text{entonces } \mathfrak{A}_{X_i} \models \neg\exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi(x; c_{0,\gamma_m}(i), \ldots, c_{p-1,\gamma_m}(i)),$$

$$\text{entonces } \mathfrak{A}_{X_i} \not\models \exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi_{\gamma_m}$$

Conjuntando lo anterior para $d \subseteq n(i)$, hemos mostrado que:

$$\mathfrak{B}_{Y_i} \models \exists x \bigwedge_{m\in d} \gamma_m(x;\bar{c}(i)) \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \bigwedge_{m\in d} \varphi_{\gamma_m}. \tag{2}$$

Definamos así un 1-tipo en $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ como $\Sigma := \{\varphi_\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\}$ y procedamos a ver que cumple que cualquier subconjunto finito es satisfacible en $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$. Por la definición de Σ, esto se reduce a que para cualquier $\Gamma_0 \in [\Gamma]^{<\omega}$, el conjunto $\{\varphi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_0\}$ es satisfacible. Recordemos que para $\mu < \lambda$, si $i \in F_\mu$ entonces $\gamma_\mu \in \Gamma(i)$. Siendo así, para cualquier $\Gamma_0 \in [\Gamma]^{<\omega}$ se tiene que

$$\{i \in I \mid \Gamma_0 \subseteq \Gamma(i)\} \supseteq \bigcap \{F_\mu \mid \gamma_\mu \in \Gamma_0\} \in \mathcal{U}. \tag{3}$$

Esto último ocurre pues si $i \in \bigcap \{F_\mu \mid \gamma_\mu \in \Gamma_0\}$, entonces para cualquier $\gamma_\mu \in \Gamma_0$ se cumple que $i \in F_\mu$. Esto último implica a su vez que para cualquier $\gamma_\mu \in \Gamma_0$ se cumple $\gamma_\mu \in \Gamma(i)$, lo que verifica que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma(i)$.

Al Γ ser un 1-tipo, tenemos que cualquier subconjunto finito Γ_0 de fórmulas es satisfacible en $\mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$, lo que significa que:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}^I/\mathcal{U}_Y \models \exists x \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma(x;\bar{c}) \text{ si y sólo si } & \left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{B}_{Y_i} \models \exists x \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma(x;\bar{c}(i)) \right\} \in \mathcal{U}, \\
\text{si y sólo si } & \left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{B}_{Y_i} \models \exists x \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma(x;\bar{c}(i)) \text{ y } \Gamma_0 \subseteq \Gamma(i) \right\} \in \mathcal{U}, \quad \text{(Por 3)} \\
\text{si y sólo si } & \left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{A}_{X_i} \models \exists x \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \varphi_\gamma \right\} \in \mathcal{U}, \quad \text{(Por 2)} \\
\text{si y sólo si } & \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}_X \models \exists x \bigwedge_{\gamma \in \Gamma_0} \varphi_\gamma.
\end{aligned}$$

Debido a que $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ es λ-saturado se tiene que existe un elemento $g/\mathcal{U}$ que realiza a Σ. Esto significa que $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}_X \models \varphi_\gamma(g/\mathcal{U})$ para cualquier $\gamma \in \Gamma$. En otras palabras, para cualquier $\gamma \in \Gamma$ sucede que:

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi_\gamma(g(i))\} \in \mathcal{U}. \tag{4}$$

Por otro lado, si definimos $T(i) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \in \Gamma(i) \text{ y } \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi_\gamma(g(i))\}$, entonces todas las fórmulas de $T(i)$ son satisfacibles en $\mathfrak{B}_{Y_i}$ por (2) y, por tanto, tienen un testigo en común. Siendo así, definamos la función $h : I \longrightarrow A$ de forma que $h(i)$ es testigo de $\mathfrak{B}_{Y_i} \models \exists x \bigwedge_{\gamma \in T(i)} \gamma(x;\bar{c}(i))$ cuando $T(i) \neq \varnothing$, y como un elemento cualquiera de A en otro caso. Veamos que $h/\mathcal{U}$ realiza Γ en $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ sobre X. Sea $\gamma_\mu \in \Gamma$. Podemos observar que

$$\begin{aligned}
\left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{B}_{Y_i} \models \gamma_\mu(h(i);\bar{c}(i)) \right\} &\supseteq \left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi_{\gamma_\mu}(g(i)) \text{ y } \gamma_\mu \in \Gamma(i) \right\} && \text{(Por 2)} \\
&= \left\{ i \in I \,\middle|\, \mathfrak{A}_{X_i} \models \varphi_{\gamma_\mu}(g(i)) \right\} \cap F_\mu \in \mathcal{U}. && \text{(Por 4)}
\end{aligned}$$

Esto último equivale a que $\mathfrak{B}^I/\mathcal{U}_Y \models \gamma(h/\mathcal{U};\bar{c}(i))$, por tanto $\mathfrak{B}^I/\mathcal{U}$ es λ-saturado, lo que finaliza la prueba. QED

Bibliografía

Bejarano, D. Saturation by Ultrapowers and Keisler's Order. *http://math.uchicago.edu/ may/REU2017/REUPapers/Bejarano.pdf* (2017)

Bell, J.L. y Slomson, A.B. *Models and ultraproducts: An introduction.* Courier Corporation (2006)

Bochenski, I. A History of Formal Logic, trans. *Thomas, I. Notre Dame: Uni* (1961)

Chang, C.C. y Keisler, H.J. *Model theory*, tomo 73. Elsevier (1990)

Doets, K. *et al. Basic Model Theory.* Citeseer (1996)

Gannon, K. Introduction to the Keisler Order. *http://math.uchicago.edu/ may/REU2014/REUPapers/Gannon.pdf* (2014)

Hernández, F. *Teoría de conjuntos*, tomo 13. Instituto de Matemáticas UNAM (2014)

Jech, T. *Set theory. The third millennium edition.* Springer (2003)

Keisler, H.J. *Ultraproducts and elementary classes.* Tesis Doctoral, University of California, Berkeley (1961)

Keisler, H.J. Good ideals in fields of sets. *Journal of Symbolic Logic* **79**(2):332–333 (1964)

Keisler, H.J. Ultraproducts which are not saturated. *The Journal of Symbolic Logic* **32**(1):23–46 (1967)

Kojman, M. y Shelah, S. The universality spectrum of stable unsuperstable theories. *arXiv preprint math/9201253* (1992)

Kunen, K. Ultrafilters and Independent Sets. *Transactions of the American Mathematical Society* **172**:299–306 (1972)

Łoś, J. Quelques Remarques, Théorèmes et Problèmes Sur les Classes Définissables d' Algèbres. *Mathematical interpretation of formal systems* pág. 98 (1955)

Malliaris, M. Realization of φ-types and Keisler's order. *Annals of Pure and Applied Logic* **157**(2-3):220–224 (2009)

Malliaris, M. y Shelah, S. General Topology Meets Model Theory, on P and T. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **110**(33):13300–13305 (2013)

Malliaris, M. y Shelah, S. Keisler's order has infinitely many classes. *Israel Journal of Mathematics* **224**(1):189–230 (2018)

Moore, J.T. Model Theory and the cardinal numbers P and T. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **110**(33):13300–13305 (2013)

Morley, M. Categoricity in power. *Transactions of the American Mathematical Society* **114**(2):514–538 (1965)

Shelah, S. Saturation of ultrapowers and Keisler's order. *Annals of Mathematical Logic* **4**(1):75–114 (1972)

Shelah, S. *Classification theory: and the number of non-isomorphic models*, tomo 92. Elsevier (1990)