



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

ESTRUCTURAS SIMPLÉCTICAS EN EL ESPACIO
FASE DE LA GTD

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
LUIS FERNANDO ARAGÓN MUÑOZ

TUTOR PRINCIPAL: DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
ICN, UNAM

ASESOR: DR. CHRYSOMALIS CHRYSOMALAKOS
ICN, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. MX, AGOSTO DE 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

Resumen	I
Notación	II
I Geometría simpléctica	1
1 Espacios vectoriales simplécticos	2
1.1 Complemento simpléctico	5
1.2 Transformaciones lineales simplécticas	9
2 Variedades simplécticas	10
2.1 El haz cotangente como variedad simpléctica	14
3 Simplectomorfismos y campos hamiltonianos	16
4 Subvariedades lagrangianas	22
II Geometría de contacto	28
5 Aspectos básicos	29
5.1 Distribuciones máximamente no integrables	30
6 Contactomorfismos	32
7 Subvariedades legendrianas	39
8 Hipervariedades simplécticas en variedades de contacto	40
9 Contactificación	42
III Geometrotermodinámica	48
10 Aspectos básicos de la termodinámica	49
10.1 Transformadas de Legendre y potenciales termodinámicos	52
10.2 El espacio fase y la estructura de contacto termodinámica	54
10.3 Geometrotermodinámica	58
10.4 Principio variacional de la GTD	61
11 Espacio fase termodinámico y contactificación	62
11.1 Ejemplo 1: el gas ideal	68
11.2 Ejemplo 2: la banda elástica	70
11.3 Ejemplo 3: radiación electromagnética	71
Conclusiones	73

Índice de Figuras

1	Diagrama de un haz cotangente $T^*\mathcal{M}$	10
2	Gráfica de una 1-forma sobre \mathcal{M}	11
3	Diagrama del pushforward π_* en un haz cotangente $T^*\mathcal{M}$	15
4	Diagrama $\pi' \circ \tilde{f} = f \circ \pi$	19
5	Diagrama para definir $\mu = \iota \circ (\pi \circ \iota)^{-1}$	24
6	Diagrama $\pi_C \circ \Phi_F = \pi_C$	45
7	Definición de f_ψ	46
8	Gas (en gris) encerrado en un cilindro (blanco) con un pistón (negro) como tapa.	49
9	Curvas $\gamma(t)$ (11.22) proyectadas en el plano $U - V$ para $C_V = 3/2$	69
10	Curvas $\gamma(t)$ (11.27) proyectadas en el plano $U - L$ para $c = 2$ y $b = 1$	71

Resumen

La formalización de la termodinámica en equilibrio, es decir, de todas las herramientas matemáticas con las que explicamos, reproducimos y predecimos tanto a los sistemas termodinámicos como a sus procesos cuasiestáticos, se da a través de la geometría de contacto [3, 6, 12]. En particular, la introducción de una variedad de contacto, el espacio fase termodinámico, en donde se encuentra encajado el espacio de equilibrio del sistema termodinámico, permite entender las distintas representaciones termodinámicas (entrópica, energética, entálpica, etc.) como expresiones de la misma teoría termodinámica en distintas coordenadas. En particular, la forma diferencial de la primera ley de la termodinámica aparece naturalmente al pedir que el espacio de equilibrio sea una subvariedad del espacio fase termodinámico, donde su estructura de contacto se anule (subvariedad legendriana) [6, 12].

Utilizando como base este marco geométrico, desde el 2007 se ha venido desarrollando la llamada *geometrotermodinámica* (abreviada como GTD) [30, 35, 38] que, como propuesta formal, introduce de manera natural una métrica sobre el espacio de equilibrio. Métrica que sigue los pasos de las llamadas métricas hessianas utilizadas desde 1975 [5, 7, 15], pero que tiene la virtud de ser invariante ante los cambios de representación del sistema. Entre los aciertos de la GTD, que motivan a pensar en ella como una probable teoría completa de la termodinámica, está la identificación en algunos sistemas del concepto de interacción termodinámica con el de curvatura, y el de singularidades con transiciones de fase [45, 37, 36, 39].

Una propuesta que hace la GTD es la de introducir un principio variacional a partir del cual se puedan deducir las ecuaciones de estado de los sistemas termodinámicos [38]. Dicho principio, a pesar de haber encontrado ecuaciones de estado para el universo en el ámbito de los modelos cosmológicos [40], en general es bastante complicado de aplicar, computacionalmente hablando, y ha ofrecido pocas soluciones generales hasta el momento.

La presente investigación pretende encontrar un método alternativo para determinar ecuaciones de estado, que sea compatible con la GTD, y en esta tesis se dan los primeros pasos para ello, tomando como lugar de trabajo el haz cotangente del espacio de equilibrio termodinámico. Esto implica pasar de una descripción geométrica basada en una estructura de contacto a una descripción geométrica basada en una estructura simpléctica. Para esto se introduce el concepto de la contactificación de una variedad simpléctica exacta [20, 33].

Trabajando en el haz cotangente del espacio de equilibrio, se encuentra que un sistema termodinámico puede describirse como una subvariedad especial en donde se anula la estructura simpléctica (subvariedad lagrangiana), y donde la ecuación fundamental puede obtenerse resolviendo una ecuación que recuerda a la ecuación de Hamilton-Jacobi, construida a partir de una función del tipo hamiltoniana. Al respecto, uno de los principales resultados de este trabajo es que abre la posibilidad de asociar, a ciertos sistemas termodinámicos, un sistema hamiltoniano, tal como se entiende en [8, 29].

Notación y estructura de la tesis

A lo largo de la tesis aparecen conceptos de geometría que se introducen sin antes definirlos apropiadamente. Esto es así porque dichos conceptos son considerados básicos para el tema de esta investigación y conocidos en buena medida por los interesados en la geometría diferencial. Referencias al respecto son numerosas, abarcando distintos grados de abstracción. Las utilizadas por mi parte son, principalmente, [22, 21] (conceptos más específicos son debidamente citados en el texto).

Entre los conceptos considerados básicos, se encuentra el de variedad diferencial, representadas a lo largo del texto por medio de letras del alfabeto latino con estilo caligráfico “Lucida New Math” (\mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{M} , etc.), campos vectoriales (en letras latinas mayúsculas) y formas diferenciales (en letras griegas minúsculas), así como las aplicaciones pushforward y pullback asociadas a cada mapeo diferenciable (representados por letras latinas y griegas, tanto mayúsculas como minúsculas, con distintas fuentes, pero siempre bien definidas para evitar cualquier confusión), denotadas por el uso de un asterisco $*$ como subíndice y superíndice, respectivamente.

Otros conceptos empleados son el de operadores sobre formas diferenciales (como la derivada exterior d , la derivada interior i y la derivada de Lie \mathcal{L}) y campos vectoriales (como el corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$), así como las operaciones del producto exterior (\wedge) y del producto tensorial (\otimes), y los conjuntos $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{A})$ y $\Lambda^p(\mathcal{A})$, denotando, respectivamente, a todos los mapeos suaves de la variedad \mathcal{A} a \mathbb{R} y a todas las p -formas sobre la variedad \mathcal{A} .

En cuanto a la estructura de esta tesis, en las primeras dos partes se presentan elementos de la geometría simpléctica y de contacto que se utilizarán para plantear la estructura hamiltoniana en la GTD, durante la tercera parte, que es donde se obtienen los resultados de esta tesis.

Parte I

Geometría simpléctica

1 Espacios vectoriales simplécticos

Sea $(\mathbf{V}, \mathbb{R}, +)$ un espacio vectorial, de dimensión finita $\dim \mathbf{V} \equiv n$, con campo \mathbb{R} y operación de suma representada por $+$. Sea $\Omega : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo bilineal y antisimétrico,

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \quad \Omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= -\Omega(\mathbf{w}, \mathbf{v}). \\ \Omega(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{u}) &= a\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + b\Omega(\mathbf{w}, \mathbf{u}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Para cada mapeo (1.1) existe una base particular, que llamaremos su **base canónica** [29], en la cual adopta la siguiente forma estándar en su representación matricial¹:

$$\Omega \simeq \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k \times k} & \mathbf{0}_{k \times m} & \mathbf{0}_{k \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times k} & \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{I}_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times k} & -\mathbf{I}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad (k \equiv n - 2m) \tag{1.2}$$

donde $\mathbf{0}_{f \times c}$ representa la matriz cero (cuyas entradas son todas ellas $0 \in \mathbb{R}$) de f filas por c columnas, así como $\mathbf{I}_{q \times q}$ representa la identidad $q \times q$.

Proposición 1. *Para todo mapeo bilineal y antisimétrico (1.1), existe una base vectorial $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ en \mathbf{V} , en general no única, tal que*

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \Omega(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) = \Omega(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) = 0. \\ \Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) &= \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $i, j = 1, 2, \dots, m$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker².

La demostración por inducción de la proposición anterior es una versión del método de Gram-Schmidt, y es desarrollada completamente en [29]. ■

Con respecto a la nulidad del mapeo bilineal y antisimétrico en \mathbf{V} , $k = \dim \ker \Omega$, es bastante claro que no depende de la base escogida para trabajar sobre \mathbf{V} , por lo que es un invariante de la estructura (\mathbf{V}, Ω) , lo mismo que el llamado **rango de Ω** [29]:

$$2m = n - k. \tag{1.4}$$

¹Cuando, elegida una base vectorial $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de \mathbf{V} , asociamos cada elemento con una matriz columna de $1 \times n$ linealmente independiente, y cada mapeo bilineal con una matriz cuadrada de entradas reales $\Omega_{ij} \equiv \Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

² $\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1. & i = j \\ 0. & i \neq j \end{cases}$.

Ahora, en un espacio vectorial \mathbf{V} , cualquier mapeo bilineal de la forma $G : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ nos define una manera de relacionar, geoméricamente, los elementos de dicho espacio vectorial con los elementos de su espacio dual \mathbf{V}^* , llamado el **mapeo bemol** asociado a G^3 :

$$G_b : \mathbf{v} \in \mathbf{V} \mapsto G_b(\mathbf{v}) \equiv G(\mathbf{v}, \bullet) \in \mathbf{V}^*. \quad (1.5)$$

En otras palabras, $G_b(\mathbf{v})$ se define como el covector que actúa sobre cualquier vector \mathbf{w} evaluando el par (\mathbf{v}, \mathbf{w}) en el mapeo G ,

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}, \quad (G_b(\mathbf{v}))(\mathbf{w}) \equiv G(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Proposición 2. *El mapeo bemol asociado a un mapeo bilineal G sobre un espacio vectorial \mathbf{V} es un isomorfismo natural al espacio dual \mathbf{V}^* si, y sólo si, G es no degenerado.*

A lo que nos referimos con **isomorfismo natural** es que G_b identifica cada vector en \mathbf{V} con uno (y sólo uno) de los covectores en \mathbf{V}^* , haciéndolo de manera geométrica⁴. Ahora, el hecho de que G sea no degenerado,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad G(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = 0 \quad \implies \quad \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (1.6)$$

equivale a pedir que el kernel del mapeo bemol sea $\{\mathbf{0}\}$. En efecto, por definición $\ker G_b$ es el conjunto de todos los vectores tales que al evaluarse en G_b nos arrojan el covector cero:

$$\ker G_b \equiv \{\mathbf{z} \in \mathbf{V} : \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (G_b(\mathbf{z}))(\mathbf{v}) = 0\},$$

pero la evaluación $(G_b(\mathbf{z}))(\mathbf{v})$ no es otra cosa más que la evaluación $G(\mathbf{z}, \mathbf{v})$, por lo tanto si $\mathbf{z} \in \ker G_b$, entonces se trata del único vector que al evaluarse con cualquier otro vector en G nos arroja el escalar cero: $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ y $\ker G_b = \{\mathbf{0}\}$. Si ahora utilizamos el teorema de rango-nulidad [16] aplicado a G_b , nos daremos cuenta que su imagen es un subespacio de \mathbf{V}^* con dimensión $\dim \mathbf{V}$,

$$\dim(\text{Im } G_b) = \dim \mathbf{V} - \dim(\ker G_b) = \dim \mathbf{V},$$

³En el caso particular en que G es una métrica, el mapeo G_b es conocido como *mapeo plano (flat mapping)* o *mapeo de descenso (lowering map)*, y, aunque menos popular, aplicación bemol [21]. Inspirado en este último nombre es que llamamos a G_b , para G arbitrario, mapeo bemol.

⁴Sin necesidad de emplear una base vectorial para definir una base covectorial y así relacionar vectores y covectores, con el problema consecuente de que la asociación unívoca se rompe al cambiar a otra base vectorial.

pero como todo espacio vectorial tiene la misma dimensión que su dual y todo subespacio de dimensión máxima es un subespacio propio [21], entonces $\text{Im } G_b = \mathbf{V}^*$, demostrando de esta manera que G_b es un isomorfismo natural siempre que G sea no degenerado.

Conversamente, si G_b es un isomorfismo natural, entonces $\ker G_b = \{\mathbf{0}\}$, que, como hemos visto, resulta equivalente a la propiedad de no degeneración de G (1.6). ■

En particular si el mapeo bilineal⁵ Ω es antisimétrico y su mapeo bemol Ω_b resulta ser un isomorfismo natural, se dice que se trata de un **mapeo simpléctico**, y el par (\mathbf{V}, Ω) se conoce como un **espacio vectorial con estructura simpléctica**, o simplemente un espacio vectorial simpléctico [29].

Gracias a los resultados arrojados en la proposición 2 podemos dar una definición alternativa de qué es un mapeo simpléctico, como un mapeo bilineal, antisimétrico y no degenerado, así como obtener varias propiedades interesantes en los espacios vectoriales simplécticos.

Proposición 3. *En un espacio vectorial simpléctico (\mathbf{V}, Ω) se cumple:*

- i. Ω es no degenerado.*
- ii. La dimensión de \mathbf{V} es par, $\dim \mathbf{V} = 2m$.*
- iii. Existe una base canónica $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ donde Ω tiene la representación matricial*

$$\Omega \simeq \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{I}_{m \times m} \\ -\mathbf{I}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

(i) Directamente de la proposición 2 se sigue que, siendo Ω_b un isomorfismo natural, entonces Ω es no degenerado. (ii) Siendo Ω no degenerado, su rango (1.4) coincide con la dimensión del espacio vectorial \mathbf{V} , lo que quiere decir que **la dimensión de todo espacio vectorial simpléctico es par**⁶. (iii) Finalmente, al tomar en cuenta la proposición 1, como $k = 0$, la base canónica de la que ahí se habla se reduce a la base canónica $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ donde (1.2) se reduce a (1.7). ■

Como ejemplo prototípico de espacio vectorial simpléctico tenemos a $(\mathbb{R}^{2m}, \Omega_0)$ con Ω_0 tal que su base canónica es la base estándar formada por los vectores \mathbf{u}_i que tienen un único 1 en la i -ésima posición de la terna de números, siendo todos los demás cero, $\mathbf{u}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, es decir,

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{u}_{n+i}. \quad (1.8)$$

⁵De ahora en adelante limitaremos el uso de Ω para referirnos sólo a mapeos simplécticos: bilineales, antisimétricos y no degenerados

⁶Otra forma de percatarse de esto es tomar en cuenta que no puede existir un mapeo bilineal y antisimétrico no degenerado en un espacio vectorial de dimensión impar $2m + 1$, al igual que no puede existir una matriz cuadrada antisimétrica y no degenerada en \mathbb{R}^{2m+1} [16]: $\det \Omega = \det \Omega^T = \det (-\Omega) = (-1)^{2m+1} \det \Omega = -\det \Omega \rightarrow \det \Omega = 0$.

1.1 Complemento simpléctico

Sea (\mathbf{V}, Ω) un espacio vectorial simpléctico, definimos el **complemento simpléctico** del subespacio $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ como el conjunto \mathbf{W}^Ω formado por todos los vectores en \mathbf{V} que, evaluados junto a cualquier vector de \mathbf{W} en el mapeo simpléctico Ω dan como resultado el cero [29]:

$$\mathbf{W}^\Omega = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \quad \Omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0\}. \quad (1.9)$$

Por supuesto, como era de esperarse, para cualquier subespacio vectorial \mathbf{W} de \mathbf{V} , su complemento simpléctico también es un subespacio vectorial de \mathbf{V} .

Proposición 4. *El complemento simpléctico de cualquier subespacio en un espacio simpléctico, es un subespacio de dicho espacio simpléctico.*

En efecto, dada la bilinealidad de Ω en el espacio simpléctico (\mathbf{V}, Ω) , resulta trivial mostrar que la adición de elementos del complemento, así como su multiplicación por escalares reales, da como resultado otro elemento del complemento,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}^\Omega, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$$

$$\Omega(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \Omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = 0 + 0 = 0 \quad \implies \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}^\Omega.$$

$$\Omega(\alpha \mathbf{v}_1, \mathbf{w}) = \alpha \Omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) = \alpha (0) = 0 \quad \implies \quad \alpha \mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}^\Omega.$$

Por otra parte, como $\Omega(\mathbf{0}, \bullet)$ siempre es el covector cero, tenemos que $\mathbf{0} \in \mathbf{W}^\Omega$, completando con esto la demostración. ■

También es fácil darse cuenta que la dimensión del complemento simpléctico de cualquier subespacio es complementaria, en \mathbf{V} , a la dimensión del subespacio en cuestión.

Proposición 5. *Para todo $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ se satisface la relación*

$$\dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\Omega = \dim \mathbf{V}. \quad (1.10)$$

Para demostrar esta proposición resulta conveniente considerar el mapeo dado por la restricción de Ω , (1.5) a \mathbf{W} , que identificamos como

$$\Omega|_{\mathbf{W}} : \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \longmapsto \quad \Omega(\mathbf{v}, \bullet)|_{\mathbf{W}} \in \mathbf{W}^*. \quad (1.11)$$

En particular hemos elegido este mapeo porque su kernel no es otra cosa más que el complemento simpléctico \mathbf{W}^Ω , es decir, el subespacio de todos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ tales que $\Omega(\mathbf{v}, \bullet)|_{\mathbf{W}} = \mathbf{0} \in \mathbf{W}^*$. Si tomamos en cuenta además que (1.11) es una transformación lineal entre los subespacios vectoriales \mathbf{V} y \mathbf{W}^* , donde \mathbf{W}^* tiene la misma dimensión que \mathbf{W} , el teorema de rango-nulidad nos arroja precisamente la identidad (1.10):

$$\dim \mathbf{V} = \dim (\ker \Omega_b|_{\mathbf{W}}) + \dim (\text{Im } \Omega_b|_{\mathbf{W}}) = \dim (\mathbf{W}^\Omega) + \dim \mathbf{W}. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de esta última proposición, se puede demostrar también la identidad $(\mathbf{W}^\Omega)^\Omega = \mathbf{W}$.

Proposición 6. *El complemento ortogonal del complemento ortogonal de cualquier subespacio $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ es \mathbf{W} mismo.*

Sea \mathbf{z} un vector en \mathbf{W} y sea \mathbf{v} cualquier vector en \mathbf{W}^Ω , entonces se cumple⁷ $\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = 0$, y por lo tanto $\mathbf{W} \subset (\mathbf{W}^\Omega)^\Omega$. Por otra parte, siendo \mathbf{W}^Ω en si mismo un subespacio vectorial de \mathbf{V} , satisface junto a su complemento simpléctico la relación (1.10),

$$\dim \mathbf{W}^\Omega + \dim (\mathbf{W}^\Omega)^\Omega = \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\Omega,$$

de donde deducimos que $\dim \mathbf{W} = \dim (\mathbf{W}^\Omega)^\Omega$, y por lo tanto la inclusión $\mathbf{W} \subset (\mathbf{W}^\Omega)^\Omega$ que habíamos encontrado anteriormente puede convertirse en la igualdad buscada: $\mathbf{W} = (\mathbf{W}^\Omega)^\Omega$. \blacksquare

Una característica interesante del complemento simpléctico es que, a diferencia del complemento ortogonal generado a partir de una métrica⁸, los complementos no tienen por qué ser transversales [29], es decir, su intersección no tiene por qué constar únicamente del vector cero. De hecho, cuando esto pasa, se da un caso muy particular donde el complemento simpléctico es a su vez un espacio simpléctico al limitar Ω .

Proposición 7. *Una condición necesaria y suficiente para que un subespacio $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ sea simpléctico bajo la restricción del mapeo simpléctico de \mathbf{V} a \mathbf{W} , es decir, que $\Omega|_{\mathbf{W}}$ no sea degenerado, es que se cumpla $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\Omega = \{\mathbf{0}\}$.*

Comencemos considerando a $(\mathbf{W}, \Omega|_{\mathbf{W}})$ como un espacio simpléctico, es decir, $\Omega|_{\mathbf{W}} \neq 0$. Sea ahora \mathbf{z} un vector cualquiera en la intersección $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\Omega$, es decir, \mathbf{z} es un vector tanto en \mathbf{W} como en su complemento simpléctico. Por estar en el complemento simpléctico tenemos

$$\mathbf{z} \in \mathbf{W}^\Omega \quad \implies \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}, \quad \Omega(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = 0,$$

⁷Pues precisamente $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^\Omega$ significa que para cualquier vector en \mathbf{W} , como \mathbf{z} , se tiene $\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = -\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = 0$.

⁸Sea $G : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ un mapeo bilineal, simétrico y no degenerado, decimos que el complemento ortogonal de $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ es $\mathbf{W}^\perp \equiv \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \quad G(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0\}$.

mientras que el hecho de que esté en \mathbf{W} nos indica que \mathbf{z} debe ser necesariamente el vector cero:

$$\mathbf{z} \in \mathbf{W}, \quad \Omega(\mathbf{z}, \bullet)|_{\mathbf{W}} = \mathbf{0} \quad \implies \quad \mathbf{z} = \mathbf{0},$$

siendo por lo tanto la intersección $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\Omega = \{\mathbf{0}\}$ siempre que $\Omega|_{\mathbf{W}} \neq 0$. Conversamente, si la intersección sólo incluye al vector cero no puedo existir elemento en \mathbf{W} que juegue el papel de vector degenerado de $\Omega|_{\mathbf{W}}$, cumpliéndose la equivalencia

$$(\mathbf{W}, \Omega|_{\mathbf{W}}) \text{ es simpléctico} \quad \iff \quad \mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\Omega = \{\mathbf{0}\}.$$

■

Como consecuencia de este resultado es fácil ver que, si $(\mathbf{W}, \Omega|_{\mathbf{W}})$ es un subespacio simpléctico, entonces $(\mathbf{W}^\Omega, \Omega|_{\mathbf{W}^\Omega})$ también lo es. En efecto, como la intersección de \mathbf{W}^Ω con su complemento simpléctico es

$$\mathbf{W}^\Omega \cap (\mathbf{W}^\Omega)^\Omega = \mathbf{W}^\Omega \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\},$$

pues $(\mathbf{W}, \Omega|_{\mathbf{W}})$ es un subespacio simpléctico, entonces $(\mathbf{W}^\Omega, \Omega|_{\mathbf{W}^\Omega})$ tiene que serlo también. Además, por la forma en que se construye \mathbf{W}^Ω , en este caso es fácil ver que este par de subespacios forman una partición **ortogonalmente simpléctica** del espacio simpléctico completo \mathbf{V} ,

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^\Omega. \tag{1.12}$$

Por otra parte, si el subespacio en cuestión no es simpléctico puede ser **isotrópico** cuando $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}^\Omega$ ($\Omega|_{\mathbf{W}} = 0$) y **coisotrópico** cuando $\mathbf{W}^\Omega \subset \mathbf{W}$ [29]. Analicemos un par de propiedades de estos dos tipos de subespacios.

Proposición 8. *La dimensión de todo subespacio isotrópico de \mathbf{V} es siempre menor o igual que $(\dim \mathbf{V})/2$.*

Supongamos por el contrario que la dimensión de \mathbf{W} isotrópico es mayor que $(\dim \mathbf{V})/2$. Por la relación (1.10) vemos entonces que la dimensión de su complemento simpléctico es, por el contrario, menor que $\dim \mathbf{V}/2$, lo cual es una clara contradicción si tenemos en cuenta que $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}^\Omega$, pues ningún subespacio vectorial puede tener dimensión mayor al espacio vectorial en el que está contenido [16], demostrando con esto que

$$\dim \mathbf{W} \leq \frac{\dim \mathbf{V}}{2}. \quad (\mathbf{W} \text{ isotrópico}) \tag{1.13}$$

■

Proposición 9. *Todo subespacio $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ de codimensión 1, es decir, tal que $\dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{V} - 1 = 2n - 1$, es un subespacio coisotrópico.*

Supongamos por el contrario que, siendo \mathbf{W} un subespacio de codimensión 1, tenemos $\mathbf{W}^\Omega \not\subset \mathbf{W}$, es decir, hay vectores en \mathbf{W}^Ω que no se encuentran en \mathbf{W} . De la relación (1.10) sabemos que en este caso $\dim \mathbf{W}^\Omega = 1$, de tal manera que para fines prácticos podemos hablar de que el único elemento de la base de \mathbf{W}^Ω no se encuentra en \mathbf{W} , por lo tanto se tiene sólo al vector cero en su intersección: $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\Omega = \{\mathbf{0}\}$, pero por el resultado de la proposición (7) esto significa que $(\mathbf{W}, \Omega|_{\mathbf{W}})$ es un espacio simpléctico, cosa que no puede ser cierta porque el mapeo $\Omega|_{\mathbf{W}}$ no puede ser no degenerado al vivir en un subespacio de dimensión impar, como ya lo vimos anteriormente. Por lo tanto, en vista de la contradicción que se obtiene al suponer $\mathbf{W}^\Omega \not\subset \mathbf{W}$, llegamos a la conclusión esperada:

$$\forall \mathbf{W} \subset \mathbf{V}, \quad \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{V} - 1, \quad \implies \quad \mathbf{W}^\Omega \subset \mathbf{W}. \quad (1.14)$$

■

Finalmente, analicemos una clase muy especial de subespacio llamado **subespacio lagrangiano**, que se trata de un subespacio caracterizado por ser idéntico a su complemento simpléctico: $\mathbf{W} = \mathbf{W}^\Omega$. Como consecuencia de esta propiedad, existen otras caracterizaciones equivalentes de los subespacios lagrangianos, que veremos en la siguiente proposición.

Proposición 10. *Sea $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$, entonces las siguientes aseveraciones son equivalentes.*

- (i) \mathbf{W} es lagrangiano.
- (ii) La dimensión de \mathbf{W} es exactamente $(\dim \mathbf{V})/2$.
- (iii) \mathbf{W} es isotrópico y coisotrópico a la vez.

Si $\mathbf{W} = \mathbf{W}^\Omega$, por tratarse de un subespacio lagrangiano, el hecho de que todo subespacio y su complemento simpléctico tengan dimensiones complementarias en \mathbf{V} (1.10) nos arroja la implicación de (i) a (ii),

$$\dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\Omega = 2 \dim \mathbf{W} = \dim \mathbf{V} \quad \implies \quad \dim \mathbf{W} = \frac{1}{2} \dim \mathbf{V}.$$

Por otra parte, si suponemos (ii) pero al mismo tiempo pensamos que $\mathbf{W} \not\subset \mathbf{W}^\Omega$, es decir, que \mathbf{W} no es isotrópico, entonces debe existir cuando menos un elemento de la base de \mathbf{W} que no se encuentre en la base de \mathbf{W}^Ω , por lo tanto debe tenerse $\dim \mathbf{W}^\Omega < \dim \mathbf{W} = (\dim \mathbf{V})/2$, pero entonces las dimensiones de \mathbf{W} y \mathbf{W}^Ω no son complementarias, llegando a una contradicción que nos indica que \mathbf{W} debe ser isotrópico ($\mathbf{W} \subset \mathbf{W}^\Omega$) cuando su dimensión es exactamente la mitad de la dimensión de \mathbf{V} . Bajo el mismo argumento probamos que suponiendo (ii) forzosamente tenemos $\mathbf{W}^\Omega \subset \mathbf{W}$ coisotrópico, demostrando la relación de (ii) a (iii):

$$\dim \mathbf{W} = \frac{1}{2} \dim \mathbf{V} \quad \implies \quad \mathbf{W} \text{ isotrópico y coisotrópico.}$$

Finalmente, para terminar de demostrar la secuencia de equivalencias, basta mostrar la relación (iii) a (i), la cual resulta trivial tomando en cuenta que una doble inclusión, como la que ocurre con un subespacio y su complemento simpléctico cuando dicho subespacio es isotrópico y coisotrópico a la vez, $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}^\Omega$ y $\mathbf{W}^\Omega \subset \mathbf{W}$, no es más que la igualdad de conjuntos, $\mathbf{W} = \mathbf{W}^\Omega$, que en este caso nos indica que \mathbf{W} es lagrangiano. ■

1.2 Transformaciones lineales simplécticas

Una transformación lineal $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ entre dos espacios vectoriales simplécticos, (\mathbf{V}, Ω) y (\mathbf{V}', Ω') , se dice **simpléctica** si satisface la condición [29]

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \quad \Omega'(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.15)$$

Proposición 11. *Toda transformación lineal $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ que satisfaga (1.15) es un mapeo inyectivo.*

En efecto, si $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbf{V}'$, sólo tenemos que evaluar el par $(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}))$ en Ω' y tomar en cuenta que, para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$, el resultado será cero, lo que significa que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (porque Ω es no degenerada):

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \quad 0 = \Omega'(\mathbf{0}, \varphi(\mathbf{y})) = \Omega'(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

es decir, si $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, por lo tanto $\ker \varphi = \{\mathbf{0}\}$ y la transformación simpléctica es un mapeo inyectivo [16]. ■

En particular si los espacios vectoriales simplécticos tienen la misma dimensión, entonces el mapeo simpléctico es además subyectivo y por lo tanto una biyección⁹. Se dice entonces que los espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión que están relacionados mediante una transformación lineal simpléctica son **simplectomórficos** [29].

Proposición 12. *La relación (\mathbf{V}, Ω) es simplectomórfico a (\mathbf{V}', Ω') es una relación de equivalencia entre espacios vectoriales de dimensión par, $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}'$.*

En efecto, la identidad en cualquier espacio vectorial es trivialmente un mapeo simpléctico, así que todo espacio simpléctico es simplectomórfico a sí mismo (propiedad reflexiva). En cuanto a la propiedad de simetría sabemos que si $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}'$ vía la biyección φ , entonces φ^{-1} es un mapeo que satisface

$$\forall \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbf{V}', \varphi^{-1}(\mathbf{x}'), \varphi^{-1}(\mathbf{y}') \in \mathbf{V},$$

$$\Omega(\varphi^{-1}(\mathbf{x}'), \varphi^{-1}(\mathbf{y}')) = \Omega'(\varphi(\varphi^{-1}(\mathbf{x}')), \varphi(\varphi^{-1}(\mathbf{y}'))) = \Omega'(\mathbf{x}', \mathbf{y}'),$$

⁹Por el teorema de rango-nullidad, tenemos que la imagen de φ es un subespacio de \mathbf{V}' con dimensión $\dim(\text{Im}\varphi) = \dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{V}'$, es decir, $\text{Im} \varphi = \mathbf{V}'$.

siendo por lo tanto φ^{-1} un mapeo simpléctico de (\mathbf{V}', Ω') a (\mathbf{V}, Ω) , $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{V}$. Finalmente la identidad transitiva se obtiene tomando en cuenta que, si $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}'$ por medio de φ y $\mathbf{V}' \simeq \mathbf{V}''$ con φ' , entonces $\varphi' \circ \varphi$ establece $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}''$:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y}) \in \mathbf{V}'$$

$$\Omega''(\varphi' \circ \varphi(\mathbf{x}), \varphi' \circ \varphi(\mathbf{y})) = \Omega'(\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})) = \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

■

2 Variedades simplécticas

Consideremos ahora una variedad suave \mathcal{M} de dimensión $\dim \mathcal{M} \equiv n$. Sea $T^*\mathcal{M}$ su haz cotangente, es decir, un haz fibrado vectorial sobre \mathcal{M} , con proyección natural π :

$$\pi : T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \tag{2.1}$$

tal que la fibra sobre el punto $x \in \mathcal{M}$ es isomorfa al espacio cotangente a dicha variedad en dicho punto [22]:

$$\pi^{-1}(x) \sim T_x^*\mathcal{M}. \tag{2.2}$$

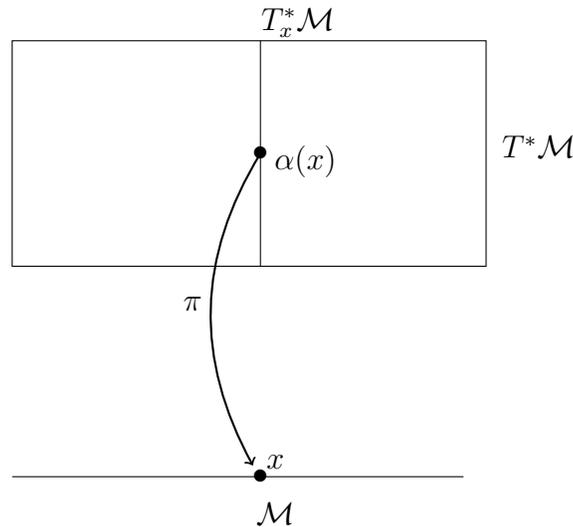


Figura 1: Diagrama de un haz cotangente $T^*\mathcal{M}$.

Las 1-formas sobre \mathcal{M} , $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{M})$, se definen entonces en $T^*\mathcal{M}$ como secciones transversales que, para cada punto $x \in \mathcal{M}$ arrojan un covector sobre el espacio tangente de vectores a \mathcal{M} [22],

$$\alpha : \mathcal{M} \rightarrow T^*\mathcal{M}, \quad \alpha(x) : T_x\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\pi \circ \alpha = \text{Id} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}). \quad (2.3)$$

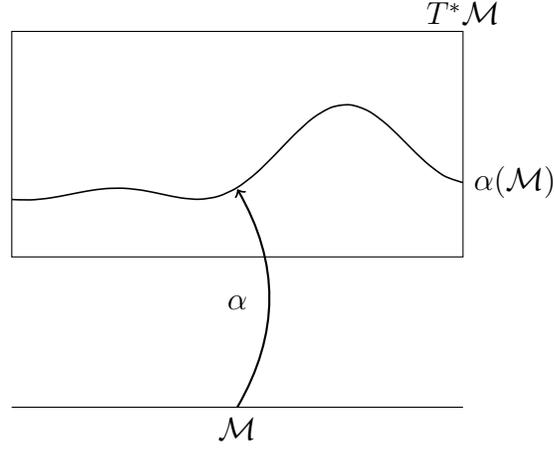


Figura 2: Gráfica de una 1-forma sobre \mathcal{M} .

Existe una trivialización local estándar, es decir, una elección local de coordenadas bastante natural en el haz cotangente, que se basa en las coordenadas locales de \mathcal{M} . Si la n -eada $(q^1, q^2, \dots, q^n) \in \mathbb{R}^n$ parametriza al punto $x \in \mathcal{M}$, entonces las derivaciones¹⁰ $(\partial q^1, \partial q^2, \dots, \partial q^n)$ forman una base vectorial en $T_x\mathcal{M}$, y su base dual de covectores o diferenciales $(dq^1, dq^2, \dots, dq^n)$ forma una base en la fibra $T_x^*\mathcal{M}$ [22], donde las 1-formas en x se expresan como

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) dq^i(x), \quad (2.4)$$

siendo $p_i(x)$ su i -ésima componente. Así el conjunto natural de coordenadas locales para $T^*\mathcal{M}$ es la $2n$ -eada de números reales $\alpha(x) = (q^1(x), \dots, q^n(x), p_1(x), \dots, p_n(x)) \in \mathbb{R}^{2n}$. Al respecto, la proyección natural del haz (2.1) se ve en estas coordenadas como

$$\pi(\alpha(x)) = \pi(q^1(x), \dots, q^n(x), p_1(x), \dots, p_n(x)) = (q^1(x), \dots, q^n(x)).$$

Consideremos ahora una 2-forma ω sobre la variedad \mathcal{M} , $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$, es decir, un campo que a cada punto $x \in \mathcal{M}$ le asocia un mapeo bilineal y antisimétrico de la forma

$$\omega(x) : T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

¹⁰ $\partial q^i \equiv \frac{\partial}{\partial q^i}$.

Decimos que en particular una 2-forma Ω es **simpléctica** si es una 2-forma cerrada y, en cada punto de la variedad, es un mapeo simpléctico:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{M}, \quad Y(x), Z(x) \in T_x \mathcal{M}, \quad \Omega(x)(Z, Y) = 0 \quad \implies \quad Z(x) = \mathbf{0}. \\ (d\Omega)(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

y el par (\mathcal{M}, Ω) es una **variedad dotada de una estructura simpléctica**, o simplemente, una **variedad simpléctica**. Otra forma de pensar en una variedad simpléctica es como una variedad cuyos espacios tangentes son espacios vectoriales simplécticos con mapeos simplécticos que no son otra cosa más que evaluaciones puntuales de una 2-forma cerrada. Es por esta razón que varias de las propiedades de espacios vectoriales simplécticos discutidas anteriormente se aplican a las variedades simplécticas. En particular está el hecho de que la **dimensión de toda variedad simpléctica es par**: $\dim \mathcal{M} = 2n$.

El ejemplo prototípico de una variedad simpléctica es el espacio vectorial \mathbb{R}^{2n} , tomado como una variedad diferenciable de topología trivial, dotado de la 2-forma Ω_0 que, en la base inducida por las coordenadas globales cartesianas $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$, es decir, en términos de las 1-formas $(dx^1, \dots, dx^n, dy^1, \dots, dy^n)$, adopta la forma

$$\Omega_0 = \sum_{k=1}^n dx^k \wedge dy^k. \tag{2.6}$$

De manera general, si $(\sigma^1, \dots, \sigma^{2n})$ es una base de 1-formas para los espacios cotangentes de \mathcal{M} , entonces la 2-forma simpléctica Ω se puede expresar en términos de sus componentes $\Omega_{ij}(\mathbf{x}) \equiv \Omega(x)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, donde $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2n})$ son la base dual de campos vectoriales, como

$$\Omega(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2n} \Omega_{ij}(x) \sigma^i(x) \wedge \sigma^j(x). \tag{2.7}$$

Al respecto de estas componentes, sabemos que localmente como $\Omega(x)$ es un mapeo simpléctico, entonces siempre existe una base vectorial¹¹ $(\mathbf{e}_1 \equiv \sigma_e^1, \dots, \mathbf{e}_n \equiv \sigma_e^n, \mathbf{f}_1 \equiv \sigma_f^1, \dots, \mathbf{f}_n \equiv \sigma_f^n)$ donde las componentes adquieren la forma dada en el teorema (1)

$$\Omega(x) \stackrel{*}{=} \sum_{i=1}^n \sigma_e^i \wedge \sigma_f^i \simeq \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}.$$

Sobre estas bases especiales, $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ el teorema (1) no nos dice nada con respecto a su naturaleza, es decir, no nos dice nada sobre sus relaciones de conmutación: $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j]$, $[\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j]$ y $[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j]$, las cuales son importantes porque nos dicen si localmente sus curvas

¹¹En este caso, de covectores.

integrales pueden o no tomarse como curvas coordenadas [22]. El siguiente teorema hace exactamente esto mismo, y es que siempre podemos encontrar coordenadas locales, que llamaremos **coordenadas de Darboux** y que representaremos exactamente igual que las coordenadas naturales de los haces cotangentes, $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, tales que $\mathbf{e}_i \equiv dq^i$ y $\mathbf{f}_i \equiv dp_i$.

Teorema 1 (Darboux). *Sea (\mathcal{M}, Ω) una variedad simpléctica. Para cada $x \in \mathcal{M}$, existe cuando menos una carta (U, ϕ) , con $x \in U$ y $\phi(x) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ tal que en la base inducida en los espacios cotangentes a U , $(dq^1, \dots, dq^n, dp_1, \dots, dp_n)$, la 2-forma simpléctica se presenta como¹²*

$$\Omega|_U = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i \simeq \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Otra forma de expresar el teorema de Darboux es decir que, localmente, existen sistemas de coordenadas donde (\mathcal{M}, Ω) se ve exactamente como $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ (2.6). Más adelante regresaremos a este punto. Por el momento notemos que decir que una variedad es simpléctica es decir mucho acerca de la variedad, en el sentido de que como estructura matemática la estructura simpléctica es bastante rica. Al respecto, a continuación desarrollamos algunas propiedades topológicas de (\mathcal{M}, Ω) .

Proposición 13. *La 2-forma simpléctica Ω brinda una orientación natural en \mathcal{M} .*

Sabemos que una variedad está orientada si y sólo si tiene una forma de volumen [22], es decir, una top-forma no degenerada en ella. En este caso dicha top-forma se da por la n -ésima potencia exterior de la 2-forma simpléctica:

$$\Omega^n = \underbrace{\Omega \wedge \Omega \dots \wedge \Omega}_{n\text{-veces}}. \quad (2.9)$$

Esto lo sabemos porque, de manera completamente general, se tiene que Ω es una 2-forma no degenerada si y sólo si Ω^n es una top-forma no degenerada. En efecto, supongamos que Ω en realidad es degenerada, es decir, que existe cuando menos un campo vectorial Z sobre \mathcal{M} tal que, para cualquier otro campo vectorial X , tengamos $\Omega(X, Z) = 0$. Sin perder generalidad, siempre podemos elegir una base de campos vectoriales (V_1, \dots, V_{2n}) para $T\mathcal{M}$ con $V_1 \equiv Z$. Ahora al evaluar Ω^n sobre el paralelepípedo (V_1, \dots, V_{2n}) obtendremos una sumatoria de términos en donde siempre habrá una evaluación de la forma $\Omega(V_1, V_j) = \Omega(Z, V_j) = 0$ ($j = 2, \dots, 2n$), obteniendo por lo tanto $\Omega^n(V_1, \dots, V_{2n}) = 0$, llegando a la contradicción de que gracias a que ω es degenerada, la top-forma Ω^n que suponíamos no degenerada en realidad sí lo es. En otras palabras, si Ω^n es no degenerada entonces Ω también debe ser no degenerada.

Conversamente, si Ω es no degenerada entonces, para cada $x \in \mathcal{M}$, podemos imponer coordenadas de Darboux y expresar Ω en la respectiva base inducida de 1-formas para obtener

¹²La demostración puede encontrarse en [29].

$$\Omega^n = n! dq^1 \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp_n, \quad (2.10)$$

la cual se observa mediante el cálculo directo que es una top-forma no degenerada. ■

A la top-forma que hemos definido en (2.10), salvo una constante multiplicativa, se le conoce como el **volumen de Liouville** [29], que específicamente se expresa en la base de Darboux como

$$V_\Omega \equiv \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!} \Omega^n = dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n. \quad (2.11)$$

Si la 2-forma simpléctica Ω es exacta, $\Omega = d\alpha$, entonces se dice que la variedad simpléctica es exacta [29]. En este caso Ω^n también se trata de una forma exacta, tal como lo muestra el siguiente cálculo:

$$d(\alpha \wedge \Omega^{n-1}) = (d\alpha) \wedge \Omega^{n-1} - \alpha \wedge d(\Omega^{n-1}) = \Omega \wedge \Omega^{n-1} = \Omega^n. \quad (2.12)$$

Veamos ahora que no existen variedades cerradas (compactas sin frontera) con estructura simpléctica exacta.

Proposición 14. *Si (\mathcal{M}, Ω) es una variedad simpléctica compacta y sin frontera ($\partial\mathcal{M} = \emptyset$), entonces Ω no puede ser exacta.*

Dado que el hecho de que Ω sea exacta implica que Ω^n también debe serlo, podemos reescribir la proposición como: “no existe una forma de volumen exacta en una variedad cerrada”. En efecto, de haberla, por el teorema de Stokes [22] y el resultado (2.12), tendríamos la contradicción de que el volumen de todo \mathcal{M} es cero:

$$\int_{\mathcal{M}} \Omega^n = \int_{\mathcal{M}} d(\alpha \wedge \Omega^{n-1}) = \int_{\partial\mathcal{M}} \alpha \wedge \Omega^{n-1} = \int_{\emptyset} \alpha \wedge \Omega^{n-1} = 0. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de este hecho, podemos ver que una variedad simpléctica cerrada tiene un grupo de cohomología de de Rham¹³ de segundo orden $H^2(\mathcal{M})$ no trivial. En efecto, como Ω es cerrada pero no exacta, su clase de cohomología no es trivial, $[\Omega] \neq [e]$, luego $H^2(\mathcal{M})$ tiene cuando menos dos clases, la trivial $[e]$ y $[\Omega]$.

2.1 El haz cotangente como variedad simpléctica

Para cerrar esta sección consideremos ahora un ejemplo muy particular de variedades simplécticas, relacionado con los haces cotangentes. Consideremos las variedades $\mathcal{M} = T^*Q$

¹³Para la definición exacta así como mayor información, consúltese [22].

(siendo por su parte \mathcal{Q} son variedades suave). Comencemos por ver que, en efecto, estas variedades tienen una estructura simpléctica natural dada a través de la llamada **1-forma tautológica**¹⁴ $\theta \in \Lambda^1(T^*\mathcal{Q})$,

$$\theta : T^*\mathcal{Q} \rightarrow T^*(T^*\mathcal{Q}),$$

definida en cada punto $(x, \alpha(x)) \in T^*\mathcal{Q}$ ¹⁵ como [20]

$$\forall (x, \alpha(x)) \in T^*\mathcal{Q}, \quad \theta(x, \alpha(x)) \equiv (\pi^* \alpha)(x, \alpha(x)). \quad (2.13)$$

En otras palabras, la 1-forma tautológica (2.13) es aquella 1-forma sobre el haz cotangente tal que, en cada uno de sus puntos, evalúa sus vectores tangentes $X \in T_{(x, \alpha(x))}(T^*\mathcal{Q})$, proyectándolos con la diferencial π_* , en el covector correspondiente al punto de tangencia, pues recordemos que

$$\forall X \in T_{(x, \alpha(x))}(T^*\mathcal{Q}), \quad \theta(x, \alpha(x))(X) = (\pi^* \alpha)(x, \alpha(x))(X) \equiv \alpha(x)(\pi_* X).$$

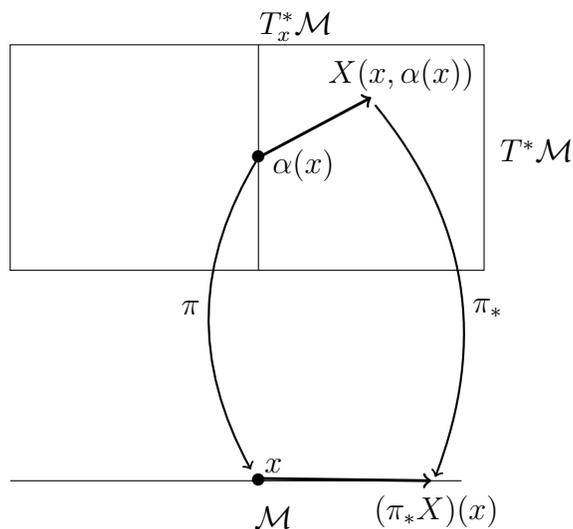


Figura 3: Diagrama del pushforward π_* en un haz cotangente $T^*\mathcal{M}$.

Utilizando las coordenadas naturales que dimos anteriormente para los haces cotangentes, así como la base de 1-formas inducida sobre $T^*\mathcal{Q}$, $(dq^1, \dots, dq^n, dp_1, \dots, dp_n)$, la 1-forma tautológica se ve como¹⁶

¹⁴También conocida como 1-forma canónica o 1-forma de acción [20].

¹⁵Dicho de otra manera: $x \in \mathcal{Q}$ y $\alpha(x) \in T_x^*\mathcal{Q}$.

¹⁶Aunque $\theta(x, \alpha(x))$ se ve exactamente como $\alpha(x)$ en la base coordenada, es importante recordar que mientras que la segunda es una 1-forma sobre \mathcal{Q} , la primera es una 1-forma sobre $T^*\mathcal{Q}$. Dicho de otra forma,

$$\theta(x, \alpha(x)) = \sum_{i=1}^n p_i(x) dq^i(x). \quad (2.14)$$

Proposición 15. *El negativo (por convención) de la derivada exterior de (2.13) define entonces una 2-forma simpléctica natural en el haz cotangente: $\Omega \equiv -d\theta$.*

Trivialmente la 2-forma $-d\theta$ es cerrada por ser exacta. Por otra parte, como localmente se reduce a la 1-forma prototípica de \mathbb{R}^{2n} , resulta fácil ver que es no degenerada en todo $T^*\mathcal{Q}$. ■

Tal como lo comentamos, las coordenadas naturales del haz cotangente resultan ser un sistema de coordenadas de Darboux donde la forma simpléctica natural $-d\theta$ tiene componentes constantes:

$$\Omega \equiv -d\theta = -\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i. \quad (2.15)$$

Proposición 16. *Sea $\mu : \mathcal{Q} \rightarrow T^*\mathcal{Q}$ una sección transversal del haz cotangente de \mathcal{Q} , es decir, una de sus 1-formas $\mu \in \Lambda^1(\mathcal{Q})$. La 1-forma tautológica θ satisface la llamada **propiedad de reproducción** [20]*

$$\forall x \in \mathcal{Q}, \quad (\mu^*\theta)(x) = \mu(x). \quad (2.16)$$

La propiedad (2.16) se obtiene por un cálculo directo tomando en cuenta que μ es una sección transversal de $T^*\mathcal{Q}$, y por lo tanto la composición $\pi \circ \mu$ no es más que la identidad sobre \mathcal{Q} [22]:

$$(\mu^*\theta)(x) = \mu(x)^*(\pi^*(\mu(x))) = (\mu^* \circ \pi^*)(\mu(x)) = (\pi \circ \mu)^*(\mu(x)) = \text{Id}^*(\mu(x)) = \mu(x). \quad \blacksquare$$

3 Simplectomorfismos y campos hamiltonianos

Un **simplectomorfismo** entre dos variedades simplécticas (\mathcal{M}, Ω) y (\mathcal{M}', Ω') es un mapeo diferenciable $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ tal que en cada punto $x \in \mathcal{M}$, su diferencial o pushforward $\varphi(x)_* : T_x\mathcal{M} \rightarrow T_{\varphi(x)}\mathcal{M}'$ es un **mapeo simpléctico** [29]. Como por definición,

en la base inducida por las coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ la 1-forma tautológica tiene componentes p_i asociadas a dq^i y 0 asociadas a dp_i .

$$\forall x \in \mathcal{M}, \quad X, Y \in T_x \mathcal{M}, \quad \Omega'(\varphi(x)_* X, \varphi(x)_* Y) = (\varphi(x)^* \Omega')(X, Y) = \Omega(X, Y),$$

una forma alternativa de pensar un simplectomorfismo es la de un mapeo diferenciable tal que su pullback en cada punto de la variedad dominio mande Ω' a Ω :

$$\varphi^* \Omega' = \Omega. \quad (3.1)$$

Cuando esto ocurre, es decir, cuando existe un simplectomorfismo de (\mathcal{M}, Ω) a (\mathcal{M}', Ω') , se dice que las variedades son **simplectomórficas**. En particular, cuando nos limitamos a variedades con la misma dimensión, la existencia de simplectomorfismos implica una relación de equivalencia, como es fácil verificar tomando en cuenta que sus respectivos espacios tangentes son simplectomórficos entre sí.

En este sentido se dice que un simplectomorfismo definido como un difeomorfismo de una variedad simpléctica (\mathcal{M}, Ω) en sí misma, $\varphi \in \text{Diff}(\mathcal{M})$, **preserva la estructura simpléctica** de la variedad [29]: $\varphi^* \Omega = \Omega$. Por supuesto, de entre todos los difeomorfismos sobre la variedad, aquellos que son simplectomorfismos forman un subgrupo de Lie bajo la operación de composición, conocido como el grupo simpléctico $\text{Sp}(n, \mathcal{M}, \Omega)$ [29, 20].

Como consecuencia de que los elementos en $\text{Sp}(n, \mathcal{M}, \Omega)$ preserven la estructura simpléctica, tenemos algunas propiedades interesantes de los simplectomorfismos.

Proposición 17. *Los simplectomorfismos sobre \mathcal{M} preservan la forma de volumen de Liouville.*

La demostración de este hecho es un cálculo directo del pullback de $\varphi \in \text{Sp}(n, \mathcal{M}, \Omega)$ en Ω^n , recordando que dicha aplicación distribuye con respecto al producto exterior [22]:

$$\varphi^* \Omega^n = \varphi^* \Omega^n = \varphi^*(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega) = (\varphi^* \Omega) \wedge \dots \wedge (\varphi^* \Omega) = \Omega \wedge \dots \wedge \Omega = \Omega^n = \Omega^n. \quad \blacksquare$$

Proposición 18. *Un difeomorfismo φ es un simplectomorfismo sobre \mathcal{M} si y sólo si, para cada $x \in \mathcal{M}$, dada la carta de Darboux $(U, (q^i, p_i))$ en una vecindad de $\varphi(x)$, la carta $(\varphi^{-1}(U), (q^i \circ \varphi, p_i \circ \varphi))$ también es una carta de Darboux en una vecindad de x [29].*

Que $(\varphi^{-1}(U), (q^i \circ \varphi, p_i \circ \varphi))$ sea una carta de Darboux quiere decir que, en cualquier punto de la vecindad $(\varphi^{-1}(U))$, la 2-forma simpléctica de \mathcal{M} puede expresarse en la base cotangente inducida por las coordenadas como

$$\Omega = \sum_{k=1}^n d(q^k \circ \varphi) \wedge d(p_k \circ \varphi),$$

pero las composiciones $q^k \circ \varphi$ y $p_k \circ \varphi$ no son más que los pullbacks de φ aplicados a las 0-formas q^k y p_k , respectivamente, $\varphi^* q^k$ y $\varphi^* p_k$. Si tomamos en cuenta que el pullback conmuta con la derivada exterior, entonces la expresión anterior se puede ver como

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum_{k=1}^n d(q^k \circ \varphi) \wedge d(p_k \circ \varphi) = \sum_{k=1}^n d(\varphi^* q^k) \wedge d(\varphi^* p_k) = \sum_{k=1}^n \varphi^*(dq^k) \wedge \varphi^*(dp_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \varphi^*(dq^k \wedge dp_k) = \varphi^*\left(\sum_{k=1}^n dq^k \wedge dp_k\right) = \varphi^* \Omega,\end{aligned}$$

lo cual nos indica que φ es un symplectomorfismo. Conversamente, siendo $\varphi \in \text{Sp}(n, \mathcal{M}, \Omega)$, podemos generar la igualdad anterior demostrando que $(q^i \circ \varphi, p_i \circ \varphi)$ son coordenadas de Darboux. ■

En términos prácticos lo que el resultado anterior nos dice es que un symplectomorfismo preserva las coordenadas de Darboux.

Ahora veamos una propiedad que le compete a los haces cotangentes como variedades simplécticas, y es que cualquier difeomorfismo sobre \mathcal{Q} se puede *levantar* a un symplectomorfismo, con respecto a la 2-forma natural $-d\theta$, sobre su haz cotangente $T^*\mathcal{Q}$.

Proposición 19. *Sea $f \in \text{Diff}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ un difeomorfismo cualquiera de la variedad \mathcal{Q} hacia la variedad \mathcal{Q}' ,*

$$f : x \mapsto f(x) \equiv y,$$

el mapeo

$$\begin{aligned}\tilde{f} : T^*\mathcal{Q} &\rightarrow T^*\mathcal{Q}', \\ \tilde{f} : (x, \alpha(x)) &\mapsto (y, ((f^{-1})^*\alpha)(y)),\end{aligned}\tag{3.2}$$

es un difeomorfismo de la variedad simpléctica $(T^*\mathcal{Q}, -d\theta)$ hacia la variedad simpléctica $(T^*\mathcal{Q}', -d\theta')$, que conserva las 1-formas canónicas:

$$\tilde{f}^* \theta' = \theta.\tag{3.3}$$

Notemos que, por la definición (3.2), mientras f actúa sobre los espacios bases \mathcal{Q} y \mathcal{Q}' , \tilde{f} actúa sobre las fibras por encima de ellos. De esta manera, si $\pi : T^*\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ y $\pi' : T^*\mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{Q}'$

son las proyecciones naturales de los haces cotangentes, entonces se satisface (véase Fig. 4) $\pi' \circ \tilde{f} = f \circ \pi$.

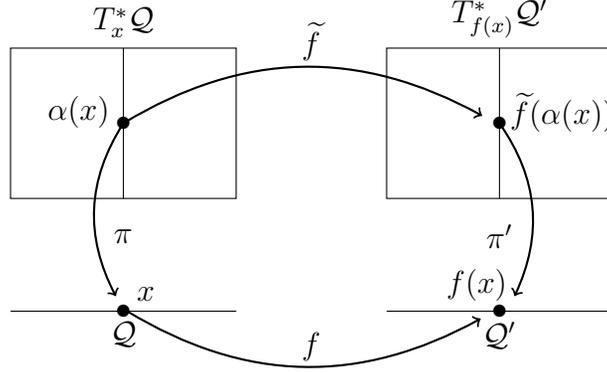


Figura 4: Diagrama $\pi' \circ \tilde{f} = f \circ \pi$.

Considerando esto, la demostración de que \tilde{f} conserva las 1-formas tautológicas se deduce utilizando las propiedades del pullback:

$$\forall (x, \alpha(x)) \in T^*\mathcal{Q},$$

$$\begin{aligned} (\tilde{f}^*\theta') (x, \alpha(x)) &= (\tilde{f}^* \circ \pi'^* \tilde{f}) (x, \alpha(x)) = \left((\pi' \circ \tilde{f})^* \tilde{f} \right) (x, \alpha(x)) = \left((f \circ \pi)^* \tilde{f} \right) (x, \alpha(x)) \\ &= \left(\pi^* \circ f^* \tilde{f} \right) (x, \alpha(x)) = \left(\pi^* \left(f^* \tilde{f}(x, \alpha(x)) \right) \right) (x) = \left(\pi^* (f^* \circ f^{-1*} \alpha) \right) (x) \\ &= \left(\pi^* (f^{-1} \circ f)^* \alpha \right) (x) = \left(\pi^* \circ \text{Id}_{\mathcal{Q}}^* \alpha \right) (x) = \left(\pi^* \alpha \right) (x) = \theta(x, \alpha(x)). \end{aligned}$$

■

Como consecuencia directa de la propiedad (3.3), es fácil ver que (3.3) es un **simplectomorfismo** definido de $(T^*\mathcal{Q}, -d\theta)$ a $(T^*\mathcal{Q}', -d\theta')$:

$$\tilde{f}^*(-d\theta') = -\tilde{f}^*d\theta' = -d(\tilde{f}^*\theta') = -d\theta.$$

Por supuesto, la propiedad de que Ω sea una 2-forma no degenerada (localmente un mapeo simpléctico) se puede expresar en términos de la biyección de los mapeos $\Omega_b(x)$ que hemos definido en (1.5). Hablando de ellos, podemos pensar en un **campo de mapeos musicales** Ω_b que nos permite, por medio de Ω , realizar un isomorfismo natural entre campos vectoriales y 1-formas sobre \mathcal{M} [29]:

$$\forall x \in \mathcal{M}, \quad X(x) \in T_x\mathcal{M}, \quad \Omega_b(x)(X) \equiv i_X\Omega(x) = \Omega(x)(X, \bullet) \in T_x^*\mathcal{M}. \quad (3.4)$$

Para simplificar la notación, de ahora en adelante limitaremos el uso de la evaluación del mapeo musical y simplemente diremos que el campo vectorial X es el **gradiente simpléctico**¹⁷ de la 1-forma α si se satisface

$$\alpha = i_X \Omega. \quad (3.5)$$

En particular, si α es una 1-forma exacta, es decir, se trata de la derivada exterior de una 0-forma $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, que llamaremos **función hamiltoniana** (o simplemente hamiltoniana¹⁸), el gradiente simpléctico de $\alpha = dH$ se conoce como el **campo hamiltoniano de H** y se denotará por X_H , siendo aquél que satisface [8]

$$dH = i_{X_H} \Omega. \quad (3.6)$$

Los campos hamiltonianos son de especial interés por las características que tienen. Analicemos algunas de ellas a continuación.

Proposición 20. *El campo hamiltoniano de una combinación lineal de hamiltonianas es la combinación lineal de los campos hamiltonianos individuales.*

Consideremos la combinación lineal de hamiltonianas $aH_1 + bH_2$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $H_1, H_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$, que por sí misma es una función hamiltoniana. Su campo vectorial hamiltoniano es, por definición (3.6), $X_{aH_1+bH_2}$ tal que

$$d(aH_1 + bH_2) = \Omega(X_{aH_1+bH_2}, \bullet).$$

Utilizando simplemente la linealidad, tanto del operador de derivada exterior como de la 2-forma simpléctica, la expresión anterior se transforma en

$$adH_1 + bdH_2 = a\Omega(X_{H_1}, \bullet) + b\Omega(X_{H_2}, \bullet) = \Omega(aX_{H_1} + bX_{H_2}, \bullet) = \Omega(X_{aH_1+bH_2}, \bullet),$$

y dado que Ω es no degenerada, o dicho de otro modo, Ω_\flat es una biyección, la última igualdad sugiere el resultado esperado:

¹⁷El término *gradiente simpléctico* se utiliza en relación al gradiente métrico que define un tensor métrico G , relacionando de manera similar un campo vectorial con una 1-forma diferencial: $\alpha = G(X, \bullet)$ [22].

¹⁸De nuevo, la nomenclatura está inspirada en la física, particularmente en la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica que, como veremos, tiene una clara descripción en términos de la geometría simpléctica [8].

$$\Omega(aX_{H_1} + bX_{H_2}, \bullet) - \Omega(X_{aH_1+bH_2}, \bullet) = \Omega(aX_{H_1} + bX_{H_2} - X_{aH_1+bH_2}, \bullet) = 0$$

↓

$$X_{aH_1+bH_2} = aX_{H_1} + bX_{H_2}.$$

■

Proposición 21. *El campo hamiltoniano asociado al producto de dos 0-formas hamiltonianas, $FG \in C^\infty(\mathcal{M})$, es la combinación lineal de los campos hamiltonianos individuales $G X_F + F X_G$.*

Si FG es la hamiltoniana asociada al campo X_{FG} , entonces ambas cantidades deben satisfacer la expresión $d(FG) = i_{X_{FG}}\Omega$, cuyo miembro izquierdo puede desarrollarse como

$$i_{X_{FG}}\Omega = d(FG) = GdF + FdG = G i_{X_F}\Omega + F i_{X_G}\Omega = i_{GX_F+FX_G}\Omega,$$

donde hemos empleado la linealidad en Ω . Tomando en cuenta también que es no degenerada, llegamos a la conclusión

$$\Omega(X_{FG} - GX_F - FX_G, \bullet) = 0 \quad \implies \quad X_{FG} = GX_F + FX_G.$$

■

Sea X un campo vectorial sobre una variedad suave \mathcal{M} . Sabemos que su flujo asociado φ^X se define como el mapeo

$$\varphi^X : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \tag{3.7}$$

que para, cada $t \in \mathbb{R}$, genera un difeomorfismo de la forma $\varphi^X(t, \bullet) \equiv \varphi_t^X : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, y para cada $x \in \mathcal{M}$ se transforma en la curva integral del campo X que pasa, precisamente, por el punto x en $t = 0$ [22]:

$$\varphi^X(t, x) \equiv \gamma_x(t), \quad \left. \frac{d\gamma_x}{dt} \right|_{t=0} = X(x). \tag{3.8}$$

Las siguientes propiedades de los campos hamiltonianos X_H se refieren a sus flujos (6.8).

Proposición 22. *El flujo generado por un campo hamiltoniano deja invariante la forma simpléctica.*

En particular si X_H es el campo hamiltoniano de H , veamos que el pullback de la 2-forma simpléctica a través de las curvas (3.8) es constante. Para ver esto recordemos que el cambio de dicho pullback equivale a la derivada de Lie $\mathcal{L}_{X_H} \Omega$ [22], la cual puede reescribirse utilizando la *fórmula mágica de Cartán* [22] como

$$\mathcal{L}_{X_H} \Omega = i_{X_H} (d\Omega) + d(i_{X_H} \Omega) = d(dH) = d^2 H = 0,$$

donde hemos utilizado el hecho de que Ω es cerrada ($d\Omega = 0$) y que $d^2 = 0$ para cualquier p -forma en \mathcal{M} . ■

Proposición 23. *El flujo generado por un campo hamiltoniano deja invariante a su hamiltoniana.*

En este caso basta utilizar la definición de la derivada de Lie de una 0-forma con respecto al flujo de un campo vectorial, así como la antisimetría de la forma simpléctica Ω :

$$\mathcal{L}_{X_H} H = X_H \triangleright H = dH(X_H) = (i_{X_H} \Omega)(X_H) = \Omega(X_H, X_H) = 0.$$

■

4 Subvariedades lagrangianas

Una **subvariedad lagrangiana** de una variedad simpléctica (\mathcal{M}, Ω) , $L \subset \mathcal{M}$, es un encajamiento suave¹⁹

$$\iota : L \hookrightarrow \mathcal{M}, \tag{4.1}$$

tal que, para todo punto $x \in L$, sus espacios tangentes, vistos como subespacios vectoriales del espacio tangente a $\iota(x) = x \in \mathcal{M}$, son subespacios vectoriales lagrangianos tal como los definimos anteriormente [29]:

$$\forall x \in L \subset \mathcal{M}, \quad T_{\iota(x)} \mathcal{M} = (T_{\iota(x)} \mathcal{M})^{\Omega(x)}. \tag{4.2}$$

A partir de las propiedades que ya analizamos en los subespacios vectoriales lagrangianos, las subvariedades lagrangianas también tienen propiedades particulares que vale la pena analizar. La más simple es que L tiene por dimensión $\frac{1}{2} \dim \mathcal{M}$ ²⁰. Por otra parte como $T_x L$ es, para cada $x \in L$, un subespacio isotrópico ($\Omega|_L = 0$), entonces una caracterización alternativa de una subvariedad lagrangiana (en una variedad simpléctica de dimensión $2n$) es el de una subvariedad de dimensión n con inmersión (4.1) tal que [29]

$$\iota^* \Omega = 0. \tag{4.3}$$

¹⁹Es decir, un mapeo $\iota : L \hookrightarrow \mathcal{M}$ cuyo diferencial, o pushforward ι_* , es un mapeo inyectivo, tal que $\iota(L)$ es homeomorfo a \mathcal{M} y, por lo tanto, puede identificarse auténticamente como un *trozo* o subespacio topológico de la variedad \mathcal{M} [29].

²⁰Dado que la dimensión de sus espacios tangentes es un medio de la dimensión de los espacios tangentes de \mathcal{M} (todo punto en L está en \mathcal{M}), y la dimensión de un espacio tangente siempre es la dimensión de su variedad correspondiente, se sigue que $\dim L = (\dim \mathcal{M})/2$.

Podemos pensar todo este asunto de una manera diferente si nos enfocamos en L como una variedad encajada en el ambiente simpléctico de \mathcal{M} . En este sentido (4.1) es sólo un mapeo que toma cada punto x en L y lo identifica con el mismo punto pero ahora como elemento de \mathcal{M} . Lo interesante de esta visión es que todo vector tangente a L se identifica con si mismo, pero visto como vector tangente a \mathcal{M} [29]:

$$\begin{aligned} \forall x \in L, & & X(x) &\in T_x L, \\ \iota(x) = x \in \mathcal{M}, & & (\iota_* X)(x) = X(\iota(x)) = X(x) &\in T_x \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Analicemos ahora algunas propiedades menos obvias acerca de las subvariedades lagrangianas.

Proposición 24. *Sea $(\mathcal{M}, d\alpha)$ una variedad simpléctica exacta, entonces la restricción de α en cualquier subvariedad lagrangiana $L \subset \mathcal{M}$, $\iota^*\alpha \in \Lambda^1(L)$, es una 1-forma cerrada.*

Recordando que podemos conmutar la derivada exterior con los pullback, este resultado se deduce a partir de la propiedad (4.3) que caracteriza a las subvariedades lagrangianas:

$$0 = \iota^*(d\alpha) = d(\iota^*\alpha).$$

■

Proposición 25. *Sea \mathcal{M} una variedad simpléctica, L una subvariedad lagrangiana y $H \in C^\infty(\mathcal{M})$ una función hamiltoniana. H es constante en L , si y sólo si su campo hamiltoniano sobre \mathcal{M} es tangente a L .*

Supongamos que H es constante en todo L , es decir $\iota^*H = H \circ \iota = H|_L = \text{cte}$. Para mostrar que X_H es un campo tangente a L , utilizaremos el hecho de que para cada $x \in L$ tenemos que el espacio tangente es igual a su complemento simpléctico bajo $\Omega(x)$ (4.2), de tal manera que mostraremos que X_H está en el complemento simpléctico y por lo tanto X_H está en el espacio tangente. Para esto veamos que si $H|_L = \text{cte}$, entonces su derivada exterior es cero:

$$d(H|_L) = d(\iota^*H) = \iota^*(dH) = (dH)|_L = 0,$$

lo que significa precisamente que su campo hamiltoniano asociado, evaluado junto a cualquier campo tangente a L en Ω , es cero:

$$\begin{aligned} \forall x \in L, \quad X(x) &\in T_x L, \\ 0 &= (i_X \iota^*(dH))(x) = (i_X \iota^*(i_{X_H} \Omega))(x) = \Omega(\iota(x))(X_H, \iota_* X) = \Omega(x)(X_H, X), \end{aligned}$$

siendo por lo tanto X_H un campo vectorial que pertenece al complemento simpléctico, es decir, X_H es un campo tangente a L .

Conversamente, si X_H es un campo vectorial tangente a L entonces podemos invertir todo el procedimiento anterior para mostrar que $(dH)|_L = 0$ y, por lo tanto, $H|_L = \text{cte}$. ■

Por supuesto, otra forma de entender la proposición anterior es pensando que, siempre que X_H sea tangente a una subvariedad lagrangiana L , el flujo generado por cualquier campo vectorial tangente $X : L \rightarrow TL \subset T\mathcal{M}$ mantendrá constante a la función H :

$$\forall x \in L \subset \mathcal{M}, \quad (\mathcal{L}_X H)(x) = (X \triangleright H)(x) = dH(x)(X) = \Omega(x)(X_H, X) = 0.$$

Volvamos al caso particular en que la variedad simpléctica es $T^*\mathcal{Q}$, con su 2-forma natural $-d\theta$, para ver algunos ejemplos interesantes de variedades lagrangianas.

Proposición 26. *La imagen de la sección transversal en $T^*\mathcal{Q}$, generada a partir de cualquier 1-forma cerrada sobre \mathcal{Q} ,*

$$L_\mu \equiv \{(x, \mu(x)) \in T^*\mathcal{Q} : \forall x \in \mathcal{Q}, \quad (d\mu)(x) = 0 \in T_x^*\mathcal{Q}\}, \quad (4.4)$$

es una subvariedad lagrangiana.

Tomando en cuenta que la imagen de una sección transversal efectivamente se trata de un encajamiento de la variedad \mathcal{Q} en su haz cotangente $T^*\mathcal{Q}$, L_μ como el lugar geométrico definido en (4.4) es una subvariedad de dimensión $n = \dim(T^*\mathcal{Q})/2$ [29]. Para ver que en particular se trata de una subvariedad lagrangiana, debemos demostrar que el pullback de $-d\theta$ bajo la inclusión ι es la 2-forma nula sobre L_μ : $\iota^*(-d\theta) = 0$.

Para hacer esto vale la pena notar que existe un difeomorfismo inducido naturalmente entre L_μ y \mathcal{Q} dado por la composición $\pi \circ \iota : L_\mu \rightarrow \mathcal{Q}$. La inversa de dicho difeomorfismo está relacionado con la sección transversal μ a partir de la composición con la inclusión ι (véase el diagrama 5): $\mu = \iota \circ (\pi \circ \iota)^{-1}$.

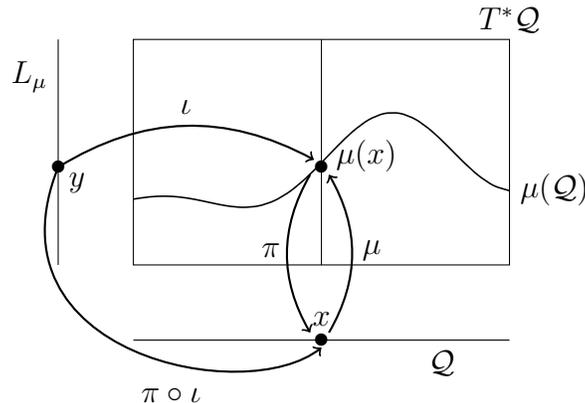


Figura 5: Diagrama para definir $\mu = \iota \circ (\pi \circ \iota)^{-1}$.

Ahora solamente hace falta utilizar la propiedad de reproducción (2.16) junto con la expresión anterior,

$$\mu^* \theta = \mu \implies d\mu = d(\mu^* \theta) = \mu^*(d\theta) = (\iota \circ (\pi \circ \iota)^{-1})^*(d\theta) = ((\pi \circ \iota)^{-1})^*(\iota^*(d\theta)),$$

pues siendo μ una 1-forma cerrada, entonces $d\mu = 0$ y por lo tanto $((\pi \circ \iota)^{-1})^*(\iota^*(d\theta)) = 0$. Como además $(\pi \circ \iota)$ es un difeomorfismo, su pullback es inyectivo [22] y por lo tanto

$$((\pi \circ \iota)^{-1})^*(\iota^*(d\theta)) = 0 \implies \iota^*(d\theta) = 0. \quad \blacksquare$$

Trivialmente²¹ un caso particular de subvariedad lagrangiana, según el resultado anterior, es el de la imagen (4.4) de la sección nula $\alpha = 0$. Otros casos particulares son lo de las gráficas de 1-formas exactas $\mu = dF$, siendo F una 0-forma sobre \mathcal{Q} que es conocida como **la función generadora** de la subvariedad lagrangiana [20].

Otro ejemplo distinto de subvariedades lagrangianas aparece al estudiar las construcciones geométricas conocidas como **haces conormales**. De manera completamente general, apartándonos un momento de la geometría simpléctica, sea \mathcal{U} cualquier subvariedad k dimensional de la variedad n dimensional \mathcal{M} , su **espacio conormal** al punto $x \in \mathcal{U}$, denotado por $N_x^* \mathcal{U}$, se define como el conjunto de todos los covectores en $T_x^* \mathcal{M}$ tales que el espacio tangente $T_x \mathcal{U}$ es parte de su kernel [29]:

$$N_x^* \mathcal{U} \equiv \{\alpha(x) \in T_x^* \mathcal{M} : \forall X(x) \in T_x \mathcal{U}, \alpha(x)(X) = 0\}. \quad (4.5)$$

De esta manera, asociado a \mathcal{U} tenemos el **haz conormal** $N^* \mathcal{U}$ definido como el haz fibrado vectorial cuyo espacio base es \mathcal{U} , con fibras dadas por sus espacios conormales y proyección natural [29]

$$\pi_N : N^* \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}, \quad \pi_N^{-1}(x) \sim N_x^* \mathcal{U}. \quad (4.6)$$

Veamos ahora algunas propiedades interesantes de los haces conormales.

Proposición 27. *Para cualquier subvariedad k dimensional \mathcal{U} de la variedad n dimensional \mathcal{M} , su haz conormal $N^* \mathcal{U}$ es una subvariedad n dimensional del haz cotangente $T^* \mathcal{M}$.*

Siendo \mathcal{U} una subvariedad de \mathcal{M} , para cada vecindad (en \mathcal{M}) de un punto $x \in \iota(\mathcal{U})$, podemos encontrar un sistema de coordenadas locales (x^1, x^2, \dots, x^n) tal que la intersección de dicha vecindad con \mathcal{U} satisfaga²² $x^{k+1} = x^{k+2} = \dots = x^n = 0$ [29].

²¹La sección nula es una 1-forma cerrada: $d\alpha = d(0) = 0$.

²²Dicho de otra manera, siempre existe un sistema de coordenadas en donde $\iota(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ se expresa como la intersección de los planos $x^i = 0$ ($i = k + 1, k + 2, \dots, n$).

De esta manera, una base para los espacios tangentes a \mathcal{U} es la base inducida por coordenadas $(\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \dots, \partial/\partial x^k)$, subconjunto de la base $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ de los espacios tangentes a \mathcal{M} . Al respecto, la base dual de los espacios cotangentes en \mathcal{M} es (dx^1, \dots, dx^n) . Por lo tanto, los covectores en $N_x^*\mathcal{U}$ no pueden tener componentes y_i relacionados a los primeros k covectores dx^i ($i = 1, 2, \dots, k$)

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \mu(x) \in N_x^*\mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x\mathcal{U} \right) = y_i = 0,$$

siendo así que todo covector en $N_x^*\mathcal{U}$ está generado por únicamente los $n - k$ covectores dx^i ($i = k + 1, k + 2, \dots, n$), siendo por lo tanto la dimensión de los espacios conormales $\dim N_x^*\mathcal{U} = n - k$. De esta manera, como las fibras de $N^*\mathcal{U}$ tienen dimensión $n - k$ y el espacio base es k dimensional, obtenemos efectivamente $\dim N^*\mathcal{U} = (n - k) + k = n$. ■

Proposición 28. *El haz conormal de todo \mathcal{M} es la sección nula de su haz cotangente $T^*\mathcal{M}$, mientras que el haz conormal de la subvariedad 0-dimensional formado por un punto $\{x \in \mathcal{M}\}$ corresponde a la fibra $T_x^*\mathcal{M}$.*

En el primer caso, el del haz conormal $N^*\mathcal{M}$, las fibras $N_x^*\mathcal{M}$ se componen de los covectores que se anulan con todo vector tangente a \mathcal{M} . Sólo existe un covector con estas características que es, por definición, el covector cero, y precisamente la 1-forma cuyo valor en todo punto es el covector cero se trata de la sección nula.

En el segundo caso, $N^*\{x \in \mathcal{M}\}$ tiene una sola fibra, la cual se compone de todos los covectores que se anulan en el vector cero, es decir, de todos los covectores en $T_x^*\mathcal{M}$, por lo tanto, trivialmente: $N^*\{x\} = T_x^*\mathcal{M}$. ■

Regresando al tema de las subvariedades lagrangianas, veamos ahora la razón por la que hemos introducido estos haces vectoriales.

Proposición 29. *Sea \mathcal{U} cualquier subvariedad de \mathcal{M} , su haz conormal $N^*\mathcal{U}$ es una subvariedad lagrangiana del haz cotangente $T^*\mathcal{M}$.*

Hace un par de proposiciones vimos que $N^*\mathcal{U}$ efectivamente se trata de una subvariedad del haz cotangente de dimensión $n = (\dim \mathcal{M})/2$, de tal manera que únicamente debemos probar que se satisface la condición (4.3) para mostrar que dicha subvariedad es lagrangiana, o equivalentemente, probar que el pullback de la 1-forma tautológica es una 1-forma cerrada sobre $N^*\mathcal{U}$.

Sea ι la inclusión canónica del haz conormal en el haz cotangente, y sea $(x, \alpha(x))$ cualquier punto en $N^*\mathcal{U}$, es decir, $x \in \mathcal{U}$ y $\alpha(x) \in N_x^*\mathcal{U}$, entonces para cualquier vector tangente X tenemos²³

$$\begin{aligned} \forall y \equiv (x, \alpha(x)) \in N^*\mathcal{U}, \quad X(y) \in T_y(N^*\mathcal{U}), \\ (\iota^*\theta)(y)(X) = \theta(\iota(y))(\iota_*X) = \theta(y)(X) = (\pi^*\alpha)(y)(X) = \alpha(x)(\pi_*X), \end{aligned}$$

²³Tomamos en cuenta que $\iota(y) = y$, es decir, $\iota(x, \alpha(x)) = (x, \alpha(x)) \in T^*\mathcal{M}$, y $\iota_*X = X \in T(T^*\mathcal{M})$.

donde debemos tomar en cuenta que la proyección $\pi : T^* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ toma el punto $y = (x, \alpha(x))$ y lo manda a x , y por lo tanto su diferencial π_* toma cualquier vector tangente a $(x, \alpha(x))$ lo manda a un vector tangente a x ²⁴. Como $\alpha(x) \in N_x^* \mathcal{U}$, por definición, se anula con cualquier vector tangente a x ²⁵, y $(\pi_* X)(x)$ es un vector tangente a x , $\alpha(x)$ debe anularse con $(\pi_* X)(x)$:

$$(\iota^* \theta)(x, \alpha(x))(X) = \alpha(x)(\pi_* X) = 0,$$

demostrando de esta manera que $\iota^* \theta = 0$ y, por lo tanto, $\iota^*(-d\theta) = 0$. ■

Como consecuencia directa del resultado anterior, vemos que **las fibras de cualquier haz cotangente** son subvariedades lagrangianas [29]. Por otra parte, tomando en cuenta que cualquier campo vectorial hamiltoniano genera un flujo bajo el cual la 2-forma simpléctica $-d\theta$ es invariante, y que las subvariedades lagrangianas se definen en términos de la forma simpléctica, resulta claro que, aunque en general una fibra $T_x^* \mathcal{Q}$ no se mapea bajo dichos flujos en otra fibra, sí se mapea en una nueva subvariedad lagrangiana. Invertiendo el análisis, también es cierto que toda fibra del haz cotangente puede verse como la imagen del flujo hamiltoniano de una subvariedad lagrangiana.

En mecánica clásica podemos identificar al espacio de configuraciones y momentos como un haz cotangente, de tal forma que una fibra puede pensarse como el conjunto de todos los posibles momentos que puede tener el sistema en determinada configuración, y donde la dinámica de los sistemas se rige por el flujo de un campo hamiltoniano particular [8]. De esta forma, estudiar las subvariedades lagrangianas resulta equivalente a estudiar el conjunto de todas las posibles configuraciones y momentos que, tras un tiempo físico adecuado, fluyen dinámicamente hacia cierta configuración y momento particular (cierta fibra), o equivalentemente, todas las posibilidades de configuración y momento a las que puede llegar un sistema a partir de ciertas condiciones iniciales [20, 8].

²⁴Particularmente si $X(y)$ es un vector tangente a y de tipo vertical, es decir, sobre la fibra $T_y^* \mathcal{M}$, entonces es proyectado al vector cero y trivialmente se sigue que $\alpha(x)(\pi_* X) = \alpha(x)(0) = 0$.

²⁵Siendo estrictos, $\alpha(x)$ se anula con cualquier vector tangente a x en \mathcal{U} , pero como \mathcal{U} está encajada en \mathcal{M} , la relación entre los vectores tangentes a un punto x en \mathcal{U} y los vectores tangentes al mismo punto x pero ahora tomado como elemento de \mathcal{M} , es una relación inyectiva, por lo tanto si $\alpha(x)$ como 1-forma sobre \mathcal{U} se anula con el vector X sobre \mathcal{M} , $\alpha(x)$ como la misma 1-forma pero sobre \mathcal{M} debe anularse sobre el mismo vector X pero sobre \mathcal{M} [29].

Parte II

Geometría de contacto

5 Aspectos básicos

Sea \mathcal{B} una variedad suave de dimensión $\dim \mathcal{B} = n$. Definamos sobre ella un campo suave Π de hiperespacios tangentes a \mathcal{B} , es decir, un mapeo que, a cada punto $x \in \mathcal{B}$ de la variedad, le asigna de manera suave el subespacio vectorial $\Pi(x)$ (de dimensión $n - 1$) en $T_x\mathcal{B}$ [20]:

$$\Pi : x \in \mathcal{B} \mapsto \Pi(x) \subset T_x\mathcal{B}. \quad (5.1)$$

A los objetos (5.1) se les denomina **distribuciones de co-dimensión 1** sobre $T\mathcal{B}$ (de ahora en adelante, simplemente distribuciones) y al par (\mathcal{B}, Π) se le identifica como una **variedad con una estructura de contacto**, o simplemente, una variedad de contacto [33]. Para entender a qué nos referimos cuando mencionamos que Π es suave, vale la pena pensar las cosas desde el punto de vista de campos vectoriales sobre \mathcal{B} . Sabemos que un campo vectorial suave es una sección transversal sobre el haz tangente [22], es decir, un mapeo $X : \mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{B}$, donde la suavidad se interpreta como continuidad [22]. Ahora, escoger un hiperespacio $\Pi(x)$ tangente a \mathcal{B} en el punto x , equivale a elegir $n - 1$ vectores linealmente independientes de $T_x\mathcal{B}$. Si resulta que dichos vectores son valores de campos vectoriales linealmente independientes,

$$\text{span}(X_1(x), \dots, X_{n-1}(x)) = \Pi(x),$$

esperamos que para cualquier otro punto $x' \neq x \in \mathcal{B}$, el hiperplano $\Pi(x')$ sea generado por los vectores asociados a los mismos campos vectoriales al evaluarlos en x' :

$$\Pi(x') = \text{span}(X_1(x'), \dots, X_{n-1}(x')),$$

siendo esta la manera en que generamos Π de manera suave: $\text{span}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \Pi$. Pensar en la distribución como una elección de $n - 1$ campos vectoriales, linealmente independientes, nos permite plantearla en términos de las llamadas 1-formas de contacto [33], es decir, elementos de una familia de 1-formas sobre \mathcal{B} cuyo kernel es precisamente dicha distribución:

$$[\alpha] = \{\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{B}) : \ker \alpha = \Pi\}. \quad (5.2)$$

Los detalles formales sobre cuándo dichas 1-formas de contacto existen, local y globalmente, en una variedad de contacto, se pueden revisar en [33, 29].

Un detalle importante que debemos notar es que la familia (5.2) se trata de una clase de equivalencia donde la relación está dada por la multiplicación conforme por una 0-forma

sobre \mathcal{B} que nunca se anula, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B})$ ²⁶²⁷ [33]:

$$\forall \alpha, \alpha' \in [\alpha], \quad \alpha \sim \alpha' \quad \iff \quad \exists f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B}), \quad \alpha = f \alpha'.$$

Esto es así porque sabemos que el kernel de una 1-forma no cambia al hacerle una transformación conforme, siempre que el factor conforme no se anule. Así que cuando digamos α es la 1-forma que genera la distribución, en realidad nos referiremos a que elegimos como representante de la clase de equivalencia de 1-formas de contacto a α .

5.1 Distribuciones máximamente no integrables

En particular, el tipo de variedades de contacto que estudiaremos son variedades de dimensión impar, $\dim \mathcal{B} = 2n + 1$, dotadas de una estructura de contacto máximamente no integrable (para una revisión de los conceptos relacionados a la integrabilidad de distribuciones, remítase a [33]). Formalmente decimos que una distribución es máximamente no integrable cuando las 1-formas de contacto satisfacen la condición máxima de no integrabilidad [33]:

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \equiv \alpha \wedge \underbrace{d\alpha \wedge d\alpha \wedge \dots \wedge d\alpha \wedge d\alpha}_{n\text{-veces}} \neq 0. \quad (5.3)$$

En consecuencia, la variedad de contacto se dice máximamente no integrable (en adelante, a menos que se especifique lo contrario, supondremos que este es el caso siempre). Veamos, geoméricamente, algunas consecuencias que trae consigo este tipo de estructura a las variedades sobre las que se impone.

Proposición 30. *Cada 1-forma de contacto sobre (\mathcal{B}, Π) le proporciona una orientación.*

Para cualquier 1-forma de contacto particular $\alpha \in [\alpha]$, notemos que $V_\alpha \equiv \alpha \wedge (d\alpha)^n$ es una top-forma sobre \mathcal{B} , $V_\alpha \in \Lambda^{2n+1}(\mathcal{B})$. En particular esta $2n + 1$ -forma, por definición de una estructura de contacto máximamente no integrable (5.3), es no degenerada, siendo por lo tanto una forma de volumen que impone una orientación particular sobre \mathcal{B} [22]. ■

Notemos que, si la 1-forma de contacto α genera la forma de volumen V_α , entonces la forma de contacto $f\alpha$ ($f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B})$) genera la forma de volumen $V_{f\alpha}$, relacionada con la primera por medio del factor conforme f^{n+1} :

$$V_{f\alpha} = (f\alpha) \wedge (d(f\alpha))^n = (f\alpha) \wedge (df \wedge \alpha + fd\alpha)^n = (f\alpha) \wedge (f^n (d\alpha)^n) = f^{n+1} V_\alpha \neq 0.$$

²⁶ $\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B})$ es como denotaremos al conjunto de todos los mapeos suaves, de \mathcal{B} a $\mathbb{R} - \{0\}$.

²⁷La multiplicación conforme por mapeos f como lo descritos es, efectivamente, una relación de equivalencia. Esto es fácil de ver notando que todo elemento es la multiplicación conforme de sí mismo por la función $f = 1$, mientras que las propiedades simétricas y transitivas se deducen fácilmente porque dado los factores conformes f y g , podemos construir los factores conformes f^{-1} y fg , que también satisfacen nunca anularse en todo \mathcal{B} .

Aunque se sigue manteniendo la invarianza ante transformaciones conformes, en el sentido de que la orientación de \mathcal{B} siempre se obtiene como consecuencia de que Π exista (a través de cualquiera de sus 1-forma de contacto), notamos que sólo en el caso en que $n = (\dim\mathcal{B} - 1)/2$ es un número impar, la orientación proviene naturalmente de Π y no depende de la parametrización $f\alpha$ que elijamos de la 1-forma de contacto. Dicho de otra manera, para variedades donde n es par, tendremos orientaciones positivas y negativas²⁸ según la elección que hagamos de f en $f\alpha$, pero para variedades con n impar sólo tendremos una orientación independientemente de la f escogida.

Proposición 31. *La derivada exterior de una 1-forma de contacto α es una 2-forma no degenerada cuando se limita a Π .*

La condición (5.3) nos dice que α es, para cada $x \in \mathcal{B}$, una 1-forma no degenerada en el complemento tangente de la distribución mientras que $(d\alpha)^n$ es una $2n$ -forma no degenerada para todos los elementos de $\Pi(x)$. En efecto, sea (X_1, \dots, X_{2n}, R) una lista de $2n + 1$ campos vectoriales sobre \mathcal{B} , linealmente independientes²⁹, tale que los primero $2n$ campo generen Π .

El volumen de contacto V_α del paralelepípedo (X_1, \dots, X_{2n}, R) da lugar a una serie de $2n + 1$ términos donde únicamente sobrevive³⁰ el término de la forma $\alpha(R) (d\alpha)^n(X_1, \dots, X_{2n})$, dando lugar a la expresión

$$V(X_1, \dots, X_{2n}, R) = \alpha(R) (d\alpha)^n(X_1, \dots, X_{2n}) \neq 0 \quad \implies \quad (d\alpha)^n \Big|_{\Pi} \neq 0.$$

Ahora, basta recordar que una 2-forma es no degenerada si y sólo si su n -ésima potencia exterior es una top-forma no degenerada, tal como lo vimos en la proposición (13):

$$(d\alpha)^n \Big|_{\Pi} \neq 0 \quad \implies \quad d\alpha \Big|_{\Pi} \neq 0. \quad \blacksquare$$

Como resultado de esta proposición podemos decir que, para cada $x \in \mathcal{B}$, el espacio vectorial $(\Pi(x), (d\alpha)(x))$ es un espacio vectorial simpléctico, con todo lo que esto implica. Por este motivo llamaremos a la 2-forma $d\alpha \in \Lambda^2(\mathcal{B})$, una 2-forma **pre-simpléctica**. En particular, podemos hablar de que existe una base simpléctica de campos vectoriales para Π , donde $d\alpha$ adquiere la forma (2.8) del teorema de Darboux. De hecho, existe un teorema similar que nos permite expresar toda forma de contacto de una manera estándar.

Teorema 2 (Darboux II). *Sea (\mathcal{B}, Π) una variedad de contacto. Para cada $x \in \mathcal{B}$ y cada 1-forma de contacto $\alpha \in [\alpha]$, existe cuando menos una carta (U, ϕ) , con $x \in U \subset \mathcal{B}$ y $\phi(x) = (\tau, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, tal que en la base inducida en los espacios cotangentes a U , $(d\tau, dq^1, \dots, dq^n, dp_1, \dots, dp_n)$, la 1-forma de contacto se presenta como³¹*

²⁸Con respecto a una elección arbitraria, o respetando las orientaciones externas que pueda tener la variedad debidas, por ejemplo, a que tienen definidas una estructura riemanniana.

²⁹En otra palabras, tales que para cada $x \in \mathcal{B}$ los vectores $(X_1(x), \dots, X_{2n}(x), R(x))$ son linealmente independientes.

³⁰Salvo el término al que hacemos referencia, todos los demás contienen el factor $\alpha(X_j) = 0$, pues $X_j \in \Pi = \ker \alpha$.

³¹La demostración puede encontrarse en [33, 29].

$$\alpha = d\tau - \sum_{i=1}^n p_i dq^i. \quad (5.4)$$

Por inspección directa notamos que las coordenadas de Darboux, sobre abiertos de \mathcal{B} , para la 1-forma de contacto α , inducen a su vez una base simpléctica sobre $\ker \alpha$:

$$d\alpha = d\left(d\tau - \sum_{i=1}^n p_i dq^i\right) = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i,$$

6 Contactomorfismos

Un **contactomorfismo** de la variedad de contacto (\mathcal{B}, Π) a otra variedad de contacto (\mathcal{B}', Π') , con $\dim \mathcal{B}' = 2n' + 1 \geq \dim \mathcal{B}$, es un mapeo diferenciable $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ tal que su pullback $\varphi^* : T^*\mathcal{B}' \rightarrow T^*\mathcal{B}$ es un mapeo que manda cualquier 1-forma de contacto α' sobre \mathcal{B}' , a una 1-forma de contacto α sobre \mathcal{B} (módulo $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B})$):

$$\varphi^* \alpha' = f \alpha. \quad (6.1)$$

En términos geométricos un contactomorfismo es un mapeo cuya diferencial, o pushforward, mapea la distribución máximamente no integrable de \mathcal{B} , $\ker \alpha = \Pi$, en la distribución máximamente no integrable de \mathcal{B}' , $\ker \alpha' = \Pi'$:

$$\forall X \in \Pi = \ker \alpha, \quad 0 = f\alpha(X) = \varphi^* \alpha'(X) = \alpha'(\varphi_* X) \implies \varphi_* X \in \Pi' = \ker \alpha'.$$

En particular, cuando las variedades de contacto tienen la misma dimensión, resulta claro que el contactomorfismo mapea Π en Π' de forma biunívoca, siendo por lo tanto φ_* un mapeo biyectivo. Es esto lo que nos permite definir el **grupo de contacto** sobre (\mathcal{B}, Π) como el grupo de Lie formado por el subconjunto $\text{Cont}(\mathcal{B}, \Pi) \subset \text{Diff}(\mathcal{B})$, con la composición de mapeos como la operación producto del grupo [33].

Como consecuencia de que los difeomorfismos en $\text{Cont}(\mathcal{B}, \Pi)$ preserven la estructura de contacto, existen algunas propiedades interesantes que vale la pena mencionar acerca de los contactomorfismos.

Proposición 32. *Los contactomorfismos sobre \mathcal{B} preservan (salvo una multiplicación conforme f^{n+1}) la forma de volumen de contacto.*

La demostración se reduce a un cálculo directo al utilizar las propiedades del pullback de $\varphi \in \text{Cont}(\mathcal{B}, \Pi)$ en V_α , siendo que este distribuye con respecto al producto cuña y conmuta con la derivada exterior [22]:

$$\begin{aligned}\varphi^*V_\alpha &= \varphi^*(\alpha \wedge (d\alpha)^n) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*(d\alpha)^n) = (\varphi^*\alpha) \wedge (d(\varphi^*\alpha))^n \\ &= (f\alpha) \wedge (d(f\alpha))^n = f^{n+1}\alpha \wedge (d\alpha)^n = f^{n+1}V_\alpha.\end{aligned}$$

■

En particular, decimos que un contactomorfismo φ sobre (\mathcal{B}, Π) es **estricto** si satisface la condición (6.1) con $f = 1$ en todo el dominio de φ [33]. Particularmente el mapeo identidad es un contactomorfismo estricto, y tomando en cuenta además que el mapeo inverso de todo contractomorfismo estricto debe ser también estricto, resulta fácil ver que el subconjunto de contactomorfismos estrictos es un subgrupo $\text{Cont}_0(\mathcal{B}, \Pi) \subset \text{Cont}(\mathcal{B}, \Pi)$.

De la proposición anterior es claro que los elementos de $\text{Cont}_0(\mathcal{B}, \Pi)$ conservan el volumen de contacto, además de tener otras características que los vuelen interesantes. La siguiente proposición nos brinda una condición necesaria y suficiente para saber cuándo un mapeo es un contractomorfismo estricto en términos de coordenadas locales.

Proposición 33. *El mapeo diferenciable φ es un contactomorfismo estricto sobre \mathcal{B} si y sólo si, para cada $x \in \mathcal{B}$, dada la carta de Darboux $(U, (\tau, q^i, p_i))$ en una vecindad de $\varphi(x)$, la carta $(\varphi^{-1}(U), (\tau \circ \varphi, q^i \circ \varphi, p_i \circ \varphi))$ también es una carta de Darboux en una vecindad de x .*

La demostración de esta proposición es muy similar a la demostración de la proposición (18): que $(\varphi^{-1}(U), \tau \circ \varphi, q^i \circ \varphi, p_i \circ \varphi)$ sea una carta de Darboux significa que, localmente, la 1-forma de contacto de \mathcal{B} puede expresarse en la base cotangente inducida por las coordenadas como

$$\alpha = d(\tau \circ \varphi) - \sum_{i=1}^n (p_i \circ \varphi) d(q^i \circ \varphi),$$

pero las composiciones $\tau \circ \varphi$, $q^i \circ \varphi$ y $p_i \circ \varphi$ no son más que los pullbacks de φ aplicados a las 0-formas τ , q^i y p_i , por lo tanto llegamos a la conclusión de que φ satisface (6.1) para $f = 1$,

$$\begin{aligned}\alpha &= d(\tau \circ \varphi) - \sum_{i=1}^n (p_i \circ \varphi) d(q^i \circ \varphi) = d(\varphi^*\tau) - \sum_{i=1}^n (\varphi^*p_i) d(\varphi^*q^i) \\ &= \varphi^*(d\tau) - \sum_{i=1}^n \varphi^*(p_i dq^i) = \varphi^*\left(d\tau - \sum_{i=1}^n p_i dq^i\right) = \varphi^*\alpha,\end{aligned}$$

demostrando que φ efectivamente es un contractomorfismo estricto. Conversamente, si sabemos que φ es un contractomorfismo estricto podemos revertir sin problemas cada uno

de los pasos para mostrar que las coordenadas $(\tau \circ \varphi, q^i \circ \varphi, p_i \circ \varphi)$ son coordenadas de Darboux en $\varphi^{-1}(U)$. ■

Proposición 34. *Todo contactomorfismo estricto sobre (\mathcal{B}, Π) es un “simplectomorfismo” de la forma presimpléctica $d\alpha$, entendiendo esto como*

$$\forall \varphi \in \text{Cont}_0(\mathcal{B}, \Pi), \quad \varphi^*(d\alpha) = d\alpha. \quad (6.2)$$

Tomemos como punto de partida un contactomorfismo completamente general φ y calculemos la derivada exterior en la expresión (6.1), conmutando nuevamente el pullback φ^* con la derivada exterior:

$$d(\varphi^*\alpha) = d(f\alpha) \quad \implies \quad \varphi^*(d\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha.$$

Resulta fácil ver que, en el caso particular en que $f = 1$, es decir, cuando φ es estricto, $df = 0$ y obtenemos de la expresión anterior el resultado (6.2). ■

Asociado con cada 1-forma de contacto α tenemos un campo vectorial muy particular, llamado el **campo vectorial de Reeb** de α , definido completamente a partir de las condiciones

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad i_{R_\alpha} d\alpha &= d\alpha(R_\alpha, \bullet) \equiv 0. \\ \text{(ii)} \quad i_{R_\alpha} \alpha &= \alpha(R_\alpha) = 1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

En efecto, como $d\alpha$ es una 2-forma en una variedad de dimensión impar (la variedad de contacto) debe ser una 2-forma degenerada [29]. Pero al mismo tiempo, como la variedad de contacto es máximamente no integrable, $d\alpha|_\Pi \neq 0$. Esto significa que su kernel es unidimensional (el complemento de Π en los espacios tangentes). Estamos eligiendo entonces el campo de Reeb como el único elemento de dicho kernel que está *normalizado* con respecto a α ³²

Retomando lo comentado en el párrafo anterior, el subespacio vectorial tangente a cada $x \in \mathcal{B}$, que genera $R_\alpha(x)$, es un espacio unidimensional que coincide con el kernel de la 2-forma presimpléctica asociada,

$$\forall x \in \mathcal{B}, \quad \text{span}(R_\alpha(x)) = \ker(d\alpha(x)),$$

siendo por lo tanto el complemento vectorial a $\Pi(x)$ en $T_x\mathcal{B}$:

³²Sabemos que $\alpha|_{\ker d\alpha} \neq 0$ pues, de serlo, tendríamos $\alpha = 0$ en todo espacio tangente de \mathcal{B} , o, equivalentemente, tendríamos $R_\alpha \in \Pi$ y como $i_{R_\alpha} d\alpha = 0$, entonces realmente $d\alpha$ no sería una 2-forma no degenerada sobre Π .

$$\forall x \in \mathcal{B}, \quad T_x \mathcal{B} = \Pi(x) \oplus \text{span}(R_\alpha(x)). \quad (6.4)$$

Es así que nos damos cuenta que definir un campo vectorial de Reeb equivale a definir un complemento vectorial de la distribución Π en todo el haz tangente $T\mathcal{B}$ de la variedad de contacto. Por supuesto esta elección de complemento no es única y se relaciona a la elección particular de una 1-forma de contacto en $[\alpha]$. En el momento en que elegimos trabajar con una 1-forma de contacto particular, α , tal que $\ker \alpha = \Pi$, hemos definido un complemento vectorial particular para trabajar. De esta manera, aunque resulta irrelevante la elección del elemento en la clase de equivalencia $[\alpha]$, para describir la distribución Π , nos genera resultados distintos en cuanto a su complemento vectorial..

Siguiendo con la idea de que, eligiendo α tenemos una partición natural (6.4) del espacio tangente, podemos construir una base de campos vectoriales también muy natural, utilizando el campo de Reeb R_α de $\ker d\alpha$ y una base cualquiera $(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$ en Π . En términos de la base vectorial inducida por las coordenadas de Darboux, una elección es

$$R_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad Q_i \equiv \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad P_i \equiv \frac{\partial}{\partial q_i} + p_i \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.5)$$

Lo interesante de utilizar la base (6.5) es que, como utilizamos el campo de Reeb como elemento de la base, resulta que la 1-forma de contacto α también se utiliza como elemento de la base de 1-formas dual a (6.5)³³:

$$\alpha = d\tau - \sum_{i=1}^n p_i dq^i, \quad \sigma_Q^i = dp_i, \quad \sigma_P^i = dq^i. \quad (6.6)$$

Resulta interesante comentar que la base (6.5) no es inducida por sistema local de coordenadas alguno, tal como podemos constatar al calcular los corchetes de Lie entre sus elementos,

$$[Q_i, R_\alpha] = [P_i, R_\alpha] = [Q_i, Q_j] = [P_i, P_j] = 0, \quad [Q_i, P_j] = \delta_{ij} R_\alpha. \quad (6.7)$$

Veamos ahora algunas propiedades interesante de los campos de Reeb R_α , comenzando por identificar su flujo como una familia de contactomorfismos.

Proposición 35. *El flujo generado por el campo vectorial de Reeb de una 1-forma de contacto la deja invariante (módulo $f \neq 0$).*

Para demostrar este hecho basta calcular la derivada de Lie de α con respecto a R_α , utilizando para esto la fórmula mágica de Cartán así como las condiciones (6.3):

³³ $\alpha(R_\alpha) = \sigma_Q^i(Q_i) = \sigma_P^i(P_i) = 1$, y cero en cualquier otra evaluación.

$$\mathcal{L}_{R_\alpha} \alpha = (di_{R_\alpha} + i_{R_\alpha} d) \alpha = d(i_{R_\alpha} \alpha) + i_{R_\alpha} d\alpha = d(1) = 0.$$

■

Podemos dar una descripción local del campo de Reeb de una 1-forma de contacto α si utilizamos coordenadas canónicas de Darboux, siendo el flujo asociado a $R_\alpha = \partial_\tau$ el mapeo exponencial, $\varphi^{R_\alpha}(t, x) = \varphi^{\partial_\tau}(t, x) = \exp(t\partial_\tau)$, que localmente puede interpretarse como una traslación en dirección de la coordenada τ [22]:

$$\varphi^{R_\alpha}(t, \tau, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = (\tau + t, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n). \quad (6.8)$$

A diferencia de otros aspectos de la teoría de variedades de contacto que se definen en términos o como consecuencia de la distribución máximamente no integrable sobre la variedad, remarcamos que el campo vectorial de Reeb está íntimamente relacionado con la 1-forma de contacto α y no con Π . Esto quiere decir que R_α , siendo el campo de Reeb de α , en general no es el campo de Reeb de $f\alpha$. En particular el flujo de R_α no deja invariante a $f\alpha$, a menos f por si misma sea **constante** a través del flujo de R_α , es decir,

$$\mathcal{L}_{R_\alpha}(f\alpha) = \mathcal{L}_{R_\alpha}(f)\alpha + f\mathcal{L}_{R_\alpha}(\alpha) = (R_\alpha \triangleright f)\alpha = 0 \quad \implies \quad R_\alpha \triangleright f = 0.$$

En términos de las coordenadas locales de Darboux, esto se entiende como que f sea independiente de τ : $R_\alpha \triangleright f = \partial f / \partial \tau = 0$.

Una clase de campos vectoriales más generales sobre la variedad de contacto (\mathcal{B}, Π) son los llamados **campos de contacto** X , definidos como todos aquellos que, con respecto a cualquier campo vectorial Y , en Π son involutivos, es decir, que su bracket de Lie con cualquier campo tangente a la distribución es un campo tangente a la distribución [33]:

$$\forall Y \in \Pi, \quad [X, Y] \in \Pi. \quad (6.9)$$

Si recordamos que para campos vectoriales X y Y , la derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y$ coincide con $[X, Y]$, podemos ver que realmente lo que nos dice (6.9) es que un vector tangente a la distribución se mantiene, a través del flujo del campo de contacto, tangente a la distribución Π :

$$\forall Y \in \Pi, \quad [X, Y] = \mathcal{L}_X Y \in \Pi. \quad (6.10)$$

Veamos a continuación algunas propiedades interesantes de estos campos, entre la que destaca su papel como generador de contactomorfismos.

Proposición 36. *Ningún campo de contacto es tangente a la distribución de la variedad de contacto.*

Sea X el campo de contacto en cuestión, entonces por definición para cualquier campo Y con imagen en Π , tenemos $[X, Y] \in \Pi = \ker \alpha$. Supongamos que X también es tangente. Como $d\alpha$ es no degenerada en Π , entonces $(d\alpha)(X, Y) \neq 0$, pero por el contrario sabemos que³⁴

$$(d\alpha)(X, Y) = -\alpha([X, Y]) = 0,$$

de tal forma que pensar que un campo de contacto X puede ser también un campo tangente a la distribución da lugar a contradicciones sobre la no degeneración de $d\alpha$ dicha distribución. ■

Proposición 37. *El conmutador de dos campos vectoriales de contacto también es un campo vectorial de contacto.*

Sean X y Y dos campos vectoriales de contacto en (\mathcal{B}, Π) , y sea Z cualquier campo tangente en $\ker \alpha = \Pi$, de tal manera que $[X, Z] \equiv Z' \in \Pi$ y $[Y, Z] \equiv Z'' \in \Pi$. Aquí sólo tenemos que utilizar la identidad de Jacobi, que satisface el conmutador [22], para demostrar que $[X, Y]$ también es un campo de contacto:

$$[Z, [X, Y]] = [[Z, X], Y] + [X, [Z, Y]] = [Z', Y] + [X, Z''] \in \Pi.$$

■

Como consecuencia de la proposición anterior, vemos que el conjunto de todos los campos de contacto en (\mathcal{B}, α) dotado del corchete de Lie es un álgebra de Lie. La siguiente proposición nos muestra precisamente que dicha álgebra de Lie corresponde a $\mathbf{cont}(\mathcal{B}, \Pi)$, es decir, el álgebra de Lie asociado al grupo de contacto $\mathbf{Cont}(\mathcal{B}, \Pi)$.

Proposición 38. *Una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial X sobre \mathcal{B} sea un campo de contacto, es que se satisfaga la condición*

$$\exists g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B}), \quad \mathcal{L}_X \alpha = g\alpha. \quad (6.11)$$

Sea X un campo de contacto y sea Y cualquier campo en $\Pi = \ker \alpha$, calculemos la derivada de Lie de la cantidad $\alpha(Y) = 0$ con respecto al flujo generado por X ,

$$0 = \mathcal{L}_X (\alpha(Y)) = \mathcal{L}_X i_Y \alpha = (\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X) \alpha + i_Y \mathcal{L}_X \alpha = i_{[X, Y]} \alpha + i_Y \mathcal{L}_X \alpha,$$

³⁴En general, $(d\alpha)(X, Y) = X \triangleright \alpha(Y) - Y \triangleright \alpha(X) - \alpha([X, Y])$ [22], pero como en particular estamos tomando $X, Y \in \Pi = \ker \alpha$, $\alpha(X) = \alpha(Y) = 0$.

donde hemos utilizado la propiedad $i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X$ [22]. Ahora, como $[X, Y] \in \Pi = \ker \alpha$, entonces la expresión anterior nos indica que Y se encuentra en $\ker \mathcal{L}_X \alpha$ y por lo tanto tenemos la inclusión $\ker \alpha \subset \ker \mathcal{L}_X \alpha$, pero como $\mathcal{L}_X \alpha$ debe ser una 1-forma, su kernel tiene la misma dimensión que el kernel de α y por lo tanto la inclusión se convierte en igualdad: $\ker \alpha = \ker \mathcal{L}_X \alpha$. Para que esto ocurra, α y $\mathcal{L}_X \alpha$ deben diferir únicamente en un factor conforme $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B})$ ³⁵, de donde obtenemos el resultado esperado, $\mathcal{L}_X \alpha = f \alpha$.

Conversamente, si φ^X , el flujo del campo X , es un contactomorfismo de α , $\varphi^{X*} \alpha = f(f) \alpha$ ³⁶, entonces por la definición de la derivada de Lie,

$$\mathcal{L}_X \alpha = \frac{d}{dt} (\varphi^{X*} \alpha) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (f(t) \alpha) \Big|_{t=0} = \left(\frac{df(t)}{dt} \right) \Big|_{t=0} \alpha = g \alpha,$$

donde hemos definido sin problemas $g \equiv (df/dt)|_{t=0}$. Nuevamente, como puede darse el caso que $(df/dt)|_{t=0} = 0$, no imponemos la condición $g \neq 0$. ■

Algo interesante respecto a los campos de contacto es que sus flujos son contactomorfismos para toda elección de α en la clase de equivalencia $[\alpha]$, es decir, son verdaderas transformaciones geométricas sobre la distribución Π . En efecto, si $\mathcal{L}_X \alpha = g \alpha$, entonces para cualquier $f \neq 0$, se sigue cumpliendo

$$\mathcal{L}_X (f \alpha) = X \triangleright f \alpha + f g \alpha = (X \triangleright f + f g) \alpha = g' \alpha, \quad g' \equiv X \triangleright f + f g.$$

Como caso particular de esta proposición vemos que los campos vectoriales de Reeb son campos de contacto. En efecto, como vimos anteriormente, el campo de Reeb R_α deja invariante a α , es decir, satisface (6.11) con $g = 0$, y por lo tanto es un campo de contacto.

Proposición 39. *Los campos de Reeb generan contactomorfismos estrictos.*

Ahora, como para todo flujo se satisface que el producto de dos elementos es igual al elemento etiquetado con la suma de sus parámetros reales, es decir, $\varphi_{t+t_0} = \varphi_t \circ \varphi_{t_0}$, vemos que el pullback del flujo de R_α se mantiene constante para toda $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} (\varphi_t^* \alpha) \Big|_{t=t_0} = \varphi_{t_0}^* \frac{d}{dt} (\varphi_t^* \alpha) \Big|_{t=0} = \varphi_{t_0}^* (\mathcal{L}_{R_\alpha} \alpha) = 0,$$

lo que quiere decir que $\varphi_t^* \alpha = \varphi_0^* \alpha = \text{Id}_{\mathcal{B}}^* \alpha = \text{Id}_{T^*\mathcal{B}} \alpha = \alpha$, lo que demuestra que el flujo generado por el campo de Reeb, como campo de contacto, es un contactomorfismo estricto. ■

Existen muchas otra propiedades interesantes en los campos de contacto, entre la que

³⁵Notemos que si $\ker \mathcal{L}_X \alpha \not\subset \ker \alpha$, la única alternativa es que $\mathcal{L}_X \alpha$ sea la 1-forma nula 0, cuyo caso también está contemplado al no imponer como condición que $g \neq 0$.

³⁶Para cada t , $f(t) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B})$.

destaca la identificación de cada uno de ellos con una 0-forma sobre la variedad de contacto, llamada la **función hamiltoniana** asociada al campo de contacto (o simplemente hamiltoniana de contacto). Este aspecto, así como la existencia de un álgebra de Poisson de contacto, se exploran en [33].

7 Subvariedades legendrianas

Una **subvariedad legendriana** de una variedad $2n + 1$ dimensional de contacto (\mathcal{B}, Π) , $Le \subset \mathcal{B}$, es un variedad suave n dimensional que está encajada mediante el mapeo

$$\rho : Le \hookrightarrow \mathcal{B}, \quad (7.1)$$

tal que, para todo punto $x \in Le$, sus espacios tangentes, vistos como subespacios vectoriales del espacio tangente a $\rho(x) = x \in \mathcal{B}$, son subespacios vectoriales contenidos completamente en el hiperespacio $\Pi(x)$ [33]:

$$\forall x \in Le \subset \mathcal{B}, \quad T_{\rho(x)}\mathcal{B} \subset \Pi(\rho(x)). \quad (7.2)$$

La condición (7.2) es, en el ámbito de la geometría de contacto, la definición de una subvariedad isotrópica [33], y puede expresarse de forma más simple como la condición

$$\rho^*\alpha = 0. \quad (7.3)$$

En este sentido una subvariedad legendriana no es más que una subvariedad isotrópica de dimensión máxima [33].

Proposición 40. *Sea (\mathcal{B}, Π) una variedad de contacto $2n + 1$ dimensional, y $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ una subvariedad, encajada mediante un mapeo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, isotrópica. Entonces su dimensión no puede ser mayor a n .*

Para demostrar que $\dim \mathcal{A} \leq n$, sólo hace falta mostrar que, siendo \mathcal{A} una subvariedad isotrópica de \mathcal{B} , sus espacios tangentes son subespacios vectoriales isotrópicos (en el sentido de la geometría simpléctica) del espacio vectorial simpléctico³⁷ $(\Pi, d\alpha|_{\Pi})$. En efecto, en tal caso sólo hace falta emplear el resultado (8) de la primera parte:

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad \dim \mathcal{A} = \dim T_x \mathcal{A} \leq \frac{1}{2} \dim \Pi = n.$$

Como $\varphi^*\alpha = 0$, o dicho de otra manera, todo vector tangente a \mathcal{A} es mapeado en un vector tangente a Π según (7.2),

³⁷Recordemos que $d\alpha$, con $\ker \alpha = \Pi$, es una 2-forma presimpléctica, particularmente no degenerada sobre Π , razón por la cual $d\alpha|_{\Pi}$ en efecto se trata de una 2-forma simpléctica sobre la variedad trivial Π .

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad X \in T_x \mathcal{A}, \quad \varphi_* X \in \Pi(\varphi(x)),$$

trivialmente $\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha) = 0$, por lo que los vectores en $T_x \mathcal{A}$ también son enviados a su complemento simpléctico, bajo $d\alpha|_{\Pi(\varphi(x))}$,

$$\forall x \in \mathcal{A}, \quad X, Y \in T_x \mathcal{A},$$

$$d\alpha(\varphi(x))(\varphi_* X, \varphi_* Y) = (\varphi^*(d\alpha))(X, Y) = 0 \quad \implies \quad T_x \mathcal{A} \subset T_x \mathcal{A}^{d\alpha|_{\Pi(\varphi(x))}}.$$

demostrando de esta manera que los espacios tangentes son subespacios vectoriales isotrópicos del espacio vectorial simpléctico $(\Pi, d\alpha|_{\Pi})$, terminando así con esta demostración. \blacksquare

El hecho de que el espacio tangente a todo punto de la subvariedad legendriana se encuentre inmerso en la distribución Π , nos dice que cualquier 1-forma de contacto sobre \mathcal{B} se anula al traerse, mediante el pullback ρ^* , a Le , siendo otra forma de caracterizar a dicha subvariedad la condición

$$\dim Le = \frac{\dim \mathcal{B} - 1}{2} = n, \quad \rho^* \alpha = \alpha|_{Le} = 0. \quad (7.4)$$

Además, como consecuencia del planteamiento que utilizamos en la proposición anterior, podemos pensar en las subvariedades legendrianas simplemente como en subvariedades lagrangianas del espacio vectorial simpléctico $(\Pi, d\alpha|_{\Pi})$, con todas las consecuencias que esto trae consigo, consecuencias que estudiamos anteriormente en la primera parte.

8 Hipervariedades simplécticas en variedades de contacto

En esta sección analizaremos un resultado importante de la geometría simpléctica, que nos dice que en toda variedad de contacto (co-orientable y máximamente no integrable), podemos encontrar hipervariedades dotadas de una estructura simpléctica [33, 20].

Proposición 41. *Sea (\mathcal{B}, Π) una variedad de contacto, y sea $Z \in \mathbf{cont}(\mathcal{B}, \Pi)$ cualquier campo de contacto sobre ella. Toda hipervariiedad suave $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$, encajada mediante el mapeo $\ell : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$, transversal³⁸ a Z , está dotada de una estructura simpléctica.*

La demostración de este resultado se basa en la idea que ya hemos repetido varias veces, sobre el hecho de que una distribución máximamente no integrable Π define 1-formas de contacto, cuyas derivadas exteriores son 2-formas presimplécticas, es decir, son 2-formas cerradas y no degeneradas sobre la distribución. El kernel de estas 2-formas presimplécticas se trata de una colección de espacios vectoriales, tangentes a \mathcal{B} , unidimensionales, que

³⁸Es decir, que el campo vectorial Z nunca se encuentra en los espacios tangentes a \mathcal{M} .

son elecciones de complementos vectoriales para la distribución. En efecto, dado cada $Z \in \text{cont}(\mathcal{B}, \Pi)$, basta elegir correctamente $\alpha \in [\alpha]^{39}$ para que dicho campo de contacto sea el campo de Reeb $Z = R_\alpha$, y la discusión se reduce a la que ya tuvimos cuando introdujimos este elemento geométrico (6.3).

Ahora, dado que \mathcal{M} es una hipervariiedad encajada en \mathcal{B} , que es transversal a R_α , en cada punto de \mathcal{M} inmerso trivialmente en la variedad de contacto, $\ell(x) = x \in \mathcal{B}$, se nos presenta también la separación del espacio tangente

$$\forall x \in \mathcal{M} \subset \mathcal{B}, \quad T_x \mathcal{B} = T_x \mathcal{M} \oplus \text{span}(R_\alpha(x)).$$

Tomando en cuenta todo lo dicho anteriormente, resulta claro que la 2-forma sobre \mathcal{M} , definida vía el pullback $\ell^*(d\alpha) = d\alpha|_{T_x \mathcal{M}}$, es una 2-forma no degenerada y exacta, y por lo tanto $(\mathcal{M}, \ell^*(d\alpha))$ es, efectivamente, una variedad simpléctica. ■

Más aún, como el pullback conmuta⁴⁰ con la derivada exterior, la 2-forma simpléctica $\ell^*(d\alpha) = d(\ell^*\alpha)$ es exacta, y por lo tanto $(\mathcal{M}, \ell^*(d\alpha))$ es una variedad simpléctica exacta con potenciales simplécticos de la forma $\ell^*\alpha + \beta$, con $\beta \in \Lambda^1(\mathcal{M})$ cerrada. Esto resulta importante dado que, como vimos en la proposición (14), no existen variedades simplécticas exactas que sean cerradas, de tal manera que una condición extra que debemos pedir es que \mathcal{M} no sea cerrada. A las hipervariiedades $(\mathcal{M}, d(\ell^*\alpha))$ que satisfacen estos criterios se les conoce como **hipervariiedades de tipo simpléctico** [33].

Sin perder generalidad, siempre podemos tomar un sistema de coordenadas locales de Darboux $(\tau, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ en cualquier vecindad del punto $\ell(x \in \mathcal{M}) = x \in \mathcal{B}$. En las vecindades de x , por otra lado, las coordenadas las podemos elegir entonces como los pullback $\ell^*q^i = q^i \circ \ell \equiv Q^i$ y $\ell^*p_i = p_i \circ \ell \equiv P_i$: $(Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. De esta manera, bajo estas coordenadas, la parametrización de la hipervariiedad \mathcal{M} se da por medio de la función suave $\tau \circ \ell \equiv K_\tau \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ ⁴¹:

$$\ell : (Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n) \mapsto (\tau \circ \ell = K_\tau(Q, P), Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n). \quad (8.1)$$

Proposición 42. *Siempre que $(\tau, q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ sea un sistema local de coordenadas de Darboux para \mathcal{B} (en el sentido de la geometría de contacto 5.4), las coordenadas $(Q^1 \equiv \ell^*q^1, \dots, Q^n \equiv \ell^*q^n, P_1 \equiv \ell^*p_1, \dots, P_n \equiv \ell^*p_n)$ son un sistema local de coordenadas de Darboux para \mathcal{M} (en el sentido de la geometría simpléctica 2.8).*

³⁹Si se trabaja con una 1-forma de contacto particular α' , básicamente basta elegir la 1-forma de contacto relacionada $\alpha = (\alpha'(Z))^{-1}\alpha'$ para que Z sea R_α .

⁴⁰En este caso la derivada exterior que aparece en la expresión $\ell^*(d\alpha)$ se refiere al operador que manda p -formas sobre \mathcal{B} a $p+1$ -formas sobre \mathcal{B} , $d : \Lambda^p(\mathcal{B}) \rightarrow \Lambda^{p+1}(\mathcal{B})$, mientras que la derivada exterior en $d(\ell^*\alpha)$ es el operador que manda p formas sobre \mathcal{M} a $p+1$ -formas sobre \mathcal{M} , $d : \Lambda^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda^{p+1}(\mathcal{M})$, de tal manera que decir que ℓ^* y d conmutan es más un abuso del lenguaje.

⁴¹En efecto, tomemos en cuenta que la expresión en coordenadas del mapeo ℓ se da través de las composiciones $q^i \circ \ell = \ell^*q^i = Q^i$, $p_i \circ \ell = \ell^*p_i = P_i$ y $\tau \circ \ell \equiv K_\tau$ [22].

Esta demostración se da por el cálculo directo, empleando el teorema de Darboux de contacto, así como las propiedades del pullback y, por supuesto, el teorema de Darboux simpléctico, mostrando que $\ell^*(d\alpha)$ en las coordenadas $(Q^1, \dots, Q^n, P_1, \dots, P_n)$ tiene la forma (2.8):

$$\ell^*(d\alpha) = \ell^* \left(\sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i \right) = \sum_{i=1}^n (\ell^* dq^i) \wedge (\ell^* dp_i) = \sum_{i=1}^n d(\ell^* q^i) \wedge d(\ell^* p_i) = \sum_{i=1}^n dQ^i \wedge dP_i.$$

■

Un detalle que no debe pasarse por alto en la construcción de una hipervariiedad de tipo simpléctico es que, aunque como encajamiento $\ell(\mathcal{M})$ es transversal a los campos de contacto de Π en \mathcal{B} , la distribución Π no es su colección de espacios tangentes. En otras palabras, aunque los espacios tangentes de \mathcal{M} y los hiperespacios de Π son ambos transversales a cualquier campo de contacto, esto no son iguales de manera general. Y esto es porque, precisamente, Π es una distribución máximamente no integrable que no admite ser el haz tangente de una subvariedad suave [33]. Una forma fácil de clarificar esta situación es por medio del sistema de coordenada natural que acabamos de definir.

Sean $X_i \equiv \ell_* \partial_{Q^i}$ y $Y_i \equiv \ell_* \partial_{P_i}$ los pushforward de los elementos de la base tangente inducida por dichas coordenadas, no es difícil ver que en la base tangente inducida por las coordenada de Darboux, dichos campos vectoriales tienen la forma⁴²

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{M}, \quad X_i(\ell(x)) &= \frac{\partial K_\tau}{\partial Q^i}(x) \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\ell(x)} + \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\ell(x)}, \\ Y_i(\ell(x)) &= \frac{\partial K_\tau}{\partial P_i}(x) \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\ell(x)} + \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{\ell(x)}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Es fácil apreciar que, en general, ni X_i ni Y_i son campos tangentes a $\Pi(\ell(\mathcal{M}))$:

$$\begin{aligned} \alpha(\ell(x))(X_i) &= \frac{\partial K_\tau}{\partial Q^i}(x) - p_i \circ \ell(x) = \frac{\partial K_\tau}{\partial Q^i}(x) - P_i(x) \neq 0, \\ \alpha(\ell(x))(Y_i) &= \frac{\partial K_\tau}{\partial P_i}(x) \neq 0. \end{aligned}$$

9 Contactificación

Así como a una variedad de contacto (máximamente no integrable) le pudimos asociar variedades simplécticas como se vio en la sección anterior, a toda variedad simpléctica (exacta) le podemos asociar también variedades de contacto mediante el proceso llamado

⁴²Para calcular las componentes en, por ejemplo, ∂_τ , basta emplear la dualidad pushforward-pullback: $d\tau(X_i) = d\tau(\ell_* \partial_{Q^i}) = d(\ell^* \tau)(\partial_{Q^i}) = dK_\tau(\partial_{Q^i}) = \partial K_\tau / \partial Q^i$.

contactificación [20].

Sea $(\mathcal{M}, d\mu)$ una variedad simpléctica exacta con potencial simpléctico μ dentro de la clase de cohomología $[\mu]$. Asociada a esta variedad siempre podemos construir el haz fibrado lineal, y trivial: $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$, con proyección natural

$$\pi_C : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (9.1)$$

y fibras difeomorfas a la recta real, $\pi_C^{-1}(x \in \mathcal{M}) \sim \mathbb{R}$. Para dar una descripción local de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ siempre podemos tomar cualquier sistema de coordenadas locales $(x^1, x^2, \dots, x^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ en \mathcal{M} y completarlo con el parámetro z de las fibras \mathbb{R} para tener el sistema de coordenadas $(z, x^1, \dots, x^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ sobre $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$. En dichas coordenadas la proyección trivial (9.1) se ve simplemente como

$$\pi : (z, x^1, \dots, x^{2n}) \mapsto (x^1, \dots, x^{2n}).$$

Además, en la base tangente inducida por estas coordenadas, los campos vectoriales verticales de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ son múltiplos escalares del campo ∂_z . Si también tomamos en cuenta que el haz lineal es trivial, podemos hacer la separación de sus espacios tangentes como

$$\forall (z, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}, \quad T_{(z,x)} \mathbb{R} \times \mathcal{M} = \text{span} \left(\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{(z,x)} \right) \oplus T_x \mathcal{M}, \quad (9.2)$$

siendo por lo tanto la diferencial de la proyección canónica $\pi_{C*}|_{T_x \mathcal{M}} \equiv \text{Id}_{T_x \mathcal{M}}$ y $\ker \pi_{C*} = \text{span}(\partial_z)$.

En $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ el grupo de acción es \mathbb{R} con la operación de adición, el cual es un grupo abeliano, y la acción por la izquierda propiamente dicha se limita a una traslación a lo largo de la dirección de las fibras [22], ∂_z :

$$z' \in \mathbb{R}, \quad * : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{M}, \quad z' * (z, x) = (z + z', x). \quad (9.3)$$

El otro ingrediente importante en la construcción que estamos haciendo es la 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(\mathbb{R} \times \mathcal{M})$

$$\alpha \equiv dz - \pi_C^* \mu, \quad (9.4)$$

la cual tiene por kernel a una distribución máximamente no integrable [20], convirtiendo al par $(\mathbb{R} \times \mathcal{M}, \alpha)$ una variedad de contacto, conocida como la **contactificación** de \mathcal{M} .

Proposición 43. *El kernel de la 1-forma (9.4), $\Pi \equiv \ker \alpha$, define una distribución máximamente no integrable sobre $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$.*

Para hacer esta demostración primero consideremos que, dada la separación natural (9.2) de los campos vectoriales tangentes a $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$, siempre podemos expresar cualquier elemento del kernel de la 1-forma α como la suma

$$\forall X' \in \Pi, \quad X' = \mu(X) \frac{\partial}{\partial z} + X, \quad (X \in T\mathcal{M}), \quad (9.5)$$

pues, en efecto,

$$\alpha(X') = dz(X') - (\pi_C^* \mu)(X') = \mu(X) - \mu(\pi_{C*} X') = \mu(X) - \mu(X) = 0.$$

Tomando esto en cuenta, podemos mostrar que la derivada exterior $d\alpha = -d\pi_C^* \mu = -\pi_C^*(d\mu)$ es no degenerada en Π , pues básicamente $d\alpha$ limitada a la distribución se trata de la 2-forma simpléctica $d\mu$. Pues, en efecto, si

$$\forall X' \in \Pi,$$

$$0 = d\alpha(X', Y') = -(\pi_C^*(d\mu))(X', Y') = -(d\mu)(\pi_{C*} X', \pi_{C*} Y') = -(d\mu)(X, Y),$$

entonces $Y = 0$ (porque $d\mu$ es no degenerada), lo que equivale a $Y' = \beta(0) + 0 = 0$. En otras palabras, el único elemento en el kernel de $d\alpha$ es el campo nulo, por lo tanto $d\alpha$ es no degenerada en la distribución Π , siendo entonces una distribución máximamente no integrable. \blacksquare

Una cuestión importante que no hemos discutido es que la contactificación de una variedad simpléctica exacta no es única, en el sentido de que dada $(\mathcal{M}, d\mu)$ podemos generar distintas estructuras de contacto sobre $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ dependiendo del potencial simpléctico elegido en la clase cohomología $[\mu]$ [20]. En efecto, las formas de contacto $\alpha \equiv dz - \pi_C^* \mu$ y $\alpha' \equiv dz - \pi_C^* \mu'$, tales que $d\mu = d\mu'$, definen distribuciones (en general) distintas. No obstante, esto realmente no es un problema, pues es fácil mostrar que siempre que dos potenciales simplécticos difieran en la diferencial exacta de una función de \mathcal{M} a los reales, las respectivas contactizaciones son contactomórficas entre sí [20].

Proposición 44. *Sean μ y μ' dos potenciales simplécticos de la variedad $(\mathcal{M}, d\mu)$, tales que $\mu' = \mu + dF$, con $F \in C^\infty(\mathcal{M})$. El difeomorfismo Φ de la variedad de contacto $(\mathbb{R} \times \mathcal{M}, dz' - \pi_C^* \mu')$ a la variedad de contacto $(\mathbb{R} \times \mathcal{M}, dz - \pi_C^* \mu)$, es un contactomorfismo estricto:*

$$\Phi_F : (z, x) \longmapsto (\tau + F \circ \pi_C, x). \quad (9.6)$$

La demostración de este resultado se da por el cálculo directo de $\Phi_F^* \alpha'$, tomando en cuenta que Φ_F es básicamente una traslación sobre las fibras y por lo tanto $\pi_C \circ \Phi_F = \pi_C$ (véase Fig. 6):

$$\begin{aligned} \Phi_F^* \alpha' &= \Phi_F^* dz' - \Phi_F^* \pi_C^* \mu' = d(z + F \circ \pi_C) - \pi_C^* \mu' \\ &= dz + d(\pi_C^* F) - \pi_C^*(\mu + dF) = dz + \pi_C^*(dF) - \pi_C^* \mu - \pi_C^*(dF) = dz - \pi_C^* \mu = \alpha. \end{aligned}$$

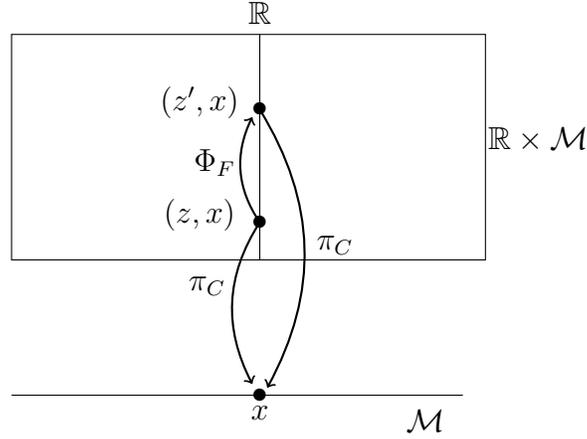


Figura 6: Diagrama $\pi_C \circ \Phi_F = \pi_C$.

Consideremos ahora las secciones transversales sobre la contactificación de \mathcal{M} , que no son más que encajamientos de \mathcal{M} en $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ de la forma $\ell : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{M}$. En términos de ℓ siempre podemos inducir simplectomorfismos en $(\mathcal{M}, d\beta)$ a partir de contactomorfismos estrictos sobre $(\mathbb{R} \times \mathcal{M}, dz - \pi_C^* \mu)$, como veremos en seguida. ■

Proposición 45. *Sea $\psi \in \text{Cont}_0(\mathbb{R} \times \mathcal{M}, dz - \pi_C^* \mu)$ un contactomorfismo estricto de la contactificación de $(\mathcal{M}, d\mu)$. El mapeo (Fig. 45)*

$$f_\psi \equiv \pi_C \circ \psi \circ \ell, \tag{9.7}$$

donde $\ell : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{M}$, es un simplectomorfismo de $d\mu$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} \times \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R} \times \mathcal{M} \\
\ell \uparrow & & \downarrow \pi_C \\
\mathcal{M} & \xrightarrow{f_\psi} & \mathcal{M}
\end{array}$$

Figura 7: Definición de f_ψ .

Calculemos el pullback f_ψ^* de la forma simpléctica $d\mu$, tomando en cuenta las propiedades del cálculo de Cartán que ya hemos utilizado anteriormente,

$$f_\psi^*(d\mu) = (\pi_C \circ \psi \circ \ell)^*(d\mu) = \ell^* \circ \psi^* (\pi_C^*(d\mu)) = \ell^* \circ \psi^* d(\pi_C^* \mu) = \ell^* d(\psi^*(\pi_C^* \mu)).$$

Ahora, tomando en cuenta que ψ es un contactomorfismo estricto de α , $\psi^* \alpha = \alpha$, podemos sustituir el término $d(\psi^*(\pi_C^* \mu))$ por $\pi_C^*(d\mu)$,

$$\psi^* \alpha = d(\psi^* z) - \psi^*(\pi_C^* \mu) = \alpha \quad \implies \quad d\alpha = -d(\pi_C^* \mu) = -\pi_C^*(d\mu) = -d(\psi^*(\pi_C^* \mu)),$$

de tal manera que obtenemos, efectivamente, $f_\psi^*(d\mu) = d\mu$:

$$f_\psi^*(d\mu) = \ell^* d(\psi^*(\pi_C^* \mu)) = \ell^* \circ \pi_C^*(d\mu) = (\pi_C \circ \ell)^*(d\mu) = \text{Id}_{\mathcal{M}}^*(d\mu) = d\mu. \quad \blacksquare$$

Otro aspecto importante relacionado con el encajamiento de \mathcal{M} en $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ es que toda subvariedad legendriana de la contactificación es, a la vez, una subvariedad lagrangiana de $(\mathcal{M}, d\mu)$ [20].

Proposición 46. *Sea \mathcal{A} una subvariedad legendriana de $(\mathbb{R} \times \mathcal{M}, dz - \pi_C^* \mu)$ bajo el encajamiento $\xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{M}$, entonces \mathcal{A} también es una subvariedad lagrangiana de $(\mathcal{M}, d\mu)$ bajo el encajamiento $\pi_C \circ \xi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$.*

Dado que \mathcal{A} es una subvariedad legendriana de $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$, es decir, una subvariedad n dimensional ($\dim(\mathbb{R} \times \mathcal{M}) = 2n + 1$) tal que

$$\xi^* \alpha = 0 \quad \implies \quad d(\tau \circ \xi) = \xi^* \circ \pi_C^* \mu = (\pi_C \circ \xi)^* \mu,$$

entonces el mapeo $\pi_C \circ \xi$ satisface la propiedad

$$(\pi_C \circ \xi)^*(d\mu) = d((\pi_C \circ \xi)^*\mu) = d^2(\tau \circ \xi) = 0,$$

siendo por lo tanto, \mathcal{A} una subvariedad n dimensional de \mathcal{M} , tal que $(\pi_C \circ \xi)^*(d\mu) = 0$. Es decir, una subvariedad lagrangiana. ■

Parte III

Geometrotermodinámica

10 Aspectos básicos de la termodinámica

La termodinámica con la que trataremos en este trabajo se limita sólo a los sistemas en equilibrio termodinámico, entendiendo por **sistema termodinámico** a cualquier porción macroscópica del universo que se aísla para analizar sus propiedades, y por **equilibrio termodinámico** al régimen en el cual dichas propiedades se vuelven cantidades globales, es decir, que sus mediciones no dependen de la localización, en el sistema, en la que se realizan [10].

En un sistema en equilibrio termodinámico la medición de una de sus propiedades⁴³, en cualquier punto del sistema, siempre arroja el mismo valor. De esta manera, conociendo las mediciones globales de las distintas propiedades del sistema podemos caracterizar su estado termodinámico, sin necesidad de realizar un análisis minucioso de la naturaleza constitutiva del sistema⁴⁴. Ejemplifiquemos esto con un sistema termodinámico simple: un gas contenido en un cilindro rígido, con un pistón movable como tapa (véase Fig. 8).

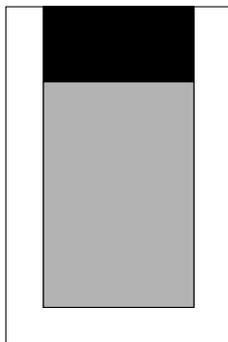


Figura 8: Gas (en gris) encerrado en un cilindro (blanco) con un pistón (negro) como tapa.

El sistema es el gas, específicamente, la enorme cantidad de partículas que habitan los límites de las paredes internas del cilindro y del pistón, de manera que, en principio, la región del universo que estamos tomando como sistema no tiene una frontera fija. En este caso la imagen de uno de sus estados de equilibrio es, como en cualquier otro sistema, bastante aburrida, pues es la del gas contenido en el cilindro con el pistón fijo. En términos de la descripción que hemos dado, dos cantidades físicas que describen este estado de equilibrio son el volumen ocupado por el gas y su energía interna⁴⁵. Similarmente, en vez de utilizar la energía interna podríamos pensar en utilizar la entropía para describir los estados de equilibrio.

De esta manera, la termodinámica que nos interesa estudia sólo los sistemas donde sus propiedades ya se encuentran bien definidas, sin tener en cuenta nada de su historia: si dos sistemas, que se describen por medio de las mismas cantidades físicas, arrojan las mismas mediciones, entonces ambos sistemas describen el mismo estado termodinámico de equilibrio, sin importar cuál era su estado inicial en cierto instante ni qué procesos tuvieron

⁴³Esto aplica para cualquier propiedad de interés en el sistema.

⁴⁴Desde un punto de vista mecánico, no es necesario caracterizar la dinámica de cada una de las partículas del sistema durante el intervalo en el que se realiza la medición [10].

⁴⁵La energía cinética promedio de sus partículas [10].

que atravesar para alcanzar en el equilibrio, ni mucho menos cuánto tiempo les tomó para hacerlo⁴⁶.

Un sistema termodinámico en equilibrio, que se identifica mediante n propiedades independientes, se dice que tiene n grados de libertad. Como parte del estudio de estos sistemas, en la termodinámica consideramos el conjunto de todos los posibles estados de equilibrio como una variedad suave n dimensional, denominada **espacio de equilibrio termodinámico**⁴⁷ \mathcal{E} [10]. De esta manera una descripción de un estado de equilibrio particular se puede pensar como una descripción local de un punto $x \in \mathcal{E}$ por medio de la n -eada real $(E^1, E^2, \dots, E^n) \in \mathbb{R}^n$. En este sentido, las n propiedades que describen un sistema en equilibrio son coordenadas sobre \mathcal{E} , identificadas comúnmente como **variables termodinámicas naturales**.

Experimentalmente se sabe que, asociada a cada variable natural E^i , existe una cantidad física que también caracteriza al sistema. Esta evidencia empírica es considerada como esencial en el estudio de la termodinámica.

Teorema 3 (Primera ley de la termodinámica). *En cada sistema termodinámico con n grados de libertad, con estados de equilibrio descritos mediante las n variables naturales (E^1, \dots, E^n) , existe un mapeo $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{E})$ tal que define las variables termodinámicas conjugadas*

$$I_i \equiv I_i(E) = \frac{\partial \phi}{\partial E^i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.1)$$

las cuales satisfacen la propiedad transitiva [10]

$$\forall x, y, z \in \mathcal{E}, \quad I_i(x) = I_i(y), \quad I_i(y) = I_i(z) \quad \implies \quad I_i(x) = I_i(z). \quad (10.2)$$

Al mapeo ϕ descrito en (3), denominado como el potencial termodinámico del sistema, al ser expresado como función de las variables (E^1, \dots, E^n) , se le conoce como **la ecuación fundamental** $\phi = \phi(E)$, mientras que las n expresiones (10.1) de las variables conjugadas, en términos de (E^1, \dots, E^n) , son las **ecuaciones de estado del sistema** [10].

En el caso del gas atrapado en un cilindro, cuando podemos suponer que se trata de un gas ideal⁴⁸ y utilizamos la entropía como potencial termodinámico $\phi = S$, la ecuación fundamental se expresa como $(U = E^1, V = E^2)$

$$S(U, V) = N k_B \left(C_V \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) \right), \quad (10.3)$$

⁴⁶Las propiedades del sistema no dependen explícitamente del espacio físico que este ocupa, ni del tiempo.

⁴⁷Formalmente, espacio de equilibrio de Gibbs, o GEM (Gibbs equilibrium manifold) [10].

⁴⁸Cuando las interacciones entre las partículas del gas se pueden modelar como interacciones de corto alcance (canicas rebotando una contra otra, y contra las paredes del contenedor) [10].

donde N es el número fijo de partículas que constituyen el gas, C_V es el calor específico a volumen constante, k_B la constante de Boltzmann y tanto U_0 como V_0 son mediciones de referencia de la energía interna y el volumen, respectivamente [10]. En este caso las variables termodinámicas conjugadas se relacionan con la presión y temperatura del gas ideal, siendo las ecuaciones de estado del sistema

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{N k_B C_v}{U}, \quad \frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{N k_B}{V}. \quad (10.4)$$

En cuanto a la propiedad transitiva (10.2), aplicada al caso del gas ideal, lo que nos dice es que los indicadores de que el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico es que no existen gradientes de presión ni temperatura [10].

La ecuación fundamental también describe bajo qué condiciones un sistema termodinámico (sin ahondar en el proceso en sí, ni en sus tiempos) puede pasar de un estado de equilibrio, a otro [10]. Esto por medio de su derivada exterior, que es la forma diferencial de la primera ley (10.1)

$$d\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial E^i} dE^i = \sum_{i=1}^n I_i(E) dE^i. \quad (10.5)$$

Como podemos ver en (10.5), las ecuaciones de estado $I_i(E)$ establecen relaciones muy precisas entre los posibles valores de las variables termodinámicas de un sistema, cuando estos se encuentran en equilibrio. Además de estas condiciones de equilibrio (10.1), también se postula en general la existencia de la entropía (y su variable conjugada, la temperatura) como una cantidad especial en la termodinámica que juega el papel de potencial termodinámico, y determina la ecuación fundamental del sistema, presentando una condición extra para que un sistema pueda pasar de un estado de equilibrio a otro [10]. Es decir, mientras que algunas propiedades macroscópicas pueden resultar más importantes para describir un sistema u otro, el par entropía y temperatura siempre juega un papel fundamental, intrínseco al concepto de termodinámica.

Teorema 4 (Segunda ley de la termodinámica). *En todo sistema termodinámico la entropía del sistema nunca decrece.*

Existe una gran cantidad de interpretaciones y formas de enunciar el principio anterior, conocido como la segunda ley de la termodinámica [10, 14, 18, 26]. Aquí presentamos esta versión que nos indica que sólo los procesos en los cuales la entropía aumente o se mantenga constante (que S evaluado en el estado posterior no sea menor que S en el estado anterior) son físicamente posibles⁴⁹.

Pensando en términos del espacio de equilibrio termodinámico \mathcal{E} , podemos identificar un

⁴⁹No estamos tomando en cuenta procesos realizados en subsistemas o sistemas no aislados, donde la entropía sí puede disminuir en un proceso físicamente posible, pero aumentando la entropía del entorno [14].

proceso termodinámico, una sucesión suave de estados de equilibrio⁵⁰, como una curva suave en esta variedad⁵¹. En este sentido, la segunda ley (4) expresa que S es una función monotonamente creciente a lo largo de dichas curvas [10].

10.1 Transformadas de Legendre y potenciales termodinámicos

Como vimos anteriormente, las variables naturales son cantidades físicas, independientes entre sí, que determinan el estado de equilibrio termodinámico de un sistema, y juntas con la ecuación fundamental determinan otras cantidades que también son de interés físico, conocidas como variables conjugadas y sirven como parámetros para caracterizar cuándo un sistema se encuentra en equilibrio. En el ejemplo del gas ideal las variables termodinámicas son la energía interna y el volumen, mientras que la ecuación fundamental se expresa en términos de la entropía (10.3) y las variables conjugadas son, básicamente, la temperatura y la presión.

Cuando se estudia experimentalmente un sistema termodinámico en un laboratorio, no obstante, es usual que las variables que sean más fáciles de controlar y medir sean las conjugadas⁵², no las variables termodinámicas [10] (temperatura y presión, en el ejemplo del gas ideal).

Es posible realizar un cambio en la descripción del espacio de equilibrio termodinámico \mathcal{E} , haciendo que una o varias variables conjugadas ocupen el lugar de sus respectivas variables naturales para caracterizar los estados de equilibrio del sistema, pero esto no debe confundirse con un simple cambio de coordenadas, pues para lograr hacer esto y seguir respetando la estructura de la termodinámica, impuesta por sus leyes, es necesario cambiar también la ecuación fundamental del sistema introduciendo un nuevo potencial termodinámico, y como consecuencia, considerar nuevas ecuaciones de estado [10]. Esto se hace empleando como herramienta matemática a las **transformadas discretas de Legendre** \mathcal{L}_i , que para cada valor i entre 1 y n , toma el potencial termodinámico ϕ y regresa el potencial termodinámico

$$\mathcal{L}_i(\phi) \equiv \phi' = \phi - \sum_{k=1}^i E^k(I_1, \dots, I_i) I_k, \quad (10.6)$$

que permite formular la termodinámica sobre \mathcal{E} utilizando como nuevas variables naturales a $(I_1, \dots, I_i, E^{i+1}, \dots, E^n)$. La transformada \mathcal{L}_i es una extensión de la transformada de Legendre unidimensional, que se basa en la equivalencia que existe entre una curva convexa sobre el plano y la envolvente de la familia de rectas tangentes a dicha curva [20]. Al respecto, es importante notar que, para que podamos expresar cada E^k como función de las variables I_k (k en el intervalo $1, \dots, i$) es necesario que el potencial termodinámico a transformar (o su negativo) sea convexo, es decir, que su determinante hessiano sea no negativo [10]:

⁵⁰Específicamente, hablamos de procesos cuasiestáticos [10].

⁵¹El parámetro de estas curvas no debe confundirse con el tiempo.

⁵²Incluso, puede que no existan instrumentos capaces de controlar y medir variables termodinámicas como la energía interna y la entropía (cuando se adopta la representación energética y S pasa a ser una variable termodinámica, ocupando U su lugar como potencial termodinámico) [10].

$$\pm \det \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial E^i \partial E^j} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (E^1)^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial E^1 E^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial E^1 E^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial E^n E^1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial E^n E^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial (E^n)^2} \end{pmatrix} \geq 0. \quad (10.7)$$

También resulta importante aclarar que emplear la transformada de Legendre para pasar de un potencial termodinámico a otro resulta, más que nada, un tipo de astucia matemática, ya que sólo cambia la descripción formal del sistema termodinámico, pero no obedece realmente a ninguna razón física, sólo a la conveniencia de quien estudia el sistema termodinámico⁵³⁵⁴ [10]. Es decir, tanto desde el punto de vista experimental como teórico, algunos experimentos y problemas resultan considerablemente más sencillos de trabajar en una representación termodinámica u otra.

Lo dicho anteriormente no debe confundirse con que los potenciales transformados no tengan un sentido físico bien claro, y ayuden a apreciar la segunda ley como una competición entre maximizar alguna propiedad (por ejemplo, entropía), minimizando otras (por ejemplo, la energía interna). Un ejemplo claro de esto es la entalpía, potencial termodinámico obtenido a partir de la energía interna en sistemas que se pueden estudiar por medio de su entropía y volumen, entre otras posibles variables naturales, $U = U(V, S, \dots)$, al intercambiar su dependencia en el volumen por su variable conjugada, la presión⁵⁵:

$$H \equiv \mathcal{L}_1(U) = U - (-P)V = U + PV. \quad (10.8)$$

Este potencial es especialmente útil cuando existen procesos isobáricos y adiabáticos, como algunas reacciones químicas⁵⁶, donde $dP = TdS = 0$, ya que en dicho caso (sin perder generalidad, suponemos que el sistema sólo depende de $E^1 = S$ y $E^2 = P$ y $E^3 = N$, siendo N el número de partículas) la forma diferencial de la primera ley (10.5) establece que los procesos deben ajustarse acorde a lo que dicte el potencial químico μ [26]:

$$dH = dU + VdP + PdV = TdS + VdP + \mu dN = \mu dN.$$

⁵³ “It is, perhaps, superfluous at this point to stress again that thermodynamics is logically complete and self-contained within either the entropy or the energy representations and that the introduction of the transformed representations is purely a matter of convenience. This is, admittedly, a convenience without which thermodynamics would be almost unusably awkward, but in principle it is still only a luxury rather than a logical necessity.” (Callen [10], p.p. 138).

⁵⁴En cierto sentido es similar al cambio que se hace de la formulación lagrangiana a la formulación hamiltoniana, también a través de una transformada de Legendre. Una formulación no es más exacta o precisa, o agrega algo más que la otra, simplemente son dos formulaciones distintas que contienen la misma información, pero algunos problemas se vuelven más sencillos cuando se considera una u otra.

⁵⁵En realidad, el negativo de la presión.

⁵⁶El intervalo en el que se llevan a cabo algunas reacciones químicas es lo suficientemente rápido como para ignorar cualquier intercambio de calor [26].

10.2 El espacio fase y la estructura de contacto termodinámica

Desde los primeros trabajos de Gibbs se puede apreciar un intento por aplicar el formalismo de la geometría diferencial a la termodinámica [1], idea que se fue reforzando con el paso de los años [3, 6, 12] hasta culminar con la introducción de una variedad de contacto asociada al espacio de equilibrio termodinámico, llamada el **espacio fase termodinámico** [30]:

$$(\mathcal{B}, \Pi), \quad (10.9)$$

donde \mathcal{B} es una variedad suave $2n + 1$ dimensional (tomamos \mathcal{E} n dimensional), y Π es la estructura de contacto en cuestión, co-orientable y máximamente no integrable. Este espacio fase aparece naturalmente al darle un significado geométrico a la primera ley de la termodinámica, pidiendo que las distintas representaciones termodinámicas no sean más que expresiones de esta ley en distintas coordenadas. Para que esto ocurra es necesario *promover* las transformadas de Legendre \mathcal{L}_i a diffeomorfismos, y esto se hace definiendo sus transformaciones de Legendre asociadas, que representaremos igualmente como \mathcal{L}_i [38]:

$$\mathcal{L}_i : (\tau, q, p) \mapsto (\tau' \equiv \tau \circ \mathcal{L}_i, q' \equiv q \circ \mathcal{L}_i, p' \equiv p \circ \mathcal{L}_i). \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.10)$$

Explícitamente, las coordenadas primadas son las funciones de las coordenadas sin primar

$$\begin{aligned} \tau' &\equiv \tau - \sum_{k=1}^i q^k p_k, \\ q'^k &= \begin{cases} +p_k, & 1 \leq k \leq i, \\ +q^k, & i < k \leq n. \end{cases} \\ p'_k &= \begin{cases} -q^k, & 1 \leq k \leq i, \\ +p_k, & i < k \leq n. \end{cases} \end{aligned} \quad (10.11)$$

Proposición 47. *Las transformaciones de Legendre son transformaciones de coordenadas sobre \mathcal{B} para todo valor de i .*

Para demostrar que cada \mathcal{L}_i (10.10) es una transformación de coordenadas, basta calcular su determinante jacobiano y observar que nunca se anula⁵⁷ [22]:

⁵⁷ $j \equiv n - i$. \mathbf{p}_i es la matriz $i \times 1$ cuyas entradas son las primeras i coordenadas p , similarmente \mathbf{q}^i es la matriz $i \times 1$ con entradas dadas por las primeras i coordenadas q . Las matrices $\mathbf{0}_{p \times q}$ y $\mathbf{I}_{q \times q}$ son, respectivamente, la matriz cero de $p \times q$ y la matriz identidad cuadrada, $q \times q$.

$$\det \left(\frac{\partial(\tau', q', p')}{\partial(\tau, q, p)} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{p}_i^T & \mathbf{0}_{1 \times j} & -\mathbf{q}^{iT} & \mathbf{0}_{1 \times j} \\ \mathbf{0}_{i \times 1} & \mathbf{0}_{i \times i} & \mathbf{0}_{i \times j} & \mathbf{I}_{i \times i} & \mathbf{0}_{i \times j} \\ \mathbf{0}_{j \times 1} & \mathbf{0}_{j \times i} & \mathbf{I}_{j \times j} & \mathbf{0}_{j \times i} & \mathbf{0}_{j \times j} \\ \mathbf{0}_{i \times 1} & -\mathbf{I}_{i \times i} & \mathbf{0}_{i \times j} & \mathbf{0}_{i \times i} & \mathbf{0}_{i \times j} \\ \mathbf{0}_{j \times 1} & \mathbf{0}_{j \times i} & \mathbf{0}_{j \times j} & \mathbf{0}_{j \times i} & \mathbf{I}_{j \times j} \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

■

Otra característica importante de las transformaciones de Legendre es que, todas de ellas, sean totales ($i = n$) o parciales ($i < n$), son contactomorfismos estrictos de la estructura de contacto del espacio fase termodinámico.

Proposición 48. *Para todo valor de i entre 1 y n , los mapeos (10.10) son contactomorfismos estrictos de la distribución Π del espacio fase termodinámico.*

Para obtener este resultado, comencemos calculando el pullback, bajo \mathcal{L}_i , de la 1-forma $d\tau$, y a partir de este completar (en el miembro derecho) para obtener la 1-forma de contacto α en la expresión,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^*(d\tau) &= d(\tau \circ \mathcal{L}_i) = d \left(\tau - \sum_{k=1}^i q^k p_k \right) = d\tau - \sum_{k=1}^i p_k dq^k - \sum_{k=1}^i q^k dp_k \\ &= d\tau - \sum_{k=1}^i p_k dq^k - \sum_{k=i+1}^n p_k dq^k + \sum_{k=i+1}^n p_k dq^k - \sum_{k=1}^i q^k dp_k. \\ &= \alpha + \sum_{k=i+1}^n p_k dq^k - \sum_{k=1}^i q^k dp_k. \end{aligned}$$

Ahora, tomando en cuenta (10.11), basta manipular un poco la ecuación anterior para llegar al resultado esperado:

$$\mathcal{L}_i^*(d\tau) = \alpha + \sum_{k=i+1}^n (\mathcal{L}_i^* p_k) d(\mathcal{L}_i^* q^k) + \sum_{k=1}^i (\mathcal{L}_i^* p_k) d(\mathcal{L}_i^* q^k) = \alpha + \mathcal{L}_i^* \left(\sum_{k=1}^n p_k dq^k \right)$$

⇓

$$\mathcal{L}_i^* \left(d\tau - \sum_{k=1}^n p_k dq^k \right) = \mathcal{L}_i^* \alpha = \alpha.$$

■

Para conectar (\mathcal{B}, Π) con el espacio de equilibrio termodinámico, donde está la física (en \mathcal{E} se llevan a cabo los procesos cuasiestáticos gobernados por los potenciales termodinámicos vía la ecuación fundamental), se pide que \mathcal{E} sea una subvariedad suave de \mathcal{B} , que pueda

encajarse⁵⁸ mediante un mapeo $\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ legendriano. Es decir, si α es una de las 1-formas de contacto sobre \mathcal{B} , $\ker \alpha = \Pi$, entonces ψ satisface la condición (7.3):

$$\forall \alpha \in [\alpha], \quad \psi^* \alpha = 0. \quad (10.12)$$

Al imponer esta relación entre \mathcal{E} y (\mathcal{B}, Π) , $\alpha|_{\mathcal{E}} = \psi^* \alpha = 0$ se transforma en la forma diferencial de la primera ley de la termodinámica. Veamos esto con mayor detalle. Utilizando las coordenadas de Darboux (5.4) sobre \mathcal{B} podemos definir las 0-formas sobre \mathcal{E} ,

$$\begin{aligned} \phi &\equiv \psi^* \tau = \tau \circ \psi : \mathcal{E} &\longrightarrow &\mathbb{R}, \\ I_i &\equiv \psi^* p_i = p_i \circ \psi : \mathcal{E} &\longrightarrow &\mathbb{R}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

y con el resto poner coordenadas locales sobre \mathcal{E} , es decir, definir variables termodinámicas naturales en el sistema:

$$(\psi^* q^1, \dots, \psi^* q^n) = (q^1 \circ \psi, \dots, q^n \circ \psi) \equiv (E^1, \dots, E^n) \in \mathbb{R}^n. \quad (10.14)$$

En términos de dichos mapeos, tomando ϕ como el potencial termodinámico, (10.12) efectivamente se transforma en (10.5):

$$\psi^* \alpha = d(\tau \circ \psi) - \sum_{i=1}^n (p_i \circ \psi) d(q^i \circ \psi) = d\phi - \sum_{i=1}^n I_i dE^i = 0. \quad (10.15)$$

De esta manera, en vez de tener una variedad suave \mathcal{E} dotada de un mapeo hacia los reales (un potencial termodinámico) que dicta la dinámica de los procesos termodinámicos mediante una ecuación diferencial particular⁵⁹, para cada representación distinta (para cada potencial termodinámico distinto), podemos tomar al par (\mathcal{E}, ψ) como una única variedad dotada de una única ecuación diferencial, $\psi^* \alpha = 0$. Bajo esta óptica cada representación distinta debido a un potencial termodinámico se expresa sólo como un cambio de coordenadas sobre la variedad \mathcal{B} .

Siguiendo con el ejemplo del gas ideal presentado en la sección anterior, ya habíamos identificado su espacio de equilibrio como una variedad bidimensional \mathcal{E} . Su espacio fase asociado es entonces la variedad \mathcal{B} de dimensión 5, con la estructura de contacto descrita mediante 1-formas

⁵⁸ ψ como un difeomorfismo de \mathcal{E} a \mathcal{B} , tal que su pushforward sea inyectivo, $\ker \psi_* = \{0\}$.

⁵⁹Como vimos anteriormente, para un sistema simple con dos grados de libertad, en una representación energética la ecuación termodinámica es $dU = TdS - PdV$, mientras que en una representación equivalente como la entálpica, la ecuación se ve completamente distinta: $dH = TdS + VdP$.

$$\alpha = d\tau - \sum_{a=1}^2 q^a p_a,$$

siendo $(\tau, q^1, q^2, p_1, p_2)$ coordenadas de Darboux. Cuando trabajamos en la representación energética, con las variables naturales $E^1 = V$ y $E^2 = S$, podemos identificar el mapeo legendriano como

$$\psi : (V, S) \mapsto \left(U = \left(\frac{e^{S/Nk_B}}{V} \right)^{\frac{1}{C_V}}, V, S, -P = -\frac{U}{C_V V}, T = \frac{U}{Nk_B C_V} \right), \quad (10.16)$$

siendo la primera ley de la termodinámica, en su forma diferencial,

$$\psi^* \alpha = dU - TdS + PdV = dU - \frac{UdS}{Nk_B C_V} + \frac{UdV}{C_V V} = 0.$$

En este caso es fácil ver que U , como potencial termodinámico, cumple la condición de convexidad (10.7),

$$\det \left(\frac{\partial^2 U}{\partial E^i \partial E^j} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{U}{(Nk_B C_V)^2} & -\frac{U}{Nk_B C_V^2 V} \\ -\frac{U}{Nk_B C_V^2 V} & \frac{U(1 + C_V)}{C_V^2 V^2} \end{pmatrix} = \left(\frac{U}{Nk_B C_V^2 V} \right)^2 (2 + C_V) \geq 0,$$

de tal manera que se nos permite realizar transformadas de Legendre para cambiar de representación, pero esto lo haremos de forma geométrica realizando la transformación correspondiente de Legendre \mathcal{L}_1 sobre \mathcal{B} ,

$$\mathcal{L}_1 : (\tau, q^1, q^2, p_1, p_2) \mapsto (\tau - q^1 p_1, p_1, q^2, -q^1, p_2),$$

con la cual vemos que el mapeo ψ ahora reproduce sobre \mathcal{E} la formulación entálpica. En efecto, identificando

$$\tau' \circ \psi = (\tau - q^1 p_1) \circ \psi = U + PV = H,$$

$$q'^1 \circ \psi = p_1 \circ \psi = -P,$$

$$p'_1 \circ \psi = -q^1 \circ \psi = -V,$$

el mapeo (10.16) se expresa en coordenadas como ($\beta \equiv 1 + C_V$)

$$\psi : (-P, S) \mapsto \left(H = \frac{\beta}{C_V} \left(C_V P e^{\frac{S}{Nk}} \right)^{\frac{1}{\beta}}, -P, S, -V = \frac{(-1)^{\frac{1}{\beta}} H}{\beta P}, T = \frac{H}{\beta N k_B} \right). \quad (10.17)$$

10.3 Geometrotermodinámica

La implementación del espacio fase como estructura de contacto en la termodinámica se trata, más que otra cosa, del intento por completar la formulación matemática detrás de una gran cantidad de hechos experimentales, y como tal no agrega nada nuevo al aspecto físico. Como mucho es una garantía para justificar el uso personal de una u otra representación de un sistema termodinámico, sabiendo que desde el punto de vista de la geometría diferencial todo encaja. No obstante, este elemento no es la única aplicación geométrica al estudio de la termodinámica.

A partir del año 1975, con el trabajo del físico Frank A. Weinhold [5], aunado a las investigaciones del también físico George Ruppeiner [7], se comenzó a estudiar el uso de un tipo particular de métricas sobre el espacio de equilibrio, las llamadas métricas hessianas de Weinhold y Ruppeiner, asociadas respectivamente, a la matriz hessiana de la energía interna y a la matriz hessiana del negativo de la entropía del sistema:

$$g^W \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial E^i \partial E^j} dE^i \otimes dE^j. \quad (10.18)$$

$$g^R \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial E^i \partial E^j} dE^i \otimes dE^j.$$

Es claro que, mientras U y S sean mapeos sobre \mathcal{E} que respeten la condición de convexidad (10.7), las métricas (10.18) se encuentran bien definidas (son simétricas y no degeneradas), siendo en particular métricas hessianas.

Este tipo de métricas, así como otras generalizaciones empleando las matrices hessianas de distintos potenciales termodinámicos, han resultado de gran interés en la física, partiendo desde su relación con la teoría de fluctuaciones termodinámicas [15, 45]. Esto es, si ϕ es el potencial termodinámico en cuestión, en las vecindades de cualquier estado de equilibrio, o punto $x \in \mathcal{E}$, donde ϕ alcanza un valor extremo según la segunda ley de la termodinámica⁶⁰, entonces la métrica hessiana g^ϕ gobierna el estado final del sistema [45], al pasar por una perturbación a segundo orden en la dirección $X(x) \in T_x \mathcal{E}$ ^{61,62}

$$\phi(x + \epsilon X(x)) \approx \phi(x) + \epsilon d\phi(x)(X) + \frac{1}{2} \epsilon^2 g^\phi(x)(X, X) \approx \frac{1}{2} \epsilon^2 g^\phi(x)(X, X). \quad (10.19)$$

⁶⁰Aunque enunciemos (4) en términos específicos de la entropía S , una expresión más general se obtiene indicando que en equilibrio el potencial termodinámico se encuentra siempre en un valor extremo [10].

⁶¹Sin perder generalidad podemos tomar $\phi(x) = 0$.

⁶²En efecto, en coordenadas, donde X^i es la componente de X en la dirección ∂_{E^i} :

Por otra parte, también parece haber una importante conexión de este tipo de métricas con la física estadística y la teoría de la información [13, 42], pero en particular debe destacarse la interpretación que se le ha dado a su curvatura, y a sus puntos singulares en el espacio de equilibrio, como indicadores de la existencia de interacción termodinámica y cambios de fase, respectivamente [45, 30].

No obstante, una cuestión problemática referente a estas métricas es que no son invariantes ante la aplicación de transformadas de Legendre [42, 45, 30, 38]⁶³, haciendo que la elección de la representación empleada para estudiar las propiedades geométricas, que pretenden estar relacionadas con las propiedades termodinámicas de un sistema, no sea arbitraria, es decir, no sea sólo cosa de conveniencia. Dependiendo qué potencial termodinámico se utiliza, en general se encuentran uno u otros resultados, razón por la cual históricamente para ciertas cuestiones se ha empleado la métrica de Weinhold [30, 9, 11, 24, 27] y para otras tantas la métrica de Ruppeiner [30, 23, 25, 28].

Como solución a este inconveniente, desde 2007 se ha propuesto un formalismo distinto basado en imponer una métrica sobre el espacio fase termodinámico \mathcal{B} que sea invariante ante transformaciones de Legendre, es decir, un tensor métrico G sobre (\mathcal{B}, Π) tal que satisfaga la condición

$$\mathcal{L}_i^* G = G. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10.20)$$

Dicho formalismo es conocido como **geometrotermodinámica**, o simplemente **GTD**, y tiene la ventaja de que induce, de manera natural, una métrica sobre el espacio de equilibrio (\mathcal{E}, ψ) vía el pullback de G bajo el mapeo legendriano, $g \equiv \psi^* G$ [30, 38]. De este modo en la GTD se nos presenta una única métrica que puede utilizarse bajo cualquier representación termodinámica.

En términos de las coordenadas locales de Darboux, así como de la base cotangente inducida por las mismas, $(d\tau, dq^1, \dots, dq^n, dp_1, \dots, dp_n)$, sobre \mathcal{B} , la métrica invariante de Legendre más general que se ha encontrado es

$$G = \alpha \otimes \alpha + \Lambda \sum_{i=1}^n (q^i p_i)^{2k+1} dq^i \otimes dp_i, \quad (10.21)$$

donde k es un número natural cualquiera, α es la 1-forma de contacto para la cual elegimos las coordenadas de Darboux, y $\Lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B})$ es una 0-forma cualquiera sobre \mathcal{B} , invariante de Legendre:

$$\phi(x + \epsilon X(x)) \approx \phi(x) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial E^i \partial E^j} X^i X^j$$

⁶³Una muestra clara de esto es que g^W y g^R son, de hecho, métricas conformes bajo el factor $1/T^2$. [42].

$$\forall y \in \mathcal{B}, \quad \Lambda \circ \mathcal{L}_i(y) = \Lambda(y). \quad (10.22)$$

Proposición 49. *La métrica (10.21) definida sobre \mathcal{B} es invariante ante cualquier transformación de Legendre.*

La demostración de este hecho se da por el cálculo directo, aplicando todas las propiedades que ya hemos visto del pullback, y recordando que toda transformación de Legendre es un contactomorfismo estricto de la 1-forma de contacto α :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^* G &= (\mathcal{L}_i^* \alpha) \otimes (\mathcal{L}_i^* \alpha) + (\mathcal{L}_i^* \Lambda) \sum_{a=1}^n \mathcal{L}_i^* (q^a p_a)^{2k+1} (\mathcal{L}_i^* dq^a) \otimes (\mathcal{L}_i^* dp_a) \\ &= \alpha \otimes \alpha + (\Lambda \circ \mathcal{L}_i) \left[\sum_{a=1}^i (-p_a q^a)^{2k+1} (dp_a) \otimes (-dq^a) + \sum_{a=i+1}^n (q^a p_a)^{2k+1} dq^a \otimes dp_a \right] \\ &= \alpha \otimes \alpha + \Lambda \sum_{a=1}^n (q^a p_a)^{2k+1} (dq^a \otimes dp_a) = G. \end{aligned}$$

■

De manera general para cualquier sistema termodinámico con n grados de libertad, la métrica impuesta por la invarianza de Legendre, en el espacio de equilibrio termodinámico \mathcal{E} , se ve como la métrica

$$g = \psi^* G = (\Lambda \circ \psi) \sum_{i,j=1}^n \left(E^i \frac{\partial \phi}{\partial E^i} \right)^{2k+1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial E^i \partial E^j} dE^i \otimes dE^j \quad (10.23)$$

Como podemos ver a través de (10.23), típicamente las componentes de la métrica de la GTD dependen explícitamente de las primeras y las segundas derivadas del potencial termodinámico, así como posiblemente de ϕ directamente, a través de la elección que se haga del mapeo Λ [30, 38],

$$g = g(\phi, \partial \phi, \partial^2 \phi). \quad (10.24)$$

Como caso particular para ejemplificar lo que hemos estado diciendo, tomemos nuevamente el gas ideal, utilizando la representación entrópica en la cual la ecuación fundamental del sistema es (10.3), dando lugar al mapeo legendriano⁶⁴

$$\psi : (U, V) \mapsto \left(S = Nk_B (C_V \ln(U) + \ln(V)), U, V, \frac{1}{T} = \frac{Nk_B C_V}{U}, \frac{P}{T} = \frac{Nk_B}{V} \right). \quad (10.25)$$

⁶⁴Sin perder generalidad, tomamos U y V adimensionales.

El encajamiento anterior da lugar a la métrica sobre \mathcal{E} :

$$g = \psi^*G = -(Nk_B)^{2(k+1)} (\Lambda \circ \psi) \left(C_V^{2(k+1)} \frac{dU \otimes dU}{U^2} + \frac{dV \otimes dV}{V^2} \right). \quad (10.26)$$

Mediante un cambio oportuno de coordenadas, pasando de las variables termodinámicas (U, V) a las coordenadas locales (η, ξ) , definidas como

$$(U, V) \mapsto (\eta = (Nk_B C_V)^{k+1} \ln(U), \xi = (Nk_B)^{k+1} \ln(V)),$$

la métrica se muestra como conformemente plana ($W \equiv \Lambda \circ \psi(\eta, \xi)$)

$$g = -W (d\eta \otimes d\eta + d\xi \otimes d\xi). \quad (10.27)$$

Como se comentó anteriormente, varios resultados asociados a las métricas hessianas dan indicios de una relación entre la curvatura de dichas métricas y el concepto de interacción termodinámica. En particular la métrica de Weinhold del gas ideal no tiene curvatura, mientras que la curvatura de la métrica del gas de Van der Waals es proporcional al llamado parámetro de interacción [30]. Esto nos lleva a pensar que la elección más simple que se puede hacer sobre la función arbitraria Λ es la de mantenerla como una constante negativa, en particular $\Lambda = -1$, con lo cual (10.27) se transforma en la métrica euclidiana bidimensional.

10.4 Principio variacional de la GTD

En el enfoque de la GTD el espacio fase termodinámico es una variedad de contacto, co-orientable y máximamente no integrable, dotada de una métrica compatible con dicha estructura de contacto, es decir, una métrica invariante ante transformaciones de Legendre:

$$(\mathcal{B}, \Pi, G). \quad (10.28)$$

Por otra parte al espacio de equilibrio \mathcal{E} ahora se le incluye el encajamiento legendriano ψ , y se promueve a variedad métrica por medio de la métrica inducida ψ^*G ,

$$(\mathcal{E}, \psi, \psi^*G). \quad (10.29)$$

Es así que dado cada encajamiento ψ , tal que $\psi(\mathcal{E})$ es una subvariedad legendriana ($\psi^*\alpha = 0$), ψ define un sistema termodinámico en equilibrio. En este sentido **lo importante es**

determinar ψ , pues a partir de ella podemos obtener la ecuación fundamental del sistema termodinámico en cualquier representación que se elija (en cualquier potencial termodinámico).

La tarea de analizar los sistemas termodinámicos y obtener sus ecuaciones fundamentales (equivalentemente, sus ecuaciones de estado) históricamente ha recaído en los experimentos físicos y químicos [10], así como en el empleo de generalizaciones de modelos más simples y expansiones en series de potencias [10, 18, 26]. No obstante, para sistemas cuyas condiciones físicas son difíciles o, hasta la fecha, imposibles de replicar en el laboratorio (objetos astronómicos), o se separan de lo usual (sistemas cuánticos o relativistas) la necesidad de un enfoque formal para determinar potenciales termodinámicos ha empujado la investigación en materia de física estadística para proponer modelos microscópicos [14, 18, 26].

En GTD se propone un método para encontrar los mapeos legedrianos ψ utilizando un principio variacional, imponiendo la condición de que estos mapeos sean armónicos [35, 38]. Esto quiere decir que, si representamos de manera general las coordenadas sobre la variedad \mathcal{B} como Z^A , con $A = 1, 2, \dots, 2n + 1$, entonces dada la acción

$$I(g) = \int_{\mathcal{E}} d^n E \sqrt{|\det g|} \sum_{a,b=1}^n \sum_{A,B=1}^{2n} g^{ab} \frac{\partial Z^A}{\partial E^a} \frac{\partial Z^B}{\partial E^b} G_{AB}, \quad (10.30)$$

donde g^{ab} son las componentes del tensor métrico inverso $g^{-1} = (\psi^*G)^{-1}$, entonces ψ es tal que las coordenadas Z^A satisfacen las ecuaciones diferenciales que se obtienen de su variación, es decir, las ecuaciones

$$\frac{\delta I(g)}{\delta Z^A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial E^b} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ab} \frac{\partial Z^A}{\partial E^a} \right) + \Gamma^A_{BC} \frac{\partial Z^A}{\partial E^b} \frac{\partial Z^C}{\partial E^c} g^{bc} = 0, \quad (10.31)$$

donde Γ^A_{BC} son los símbolos de Christoffel construidos a partir de la métrica G [35, 38]. La postulación de que ψ es un mapeo armónico tiene relación con principios básicos de la termodinámica, como el hecho de que el espacio de equilibrio debe ser una subvariedad extremal para ψ para satisfacer la segunda ley de la termodinámica [35]. No obstante su aplicación se ha visto limitada por la complejidad computacional del sistema de ecuaciones (10.31), aunque soluciones generales se han probado para sistemas de laboratorio como el gas ideal [38], y han encontrado aplicación en áreas más amplias como la cosmología [40].

11 Espacio fase termodinámico y contactificación

En la primera parte de este documento vimos que el haz cotangente, de toda variedad suave n dimensional, se trata de una variedad suave $2n$ dimensional, dotada de una estructura simpléctica natural y exacta (2.1). En la segunda parte indagamos sobre la construcción de un haz fibrado lineal, asociado a toda variedad simpléctica exacta, que carga una estructura de contacto, también natural (9). Ahora emplearemos dichos conceptos para construir la

contactificación del haz cotangente del espacio de equilibrio termodinámico, como la variedad de contacto

$$(\mathcal{B}_C \equiv \mathbb{R} \times T^*\mathcal{E}, \Pi_C \equiv \ker(dz - \pi_C^*\theta)). \quad (11.1)$$

Notamos que la variedad de contacto (\mathcal{B}_C, Π_C) comparte las mismas propiedades que el espacio fase termodinámico (\mathcal{B}, Π) , es decir, se trata de una variedad $2n + 1$ dimensional, con una estructura de contacto co-orientable y máximamente no integrable, pero tiene la ventaja de estar directamente relacionado con el haz cotangente de \mathcal{E} , y por ende con su estructura simpléctica inherente.

Por supuesto, sabemos que localmente siempre podemos definir para cada vecindad de \mathcal{B}_C un contactomorfismo hacia \mathcal{B} ⁶⁵. En particular, en el resto del trabajo exploraremos la hipótesis de que existen sistemas termodinámicos cuyo espacio fase termodinámico es globalmente contactomórfico a (\mathcal{B}_C, Π_C) , observando que, como consecuencia de este hecho, es posible asignarles a dichos sistemas termodinámicos un sistema hamiltoniano.

Hipótesis: Las variedades de contacto (\mathcal{B}, Π) y (\mathcal{B}_C, Π_C) , la última definida en (11.1), son contactomórficas bajo el mapeo $\chi_{\mathcal{E}} : \mathcal{B}_C \rightarrow \mathcal{B}$:

$$\chi_{\mathcal{E}}^*\alpha = \Lambda \alpha_C = \Lambda(dz - \pi_C^*\theta) \quad (\Lambda \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{B}_C)). \quad (11.2)$$

Existe una manera alternativa de pensar en la hipótesis anterior, que resulta conveniente tomando en cuenta que, hasta la fecha, la investigación sobre la naturaleza del espacio fase termodinámico como variedad diferenciable y espacio topológico, ha sido poca en el ámbito de la GTD.

Proposición 50. *Si existe alguna hipervariiedad \mathcal{M} , de tipo simpléctica (41) en \mathcal{B} , que sea simplectomórfica a $T^*\mathcal{E}$, entonces (\mathcal{B}, Π) y (\mathcal{B}_C, Π_C) son variedades contactomórficas.*

Sea $(\mathcal{M}, d(\ell^*\alpha))$ la hipervariiedad de tipo simpléctica, $2n$ dimensional encajada en el espacio fase termodinámico por medio del mapeo

$$\ell : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{B},$$

que es simplectomórfica al haz cotangente del espacio de equilibrio termodinámico, mediante $F_{\mathcal{E}}$:

$$F_{\mathcal{E}} : T^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad F_{\mathcal{E}}^*(d(\ell^*\alpha)) = d((\ell \circ F_{\mathcal{E}})^*\alpha) = -d\theta. \quad (11.3)$$

⁶⁵Esto no es más que una formulación equivalente del teorema de Darboux 5.4, donde se explica que, localmente, toda variedad de contacto es idéntica a \mathbb{R}^{2n+1} con la distribución canónica [33].

Veamos que, en términos de (11.3), podemos construir el contactomorfismo (11.2) mediante la composición

$$\chi_{\mathcal{E}} \equiv \ell \circ F_{\mathcal{E}} \circ \pi_C : \mathcal{B}_C \longrightarrow \mathcal{B}. \quad (11.4)$$

En efecto, empleando la definición (11.3) observamos que el pullback de α bajo $\ell \circ F_{\mathcal{E}}$ es $-\theta + \beta$, con $\beta \in \Lambda^1(T^*\mathcal{E})$ como una 1-forma cerrada,

$$d((\ell \circ F_{\mathcal{E}})^* \alpha) + d\theta = d((\ell \circ F_{\mathcal{E}})^* \alpha + \theta) = 0 \quad \implies \quad (\ell \circ F_{\mathcal{E}})^* \alpha + \theta = \beta,$$

por lo tanto

$$\chi_{\mathcal{E}}^* \alpha = (\ell \circ F_{\mathcal{E}} \circ \pi_C)^* \alpha = \pi_C^* ((\ell \circ F_{\mathcal{E}})^* \alpha) = \pi_C^* (\beta - \theta) = \pi_C^* \beta - \pi_C^* \theta.$$

Como β es una 1-forma cerrada sobre $T^*\mathcal{E}$, $\pi_C^* \beta$ también es una 1-forma cerrada sobre \mathcal{B}_C ⁶⁶, y como, localmente, siempre podemos definirla como la diferencial de una función de \mathcal{B}_C a \mathbb{R} [22], $\pi_C^* \beta = dz$, obtenemos entonces el resultado esperado:

$$\chi_{\mathcal{E}}^* \alpha = \pi_C^* \beta - \pi_C^* \theta = dz - \pi_C^* \theta = \alpha_C. \quad \blacksquare$$

En cuanto a la posibilidad de que en realidad exista una hipervariiedad de tipo simpléctica, simplectomórfica a $T^*\mathcal{E}$, una condición necesaria es encontrar una fibración lagrangiana en \mathcal{M} , parametrizada por una variedad n -dimensional. En tal caso podríamos tomar dicha variedad como \mathcal{E} (también sería una hipervariiedad n dimensional de \mathcal{B}) y propiamente dicho, estaríamos tratando de mostrar que \mathcal{M} es directamente el haz cotangente asociado [2].

Consideremos entonces un sistema termodinámico de la GTD $(\mathcal{E}, \psi, \psi^*G)$ que satisfaga nuestra hipótesis de trabajo, y asociado a dicho sistema tomemos su contactificación

$$(\mathcal{B}_C, \Pi_C, \chi_{\mathcal{E}}^*G). \quad (11.5)$$

Lo primero que notamos es que el encajamiento legendriano ψ ahora puede construirse como la composición de un encajamiento de \mathcal{E} en su haz cotangente, y posteriormente de un encajamiento de $T^*\mathcal{E}$ en su contactificación, es decir,

$$\psi \equiv \chi_{\mathcal{E}} \circ \ell \circ \omega_{\psi} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}. \quad (11.6)$$

⁶⁶ $d(\pi_C^* \beta) = \pi_C^*(d\beta) = \pi_C^*(0) = 0.$

Veamos ahora que, dado que el encajamiento (11.6) es un mapeo legendriano, entonces ω_ψ es un encajamiento lagrangiano de \mathcal{E} en $T^*\mathcal{E}$.

Proposición 51. *Si ψ , definido en (11.6), se trata de un mapeo legendriano para (\mathcal{B}, Π) , es decir, si $\psi^*\alpha = 0$, entonces ω_ψ es un mapeo lagrangiano para $(T^*\mathcal{E}, -d\theta)$, es decir $\omega_\psi^*(-d\theta) = 0$.*

A partir del cálculo directo del pullback $\psi^*\alpha = 0$, al tomar en cuenta que, para cualquier sección transversal ℓ sobre la contactificación del haz cotangente, se tiene $\pi_C \circ \ell = \text{Id}_{T^*\mathcal{E}}$, y empleando además la propiedad $\omega^*\theta = \omega$ válida para cualquier 1-forma sobre \mathcal{E} [22], obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \psi^*\alpha &= (\chi_{\mathcal{E}} \circ \ell \circ \omega_\psi)^*\alpha = \omega_\psi^* \circ \ell^*(\chi_{\mathcal{E}}^*\alpha) = \omega_\psi^* \circ \ell^* \Lambda(dz - \pi_C^*\theta) \\ &= (\Lambda \circ \ell \circ \omega_\psi) (d(z \circ \ell \circ \omega_\psi) - \omega_\psi^*(\pi_C \circ \ell)^*\theta) = (\Lambda \circ \ell \circ \omega_\psi) (d(z \circ \ell \circ \omega_\psi) - \omega_\psi^*\theta) \\ &= (\Lambda \circ \ell \circ \omega_\psi) (d(z \circ \ell \circ \omega_\psi) - \omega_\psi) = 0, \end{aligned}$$

que nos indica que ω_ψ es una 1-forma exacta (en general $(\Lambda \circ \ell \circ \omega_\psi) \neq 0$), y, por lo tanto, el pullback $\omega_\psi^*(-d\theta)$ se anula:

$$\omega_\psi^*(-d\theta) = -d(\omega_\psi^*\theta) = -d\omega_\psi = -d^2(z \circ \ell \circ \omega_\psi) = 0. \quad \blacksquare$$

Este resultado quiere decir que, al mismo tiempo que un sistema termodinámico en equilibrio se expresa como una subvariedad legendriana del espacio fase termodinámico, un sistema termodinámico en equilibrio también puede pensarse como una subvariedad lagrangiana de la proyección (el haz cotangente) de una variedad similar al espacio fase termodinámico (la contactificación del haz cotangente):

$$(\mathcal{E}, \psi, \psi^*G) \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{E}, \omega_\psi, \psi^*G). \quad (11.7)$$

Para completar la equivalencia entre \mathcal{E} como subvariedad lagrangiana y \mathcal{E} como subvariedad legendriana, analicemos bajo qué condiciones, si ω_ψ es un encajamiento lagrangiano en el haz cotangente, ψ es un mapeo legendriano hacia el espacio fase termodinámico.

Proposición 52. *Sea $\ell : T^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}_C$ una sección transversal sobre la contactificación de \mathcal{E} , y sea $K \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathcal{E})$ el mapeo definido mediante el pullback de ℓ sobre la coordenada z de las fibras de la contactificación,*

$$K \equiv \ell^*z = z \circ \ell : T^*\mathcal{E} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}. \quad (11.8)$$

Si ω_ψ es la 1-forma cerrada $\omega_\psi = dW$, con $W \in C^\infty(\mathcal{E})$, tal que satisface la ecuación diferencial

$$K \circ dW = W + H_0, \quad (11.9)$$

con H_0 como una constante, entonces $\psi \equiv \chi_{\mathcal{E}} \circ \ell \circ \omega_\psi$ es un mapeo legendriano para \mathcal{B} :

$$\psi^* \alpha = 0. \quad (11.10)$$

Notemos que al tratarse de una 1-forma cerrada, trivialmente $\omega_\psi = dW$ es un encajamiento lagrangiano de \mathcal{E} en $T^*\mathcal{E}$, tal como el resultado (26) nos lo indica. Ahora, notemos que en efecto el pullback de α bajo la composición ψ es cero, siempre que W sea solución de la ecuación diferencial (11.9):

$$\begin{aligned} \psi^* \alpha &= (\ell \circ \omega_\psi)^* \Lambda(dz - \pi_C^* \theta) = (\Lambda \circ \ell \circ \omega_\psi) (d(z \circ \ell \circ \omega_\psi) - \omega_\psi^* (\pi_C \circ \ell)^* \theta) \\ &= d(K \circ \omega_\psi) - \omega_\psi = d(K \circ dW) - dW = d(K \circ dW - W) = dH_0 = 0. \end{aligned}$$

■

La proposición anterior nos da la condición necesaria para que un mapeo lagrangiano genere un mapeo legendriano sobre \mathcal{B} . Esto se da mediante las soluciones de la ecuación diferencial (11.9), que tiene una estructura similar a una ecuación del tipo *Hamilton-Jacobi*, lo cual se aprecia mejor al incluir coordenadas locales (E^1, \dots, E^n) (10.14) para W y las coordenadas locales $(E^1, \dots, E^n, P_1, \dots, P_1)$, con P_i como las coordenadas duales del haz cotangente, para K :

$$K \circ dW - W = H_0 \quad \implies \quad K \left(E^1, \dots, E^n, \frac{\partial W}{\partial E^1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial E^n} \right) - W(E^1, \dots, E^n) = H_0. \quad (11.11)$$

Sin perder generalidad podemos definir una 0-forma $H \in C^\infty(T^*\mathcal{E})$ a partir de K y el W ,

$$H \equiv K - \pi^* W, \quad (11.12)$$

tal que la ecuación (11.11) se exprese, efectivamente, como una ecuación de tipo Hamilton-Jacobi,

$$H \left(E^1, \dots, E^n, \frac{\partial W}{\partial E^1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial E^n} \right) = H_0. \quad (11.13)$$

Decimos que H es una hamiltoniana, no en el sentido físico, al que estamos acostumbrados, de un sistema mecánico⁶⁷, si no en el sentido que planteamos en la primera parte de esta tesis al definir las hamiltonianas y sus respectivos campos hamiltonianos asociados. En particular, H es una función que permanece constante en $dW(\mathcal{E}) \subset T^*\mathcal{E}$, y como tal, su campo hamiltoniano asociado es completamente tangente al espacio de equilibrio termodinámico [41].

Con lo dicho anteriormente, podemos completar la equivalencia (11.7), asociando a cada sistema termodinámico un sistema hamiltoniano, en el sentido presentado en [8]:

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{E}, \psi \equiv \chi_{\mathcal{E}} \circ \ell \circ dW, \psi^*G) \\
& \quad \Downarrow \\
& (\mathcal{E}, dW, \psi^*G) \\
& \quad \Downarrow \\
& (T^*\mathcal{E}, -d\theta, H \equiv \ell^*z - \pi^*W).
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Finalmente, en cuanto a las transformaciones de Legendre \mathcal{L}_i sobre el espacio fase termodinámico, estas se transforman en contactomorfismos sobre (\mathcal{B}_C, Π_C) ,

$$\mathcal{L}_{C_i} \equiv \chi_{\mathcal{E}}^{-1} \circ \mathcal{L}_i \circ \chi_{\mathcal{E}} : \mathcal{B}_C \longrightarrow \mathcal{B}_C. \tag{11.15}$$

Proposición 53. *Los difeomorfismos (11.15) son contactomorfismos sobre (\mathcal{B}_C, Π_C) .*

Directamente, calculando el pullback de α_C bajo \mathcal{L}_{C_i} obtenemos, efectivamente, α_C (módulo un factor conforme):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{C_i}^* \alpha_C &= (\chi_{\mathcal{E}}^{-1} \circ \mathcal{L}_i \circ \chi_{\mathcal{E}})^* \alpha_C = \chi_{\mathcal{E}}^* \circ \mathcal{L}_i^* \circ (\chi_{\mathcal{E}}^{-1})^* \alpha_C \\
&= \chi_{\mathcal{E}}^* \circ \mathcal{L}_i^* \left(\frac{1}{\Lambda \circ \chi_{\mathcal{E}}^{-1}} \alpha \right) = \chi_{\mathcal{E}}^* \left(\frac{1}{\Lambda \circ \chi_{\mathcal{E}}^{-1} \circ \mathcal{L}_i} \alpha \right) = \frac{\Lambda}{\Lambda \circ \mathcal{L}_{C_i}} \alpha_C.
\end{aligned}$$

■

Como consecuencia de este resultado, recordando que todo contactomorfismo estricto sobre una contactificación de cierta variedad define un simplectomorfismo en dicha variedad (9.7), en el caso particular en que $\Lambda = 1$ (el contactomorfismo $\chi_{\mathcal{E}}$ también sea estricto), las transformaciones de Legendre definen los simplectomorfismos, sobre el haz cotangente del espacio de equilibrio,

⁶⁷Por supuesto no se puede pensar en H como una hamiltoniana que describe un sistema físico en \mathcal{E} , pues no se construyó a partir de una lagrangiana [8].

$$f_{\mathcal{L}_{C_i}} \equiv \pi_C \circ \mathcal{L}_{C_i} \circ \ell. \quad (11.16)$$

11.1 Ejemplo 1: el gas ideal

Consideremos el sistema termodinámico más sencillo que se puede encontrar, el de un gas ideal compuesto por N partículas, descrito por su energía interna y su volumen ($E^1 = U$, $E^2 = V$) mediante la ecuación fundamental⁶⁸ [10]

$$\phi = N C_v k \ln(U) + N k \ln(V), \quad (11.17)$$

donde C_v es el calor específico a volumen constante, k es la constante de Boltzmann y ϕ se puede interpretar como la entropía del gas. Comencemos por considerar como contacto-morfismo entre \mathcal{B}_C y \mathcal{B} al mapeo más sencillo de todos, el que identifica z con τ , E^i con q^i y P_i con p_i ,

$$\chi_{\mathcal{E}} : (z, E^i, P_i) \mapsto (\tau \circ \chi_{\mathcal{E}} = z, q^i \circ \chi_{\mathcal{E}} = E^i, p_i \circ \chi_{\mathcal{E}} = P_i). \quad (11.18)$$

En este caso particular ψ se reduce, para fines prácticos, localmente a $\ell \circ \omega_{\psi}$, y por lo tanto la función tipo Hamilton-Jacobi W no es más que la ecuación fundamental,

$$W = z \circ \ell \circ \omega_{\psi} = \tau \circ \psi = \phi. \quad (11.19)$$

Teniendo esto en mente podemos construir la ecuación diferencial que satisface ϕ , obteniendo con esto la ecuación de tipo Hamilton-Jacobi (11.13):

$$\frac{\partial \phi}{\partial U} = \frac{N C_v k}{U} = \frac{C_v V}{U} \frac{\partial \phi}{\partial V} \implies \frac{1}{2} \left[U^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial U} \right)^2 + V^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial V} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (N k)^2 (C_v^2 + 1),$$

donde identificando $H_0 \equiv (Nk)^2(C_v^2 + 1)/2$ y tomando $P_1 = P_U$ y $P_2 = P_V$, encontramos la hamiltoniana

$$H(U, V, P_U, P_V) = \frac{1}{2} (U^2 P_U^2 + V^2 P_V^2). \quad (11.20)$$

El campo hamiltoniano asociado a (11.20), en la base tangente inducida por las coordenadas (U, V, P_U, P_V) , es

⁶⁸Tomamos U y V adimensionales, por comodidad.

$$X_H = U^2 P_U \frac{\partial}{\partial U} + V^2 P_V \frac{\partial}{\partial V} - U P_U^2 \frac{\partial}{\partial P_U} - V P_V^2 \frac{\partial}{\partial P_V}, \quad (11.21)$$

mientras que sus curvas integrales se encuentran fácilmente resolviendo las ecuaciones de Hamilton⁶⁹

$$\dot{U} = U^2 P_U, \quad \dot{V} = V^2 P_V, \quad \dot{P}_U = -U P_U^2, \quad \dot{P}_V = -V P_V^2$$

es decir,

$$\gamma(t) = \left(U_0 e^{NkC_V t}, V_0 e^{Nkt}, \frac{NkC_V}{U_0} e^{-NkC_V t}, \frac{Nk}{V_0} e^{-Nkt} \right), \quad (11.22)$$

donde hemos dispuesto como condición inicial $H \circ \gamma(0) = H(U_0, V_0, P_{U_0}, P_{V_0}) = H_0$ (véase Fig. 9). Resulta interesante notar que, a lo largo de la proyección de la curva integral (11.22) en \mathcal{E} ⁷⁰, $\gamma_{\mathcal{E}} : t \in I \rightarrow \mathcal{E}$, la entropía del sistema es monotonamente creciente:

$$\phi \circ \gamma_{\mathcal{E}}(t) = NC_V k \ln(U_0) + Nk \ln(V_0) + (Nk)^2 (C_V^2 + 1) t = \phi_0 + 2H_0 t, \quad (11.23)$$

por lo que dichas curvas integrales pueden considerarse como procesos cuasiestáticos.

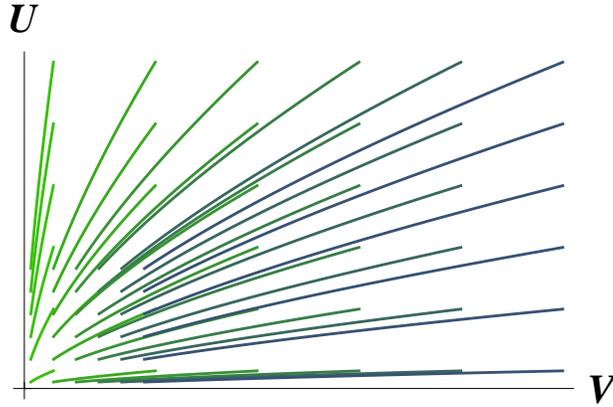


Figura 9: Curvas $\gamma(t)$ (11.22) proyectadas en el plano $U - V$ para $C_V = 3/2$.

⁶⁹En este caso el punto sobre las variables, indica su derivación con respecto a un parámetro real t (no confundir con un tiempo físico, la descripción termodinámica se sigue dando en el equilibrio).

⁷⁰La curva cuyo campo vectorial tangente se identifica con $\pi_* X_H$.

11.2 Ejemplo 2: la banda elástica

Estudiemos ahora un modelo simple de una banda elástica, unidimensional, como sistema termodinámico, descrito por su energía interna U y su longitud L ($E^1 = U$, $E^2 = L$), por medio de la ecuación fundamental [10]

$$\phi = c \ln(U) - \frac{1}{2} b L^2, \quad (11.24)$$

con c y b como constantes de proporcionalidad adecuadas, de tal modo que (11.24) pueda interpretarse como la entropía. Volvamos a utilizar el contactomorfismo (11.18), con el cual la función de tipo Hamilton-Jacobi se reduce a ϕ (11.19). En este caso la ecuación diferencial que podemos construir para dicha ecuación fundamental es

$$\frac{\partial \phi}{\partial U} = \frac{c}{U}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial L} = -bL \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \left[U^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial U} \right)^2 + \frac{1}{L^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial L} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (c^2 + b^2),$$

donde identificando $H_0 \equiv (b^2 + c^2)/2$ y tomando $P_1 = P_U$ y $P_2 = P_L$, identificamos como la hamiltoniana al mapeo

$$H(U, L, P_U, P_L) = \frac{1}{2} \left(U^2 P_U^2 + \frac{1}{L^2} P_L^2 \right). \quad (11.25)$$

En este caso el campo hamiltoniano asociado a (11.25) resulta ser

$$X_H = U^2 P_U \frac{\partial}{\partial U} + \frac{P_L}{L^3} \frac{\partial}{\partial L} - U P_U^2 \frac{\partial}{\partial P_U} + \frac{P_L^2}{L^3} \frac{\partial}{\partial P_L}, \quad (11.26)$$

con sus curvas integrales asociadas

$$\dot{U} = U^2 P_U, \quad \dot{L} = \frac{P_L}{L^2}, \quad \dot{P}_U = -U P_U^2, \quad \dot{P}_L = \frac{P_L^2}{L^3}$$

↓

$$\gamma(t) = \left(U_0 e^{ct}, \sqrt{2bt + L_0^2}, \frac{c}{U_0} e^{-ct}, b \sqrt{2bt + L_0^2} \right), \quad (11.27)$$

donde nuevamente tomamos la condición inicial $H \circ \gamma(0) = H(U_0, L_0, P_{U_0}, P_{L_0}) = H_0$ (véase Fig. 10).

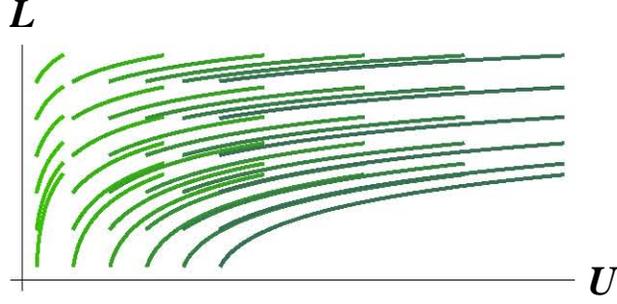


Figura 10: Curvas $\gamma(t)$ (11.27) proyectadas en el plano $U - L$ para $c = 2$ y $b = 1$.

En este caso la entropía, a lo largo de las curvas proyectadas γ_ε , es monotonamente creciente siempre que se cumpla la condición $c > b$:

$$\phi \circ \gamma_\varepsilon(t) = c \ln(U_0) - \frac{1}{2} b L_0^2 + c^2 t - b^2 t = \phi_0 + (c^2 - b^2)t. \quad (11.28)$$

11.3 Ejemplo 3: radiación electromagnética

Como último ejemplo consideremos una cavidad de volumen V que contiene radiación electromagnética en equilibrio térmico, descrita por su energía interna U y el volumen de dicha cavidad ($E^1 = U$, $E^2 = V$). En este caso un modelo sencillo de ecuación fundamental es

$$\phi = \frac{4}{3} (bU^3 V)^{1/4}, \quad (11.29)$$

con b , nuevamente, como una constante de proporcionalidad, y (11.29) como la entropía. En este caso resulta conveniente proponer otro contactomorfo distinto de \mathcal{B}_C a \mathcal{B} , definido por medio de una 0-forma monótona sobre \mathcal{B}_C , $R \equiv R(z)$ con $R'(z) \equiv dR/dz \neq 0$:

$$\chi_\varepsilon = (z, E^i, P_i) \mapsto (\tau \circ \chi_\varepsilon = R(z), q^i \circ \chi_\varepsilon = E^i, p_i \circ \chi_\varepsilon = R'(z)P_i). \quad (11.30)$$

Resulta fácil mostrar que (11.30) es un contactomorfo, aunque no estricto:

$$\chi_\varepsilon \alpha = d(R(z)) - \sum_{i=1}^n R'(z) P_i dE^i = R'(z) \left(dz - \sum_{i=1}^n P_i dE^i \right) = R'(z) \alpha_C. \quad (11.31)$$

En este caso la relación entre la ecuación fundamental y la función tipo Hamilton-Jacobi se da gracias a la composición con R ,

$$\phi = \psi^* \tau = (\chi_\varepsilon \circ \ell \circ \omega_\psi)^* \tau = (\ell \circ \omega_\psi)^* \tau \circ \chi_\varepsilon = \omega_\psi^* R \circ z \circ \ell = R \circ K \circ \omega_\psi = R \circ W. \quad (11.32)$$

Para este ejemplo podemos tomar $R = e^z$ y

$$W = \log\left(\frac{4}{3}b^{1/4}\right) + \frac{3}{4}\log(U) + \frac{1}{4}\log(V), \quad (11.33)$$

de tal manera que, siguiendo el procedimiento descrito en los dos últimos ejemplos, podemos encontrar la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2} \left[U^2 \left(\frac{\partial W}{\partial U} \right)^2 + V^2 \left(\frac{\partial W}{\partial V} \right)^2 \right] = \frac{5}{16},$$

de donde identificamos $H_0 = 5/16$ y, nuevamente, (11.20) como hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} (U^2 P_U^2 + V^2 P_V^2).$$

Como ya analizamos en su momento, las curvas integrales del campo hamiltoniano (11.21) son, para los parámetros de este sistema,

$$\gamma(t) = \left(U_0 e^{t/4}, V_0 e^{t/2}, \frac{1}{4U_0} e^{-t/4}, \frac{1}{2V_0} e^{-t/2} \right). \quad (11.34)$$

En este caso la entropía sigue siendo una función creciente a lo largo de las curvas integrales γ_ε :

$$W \circ \gamma_\varepsilon(t) = W_0 - \log\left(\frac{4}{3}b^{1/4}\right) + H_0 t \quad \implies \quad \phi \circ \gamma_\varepsilon(t) = \frac{3}{4b^{1/4}} e^{W_0} e^{H_0 t}. \quad (11.35)$$

$$S = S(M, J) = 2\pi(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2})$$

$$S_M = 4\pi M \left(1 + \frac{M^2}{\sqrt{M^4 - J^2}} \right) = \frac{2MS}{\sqrt{M^4 - J^2}}$$

$$S_J = -\frac{2\pi J}{\sqrt{M^4 - J^2}}$$

$$F = \frac{2}{\sqrt{M^4 - J^2}}.$$

Conclusiones

Al respecto de la hipótesis de trabajo expuesta en la tercera parte de este documento, es necesario aclarar que hasta el momento, en el ámbito de la GTD, no hay trabajos que exploren la topología y naturaleza del espacio fase termodinámico como variedad diferenciable, más allá de la necesidad de que tenga una dimensión $2n + 1$ y una estructura de contacto particular (co-orientable y máximamente no integrable), siendo esta una línea abierta de investigación.

En el mejor de los casos podemos suponer la existencia de sistemas termodinámicos donde nuestra hipótesis resulta ser cierta, esto al menos hasta profundizar en el análisis topológico de la variedad de contacto, al que nos referimos en el párrafo anterior, lo cual se pretende hacer como continuación de esta investigación.

A los elementos que hay que añadir como trabajo pendiente se suman la cuestión de qué papel juega la métrica riemanniana de la GTD en los sistemas hamiltonianos asociados, y cómo determinar de manera *natural*, para cada sistema, todos los mapeos que fueron introducidos en la tercera parte, en particular el contactomorfismo χ_ε y la sección transversal ℓ . De momento, la *libertad* en su elección ha resultado benéfica para poder plantear ecuaciones del tipo de Hamilton-Jacobi en sistemas simples, pero su existencia no nos permite formalizar realmente un principio variacional basado en los sistemas hamiltonianos que sea de utilidad en la GTD, por el momento.

Retomando los resultados arrojados por los tres sistemas termodinámicos simples que se analizaron al final, resulta interesante que en todos los casos las curvas integrales de los campos hamiltonianos puedan interpretarse como procesos cuasiestáticos, planteando la interrogante de cuál es la física detrás de los mapeos H .

Bibliografía

- [1] Gibbs, J. [1948]. *The collected works*. Yale University Press, Thermodynamics, vol. 1.
- [2] Weinstein, A. [1971]. *Symplectic Manifolds and Their Lagrangian Submanifolds*. Advances in Mathematics 6, 329-246.
- [3] Hermann, R. [1973]. *Geometry, physics and systems*. Marcel Dekker, New York.
- [4] Hermann, R. [1973]. *Geometry, physics and systems (Pure and applied mathematics)*. M. Dekker, vol. 18, Universidad de Michigan.
- [5] Weinhold, F. [1975]. *Metric geometry of equilibrium thermodynamics I-IV*. J. Chem. Phys., vol. 63.
- [6] Mrugala, R. [1978]. *Geometrical formulation of equilibrium phenomenological thermodynamics*. Rep. Math. Phys. 14, 419.
- [7] Ruppeiner, G. [1979]. *Thermodynamics: A Riemannian geometric model*. Phys. Rev. A., vol. 20.
- [8] Marsden, J. & Abraham, R. [1981]. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [9] Salamon, P., Nulton, J., Berry, J. [1984]. *Length in statistical thermodynamics*. J. Chem. Phys. 82, 2433.
- [10] Callen, H. [1985]. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [11] Salamon, P., Nulton, J. [1985]. *Geometry of the ideal gas*. Phys. Rev. A 31, 2520.
- [12] Mrugala, R. [1985]. *Submanifolds in the thermodynamics phase space*. Rep. Math. Phys. 21, 197.
- [13] Amari, S. [1985]. *Differential Geometric Methods in Statistics*. Springer-Verlag New York.
- [14] Sears, F. [1986]. *Thermodynamics, kinetic theory, and statistical thermodynamics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [15] Ruppeiner, G. [1995]. *Riemannian geometry in thermodynamics fluctuation theory*. Rev. Mod. Phys., vol. 67.
- [16] Axler, S. [1997]. *Linear Algebra Done Right*. Springer-Verlag New York Inc., 2da Edición.

- [17] Schroeder, D. [1999]. *An introduction to thermal physics*. Addison-Wesley.
- [18] Muschik, W., Papenfuss, V. [2000]. *Variational Principles in Thermodynamics*. Technische Mechanik, Band 20, Heft 2, 105-112.
- [19] Sieniutycz, S. [2000]. *Action-Type Variational Principles For Hyperbolic and Parabolic Heat & Mass Transfer*. Int. Journal Applied Thermodynamics, vol. 3.
- [20] Arnold, V. [2001]. *Symplectic Geometry*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Dynamical systems IV.
- [21] Talpert, Y. [2002]. *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer Science+Business Media Dordrecht.
- [22] Nakahara, M. [2003]. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia.
- [23] Johnston, D., Janke, W., Kenna, R. [2003]. *Information geometry, one, two, three (and four)*. Acta Phys. Polon. B 34, 4923.
- [24] Santoro, M. [2004]. *Thermodynamic length in a two-dimensional thermodynamic state space*. J. Chem. Phys. 121, 2932.
- [25] Janke, W., Johnston, D., Kenna, R. [2004]. *Information geometry and phase transitions*. Physica A 336, 181.
- [26] Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H. [2005]. *Thermodynamics and statistical mechanics*. Springer-Verlag New York Inc., 2da. edición.
- [27] Santoro, M. [2005]. *Weinhold length in an isentropic ideal and quasi-ideal gas*. Chem. Phys. 310, 269.
- [28] Shen, J., Cai R., et al. [2005]. *Thermodynamic geometry and critical behavior of black holes*. arXiv: gr-qc/0512035.
- [29] Cannas da Silva, A. [2006]. *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer-Verlag, No. 176 Lecture Notes in Mathematics.
- [30] Quevedo, H. [2007]. *Geometrothermodynamics*. J. Math. Phys. 48: 013506.
- [31] Sieniutycz, S., Kuran P. [2008]. *Variational formulations for resting irreversible fluids with heat flow*. 2nd conference on European computing conference.
- [32] Rajeev, S. [2008]. *A Hamilton-Jacobi Formalism for Thermodynamics*. Annals Phys. 323.
- [33] Hansjorg, G. [2009]. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press.
- [34] Blair, D. [2010]. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. Progress in Mathematics 203, Birkhäuser. Springer Science+Business Media, 2da. Edición.
- [35] Quevedo, H., Vázquez, A., et al. [2010]. *Thermodynamic systems as extremal hypersurfaces*. Journal of Geometry and Physics, 60.

- [36] Quevedo, H., Sánchez, A., et al. [2010]. *Curvature as a Measure of the Thermodynamic Interaction*. arXiv preprint arXiv:1011.0122.
- [37] Quevedo, H., Sánchez, A., et al. [2011]. *Phase transitions in geometrothermodynamics*. General Relativity and Gravitation, 43.
- [38] Quevedo, H. [2011]. *Fundamentals of Geometrothermodynamics*. arXiv:1111.5056 [math-ph].
- [39] Bravetti, A., Monsalvo-Lopez, C., et al. [2014]. *Representation invariant Geometrothermodynamics: applications to ordinary thermodynamic systems*. Journal of Geometry and Physics, 81.
- [40] Quevedo, H., Quevedo, M. [2014]. *Cosmological applications of geometrothermodynamics*. Gravitation and Cosmology 20(3): 208-213.
- [41] Vaquero, M. [2015]. *On the Geometry of the Hamilton-Jacobi Equation*. ICMAT (Instituto de Ciencias Matemáticas), UAM (Universidad Autónoma de Madrid), Madrid, España.
- [42] Áman, J., Bengtsson, I., Pidokrajt, S. [2015]. *Thermodynamic Metrics and Black Hole Physics*. Entropy, 17(9), 6503-6518 . arXiv:1507.06097 [gr-qc].
- [43] Baldiotti, M., Fresneda, R. [2016]. *A Hamiltonian approach to Thermodynamics*. Annals Phys. 373, 245-256.
- [44] Perez, P. [2017]. *Mecánica clásica*. Notas del curso de mecánica clásica, Instituto de Física, UNAM.
- [45] Pinedo, V., Quevedo, H., et al. [2017]. *On the physical significance of geometrothermodynamic metric*. arXiv:1704.03071 [math-ph].
- [46] Dereli, T., Ünlütürk, K. [2019]. *Hamilton-Jacobi formulation of the thermodynamics of Einstein-Born-Infeld-AdS black holes*. EPL (Europhysics Letters), vol. 125, No. 1.