



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Geometría proyectiva diferencial y la derivada de
Schwarz**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

JOSÉ STEFANO SÁNCHEZ SÁNCHEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO
CIUDAD DE MÉXICO, 2018**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Índice general

Introducción	1
1. Plano y curvas proyectivas	3
1.1. Plano proyectivo	3
1.2. Líneas proyectivas	6
1.3. Curvas proyectivas	7
2. Derivada de Schwarz	10
2.1. Transformaciones de Möbius	10
2.2. Formas diferenciales cuadráticas	14
2.3. Derivada de Schwarz	15
3. Geometría de la derivada de Schwarz	24
3.1. Automorfismos del disco unitario \mathbb{D}	25
3.2. La derivada de Schwarz S_z^f y \mathbb{D}	28
3.3. Curvatura de Lorentz	31
4. Teorema de Ghys	38
4.1. Cónicas semi-osculantes de curvas planas	38
4.2. Teorema de Ghys para el plano hiperbólico	43
Referencias	57

Introducción

En esta tesis la derivada de Schwarz y la geometría proyectiva diferencial son los objetos principales a estudiar. La derivada de Schwarz es el primer invariante proyectivo diferencial que fue estudiado a mediados del siglo XIX por E. Kummer, H. A. Schwarz y F. Klein. Se le atribuye su planteamiento a Lagrange en su libro “Sur la construction des cartes géographiques” (1779) ([24]). La derivada aparece en trabajos clásicos de Spivak, Marsden, Ahlfors, etc. En 1995 cuando E. Ghys trabajaba con difeomorfismos de la línea proyectiva (\mathbb{RP}^1) hizo referencia a esta derivada y demostró que ésta tiene al menos cuatro puntos donde se anula. Al conocer este resultado, L. Guieu, C. Duval, V. Ovsienko y S. Tabachnikov notaron que era equivalente al teorema de los cuatro vértices en la geometría lorentziana, por lo que la derivada de Schwarz tomó un significado relevante en la geometría de curvas planas euclidianas y de variedades semi-riemannianas de dimensión dos con curvatura constante. Siendo de mi interés este resultado, me di a la tarea de reunir en este trabajo el material necesario para dar una idea de la demostración de este teorema.

La estructura de esta tesis es la siguiente: en el capítulo 1 desarrollo una introducción de la geometría proyectiva, definiendo las rectas, el plano proyectivo y el plano proyectivo dual, además de definir curvas algebraicas proyectivas y sus duales. El propósito del capítulo 1 es motivar al lector sobre la importancia de la geometría proyectiva diferencial, haciendo notar el contraste de este enfoque con la forma sintética de abordar el tema.

El propósito del capítulo 2 es dar los elementos necesarios para poder entender la derivada de Schwarz como funcional y como forma cuadrática: Se trabaja con las transformaciones de Möbius de la línea proyectiva real en ella misma y se definen las formas diferenciales cuadráticas de una variedad diferenciable. Teniendo todos estos elementos para demostrar propiedades básicas de la derivada de Schwarz.

En el capítulo 3 me centro en el estudio de dos espacios geométricos, el plano hiperbólico (a través de sus modelos del semiplano superior y el disco de Poincaré) y el producto cartesiano de la línea proyectiva consigo misma. Además, demuestro que la derivada de Schwarz caracteriza las isometrías de dos los modelos hiperbólicos. El propósito de este capítulo es relacionar los grupos de isometrías del plano

hiperbólico con la derivada de Schwarz. También, analizo algunas de las propiedades de funciones del disco de Poincaré en sí mismo que permanecen invariantes bajo la derivada de Schwarz. Doto al producto cartesiano de la línea proyectiva consigo misma de una métrica lorentziana local, para así definir la curvatura de Lorentz de una curva y analizar su relación con la derivada de Schwarz.

En el capítulo 4 enunció el teorema de Ghys y demuestro una equivalencia de éste. También demuestro el teorema de Foreman como consecuencia del teorema de Ghys. En los modelos hiperbólicos (incluyendo el modelo de Klein-Beltrami) se demuestra el teorema de los cuatro vértices como consecuencia del teorema de Ghys. Por otro lado, se muestra que dado un vértice de una curva convexa, cerrada, suave y orientada en el plano hiperbólico, se construye un difeomorfismo de la curva en la línea proyectiva y se muestra que en cada vértice la derivada de Schwarz del difeomorfismo es igual a cero. Para concluir, se incluye un ejemplo que muestra que el teorema de los cuatro vértices no es cierto en el plano proyectivo real.

Capítulo 1

Plano y curvas proyectivas

1.1. Plano proyectivo

Definición 1.1.1. Sea M un espacio topológico T^2 y 2-numerable. Una estructura diferenciable F de clase C^m sobre M es una familia $\{(\varphi_\lambda, U_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$, donde $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow V_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ son homeomorfismos con $\lambda \in \Lambda$, tales que para cada λ , U_λ es un abierto de M , que cumplen:

1. La unión de los abiertos U_λ cubren a M , es decir, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$.
2. Dados cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$, los homeomorfismos φ_α y φ_β son compatibles, es decir, la aplicación:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

la cual llamamos cambio de cartas, es diferenciable de orden m .

Al par $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$ se le llama *carta* de M . Notemos que la estructura es *maximal* si cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ que es compatible con todas las cartas de la estructura, ella también pertenece a la estructura.

Definición 1.1.2. El par (M, F) , donde M es un espacio topológico de dimensión n , como en la definición 1.1.1 y F una estructura diferenciable de clase C^m sobre M , es una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^m .

Definición 1.1.3. Sea \mathbb{RP}^2 el conjunto de líneas rectas en \mathbb{R}^3 agujeradas en el origen y que pasan por el origen. A \mathbb{RP}^2 se le conoce como el plano proyectivo real.

Intuitivamente pensemos en: \mathbb{R}^2 un plano L en \mathbb{R}^3 que no pasa por el origen $\bar{0} = (0, 0, 0)$, y L_0 un plano paralelo a L que pase por el origen. Así, tenemos una correspondencia natural uno a uno entre los puntos de L y las rectas que pasan por el origen $\bar{0}$ de \mathbb{R}^3 que no estén en L_0 , esto es, dado un punto en L le asignamos la

única línea que pasa por el origen y ese punto, y viceversa; dada una recta que pasa por el origen $\bar{0}$ que no esté contenido en L_0 le asignamos el punto donde interseca a L .

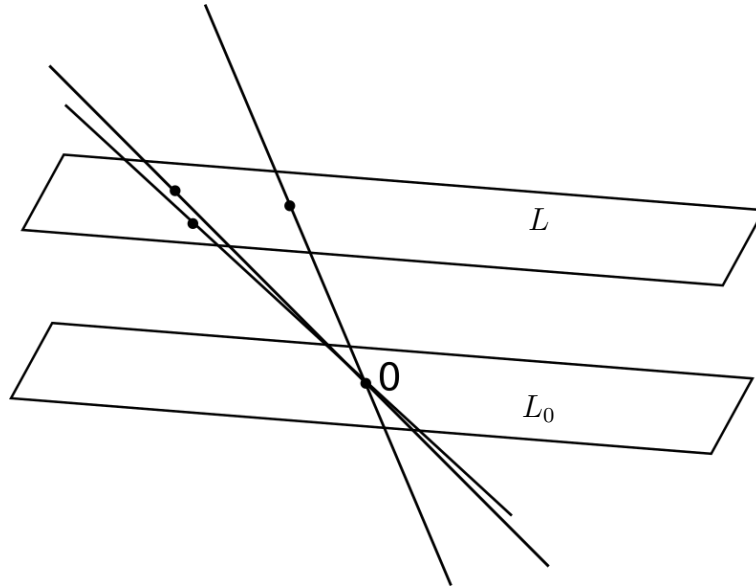


Figura 1.1: Correspondencia de rectas por el origen

Veamos que el plano proyectivo es una variedad diferenciable.

Demostración. Consideremos $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$. Observemos que \mathbb{RP}^2 es el espacio cociente de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ bajo la relación:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \neq 0$$

Es fácil verificar que \sim es una relación de equivalencia.

Denotaremos los puntos de \mathbb{RP}^2 como $(x_1 : x_2 : x_3)$. Observemos que si $x_3 \neq 0$

$$(x_1 : x_2 : x_3) = \left(\frac{x_1}{x_3} : \frac{x_2}{x_3} : 1 \right).$$

Definimos los subconjuntos U_1, U_2, U_3 en \mathbb{RP}^2 :

$$U_i = \{(x_1 : x_2 : x_3) : x_i \neq 0\}.$$

Geoméricamente, U_i es el conjunto de líneas rectas agujeradas en \mathbb{R}^3 que pasan por el origen y no pertenecen al plano $x_i = 0$.

Definamos las transformaciones:

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_i \text{ como} \quad (1.1.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1}(y_1, y_2) &= (1 : y_1 : y_2) \\ \varphi_2^{-1}(y_1, y_2) &= (y_1 : 1 : y_2) \\ \varphi_3^{-1}(y_1, y_2) &= (y_1 : y_2 : 1). \end{aligned}$$

Probaremos que la familia $\{(\varphi_i, U_i) : i = 1, 2, 3\}$ es una estructura diferenciable en \mathbb{RP}^2 .

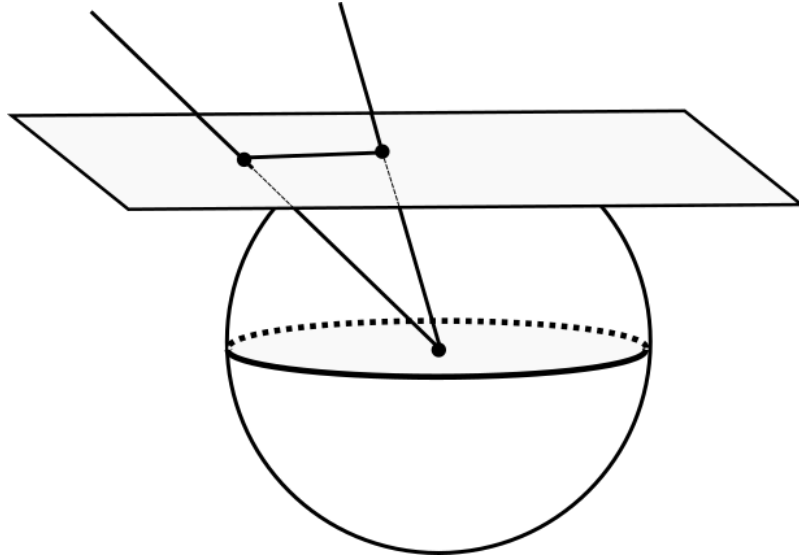


Figura 1.2: Rectas por el origen y plano $z = 1$

En efecto, φ_1^{-1} , φ_2^{-1} , φ_3^{-1} son biyectivas y $\bigcup \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{RP}^2$. Por otro lado, si $j < i$ los puntos en $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ son de la forma:

$$\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_j \neq 0 \ j = 1, 2\}$$

De esta forma $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 , y suponiendo que $i = 2$, $j = 1$ (el caso $i = 3$, $j = 2$ y el caso $i < j$ son análogos),

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(y_1, y_2) &= \varphi_1(y_1 : 1 : y_2) \\ &= \varphi_1\left(\frac{y_1}{y_1} : \frac{1}{y_1} : \frac{y_2}{y_1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}\right) \end{aligned}$$

es diferenciable.

De esta forma el plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 puede ser cubierto por las tres vecindades coordenadas, donde al sistema de coordenadas de cada U_i se le conoce como coordenadas homogéneas.

Otra manera de construir a \mathbb{RP}^2 es por medio de la esfera \mathbb{S}^2 bajo la siguiente relación de equivalencia. Cada punto $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ está relacionado con su punto antípoda $(-x, -y, -z) \in \mathbb{S}^2$. De esta forma podemos pensar a \mathbb{RP}^2 como \mathbb{S}^2/\sim , el cual se conoce como *modelo esférico* del plano proyectivo.

1.2. Líneas proyectivas

Consideremos cualquier plano P por el origen de \mathbb{R}^3 , con la ecuación $ax+by+cz = 0$, donde a, b, c son escalares no todos cero. Cada recta agujerada y contenida en P que pasa por el origen representa un punto en \mathbb{RP}^2 . El conjunto de puntos en \mathbb{RP}^2 representados por las rectas agujeradas del plano P que pasan por el origen, se le conoce como *línea proyectiva*.

Ejemplo 1.1. Tres puntos en \mathbb{RP}^2 son *colineales* cuando todos están sobre una misma línea proyectiva. La condición para la colinealidad de tres puntos $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$, $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$, $P_3 = (x_3 : y_3 : z_3)$ en \mathbb{RP}^2 es la misma condición para que tres vectores distintos de cero y el origen en \mathbb{R}^3 estén en un mismo plano. A los puntos P_1, P_2, P_3 les corresponden las rectas l_1, l_2, l_3 respectivamente. Si las tres rectas están en un mismo plano, entonces el determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejemplo 1.2. Por cualesquiera dos puntos en \mathbb{RP}^2 pasa una única línea proyectiva. Esta afirmación es equivalente a decir que por cualesquiera dos rectas agujeradas que pasan por el origen de \mathbb{R}^3 hay un único plano que las contiene. Para encontrar la ecuación de la línea proyectiva que pasa por dos puntos distintos $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$, $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$ procedemos a buscar un punto $P = (x, y, z)$ tal que P_1, P_2, P sean coplanares; que por el ejemplo 1.1 la condición es:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Como ejemplo, consideramos $P_1 = (0 : 0 : 1)$, $P_2 = (1 : 0 : 1)$. La línea que une a P_1 y P_2 tiene la ecuación $y = 0$.

Ejemplo 1.3. Tomemos un plano euclidiano y C un círculo contenido en el plano, P un punto en C y L una recta que no pase por P . Pensemos en L como una copia de \mathbb{R} . Definimos la *proyección estereográfica* del círculo a la recta como la función $C - \{P\} \rightarrow L$ la cual envía a un punto $Q \neq P$ en C en punto Q_P en L , donde Q_P es la intersección de L con la recta que pasa por P , Q , e interseca a L . Podemos extenderlo a todo C mandando a P al *punto al infinito* (∞). Ahora podemos pensar a la *línea proyectiva real* (\mathbb{RP}^1) como un *círculo* (\mathbb{S}^1).

1.3. Curvas proyectivas

Definición 1.3.1. Un polinomio real F de grado d en $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, es homogéneo cuando todos los monomios de F tienen el mismo grado d .

Lema 1.3.2. Sea $F(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio en $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Entonces F es homogéneo si y sólo si para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$F(tx_1, \dots, tx_n) = t^d F(x_1, \dots, x_n).$$

Demostración. Sólo mostraremos el regreso y usaremos la ida.

Supongamos que se cumple la igualdad. Tomemos $F = F_0 + F_1 + \dots + F_d$ donde cada F_k es un polinomio homogéneo de grado k , para $k = 0, \dots, d$. Entonces, aplicando la ida del lema a cada F_i y F tenemos que

$$F_0 + tF_1 + \dots + t^d(F_d - F) = 0.$$

La ecuación anterior determina un polinomio en la variable t con coeficientes en $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, el cual tiene una cantidad infinita de raíces, una por cada t . Así, $F_0 = F_1 = \dots = F_{d-1} = 0$, $F = F_d$. Por lo tanto F es un polinomio homogéneo de grado d . \square

En esta sección consideraremos los siguientes conjuntos

$$C(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\},$$

donde $F(x, y, z)$ es un polinomio de grado d con coeficientes en \mathbb{R} .

Definición 1.3.3. Al conjunto $C(F)$ se le llama *variedad algebraica de grado d* .

Cuando F es un polinomio homogéneo el conjunto $C(F)$ tiene la propiedad de ser un *cono* (o un punto) en \mathbb{R}^3 , es decir, si (x, y, z) es un elemento en $C(F)$ también lo es (tx, ty, tz) , para cualquier escalar real t .

Definición 1.3.4. Una *variedad algebraica de grado d en \mathbb{RP}^2* es un conjunto de la forma

$$V(F) := \{(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2 : F(x, y, z) = 0\}$$

para algún $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$ homogéneo. A este conjunto se le conoce también como *curva algebraica proyectiva*, pero para propósitos de esta tesis se le llamará simplemente *curva* y se denotará por F .

Ejemplo 1.4. Sea F una curva en \mathbb{RP}^2 . Pensemos por un momento al conjunto $V(F)$ en términos del modelo esférico del plano proyectivo. Como $C(F)$ es un cono, el conjunto de ceros queda completamente determinado por la curva generada al intersecar $C(F)$ con \mathbb{S}^2 . Entonces, podemos pensar a la variedad algebraica $V(F)$ como una curva en la esfera, con la respectiva identificación de puntos antípodas. Por ejemplo, cuando F es una línea proyectiva, el cono es un plano que pasa por el origen, intersecando a la esfera en un círculo máximo.

Ejemplo 1.5. Consideremos la cúbica proyectiva $F = yz^2 - x^3$ en \mathbb{RP}^2 . Tomando las cartas $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$, obtenemos tres vistas de la curva, digamos $f = y - x^3$ en el plano (x, y) , $g = yz^2 - 1$ en el plano (y, z) , y $h = z^2 - x^3$ en el plano (z, x) .

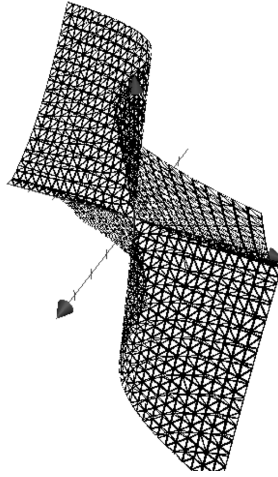


Figura 1.3: Gráfica de $F = 0$ en \mathbb{R}^3

El ejemplo anterior nos lleva a un método para generar curvas proyectivas dada una curva plana $f(x, y) = 0$ cuando f sea un polinomio no necesariamente homogéneo en \mathbb{R}^2 . Consideremos cualquier plano Π contenido en \mathbb{R}^3 que no contenga al origen y que no sea paralelo al eje z . Existe una curva proyectiva $F(x, y, z) = 0$ de grado d en \mathbb{RP}^2 con la propiedad de que $F(x, y, z) = f(x, y)$ para cualquier punto (x, y, z) en Π . En efecto, si Π está definido por la ecuación $l = 1$, donde $l = ax + by + cz$ con $c \neq 0$ y $f(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j$, podemos tomar

$$F(x, y, z) = l^d f\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\right) = \sum a_{ij}x^i y^j l^{d-i-j}.$$

Notemos que la condición $c \neq 0$ nos asegura que F tiene un término de grado d con un coeficiente distinto de cero. A este juego algebraico se lo conoce como

homogeneizar con respecto de l , se homogeneiza f multiplicando cada término por la potencia de l necesaria para que aparezca el grado d . En la práctica, el único caso de esta construcción que nos encontraremos es cuando Π es el plano $z = 1$, así

$$F(x, y, z) = z^d f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \sum a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j}.$$

Este procedimiento no es invertible. Por ejemplo, deshomogeneizando la curva proyectiva $F = z^2(x^2 + z^2)$ respecto a z , obtenemos la curva $f = x^2 + 1$, y homogeneizando de nuevo con respecto de z obtenemos $G = x^2 + z^2$. De esta forma el proceso de homogeneizar funciona cuando las variables del plano son xz (cuando se homogeneiza con respecto de y) o yz (cuando se homogeneiza con respecto de x).

Ejemplo 1.6. Consideremos la cúbica $f(x, y) = y - x^3$. Se puede apreciar que las distintas vistas de esta curva proyectiva pueden no ser afínmente equivalentes. La curva proyectiva asociada es $F(x, y, z) = yz^2 - x^3$. Pero como se vio en el ejemplo 1.5, tenemos tres vistas de la curva que son distintas.

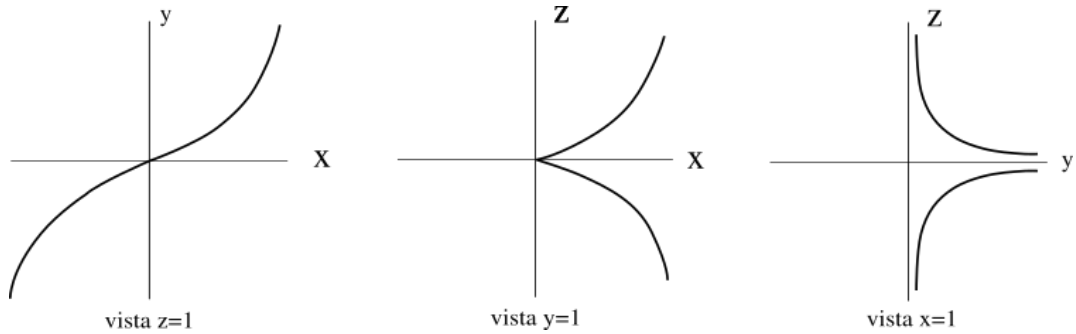


Figura 1.4: Tres vistas afines de la curva proyectiva

De esta forma podemos estudiar la curva localmente sin necesidad de las coordenadas homogéneas, lo cual es una ventaja.

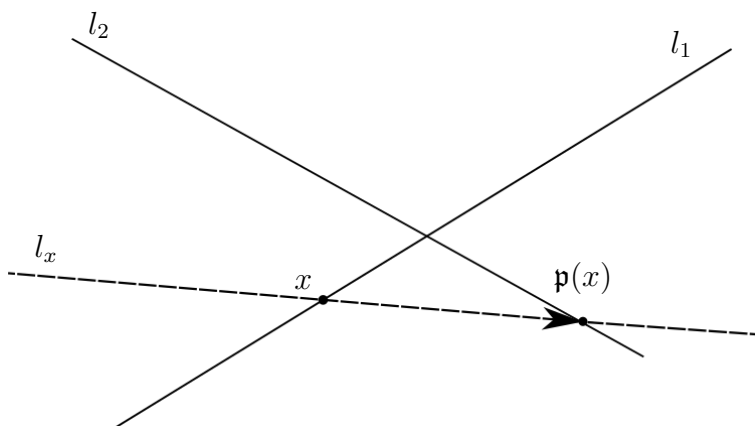
Capítulo 2

Derivada de Schwarz

2.1. Transformaciones de Möbius

Definición 2.1.1. Sean $P \in \mathbb{RP}^2$, l_1 y l_2 rectas contenidas en \mathbb{RP}^2 tales que $P \notin l_1 \cap l_2$. Sean $x \in l_1$ y l_x la recta que pasa por x y P . La proyección de x desde el punto P es el punto $l_x \cap l_2 = \mathbf{p}(x)$. Esto define una aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : l_1 &\longrightarrow l_2, \\ x &\longmapsto \mathbf{p}(x). \end{aligned}$$



Ejemplo 2.1. Sean $P = \bar{0} \in \mathbb{R}^2$ y $l_1 = \{(1, t) : t \in \mathbb{R}\}$, $l_2 = \{(s, 1) : s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Tomando $l = l_2$, se tiene que

$$\mathbf{p}(x, y) = (x/y, 1), \tag{2.1.1}$$

con $y \neq 0$.

Dado $u = (1, t) \in l_1$, la recta l_u es $\{(r, rt) : r \in \mathbb{R}\}$. Así $l_u \cap l_2$ está dado por la r que cumple $rt = 1$ entonces

$$\mathbf{p}(1, t) = (1/t, 1).$$

Observación 2.1. Cualquier proyección de \mathbb{R}^2 desde un punto $p \in \mathbb{R}^2$ sobre una recta $l \subset \mathbb{R}^2$, sólo está definida en \mathbb{R}^2 menos una recta. Sean $l \subset \mathbb{R}^2$ una recta, $x, P \in \mathbb{R}^2$ puntos fuera de l . Definimos a $\mathbf{p}(x) = \langle P, x \rangle \cap l$, la recta generada por P y x intersecada con l (esta definición tiene sentido sólo cuando x no está en la paralela a l por P , pues la intersección sería vacía). Sea l_P la paralela a l por P , entonces

$$\mathbf{p} : \mathbb{R}^2 \setminus l_P \longrightarrow l.$$

Veamos un ejemplo de la construcción anterior.

Lema 2.1.2. Sean φ_i con $i = 1, 2, 3$, las cartas definidas en (1.1.1), l_1, l_2 rectas contenidas en algún $\varphi_i(U_i)$ para algún $i = 1, 2, 3$; parametrizadas con s y t respectivamente y P un punto fuera de ellas. La proyección desde P de l_1 a l_2 tiene la expresión paramétrica:

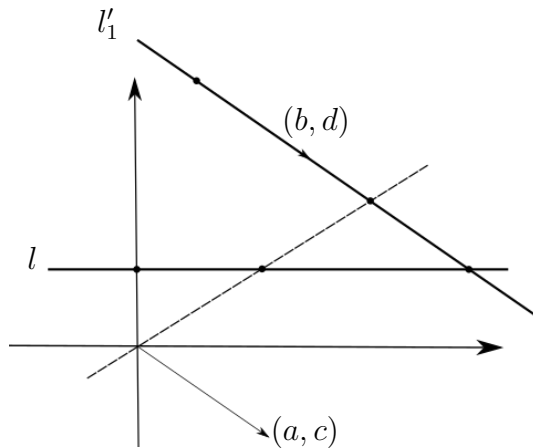
$$\mathbf{p}(s) = \left(\frac{as + b}{cs + d}, 1 \right),$$

para algunas constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ no todas ellas cero.

Demostración. Existe una transformación afín que manda a P en el origen y a la recta l_2 en la recta $l : y = 1$. Por otro lado esta transformación afín manda l_1 en l'_1 , que al parametrizarse con s , tiene la expresión

$$l'_1 = \{(as + b, cs + d) : s \in \mathbb{R}\}$$

para algunas $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ no todas ellas cero, pues $P \notin l_1$ implica que $(b, d) \neq (0, 0)$. Tomemos una función $\mathbf{p} : l'_1 \longrightarrow l$ definida como



$$\mathbf{p}(s) = (\mu(s), \nu(s)) = (\mu(s), 1)$$

$\nu(s) = 1$ para toda s ya que l está parametrizada por $l(s) = (s, 1)$. Por otro lado, la recta que pasa por el origen e interseca a l y l'_1 está dada por la ecuación $y = \frac{cs+d}{as+b}x$. Como $y = 1$ esto implica que

$$x = \frac{as+b}{cs+d}.$$

Por lo tanto, tomando el cambio de variable $\mu(s) = x$, tenemos el resultado deseado. \square

Definición 2.1.3. Una transformación de Möbius en \mathbb{K} es una función racional lineal de la forma:

$$\mu(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (2.1.2)$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

Para el siguiente lema consideraremos la identificación $\mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ como la recta proyectiva real (ejemplo 1.3).

Lema 2.1.4. La transformación de Möbius (2.1.2) sobre \mathbb{R} se extiende a una función

$$\mu : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

que es biyectiva si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

Demostración. Notemos que μ está definida para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$, entonces definiremos a $\mu(-d/c) = \infty$. Nos falta definir $\mu(\infty)$; usando límites tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a(1/y)+b}{c(1/y)+d} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a+by}{c+dy} = \frac{a}{c}.$$

Así, definimos $\mu(\infty) = \frac{a}{c}$, por lo tanto μ está definida para todo $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Veamos que es biyectiva definiendo la inversa como

$$\nu : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

dada por

$$\nu(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$$

donde claramente ν es una transformación de Möbius que cumple

$$(\nu \circ \mu)(x) = \frac{(ad-bc)x}{ad-bc};$$

como $ad - bc \neq 0$, esta última expresión es la identidad para cualquier $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. \square

Tomemos el siguiente conjunto de transformaciones

$$PSL(2, \mathbb{R}) := \left\{ \mu : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mid \begin{aligned} \mu(x) &= \frac{ax + b}{cx + d}; \\ \mu(\infty) &= \frac{a}{c}, \mu\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty, ad - bc \neq 0 \end{aligned} \right\};$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 2.1.5. *$PSL(2, \mathbb{R})$ es un grupo de transformaciones de la recta proyectiva $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demostración. Claramente la identidad es una transformación de Möbius ($a = d = 1$ y $b = c = 0$). Por el lema 2.1.4, las transformaciones de Möbius son invertibles y sus inversas son de Möbius. Entonces, falta probar que la composición de dos transformaciones de Möbius también es de Möbius. Sean

$$\mu_1(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{y} \quad \mu_2(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Componiendo se tiene que

$$(\mu_1 \circ \mu_2)(x) = \frac{(a\alpha + b\gamma)x + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)x + (c\beta + d\delta)}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (c\alpha + d\gamma)(a\beta + b\delta) &= \\ (ad)(\alpha\delta) + (bc)(\gamma\delta) - (\alpha\delta)(bc) - (ad)(\gamma\delta) &= \\ (\alpha\delta)(ad - bc) - (\gamma\delta)(ad - bc) &\neq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mu_1 \circ \mu_2) \in PSL(2, \mathbb{R})$. □

Tomando $\mu \in PSL(2, \mathbb{R})$, $ad - bc \neq 0$ y $c = 0$, se tiene que $d \neq 0$. Así, μ tiene la forma

$$\mu(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d},$$

la cual es una transformación afín. Así, el conjunto de todas las transformaciones afines de \mathbb{R} está contenido en $PSL(2, \mathbb{R})$. También, cada transformación afín es un difeomorfismo de la recta proyectiva en sí misma ya que es diferenciable (C^∞).

2.2. Formas diferenciales cuadráticas

Definición 2.2.1. Sea V un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K} y sean r, s enteros no negativos. Un tensor de tipo (r, s) en un espacio vectorial V es una transformación multilínea $T : (V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathbb{K}$.

Definición 2.2.2. Sean T_1, T_2 dos tensores tipo (r_1, s_1) y (r_2, s_2) respectivamente. Definimos el producto tensorial de T_1 con T_2 , como la transformación $T_1 \otimes T_2$ dada por

$$\begin{aligned} T_1 \otimes T_2(f^1, \dots, f^{r_1+r_2}, v_1, \dots, v_{s_1+s_2}) &= \\ &= T_1(f^1, \dots, f^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1}) T_2(f^{r_1+1}, \dots, f^{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}). \end{aligned}$$

Definición 2.2.3. Una forma de grado 1 (ó una 1-forma) es un tensor tipo $(0, 1)$

$$\omega : V \rightarrow \mathbb{K}.$$

Definición 2.2.4. Una forma de grado 2 (ó una 2-forma) es un tensor de tipo $(0, 2)$ alternante

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}.$$

Podemos ver a las 2-formas como combinación lineal del producto tensorial de 1-formas: esto es: $b = \sum_{i < j}^n a_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$, donde $\beta = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ forma una base para el espacio de las 1-formas (ver [2]).

Definición 2.2.5. Una forma bilineal simétrica b en un espacio vectorial V sobre un campo \mathbb{K} es una transformación

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

que es lineal en cada factor y cumple que $b(v, w) = b(w, v)$.

Definición 2.2.6. Sea V un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{K} . Una función $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ es llamada forma cuadrática si existe una forma bilineal simétrica b tal que

$$q(v) = b(v, v), \quad \text{para todo } v \in V.$$

Toda forma cuadrática está asociada a una forma bilineal simétrica b . Esto es, si $q(v) = b(v, v)$, entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} q(v+w) &= b(v+w, v+w) = b(v, v) + 2b(v, w) + b(w, w) \\ &= q(v) + 2b(v, w) + q(w). \end{aligned}$$

Si el campo que actúa sobre el espacio vectorial V no es de característica 2, entonces podemos recuperar los valores de la forma bilineal conociendo los valores de q en v , w y en $v + w$:

$$b(v, w) = \frac{q(v + w) - q(v) - q(w)}{2}.$$

Sean M una variedad diferenciable y p un punto en M . El *espacio cotangente* de M en p , denotado por $T_p^*(M)$ o T_p^*M , es el espacio dual del espacio tangente T_pM . Un elemento de T_p^*M es llamado un *covector* en T_pM . Así, un covector ω_p en p es una transformación lineal

$$\omega_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definición 2.2.7. Sean M una variedad diferenciable y $p \in M$. Una 1-forma diferenciable, campo de covectores o simplemente una 1-forma ω en M , es una función la cual le asigna a cada punto p de M un covector ω_p en T_p^*M .

En este sentido una 1-forma diferenciable es el dual a un campo de vectores tangentes a M , el cual a todo punto de M le asigna un vector tangente en p (véase [26]). También podemos decir que una 1-forma diferenciable en M evaluada en p es una transformación lineal en T_pM a \mathbb{R} la cual es diferenciable respecto a p .

Definición 2.2.8. Dada una 1-forma diferencial ω , definimos una forma cuadrática diferencial como:

$$(\omega)^2 = \omega \otimes \omega.$$

Ya estamos listos para introducir al actor principal de esta tesis.

2.3. Derivada de Schwarz

La derivada de Schwarz es históricamente el primero y más fundamental invariante diferencial proyectivo. Recibe el nombre del matemático Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). Se dice que fue planteada por Lagrange en su tratado “Sur la construction des cartes géographiques” (1779), aunque si uno revisa la referencia no se encuentra una expresión parecida a la que presentaremos en esta tesis. Felix Klein en su libro “Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grade” (1884) al pie de la página 74 agradece a Schwarz por haberle mandado la referencia sobre la derivada de Schwarz en el tratado de Lagrange. Ernst Kummer (1810-1893) la utilizó en “Über die hypergeometrische Reihe” (1836) y parece ser la primera referencia impresa de la derivada de Schwarz [24].

Nos enfocaremos en el campo de los números complejos (\mathbb{C}) para la construcción y motivación de la derivada de Schwarz para después aterrizarlo en el plano proyectivo real.

Tomemos μ una transformación de Möbius y una función analítica f sobre \mathbb{C} que contenga al 0. Queremos saber qué tan cerca o qué tan lejos está f de ser un difeomorfismo de la recta proyectiva sobre sí misma.

Una herramienta que podemos utilizar es la *razón cruzada* de cuatro puntos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, ya que es invariante bajo transformaciones de Möbius (véase [14]).

De la expresión

$$[f(ta), f(tb), f(tc), f(td)] - [ta, tb, tc, td], \quad (2.3.1)$$

podemos deducir: si f fuera una transformación de Möbius ($f = \mu$), la expresión anterior es igual a cero, ya que $[f(ta), f(tb), f(tc), f(td)] = [ta, tb, tc, td] = [a, b, c, d]$. Entonces, si desarrollamos a f en su serie de potencias en el cero, es decir,

$$f(z) = z_0 + z_1z + z_2z^2 + z_3z^3 + O(z^4)$$

y tomamos el límite cuando t tiende a cero de (2.3.1) tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} ([f(ta), f(tb), f(tc), f(td)] - [a, b, c, d]) = \lim_{t \rightarrow 0} (t^2A_0 + t^3A_1 + t^4A_2 + \dots).$$

Como nos interesa qué tan distinta es f a un difeomorfismo de la recta proyectiva procedemos “despejar” A_0 , el primer término que nos permite observar dicha diferencia. Dividiendo el argumento del límite entre t^2 y normalizando con $[a, b, c, d]$ tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{[f(ta), f(tb), f(tc), f(td)] - [a, b, c, d]}{t^2[a, b, c, d]} \right) = (a - b)(c - d) \frac{z_1z_3 - z_2^2}{z_1^2} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{O(t^3)}{O(t^2)}.$$

Ahora, aplicamos el límite, tomamos la expansión en serie de Taylor de f en el cero para sustituir a los coeficientes z_1, z_2 y z_3 por $f'(0), f''(0)/2$ y $f'''(0)/6$ respectivamente y multiplicando por $1 = 6/6$, tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{[f(ta), f(tb), f(tc), f(td)] - [a, b, c, d]}{t^2[a, b, c, d]} \right) = \frac{(a - b)(c - d)}{6} \left(\frac{f'''(0)}{f'(0)} + \frac{3}{2} \left(\frac{f''(0)}{f'(0)} \right)^2 \right).$$

Es claro que la expresión del lado derecho de la igualdad anterior depende de f en 0; entonces, para poder definirla en todos los puntos de un dominio $D \subset \mathbb{C}$ mostraremos otro método, que a diferencia del anterior es más analítico y menos geométrico. Para ello utilizaremos la función

$$F : D \times D \longrightarrow \mathbb{C},$$

donde

$$F(x, y) = \ln \left[\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right],$$

f es una función holomorfa no-degenerada ($f' \neq 0$ para todo $z \in D$) y \ln es el logaritmo complejo (véase [21]). Expandimos $f(x)$ y $f(y)$ en z , tomando $x_1 = x - z$ y $y_1 = y - z$ tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(z) + f'(z)(x - z) + \frac{1}{2}f''(z)(x - z)^2 + \frac{1}{6}f'''(z)(x - z)^3 + \dots \\ f(y) &= f(z) + f'(z)(y - z) + \frac{1}{2}f''(z)(y - z)^2 + \frac{1}{6}f'''(z)(y - z)^3 + \dots \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z) + \frac{1}{2}f''(z)(x_1 + y_1) + \frac{1}{6}f'''(z)(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) + \dots$$

como $f' \neq 0$ podemos dividir entre $f'(z)$ y tomando logaritmo en ambos lados se sigue

$$\ln \left[\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right] = \ln[f'(z)] + \ln \left[1 + \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)}(x_1 + y_1) + \frac{1}{6} \frac{f'''(z)}{f'(z)}(x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2) + \dots \right]$$

La función $F(x, y) = \ln \left[\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right]$ se puede expandir en serie utilizando

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \text{ en } x_1 \text{ y } y_1 \text{ como sigue:}$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \ln[f'(z)] + \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)}(x_1 + y_1) + \left[\frac{1}{6} \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{8} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \right] (x_1^2 + y_1^2) \\ &\quad - \left[\frac{1}{6} \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{4} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \right] x_1y_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

$F(x, y)$ es regular en $D \times D$ si y sólo si f es inyectiva. Aplicamos la fórmula (2.1.2) a f para obtener una nueva función $\bar{f} = (af(z) + b)/(cf(z) + d)$, así definimos otra función

$$\bar{F}(x, y) = F(x, y) + \ln \frac{ad - bc}{(cf(x) + d)(cf(y) + d)}.$$

Tomemos las derivadas mixtas de F y \bar{F} con respecto x y y :

$$U_f(x, y) = \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{f'(x)f'(y)}{[f(x) - f(y)]^2} - \frac{1}{(x - y)^2}.$$

Podemos observar que al aplicar transformaciones de Möbius a f , la derivada

$$U_f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$$

no cambia, es decir, tenemos otra invarianza respecto a transformaciones proyectivas. Por otro lado, derivando la serie (2.3.2) con respecto de x y y obtenemos

$$U_f(x, y) = \frac{f'(x)f'(y)}{[f(x) - f(y)]^2} - \frac{1}{(x - y)^2} = \frac{1}{6} \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{4} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 + \varphi(x_1, y_1)$$

donde $\varphi(x_1, y_1)$ es una suma de derivadas en x_1 y y_1 .

Ahora, veamos cómo se comporta $U_f(x, y)$ bajo composiciones. Consideremos la siguiente expresión simétrica tomando $p = f(x)$ y $q = f(y)$

$$S_{x,y}^{p,q} = \frac{f'(x)f'(y)}{[f(x) - f(y)]^2} - \frac{1}{(x - y)^2} = U_f(x, y) \quad (2.3.3)$$

Tomando a z como función de una variable t , $z = g(t)$, hacemos $x = g(v)$, $y = g(w)$. Escribimos las siguientes expresiones análogas a (2.3.3) para g y $f(g)$:

$$S_{v,w}^{x,y} = \frac{g'(v)g'(w)}{[g(v) - g(w)]^2} - \frac{1}{(v - w)^2} = U_g(v, w), \quad (2.3.4)$$

$$S_{v,w}^{p,q} = \frac{[f(g(v))]'[f(g(w))]' }{[f(g(v)) - f(g(w))]^2} - \frac{1}{(v - w)^2} = U_{f(g)}(v, w).$$

Por otro lado tomando dx , dy , dv y dw 1-formas diferenciales con respecto a x , y , v y w respectivamente y multiplicando ambos lados de la expresión (2.3.3) por $dx \otimes dy$, tenemos:

$$\begin{aligned} S_{x,y}^{p,q} dx \otimes dy &= \frac{f'(x)f'(y)(dx \otimes dy)}{[f(x) - f(y)]^2} - \frac{dx \otimes dy}{(x - y)^2} \\ &= \left(\frac{[f(g(v))]'[f(g(w))]' }{[f(g(v)) - f(g(w))]^2} - \frac{g'(v)g'(w)}{[g(v) - g(w)]^2} \right) dv \otimes dw \\ &= \left(S_{v,w}^{p,q} + \frac{1}{(v - w)^2} - \left(S_{v,w}^{x,y} + \frac{1}{(v - w)^2} \right) \right) dv \otimes dw \\ &= S_{v,w}^{p,q} dv \otimes dw - S_{v,w}^{x,y} dv \otimes dw. \end{aligned}$$

Entonces tenemos la siguiente fórmula que expresa la aditividad de (2.3.4) bajo la composición de transformaciones ($dx \otimes dy = dx dy$)

$$S_{v,w}^{p,q} dv dw = S_{x,y}^{p,q} dx dy + S_{v,w}^{x,y} dv dw. \quad (2.3.5)$$

Finalmente tomando $x = y = z$, obtenemos la expresión

$$S_{x,x}^{p,p} = \frac{1}{6} S_z^f = \frac{1}{6} \left[\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \right].$$

Definición 2.3.1. *La expresión*

$$S_z^f = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \quad (2.3.6)$$

es llamada la derivada de Schwarz de f con respecto a la variable z .

Proposición 2.3.2. *La derivada de Schwarz es invariante bajo transformaciones de Möbius sobre la función f , es decir,*

$$S_z^{\frac{af+b}{cf+d}} = S_z^f.$$

Demostración. La proposición es inmediata de la invarianza de $U_f(x, y)$. \square

Proposición 2.3.3. *La derivada de Schwarz de una transformación de Möbius $\mu = \frac{az+b}{cz+d}$ es cero, es decir,*

$$S_z^\mu = 0.$$

Demostración. Derivamos μ con respecto de z

$$\mu'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}, \quad \mu''(z) = \frac{-2c}{(cz+d)^3}, \quad \mu'''(z) = \frac{6c^2}{(cz+d)^4}$$

Sustituyendo en (2.3.6) se tiene el resultado. \square

Proposición 2.3.4. *Bajo composiciones con $z = g(t)$, tenemos*

$$S_t^{f(g)} (dt)^2 = S_z^f (dz)^2 + S_t^g (dt)^2 \quad (2.3.7)$$

donde $(dt)^2$ y $(dz)^2$ son formas cuadráticas diferenciales.

Demostración. La demostración es inmediata de la ecuación (2.3.5). \square

Corolario 2.3.5. *Bajo transformaciones de Möbius en la variable z , la derivada de Schwarz se transforma de la siguiente manera:*

$$S_{\frac{at+b}{ct+d}}^f \frac{(ad-bc)^2}{(ct+d)^4} = S_t^f. \quad (2.3.8)$$

Demostración. En la ecuación (2.3.7) el último término es cero, y tomando $g'(t) = \frac{(ad-bc)^2}{(ct+d)^4}$ se tiene el resultado. \square

Corolario 2.3.6. *La derivada de Schwarz de una función f que cumple las hipótesis del teorema de la función implícita es antisimétrica, es decir,*

$$S_z^f(df)^2 = -S_z^f(dz)^2.$$

Demostración. Basta notar que $S_z^f(df)^2 = 0$ y sustituyendo en la ecuación (2.3.7) se tiene el resultado. \square

Proposición 2.3.7. $S_z^f \equiv 0$ si y sólo si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Demostración. Una parte de esta proposición está demostrada en la proposición 2.3.3. Solo falta probar que si $S_z^f \equiv 0$, entonces $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Como $S_z^f \equiv 0$, entonces la función $g = \ln(f')' = \frac{f''}{f'}$, satisface la ecuación diferencial $g' = \frac{g^2}{2}$, tenemos

$$\frac{2dg}{g^2} = dz \quad \text{ó} \quad \frac{-2}{g} = z + \frac{d}{c},$$

entonces

$$\ln(f')'(z) = g(z) = \frac{-2}{z + d/c} \quad \text{de la que se deduce} \quad \ln(f'(z)) = \int \frac{-2dz}{z + d/c},$$

donde

$$\int \frac{-2dz}{z + d/c} = -2 \ln(z + d/c) - 2 \ln(\sqrt{a}/c) = \ln \left(\frac{a}{(cz + d)^2} \right), \quad \text{con } a > 0.$$

Por lo tanto,

$$f'(z) = \frac{a}{(cz + d)^2} = \partial_z \left(\frac{az + b}{cz + d} \right). \quad \square$$

La siguiente proposición fue probada por Schwarz.

Proposición 2.3.8. Sean $f, q : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones sobre un dominio D y f una solución de la ecuación diferencial de tercer orden

$$S_z^f = q(z). \quad (2.3.9)$$

Entonces $f = y_1/y_2$, donde los y_i son un par de soluciones independientes de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + \frac{q}{2}y = 0. \quad (2.3.10)$$

Por otro lado, si y_1, y_2 es un par de soluciones linealmente independientes de (2.3.10), entonces el cociente $f = y_1/y_2$ satisface (2.3.9).

Demostración. Empecemos por la segunda afirmación. Sean y_1 y y_2 un par de soluciones independientes de (2.3.10). Entonces el wronskiano $w(z) = y_1'y_2 - y_2'y_1$ es constante ya que

$$w'(z) = y_1''y_2 + y_1'y_2' - y_2''y_1 - y_2'y_1' = 0.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w(z) = 1$. Tomemos la derivada de Schwarz de y_1/y_2 :

$$S_z^{y_1/y_2} = -2 \frac{y_2''y_2 - (y_2')^2}{y_2^2} - \frac{1}{2} \left(2 \frac{y_2'}{y_2} \right)^2 = -2 \frac{y_2''}{y_2} = q(z). \quad (2.3.11)$$

Inversamente, supongamos que f es una solución de (2.3.9). Tomemos

$$y = \frac{1}{\sqrt{f'}}.$$

Como todas las funciones que hemos tomado son analíticas, seguimos con la hipótesis de que $f' \neq 0$ y por la raíz cuadrada debemos elegir una parte del dominio de la función donde todo esté bien definido.

Veamos que y y yf satisfacen (2.3.10). Por conveniencia tomemos $f' = \varphi$. Entonces sustituyendo φ en (2.3.9) tenemos: $(\varphi'/\varphi)' - (\varphi'/\varphi)^2/2 = q$ y $y = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$. Así $y' = -(\varphi'/\varphi)y/2$ y

$$y'' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right) y - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right) y' = -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 \right) y$$

así, $y''/y = -q/2$.

Exactamente de la misma forma podemos probar que $fy = f/\sqrt{f'}$ es también una solución de (2.3.10), como se quería. \square

Corolario 2.3.9. Sean f y \bar{f} dos funciones holomorfas, supongamos que $S_z^f = S_z^{\bar{f}}$. Entonces $\bar{f} = \frac{af+b}{cf+d}$.

Demostración. Tomemos $f = \frac{y_1}{y_2}$ y $\bar{f} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}$, donde los y_i y \bar{y}_i son pares de soluciones de la ecuación lineal 2.3.9. Tomando, $\bar{y}_1 = ay_1 + by_2$ y $\bar{y}_2 = cy_1 + dy_2$ se tiene el resultado. \square

Las proposiciones 2.3.7 y 2.3.8 nos permiten afirmar que $S_z^f = 0$ para todo $f \in PSL(2, \mathbb{R})$, es decir,

$$S_z(PSL(2, \mathbb{R})) = \{0\}.$$

Ahora, cambiemos la variable independiente por un mapeo conforme $z = g(t)$, con t como la nueva variable independiente en un dominio D . Claramente, $f = f(g(t))$ está definida en D por la composición, así tenemos por la proposición 2.3.4 y 2.3.8 que:

$$S_t^f(dt)^2 = q(z)(dz)^2 + S_z^f(z)(dz)^2 \quad (2.3.12)$$

Para encontrar a f como función de t consideramos la ecuación diferencial lineal de segundo orden correspondiente

$$v''(t) + \frac{1}{2}S_t^f v(t) = 0. \quad (2.3.13)$$

y expresamos a f como el cociente de dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación, llamémoslas v_1 y v_2 .

Así, nos preguntamos si existe alguna relación entre soluciones de (2.3.9) y (2.3.13), en efecto

$$v_i(t) = y_i(g(t))[g'(t)]^{-1/2}, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.14)$$

Calculando v_i' y v_i'' y sustituyendo en (2.3.12) se verifica la relación.

De la ecuación anterior volvemos a obtener un sistema de dos soluciones independientes de (2.3.13) en el cual el wronskiano también tiene el valor de 1.

Por otro lado, supongamos que la función q se transforma en una *diferencial cuadrática* bajo el cambio de variable $z = g(t)$, esto es: $dz = g'(t)dt$, multiplicando por las formas cuadráticas correspondientes tenemos $q(z)(dz)^2 = q(g(t))(g'(t))^2(dt)^2$, así, definimos $\bar{q}(t) := q(g(t))(g'(t))^2$ y entonces $\bar{q}(t)(dt)^2 = q(z)(dz)^2$ (véase [23]). Por lo tanto tenemos la siguiente ecuación:

$$\bar{q}(t)(dt)^2 = q(z)(dz)^2 + S_t^z(dt)^2. \quad (2.3.15)$$

Entonces las soluciones a (2.3.10) con el cambio de variable $z = g(t)$ y utilizando la igualdad (2.3.14) se transforman en $\bar{y}_i(t)\sqrt{dt} = y_i(z)\sqrt{dz}$ con $\bar{y}_i(t) = y_i(g(t))$.

Observemos que las fórmulas (2.3.7) y (2.3.15) muestran que bajo cambios de variables por mapeos conformes la *parte principal* (véase [14]) de la derivada de Schwarz de una función analítica no cambia, es decir: cerca de un cero de orden n , una función analítica se comporta como z^n cerca del 0. Cerca de un polo de orden n , se comporta como $1/z^n$. Sabemos que una función analítica f con un cero de orden n en z_0 se puede factorizar como $f(z) = (z - z_0)^n f_1(z)$ donde $f_1(z)$ es analítica y distinta de cero en una vecindad de z_0 (ver [14]).

Tomemos entonces dos polinomios $p(z)$ y $q(z)$, supongamos que p tiene un cero de orden n en z_0 y q tiene un cero de orden m en z_0 , entonces $p(z) = (z - z_0)^n p_1(z)$ y $q(z) = (z - z_0)^m q_1(z)$, con $p(z_0)$ y $q(z_0)$ distintos de cero, así

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{(z - z_0)^n p_1(z)}{(z - z_0)^m q_1(z)} = (z - z_0)^{n-m} \frac{p_1(z)}{q_1(z)},$$

Tomando $G(z) = (z - z_0) \left(\frac{p_1(z)}{q_1(z)} \right)^{\frac{1}{n-m}}$ que es un cambio de variable bien definido, ya que $G'(z_0) \neq 0$.

Entonces, para describir la parte principal de la derivada de Schwarz de funciones racionales basta tomar solamente los siguientes casos especiales:

$$\begin{cases} f = a + z^n & : S_z^f = -\frac{(n^2-1)}{2} z^{-2} \\ f = z^{-n} & : S_z^f = -\frac{(n^2-1)}{2} z^{-2}. \end{cases} \quad (2.3.16)$$

Por definición, una función meromorfa en una región A es analítica salvo en un conjunto de puntos aislados llamados polos de orden finito. Así la derivada de Schwarz de una función meromorfa sólo puede tener un polo de al menos orden 2.

Para cerrar el capítulo falta mencionar simplemente que la *derivada de Schwarz* de una función regular es regular [27].

Capítulo 3

Geometría de la derivada de Schwarz

Nótese que en la sección 2.3 la idea principal fue describir ciertas propiedades de la derivada de Schwarz vista como “funcional”. Ahora, como se desea en geometría, es dar una caracterización de objetos geométricos bajo ciertas condiciones en la derivada de Schwarz.

Análogo al lema 2.1.4, se tiene que toda transformación de Möbius sobre \mathbb{C} se extiende a una transformación sobre el plano complejo extendido ($\hat{\mathbb{C}}$) que es por definición $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Entonces toda transformación de Möbius en

$$PSL(2, \mathbb{C}) := \left\{ \mu : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid \mu(z) = \frac{az + b}{cz + d}; ad - bc \neq 0 \right\}$$

se puede expresar como una matriz $A \in GL(2, \mathbb{C})$.

Proposición 3.0.1. Sea $F : (GL(2, \mathbb{C}), \cdot) \longrightarrow (PSL(2, \mathbb{C}), \circ)$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \right),$$

entonces F es un epimorfismo con núcleo

$$Ker(F) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Demostración. La función F es un homomorfismo de grupos ya que

$$F \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) = F \left(\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \right) = \mu_1 \circ \mu_2,$$

donde

$$\mu_1 = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{y} \quad \mu_2 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

(teorema 2.1.1). Por otro lado, es claro que F es suprayectiva. Por lo tanto, F es un epimorfismo.

Podemos concluir que toda transformación de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$ tiene su representación matricial.

Para encontrar el núcleo tomemos:

$$\frac{az + b}{cz + d} \equiv z \iff cz^2 + (d - a)z + b \equiv 0 \iff c = b = 0, d = a. \quad \square$$

3.1. Automorfismos del disco unitario \mathbb{D}

Definición 3.1.1. Una transformación

$$f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

es conforme (preserva ángulos) si: dadas dos curvas suaves (C^1) γ_1 y γ_2 contenidas en $\hat{\mathbb{C}}$ que se intersecan en un punto p formando un ángulo θ , entonces $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$ se intersecan en $f(p)$ con el mismo ángulo θ formado por $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$.

Definición 3.1.2. El conjunto de automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$ ($Aut(\hat{\mathbb{C}})$) es el conjunto de todas las transformaciones conformes y biyectivas de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$.

Proposición 3.1.3. $PSL(2, \mathbb{C})$ está contenido en $Aut(\hat{\mathbb{C}})$.

Demostración. Toda función analítica $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ con derivada distinta de cero es conforme (véase [14]). Dado que las transformaciones de Möbius son analíticas, entonces son conformes. \square

Proposición 3.1.4. El conjunto $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ es un grupo bajo la composición.

Un hecho más profundo es que toda biyección conforme de $\hat{\mathbb{C}}$ se puede representar como una transformación de Möbius.

Teorema 3.1.5. La transformación $F : GL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow Aut(\hat{\mathbb{C}})$ definida en la proposición 3.0.1 es suprayectiva.

Demostración. Esta demostración requiere el teorema de Liouville y otros resultados de análisis complejo; véase [15], p. 5. \square

Usualmente para evitar ambigüedades en la representación matricial, normalizaremos las transformaciones de Möbius, así, pediremos que sus coeficientes estén en

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \det(A) = 1\}.$$

Esto se puede lograr dividiendo los coeficientes entre $\sqrt{\det(A)}$. Esto todavía carga con la ambigüedad de la multiplicación por ± 1 .

Como $PSL(2, \mathbb{C})$ es un subconjunto de todas las transformaciones de Möbius, cada elemento tiene su representante matricial tal que su determinante es distinto de cero. Entonces podemos redefinir a $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \pm I$.

Corolario 3.1.6. 1. Toda $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ se puede representar como una matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

2. $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$.

Demostración. 1. Por el teorema 3.1.5, toda $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ se puede representar como $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$. Tanto la matriz A como $A/\sqrt{\det(A)}$ tienen la misma imagen bajo F en $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ y $\det(A/\sqrt{\det(A)}) = 1$.

2. Tomando la transformación $F : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ y notando que la intersección de los conjuntos $SL(2, \mathbb{C})$ y $\text{Ker}(F)$ es igual a $\pm Id$. Entonces, tenemos que $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C}) / \pm Id \cong \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. \square

Trabajaremos en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ con la métrica $ds = \frac{2|dz|}{(1-|z|^2)}$ (donde $|dz| := \sqrt{dx^2 + dy^2}$).

Definición 3.1.7. El conjunto de automorfismos del disco \mathbb{D} es

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \{T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) : T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\}.$$

Nótese que cualquier $T \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ es inmediatamente una biyección de \mathbb{D} en sí mismo.

Proposición 3.1.8. El conjunto $\text{Aut}(\mathbb{D})$ es un subgrupo de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ de transformaciones de Möbius de la forma

$$f(z) = \frac{e^{i\theta}(z - a)}{1 - \bar{a}z} \quad \text{con } e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1, a \in \mathbb{D}, \quad (3.1.1)$$

o de forma equivalente

$$f(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \quad \text{con } |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (3.1.2)$$

Demostración. Para la parte de subgrupo véase [14] (p. 328). Probaremos que, en efecto, las ecuaciones (3.1.1) y (3.1.2) son equivalentes. Tomemos la ecuación (3.1.2) y multipliquemos por $-\frac{\bar{a}}{a}$

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{a}az + b}{\bar{a}bz + \bar{a}} &= \frac{-\frac{a}{\bar{a}}z - \frac{b}{\bar{a}}}{-\frac{\bar{b}}{a}z - 1} \quad (\text{tomando } e^{i\theta} = -\frac{a}{\bar{a}}) \\ &= \frac{e^{i\theta} \left(z - e^{-i\theta} \frac{b}{\bar{a}} \right)}{-\frac{\bar{b}}{a}z - 1} \\ &= \frac{e^{i\theta}(z - c)}{1 - \bar{c}z} \quad \text{con } e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1, e^{-i\theta} \frac{b}{\bar{a}} = c \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

□

Definición 3.1.9. *El conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) : d = \bar{a}, c = \bar{b}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

es llamado $SU(1, 1)$.

Siguiendo el razonamiento del corolario 3.1.6 y la proposición anterior nos permite afirmar que:

$$PSU(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) : d = \bar{a}, c = \bar{b}, |a|^2 - |b|^2 \neq 0 \right\} \cong Aut(\mathbb{D}).$$

Proposición 3.1.10. *Los elementos del grupo $Aut(\mathbb{D})$ actúan como isometrías en \mathbb{D} , con respecto a la métrica $ds = \frac{2|dz|}{(1-|z|^2)}$.*

Demostración. Por la proposición 3.1.8, si $T \in Aut(\mathbb{D})$ entonces $T(z) = w = \frac{e^{i\theta}(z-a)}{1-\bar{a}z}$ con $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ y $a \in \mathbb{D}$. Entonces

$$dw = \frac{e^{i\theta}[1 - |a|^2]dz}{(1 - \bar{a}z)^2},$$

por otro lado

$$1 - |w|^2 = 1 - \left| \frac{(z-a)}{(1-\bar{a}z)} \right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2},$$

así

$$\frac{dw}{1-|w|^2} = \frac{dz}{1-|z|^2}.$$

□

Las proposiciones 2.3.2, 2.3.7, 2.3.8, 3.1.8, 3.1.10 y el corolario 3.1.6 nos permiten afirmar que la derivada de Schwarz es invariante bajo automorfismos del disco unitario, difeomorfismos de los complejos extendidos en sí mismos e isometrías del disco unitario sobre f una función regular y

$$S_z(\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})) = S_z(\text{Aut}(\mathbb{D})) = S_z(\text{PSU}(1, 1)) = S_z(\text{Isom}(\mathbb{D})) = \{0\}.$$

3.2. La derivada de Schwarz S_z^f y \mathbb{D}

Proposición 3.2.1. *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en el disco unitario \mathbb{D} . Si*

$$|S_z^f(z)| < \frac{2}{(1 - |z|^2)^2}, \quad (3.2.1)$$

entonces f es inyectiva.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que se cumple la desigualdad pero f no es inyectiva. Sean z_1 y z_2 dos puntos en \mathbb{D} tal que $f(z_1) = f(z_2)$.

Notemos que $|S_z^f(z)||dz|^2$ es invariante bajo transformaciones de Möbius en la variable z (corolario 2.3.5). Y la expresión $\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$ es invariante bajo automorfismos del disco unitario (proposición 3.1.10). Así, la desigualdad $|S_z^f(z)||dz|^2 < \frac{2|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$ es invariante bajo automorfismos del disco entonces podemos suponer que $z_1 = 0$, $z_2 = r > 0$ es real y $f(0) = f(r) = 0$. La desigualdad (3.2.1) se preserva, en particular, en el intervalo del eje real dentro del disco. Entonces, en \mathbb{R} tenemos $|S_z^f(z)| < \frac{2}{(1-|z|^2)^2}$, que implica

$$\text{Re}S_z^f(z)(1 - |z|^2)^2 - 2 < 0. \quad (3.2.2)$$

Haciendo el cambio de variable

$$z = \tanh t, \quad t = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, \quad (3.2.3)$$

usando la ecuación (2.3.7) de la proposición 2.3.4 y observando que $dz/dt = (1-z^2)^2$, tenemos

$$S_t^{f(\tanh)}(dt)^2 = S_z^f(z)(1 - z^2)(dt)^2 + S_t^{\tanh}(dt)^2.$$

Por otro lado, tomando la ecuación del corolario 2.3.6 tenemos:

$$S_t^{\tanh} = -S_z^t \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = -(1 - z^2)^2 S^{\frac{\log y}{2}} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2,$$

donde $y = \frac{1+z}{1-z}$. Resolviendo, obtenemos que $S_t^{\tanh} = -2$ y por lo tanto

$$S_z^f(z)(1 - z^2)^2 - 2 = S_t^{f(\tanh)}.$$

El cambio de variable 3.2.3 lleva a la franja $|\operatorname{Im}(t)| < \pi/4$ dentro del disco unitario y a $t = 0$ lo lleva a $z = 0$ y $\delta = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$ en r .

Así, en el eje real positivo (t) tenemos que $\operatorname{Re} S_t^{f(\tanh)} < 0$ y para cualquier función real positiva ψ se sigue que

$$\int_0^\delta \operatorname{Re} S_t^{f(\tanh)} \psi < 0. \quad (3.2.4)$$

Por la proposición 2.3.8 existen funciones y_1 y y_2 tales que $f = y_1/y_2$ y $y_i'' + (S_z^f(y_i))/2 = 0$. Como $f(0) = f(r) = 0$, tenemos que $y_1(r) = y_1(0) = 0$. En la franja $|\operatorname{Im}(t)| < \pi/4$ también hay dos funciones x_1 y x_2 tal que $f(\tanh(t)) = x_1/x_2$ y

$$x_i'' + \frac{1}{2} S_t^{f(\tanh)} x_i = 0. \quad (3.2.5)$$

Tomando $x_1 = y_1(\tanh t)(d \tanh(t)/dt)^{-1/2}$ ($x_1(0) = x_1(\delta) = 0$), multiplicando (3.2.5) por $\bar{x}_1(t)$ (ver ecuación (2.3.15)) e integrando sobre el eje real de 0 a δ obtenemos:

$$\frac{1}{2} \int_0^\delta S_t^{f(\tanh)} |x_1|^2 dt = - \int_0^\delta x_1'' \bar{x}_1 dt.$$

Integramos por partes del lado derecho de la igualdad:

$$\int_0^\delta x_1'' \bar{x}_1 dt = x_1' \bar{x}_1 \Big|_0^\delta - \int_0^\delta |x_1'|^2 dt.$$

Así,

$$\frac{1}{2} \int_0^\delta S_t^{f(\tanh)} |x_1|^2 dt = \int_0^\delta |x_1'|^2 dt > 0.$$

Pero esta desigualdad contradice la ecuación 3.2.4 para la función positiva $\psi = |x_1|^2$. Queda entonces demostrada la proposición. \square

Definición 3.2.2. Una función simple f en el disco unitario \mathbb{D} es una función del disco en el disco inyectiva y analítica.

Teorema 3.2.3 (Nehari (1949)). Si f es una función simple, en el disco unitario \mathbb{D} , entonces

$$|S_z^f| \leq \frac{6}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{C}$ fijo y F la función tal que

$$F(z) = f \left(\frac{x+z}{1+\bar{x}z} \right).$$

Observemos que $F(0) = f(x)$.

Escribiendo el desarrollo en serie de Taylor de F en $z = 0$ tenemos que:

$$f\left(\frac{x+z}{1+\bar{z}}\right) - f(x) = F(z) - F(0) = F'(0)z + \frac{F''(0)}{2}z^2 + \frac{F'''(0)}{3!}z^3 + O(z^4),$$

factorizando $1/z$:

$$\frac{1}{f\left(\frac{x+z}{1+\bar{z}}\right) - f(x)} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{F'(0) + \frac{F''(0)}{2}z + \frac{F'''(0)}{3!}z^2 + O(z^3)} \right) = \frac{1}{z} G(z),$$

Es fácil ver que

$$G(0) = \frac{1}{F'(0)}, \quad G'(0) = \frac{F''(0)}{2(F'(0))^2}$$

$$G''(0) = \frac{-\frac{F'(0)F'''(0)}{3} + \frac{F'(0)(F''(0))^2}{2}}{(F'(0))^4}.$$

Por otro lado, las derivadas de F hasta orden 3 son:

$$F'(0) = f'(x)(1 - |x|^2), \quad F''(0) = f''(x)(1 - |x|^2)^2 - 2\bar{x}f'(x)(1 - |x|^2)$$

y

$$F'''(0) = f'''(x)(1 - |x|^2)^3 - 4\bar{x}f''(x)(1 - |x|^2)^2 - 2\bar{x}f''(x)(1 - |x|^2)^2 + 6\bar{x}^2f'(x)(1 - |x|^2).$$

Sustituyendo la siguiente expresión en términos de f :

$$\frac{f'(x)(1 - |x|^2)}{f\left(\frac{x+z}{1+\bar{z}}\right) - f(x)} = \frac{f'(x)(1 - |x|^2)}{z} \left(G(0) + G'(0)z + \frac{G''(0)}{2!}z^2 + O(z^3) \right).$$

Obtenemos la siguiente expresión:

$$g(z) = \frac{f'(x)(1 - |x|^2)}{f((x+z)/(1+\bar{x}z)) - f(x)} = \frac{1}{z} - \bar{x} + \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{f'(x)} (1 - |x|^2)$$

$$- \frac{1}{6} (1 - |x|^2)^2 \left[\left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 \right] z + \dots$$

Notemos que el coeficiente que multiplica a la variable z es la derivada de Schwarz de f con respecto a x . Utilizando:

Teorema del área. *Sea f una función analítica e inyectiva en $\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$ la cual tiene su representación en serie de potencias*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

con $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$, entonces los coeficientes a_n satisfacen

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1$$

(véase [20]). Por el teorema del área y el hecho de que $|x| < 1$ tenemos que:

$$\frac{1}{6}(1 - |x|^2)^2 |S_x^f| \leq 1.$$

Por lo tanto, tomando $x = z$ se tiene que $|S_z^f| \leq \frac{6}{(1-|z|^2)^2}$. \square

Nehari encontró una forma distinta de construir la derivada de Schwarz y acortarla en el disco unitario, también probó y enunció la proposición 3.2.1, aunque la demostración expuesta es distinta a la suya (véase [16]).

3.3. Curvatura de Lorentz

En esta sección definimos una geometría en $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ donde la gráfica de una transformación de Möbius sea un círculo. Para esto, tomemos el “plano” $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ y dotémoslo de la siguiente métrica

$$g = dx dy.$$

Ahora mostraremos que g es de Lorentz. La matriz asociada es

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

donde su polinomio característico es $\lambda^2 - 1/4 = 0$, así $\lambda_{1,2} = \pm 1/2$. Notemos que la multiplicidad geométrica y algebraica de ambos valores propios coinciden (véase [8]), así la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es semejante a la matriz (g_{ij}) que tiene como transformación asociada la métrica $\bar{g} = -(dx)^2 + (dy)^2$. Por lo tanto $g = dx dy$ es de Lorentz.

Veamos que $g = dx dy$ está definida localmente: si nos tomamos las cartas $\{(\varphi_1, \tilde{\varphi}_1), (U_1 \times \tilde{U}_1)\}$, donde $\varphi_1 : \mathbb{RP}^1 \rightarrow U_1 \subseteq \mathbb{R}$ con $\varphi_1(x_1 : x_2) = \frac{x_2}{x_1}$ y $x_1 \neq 0$ (análogamente con $\tilde{\varphi}_1$) y dotamos a $U_1 \times \tilde{U}_1$ con la métrica $g = dx dy$, con $(x, y) \in U_1 \times \tilde{U}_1$, en el cambio de coordenadas, con $\{(\varphi_2, \tilde{\varphi}_2), (U_2 \times \tilde{U}_2)\}$, está dado por:

$$F : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \times \tilde{\varphi}_1(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \times \tilde{\varphi}_2(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2),$$

donde $\varphi_2 : \mathbb{RP}^1 \rightarrow U_2 \subseteq \mathbb{R}$ con $\varphi_2(x_1 : x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ y $x_2 \neq 0$, se tiene que $F(x, y) = (1/x, 1/y)$. Entonces si intentamos definir de la misma manera a $\hat{g} = d\hat{x}d\hat{y}$ con $(\hat{x}, \hat{y}) \in U_2 \times \tilde{U}_2$, por el cambio de coordenadas tenemos que: $d\hat{x}d\hat{y} = \frac{1}{x^2 y^2} dx dy$, la cual se indetermina en el punto $(0, 0)$.

En el siguiente ejemplo veremos la descripción algebraica de los círculos con la métrica g .

Ejemplo 3.1. Tomemos la métrica $g = dx dy$ y sean $(x, y), (a, b) \in \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$. Veamos cómo son los puntos que equidistan de (a, b) una distancia r , es decir, $\sqrt{g((x-a, y-b), (x-a, y-b))} = r$. Tomando la matriz asociada a la métrica tenemos

$$r^2 = (x-a \quad y-b) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = (x-a)(y-b)$$

entonces los “círculos” con esta métrica son hipérbolas de la forma

$$(x-a)(y-b) = r^2.$$

Nótese que la hipérbola es la gráfica de la transformación de Möbius

$$y = \frac{bx + r^2 - ab}{x - a}.$$

Así, la geometría plana de Lorentz con la métrica g cumple que los círculos son hipérbolas que admiten una parametrización cuya regla de correspondencia es una transformación de Möbius.

Sea J el operador lineal tal que $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Veamos que con la métrica $g = dx dy$, $J(v)$ es ortogonal a v , es decir, $g(v, J(v)) = 0$. De nuevo tomando la matriz asociada a la métrica tenemos

$$(x \quad y) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Por otro lado, veamos que $g(J(u), J(v)) = -g(u, v)$ con $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (-u_1 \quad u_2) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= -\frac{u_1 v_2}{2} - \frac{u_2 v_1}{2} \\ &= -\left[(u_1 \quad u_2) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Definición 3.3.1. Sean (M, g) una variedad diferenciable con una métrica lorentziana g y $\alpha : I \rightarrow M$ una curva diferenciable. Se dice que α es una curva tipo tiempo si

$$g(\alpha'(t), \alpha'(t)) > 0.$$

Algunos autores definen a las curvas tipo tiempo cambiando la desigualdad a menor que cero.

Sea γ la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ con $f' > 0$. Tomemos a γ de tipo tiempo (véase [17]). Todos los términos geométricos tales como “longitud”, “ortogonalidad”, etc., se tomarán con respecto a la métrica g . Sea t el parámetro por longitud de arco a lo largo de γ .

$$\gamma(t) = (x(t), f(x(t))) = (x(t), y(t)), \quad \gamma'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Notemos que $1 = g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = x'(t)y'(t)$, entonces

$$x'(t) = 1/y'(t), \quad f'(x(t))x'(t) = y'(t) \text{ y } (y'(t))^2 = f',$$

así

$$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{y'(t)}, y'(t) \right) = \frac{1}{(f')^{1/2}} (1, f').$$

También podemos observar que $x''y' + x'y'' = 0$, entonces $x'' = -\frac{y''}{(y')^2}$, $y'' = \frac{f''}{2(f')^2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \gamma''(t) = (x'', y'') &= \left(-\frac{x'y''}{y'}, y'' \right) = \frac{y''}{y'} (-x', y') \\ &= \frac{\frac{f''}{2(f')^2}}{(f')^{1/2}} (-x', y') = \frac{f''}{2(f')^{3/2}} J(\gamma'(t)). \end{aligned}$$

Definición 3.3.2. De la igualdad $\gamma''(t) = \frac{f''}{2(f')^{3/2}} J(\gamma'(t))$ definimos al coeficiente

$$\kappa(t) = \frac{f''}{(f')^{3/2}}$$

como la curvatura de Lorentz de γ .

La curvatura de Lorentz es un análogo a la curvatura de una curva en \mathbb{R}^2 .

La siguiente proposición fue enunciada y demostrada por L. Guieu y V. Ovsienko [7].

Proposición 3.3.3. Sean $g = dx dy$ la métrica en $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$, γ la gráfica de una función diferenciable f y κ su curvatura de Lorentz. Entonces

$$\sqrt{f'(x)}\kappa'(x) = S_x^f. \quad (3.3.1)$$

Demostración. Tomando x el parámetro por longitud de arco y derivando κ con respecto de x tenemos que

$$\kappa'(x) = \frac{f'''}{(f')^{3/2}} - \frac{3(f'')^2(f')^{1/2}}{2(f')^3},$$

por lo tanto

$$(f')^{1/2}\kappa'(x) = S_x^f. \quad \square$$

Es natural preguntarse cuáles son todas las métricas lorentzianas que preserven la ecuación 3.3.1.

Definición 3.3.4. Sean M una variedad riemanniana (semi-riemanniana) y $\gamma : I \rightarrow M$ una curva en M tal que $\|\gamma'(t)\| = 1$. Definimos la curvatura geodésica de γ como la función $\kappa_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\kappa_g(t) = \sqrt{g(D_t\gamma'(t), D_t\gamma'(t))},$$

donde D es la derivada covariante y g la métrica asociada a M (véase [13]).

Proposición 3.3.5. Supongamos que $\gamma : I \rightarrow M$ es una curva regular en una variedad riemanniana (semi-riemanniana), pero no necesariamente parametrizada por longitud de arco, entonces

$$\kappa_g^2 = \frac{g(D_{\gamma'}\gamma', D_{\gamma'}\gamma')}{g(\gamma', \gamma')^2} - \frac{g(D_{\gamma'}\gamma', \gamma')^2}{g(\gamma', \gamma')^3}, \quad (3.3.2)$$

donde $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$ y t el parámetro por longitud de arco.

Demostración. Desarrollemos algunas ecuaciones antes de sustituir en la definición de curvatura geodésica.

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \gamma' \frac{dt}{ds}, & D_{\frac{d\gamma}{ds}} \frac{d\gamma}{ds} &= (D_{\gamma'}\gamma') \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \gamma' \frac{d^2t}{ds^2} \quad y \\ \frac{d^2t}{ds^2} &= -g(\gamma', \gamma')^{-2} g(D_{\gamma'}\gamma', \gamma'). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \kappa_g^2 &= g\left(D_{\frac{d\gamma}{ds}} \frac{d\gamma}{ds}, D_{\frac{d\gamma}{ds}} \frac{d\gamma}{ds}\right) \\
 &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^4 g(D_{\gamma'} \gamma', D_{\gamma'} \gamma') + 2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{d^2 t}{ds^2} g(D_{\gamma'} \gamma', \gamma') + \left(\frac{d^2 t}{ds^2}\right)^2 g(\gamma', \gamma') \\
 &= g(\gamma', \gamma')^{-2} g(D_{\gamma'} \gamma', D_{\gamma'} \gamma') - g(\gamma', \gamma')^{-3} g(D_{\gamma'} \gamma', \gamma')^2 \\
 &= \frac{g(D_{\gamma'} \gamma', D_{\gamma'} \gamma')}{g(\gamma', \gamma')^2} - \frac{g(D_{\gamma'} \gamma', \gamma')^2}{g(\gamma', \gamma')^3}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Proposición 3.3.6. *La curvatura gaussiana de $(\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 - C, g)$ con*

$$g = \frac{dx dy}{(axy + bx + cy + d)^2}, \quad (3.3.3)$$

y C el círculo donde la métrica g se indetermina, es constante $K = 4(ad - bc)$.

Demostración. Escribimos la métrica como: $g = E(dx)^2 + 2F dx dy + G(dy)^2$ (véase [17], [6]). Así $E = 0$, $G = 0$ y $F = 1/(A)^2$, donde $A = (axy + bx + cy + d)$. Veamos el siguiente sistema de ecuaciones con estas condiciones.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \frac{1}{2} E_x, \\
 \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= F_x - \frac{1}{2} E_y, \\
 \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \frac{1}{2} E_y, \\
 \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \frac{1}{2} G_x, \\
 \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= F_y - \frac{1}{2} G_x, \\
 \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \frac{1}{2} G_y.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo tenemos que $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$, $\Gamma_{11}^1 = F_x/F$ y $\Gamma_{22}^2 = F_y/F$. Por otro lado, tenemos la ecuación de Gauss dada por los símbolos de Christoffel:

$$(\Gamma_{12}^1)_x - (\Gamma_{11}^1)_y + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = FK,$$

entonces $K = \frac{F_x F_y - F F_{xy}}{F^3}$. Sustituyendo y derivando tenemos que $F_x = -A_x/A^3$, $F_y = -A_y/A^3$ y $F_{xy} = -(AA_{xy} + 3A_x A_y)/A^4$. Se sigue que $K = 4(ad - bc)$. \square

Consideremos un difeomorfismo $f : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ que preserve orientación. Su gráfica es una curva tipo tiempo en el toro $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ dotado con la métrica 3.3.3. Denotemos por t al parámetro por longitud de arco (tiempo propio), tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema 3.3.7 (C. Duval y V. Ovsienko (2000)). *La igualdad*

$$2d\kappa_g dt = S_x^f(dx)^2 \quad (3.3.4)$$

es cierta para cualquier difeomorfismo f de \mathbb{RP}^1 que preserve orientación si y sólo si la métrica g es de la forma:

$$g = \frac{dx dy}{(axy + bx + cy + d)^2},$$

con $a, b, c,$ y d constantes reales arbitrarias.

Demostración. Tomemos una curva tipo tiempo $\tau \mapsto (x(\tau), y(\tau))$ en $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$. Por otro lado, utilizando la proposición 3.3.4 y los cálculos de la demostración de la proposición 3.3.5 tenemos que:

$$D_{\gamma'}\gamma' = \left(x'' + \frac{F_x}{F}(x')^2, y'' + \frac{F_y}{F}(y')^2 \right),$$

así

$$\begin{aligned} g(D_{\gamma'}\gamma', D_{\gamma'}\gamma') &= \begin{pmatrix} x'' + \frac{F_x}{F}(x')^2 & y'' + \frac{F_y}{F}(y')^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F/2 \\ F/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' + \frac{F_x}{F}(x')^2 \\ y'' + \frac{F_y}{F}(y')^2 \end{pmatrix} \\ &= Fx''y'' + F_y(y')^2x'' + F_x(x')^2y'' + \frac{F_xF_y}{F}(x'y')^2 \end{aligned}$$

$$g(\gamma', \gamma') = Fx'y', \text{ entonces } g(\gamma', \gamma')^2 = F^2(x'y')^2 \text{ y } g(\gamma', \gamma')^3 = F^3(x'y')^3;$$

$$\begin{aligned} g(D_{\gamma'}\gamma', \gamma')^2 &= \left[\begin{pmatrix} x'' + \frac{F_x}{F}(x')^2 & y'' + \frac{F_y}{F}(y')^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & F/2 \\ F/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right]^2 \\ &= \frac{1}{4}[F(x'y'' + y'x'') + F_x(x')^2y' + F_yx'(y')^2]^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (3.3.2) tenemos que:

$$\kappa_g^2 = \frac{(-1)[F(x'y'' - y'x'') - F_x(x')^2(y') - F_y(y')^2(x')]}{4F^3(x'y')^3}.$$

Como γ es una curva tipo tiempo $g(\gamma', \gamma')^3 < 0$, entonces

$$2\kappa_g = \frac{x'y'' - x''y'}{|F|^{1/2}|(x'y')|^{3/2}} - \frac{x'F_x - y'F_y}{|F|^{3/2}|(x'y')|^{1/2}}$$

como función del parámetro τ ; derivando (se puede ya que la curva es de tipo tiempo, es decir, los valores absolutos son distintos de cero) y factorizando $g^{1/2}$ tenemos

$$\begin{aligned} 2\sqrt{g(\gamma', \gamma')}\kappa_g' &= -\frac{x'''}{x'} + \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 + \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 \\ &\quad - x'^2 \left[\frac{\partial_x^2 F}{F} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_x F}{F}\right)^2 \right] + y'^2 \left[\frac{\partial_y^2 F}{F} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_y F}{F}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Esta última igualdad se puede expresar en términos de la derivada de Schwarz como:

$$2\sqrt{g(\gamma', \gamma')} \kappa'_g = S_\tau^y - S_\tau^x - x'^2 S_x^F + y'^2 S_y^F.$$

Veamos que $S_x^F = S_y^F = 0$ si y sólo si la métrica está dada por la ecuación (3.3.3). En efecto, tomemos $F = 1/(axy + bx + cy + d)^2$ y las siguientes transformaciones afines

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= ay + b, & \tilde{\gamma}(x) &= ax + c, \\ \delta(y) &= cy + d, & \tilde{\delta}(x) &= bx + d, \end{aligned}$$

así,

$$\partial_x \varphi(x, y) = \frac{1}{(\gamma(y)x + \delta(y))^2} = g = \frac{1}{(\tilde{\gamma}(x)y + \tilde{\delta}(x))^2} = \partial_y \tilde{\varphi}(x, y)$$

si y sólo si

$$\varphi(x, y) = \frac{\alpha(y) + \beta(y)}{\gamma(y)x + \delta(y)} + k \quad y \quad \tilde{\varphi}(x, y) = \frac{\tilde{\alpha}(x) + \tilde{\beta}(x)}{\tilde{\gamma}(x)y + \tilde{\delta}(x)} + \tilde{k}$$

si y sólo si

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \tilde{\alpha}\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 1$$

(sin pérdida de generalidad podemos suponer que tanto k como \tilde{k} son cero) si y sólo si (proposición 2.3.7)

$$S_x^\varphi = S_y^{\tilde{\varphi}} \equiv 0$$

si y sólo si

$$S_x^{\partial_x \varphi} = S_y^{\partial_y \tilde{\varphi}} \equiv 0,$$

por lo tanto

$$2\sqrt{g(v, v)} \kappa'_g = S_\tau^y - S_\tau^x.$$

Sustituyendo $y = f(x)$, $\tau = x$, reparametrizando con un parámetro t y usando la definición de longitud de arco, $g(v, v) = f'(x)(dx/dt)^2 = 1$ obtenemos

$$2\kappa'_g = S_x^f,$$

usando la regla de la cadena y haciendo el producto tensorial con dt a ambos lados de la igualdad tenemos

$$2d\kappa_g dt = S_x^f(dx)^2,$$

que es lo que se quería probar. □

Nótese que la métrica (3.3.3) está definida en $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 - \mathbb{RP}^1$, donde \mathbb{RP}^1 lo vemos como la imagen de la transformación de Möbius $y = -(bx + d)/(ax + c)$, que es donde la métrica se indetermina.

Capítulo 4

Teorema de Ghys

Junto a muchas generalizaciones y teoremas análogos al *teorema de los cuatro vértices*, el teorema de Ghys sobresale. Éste es uno de los más hermosos y recientes resultados en el área, y lleva en su enunciado la derivada de Schwarz [18].

Teorema 4.0.1 (E. Ghys (1995)). *La derivada de Schwarz de un difeomorfismo $f : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ es igual a cero en al menos 4 puntos distintos.*

El teorema de Ghys fue presentado en una conferencia titulada *Cercles osculateurs et géométrie lorentzienne*, aunque desafortunadamente no está publicada ni hay video de la misma. Pero sí podemos mostrar un equivalente con el siguiente teorema.

Teorema 4.0.2. *El teorema de los cuatro vértices (en $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$) y el teorema de Ghys son equivalentes.*

Demostración. Supongamos cierto el teorema de los cuatro vértices, entonces la curvatura de una curva plana simple, cerrada y convexa tiene al menos cuatro puntos donde alcanza un máximo y un mínimo (vértices). Así la ecuación (3.3.4) se anula en esos cuatro puntos y de la misma forma la derivada de Schwarz.

Por otro lado si la derivada de Schwarz se anula en al menos 4 puntos, de nuevo, la ecuación (3.3.4) nos permite afirmar que la curvatura de una curva simple, cerrada y convexa tiene al menos 4 vértices. \square

4.1. Cónicas semi-osculantes de curvas planas

En esta sección daremos la relación que hay entre la derivada de Schwarz, el teorema de Ghys y las curvas del plano proyectivo \mathbb{RP}^2 . Para esto pensaremos a \mathbb{RP}^1 como $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definición 4.1.1. *Se dice que dos curvas en el plano \mathbb{R}^2 , Γ_1 y Γ_2 , tienen contacto de orden n en un punto p si existen parametrizaciones locales $\gamma_1 : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}^2$,*

$\gamma_2 : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, de Γ_1 y Γ_2 respectivamente, (con $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$) tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ y $\gamma_1^{(k)}(0) = \gamma_2^{(k)}(0)$ con $k = 0, \dots, n$.

Dados un punto p en el plano y un natural $n > 0$, la condición de tener contacto de orden n en p es una relación de equivalencia sobre el conjunto de curvas en el plano.

Sea Γ una curva suave y convexa en \mathbb{R}^2 . El círculo osculador C_p de Γ en un punto p es el único círculo con orden de contacto de al menos 2 en p . La unicidad viene del hecho que un círculo está determinado por su curvatura, un invariante euclidiano diferencial de segundo orden. También, C_p puede ser descrito como el único círculo que contiene a la terna de puntos p_1, p_2, p_3 cercanos a $p \in \Gamma$, para después tomar el límite cuando p_1, p_2, p_3 tienden a p a lo largo de Γ .

Definición 4.1.2. *La cónica osculante de Γ en p es la única cónica con orden de contacto 4 con Γ .*

El siguiente procedimiento para generar cónicas es, aparentemente, muy conocido por los geómetras proyectivos.

1. Dibujamos dos rectas distintas l y m en el plano \mathbb{R}^2 . Asumamos que éstas son, en efecto, líneas compatibles con la distancia euclidiana, en otras palabras, a cada punto de l le asociamos un único número real t tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos en l es la distancia en \mathbb{R} los correspondientes números en la recta real. De forma similar para m .
2. Tomamos $f \in PSL(2, \mathbb{R})$.
3. “Conectamos” cada punto t de l con el punto $f(t)$ en m .
4. La envolvente de la familia de rectas obtenidas de esta forma es una cónica donde l y m son tangentes.

La figura 4.1 nos muestra qué sucede cuando l es el eje x , m el eje y y $f(t) = 1/t$. El resultado es la hipérbola que tiene por ecuación $y = 1/(4x)$. Si cambiamos la función f por $f(t) = (2t - 2)/(t - 2)$, obtenemos un círculo de radio uno y centro en $(1, 1)$, como se muestra en la figura 4.2. Este método de generar cónicas en el plano es conocido como “definición de una cónica de Steiner” (véase [11]) y es presentada como un teorema en [10].

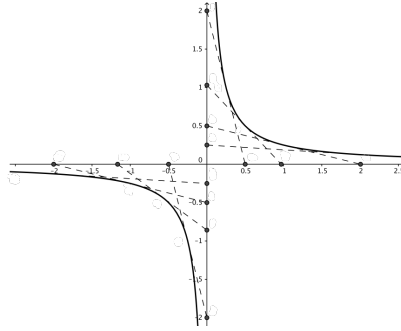


Figura 4.1: Gráfica de $y = \frac{1}{4x}$

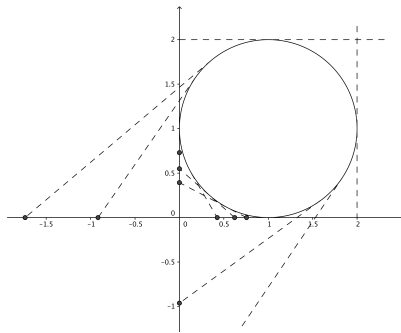


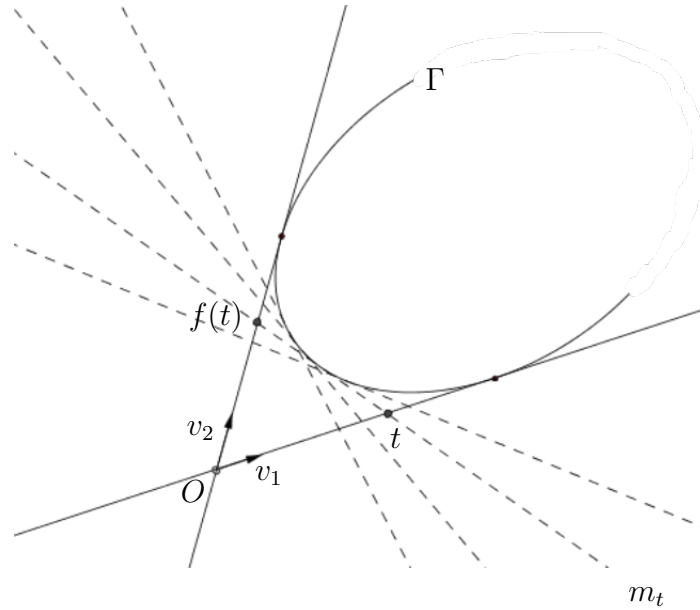
Figura 4.2: Gráfica del círculo con centro en $(1, 1)$ y radio 1

Para esta técnica no es necesario usar transformaciones de Möbius. Sean l_1 y l_2 dos rectas distintas que se intersecan en O (el siguiente procedimiento funciona también para dos líneas paralelas, aunque la ecuación resultante es diferente). Si pensamos a los puntos del plano euclidiano como vectores con O como el origen, entonces existen dos vectores únicos v_1 y v_2 tales que $l_i = \langle v_i \rangle_{\mathbb{R}}$ con $i = 1, 2$. Sea $f : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ un difeomorfismo tal que $f(0) \neq 0$. Para cada número real t , sea m_t la línea que contiene los puntos $t \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$ y $0 \cdot v_1 + f(t) \cdot v_2$. Para ser más precisos,

$$m_t = \{x \cdot v_1 + y \cdot v_2 \in \mathbb{R}^2 : 0 = ty + f(t)x - tf(t)\}.$$

Como se muestra en la figura 4.3, esto genera una familia de rectas M donde su envolvente está dada por

$$\gamma(t) = \left(\frac{t^2 f'(t)}{t f'(t) - f(t)} \right) \cdot v_1 + \left(\frac{-f(t)^2}{t f'(t) - f(t)} \right) \cdot v_2.$$


 Figura 4.3: $\gamma(\mathbb{R}) = \Gamma$

Si f es lineal, entonces la envolvente no está bien definida. De hecho, los puntos singulares (donde $\gamma'(t) = 0$) de esta envolvente son esos puntos donde el valor t satisface la siguiente relación:

$$0 = -2tf'(t)^2 + 2f(t)f'(t) + tf(t)f''(t),$$

(véase [4]). Así, $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ está bien definida, las curvas en el plano son suaves si y sólo si $tf'(t) - f(t) \neq 0$ y $-2tf'(t)^2 + 2f(t)f'(t) + tf(t)f''(t) \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Estas expresiones y sus condiciones se ocurren al calcular varias funciones asociadas a Γ . Primero, el vector tangente a Γ en el punto $\gamma(t)$ está dado por

$$\gamma'(t) = \frac{-2tf'(t)^2 + 2f(t)f'(t) + tf(t)f''(t)}{(tf'(t) - f(t))^2} (t \cdot v_1 - f(t) \cdot v_2).$$

En particular, cuando está definida la “pendiente” de Γ en el punto $\gamma(t)$ (usando los vectores v_1 y v_2 como base) es, como se quiere, $-f(t)/t$. Más aún, la curvatura de γ está dada por:

$$\kappa(t) = \frac{-(tf'(t) - f(t))^3}{(t^2 + f(t)^2)^{3/2} (2tf'(t)^2 - 2f(t)f'(t) - tf(t)f''(t))}.$$

Se sigue que la curva Γ es estrictamente convexa si y sólo si Γ es suave, es decir, está definida en todo \mathbb{R} y no tiene puntos singulares.

Teorema 4.1.3 (Brendan Foreman (2007)). *Si Γ es una curva suave y convexa en \mathbb{R}^2 cuya imagen en el plano proyectivo \mathbb{RP}^2 es cerrada, l_1 y l_2 son dos líneas*

tangentes a Γ distintas, entonces existen al menos cuatro cónicas que son tangentes a l_1 y l_2 y tienen orden de contacto mayor o igual a tres con Γ .

Demostración. Supongamos que Γ es una curva suave, cerrada y convexa en el plano euclidiano tal que su imagen en el plano proyectivo es cerrada. En lo siguiente, cuando se quiera especificar una parametrización local de Γ la denotaremos como γ .

Sean l_1 y l_2 dos rectas tangentes distintas de Γ que se intersecan, y sea O el punto de intersección (de nuevo, este proceso funciona para rectas tangentes paralelas si éstas existen). Como Γ es convexa, esta interseca a cada línea l_i , con $i = 1, 2$, en un solo punto. Entonces $O \notin \Gamma$. De nuevo, veamos a los puntos del plano como vectores, donde O es el origen.

Sea v_i el vector unitario en l_i , que apunte en la dirección de $\Gamma \cap l_i$. Entonces cualquier punto en el plano puede ser escrito de forma única como la combinación lineal de v_1 y v_2 . Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dados por

$$t_1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = \Gamma \cap l_1, \quad 0 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 = \Gamma \cap l_2.$$

Como γ es cerrada en el plano euclidiano, entonces existe un único punto $p \in \Gamma$, $p \neq \Gamma \cap l_1$, tal que su línea tangente m_p es paralela a l_1 . Sea $t_3 \in \mathbb{R}$ tal que $0 \cdot v_1 + t_3 \cdot v_2 = l_2 \cap m_p$. De la misma forma, existe un único punto $q \in \Gamma$, $q \neq \Gamma \cap l_2$, tal que m_q es paralela a l_2 y entonces podemos definir a t_4 como $t_4 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = l_1 \cap m_q$. Si γ no es cerrada en el plano euclidiano tomamos $t_3 = t_4 = \infty$.

Definamos $f : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ como sigue: por cada $t \in \mathbb{R} - \{0, t_1, t_4\}$ tenemos exactamente dos líneas tangentes a Γ que pasa por los puntos $t \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$, llamémosles l_t y m_t . En este caso definamos a $f(t)$ como $m_t \cap l_2 = 0 \cdot v_1 + f(t) \cdot v_2$, y $f(t_1) = 0$, $f(0) = t_2$, $f(\infty) = t_3$ y $f(t_4) = \infty$. Es claro que f es inyectiva ya que si $m_{t_1} = m_{t_2}$ entonces el punto de tangencia es el mismo; por otro lado f es suprayectiva por definición de f . Como Γ es suave y su imagen es cerrada en el plano proyectivo, podemos asumir que existen funciones suaves $\gamma_i : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ para $i = 1, 2$ tales que $\gamma(s) = \gamma_1(s) \cdot v_1 + \gamma_2(s) \cdot v_2$ con $s \in \mathbb{R}$ es una parametrización de Γ y además $\gamma'(s)$ está bien definida y es distinta de 0 para todo s . Para ser más precisos, si $\pi : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es la proyección estereográfica, entonces la transformación $\pi \circ \gamma_i \circ \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ($i = 1, 2$) tiene una derivada bien definida y distinta de 0 para todo punto en \mathbb{S}^1 .

Excluyendo los puntos donde Γ es tangente a l_1 o l_2 , la recta tangente a Γ en $\gamma(s)$ interseca a l_i en exactamente un único punto $g_i(s) \cdot v_i$. Podemos extender las imágenes y el dominio de g_1 y g_2 para que ambos sean biyecciones suaves de \mathbb{RP}^1 . Más aún, $f(g_1(s)) = g_2(s)$, lo cual implica que f es diferenciable y $f'(g_1(s))g_1'(s) = g_2'(s)$. En

términos de s ,

$$g_1(s) = \frac{\gamma_1(s)\gamma_2'(s) - \gamma_1'(s)\gamma_2(s)}{\gamma_2'(s)}, \quad g_2(s) = \frac{\gamma_2(s)\gamma_1'(s) - \gamma_2'(s)\gamma_1(s)}{\gamma_1'(s)},$$

entonces

$$g_1'(s) = \frac{\gamma_2(s)(\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s))}{(\gamma_2'(s))^2}, \quad g_2'(s) = \frac{\gamma_1(s)(\gamma_2'(s)\gamma_1''(s) - \gamma_2''(s)\gamma_1'(s))}{(\gamma_1'(s))^2}$$

Como γ es convexa, la expresión $\gamma_1'(s)\gamma_2''(s) - \gamma_1''(s)\gamma_2'(s)$ es distinta de cero para cada s . Tomando en cuenta todos estos hechos entonces

$$f'(g_1(s)) \left(\frac{\gamma_2(s)}{\gamma_2'(s)^2} \right) = - \left(\frac{\gamma_1(s)}{\gamma_1'(s)^2} \right).$$

Notemos que para cada s las expresiones $\gamma_2(s)/\gamma_2'(s)^2$ y $\gamma_1(s)/\gamma_1'(s)^2$ están bien definidas y son distintas de cero. Así, por continuidad de todas las transformaciones que nos hemos tomado, la expresión $f'(g_1(s))$ está bien definida y es distinta de cero para toda s . Por lo tanto, f es un difeomorfismo de \mathbb{RP}^1 .

El teorema de Ghys implica que la derivada de Schwarz de f tiene al menos cuatro ceros. En particular, si t es uno de estos ceros, entonces existe una transformación de Möbius $\mu \in PSL(2, \mathbb{R})$ que aproxima a f hasta su tercera derivada. En efecto, en este caso basta probarlo en el 0. Supongamos que $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 2a_2$; tomando

$$\mu(x) = \frac{(a_1 - a_0 a_2)x + a_0}{-a_2 x + 1}$$

se tiene que μ y f coinciden hasta la segunda derivada. Por otro lado $0 = S_t^f = S_t^\mu$ lo cual implica que $f'''(t) = \mu'''(t)$. Sea $\bar{\gamma}$ la cónica generada por la líneas l_1 y l_2 y la transformación de Möbius μ . Entonces $\gamma = \bar{\gamma}$ en t hasta la tercera derivada, es decir, $\bar{\gamma}$ es una cónica de contacto a γ de orden tres en t . Por construcción $\bar{\gamma}$ es tangente a l_1 y l_2 . Lo cual demuestra el teorema. \square

4.2. Teorema de Ghys para el plano hiperbólico

Para la última sección de esta tesis tomaremos el hecho de que los modelos del disco de Poincaré (\mathbb{D}^2), el plano hiperbólico (\mathbb{H}^2) y el modelo de Klein-Beltrami (\mathbb{K}^2) son isométricos y sus grupos de isometrías se pueden representar como un conjunto de transformaciones de Möbius (con distintas condiciones en los coeficientes para cada modelo). Además veremos casos especiales de transformaciones en $Aut(\mathbb{C})$ y “curvas” que permanecen invariantes bajo dichas transformaciones.

Definición 4.2.1. *Dos elementos T y \hat{T} en $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ son conjugados si existe otro elemento $S \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $\hat{T} = STS^{-1}$.*

Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{T} & \hat{\mathbb{C}} \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ \hat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\hat{T}} & \hat{\mathbb{C}} \end{array}$$

Lo cual significa que después de aplicarle S a $\hat{\mathbb{C}}$, la transformación \hat{T} se comporta como T , por ejemplo.

Ejemplo 4.1. Si z_0 es un punto fijo de T , es decir, $T(z_0) = z_0$, entonces $S(z_0)$ es un punto fijo de \hat{T} .

$$\hat{T}(S(z_0)) = STS^{-1}(S(z_0)) = ST(z_0) = S(z_0)$$

Definición 4.2.2. Si $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ la traza de T está definida como:

$$\text{tr}T = a + d.$$

Veamos unas observaciones.

1. Si $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cong PSL(2, \mathbb{C})$, entonces $\text{tr}T$ está definida excepto por la multiplicación de ± 1 . Así en $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, solamente $\text{tr}T^2$ está bien definida. Observemos que la multiplicación de una matriz por un escalar λ cambia la traza por el mismo factor λ , esto resulta en que $\text{tr} : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, definida como $\text{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$, es \mathbb{R} lineal.
2. Si normalizamos T , es decir, $T \in SL(2, \mathbb{C})$, entonces $\text{tr}T = \text{tr}T^{-1}$.
3. Si $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$, entonces $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
4. $\text{tr}T = \text{tr}(STS^{-1})$ para $S \in SL(2, \mathbb{C})$.

Lema 4.2.3. Sea $T \in SL(2, \mathbb{C})$, $T \neq Id$. Entonces T tiene 1 o 2 puntos fijos. El primer caso ocurre cuando $\text{tr}T^2 = 4$.

Demostración. Sea $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces $T(z) = z$ si y solamente si

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Así los puntos fijos de la transformación son:

$$z_0^\pm = \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{a - d \pm \sqrt{(\text{tr}T)^2 - 4}}{2c},$$

donde la última igualdad se obtiene usando la identidad $ad - bc = 1$. □

Pasaremos ahora a clasificar transformaciones por sus puntos fijos y su traza.

Caso 1: Transformaciones parabólicas

Por el lema 4.2.3, T tiene un punto fijo si $\text{tr}T = \pm 2$ y $T \neq Id$. Llamemos a este punto z_0 . Si conjugamos T por la transformación $S \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $S(z_0) = \infty$, entonces $\hat{T} = STS^{-1}$ tiene un punto fijo en el infinito, véase ejemplo 4.1.

Sea $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $T(\infty) = \infty$. Entonces tenemos que $c = 0$, $ad = 1$, así $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ y $T(z) = \frac{az+b}{a^{-1}} = \alpha z + \beta$ para algunos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Además, tenemos la condición de que $\text{tr}T = a + a^{-1} = \pm 2$ lo cual implica que $a = \pm 1$. Por lo tanto $T(z) = z \pm \beta$, la cual es una traslación euclidiana.

Caso 2: Transformaciones loxodrómicas

En el caso general, T tiene 2 puntos fijos z_0^\pm . De nuevo, conjugando T por la transformación $S \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ tal que $S(z_0^+) = 0$ y $S(z_0^-) = \infty$, esto es la transformación

$$S : z \mapsto \frac{z - z_0^+}{z - z_0^-}.$$

Podemos asumir que

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1, \quad T(0) = 0, T(\infty) = \infty.$$

Deducimos que $c = 0$, $b = 0$ y $d = a^{-1}$ entonces

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$

así $T(z) = a^2 z$.

También tenemos la condición $\text{tr}T = a + a^{-1} \neq \pm 2$, lo cual es equivalente a $a \neq \pm 1$. Podemos escribir a T como

$$T(z) = \lambda z, \quad \lambda \neq 1.$$

El número λ es llamado el *multiplicador* de T . Notemos también que $\lambda = T'(0)$. Esto también se puede dividir en subcasos:

- (a) Hiperbólicos si $\lambda > 0$; estas transformaciones son expansiones (si $\lambda > 1$) o contracciones (si $\lambda < 1$).
- (b) Elípticas si $|\lambda| = 1$; estas transformaciones son rotaciones.
- (c) Loxodrómicas; cada transformación de este tipo es una combinación de las dos anteriores.

La siguiente figura muestra la dinámica de algunas transformaciones parabólicas, hiperbólicas, elípticas y loxodrómicas, respectivamente, en \mathbb{H}^2 .

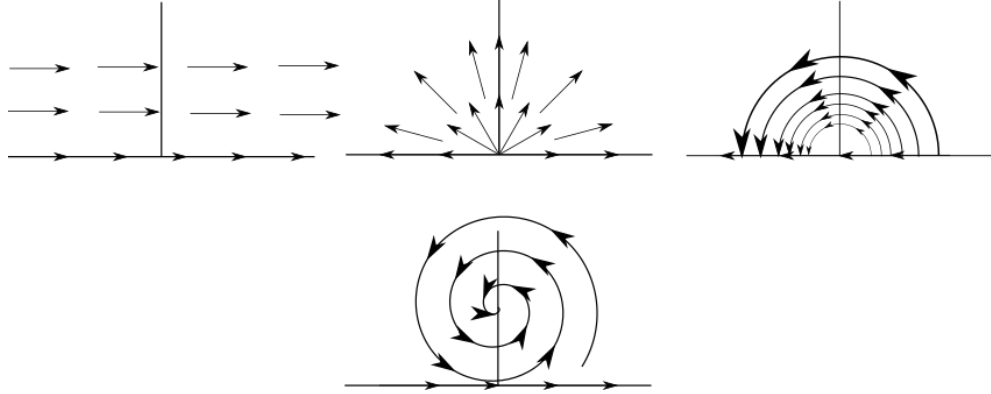


Figura 4.4: Dinámica de las transformaciones

Para nuestro último resultado usaremos tres tipos de curvas: los círculos, los horociclos y las curvas equidistantes (hiperciclos), todos en sentido hiperbólico.

Círculos. Sea $C(z_0, \rho)$ el círculo hiperbólico contenido en \mathbb{D}^2 con centro en $z_0 \in \mathbb{D}^2$ y radio hiperbólico ρ . En el disco \mathbb{D}^2 si $z_0 = 0$, entonces $\rho = d_{\mathbb{D}}(0, r)$ tenemos que

$$d_{\mathbb{D}}(0, r) = \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right),$$

aplicando la exponencial y despejando r tenemos

$$r = \frac{e^{\rho} - 1}{e^{\rho} + 1} = \tanh \frac{\rho}{2}.$$

La fórmula de la distancia en \mathbb{D}^2 es claramente simétrica bajo rotaciones con centro en $0 \in \mathbb{D}^2$. Se sigue de la fórmula anterior que $C(0, \rho)$ coincide con el círculo euclidiano con centro en 0 y radio $r = \tanh(\rho/2)$.

Ahora consideremos $C(z_0, \rho)$; tenemos que la isometría $T(z) = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ lleva z_0 al 0. Como las isometrías preservan círculos hiperbólicos, se sigue que $T(C(z_0, \rho)) = C(0, \rho)$ y también $C(z_0, \rho) = T^{-1}(C(0, \rho))$. Así T lleva círculos euclidianos en círculos euclidianos, por lo tanto $C(z_0, \rho)$ es un círculo euclidiano.

Horociclos. Un horociclo es el límite de un círculo cuando el centro se aproxima a $\partial\mathbb{D}^2$. En los modelos \mathbb{H}^2 y \mathbb{D}^2 son círculos euclidianos tangentes a la frontera. Aunque en \mathbb{H}^2 son también líneas horizontales con punto de tangencia ∞ .

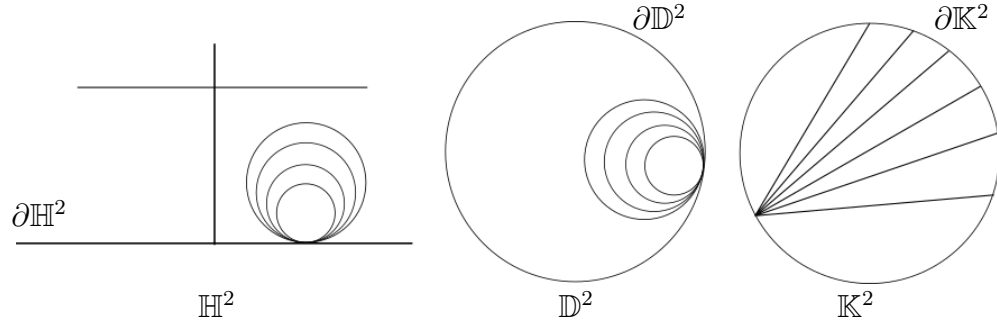


Figura 4.5: Horociclos

Curvas equidistantes (hiperciclos). Las curvas equidistantes, como su nombre lo indica, son curvas que equidistan a las geodésicas de los modelos hiperbólicos con respecto a su distancia hiperbólica.

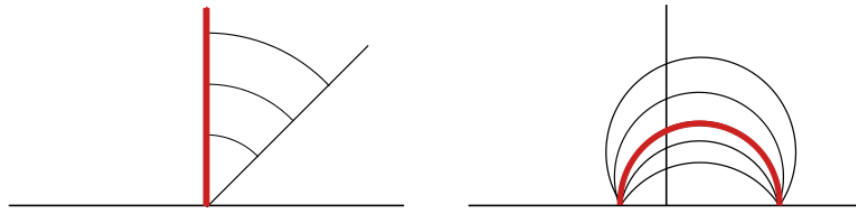


Figura 4.6: Hiperciclos (negro) y geodésicas (rojo) en \mathbb{H}^2

Definición 4.2.4. Sean M una superficie en \mathbb{R}^3 , $\gamma : I \rightarrow M$ una curva parametrizada por longitud de arco e I un intervalo. Entonces la curvatura geodésica k_g de γ en un punto $\gamma(t)$ es la norma de la proyección ortogonal del vector $\gamma''(t)$ en el plano tangente a M en $\gamma(t)$.

En particular $k_g = \|\gamma''(t)\|$ si $M = \mathbb{R}^3$.

Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ en un sistema coordenado (ϕ, U) , donde $\gamma(t) \in U$, entonces la proyección ortogonal es de la forma

$$\gamma''(t)_{\text{proy}} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \nu \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.2.1)$$

donde

$$\lambda = x''(t) + \Gamma_{11}^1(x'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^1x'(t)y'(t) + \Gamma_{22}^1(y'(t))^2 \quad (4.2.2)$$

y

$$\nu = y''(t) + \Gamma_{11}^2(x'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^2x'(t)y'(t) + \Gamma_{22}^2(y'(t))^2. \quad (4.2.3)$$

Nótese que las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.3) usan solamente cantidades intrínsecas de M , además si la curva es una geodésica ambas ecuaciones se anulan (véase [6]). Esto nos permite definir la curvatura geodésica de una curva parametrizada por longitud de arco; para ser más exactos, definimos k_g como la longitud del vector en 4.2.1 (véase [28]):

$$k_g = \sqrt{\lambda^2 g_{11} + 2\lambda\nu g_{12} + \nu^2 g_{22}}. \quad (4.2.4)$$

La *longitud de arco (hiperbólico)* en \mathbb{D}^2 de una curva continua y diferenciable $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ está dada por la fórmula

$$l_{\mathbb{D}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{2\gamma'(t)}{1 - \|\gamma(t)\|^2} dt. \quad (4.2.5)$$

De esto tenemos que la distancia hiperbólica $\text{dist}_{\mathbb{D}}(p, q)$ de los puntos $p, q \in \mathbb{D}^2$ es

$$\cosh(\text{dist}_{\mathbb{D}}(p, q)) = 1 + \frac{2\|p - q\|}{(1 - \|p\|^2)(1 - \|q\|^2)}. \quad (4.2.6)$$

Teorema 4.2.5. *Las curvas con curvatura geodésica constante en \mathbb{D}^2 son: círculos, horociclos e hiperciclos, o arcos de los mismos.*

Demostración. Sea $\gamma : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{D}^2$, dado que k_g , $\gamma(0)$ y $\gamma'(0)$ determinan la parametrización por longitud de arco de una curva de curvatura geodésica constante, es suficiente probar que los hiperciclos, horociclos y círculos tienen curvatura geodésica constante.

Los símbolos de Christoffel de \mathbb{D}^2 son

$$\frac{2x}{1 - x^2 - y^2} = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1$$

y

$$\frac{2y}{1 - x^2 - y^2} = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2.$$

Supongamos γ es un hiperciclo tal que el ángulo entre γ y la frontera del disco (círculo al infinito) es α . Bajo la isometría adecuada de \mathbb{D}^2 , podemos conseguir que la imagen de γ sea la intersección de \mathbb{D}^2 con la línea horizontal $y = \cos \alpha$. Así podemos parametrizar a γ como $\gamma(s) = (x(s), \cos \alpha)$, donde s es la longitud de arco hiperbólico. Entonces usando las ecuaciones de Gauss para la curvatura gaussiana tenemos: $dx/ds = (1 - x^2 - \cos^2 \alpha)/2 = 1/\sqrt{E}$, $dy/ds = 0$, entonces las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.3) se simplifican como

$$\lambda = 0, \quad \nu = \cos \alpha \frac{1 - x^2 - \cos^2 \alpha}{2}.$$

Sustituyendo en (4.2.4) obtenemos $k_g = \cos \alpha$, la cual es independiente de x .

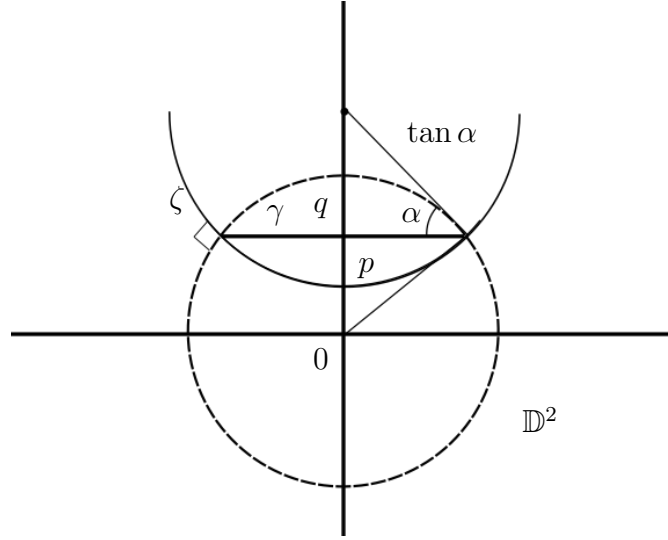


Figura 4.7: Curvatura geodésica de un hipercirculo

Consideremos ζ un círculo con radio r y centro en el eje vertical de tal forma que $L = \zeta \cap \mathbb{D}^2$ sea una línea hiperbólica (geodésica) la cual interseca a la frontera en los puntos $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ y $(\sin \alpha, \cos \alpha)$. Notemos que para cualquier punto q de γ la distancia de q a L es una constante d . Sea $p = (0, y_1)$ un punto de L y $q = (0, y_2)$ un punto de γ . Definimos $d = \text{dist}_{\mathbb{D}}(p, q)$. Notemos que el radio euclidiano y el centro del círculo ζ son, respectivamente, $r = \tan \alpha$ y $c = (0, \sqrt{\tan^2 \alpha + 1})$. Así $p = (0, (1 - \sin \alpha) / \cos \alpha)$ y

$$\cosh d = 1 + \frac{2\|p - q\|}{(1 - \|p\|^2)(1 - \|q\|^2)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - k_g^2}}.$$

Entonces, usando identidades de funciones trigonométricas hiperbólicas tenemos que $k_g = \tanh d$.

Ahora, supongamos que γ es un círculo de radio hiperbólico $r_{\mathbb{D}}$. También podemos asumir que el centro hiperbólico de γ es 0. Entonces γ coincide con un círculo euclidiano con centro en 0. Recordemos que la curvatura geodésica de un círculo está en función del radio. El radio euclidiano y el radio hiperbólico están relacionados por la fórmula $r = \tanh(r_{\mathbb{D}}/2)$.

Claramente, una parametrización por longitud de arco hiperbólico del círculo γ es

$$\gamma(t) = (r \cos(ks), r \sin(ks))$$

para alguna constante $k > 0$. $k = (1 - r^2)/(2r)$, esto viene de la ecuación $g_{\mathbb{D}} = (\gamma'(s), \gamma'(s)) = 1$. Sustituyendo $\gamma(s)$ en las ecuaciones (4.2.2), (4.2.3), (4.2.4) y

simplificando se obtiene que

$$k_g = \frac{1 - r^2}{2r} = \coth r_{\mathbb{D}}.$$

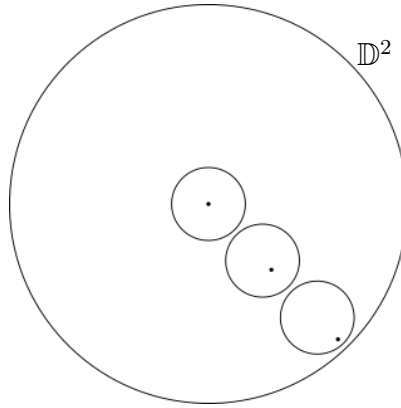


Figura 4.8: Caso límite

Para la curvatura geodésica del horociclo basta observar que el radio hiperbólico ($r_{\mathbb{D}}$) tiene a infinito, entonces

$$\lim_{r_{\mathbb{D}} \rightarrow \infty} \coth r_{\mathbb{D}} = 1$$

Por lo tanto, la curvatura geodésica del círculo es mayor que 1, la del hiperciclo es mayor que 0 y menor que 1 y la del horociclo es igual a 1. \square

El último hecho que usaremos: en el modelo hiperbólico de Klein-Beltrami $\partial\mathbb{K}^2 \cong \mathbb{RP}^1$.

Consideremos el modelo hiperbólico de Klein-Beltrami (\mathbb{K}^2). El plano \mathbb{H}^2 está representado en el interior del disco unitario \mathbb{D}^2 (círculo al infinito). Sea γ una curva suave, cerrada, convexa y orientada en el interior de \mathbb{K}^2 . Definimos el siguiente difeomorfismo del círculo al infinito en sí mismo como sigue. Dado $x \in \mathbb{RP}^1$, consideramos la línea tangente orientada a γ y sea $f(x)$ el segundo punto de intersección de la tangente con \mathbb{RP}^1 (ver figura 4.9). Es claro que esto define un difeomorfismo

$$f : \mathbb{RP}^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^1.$$

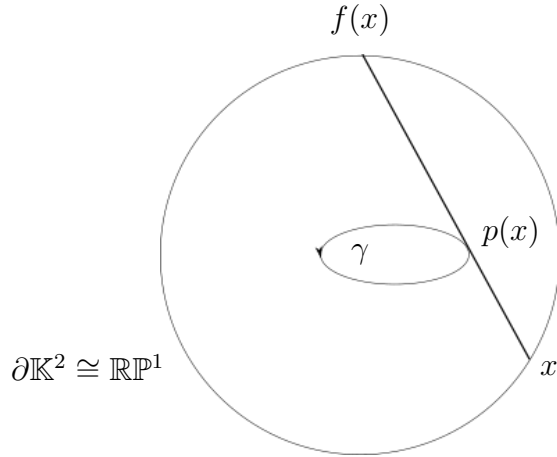


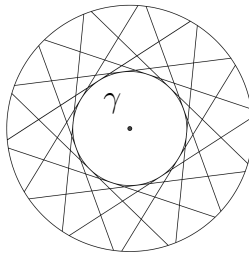
Figura 4.9: Difeomorfismo de la frontera en sí misma

Tenemos la siguiente proposición:

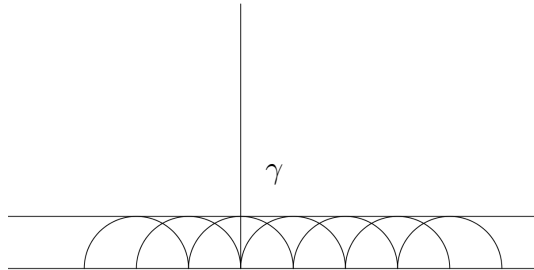
Proposición 4.2.6. *Sea γ una curva en \mathbb{K}^2 , suave, cerrada y convexa. Si $S_x^f \equiv 0$, entonces $p(x) \in \gamma$ es un vértice para todo $x \in \mathbb{RP}^1$, es decir, γ es una curva de curvatura constante.*

Demostración. Un vértice es un 4-punto de tangencia de γ con una curva α de curvatura constante κ . Del teorema 4.2.5, α debe de ser un círculo, un horociclo o un hiperciclo.

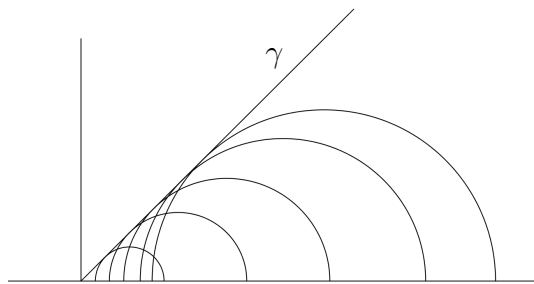
Como $S_x^f \equiv 0$ entonces $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con a, b, c y $d \in \mathbb{R}$. Dado que f está definida en la frontera podemos extenderla como $\hat{f} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $\hat{f}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. De esta forma \hat{f} es una isometría del plano superior en el plano superior. Consideremos el caso cuando \hat{f} es una isometría elíptica. La extensión \hat{f} deja invariantes los círculos con centro el centro de rotación y manda puntos en la frontera en puntos en la frontera. Por otro lado, por la construcción de f y el hecho de que \hat{f} es una isometría de \mathbb{H}^2 todas las “rectas” tangentes a γ son geodésicas tangentes a un círculo (envolvente). Entonces γ es un círculo; esto concluye el caso cuando $\kappa > 1$.



Sea f una isometría parabólica. Consideremos \mathbb{H}^2 el modelo del plano superior. Sin pérdida de generalidad, supongamos que es una traslación horizontal. La extensión \hat{f} deja invariante líneas horizontales las cuales son horociclos del plano superior, además de mandar puntos de la frontera en puntos de la frontera $\partial\mathbb{H}^2$. De nuevo, por la construcción de f y el hecho de que \hat{f} es una isometría las “rectas” tangentes generan geodésicas tangentes al horociclo (envolvente), es decir, la imagen de f en un punto x_0 es un semicírculo con centro en el eje real, por lo tanto γ es un horociclo; esto concluye el caso cuando $\kappa = 1$.



Finalmente, si f es una isometría hiperbólica, trabajando nuevamente con el modelo \mathbb{H}^2 , podemos suponer que la extensión \hat{f} es la dilatación $(x, y) \mapsto (cx, y)$. La extensión \hat{f} deja invariante a la línea $y = cx$, que es un hiperciclo en \mathbb{H}^2 . Así, las “rectas” tangentes a γ son semicírculos homotéticos tangentes a la línea $y = cx$ (envolvente) con centro en el eje real, por lo tanto la línea $y = cx$ es la imagen de la curva γ , un hiperciclo, que tiene curvatura constante $0 < \kappa < 1$.



Esto completa la prueba.

□

Esta proposición sugiere, naturalmente, un resultado local.

Corolario 4.2.7. *Sea γ una curva en \mathbb{K}^2 , suave, cerrada y convexa. Si $S_z^f = 0$, entonces $p(x) \in \gamma$ es un vértice.*

Demostración. Como $S_x^f = 0$ entonces existe una transformación de Möbius $\mu : \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$, donde $\mu(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ tal que

$$\mu(x) = f(x), \mu'(x) = f'(x), \mu''(x) = f''(x) \text{ y } \mu'''(x) = f'''(x).$$

Podemos extender μ por $\hat{\mu} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ donde $\hat{\mu}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. La curvatura geodésica es una cantidad intrínseca que sólo depende de las segundas derivadas de la parametrización de las curvas, entonces (localmente) tenemos los tres casos de la demostración de la proposición 4.2.6 para $\hat{\mu}$, con lo cual la prueba es exactamente igual a dicha proposición. \square

Teorema 4.2.8. *Sea γ una curva suave, cerrada y convexa en \mathbb{K}^2 , entonces γ tiene al menos 4 vértices.*

Demostración. El teorema de Ghys nos da al menos 4 ceros de la derivada de Schwarz de cualquier difeomorfismo de \mathbb{RP}^1 , entonces nos da 4 vértices de γ . Como los 3 modelos hiperbólicos (\mathbb{D}^2 , \mathbb{H}^2 y \mathbb{K}^2) son isométricos entonces este teorema es válido para cada modelo. \square

Nos preguntamos si el teorema de Ghys es equivalente, en los modelos hiperbólicos, al teorema de los cuatro vértices.

Definición 4.2.9. *Sea f una función diferenciable, de variable compleja (o real) y de clase C^3 . La traza de f es*

$$Tf(z) = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)^{3/2}} (z - f(z)) + \frac{f'(z) + 1}{\sqrt{f'(z)}}.$$

Entonces

$$(Tf)'(z) = \frac{z - f(z)}{2} \left(\frac{f'''(z)}{f'(z)^{3/2}} - \frac{3 f''(z)^2}{2 f'(z)^{5/2}} \right) = \frac{z - f(z)}{2 f'(z)^{1/2}} S_z^f. \quad (4.2.7)$$

De esta fórmula se sigue inmediatamente que la Tf es constante si $f \in PSL(2, \mathbb{C})$. Tenemos el siguiente lema.

Lema 4.2.10. *Si $f \in PSL(2, \mathbb{C})$ es de la forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, entonces $Tf(z) = a+d$.*

Teorema 4.2.11. *Sean $\mu \in PSL(2, \mathbb{C})$, g una función definida por $g(\mu(z)) = \mu(f(z))$ y $w = \mu(z)$, entonces $Tg(w) = Tf(z)$.*

Demostración. El teorema se puede demostrar directamente considerando los siguientes casos:

Caso 1: $\mu(z) = az + b$; se sigue por sustitución.

Caso 2: $\mu(z) = \frac{1}{z}$; entonces

$$\frac{1}{2} \frac{g''(w)}{g'(w)^{3/2}} (w - g(w)) = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)^{3/2}} (z - f(z)) + \frac{z - f(z)}{z\sqrt{f'(z)}} - \frac{(z - f(z))\sqrt{f'(z)}}{f(z)},$$

de donde el resultado se sigue. \square

Antes de continuar tomemos de nuevo la idea del difeomorfismo de la proposición 4.2.6. Sea $\gamma(t)$ una curva regular en \mathbb{D}^2 . Para cada t , la curva determina un único par de puntos $(\alpha(t), \omega(t))$ en $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}P^1$ tal que la geodésica en \mathbb{D}^2 de $\alpha(t)$ a $\omega(t)$ es una línea tangente orientada a γ en t (véase [22]).

Ejemplo 4.2. Tomemos el círculo hiperbólico ζ en \mathbb{D}^2 de radio r con centro en el origen. Sabemos que la curvatura $k_g > 1$ está dada por

$$k_g = \coth r = \frac{1 + R^2}{2R},$$

donde $R = \tanh(r/2)$.

Una geodésica tangente al círculo es otro círculo de radio euclidiano A , centrado en un punto cuya distancia euclidiana al origen es $A + R$. Como éste es un círculo ortogonal al círculo unitario es fácil comprobar que $A = \frac{1-R^2}{2R}$.

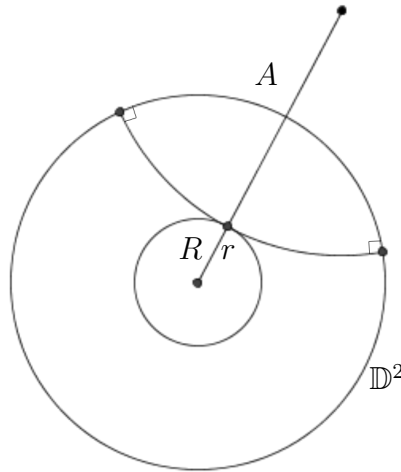


Figura 4.10: Curvatura geodésica de un hiperciclo

Se sigue que el difeomorfismo que deja invariante al círculo ζ es la rotación $f(z) = e^{2i\theta}z$, donde $\tan(\theta) = A = \frac{1-R^2}{2R}$, entonces

$$Tf = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta) = \frac{2}{A + R} = \frac{4R}{1 + R^2} = \frac{2}{k_g}.$$

Entonces por el teorema 4.2.3, para cualquier círculo en los modelos hiperbólicos, el correspondiente difeomorfismo f que los deja invariantes cumple que $Tf \equiv 0$.

Ejemplo 4.3. Veamos el caso del horociclo η , el cual sabemos que tiene curvatura constante 1. En \mathbb{H}^2 podemos tomar un horociclo como la línea horizontal $y = y_0 > 0$. Las geodésicas tangentes son semicírculos centrados en el eje x del mismo radio. Entonces, el difeomorfismo que deja a η invariante es la traslación $f(z) = z + c$, donde $c = \pm y_0$. La matriz asociada a f es $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, conjugando con $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ nos da la matriz $A := \begin{pmatrix} 2 + ic & c \\ c & 2 - ic \end{pmatrix}$. De nuevo por el teorema 4.2.3 $T(A) = T(f) \equiv 2 = \frac{2}{k_g}$.

Ejemplo 4.4. Sea ϵ una curva equidistante, la cual tiene curvatura constante $0 < K < 1$. Tomemos de nuevo el modelo \mathbb{H}^2 . Tomemos la línea $y = mx$, la cual tiene curvatura $k_g = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$. La línea tangente al punto (x, mx) interseca al eje x en los puntos $\alpha(x) = (\sqrt{m^2 + 1} - m)(\sqrt{m^2 + 1})x$ y $\omega(x) = (\sqrt{m^2 + 1} + m)(\sqrt{m^2 + 1})x$. El difeomorfismo f es la dilatación $f(z) = \frac{\sqrt{m^2+1}+m}{\sqrt{m^2+1}-m}z$ y la matriz correspondiente es $\begin{pmatrix} \sqrt{m^2+1}+m & 0 \\ 0 & \sqrt{m^2+1}-m \end{pmatrix}$. Sustituyendo se tiene que $T(f) = 2\sqrt{m^2+1} = 2/k_g$.

Ahora si $\gamma(t)$ es una curva de clase C^2 en \mathbb{H}^2 , podemos aproximarla en un punto por una curva de curvatura constante (hasta orden 2) el cual se le conoce como círculo osculador. Se sigue entonces que el valor de $Tf(\alpha(t))$ para la curva es igual al valor correspondiente para el círculo. Hemos probado con estos ejemplos y esta afirmación que:

Teorema 4.2.12. *Para cualquier curva suave, cerrada y convexa γ en \mathbb{H}^2 con curvatura $k_g(t)$ distinta de cero, el correspondiente difeomorfismo f satisface*

$$Tf(\alpha(t)) = \frac{2}{k_g(t)}.$$

Teorema 4.2.13. *Si f es un difeomorfismo de $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ en sí mismo, la derivada de Schwarz S^f tiene, al menos, cuatro ceros distintos.*

Demostración. Combinando el teorema anterior y la fórmula 4.2.7, se tiene que

$$k'_g(t) = \frac{k_g(t)^2 \alpha'(t) (\omega(t) - \alpha(t))}{4\sqrt{f'(\alpha(t))}} S^f_{\alpha(t)}.$$

Esta igualdad es cero precisamente cuando $S^f_{\alpha(t)}$ es cero. Esto ocurre precisamente en los vértices de la curva. \square

Por lo tanto el teorema de Ghys es equivalente al teorema de los cuatro vértices en los modelos hiperbólicos.

Finalmente, demos un contra-ejemplo al teorema de los cuatro vértices en \mathbb{RP}^2 . Tomemos la función $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ en \mathbb{R} la cual tiene como asíntota a la recta $y = -1$, homogeneizando tenemos $F = z^2y + yx^2 + zx^2 - z^2 = 0$ el cual tiene la siguiente gráfica en el plano proyectivo:

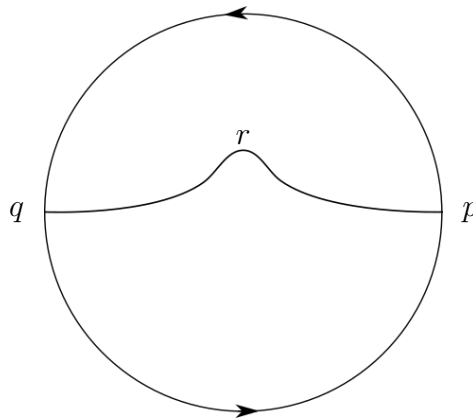


Figura 4.11: Curva F en \mathbb{RP}^2

donde $p = q$. Así esta curva proyectiva es cerrada en \mathbb{RP}^2 en la cual el punto r es donde su curvatura es máxima y el punto $p = q$ en donde la curvatura es cero. Nótese que esta curva no es convexa, pero sí es simplemente conexa. Por otro lado el teorema de los cuatro vértices tiene su extensión para curvas simplemente conexas en los modelos hiperbólicos y esféricos, así la curva F sirve como contraejemplo para el plano proyectivo ya que solo tiene dos puntos en donde la curvatura alcanza su máximo o su mínimo. Esto también se puede justificar por la no-orientabilidad del plano proyectivo.

Referencias

- [1] Arnol'd, Vladimir Igorevich (1989). *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer-Verlag
- [2] Bishop, Richard y Goldberg, Samuel (1980). *Tensor Analysis on Manifolds*. United States: Macmillan.
- [3] Bracho, Javier (2009). *Introducción analítica a las geometrías*. Distrito Federal: Fondo de Cultura Económica.
- [4] Bruce, James William y Giblin, Peter (1992). *Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory*. New York: Cambridge University Press.
- [5] Carmo, Manfredo Perdigão do (1993). *Riemannian Geometry*. Boston: Birkhäuser.
- [6] Carmo, Manfredo Perdigão do (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. United States: Prentice-Hall
- [7] Duval, Christian y Ovsienko, Valentin (2000). Lorentzian worldlines and the schwarzian derivative. *Functional analysis and it's application*, 34 (2),135–137.
- [8] Friedberg, Stephen, Insel , Arnold y Spence Lawrence (2013). *Linear Algebra*. Illinois: Pearson.
- [9] Gibson, Christopher (1998). *Elementary Geometry of Algebraic Curves: an Undergraduate Introduction*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- [10] Graustein, William C. (1963). *Introduction to Higher Geometry*. New York: Macmillan.
- [11] Kadison, Lars y Kromann, Matthias T. (1996). *Projective Geometry and Modern Algebra*. Boston: Birkhäuser.
- [12] Khovanskii, Askold G., Varchenko, Alexander, et.al. (1997). *Topics in Singularity Theory : V.I. Arnold's 60th anniversary collection*. Rhode Island: American Mathematical Society.

- [13] Lee, John M. (1997). *Riemannian Manifolds: an introduction to curvature*. New York: Springer.
- [14] Marsden, Jerrold E. y Hoffman, Michael J. (1999). *Basic Complex Analysis*. New York: W.H. Freeman.
- [15] Milnor, John W. (2000). *Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures*. Alemania: Vieweg.
- [16] Nehari, Zeev (1949). The Schwarzian Derivative and Schlicht Functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55 (6), 545–551.
- [17] O’Neill, Barret (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. New York: Academic Press.
- [18] Ovsienko, Valentin y Tabachnikov, Serge (2005). *Projective Differential Geometry Old and New: from Schwarzian derivative to cohomology of diffeomorphism groups*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [19] Palmas, Oscar y Reyes Victoria, Guadalupe (2005). *Curso de geometría diferencial. Parte 1: curvas y superficies*. Distrito Federal: Universidad Nacional Autónoma de México.
- [20] Rudin, Walter (1987). *Real and Complex Analysis*. Singapore: McGraw-Hill Book Company.
- [21] Schiffer, Menahem (1966). Half-Order differential on Riemann surface. *SIAM Journal on applied mathematics*, 14 (4), 922–934.
- [22] Singer, David A. (2001). Diffeomorphisms of The Circle and Hyperbolic Curvature. *Conformal Geometry and Dynamics. An Electronic Journal of the American Mathematical Society*, 5 (1), 1–5.
- [23] Strebel, Kurt (1984). *Quadratic Differentials*. Berlin: Springer-Verlag.
- [24] Sylvester, James Joseph (2012). *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester. Volumen 4*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [25] Tevelev, Evgueni A. (2005). *Projective Duality and Homogeneous Spaces*. Alemania: Springer-Verlag.
- [26] Tu, Loring W. (2011). *An Introduction to Manifolds: second edition*. New York: Springer.
- [27] Tyurin, Andrei N. (1978). On periods of Quadratic Differentials. *Russian Mathematical Surveys*, 33 (6), 169–221.

- [28] Willmore, Thomas J. (2013). *An Introduction to Differential Geometry*. New York: Dover Publication.