



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

**ONDAS DE BRILL Y AGUJEROS NEGROS EN RELATIVIDAD NUMÉRICA EN
AXISIMETRÍA**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ERIK RODRIGO JIMÉNEZ VÁZQUEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORIAL

DR. DARÍO NUÑEZ ZÚÑIGA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. JOSÉ OCTAVIO VALENZUELA TIJERINO
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO. JUNIO, 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Prefacio	V
1. Descomposición 3+1	1
1.1. Introducción	1
1.2. Ecuaciones ADM	4
1.3. Formulación BSSN	4
1.3.1. Formulación BSSN generalizada	6
1.4. Condiciones de norma	8
1.5. Condiciones de frontera	10
1.6. Datos iniciales tipo Brill-Lindquist	10
1.7. Agujeros negros	11
1.7.1. Agujero negro de Schwarzschild	12
1.7.2. Agujeros negros estacionarios	13
1.7.3. Evolución de agujeros negros	15
1.8. Disipación artificial	17
1.9. Tipos de singularidad	17
2. El campo electromagnético en el formalismo 3+1	19
2.1. Ecuaciones de Maxwell en el formalismo 3+1	19
2.2. Tensor de energía-momento del campo electromagnético	21
2.3. El sistema Einstein-Maxwell	22
2.4. Datos iniciales para agujeros negros cargados	23
3. Relatividad numérica axisimétrica	26
3.1. Espacios axisimétricos	26
3.1.1. Regularización en el eje	28
3.2. Sistema BSSN en simetría axial	30
3.3. Código OllinAxis en simetría axial	32
3.3.1. Código para la evolución	32
3.3.2. Resolvedor elíptico	32
3.3.3. Buscador de horizontes	34
3.3.4. Extractor de ondas gravitacionales y ondas electromagnéticas	35
4. Horizontes aparentes en axisimetría	36
4.1. Algoritmo de búsqueda	36
4.1.1. Pruebas numéricas en simetría esférica.	39
4.2. Horizontes aparentes de agujeros negros	40
4.2.1. Horizonte de Schwarzschild	40

4.2.2. Formación de horizontes en la colisión frontal de agujeros negros	44
5. Extracción de radiación	47
5.1. Extracción de ondas gravitacionales	47
5.1.1. Ecuaciones linealizadas de Einstein	47
5.1.2. El tensor de Weyl y el formalismo de Newmann-Penrose	50
5.1.3. Escalares de Weyl	51
5.1.4. Energía radiada por ondas gravitacionales	52
5.2. Extracción de ondas electromagnéticas	54
5.2.1. Estimación clásica de la energía emitida	55
5.3. Descomposición multipolar	57
5.4. Ondas de Teukosky	58
5.4.1. Pruebas numéricas	59
5.5. Extracción de radiación en la colisión de agujeros negros	61
6. Ondas de Brill	70
6.1. Ecuación elíptica para el factor conforme	71
6.2. Comparación de soluciones	72
6.2.1. Masa y factor conforme	72
6.2.2. Horizonte aparente	76
6.3. Colapso de ondas de Brill	78
6.3.1. Pruebas numéricas	79
7. Conclusiones	85
A. Integrales de masa, momento y carga	87
A.1. Integrales ADM	87
A.2. Integral de carga	88
B. Clasificación de Petrov	89
C. Construcción de una tétrada ortonormal	92
C.1. Transformación a coordenadas esféricas	92
C.2. Construcción de una tétrada ortonormal	93
Bibliografía	94

Prefacio

En 1915 Albert Einstein daría a conocer su teoría general de la relatividad [1, 2] cambiando el entendimiento de los fenómenos gravitacionales, esta teoría sustituye a la acción de las fuerzas Newtonianas como las responsables del movimiento por una formulación geométrica, en el que el movimiento de los cuerpos está ligado con la curvatura del espaciotiempo. Las ecuaciones de la teoría están expresadas en forma covariante y en cuatro dimensiones es un conjunto de diez ecuaciones no lineales en derivadas parciales de segundo orden para la métrica. A pesar de su aparente sencillez conceptual, rápidamente Einstein notó su complicada estructura matemática y conjeturó que no tenía soluciones exactas, para su sorpresa Karl Schwarzschild obtuvo la primera solución analítica a las ecuaciones de Einstein asumiendo simetría esférica, lo cual deja entrever que para encontrar soluciones exactas se necesitan altos grados de simetría. Además de su complejidad, el hecho de que esté formulada en una forma covariante dificulta la interpretación como un sistema de ecuaciones dinámico para el campo gravitacional, es decir, se pierde el sentido de un sistema determinista en el que a partir de condiciones iniciales se puede conocer completamente el estado del sistema.

Existen diversas formas de recuperar la noción intuitiva de la evolución temporal de las ecuaciones de Einstein y las diferencias radican en cómo se realiza la separación del espacio y tiempo. Aún con este método encontrar soluciones analíticas no es sencillo y es inevitable pensar en el uso de métodos numéricos para resolver las ecuaciones de campo de Einstein. La relatividad numérica tiene sus inicios con el trabajo pionero de Hahn y Lindsquist [3] en el que intentan estudiar el comportamiento de dos cuerpos bajo su propia interacción (en ese entonces el término agujero negro no había sido acuñado por John Wheeler), a pesar de no obtener resultados satisfactorios, la semilla estaba plantada y con el desarrollo matemático y computacional, hoy en día es una rama muy fructífera de la física.

Con las recientes detecciones directas de la señal de ondas gravitacionales de la colisión de dos agujeros negros, eventos conocido como GW150914, GW151226, GW170104, GW170814 [4–7] y de la colisión de dos estrellas de neutrones GW170817 [8] con su contraparte electromagnética, resalta la contribución del área de relatividad numérica en la creación de catálogos de señales, pues sin ello la búsqueda de la señal sería imposible en el vasto flujo de datos.

Si bien la relatividad numérica es un área madura, en la que se cuenta con códigos robustos para la simulación, tales como el Einstein Toolkit [9] el cual es capaz evolucionar un sistema en $3 + 1$ dimensiones, la creación de códigos adaptados a las simetrías del problema de interés permiten utilizar los recursos de cómputo con mayor eficiencia. Las simetrías generalmente empleadas son la simetría esférica y axial y en el grupo de relatividad numérica del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM se cuentan con dos códigos adaptados a estas simetrías OllinSphere y OllinAxis

respectivamente. Ambos están escritos utilizando las variables de la formulación BSSN y aunque al utilizar este sistema en coordenadas curvilíneas aparecen una serie de dificultades asociados a que la formulación no es covariante y a la elección de un sistema coordenado que no se encuentra bien definido en el origen (simetría esférica) o eje de simetría (simetría axial), estos son subsanados introduciendo una generalización de la formulación y realizando un proceso de regularización.

El código OllinAxis fue escrito por J. Torres para su trabajo de tesis doctoral [10]. OllinAxis puede usarse en paralelo en clústers usando las librerías MPI y fue probado con simulaciones sobre la dinámica de norma evolucionando un espacio de Minkowski tomando una foliación no trivial, un campo escalar real de perfil gaussiano y la colisión de agujeros negros cargados. El código únicamente puede dar información sobre la evolución de las variables de norma, la métrica e información sobre la curvatura. El propósito de este trabajo está enfocado en complementar el código OllinAxis con rutinas de extracción de ondas gravitacionales y electromagnéticas y un buscador de horizontes aparentes realizando algunas pruebas numéricas para verificar su correcta calibración.

La estructura de la tesis es la siguiente: en el capítulo 1 se presenta el formalismo $3 + 1$ que permite separar el tiempo del espacio, las ecuaciones de evolución en el formalismo BSSN, el procedimiento para obtener datos iniciales de agujeros negros neutros del tipo Brill-Lindquist, su evolución numérica y una breve descripción de singularidades asociadas a la elección de norma. El capítulo 2 presenta la descomposición en el formalismo $3 + 1$ de las ecuaciones de Maxwell y la construcción de datos iniciales para agujeros negros cargados. El capítulo 3 expone la formulación BSSN asumiendo adaptado a un sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, z, φ) y en simetría axial, una descripción de la estructura de mallas de OllinAxis y el código para resolver ecuaciones elípticas lineales AXELISOL. En el capítulo 4 se introduce el método para encontrar horizontes aparentes y su búsqueda en el caso particular en simetría axial, además de algunos detalles numéricos referente a su implementación y algunos casos de prueba. La teoría para la extracción de ondas gravitacionales y electromagnéticas se expone en el capítulo 5 realizando pruebas para la extracción de ondas gravitacionales con la solución analítica de Teukolsky, y además se verifica su implementación al extraer la onda gravitacional de la colisión frontal de dos agujeros negros cargados. Por último el capítulo 6 aborda superficialmente el problema del colapso de ondas de Brill, primero verificando que el código puede reproducir datos iniciales que son conocidos y luego se busca obtener una simulación estable para amplitudes cercanas a la crítica eligiendo un lapso que evita choques de norma.

Capítulo 1

Descomposición 3+1

1.1. Introducción

Las ecuaciones de Einstein que se emplean en Relatividad General, se escriben de una forma covariante de tal forma que es difícil distinguir entre las direcciones espaciales y la temporal que nos indica una dirección de evolución. Además, la teoría, es invariante ante difeomorfismos por lo que debemos separar los fenómenos físicos dinámicos de los que resultan por la elección de coordenadas.

Existen distintos formalismos para realizar la evolución temporal, la formulación que se utilizará en este trabajo es la formulación 3+1, que consiste foliar el espaciotiempo en hipersuperficies espacialoides, esta idea es obra original de Arnowitt, Dessler y Missner [11] en un contexto diferente, la cuantización de las ecuaciones de Einstein. A partir de ahora asumiremos que la signatura de la métrica es Lorentziana $(-, +, +, +)$ y utilizaremos unidades geométricas, en las que $G = c = 1$.

Para la descomposición, asumiremos que el espacio es globalmente hiperbólico, es decir que la unión de su dominio pasado y futuro cubre al espaciotiempo completo. Utilizando este hecho utilizamos una familia de hipersuperficies Σ_t espacialoides que cubre a todo el espaciotiempo (una variedad M con una 4-métrica) y están parametrizadas por una función t (que no necesariamente coincide con el tiempo propio de algún observador). Asociado a las hipersuperficies se introduce un campo vectorial n^μ normal unitario a Σ_t , que induce una métrica sobre las hipersuperficies,

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (1.1.1)$$

que además es un operador de proyección sobre estas. A la descomposición se añade la función de lapso $\alpha(t, x^i)$ que mide el tiempo propio entre observadores en dirección normal a la hipersuperficie (observadores eulerianos).

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt. \quad (1.1.2)$$

Por último, se introduce el vector de corrimiento o *shift* β^i tangente a las hipersuperficies que mide el cambio en las coordenadas de los observadores eulerianos.

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^i) dt. \quad (1.1.3)$$

Es importante mencionar que la foliación del espaciotiempo no es única, por lo que la función de

lapso α y el vector de corrimiento β^i son libres de definición, es decir son *condiciones de norma*.

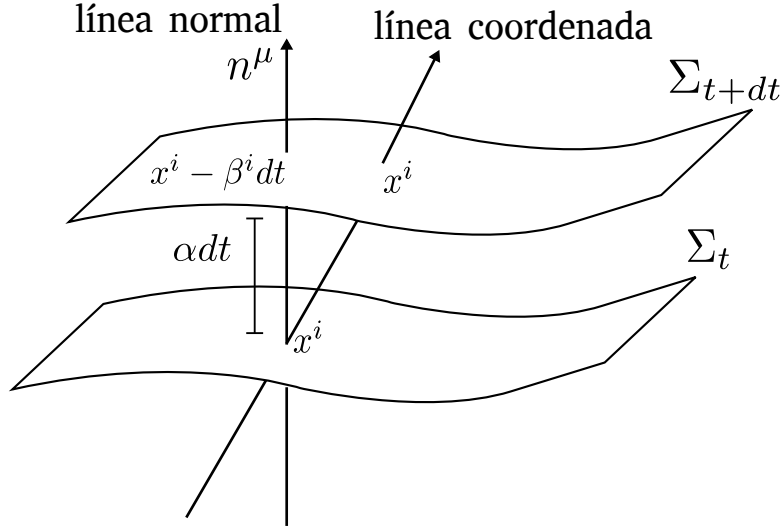


Figura 1.1: Descomposición del espaciotiempo en el lenguaje 3+1. Las funciones de normal α y β nos proporcionan el cambio en el tiempo entre observadores eulerianos y el cambio en las coordenadas espaciales.

El elemento de línea del espacio tiempo es entonces

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.1.4)$$

donde se asume que $\beta_i := \gamma_{ij} \beta^j$ y en general los índices de todos los tensores puramente espaciales son subidos o bajados con la métrica γ_{ij} . Los índices griegos, α, β, \dots correrán de 0, 1, 2, 3 y los latinos i, j, \dots pueden tomar los valores 1, 2, 3. En estas coordenadas el vector normal tiene componentes

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0). \quad (1.1.5)$$

Por último se introduce un elemento que distingue entre la curvatura intrínseca asociada inherentemente a la estructura del espaciotiempo (la variedad) y la extrínseca que se asocia a la forma en que las hipersuperficies se encajan en el mismo. El primer tipo de curvatura se calcula mediante el tensor de Riemann asociado a γ_{ij} , mientras que el segundo tipo se calcula mediante el transporte paralelo del vector normal a lo largo de la hipersuperficie.

La curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ se define mediante el operador de proyección

$$K_{\mu\nu} := -P_{\mu\nu} \nabla_\alpha n_\nu, \quad (1.1.6)$$

donde

$$P_\alpha^\beta := \gamma_\alpha^\beta + n^\alpha n_\beta. \quad (1.1.7)$$

En la forma que se define $K_{\mu\nu}$, este es un tensor únicamente espacial $n^\mu K_{\mu\nu} = n^\nu K_{\mu\nu} = 0$, por lo que únicamente se considera las componentes espaciales K_{ij} y aunque no es obvio, $K_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico. De su definición es posible mostrar que la curvatura extrínseca es la derivada de Lie de la

métrica espacial a lo largo del vector normal,

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{n}}\gamma_{\mu\nu},$$

entonces, si utilizamos las propiedades de la derivada de Lie se obtiene

$$\partial_t\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i, \quad (1.1.8)$$

donde D_i es la derivada covariante asociada a la métrica γ_{ij} .

Resta escribir a las ecuaciones de Einstein en términos de tensores espaciales y sus derivadas temporales, esto se realiza utilizando las ecuaciones de *Gauss-Codazzi* que proyecta el tensor de Riemann de cuatro dimensiones a las hipersuperficies espaciales

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma R_{\delta\kappa\lambda\sigma} = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} + K_{\alpha\mu}K_{\beta\nu} - K_{\alpha\nu}K_{\beta\mu}, \quad (1.1.9)$$

y la proyección de la contracción del vector normal con el tensor de Riemann está dada por las ecuaciones de *Codazzi-Mainardi*

$$P_\alpha^\delta P_\beta^\kappa P_\mu^\lambda n^\nu R_{\delta\kappa\lambda\nu} = D_\beta K_{\alpha\mu} - D_\alpha K_{\beta\mu}. \quad (1.1.10)$$

Empleadas en el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, se obtienen dos identidades

$$2G_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = {}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu}, \quad (1.1.11)$$

$$G_{\alpha\beta}\gamma_\beta^\alpha n^\beta = {}^{(3)}\nabla_\beta K^b_a - {}^{(3)}\nabla_\alpha K. \quad (1.1.12)$$

y una identidad para el escalar de Ricci

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R - K^2 + K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} - 2{}^{(4)}\nabla_\alpha \left(n^\beta {}^{(4)}\nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha {}^{(4)}\nabla_\beta n^\beta \right). \quad (1.1.13)$$

Al utilizar (1.1.11) y (1.1.12) en las ecuaciones de Einstein resultan en la constricción hamiltoniana

$$H := \frac{1}{2} \left({}^{(3)}R + K^2 - K_{\mu\nu}K^{\mu\nu} \right) - 8\pi\rho = 0, \quad (1.1.14)$$

y la de momentos

$$M^\alpha := D_\mu(K^{\alpha\mu} - \gamma^{\alpha\mu}K) - 8\pi j^\alpha, \quad (1.1.15)$$

con

$$\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}, \quad j^i := -P^{i\mu} n^\nu T_{\mu\nu}, \quad (1.1.16)$$

con ρ la densidad de energía local y j^i la densidad de momentos ambos medidos por observadores Eulerianos. Reciben el nombre de constricción porque no involucran derivadas en el tiempo y además son independientes de la elección de norma α y β^i por lo que se deben de cumplir sobre cada hipersuperficie. Notemos que las constricciones son cuatro de las diez ecuaciones de campo de Einstein, por lo que el resto deben ser las ecuaciones dinámicas.

1.2. Ecuaciones ADM

Utilizando las relaciones de Gauzz-Codazzi y Codazzi-Mainardi, obtenemos las ecuaciones de evolución de la curvatura extrínseca que suman las seis restantes

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &+ \alpha \left[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \right] + 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}], \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

donde $S_{\mu\nu} := P_\nu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía-momento medido por los observadores eulerianos ($S := S_\mu^\mu$). A esta expresión se le conoce como ecuaciones ADM (por Arnowitt, Dessser y Missner). Si bien, esta no es la forma original con que la presentaron, la expresión (1.2.1) se debe a York [12] y se denominan como las ecuaciones ADM estándar o formulación ADM à la York.

Las diferencias principales entre ambas formas se debe a que en la formulación ADM las variables son la métrica γ_{ij} y su canónica conjugada π_{ij} , el cual parecería un cambio menor pero la ecuación que se obtiene para la evolución de K_{ij} es

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ij} &= -D_i D_j \alpha + \alpha \left[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \right] \\ &+ 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] - \frac{\alpha \gamma_{ij}}{2} H \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

notemos que la diferencia es un múltiplo de la constricción hamiltoniana, además la versión de ADM se obtiene a partir del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ y la versión de York en términos del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Si bien ambas ecuaciones describen el mismo fenómeno físico, matemáticamente no son equivalentes debido a que el espacio fase de soluciones es distinto y solo son equivalentes en una sección del mismo, por otro lado, al realizar simulaciones numéricas debido al error introducido, el que una solución sea estable ante las perturbaciones o no es crucial puesto que ambos esquemas son iguales solo si la solución es exacta. Otro punto importante es que ambas formas no son matemáticamente equivalentes en el concepto de hiperbolicidad de las ecuaciones diferenciales [13]. Si inicialmente se violan las constricciones hamiltoniana y de momentos, en la formulación de York se propagan a la velocidad (coordenada) de la luz, mientras que en la original de ADM éstas se acumulan y crecen.

1.3. Formulación BSSN

En la sección anterior se obtuvo diferentes formulaciones válidas al agregar múltiplos de las constricciones, sin embargo ninguna de las formulaciones anteriores es lo suficientemente robusta (fuertemente hiperbólica [14]) para ser usada en la práctica. Otro punto a considerar es que el modelo de York no es un problema bien puesto en el sentido de que la norma de la solución no permanece acotada por la norma de la condición inicial

$$\|u(t, x)\| \leq k e^{\sigma t} \|u(0, x)\|, \quad (1.3.1)$$

donde k y σ son constantes independientes de las condiciones iniciales.

En 1987 Oohara, Nakamura y Shibata presentaron una reformulación de las ecuaciones ADM usando una descomposición conforme, mostrando que la estabilidad era mejor comparada a las ecuaciones ADM originales [15]. Trabajos posteriores de Baumgarte y Shapiro [16] mostraron que la descomposición conforme tenía una estabilidad superior en casos de prueba, como consecuencia la formulación ganó popularidad y actualmente usada en la mayoría de códigos de relatividad numérica.

La formulación más común actualmente es basada en los trabajos de Shibata, Nakamura, Baumgarte y Shapiro es conocida como Formulación BSSN. En ella se introduce un factor conforme

$$\tilde{\gamma}_{ij} := e^{-4\phi} \gamma_{ij}, \quad (1.3.2)$$

en el que el factor ϕ se elige tal que el determinante de la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$ sea igual a uno

$$\phi = \frac{1}{12} \ln \gamma, \quad (1.3.3)$$

con γ el determinante de la métrica física γ_{ij} . La ecuación de evolución para ϕ se obtiene a partir de (1.1.8)

$$\frac{d}{dt} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K,$$

donde se ha definido $d/dt := \partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}$ y usado el hecho de que ϕ es una densidad tensorial de peso $1/6$ ¹. Adicionalmente se definen el tensor de curvatura extrínseca conforme sin traza como una variable independiente

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi} \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right), \quad (1.3.4)$$

y las funciones de conexión conforme

$$\tilde{\Gamma}^i := \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\partial_j \tilde{\gamma}^{ij}. \quad (1.3.5)$$

En las nuevas variables $\{\phi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}\}$, las ecuaciones de evolución se obtienen usando las ecuaciones ADM (1.1.8), (1.2.1).

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij}, \quad (1.3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K, \quad (1.3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \{-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} + 4\pi \alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}]\}^{TF} \\ &+ \alpha \left(K \tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_i^k \tilde{A}_j^k \right), \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

$$\frac{d}{dt} K = -D_i D^i \alpha + \alpha \left(\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (\rho + S), \quad (1.3.9)$$

¹Recordemos que de forma general, la derivada de Lie de una densidad tensorial T con peso ω está dada por $\mathcal{L}_{\vec{\beta}} T = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} T \Big|_{\omega=0} + \omega T \partial_k \beta^k$.

donde TF se refiere a la parte sin traza de la cantidad entre llaves y los índices de los tensores se bajan y suben con la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij} = e^{4\phi}\gamma_{ij}$. Se debe de tener cuidado al calcular las derivadas de Lie de las cantidades $\psi, \tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{A}_{ij}$ puesto que son densidades tensoriales con peso $1/6, -2/3, -2/3$ respectivamente.

Por último las constricciones hamiltoniana (1.1.14) y de momentos (1.1.15) toman la forma

$$R = \tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} - \frac{2}{3}K^2 + 16\pi\rho \quad (1.3.10)$$

$$\partial_j\tilde{A}^{ij} = -\tilde{\Gamma}_{jk}^i\tilde{A}^{jk} - 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi + \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK + 8\pi e^{4\phi}j^i \quad (1.3.11)$$

Las funciones de conexión (1.3.5) permiten tener un mejor control sobre las condiciones de shift (se verá en la siguiente sección) y al ser introducidas como variables independientes, el tensor de Ricci \tilde{R}_{ij} se escribe como un operador laplaciano $\tilde{\gamma}^{lm}\partial_l\partial_m\tilde{\gamma}_{ij}$ y las segundas derivadas de la métrica se escriben con las funciones de conexión $\tilde{\Gamma}^i$. La ecuación de evolución para $\tilde{\Gamma}^i$

$$\frac{d}{dt}\tilde{\Gamma}^i = \tilde{\gamma}^{jk}\partial_j\partial_k\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_j\partial_k\beta^k - 2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha + 2\alpha\left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i\tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi\tilde{j}^i\right), \quad (1.3.12)$$

donde $\tilde{j}^i = e^{4\phi}j^i$. En resumen, el sistema BSSN queda conformado por las ecuaciones (1.3.7),(1.3.8),(1.3.9), (1.3.9) y (1.3.12).

1.3.1. Formulación BSSN generalizada

De la forma introducida, la formulación BSSN no está descrita en términos de cantidades tensoriales haciendo difícil su uso en coordenadas curvilíneas. La forma de generalizar la formulación consiste en introducir una métrica de fondo $\hat{\gamma}_{ij}$ conocida a todo tiempo y fija. A partir de aquí se usará \hat{T} para denotar las variables conformes en lugar de \tilde{T}

$$\hat{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi}\gamma_{ij}, \quad (1.3.13)$$

$$\phi = \frac{1}{12}\ln(\gamma/\hat{\gamma}), \quad (1.3.14)$$

$$\hat{A}_{ij} = e^{-4\phi}\left(K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K\right), \quad (1.3.15)$$

y se pedirá que $\hat{\gamma}(t=0) = \hat{\gamma}$, con $\hat{\gamma}$ el determinante de la métrica plana. Al hacer este cambio se sugiere dos tipos de evolución para $\hat{\gamma}$:

1. $\partial_t\hat{\gamma} = 0$. Llamada la versión “Lagrangiana”, en esta elección el determinante se mantiene constante a lo largo de líneas temporales.
2. $\partial_t\hat{\gamma} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}\hat{\gamma} = 0$. La versión “Euleriana”, $\hat{\gamma}$ permanece constante a lo largo de los observadores Eulerianos.

Claramente estas dos elecciones coinciden cuando el vector de corrimiento es cero, pero en general no lo son. La evolución para $\hat{\gamma}$ se describe mediante

$$\partial_t \hat{\gamma} = \sigma \left(2\hat{\gamma} \hat{\nabla}_m \beta^m \right), \quad (1.3.16)$$

con $\sigma = 0, 1$ para la versión Lagrangiana y Euleriana respectivamente. Con esto podemos encontrar la evolución para ϕ

$$\frac{d}{dt} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} \sigma \hat{\nabla}_m \beta^m, \quad (1.3.17)$$

donde nuevamente $d/dt = \partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}$. El resto de ecuaciones de evolución se pueden encontrar de forma similar y son derivadas en [17], por lo que solo me limitaré a mencionar la modificación de las funciones de conexión conforme. Usando la métrica de fondo definimos una nueva variable de conexión

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^i &:= \hat{\gamma}^{ij} \hat{\Delta}_{jk}^i = \hat{\gamma}^{ij} \left(\hat{\Gamma}_{jk}^i - \overset{\circ}{\Gamma}_{jk}^i \right) \\ &= -\overset{\circ}{\nabla}_j \hat{\gamma}^{ij} - \frac{1}{2} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j \ln(\hat{\gamma}/\overset{\circ}{\gamma}). \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

que usamos para definir una constricción

$$\mathcal{C}_{\Delta}^i := \hat{\Delta}^i + \overset{\circ}{\nabla}_j \hat{\gamma}^{ij} + \frac{1}{2} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j \ln(\hat{\gamma}/\overset{\circ}{\gamma}) = 0. \quad (1.3.19)$$

Usando las definiciones del tensor $\hat{\gamma}_{ij}, \hat{A}_{ij}, \phi$, la traza de la curvatura K y el vector $\hat{\Delta}^i$, la constricción hamiltoniana y de momentos toman la forma

$$0 = H = \frac{1}{2} \left(R - e^{-4\phi} \hat{\nabla}_m \mathcal{C}_{\Delta}^m - \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} + \frac{2}{3} K^2 \right) - 8\pi\rho, \quad (1.3.20)$$

$$0 = M_i = \hat{\nabla}_j \hat{A}_i^j + 6\hat{A}_i^j \partial_j \phi - \frac{2}{3} \partial_i K - 8\pi j_i. \quad (1.3.21)$$

Por último, las ecuaciones de evolución son

$$\frac{d}{dt} \hat{\gamma}_{ij} = -2\alpha \hat{A}_{ij} - \frac{2}{3} \sigma \hat{\gamma}_{ij} \hat{\nabla}_m \beta^m, \quad (1.3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = -\frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} \sigma \hat{\nabla}_m \beta^m, \quad (1.3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \left\{ \alpha R_{ij} - {}^{(3)}\nabla_i^{(3)} \nabla_j \alpha - 8\pi \alpha S_{ij} \right\}^{TF} \\ &+ \alpha \left(K \hat{A}_{ij} - 2\hat{A}_{ka} \hat{A}_b^k \right) - \frac{2}{3} \sigma \hat{A}_{ij} \hat{\nabla}_m \beta^m, \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

$$\frac{d}{dt} K = \alpha \left(\hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) - {}^{(3)}\nabla^2 \alpha + 4\pi(\rho + S), \quad (1.3.25)$$

donde $\sigma = 0, 1$ si la evolución es Lagrangiana o Euleriana respectivamente. La ecuación de evolución

asociada a los vectores $\hat{\Delta}^i$ es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\Delta}^i &= \hat{\gamma}^{jk}\hat{\nabla}_j\hat{\nabla}_k\beta^i - 2\hat{A}^{ij}\partial_j\alpha - \alpha(2-\xi)\hat{\nabla}_j\hat{A}^{ij} + 2\alpha\hat{A}^{jk}\hat{\Delta}_{jk}^i \\ &+ \alpha\xi\left(6\hat{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\hat{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi\hat{\gamma}^{im}j_m\right) \\ &+ \frac{\sigma}{3}\left[\hat{\nabla}^i\left(\hat{\nabla}_m\beta^m\right) + 2\hat{\Delta}^i\hat{\nabla}_m\beta^m\right], \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

en el que se toma $\xi > 1/2$ para tener un sistema fuertemente hiperbólico. En la práctica se toma $\xi = 2$, con esta condición, todos los campos no asociados a la foliación se propagan a lo largo de los conos de luz.

1.4. Condiciones de norma

En la formulación ADM o BSSN, se tienen cuatro grados de libertad que están especificados por la función de lapso α , llamada condición de foliación y la condición de corrimiento descrita por β^i .

La primera elección natural para ambos es elegir $\alpha = 1$ y $\beta^i = 0$, a esta elección se le denomina foliación *Geodésica*. Sin embargo, esta elección no provee de simulaciones estables en la mayoría de los casos dado que los observadores siguen las coordenadas normales (se encuentran en caída libre) y eventualmente pueden colisionar entre ellos ocasionando que el sistema de coordenadas no se encuentre bien definido. Matemáticamente esto se observa a partir de la definición de la curvatura extrínseca

$$\nabla_\mu n^\mu = -K, \quad (1.4.1)$$

junto con el cambio del elemento de volumen asociado a los observadores Eulerianos

$$\partial_t \ln \gamma^{1/2} = -\alpha K + D_i \beta^i, \quad (1.4.2)$$

y de las ecuaciones (1.1.8) y (1.2.1)

$$\partial_t K - \beta^i \partial_i K = \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)], \quad (1.4.3)$$

para la foliación geodésica, al ser el lado derecho de la ecuación siempre positiva (si se satisface la condición de energía fuerte), implica que K será una función creciente ocasionando que el elemento volumen tienda a cero y por lo tanto que se desarrolle una patología en el sistema coordenado².

Este hecho sugiere imponer que el elemento de volumen permanezca constante

$$K = \partial_t K = 0, \quad (1.4.4)$$

con esta elección obtenemos la ecuación para el *lapso maximal*

$$D^2 \alpha = \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)] \quad (1.4.5)$$

²Por ejemplo, en el espacio de Schwarzschild, el tiempo que le toma a una partícula inicialmente en reposo llegar a la singularidad partiendo del horizonte de eventos es $t = \pi M$. Si uno evoluciona numéricamente este espacio, es de esperar que empleando la foliación geodésica, el código deje de funcionar en ese tiempo.

que recibe su nombre debido a que la superficie con $K = 0$ es la superficie con mayor volumen respecto a pequeñas variaciones de la superficie espacialoide.

Una propiedad valiosa del lapso maximal es que las hipersuperficies espaciales no se acercan a las singularidades físicas, es decir, evitan las singularidades. Cerca de una singularidad, el volumen tiende a cero (o diverge) pero al haber impuesto la condición de que el volumen se mantenga constante, el lapso α tiende a cero de forma exponencial [18], a este fenómeno se le denomina *colapso del lapso*. Una desventaja de este comportamiento (del colapso del lapso) es que en las regiones externas al horizonte de eventos del agujero negro, el tiempo sigue transcurriendo, pero en las internas el tiempo se ha detenido de forma efectiva. Esto ocasiona que en las hipersuperficies de tiempo constante Σ_t la foliación se distorsione ocasionando grandes gradientes (en inglés se conoce como *slice stretching*), resultando en el colapso de la simulación numérica. Otra desventaja es referente al tiempo de cómputo. La ecuación para el lapso maximal es una ecuación diferencial elíptica y en la práctica el tiempo de cómputo es alrededor del 90 % del total de la evolución, esto motivó a encontrar otras evoluciones para el lapso, encontrando el lapso $1 + \log$ en el que el lapso toma el valor $\alpha = 1 + \ln \gamma$ y permitía simulaciones estables en la práctica.

Esta condición se puede obtener a partir de la solución de *Bona-Masso* [19] que es una ecuación diferencial del tipo hiperbólica para α

$$\frac{d}{dt}\alpha = -\alpha^2 f(\alpha)K, \quad (1.4.6)$$

con $f(\alpha)$ una función arbitraria positiva definida de α que garantiza que la velocidad de propagación de los campos de norma

$$v_g = \alpha \sqrt{f \gamma^{ii}}, \quad (1.4.7)$$

sea positivo y el sistema de ecuaciones de evolución fuertemente hiperbólico. Dentro de las posibilidades para f dos elecciones son destacadas.

- $f = 1$. Llamada la condición *armónica* para el lapso y recibe este nombre por obtenerse también a partir de la definición de coordenadas armónicas

$$\square x^\alpha = g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\nu x^\alpha = 0. \quad (1.4.8)$$

y simplificar la parte temporal de $\Gamma^\alpha = \gamma^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$.

- $f = N/\alpha$, con N una constante. La elección de $N = 2$ provee la foliación $1 + \log$ en el caso de tener $\beta^i = 0$. Empíricamente se ha observado ser muy robusta en espaciotiempos con fuerte interacción gravitacional [20], [21].

La importancia de la elección del lapso $1 + \log$ es que además de evitar la singularidad [22], el tiempo de cómputo es menor pues se puede mostrar que sigue una ecuación de tipo onda o es una condición algebraica en el caso de vector de corrimiento nulo.

Por último resta especificar el vector de corrimiento β^i . Una elección natural resulta $\beta = 0$ pero esta elección no siempre es la adecuada, por ejemplo, en simulaciones de agujeros negros, el horizonte

crecerá rápidamente pues los observadores se encuentran en caída y eventualmente abarcará el dominio computacional.

Una condición empírica se conoce como *Gamma Driver* y fue propuesta por Alcubierre [20]

$$\partial_t^2 \beta^i = c_2 \partial_t \hat{\Gamma}^i - \eta \partial_t \beta^i, \quad (1.4.9)$$

donde c_2 es un parámetro de propagación de los modos longitudinales del shift y η agrega términos de disipación para evitar oscilaciones grandes. Típicamente $c_2 = 3/4$ y $\eta = 2/M_{ADM}$ pues tiene dimensiones del inverso de longitud y debe ser reescalado con la masa ADM del espaciotiempo.

1.5. Condiciones de frontera

Generalmente los fenómenos en gravitación tienen condiciones de frontera asintóticas y a no ser que se use una transformación especial para reducir el dominio infinito a uno finito, debemos introducir fronteras artificiales.

Para los sistemas aislados se propone que en las fronteras la condición sea de tipo Robin en el que la información que llega generalmente se comporta como una onda esférica saliente

$$f = f_0 + h(r - vt)/r \quad (1.5.1)$$

y la condición de frontera se impone como

$$\partial_t f + v \partial_r f + v(f - f_0)/r = 0 \quad (1.5.2)$$

donde v es la velocidad asociada a la onda. A esta condición recibe el nombre de *condición de frontera radiante* o de Sommerfeld. En la práctica este tipo de condiciones introducen reflexiones espurias dentro del dominio por no satisfacer las ecuaciones físicas de forma exacta. El error introducido es minimizado alejando las fronteras³ y al ser espacios asintóticamente planos la velocidad de la onda se toma como la velocidad de la luz $v = c = 1$ para la mayoría de los campos, sin embargo, los campos de norma pueden ser hiperlumínicos, por ejemplo, en la elección para el lapso del tipo Bona-Masso, se toma $v = \sqrt{f}$.

1.6. Datos iniciales tipo Brill-Lindquist

En la descomposición 3+1 se obtienen seis ecuaciones dinámicas de la geometría del espaciotiempo y cuatro constricciones que deben cumplirse durante la evolución. Las constricciones hamiltoniana y de momentos nos obligan a proporcionar datos iniciales para $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ que cumplan estas relaciones pues deben ser soluciones de las ecuaciones de Einstein. En general las constricciones son ecuaciones diferenciales elípticas acopladas por lo que resolver el sistema completo es complicado. Algunas

³Para dar un criterio de la distancia en que se deben de colocar las fronteras se utiliza la masa ADM del sistema, se considera que está suficientemente alejada la frontera si se encuentra alrededor de $r \sim 50M_{ADM}$, aunque con técnicas de mallas adaptativas se pueden situar hasta $100M_{ADM}$ sin requerir de grandes costos de memoria de cómputo.

soluciones analíticas son conocidas ya que se derivan de las ecuaciones de Einstein y únicamente nos servirán para comprobar la validez del código.

La forma más común de encontrar datos iniciales es el procedimiento de York-Lichnerowicz, en el que la métrica física está asociada de manera conforme a una conocida

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \bar{\gamma}_{ij}, \quad (1.6.1)$$

con esto, la constricción hamiltoniana se reescribe como una ecuación elíptica no lineal

$$8\bar{D}^2\psi - \bar{R}\psi + \psi^5 \left(A_{ij}A^{ij} - \frac{2}{3}K^2 \right) + 16\pi\psi^5\rho = 0, \quad (1.6.2)$$

donde A_{ij} es el tensor de curvatura extrínseca sin traza. Por otro lado, la constricción de momentos toma la forma

$$D_j A^{ij} - \frac{2}{3}D^i K - 8\pi j^i = 0. \quad (1.6.3)$$

Existen procedimientos para resolver (1.6.3) pero en este trabajo nos limitaremos a espacios en el que la constricción se resuelva de la forma más simple posible por ejemplo en espacios momentáneamente en reposo o espacios con simetría temporal.

En el caso de tener simetría temporal se tiene $K_{ij} = 0$ y que el dato inicial se de en un instante momentáneamente en reposo, la constricción de momentos automáticamente se satisfacen. La constricción hamiltoniana es la única ecuación a resolver, en el vacío $\rho = 0$ y suponiendo que la métrica $\bar{\gamma}_{ij}$ es conformemente plana $\bar{R} = 0$, la constricción hamiltoniana se simplifica sustancialmente a

$$\bar{D}_{plano}^2\psi = 0. \quad (1.6.4)$$

Una solución no trivial a (1.6.4) y que representa a N agujeros negros momentáneamente en reposo de masa m_i y localizados en \vec{r}_i es

$$\psi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (1.6.5)$$

a esta ecuación se le conoce como datos iniciales de Brill-Lindquist y la masa ADM del espacio es la suma individual de las masas

$$M_{ADM} = \sum_i m_i \quad (1.6.6)$$

1.7. Agujeros negros

Formalmente un agujero negro se define en una región de un espacio tiempo asintóticamente plano como el conjunto de puntos en los que ninguna geodésica con dirección al futuro puede alcanzar al futuro infinito nulo (\mathcal{J}^+). A la frontera de un agujero negro se le llama horizonte de eventos (HE), es decir, un horizonte de eventos es la frontera entre las geodésicas que pueden viajar a infinito y aquellas que no. Nada puede escapar de un agujero negro, ni siquiera la luz. Dentro de un agujero negro se forma una singularidad y si la conjetura de censura cósmica débil se satisface, la singularidad en el interior de un agujero negro está encubierta por su horizonte de eventos, esto

implica que la región dentro del horizonte está causalmente desconectada del espacio exterior a él y no puede influenciarla. Las ecuaciones de Einstein pueden describir el espacio exterior, pero no en su interior dado que se presenta una singularidad en las ecuaciones.

1.7.1. Agujero negro de Schwarzschild

La primera solución exacta a las ecuaciones de Einstein no trivial es la del agujero negro de Schwarzschild. Esta solución representa el campo gravitacional alrededor de un objeto esféricamente simétrico.

$$ds^2 = - (1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.7.1)$$

donde usamos coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ es la diferencial del ángulo sólido. Dentro de sus propiedades se encuentran que es asintóticamente plano y las singularidades que aparecen en $r = 0$ y $r_s = 2M$ conocido como el radio de Schwarzschild. Un hecho interesante de las coordenadas anteriores es que en el dominio $0 \leq r \leq 2M$ las componentes g_{rr} y g_{tt} intercambian sus papeles (t se convierte en espacialoide y r en temporaloide). Regresando a las singularidades, la singularidad en $r = 0$ no es nueva ya que incluso en la teoría newtoniana siempre se obtiene. La pregunta ahora es si la divergencia en $r_s = 2M$ es física o solo una patología debida a nuestra elección de coordenadas. Al calcular el tensor de Riemann podemos obtener una idea de lo que pasa con las fuerzas de marea [13] las cuales son singulares para $r = 0$ como es de esperarse para una partícula puntual pero en $r_s = 2M$ no lo son ⁴. Una forma de construir coordenadas regulares en r_s son las coordenadas de *Eddington-Finkelstein* en el que se reescribe usando una coordenada nula. Otra forma son las coordenadas de *Kruskal-Szekeres* [24, 25] donde se puede apreciar que si un objeto viaja de $r > 2M$ a $r < 2M$ siempre alcanzará la singularidad en $r = 0$ en algún punto de su futuro y a esta región es conocida como *agujero negro*. La superficie $r = 2M$ que separa el interior del agujero negro del exterior, es conocida como *horizonte de eventos*. El área del horizonte $A_H = 4\pi r^2$ está relacionada con su masa

$$M^2 = A_H/16\pi. \quad (1.7.2)$$

En relatividad numérica, la forma que se emplea, es transformar a la métrica en una conformemente plana a través del cambio de coordenadas

$$r = \tilde{r}(1 + 2M/\tilde{r})^2. \quad (1.7.3)$$

Teniendo como resultado

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - 2M/\tilde{r}}{1 + 2M/\tilde{r}} \right) dt^2 + \psi^4 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2) \quad (1.7.4)$$

de donde podemos deducir que el factor conforme es

$$\psi = 1 + M/2\tilde{r}, \quad (1.7.5)$$

⁴Estos coeficientes son similares a los que resultan de calcular la fuerza de marea para una partícula puntual en la teoría newtoniana [23]

y el lapso

$$\alpha^2 = \frac{2\tilde{r} - M}{2\tilde{r} + M}. \quad (1.7.6)$$

Por ser la métrica conformemente plana (que es isotrópica) a \tilde{r} se le conoce como radio isotrópico. En estas coordenadas el horizonte de eventos se encuentra en $\tilde{r} = M/2$.

1.7.2. Agujeros negros estacionarios

La solución más general a un espaciotiempo estacionario⁵ es la métrica de Kerr-Newmann que contiene tres parámetros, la masa M , la carga Q y el momento angular J del agujero negro. Los casos especiales son la métrica de Schwarzschild ($Q = J = 0$), la métrica de Kerr ($Q = 0$) y la métrica de Reissner-Nordström ($J = 0$). Los agujeros negros de Schwarzschild y Kerr son soluciones de vacío, pero en el caso de Reissner-Nordström, el tensor de energía momento adquiere una contribución debido a la presencia de los campos electromagnéticos. El elemento de línea en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, φ) es

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} dt d\varphi + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (1.7.7)$$

donde

$$\Delta := r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr \quad (1.7.8)$$

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (1.7.9)$$

$$a := J/M. \quad (1.7.10)$$

son parámetros libres. Para $a = Q = 0$, se tiene la métrica de Schwarzschild, para $Q = 0$, se obtiene la métrica de Kerr y por último $a = 0, Q \neq 0$ corresponde a la métrica de Reissner-Nordström.

El correspondiente tensor de energía momento escrito como una 2-forma⁶ es [23]

$$F = Q\rho^{-4}(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)dr \wedge [dt - a \sin^2 \theta d\varphi] + 2Q\rho^{-4}ar \cos \theta \sin \theta d\theta \wedge [(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]. \quad (1.7.11)$$

que puede ser obtenida al tomar la derivada exterior de la 1-forma

$$A = - \frac{Qr(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)}{\rho^2}. \quad (1.7.12)$$

En el caso con $a = 0$, identificamos a Q como la carga total del agujero negro y el potencial se

⁵Un espaciotiempo es estacionario si existe un grupo uniparamétrico de isometrías ϕ_t tal que sus curvas integrales sean todas temporaloides, o de forma equivalente que posea un vector de Killing ξ temporaloide.

⁶ $dx^\alpha \wedge dx^\beta = dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha$

reduce

$$A_\mu = -Q/r(1, 0, 0, 0). \quad (1.7.13)$$

Al ser la métrica asintóticamente plana, podemos identificar

$$A^\mu = (\phi, A^i), \quad (1.7.14)$$

con ϕ el potencial escalar eléctrico y A^i el potencial vectorial magnético. De esta forma, obtenemos que $\phi = Q/r$, haciendo consistente que Q sea la carga total del agujero negro, dado que un observador lejano medirá que la carga total es Q .

La métrica (1.7.7) posee dos singularidades, cuando $\Delta = 0$ y $\rho^2 = 0$. La singularidad asociada a $\rho = 0$ es también una de curvatura, pero observemos que para tener esta condición, necesariamente $\theta = \pi/2$ y $r = 0$. Usando la transformación de coordenadas Boyer-Lindquist a cartesianas [26], y reemplazando los valores para θ y r , se obtiene que la singularidad tiene la estructura de un anillo situado sobre el plano xy . Por otro lado, la singularidad $\Delta = 0$ es una singularidad coordenada y corresponde a

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \quad (1.7.15)$$

estas esferas representan horizontes de eventos y están condicionados a $M^2 > Q^2 + a^2$, que en los casos especiales de Reissner-Nordström equivale a $M > |Q|$ y para Kerr $M > |a|$. La relación entre el área del horizonte de eventos y la masa es

$$A_H = 4\pi(r_+^2 + a^2), \quad (1.7.16)$$

esto implica que

$$M^2 = \left(M_{irr} + \frac{Q^2}{4M_{irr}} \right)^2 + \frac{S^2}{4M_{irr}^2}, \quad (1.7.17)$$

donde

$$M_{irr} := \sqrt{A_H/16\pi}, \quad (1.7.18)$$

es la masa irreducible del agujero negro.

La singularidad coordenada puede ser removida de distintas formas, por ejemplo en coordenadas Kerr-Schild, pero para nuestro propósito se utilizarán *coordenadas cuasi-isotrópicas*. Para introducirlas, cambiamos a una coordenada radial \tilde{r} [27]

$$r = \tilde{r} \left(1 + \frac{M + \sqrt{a^2 + Q^2}}{2\tilde{r}} \right) \left(1 + \frac{M - \sqrt{a^2 + Q^2}}{2\tilde{r}} \right), \quad (1.7.19)$$

el horizonte exterior en estas coordenadas se encuentra en

$$\tilde{r}_+ = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{2}, \quad (1.7.20)$$

en estas coordenadas, la métrica se expresa como

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\rho^2} \right) dt d\varphi + \psi^4 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \chi \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (1.7.21)$$

con

$$\psi^4 = \rho^2 / \tilde{r}^2, \quad (1.7.22)$$

$$\chi = \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}. \quad (1.7.23)$$

la parte espacial queda determinada por las funciones ψ y χ , mientras que los coeficientes $g_{t\mu}$ los asociamos a funciones de norma

$$\alpha^2 = \frac{\Delta}{\rho^2 \chi}, \quad (1.7.24)$$

$$\beta_\varphi = -a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\rho^2}, \quad (1.7.25)$$

$$\beta^\varphi = -a \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\rho^4 \chi}. \quad (1.7.26)$$

1.7.3. Evolución de agujeros negros

Al ser los agujeros negros una solución en vacío, es de gran interés el estudio de su evolución, pues son el resultado del colapso gravitacional de objetos compactos y se forman incluso en escenarios donde los datos iniciales son regulares, tales como el colapso de una supernova y el choque de dos estrellas de neutrones. Además al ser una solución en vacío, su estudio es más sencillo, dado que no se involucran ecuaciones para el estudio de la materia, que aunque nos proporcionan fenómenos más ricos para extraer información física, su estudio involucra conocer el comportamiento de las distribuciones de materia. Históricamente, en 1964 Hahn y Lindquist fueron los primeros en estudiar la evolución de agujeros negros sin mucho éxito [3], debido principalmente a que emplearon la formulación ADM de las ecuaciones de Einstein y usaron una foliación geodésica, que como se ha visto, en general no es adecuada para la evolución de cualquier espaciotiempo.

Evolucionar agujeros negros requiere de poder lidiar con las singularidades de curvatura en su interior. En axisimetría es suficiente con usar coordenadas que eviten la singularidad, pero para tener simulaciones estables y de larga duración, este tipo de enfoque puede desarrollar patologías en las coordenadas. Dos métodos usados ampliamente por los grupos de relatividad numérica consisten en remover las singularidades (“excisión”) del interior del agujero negro y el método de mover la puntura (“moving puncture”).

Ejemplos de coordenadas que evitan las singularidades son la foliación maximal y $1 + \log$. El lapso maximal ha mostrado ser lo suficientemente robusto para evolucionar agujeros negros, sin embargo, incluso en Schwarzschild tienden a generar grandes gradientes alrededor de las gargantas de los agujeros negros [28] ocasionando que las simulaciones no sean estables para tiempos de simulación

largos. Por otro lado, la foliación $1 + \log$ ha mostrado ser también robusta en la simulación de agujeros negros y al ser una ecuación del tipo hiperbólica es mucho más sencillo de resolver que la foliación maximal. Sin embargo, al usar $1 + \log$ para punturas, la velocidad de propagación $v = \alpha\sqrt{2\hat{\gamma}^{rr}}/\psi^2$ tiende a cero cuando ψ diverge. Como resultado, el lapso colapsa alrededor de la garganta del agujero negro pero tendrá un valor igual a uno en la puntura y en infinito. Debido a esto, alrededor de la puntura se desarrollan grandes gradientes ocasionando que el código colapse. Una forma de arreglar esto, es considerar un lapso precolapsado a $t = 0$, por ejemplo $\alpha(t = 0) = \psi^{-n}$ con $n \geq 2$, que tiene un valor y gradiente igual a cero en la puntura. Con $n = 2$ en $r \rightarrow \infty$, se recupera el lapso para Schwarzschild en coordenadas isotrópicas.

En lo que respecta a remover las singularidades, este procedimiento consiste en ignorar lo que sucede al interior de un horizonte de eventos. Si la conjetura de censura cósmica se satisface, ningún tipo de información puede salir del horizonte de eventos, por lo tanto, es suficiente con evolucionar el exterior al horizonte y remover de forma numérica su interior. Algunas de las primeras implementaciones numéricas pueden ser consultadas en [21, 29–32]. Es de destacar que Pretorius empleó esta forma de lidiar con singularidades junto con una evolución en coordenadas armónicas generalizadas para resolver por primera vez la fusión de dos agujeros negros en órbita [33].

Por último, en el método de evolución de punturas, se tienen dos procedimientos, en el primero, desarrollado por el grupo de Baker [34, 35] el factor conforme $\phi = \ln \psi$ se evoluciona directamente, incluyendo la singularidad que pudiera contener, por ejemplo en datos iniciales tipo Brill-Lindquist. Por otro lado, Campanelli *et al.* [36] define una nueva función χ

$$\chi := \psi^{-4} = e^{-4\phi}, \quad (1.7.27)$$

cuya ecuación de evolución es

$$\partial_t \chi - \beta^i \partial_i \chi = \frac{2}{3} \chi (\alpha K - \partial_i \beta^i). \quad (1.7.28)$$

Notemos que si ψ cerca de la puntura diverge como $1/r$, χ es $O(r^4)$. Además se debe asegurar que χ nunca sea cero dado que aparece en algunas cantidades como denominador, esto puede hacerse en la práctica fijando un valor numérico muy pequeño. Tener esta ecuación de evolución no implica que las punturas se muevan en la malla, para ello es necesario considerar condiciones de norma apropiadas. Una elección que se ha mostrado lo suficientemente robusta es elegir un lapso del tipo $1 + \log$ precolapsado del tipo $\alpha(t = 0) = \psi^{-n}$, $n \geq 2$ y un vector de corrimiento del tipo Gamma-Driver. Es precisamente la inclusión del vector de corrimiento lo que permite que la puntura se mueva. Típicamente, el vector de corrimiento se elige como cero inicialmente pero la elección de un vector de corrimiento del tipo Gamma-Driver ocasiona que se generen componentes inmediatamente que contrarrestan el estiramiento de la hipersuperficies e incluso, en agujeros negros en órbita, de forma automática adquiere componentes tangenciales que permiten que las punturas orbiten.

1.8. Disipación artificial

Sin importar el campo de estudio, al resolver ecuaciones diferenciales no lineales, se pueden presentar algunas inestabilidades debido a los métodos numéricos empleados. Por ejemplo, en hidrodinámica se pueden formar ondas de choque, ocasionando que los métodos estándar de diferencias finitas formen inestabilidades y se generen oscilaciones de alta frecuencia, este comportamiento es conocido como *fenómeno de Gibbs*. Una forma de lidiar con esto es introducir de forma artificial un término de disipación. La forma estándar para agregar disipación a un método de diferencias finitas es conocida como *disipación de Kreiss-Oliger* [37]. Suponiendo que el sistema se puede escribir como

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \Delta t S(u_m^n), \quad (1.8.1)$$

con S un operador de diferencias finitas espacial. La modificación que se realiza al esquema de diferencias finitas es

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \Delta t S(u_m^n) - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} (-1)^N \Delta_x^{2N} (u_m^n), \quad (1.8.2)$$

donde Δ_x^{2N} es el operador de diferencias finitas centradas de orden $2N$ y ϵ el parámetro de disipación. En el límite continuo, el término de disipación se anulan como Δx^{2N-1} , por lo cual, para tener un esquema consistente se debe pedir que $2N - 1$ sea igual o mayor al orden de discretización. Para un esquema a segundo y cuarto orden, el orden de disipación debe ser de cuarto y sexto orden respectivamente.

1.9. Tipos de singularidad

De las secciones anteriores, es evidente que la elección de norma toma un papel crucial al momento de obtener simulaciones estables, por lo cual una propiedad deseada al momento de evolucionar agujeros negros es la de evitar la singularidad física y además la de prevenir la formación de singularidades. El primer tipo de singularidad es la asociada a las coordenadas y son causadas por el enfoque de las líneas normales a las hipersuperficies Σ_t al momento de evolucionar el espacio en situaciones donde la dinámica es muy fuerte. Bona *et al.* mostró [22] que la familia Bona-Masso (1.4.6) evita el enfoque de singularidades para algunas elecciones de $f(\alpha)$, complementando este estudio, Alcubierre muestra [32] el tipo de comportamiento que debe seguir $f(\alpha)$ a medida que α se aproxima a cero. Pero antes de presentar el resultado es necesario definir el orden de una singularidad.

Se define un enfoque de singularidad como el lugar en el que el elemento de volumen $\gamma^{1/2}$ tiende a cero a una tasa finita, además el orden de la singularidad es m si

$$\gamma^{1/2} \sim (\tau - \tau_s)^m, \quad (1.9.1)$$

con m una potencia constante positiva, τ es el tiempo propio medido por los observadores Eulerianos y τ_s es el tiempo propio en el que ocurre la singularidad. Con esta definición, el resultado de

Alcubierre asume que si f toma la forma $f(\alpha) = A\alpha^n$ para valores cercanos a cero de α , se tiene el siguiente comportamiento

- Si $n < 0$ se evita la singularidad de forma fuerte, es decir que en un tiempo finito coordinado el lapso se detiene antes de alcanzar la singularidad.
- Si $n = 0$ y $mA \geq 1$, se evita la singularidad de forma marginal. En este caso el lapso y el elemento de volumen se hacen cero en un tiempo infinito coordinado pero en un tiempo finito coordinado se puede estar cerca de la singularidad.
- Para los dos casos $n > 0$ o $n = 0$ con $mA < 1$ no se evita la singularidad aún cuando el lapso colapse a cero.

Notemos que la elección de $n = -1$ representa a la foliación $1 + \log$ y por lo tanto, esta elección garantiza que se evita la singularidad física de forma fuerte.

El segundo tipo de singularidad es el asociado a la elección de la norma. A pesar de que la elección de la familia Bona-Masso (1.4.6) provee un sistema que es fuertemente hiperbólico, se pueden presentar singularidades en las soluciones que son patologías debida a la elección de la norma [32, 38–40]. Sin entrar en detalles, este tipo de singularidad se origina en lugares donde las líneas características asociadas a la propagación de la norma se intersectan y están asociados a regiones en que las hipersuperficies espaciales dejan de ser suaves, por esta similitud a las ondas de choque de hidrodinámica, se les llama *choques de norma*.

Es importante mencionar que a diferencia de las ondas de choque en hidrodinámica las cuales pueden extender su evolución por medio de constricciones físicas (conocidas como condición de entropía), los choques de norma no deben ser extendidos dado que son una patología del sistema coordinado elegido y no se tiene una restricción física para determinar su continuación.

Alcubierre muestra que una condición general para evitar choques de norma es elegir a f de la forma [32]

$$1 - f - \alpha f' / 2 = 0, \tag{1.9.2}$$

el cual es trivialmente integrado para f

$$f(\alpha) = 1 + \kappa / \alpha^2, \tag{1.9.3}$$

con κ una constante. Notemos que la elección $f = 1$ (lapso armónico) satisface la condición pero $f = 2/\alpha$ (lapso $1 + \log$) no satisfacen la ecuación (1.9.2). Si se toma una elección arbitraria para f , en general no significa que se formará un choque de norma. Que un choque de norma se forme o no, dependerá de las condiciones iniciales, aunque en principio, siempre se pueden formar. Otro punto a considerar es que si $\kappa \neq 0$, $f \sim \alpha^{-2}$ para valores pequeños de α y se evitará de forma fuerte la singularidad (como se vio en las singularidades coordinadas), sin embargo, el costo a pagar es que α puede tomar valores negativos⁷ y será consistente si la evolución converge.

⁷Un ejemplo de lapso negativo se obtiene si consideramos la extensión maximal de Schwarzschild, en coordenadas de Kruskal-Szekeres el lapso maximal es negativo en la región exterior extendida de Schwarzschild [28].

Capítulo 2

El campo electromagnético en el formalismo 3+1

En la sección anterior se presentó la teoría sobre la colisión de dos agujeros negros neutros. Un sistema ligeramente más complicado y que podría tener una contraparte observacional, es la colisión de dos agujeros negros cargados. Un agujero negro cargado puede originarse de un agujero negro inicialmente neutro que se encuentra inmerso en un campo magnético. El agujero negro acretará carga hasta un valor de $Q = 2B_0J$, donde B_0 es la intensidad del campo magnético y J el momento angular del agujero negro [41]. A pesar de que el valor de la carga es pequeño comparado a la masa del agujero negro, en la colisión se generarán ondas electromagnéticas que transporten parte de la energía inicial del sistema, las cuales posiblemente tendrán un efecto sobre la señal de ondas gravitacionales generada, distinguiéndola de la colisión de dos agujeros negros sin carga.

2.1. Ecuaciones de Maxwell en el formalismo 3+1

La descripción realizada aquí está enteramente basada en [42]. Para realizar la descripción, se parte de las ecuaciones de Maxwell en su forma covariante

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi j_{em}^\nu, \quad (2.1.1)$$

$$\nabla_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \quad (2.1.2)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.1.3)$$

$$F^{*\mu\nu} := -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (2.1.4)$$

es el tensor de Faraday y su dual. $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ es el tensor de Levi-Civita

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} +|g|^{1/2} & \text{para permutaciones pares de } 0,1,2,3 \\ -|g|^{1/2} & \text{para permutaciones impares de } 0,1,2,3 \\ 0 & \text{si dos índices son iguales} \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Para descomponer las ecuaciones (2.1.1),(2.1.2) en el lenguaje 3 + 1 se realizará un procedimiento similar al realizado con las ecuaciones ADM. Para un tensor 2, 0, se puede descomponer de la siguiente forma

$$H^{ab} = {}^{(3)}H^{ab} + n^a {}^{(3)}H^{\perp b} + {}^{(3)}H^{a\perp} n^b + H^{\perp\perp} n^a n^b, \quad (2.1.6)$$

con

$${}^{(3)}H^{ab} := P^a_c P^b_d H^{cd}, \quad (2.1.7)$$

$${}^{(3)}H^{\perp b} := -n_c P^b_d H^{cd}, \quad (2.1.8)$$

$${}^{(3)}H^{a\perp} := -n_c P^a_d H^{dc}, \quad (2.1.9)$$

$$H^{\perp\perp} := n_a n_b H^{ab}. \quad (2.1.10)$$

En el caso particular del tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$, por ser antisimétrico $F^{\perp\perp} = 0$. El tensor de Faraday, queda como

$$F^{\mu\nu} = {}^{(3)}F^{\mu\nu} + n^\mu {}^{(3)}F^{\perp\nu} + {}^{(3)}F^{\mu\perp} n^\nu. \quad (2.1.11)$$

Se define el campo eléctrico y magnético medidos por un observador Euleriano con 4-velocidad de la siguiente forma

$$E^\mu := -n_\nu F^{\nu\mu} \equiv {}^{(3)}F^{\perp\mu}, \quad (2.1.12)$$

$$B^\mu := -n_\nu F^{*\nu\mu} \equiv {}^{(3)}F^{*\perp\mu}. \quad (2.1.13)$$

Por la antisimetría del tensor de Faraday, estos vectores son ortogonales a n_α : $n_\alpha E^\alpha = n_\alpha B^\alpha = 0$; es decir, son tangentes a la hipersuperficie Σ de t constante. Empleando estas definiciones, reescribimos el tensor de Faraday

$$F^{\mu\nu} = {}^{(3)}F^{\mu\nu} + n^\mu E^\nu - E^\mu n^\nu. \quad (2.1.14)$$

De las ecuaciones (2.1.4), (2.1.11) y (2.1.13), se puede mostrar que

$$B^\mu = \frac{1}{2} n_\nu \epsilon^{\nu\alpha\beta\mu} {}^{(3)}F_{\alpha\beta}, \quad (2.1.15)$$

e invirtiendo esta relación

$${}^{(3)}F_{\mu\nu} = {}^{(3)}\epsilon^{\mu\nu\alpha} B_\alpha, \quad (2.1.16)$$

donde se define

$${}^{(3)}\epsilon^{\alpha\beta\mu} := n_\nu \epsilon^{\nu\alpha\beta\mu}. \quad (2.1.17)$$

Finalmente el tensor de Faraday y su dual pueden reescribirse como

$$F^{\mu\nu} = n^\mu E^\nu - n^\nu E^\mu + {}^{(3)}\epsilon^{\mu\nu\beta} B_\beta, \quad (2.1.18)$$

$$F^{*\mu\nu} = n^\mu B^\nu - n^\nu B^\mu - {}^{(3)}\epsilon^{\mu\nu\beta} B_\beta. \quad (2.1.19)$$

Una vez obtenida la descomposición del tensor de Faraday, se procede a calcular las proyecciones de las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2) sobre el vector normal n^μ

$$n_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} = D_\mu E^\mu = 4\pi \rho_{em}, \quad (2.1.20)$$

$$n_\nu \nabla_\mu F^{*\mu\nu} = D_\mu B^\mu = 0. \quad (2.1.21)$$

con $\rho_{em} := -n_\nu j^\nu$ la densidad de carga medida por el observador Euleriano. Tomando la proyección de (2.1.1) y (2.1.2) sobre Σ_t , obtenemos la evolución de E^i y B^i respectivamente

$$\frac{dE^i}{dt} = (D \times \alpha B)^i + \alpha K E^i - 4\pi \alpha {}^{(3)}j_{em}^i, \quad (2.1.22)$$

$$\frac{dB^i}{dt} = -(D \times \alpha E)^i + \alpha K B^i, \quad (2.1.23)$$

donde nuevamente $d/dt = \partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}$ y con ${}^{(3)}j_{em}^i := P_\mu^i j_{em}^\mu$. Una ecuación adicional se obtiene de la ecuación (2.1.1) que implica la conservación de la 4-corriente

$$\nabla_\mu j^\mu = 0, \quad (2.1.24)$$

cuyo equivalente en la descomposición 3 + 1 es

$$\frac{d\rho_{em}}{dt} = -D_i \left(\alpha {}^{(3)}j_{em}^i \right) + \alpha K \rho_{em}. \quad (2.1.25)$$

2.2. Tensor de energía-momento del campo electromagnético

El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right]. \quad (2.2.1)$$

Para reescribirlo en términos de los campos eléctrico y magnético, usamos la ecuación (2.1.18)

$$F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda = -(E_\mu E_\nu + B_\mu B_\nu) + B^2 h_{\mu\nu} + E^2 n_\mu n_\nu + 2E^\lambda B^\sigma {}^{(3)}\epsilon_{\lambda\sigma(\mu} n_{\nu)}, \quad (2.2.2)$$

donde $E^2 = E^\mu E_\mu$ y $B^2 = B^\mu B_\mu$, esto también nos permite calcular cantidades independientes del observador

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2(E^2 - B^2), \quad (2.2.3)$$

$${}^*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 4E^\mu B_\mu. \quad (2.2.4)$$

Finalmente, después de un poco de álgebra, el tensor de energía-momento en el lenguaje 3+1 puede ser reescrito como

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{E}n_\mu n_\nu + n_\mu J_\nu + J_\mu n_\nu + S_{\mu\nu} , \quad (2.2.5)$$

donde

$$\mathcal{E} := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) , \quad (2.2.6)$$

$$J_\mu := -P_\mu^\lambda n^\sigma T_{\sigma\lambda} = \frac{1}{4\pi} {}^{(3)}\epsilon_{\mu\lambda\sigma} E^\lambda B^\sigma , \quad (2.2.7)$$

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &:= P_\mu^\lambda P_\nu^\sigma T_{\lambda\sigma} \\ &= \frac{1}{8\pi} [h_{\mu\nu}(E^2 + B^2) - 2(E_\mu E_\nu + B_\mu B_\nu)] . \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

\mathcal{E} es la densidad de energía del campo electromagnético medido por observadores Eulerianos, J_μ el vector de Poynting (la densidad de momento medida por observadores Eulerianos), $S_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos del campo electromagnético. Notemos que al ser nula la traza de $T_{\mu\nu}$, $\mathcal{E} = S$.

2.3. El sistema Einstein-Maxwell

Para evolucionar el sistema se utilizarán las ecuaciones de Einstein en su versión 3+1, tomando como fuente de energía únicamente al campo electromagnético ¹. Siguiendo el orden en que se introdujeron las ecuaciones ADM, se presentan primero las constricciones hamiltoniana (1.3.10) y de momento (1.3.11) tomando como densidad a la densidad de energía y la densidad de momento como el vector de Poynting

$${}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\mathcal{E} , \quad (2.3.1)$$

$$D_l K^{il} - D^i K = 8\pi J^i . \quad (2.3.2)$$

La ecuación de evolución para la curvatura extrínseca (1.2.1) al tomar que $\rho = \mathcal{E} = S$ es

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &+ \alpha \left[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \right] - 8\pi \alpha S_{ij} , \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Al tomar la traza y usar la constricción hamiltoniana (2.3.1), obtenemos una ecuación para la evolución de la traza de la métrica que será útil para obtener datos iniciales

$$\partial_t K + \beta^l \partial_l K + D^2 \alpha - \alpha K_{ij} K^{ij} = 8\pi \alpha \mathcal{E} . \quad (2.3.4)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones relevantes, el procedimiento para evolucionar al sistema consiste en elegir una norma para la evolución de α , β^i y proporcionar datos iniciales para $(\Sigma_t, \gamma_{ij}, K_{ij}, E^i, B^i)$ que cumplan con las ecuaciones de constricción (2.3.1), (2.3.2), (2.1.20) y (2.1.21). Posteriormente, la evolución en el tiempo de las variables $\gamma_{ij}, K_{ij}, E^i, B^i$ estará dada por las ecuaciones (1.1.8),

¹cuando únicamente se considera las contribuciones del campo electromagnético, se suele referirse a un espaciotiempo en *electrovacío*

(2.3.3) (2.1.22) y (2.1.23) respectivamente.

Hasta el momento, nunca se ha hecho referencia a los potenciales electromagnéticos Φ y A^i que suelen usarse en la descripción clásica del electromagnetismo, y el motivo principal es que introducen variables de norma que complican las ecuaciones de evolución. Esto debido a que los campos eléctricos y magnéticos se calculan mediante derivadas de Φ y A^i , teniendo como resultado que las ecuaciones de evolución para los campos electromagnéticos en términos de los potenciales sean ecuaciones diferenciales de segundo orden en tiempo y espacio.

2.4. Datos iniciales para agujeros negros cargados

De forma similar al caso en vacío, la forma más simple de construir datos iniciales es asumir simetría temporal, para lo cual $K_{ij} = 0$. Además se asumirá que el campo magnético inicial es cero, de tal forma que la constricción de momentos (2.3.2) es idénticamente cero. Con estas simplificaciones, debemos resolver la constricción (2.1.20) y la constricción hamiltoniana

$$D_\mu E^\mu = 4\pi\rho_{em} , \quad (2.4.1)$$

$${}^{(3)}R = 16\pi\mathcal{E} , \quad (2.4.2)$$

donde la densidad de energía es simplemente

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} E^\mu E_\mu . \quad (2.4.3)$$

Al pedir que la métrica sea conformemente plana, la constricción hamiltoniana se convierte en una ecuación elíptica para el factor conforme

$$\gamma_{\mu\nu} = \psi^4 \hat{\gamma}_{\mu\nu} , \quad (2.4.4)$$

$$\hat{D}^2 \psi + \frac{1}{4} \psi^5 E_\mu E^\mu = 0 , \quad (2.4.5)$$

con \hat{D}^2 el operador laplaciano compatible con la métrica conforme. Para resolver la constricción, expresamos el operador de derivada covariante D_μ (compatible con la métrica física) aplicada a un vector puede reescribirse en términos de la derivada covariante \hat{D}_μ que es compatible con la métrica conforme como

$$D_\mu v^\mu = \hat{D}_\mu v^\mu + 6v^\mu \partial_\mu \ln \psi . \quad (2.4.6)$$

En particular, si hacemos un reescalamiento del vector v^μ por una potencia del factor conforme ψ , su derivada covariante está dada por

$$D_\mu (\psi^n v^\mu) = \psi^n \left[\hat{D}_\mu v^\mu + (6+n) v^\mu \partial_\mu \ln \psi \right] . \quad (2.4.7)$$

El operador de derivada covariante conforme \hat{D} sugiere utilizar un reescalamiento del campo eléctrico

$$\hat{E}^i := \psi^6 E^i, \quad \hat{E}_i := \psi^2 E_i. \quad (2.4.8)$$

Podemos además, definir a una densidad de carga conforme

$$\hat{\rho} := \psi^6 \rho. \quad (2.4.9)$$

Con estas definiciones, la ecuación (2.4.1), se reescribe como

$$\hat{D}_\mu \hat{E}^\mu = 4\pi \hat{\rho}_{em}. \quad (2.4.10)$$

Obteniendo una ecuación análoga a (2.4.1) pero ahora calculada con las variables conformes. Por otro lado, la constricción hamiltoniana utilizando las variables conformes toma la forma

$$\hat{D}^2 \psi + \frac{1}{4\psi^3} \hat{E}_i \hat{E}^i = 0. \quad (2.4.11)$$

Para resolver la ecuación (2.4.11), supondremos que la métrica de fondo es plana y se introduce un potencial escalar tal que

$$\hat{E}_i = -\partial_i \varphi, \quad (2.4.12)$$

de tal forma que se obtiene una ecuación de Poisson para φ

$$\hat{D}^2 \varphi = 4\pi \hat{\rho}_{em}. \quad (2.4.13)$$

Antes de proceder con la solución de (2.4.13), veamos un caso particular. Suponiendo que en el origen $r = 0$ nos encontramos lejos de otras cargas, se cumple que $\hat{\rho} = 0$ y tomando como referencia al agujero negro de Reissner-Nordström, se obtiene

$$\varphi = \frac{Q}{r}, \quad \psi = \left[\left(1 + \frac{M}{2r} \right)^2 - \frac{Q^2}{4r^2} \right]^{1/2}, \quad (2.4.14)$$

Notemos que el potencial φ representa el potencial eléctrico de una partícula con carga Q en el origen. Esto sugiere tomar como potencial a una función que represente a n cargas localizadas en \vec{r}_i en el espacio conformemente plano. El potencial se propone como

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (2.4.15)$$

esta solución tiene el comportamiento asintótico de Reissner-Nordström alrededor de cada puntura. Una primera solución de la constricción hamiltoniana (2.4.11) se restringe a n agujeros negros con el mismo cociente carga masa $Q_i/M_i = 1/2k$

$$\psi^2 = \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)^2. \quad (2.4.16)$$

En el trabajo [43], generalizan esta construcción utilizando el resultado de Misner y Wheeler [44], en el que establece que al tomar dos funciones armónicas arbitrarias C, D en un espacio conformemente plano, las construcciones iniciales se satisfacen, resultando que el factor conforme y el campo eléctrico están dados por

$$\psi^2 = CD, \quad \hat{E}_i = C\partial_i D - D\partial_i C. \quad (2.4.17)$$

Una elección particular de C y D que representa n agujeros negros

$$C = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i + Q_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad D = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i - Q_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (2.4.18)$$

en el que $m_n \geq |q_n|$. Si pedimos que $Q_i/M_i = 1/2k$, tenemos

$$\begin{aligned} CD &= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i + Q_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i - Q_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \sum_{i,j=1}^n \frac{(M_i + Q_i)(M_j - Q_j)}{4|\vec{r} - \vec{r}_i||\vec{r} - \vec{r}_j|} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \sum_{i,j=1}^n \frac{Q_i Q_j (4k^2 - 1)}{4|\vec{r} - \vec{r}_i||\vec{r} - \vec{r}_j|} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{M_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)^2 \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

donde en la última línea se ha usado que $Q/M = 1/2k$. Esto muestra que si la relación carga-masa es igual para todas las punturas, recuperamos la solución (2.4.17). Notemos que con esta elección, si se toma $n = 1$, se obtiene la solución de Reissner-Nordström en coordenadas isotrópicas. Un último detalle referente a esta solución, es que la masa y carga asociada a cada puntura es

$$m_i = M_i + \sum_{i \neq j} \frac{M_i M_j - Q_i Q_j}{2|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (2.4.20)$$

$$q_i = Q_i + \sum_{i \neq j} \frac{M_i Q_j - Q_i M_j}{2|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (2.4.21)$$

pero la carga y masa total del sistema es $Q_{tot} = \sum_i Q_i$ y $M_{tot} = \sum_i M_i$. En este caso, si la relación carga-masa es igual para todas las punturas, la carga efectiva de cada agujero negro es q_i .

Capítulo 3

Relatividad numérica axisimétrica

A pesar de contar con códigos que evolucionan el espacio tridimensional, tales como el Einstein-Toolkit [9], la reducción del número de grados de libertad en escenarios axisimétricos aún permite el estudio de sistemas de interés astrofísico, tales como la colisión de agujeros negros [45–49]; el colapso de estrellas axisimétricas [50–52]; el estudio de partículas no colisionales en la estabilidad de cúmulos de estrellas [53]; el colapso de discos [54] y algunos que siguen abiertos [55], como el colapso de ondas gravitacionales [56–61]. El estudio de los casos con simetría axial se había postergado debido a las condiciones de irregularidad en el eje de simetría y el desconocimiento sobre si el sistema ADM era un problema bien puesto (en el sentido de ecuaciones diferenciales). Con el entendimiento del procedimiento para la regularización de las ecuaciones y el desarrollo de formulaciones bien puestas y fuertemente hiperbólicas, los códigos axisimétricos se reconsideraron puesto que permite evolucionar los sistemas mencionados con mayor resolución dado que el número de variables de evolución se reduce y además se tiene un menor costo de recursos de cómputo comparados a un código tridimensional.

En este capítulo se presentará la aplicación del formalismo desarrollado en los capítulos anteriores al sistema en simetría axial y las subrutinas que se han agregado al código OllinAxis para complementarlo.

3.1. Espacios axisimétricos

Por espacios axisimétricos consideraremos aquellos que tienen un vector de Killing $\vec{\xi}$ cuyas curvas integrales son cerradas. Utilizando $\vec{\xi}$ para definir un sistema coordenado cuya única componente es angular $\vec{\xi} = \partial_\phi$. El requisito de simetría axial lo obtendremos al pedir que la derivada de Lie de una función tensorial respecto de $\vec{\xi}$ sea cero, es decir que no dependan del ángulo ϕ . Si bien al tener un espacio con simetrías reduce la complejidad de uno en tres dimensiones espaciales, es aún más complejo que los espacios con simetría esférica y no es trivial conocer el número de variables dinámicas.

La métrica para espacios axisimétricos utilizando coordenadas (ρ, z, ϕ) puede escribirse como [62]

$$\begin{aligned} dt^2 &= \gamma_{\rho\rho}d\rho^2 + \gamma_{zz}dz^2 + \gamma_{\phi\phi}d\phi^2 + 2(\gamma_{\rho z}d\rho dz + \gamma_{\rho\phi}d\rho d\phi + \gamma_{z\phi}dz d\phi) \\ &= Ad\rho^2 + Bdz^2 + \rho^2 Hd\phi^2 + 2(\rho C d\rho dz + \rho^3 C_1 d\rho d\phi + \rho^2 C_2 dz d\phi), \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

donde A, B, H, C, C_1, C_2 son funciones de ρ y t , regulares cerca del origen y además pares ante la inversión $\rho \rightarrow -\rho$ (esto quedará más claro en la siguiente sección). En simetría esférica siempre es posible elegir una métrica diagonal pero en simetría axial generalmente no es posible. Por ejemplo, en casos con momento angular se tiene el fenómeno de arrastre de las coordenadas, produciendo que aún cuando $\gamma_{\rho\phi}|_{t=0} = 0$ esto no se mantendrá pues las coordenadas ρ se enredarán entorno al eje z . Otra posibilidad es que los ejes ρ y z no sean ortogonales y por lo tanto $\gamma_{\rho z}$ es distinto de cero. En el caso sin momento angular los factores C_1 y C_2 son cero y se mantendrán de esta forma si usamos un vector de corrimiento tal que $\beta^\varphi = 0$.

Asociada a (3.1.1) la métrica inversa estará denotada por

$$\gamma^{ij} = \begin{pmatrix} g_A & \rho g_C & \rho g_{C_1} \\ \rho g_C & g_B & g_{C_2} \\ \rho g_{C_1} & g_{C_2} & g_H/\rho^2 \end{pmatrix}, \quad (3.1.2)$$

donde g son funciones pares cerca del eje y están dadas por

$$g_A = (BH - \rho^2 C_2^2)/h, \quad (3.1.3)$$

$$g_B = (AH - \rho^4 C_1^2)/h, \quad (3.1.4)$$

$$g_H = (AB - \rho^2 C^2)/h, \quad (3.1.5)$$

$$g_C = (\rho^2 C_1 C_2 - CH)/h, \quad (3.1.6)$$

$$g_{C_1} = (CC_2 - BC_1)/h, \quad (3.1.7)$$

$$g_{C_2} = (\rho^2 CC_1 - AC_2)/h, \quad (3.1.8)$$

$$(3.1.9)$$

con h el determinante, que está dado por

$$h = ABH + 2\rho^4 CC_1 C_2 - \rho^2 AC_2^2 - \rho^2 HC^2 - \rho^4 BC_1^2. \quad (3.1.10)$$

En axisimetría, todos los tensores covariantes T toman la forma de la métrica, es decir a cada entrada del tensor T se le puede asociar una potencia de ρ

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_A & \rho T_C & \rho^3 T_{C_1} \\ \rho T_C & T_B & \rho^2 T_{C_2} \\ \rho^3 T_{C_1} & \rho^2 T_{C_2} & \rho^2 T_H \end{pmatrix}, \quad (3.1.11)$$

esta forma será útil más adelante para regularizar expresiones en el eje.

3.1.1. Regularización en el eje

Al utilizar un sistema de coordenadas que no se encuentra bien definido en $\rho = 0$, es de esperarse que aparezcan patologías en las cantidades. Esto claramente es visible en los operadores derivada, como el laplaciano, que tienen potencias de $1/\rho$. Dichos factores analíticamente no deben causar problemas porque el espaciotiempo es regular, sin embargo dentro de los códigos numéricos, estos factores no se cancelan de forma exacta obteniendo cantidades que tienden a infinito alrededor del eje violando la física del problema. La forma de regularizar las expresiones para los códigos numéricos es quizá un tanto artificial pero asegura que las cantidades sean bien comportadas alrededor del eje, proporcionándonos la evolución correcta.

Para regularizar el espacio se sigue la idea de Rinne y Stewart [62]. El primer tipo de regularización se aplica a la paridad de las componentes de la métrica. En axisimetría, la métrica en coordenadas cilíndricas (ρ, z, φ) toma la forma

$$ds^2 = -(\alpha - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2(\beta_\rho d\rho + \beta_z dz + \beta_\varphi d\varphi) dt + g_{\rho\rho} d\rho^2 + g_{zz} dz^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + 2(g_{\rho z} d\rho dz + g_{\rho\varphi} d\rho d\varphi + g_{z\varphi} dz d\varphi), \quad (3.1.12)$$

en el que la métrica debe permanecer invariante ante el cambio de coordenadas $\rho \rightarrow -\rho$ (una reflexión por el eje de simetría), lo que implica que los componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ que tienen únicamente un índice igual a ρ deben ser de paridad impar y el resto de los coeficientes deben ser de paridad par. De forma explícita se tiene

$$\alpha(\rho) = \alpha(-\rho), \quad (3.1.13)$$

$$\beta_\rho(\rho) = -\beta_\rho(-\rho), \quad (3.1.14)$$

$$\beta_z(\rho) = \beta_z(-\rho), \quad (3.1.15)$$

$$\beta_\varphi(\rho) = \beta_\varphi(-\rho), \quad (3.1.16)$$

$$g_{\rho\rho}(\rho) = g_{\rho\rho}(-\rho), \quad (3.1.17)$$

$$g_{zz}(\rho) = g_{zz}(-\rho), \quad (3.1.18)$$

$$g_{\varphi\varphi}(\rho) = g_{\varphi\varphi}(-\rho), \quad (3.1.19)$$

$$g_{\rho z}(\rho) = -g_{\rho z}(-\rho), \quad (3.1.20)$$

$$g_{\rho\varphi}(\rho) = -g_{\rho\varphi}(-\rho), \quad (3.1.21)$$

$$g_{z\varphi}(\rho) = g_{z\varphi}(-\rho). \quad (3.1.22)$$

Por lo tanto, las funciones A, B, H, C, C_1 y C_2 son funciones pares de ρ , y además los componentes de la curvatura extrínseca deben heredar la paridad de los coeficientes de la métrica. Numéricamente estas condiciones pueden implementarse usando una malla que desplace al origen por $\Delta\rho/2$ e introduciendo un punto fantasma en $\rho = -\Delta\rho/2$, en el cual, los valores de la métrica serán la copia del punto $\rho = \Delta\rho/2$.

El segundo tipo es referente a que el espacio debe ser localmente plano en $\rho = 0$, para ello se considera la métrica en coordenadas cartesianas

$$dl^2 = g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2 + g_{zz}dz^2 + 2g_{xy}dxdy + 2g_{xz}dxdz + 2g_{yz}dydz . \quad (3.1.23)$$

La simetría axial requiere de que la métrica sea invariante ante la reflexión de los ejes x y y . Para que el espacio sea localmente plano, la métrica debe ser suave, alrededor del eje (al menos de clase C^2), esto implica que

$$g_{xx} \sim k_\rho + \mathcal{O}(x^2 + y^2) \sim k_\rho + \mathcal{O}(\rho^2) , \quad (3.1.24)$$

$$g_{yy} \sim k_\rho + \mathcal{O}(x^2 + y^2) \sim k_\rho + \mathcal{O}(\rho^2) , \quad (3.1.25)$$

$$g_{zz} \sim k_z + \mathcal{O}(x^2 + y^2) \sim k_z + \mathcal{O}(\rho^2) , \quad (3.1.26)$$

$$g_{xy} \sim \mathcal{O}(xy) \sim \mathcal{O}(\rho^2) , \quad (3.1.27)$$

$$g_{xz} \sim \mathcal{O}(x) \sim \mathcal{O}(\rho) , \quad (3.1.28)$$

$$g_{yz} \sim \mathcal{O}(y) \sim \mathcal{O}(\rho) , \quad (3.1.29)$$

con k_ρ, k_z constantes. Entonces

$$g_{\rho\rho} \sim k_\rho + \mathcal{O}(\rho^2) , \quad (3.1.30)$$

$$g_{zz} \sim k_z + \mathcal{O}(\rho^2) , \quad (3.1.31)$$

$$g_{\phi\phi} \sim \rho^2 (k_\rho + \mathcal{O}(\rho^2)) , \quad (3.1.32)$$

$$g_{\rho z} \sim \mathcal{O}(\rho) , \quad (3.1.33)$$

$$g_{\rho\phi} \sim \mathcal{O}(\rho^3) , \quad (3.1.34)$$

$$g_{z\phi} \sim \mathcal{O}(\rho^2) . \quad (3.1.35)$$

El comportamiento de los coeficientes de la métrica alrededor del eje, justifica la forma tomada para la métrica espacial (3.1.1). Con esta elección nos aseguramos que los coeficientes A, B, H, C, C_1, C_2 sean regulares en el eje de forma analítica, pues tienen factorizados la potencia correspondiente de ρ . Más aún, se puede usar una variable auxiliar

$$\lambda := (A - H)/\rho^2 . \quad (3.1.36)$$

que es una función par en el eje y se comporta como $\mathcal{O}(\rho^2)$, esta variable servirá para imponer numéricamente que las funciones se comporten de forma regular. Las cantidades que aparentemente son irregulares en el eje son listadas por J. Torres en su tesis doctoral [10], que son $\hat{R}_A, \hat{R}_H, \hat{R}_C, \hat{R}_{C_1}, \hat{R}_{C_2}, \hat{R}, \hat{\nabla}_m \hat{A}_r^m, \hat{A}^{mn} \Delta_{mn}^r$, los cuales tienen combinaciones de $A - H$ y $\hat{A}_A - \hat{A}_H$, esto sugiere que podemos también definir

$$\hat{A}_\lambda := (\hat{A}_A - \hat{A}_H)/\rho^2 , \quad (3.1.37)$$

teniendo también el mismo comportamiento alrededor del eje que λ . Esto introduce a λ y \hat{A}_λ como constricciones adicionales al sistema que en una evolución libre se violan consistentemente con el

orden de discretización de la malla. Por completez se presentan las ecuaciones de evolución asociadas a λ y \hat{A}_λ [10]

$$\frac{d\lambda}{dt} = 2\lambda\frac{\beta^\rho}{\rho} + 2\lambda\partial_\rho\beta^\rho + 2\frac{H}{\rho}\partial_\rho\left(\frac{\beta^\rho}{\rho}\right) + 2C\frac{\partial_r\beta^z}{\rho} + 2\rho C_1\partial_r\beta^\varphi - 2\alpha\hat{A}_\lambda - \frac{2}{3}\sigma\lambda\hat{\nabla}_m\beta^m, \quad (3.1.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}_\lambda}{dt} &= 2\hat{A}_\lambda + 2\hat{A}_\lambda\partial_\rho\beta^\rho + 2\hat{A}_\lambda\frac{\beta^\rho}{\rho} + 2\frac{\hat{A}_H}{\rho}\partial_\rho\left(\frac{\beta^\rho}{\rho}\right) + 2\hat{A}_C\frac{\partial_\rho\beta^z}{\rho} \\ &\quad + 2\rho\hat{A}_{C_1}\partial_\rho\beta^\varphi + \frac{1}{e^{4\phi}}(-DD_\lambda\alpha + \alpha R_\lambda - 8\pi S_\lambda) \\ &\quad - \frac{\lambda}{3}(-D^2\alpha + \alpha R - 8\pi\alpha S) \\ &\quad + \alpha\left(K\hat{A}_\lambda - 2\hat{A}_\lambda^2\right) - \frac{2}{3}\sigma\hat{A}_\lambda\hat{\nabla}_m\beta^m, \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

donde se ha definido

$$T_\lambda := (T_{\rho\rho} - T_{\phi\phi}/\rho^2)/\rho^2. \quad (3.1.40)$$

para cualquier tensor T de rango 2.

3.2. Sistema BSSN en simetría axial

Al únicamente diferir en un factor la métrica física y la conforme su comportamiento es similar alrededor del eje, de esta forma podemos reescribir la métrica espacial como

$$dl^2 = e^{4\phi} (Ad\rho^2 + Bdz^2 + \rho^2 Hd\varphi^2 + 2(rCd\rho dz + \rho^3 C_1 d\rho d\varphi + r^2 C_2 dz d\varphi)). \quad (3.2.1)$$

Como es usual en la formulación BSSN usaremos $\hat{\gamma}$ para denotar los coeficientes de la métrica conforme, es decir $\gamma_{ij} = e^{4\phi}\hat{\gamma}_{ij}$. Los vectores $\hat{\Delta}^i$ de la formulación BSSN son

$$\hat{\Delta}^r = -\partial_\rho g_A - \rho\partial_z g_C + \rho g_\lambda - \frac{1}{2\hat{h}}(g_A\partial_\rho\hat{h} + \rho g_C\partial_z\hat{h}), \quad (3.2.2)$$

$$\hat{\Delta}^z = -\rho\partial_\rho g_C - \partial_z g_B - 2g_C - \frac{1}{2\hat{h}}(\rho g_C\partial_\rho\hat{h} + g_B\partial_z\hat{h}), \quad (3.2.3)$$

$$\hat{\Delta}^\varphi = -\rho\partial_\rho g_{C_1} - \partial_z g_{C_2} - 4g_H - \frac{1}{2\hat{h}}(\rho g_{C_1}\partial_\rho\hat{h} + g_{C_2}\partial_z\hat{h}), \quad (3.2.4)$$

donde \hat{h} es el cociente del determinante de la métrica conforme con la métrica plana

$$\hat{h} = \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} = ABH + 2\rho^4 CC_1 C_2 - \rho^2 AC_2^2 - \rho^2 HC^2 - \rho^4 BC_1^2. \quad (3.2.5)$$

La ecuación para la evolución del determinante de la métrica (1.3.16) en términos de \hat{h} es

$$\partial_t = (1 - \sigma)(2\hat{h}\hat{\nabla}_m\beta^m), \quad (3.2.6)$$

donde $\sigma = 1$ para la evolución Lagrangiana o $\sigma = 0$ para la Euleriana. Por completez escribimos la divergencia de β^m

$$\hat{\nabla}_m \beta^m = \partial_m \beta^m + \frac{\beta^r}{r} + \frac{1}{2} \beta^m \partial_m (\ln \hat{h}). \quad (3.2.7)$$

En las ecuaciones (1.3.22)-(1.3.25), necesitamos calcular derivadas de Lie de los coeficientes de la métrica y dado que son densidades tensoriales de peso $\omega = 1$ su derivada de Lie está dada por

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}} F = \frac{2}{\rho^n} \hat{\gamma}_{m(i} \partial_{j)} \beta^m + \beta^m \partial_m F \quad (3.2.8)$$

donde F representa a los factores A, B, H, C, C_1 y C_2 de la métrica (3.1.1) y $n = 0, 1, 2, 3$ es la potencia de ρ que multiplica a cada factor correspondiente de la métrica (3.2.1). La ecuación para la evolución del factor conforme y la traza no se modifican por estar escrita en términos de escalares. Para la parte sin traza de la curvatura extrínseca tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{A}_{ij} &= e^{-4\phi} (-D_i D_j \alpha + \alpha R_{ij} - 8\pi S) \\ &- \frac{\hat{\gamma}_{ij}}{3} (-D^2 \alpha + \alpha R - 8\pi \alpha S) + \alpha (K \hat{A}_{ij} - 2 \hat{A}_{ik} \hat{A}_j^k) \\ &- \frac{2}{3} \sigma \hat{A}_{ij} \hat{\nabla}_m \beta^m. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Las expresiones para el laplaciano de lapso y su segunda derivada covariante son

$$\begin{aligned} D^2 \alpha &= e^{-4\phi} \left[g_A \partial_\rho^2 \alpha + 2\rho g_C \partial_\rho \partial_z \alpha + g_B \partial_z^2 \alpha + g_H \partial_\rho \alpha / \rho - \hat{\Delta}^i \partial_i \alpha \right. \\ &\left. + 2(g_A \partial_\rho \alpha \partial_\rho \phi + \rho g_C \partial_\rho \alpha \partial_z \phi + \rho g_C \partial_z \alpha \partial_\rho \phi + g_B \partial_z \alpha \partial_z \phi) \right] \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} D_i D_j \alpha &= \partial_i \partial_j \alpha - \hat{\Gamma}_{ij}^m \partial_m \alpha - 2[\partial_i \alpha \partial_j \phi + \partial_i \phi \partial_j \alpha \\ &- \hat{\gamma}_{ij} (g_A \partial_\rho \alpha \partial_\rho \phi + \rho g_C \partial_\rho \alpha \partial_z \phi + \rho g_C \partial_z \alpha \partial_\rho \phi \\ &+ g_B \partial_z \alpha \partial_z \phi)]. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

La ecuación de evolución para $\hat{\Delta}^i$ es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\Delta}^i &= \hat{\gamma}^{mn} \hat{\nabla}_m \hat{\nabla}_n \beta^i - 2 \hat{A}^{im} \partial_m \alpha - \alpha (2 - \xi) \hat{\nabla}_m \hat{A}^{im} + 2\alpha \hat{A}^{mn} \hat{\Delta}_{mn}^i \\ &+ \alpha \xi \left(6 \hat{A}^{im} \partial_m \phi - \frac{2}{3} \hat{\gamma}^{im} \partial_m K - 8\pi \hat{\gamma}^{im} j_m \right) \\ &+ \frac{\sigma}{3} \left[\hat{\nabla}^i (\hat{\nabla}_m \beta^m) + 2 \hat{\Delta}^i \hat{\nabla}_m \beta^m \right], \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

como se había mencionado para la ecuación (1.3.26), si se toma $\xi > 1/2$ el sistema es fuertemente hiperbólico y en el caso práctico al tomar $\xi = 2$, la evolución se simplifica aún más al cancelar la divergencia de la parte sin traza.

3.3. Código OllinAxis en simetría axial

En esta sección se describirá brevemente el código OllinAxis y las subrutinas implementadas. Las pruebas de convergencia para el extractor de ondas gravitacionales y el buscador de horizontes se detallarán en sus capítulos correspondientes.

3.3.1. Código para la evolución

OllinAxis es un código que permite integrar la formulación BSSN como un problema de Cauchy de valores iniciales. La primera versión del código fue escrita en la formulación Nagy-Ortiz-Reula (NOR) por Milton Ruíz para su tesis doctoral [63]. Esta versión consideraba únicamente el caso sin momento angular y se introdujo la regularización en el eje, sin embargo en la práctica el código presentaba inestabilidades. Posteriormente José Manuel Torres construyó un código para resolver la evolución del sistema 3+1 en el formulación BSSN adaptado a simetría axial para su tesis doctoral [10]. El código es estable y permite la evolución de varios tipos de sistema tales como un campo escalar o la colisión frontal de agujeros negros neutros o con carga. Como parte del trabajo de maestría se propuso complementar el código para incluir subrutinas de búsqueda de horizontes aparentes, la extracción de ondas gravitacionales y electromagnéticas y un resolvidor de ecuaciones diferenciales parciales lineales elípticas. El código fuente está escrito en Fortran 90 con la adición de scripts en Perl para generar de forma automática rutinas para la evolución de las variables conformes al momento de compilar. El código permite su ejecución en clusters utilizando el protocolo Message Passing Interface (MPI) realizando una distribución de la malla numérica entre el número de procesadores. Como se ha descrito en el proceso de regularización, la malla numérica de (N_ρ, N_z) puntos en la dirección ρ, z respectivamente, tiene el origen $(\rho, z) = (0, 0)$ desplazado $(\Delta\rho/2, \Delta z/2)$ para evitar calcular cantidades que pueden diverger en $r = 0$. La integración numérica se usa el método de líneas (MOL) con el integrador iterativo Crank-Nicholson (ICN) a segundo orden o Runge-Kutta a cuarto orden y de forma auxiliar se introducen puntos fantasma (o ghost zone) en las fronteras de cada malla asignada a cada procesador para el correcto intercambio de información al momento de calcular las derivadas. En un esquema a segundo orden se necesitan dos puntos fantasma y tres para uno a cuarto orden, figura 3.1. En las subrutinas de búsqueda de horizontes, extracción de ondas gravitacionales y el resolvidor elíptico, el procesador 0 (raíz) es el encargado de recopilar la información que previamente es analizada por el resto de procesadores para posteriormente realizar una única operación en concreto. Por ejemplo, si se desea realizar una integración de una función f sobre una esfera de radio r , el interpolador busca el procesador que tenga el punto correspondiente, realiza la interpolación y comunica el valor de la función al procesador 0 que posteriormente realizará el cálculo de la integral.

3.3.2. Resolvidor elíptico

El resolvidor de ecuaciones diferenciales parciales elípticas *Axelisol* fue escrito en c++ como parte de su tesis para obtener el título de licenciado en física [64] y fue incorporado a las subrutinas de Axelisol mediante una interfaz C++/ Fortran 90, el código fuente puede consultarse en [65].

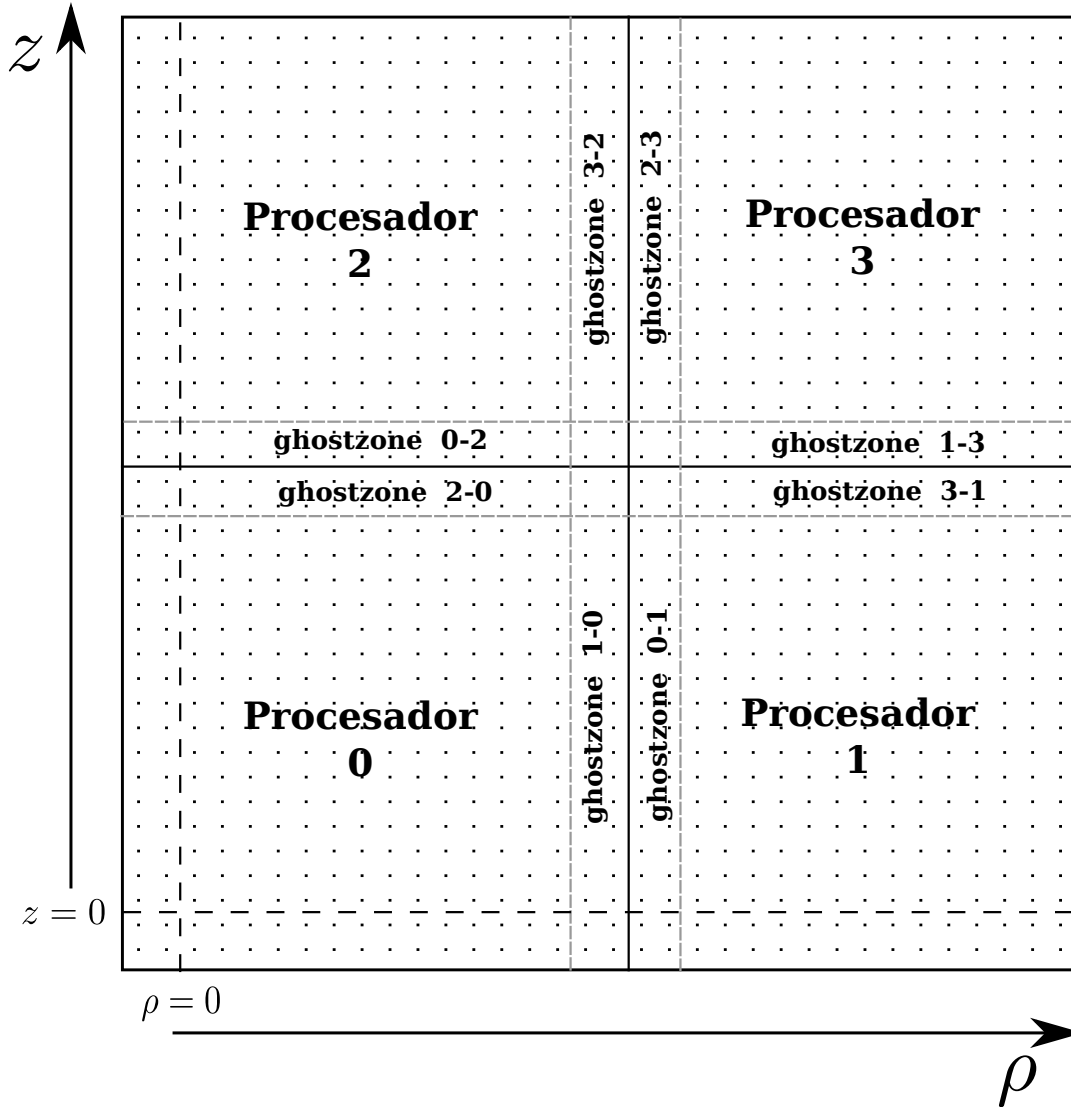


Figura 3.1: Esquema de la distribución del dominio numérico realizada por el código OllinAxis. La figura muestra un dominio de 28^2 puntos en cada dirección con dos puntos para la zona fantasma $n - m$, donde n es el procesador origen y m el procesador que sincroniza la información de los puntos correspondientes.

Axelisol permite resolver ecuaciones en derivadas parciales lineales elípticas del tipo

$$\left(a \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + b \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} + c \frac{\partial^2}{\partial z^2} + d \frac{\partial}{\partial \rho} + e \frac{\partial}{\partial z} + s \right) u = f, \quad (3.3.1)$$

en un dominio cartesiano ρ, z utilizando diferencias finitas y pudiendo especificar el tipo condición a la frontera: Robin, Dirichlet o Neumann. El resultado es un sistema lineal de ecuaciones $Au = f$ que es del tipo sparse¹ que es almacenada utilizando la estructura CSR para ahorrar recursos de

¹Una matriz es del tipo sparse si sus elementos en su mayoría son cero, de forma más precisa se define el concepto de esparcidad que es el número de elementos distintos de cero dividido entre el número total de elementos. Una matriz es sparse si la esparcidad es mayor a 0.5.

memoria y paralelizada en *OpenMP* para un llenado más rápido. El sistema de ecuaciones lineales es resuelto utilizando una factorización LU mediante el resolvidor PARDISO integrado con las librerías matemáticas de Intel. Además se implementan opciones que permiten reutilizar la estructura de las matrices en cada paso de tiempo para resolver de forma más eficiente el sistema. Si bien, Axelisol resuelve un sistema matricial de ecuaciones, las entradas están codificadas en arreglos de una dimensión, por lo cual, la forma más sencilla para agregar Axelisol a OllinAxis fue dedicar una subrutina que recopilara la información de las mallas de OllinAxis y las transformara a arreglos de una dimensión. La salida de datos de Axelisol es nuevamente en arreglos de una dimensión teniendo que realizar el proceso inverso. Los pasos para convertir arreglos de $1D$ a $2D$ es ligeramente confuso debido a que OllinAxis define el tamaño de la malla en una dirección como el conjunto de puntos del dominio físico y no toma en cuenta los puntos fantasma. Por otro lado Axelisol define el tamaño de la malla como el número de puntos fantasma mas el número de puntos internos e incluye uno para la frontera. Teniendo esto en cuenta se tiene la relación para el número total de puntos N_T en una dirección de ambos códigos $N_{TOllinAx} = N_{TAxelisol} - ghost + 1$.

El uso de Axelisol será principalmente para resolver la ecuación para lapso maximal y obtener datos iniciales para ondas de Brill (capítulo 6). Por completez, para el lapso maximal los coeficientes a, b, c, d, e, s y f para la ecuación (3.3.1) son

$$a = g_A/\psi^4 \quad (3.3.2)$$

$$b = 2\rho g_C/\psi^4 \quad (3.3.3)$$

$$c = g_B/\psi^4 \quad (3.3.4)$$

$$d = (g_H/\rho - \hat{\Delta}_\rho + 2g_A\partial_\rho\phi + 2\rho g_C\partial_z\phi)/\psi^4 \quad (3.3.5)$$

$$e = (-\hat{\Delta}_z + \rho g_C\partial_r\phi + g_B\partial_z\phi)/\psi^4 \quad (3.3.6)$$

$$s = -K_{ij}K^{ij} - 4\pi(\rho_{mat} + S_{mat}), \quad (3.3.7)$$

donde ρ_{mat} es la densidad de energía y S_{mat} el tensor de energía momento ambos medidos por observadores Eulerianos.

3.3.3. Buscador de horizontes

La teoría sobre el buscador de horizontes se abordará en el capítulo 4. Por el momento se describirá brevemente la subrutina. El algoritmo para la búsqueda de horizontes aparentes requiere evaluar cantidades en coordenadas esféricas (r, θ) pero no se ha implementado en OllinAxis la asignación de memoria a arreglos en estas coordenadas, en su lugar se usan interpoladores para obtener el valor de las cantidades requeridas tales como la métrica o la curvatura extrínseca en el punto (r, θ) . Los interpoladores posibles a elegir son bilineal teniendo convergencia a segundo orden o bicúbico a tercer orden [66]. El número de puntos a integrar en θ es igual al mínimo de (N_ρ, N_z) . La búsqueda del horizonte procede utilizando el método de disparo, un integrador de Runge-Kutta a cuarto orden y un refinamiento por bisección. Determinada la superficie, el área y carga eléctrica es calculada numéricamente a cuarto orden utilizando la regla de Simpson.

3.3.4. Extractor de ondas gravitacionales y ondas electromagnéticas

La extracción se realiza evaluando el escalar de Weyl Ψ_4 y el escalar Φ_2 sobre esferas de radio constante. Para ello se usa el interpolador bilinear o bicúbico (en la práctica se prefiere el interpolador bilineal dado que es para el bicúbico se requiere calcular derivadas de Ψ_4 y Φ_2 y éstas derivadas no son necesarias para la evolución del código). La descomposición multipolar es realizada utilizando el módulo `harmonix.f90` que calcula los armónicos con peso de espín $s = -2, -1, 0, 1, 2$ y una integración a cuarto orden con la regla de Simpson pudiendo calcular los modos $l = 2, 4, 6$. La energía radiada es calculada con un script de python nuevamente con un integrador de Runge-Kutta a cuarto orden.

Capítulo 4

Horizontes aparentes en axisimetría

Formalmente un agujero negro se define en una región de un espacio tiempo asintóticamente plano, como el conjunto de puntos en los que ninguna geodésica con dirección al futuro puede alcanzar al futuro infinito nulo (\mathcal{J}^+). A la frontera de un agujero negro se le llama horizonte de eventos (HE), es decir, un horizonte de eventos es la frontera entre aquellas geodésicas que pueden viajar a infinito y aquellas que no. El horizonte de eventos es una hipersuperficie $2 + 1$ formada por aquellas geodésicas nulas salientes con dirección al futuro \mathcal{J}^+ que no pueden escapar y tampoco caer al centro del agujero negro. Un horizonte de eventos es entonces una propiedad global del espaciotiempo, y en una hipersuperficie espacialoide no está definida de forma local en el tiempo, por lo que es necesaria conocer la completa evolución para determinar si existe o no un horizonte de eventos.

Por otro lado, un horizonte aparente (HA) se define como una hipersuperficie espacialoide como la superficie más externa atrapada marginalmente, en otras palabras, el horizonte aparente es la superficie tal que la expansión de geodésicas salientes es cero. A diferencia de los horizontes de eventos, en la práctica, la propiedad local de los horizontes aparentes nos permite localizarlos en cada hipersuperficie durante la evolución. Un resultado de Hawking y Ellis [67] garantiza que si se cumple la conjetura de censura cósmica y se satisface la condición de energía nula, si existe un HA entonces se tiene un HE en su exterior, que coincide con el HA si el espaciotiempo es estacionario.

4.1. Algoritmo de búsqueda

Existen diversos algoritmos de encontrar horizontes aparentes, algunos de ellos son:

- **Algoritmos de minimización.** Estos algoritmos buscan minimizar la integral del cuadrado (norma r.m.s) de la expansión de geodésicas nulas H sobre superficies de prueba. En un horizonte aparente la integral es nula, aunque numéricamente esto no sea de forma exacta por lo que debe darse cierta tolerancia.
- **Algoritmos de flujo.** Consisten en proponer una superficie de prueba lo suficientemente grande que cubra por completo al HA. Posteriormente se deja evolucionar con un tiempo ficticio de tal forma que se encogerá a la superficie correcta.

- **EDP elípticas.** En general la ecuación que satisface un HA es una ecuación en derivadas parciales del tipo elíptica, por lo que encontrar la superficie se reduce a programar un código numérico que sea capaz de resolver este tipo de ecuaciones. La desventaja es que el tipo de ecuación requiere de grandes tiempo de cómputo.
- **Algoritmos espectrales de integral iterativa** Consisten en desarrollar a la superficie en una base de armónicos esféricos y usar la ortogonalidad para encontrar ecuaciones integrales para los coeficientes. Los cuales se resolverán de forma iterativa hasta obtener convergencia.

Thornburg discute algunos detalles de los métodos mencionados en [68]. Si bien cualquiera de ellos podría ser útil, en el presente caso, se usará la simetría axial del espacio para simplificar el procedimiento.

En la descripción matemática se considera una hipersuperficie suave Σ a un tiempo constante y sea S una superficie embebida en Σ con un vector normal s^μ apuntando al exterior, la métrica inducida sobre la superficie S es

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu. \quad (4.1.1)$$

La expansión de las geodésicas está dada por el cambio del volumen en la dirección nula saliente \vec{l} ,

$$\vec{l} := \vec{n} + \vec{s}. \quad (4.1.2)$$

En esta dirección, el cambio del volumen está dada por la derivada de Lie de la métrica inducida $h_{\mu\nu}$

$$H = -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\vec{l}} h_{\mu\nu}, \quad (4.1.3)$$

que en términos de cantidades 3+1 es [69]

$$H = D_i s^i + K_{ij} s^i s^j - K. \quad (4.1.4)$$

El HA es la superficie más exterior tal que $H = 0$ sobre toda S . Suponiendo que el horizonte es parametrizado como la superficie de nivel de una función escalar F tal que $F(x^i) = 0$, el vector normal a la superficie es

$$s^i = \frac{D^i F}{\sqrt{|D^j F D_j F|}}, \quad (4.1.5)$$

obteniendo que la expansión es

$$H = \left(\gamma^{ij} - \frac{D^i F D^j F}{|D^m F D_m F|} \right) \left(\frac{D_i D_j F}{\sqrt{|D^j F D_j F|}} - K_{ij} \right) = 0. \quad (4.1.6)$$

Notemos que para tener una superficie maximal, basta con pedir que

$$D_m s^m = 0. \quad (4.1.7)$$

Así si inicialmente $K_{ij} = 0$, el horizonte aparente coincidirá con la superficie maximal.

En el caso particular de simetría axial, para resolver (4.1.6) se asume que el HA es una superficie de revolución alrededor del eje de simetría que puede ser parametrizada en coordenadas esféricas como

$$F(r, \theta) = r - R(\theta). \quad (4.1.8)$$

La parametrización anterior nos limita a superficies del tipo *strahlkörper* o cuerpo de rayos, en las que existe un punto en su interior tales que al trazar rayos, éstos la cruzan una única vez. Esquemáticamente, buscamos una función $R(\theta)$ tal que al evaluarla en (4.1.6) la expansión resulte nula.

La forma final de (4.1.6) asumiendo simetría axial es una ecuación de segundo orden para $R(\theta)$:

$$\frac{d^2 R}{d\theta^2} = \frac{-1}{\gamma^{rr}\gamma^{\theta\theta} - (\gamma^{r\theta})^2} (u^2 \gamma^{ij} - \partial^i \partial^j F) (\Gamma_{ij}^k \partial_k F + u K_{ij}), \quad (4.1.9)$$

donde Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel de la métrica espacial γ_{ij} , además

$$\partial_i F = \left(1, -\frac{dR}{d\theta}, 0 \right), \quad \partial^i F = \gamma^{im} \partial_m F, \quad (4.1.10)$$

y

$$u^2 = \partial_i F \partial^i F = \gamma^{rr} - 2\gamma^{r\theta} \left(\frac{dR}{d\theta} \right) + \gamma^{\theta\theta} \left(\frac{dR}{d\theta} \right)^2. \quad (4.1.11)$$

Notemos que (4.1.9) es una ecuación diferencial de segundo orden para $R(\theta)$, la cual puede ser resuelta con métodos numéricos estándar, por ejemplo Runge-Kutta. Las condiciones de frontera para resolver la ecuación es que en los polos, la superficie debe ser suave, es decir $R'(\theta) = 0$ con $\theta = 0, \pi$. Esta condición de frontera puede reducirse a un dominio más pequeño en casos de simetría ecuatorial, en cuyo caso podemos imponer la misma condición de frontera en $R'(\pi/2) = 0$.

Numéricamente (4.1.9) se resuelve usando el método de disparo. Se propone un radio inicial r_0 en $\theta = 0$ con $R'(0) = 0$, se integra hasta $\theta = \pi$ (o $\pi/2$ en el caso de simetría ecuatorial) y se verifica la condición $R'(\pi) = 0$ (o $R'(\pi/2) = 0$) hasta cierta tolerancia numérica. Si la derivada es distinta de cero se propone un radio inicial distinto y se repite el procedimiento.

Un detalle importante es que en los polos, el lado derecho de la ecuación 4.1.9 está indeterminado al tener un término de la forma $\cot \theta dR/d\theta$. El problema puede ser resuelto si se desarrolla en serie de Taylor a $R(\theta)$ en los polos. Por ejemplo, para $\theta = 0$ se tiene

$$R(\theta) = R(0) + \frac{1}{2} R''(0) \theta^2 + \dots, \quad (4.1.12)$$

donde se ha omitido la primera derivada de $R(\theta)$ por ser cero en los polos. Derivando esta expresión y tomando el límite cuando $\theta \rightarrow 0$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cot \theta \frac{dR}{d\theta} = R''(0), \quad (4.1.13)$$

Reemplazando (4.1.13) en (4.1.9) se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{d^2 R(0)}{d\theta^2} = S(R(0), R'(0)) + f(0) \frac{d^2 R(0)}{d\theta^2}, \quad (4.1.14)$$

donde $S(R(0), R'(0))$ son todos los términos de fuente del lado derecho de (4.1.9) que involucran a R y su primera derivada y $f(0)$ un factor regular que multiplica a la segunda derivada de R . Por lo tanto, para $\theta = 0$ la ecuación diferencial de segundo orden a resolver es

$$\frac{d^2 R(0)}{d\theta} = \frac{S(R(0), R'(0))}{1 - f(0)}. \quad (4.1.15)$$

Una vez encontrado el horizonte, podemos calcular su área que a su vez está relacionada con su masa irreducible (1.7.18). Calcular el área es tan simple como integrar el determinante de la métrica inducida sobre la superficie (4.1.1)

$$A_{AH} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{h} d\theta d\varphi \quad (4.1.16)$$

4.1.1. Pruebas numéricas en simetría esférica.

Como primer caso de prueba para el buscador de horizontes en el código OllinAxis, se emplea la solución de *bolsa de Fermi* que es una solución conocida en simetría esférica las cuales tienen una superficie mínima y máxima, cuyo exterior e interior son asintóticamente planos [70] y a $t = 0$, se impone que la curvatura extrínseca sea $K_{ij} = 0$. Este tipo de geometría no satisface la constricción hamiltoniana pero no es relevante dado que no se evolucionará el espaciotiempo. La métrica de la geometría en coordenadas esféricas (r, θ, φ) es

$$dl^2 = dr^2 + [r - \lambda f(r)]^2 d\Omega^2 \quad 0 \leq \lambda f < r, \quad (4.1.17)$$

donde λ es el parámetro de fuerza de la bolsa, $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido y

$$f(r) = \frac{1}{1 + e^{-\sigma(r-r_0)}}. \quad (4.1.18)$$

A pesar de que $f(r)$ no es regular en el origen, se pueden elegir los parámetros σ y r_0 de tal forma que en $r = 0$, el valor de f sea muy pequeño. Al haber impuesto $K_{ij} = 0$, buscamos una superficie maximal y reemplazando esta condición en (4.1.6) equivale a pedir

$$\frac{dg_{\theta\theta}}{dr} = 0. \quad (4.1.19)$$

Esta ecuación, puede resolverse de forma exacta para r , obteniendo

$$r = r_0 - \frac{1}{\sigma} \ln \left[(\lambda\sigma/2 - 1) \pm (\lambda^2\sigma^2/4 - \lambda\sigma)^{1/2} \right]. \quad (4.1.20)$$

Por lo tanto, el primer horizonte se encuentra en $\lambda = 4/\sigma, r = r_0$. Dado que OllinAxis es un código en simetría axial, debemos realizar una transformación de coordenadas esféricas a cilíndricas. Al hacer el cambio de coordenadas, las funciones A, B, C, H la métrica (3.1.1) son

$$A = \frac{z^2(r - \lambda f(r))^2}{r^4} + \frac{\rho^2}{r^2}, \quad (4.1.21)$$

$$B = \frac{\rho^2(r - \lambda f(r))^2}{r^4} + \frac{z^2}{r^2}, \quad (4.1.22)$$

$$C = \frac{(r - \lambda f(r))^2}{r^2}, \quad (4.1.23)$$

$$H = \frac{\lambda f(r)z(2r - \lambda f(r))}{r^4}, \quad (4.1.24)$$

donde $r^2 = \rho^2 + z^2$.

La ecuación (4.1.9) se resuelve con un método de Runge-Kutta a cuarto orden y como se ha mencionado anteriormente, el código OllinAxis solo almacena variables axiales por lo que es necesario realizar una interpolación para las variables pertinentes en coordenadas esféricas. En este caso, se emplea una interpolación bicúbica [66] utilizando los arreglos axiales del código OllinAxis.

Para las pruebas numéricas que se presentan a continuación se eligió $r_0 = 2.5$ y $\sigma = 1$. Con un parámetro de discretización de $\Delta_1 = 0.1, \Delta_2 = 0.05, \Delta_3 = 0.025^1$ y una malla cuadrada en (ρ, z) de $50^2, 100^2$ y 200^2 puntos respectivamente, Tabla 4.1. Al emplearse una interpolación bicúbica que converge a tercer orden, es de esperarse que el factor de convergencia sea aproximadamente 9. Notemos que el factor de convergencia para $\lambda = 4$ es de 4, indicando una convergencia a segundo orden, mientras que para $\lambda > 4$ se obtiene un factor ligeramente mayor a 16 obteniendo una convergencia a cuarto orden. La convergencia para $\lambda = 4$ posiblemente es arruinada por potencias de $1/r$, aún así el orden de convergencia es aceptable y para los demás casos es incluso mejor que el esperado.

4.2. Horizontes aparentes de agujeros negros

4.2.1. Horizonte de Schwarzschild

Un problema ligeramente más complicado para probar el código es resolver el horizonte aparente de Schwarzschild y por simplicidad se elegirá que la masa del agujero negro sea $M = 1$. Para ello supondremos por el momento que tenemos simetría ecuatorial y evolucionaremos usando una foliación del tipo $1 + \log$, con un esquema en diferencias finitas a cuarto orden. Para la simulación usamos $\Delta_1 = 1/8, \Delta_2 = 1/16, \Delta_3 = 1/32$ con una malla cuadrada en (ρ, z) de $64^2, 128^2$ y 256^2 puntos respectivamente, con un parámetro de Courant de 0.5 y evolucionado hasta $t = 10$. La evolución del horizonte aparente $R(\theta)$ se muestra en la figura 4.1.

¹A partir de ahora y para las subsecuentes pruebas numéricas, la resolución de la malla se denotará con Δ e implicará que $\Delta = \Delta\rho = \Delta z$, si los parámetros de la malla no son iguales se realizará la aclaración pertinente.

λ	R_{HA}	R_{Δ}	$\sigma_R \times 10^{-7}$	R_{Δ_2}	$\sigma_R \times 10^{-8}$	R_{Δ_3}	$\sigma_R \times 10^{-9}$	Δ_{01}/Δ_{02}	Δ_{02}/Δ_{03}
4.00	2.500	2.503	7.371	2.501	4.677	2.500	2.981	4.026	4.140
4.25	2.995	2.995	5.170	2.995	3.327	2.995	2.116	16.260	17.058
4.50	3.193	3.193	5.508	3.193	3.558	3.193	2.288	16.593	17.678
4.75	3.341	3.341	5.893	3.341	3.888	3.341	2.462	24.543	17.866

Tabla 4.1: Radio del horizonte aparente para la bolsa de Fermi con $r_0 = 2.5$ y $\sigma = 1$. La resolución inicial es $\Delta = 0.1$ y se refina por un factor de dos en cada resolución. El radio analítico es r_{HA} y los obtenidos de forma numérica son r_{Δ_i} , $i = 1, 2, 3$. El radio reportado es el promedio del radio en el intervalo $[0, \pi/2]$ y contiene hasta tres cifras significativas después del punto decimal. La incertidumbre es calculada como la desviación estándar del conjunto de valores para r . La diferencia entre los radios para un mismo valor de λ y a distintas resoluciones es del orden de 10^{-6} (no perceptible con las cifras significativas presentadas). Las últimas dos columnas es el factor de convergencia entre la solución exacta y el resultado numérico.

A $t = 0$, se tienen coordenadas isotrópicas por lo que el horizonte debe encontrarse en $R_{HA} = M/2$. Los radios encontrados para el dato inicial son $r_{\Delta_1} = 0.5008 \pm 2.42 \times 10^{-4}$, $r_{\Delta_2} = 0.50001 \pm 7.54 \times 10^{-6}$ y $r_{\Delta_3} = 0.5000005 \pm 1.05 \times 10^{-6}$, que tiene un factor de convergencia igual a 15.8 siendo consistente con el orden de convergencia esperado. Para tiempos fijos, el radio permanece constante, indicando que el horizonte evoluciona de forma esférica. Finalmente, en $t = 10$, el radio ha crecido hasta un valor aproximado de 1.5.

A pesar de que el radio del horizonte crece, el agujero negro de Schwarzschild es estacionario por lo tanto, lo que se observa es un efecto debido a las coordenadas, esto es debido a que las coordenadas están ligadas a los observadores normales (Eulerianos) y estos se encuentran en caída libre hacia el agujero negro. Una forma de ver que el horizonte en realidad no está creciendo, es calcular el área del horizonte, que en Schwarzschild es

$$A_{HA} = 4\pi R_S^2 \quad (4.2.1)$$

donde $R_S = R_{HA}\psi^2$ y $\psi = 1 + 2M/r$. Para una masa $M = 1$, se tiene $A_{HA} = 16\pi \approx 50.265$. La figura 4.2 muestra la evolución del área del horizonte, mostrando que permanece constante. El área promedio durante la evolución en las tres distintas resoluciones es $A_{\Delta_1} = 50.2426235 \pm 0.0927208$, $A_{\Delta_2} = 50.2662432 \pm 0.0011805$, $A_{\Delta_3} = 50.2656 \pm 9 \times 10^{-5}$, resultando en un factor de convergencia de 16.5 confirmando de nuevo que converge a cuarto orden.

Con el caso esférico en simetría ecuatorial cubierto, el siguiente caso es encontrar el horizonte aparente en el intervalo $[0, \pi]$. El cual será relevante para encontrar el horizonte aparente de dos agujeros negros en trayectoria de colisión.

Para el rango completo, la ecuación (4.1.9) no parece tener ningún problema de estabilidad, sin embargo, un detalle que no es mencionado en los libros de texto o artículos que describen el procedimiento, es que al integrar en el rango completo $[0, \pi]$, para algunos valores iniciales r_0 del método de disparo, $R(\theta)$ no converge si $\theta > \pi/2$, es decir, la ecuación diferencial para el horizonte aparente es inestable, por lo cual el método de disparo usado en el caso de simetría ecuatorial fallará. Como ejemplo se muestra el caso del horizonte aparente de Schwarzschild con $M = 1$, figura 4.3.

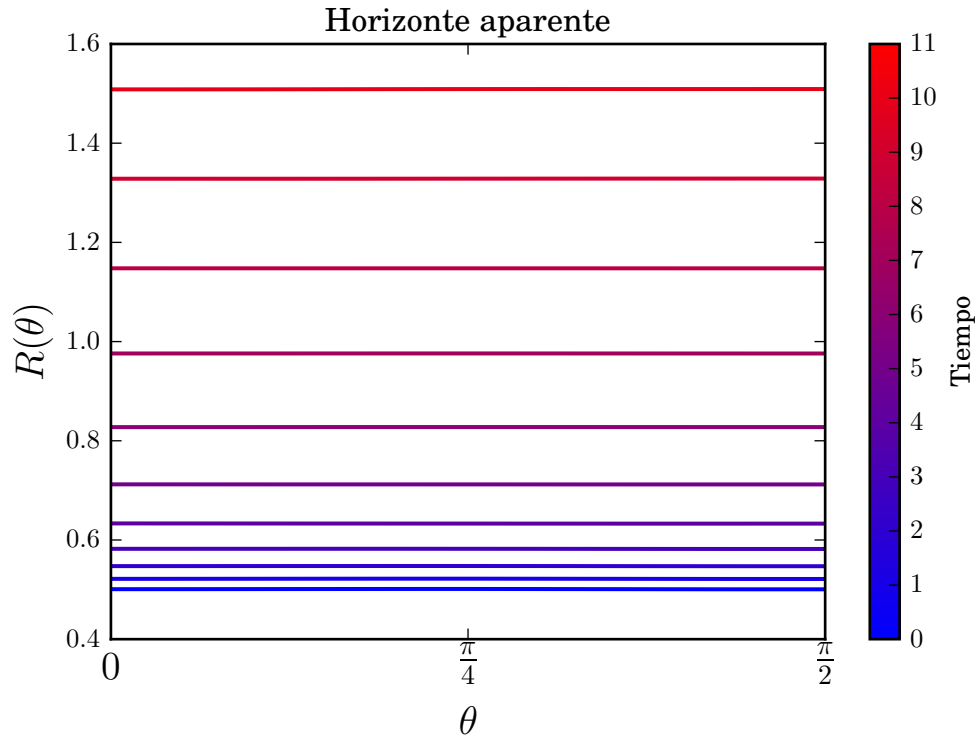


Figura 4.1: Evolución del horizonte aparente en Schwarzschild a cuarto orden usando una foliación $1 + \log$ con parámetro de discretización $\Delta_3 = 1/2^5$. Cada color representa el radio a un tiempo constante y está indicado en la barra derecha.

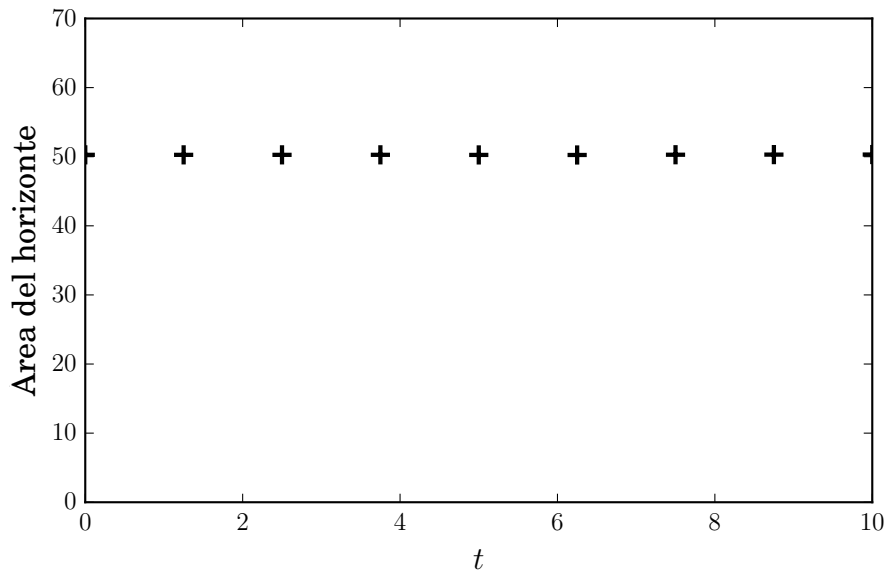


Figura 4.2: El área de del horizonte aparente permanece constante durante la evolución.

Para diferentes radios iniciales r_0 en el intervalo $[0.25, 1.0]$, los radios resueltos por el método de disparo divergen antes de $\theta = \pi$. La forma en que diverge es, si R_0 es el radio del horizonte aparente y $\bar{\theta}$ es el ángulo en que diverge, al tomar como condición inicial $r_0 > R_0$, $R'(\bar{\theta}) > 0$ y si $r_0 < R_0$,

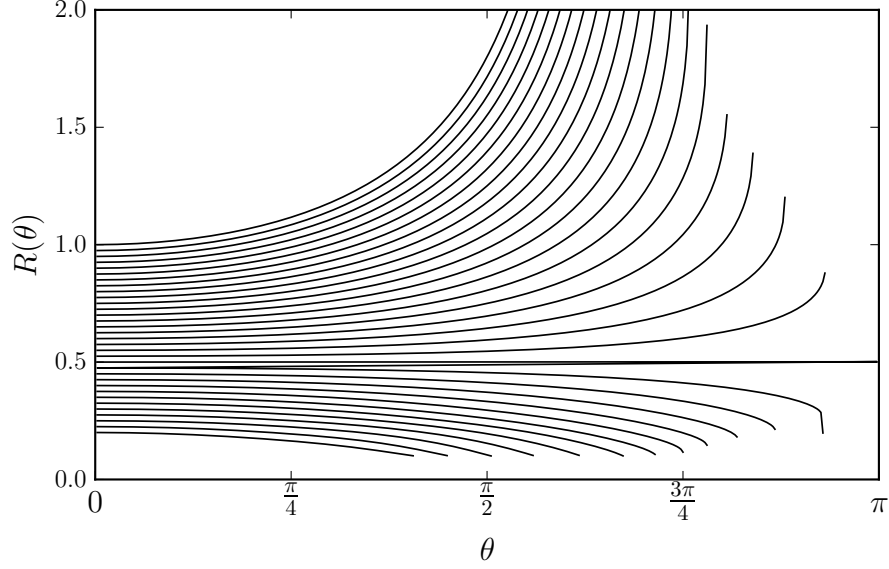


Figura 4.3: Radios resueltos para la superficie del horizonte aparente encontrados con diferentes radios iniciales cuando θ toma los valores $[0, \pi]$.

$R'(\bar{\theta}) < 0$, figura 4.4 Esta observación sugiere buscar un cambio en el signo de $R'(\theta)$ y realizar un

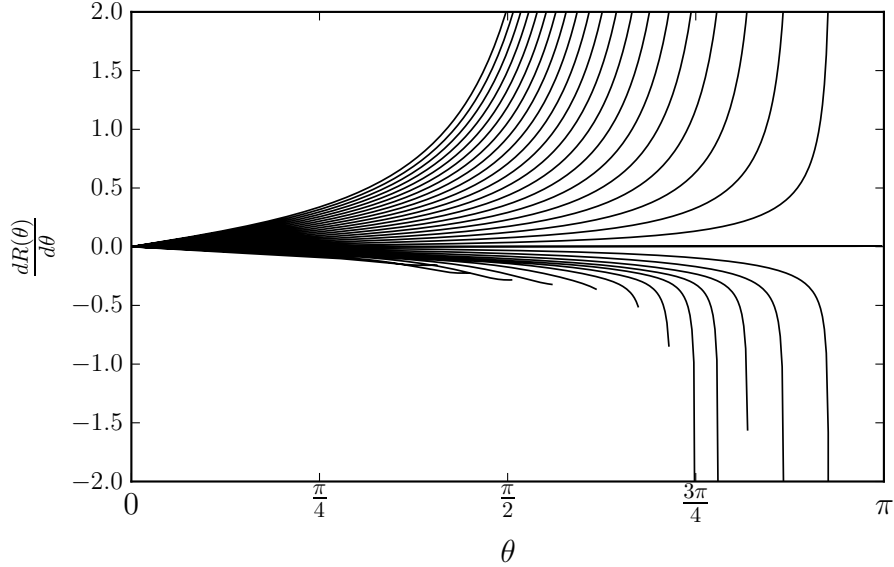


Figura 4.4: Derivada del radio del horizonte aparente respecto al ángulo para distintas condiciones iniciales en el caso de Schwarzschild.

método de bisección para encontrar $R'(\theta)$ tal que $R'(\pi) = 0$ con cierta tolerancia numérica.

Con esta corrección, se realizaron tres simulaciones para el agujero negro de Schwarzschild con una foliación del tipo $1 + \log$ y $M = 1$. Tomando $\Delta_1 = 0.125$, $\Delta_2 = 0.0625$ y $\Delta_3 = 0.03125$, con mallas en (ρ, z) de $(32, 64)$, $(64, 128)$ y $(256, 512)$ puntos respectivamente, en un esquema de diferencias finitas a cuarto orden y evolucionando hasta $t = 10$. El radio del horizonte aparente en

$t = 0$ para las distintas resoluciones son $R_{\Delta_1} = 0.5001013 \pm 4 \times 10^{-4}$, $R_{\Delta_2} = 0.499995 \pm 2.04 \times 10^{-5}$ y $R_{\Delta_3} = 0.4999998 \pm 1.23 \times 10^{-6}$, con un factor de convergencia de 22.1. El área del horizonte aparente es $A_{\Delta_1} = 50.2676 \pm 1.25 \times 10^{-2}$, $A_{\Delta_2} = 50.265556 \pm 6.17 \times 10^{-4}$ y $A_{\Delta_3} = 50.265479 \pm 2.65 \times 10^{-5}$ con un factor de convergencia de 26.5. Ambos factores de convergencia nos indican una convergencia ligeramente superior a cuarto orden, mostrando la utilidad de la modificación al método de disparo.

4.2.2. Formación de horizontes en la colisión frontal de agujeros negros

Como primera aplicación del encontrador de horizontes, se presenta la simulación de la colisión frontal de agujeros negros sin espín en simetría axial usando datos iniciales del tipo Brill-Lindquist. Los agujeros negros considerados son idénticos permitiendo realizar la simulación en simetría ecuatorial para reducir los costos de cómputo. Los datos iniciales son, la distancia al ecuador z_0 y la masa m de cada agujero negro, para el caso que se muestra, los parámetros son $z_0 = 5.0$ y $m = 0.5$. En términos de la masa total del sistema, los parámetros son $z_0 = 5/M$ y $m = 0.5M$. La resolución de la simulación es $\Delta = M/20$ y las fronteras se encuentran en $50M$. Como condiciones de norma se usó la evolución del lapso del tipo $1 + \log$ con un lapso precolapsado ψ^4 y un shift del tipo Gamma-Driver con un factor de disipación de $\eta = 2/M$. La evolución es realizada a cuarto orden en tiempo y espacio utilizando un parámetro de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) $C = 0.5$.

Para encontrar los horizontes aparentes asociados a cada agujero negro, es necesario situar el origen de las coordenadas esféricas en la posición de los máximos del factor conforme ψ . Suponiendo que el máximo se encuentra en un punto z' , la única variable a modificar es el ángulo polar θ , el cual queda definido por

$$\theta := \arccos \frac{z - z'}{r}, \quad (4.2.2)$$

con r el radio coordenado medido desde z' . De esta forma si el máximo se encuentra en el origen $(\rho, z) = (0, 0)$, el ángulo polar queda definido de la forma usual (apéndice C).

Inicialmente las punturas parten del reposo y se aceleran hasta colisionar en el centro de masa del sistema. Durante su recorrido los horizontes se deforman, pasando de un horizonte inicialmente esférico a uno prolato (achatado en el ecuador), figura 4.5. Al usar una escala de colores para representar los horizontes a distintos tiempos, resalta que los horizontes permanecen cerca de la distancia inicial hasta $t \sim 28$ para posteriormente acelerar la colisión, la cual ocurre en $t \sim 55$. El buscador de horizontes puede resolver el horizonte individual de los agujeros negros hasta $t \sim 52$, pero a $t \sim 46.5$ se forma un horizonte común, figura 4.6, el cual crece hasta tornarse esférico. Al no tener momento angular ni momento lineal se tiene como resultado un agujero negro de Schwarzschild con masa $m = 0.97$, siendo evidencia de que se ha alcanzado un espaciotiempo estacionario, figura 4.7.

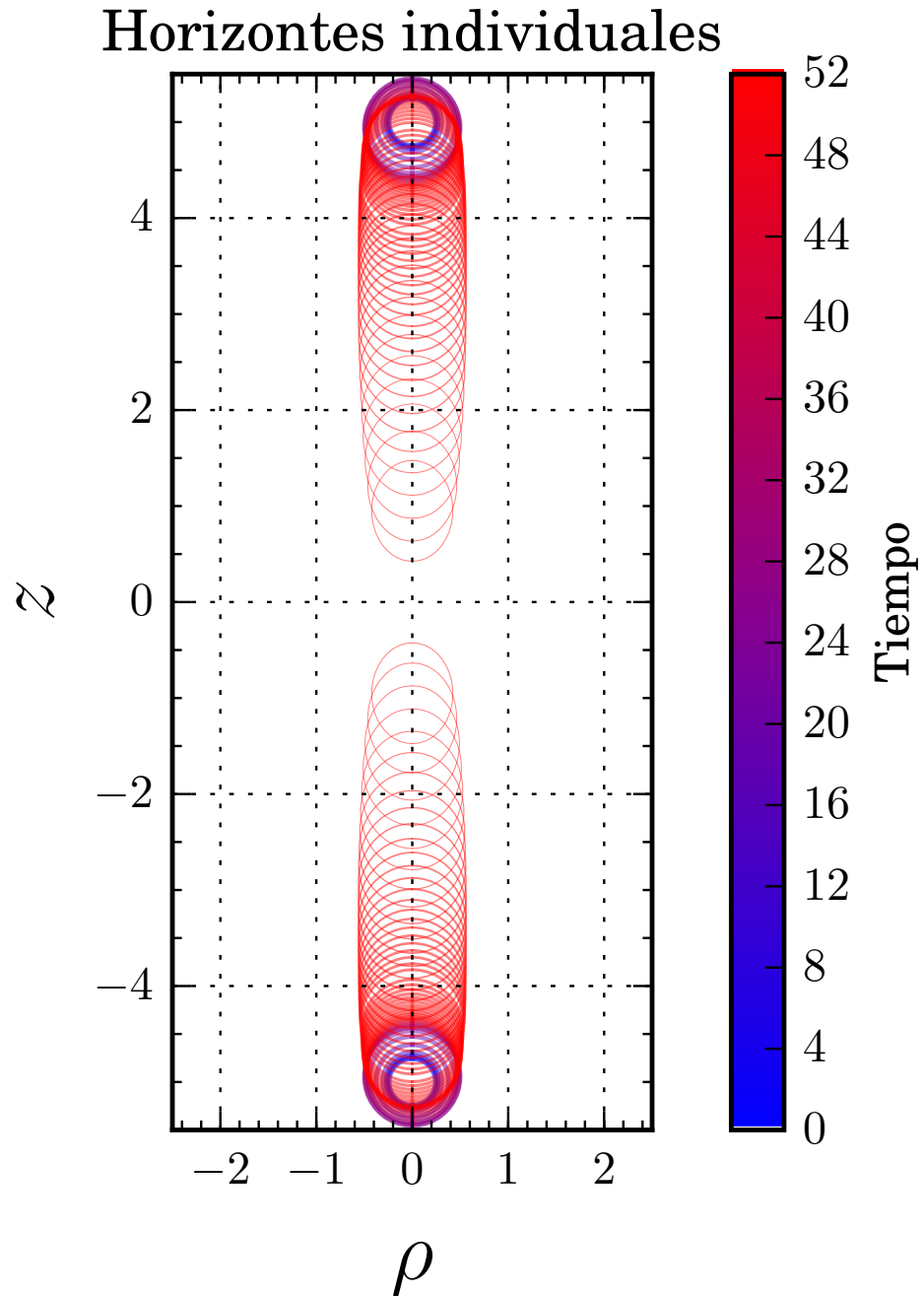


Figura 4.5: Horizontes individuales de cada puntura. El buscador de horizontes puede resolver los horizontes individuales desde la distancia inicial $z = 5$ hasta $z \approx 1.3$

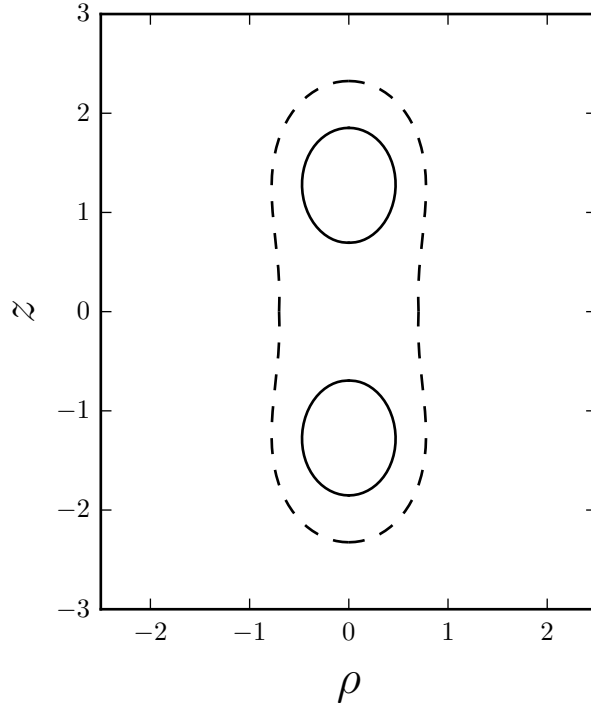


Figura 4.6: A $t \sim 46.5$ se forma un horizonte común a los agujeros negros que encierra a los individuales.

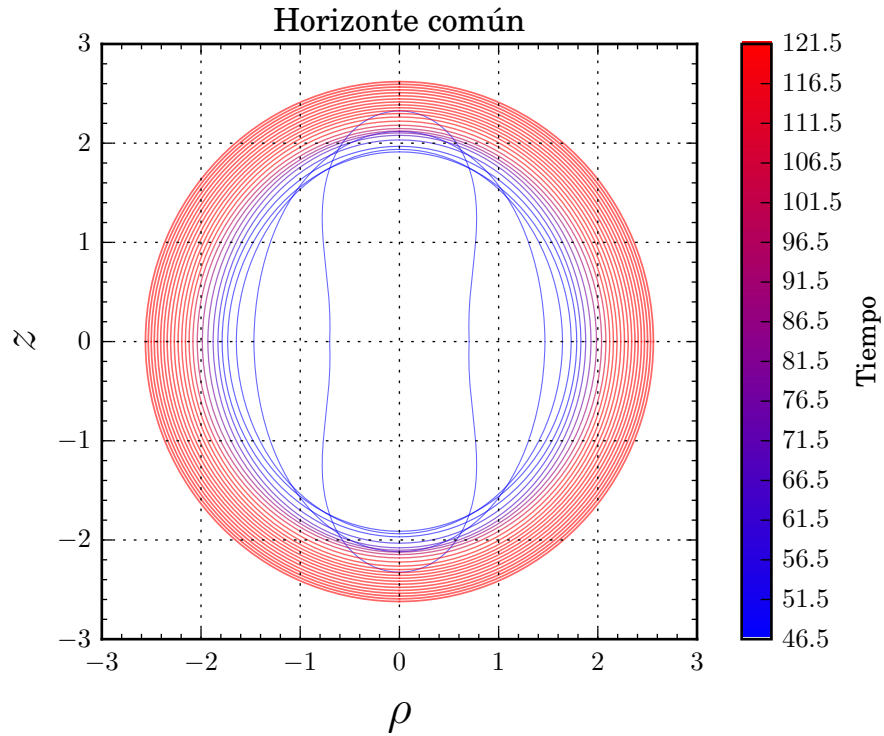


Figura 4.7: El horizonte común crece hasta tornarse esférico. Evidencia de que se ha alcanzado un estado estacionario.

Capítulo 5

Extracción de radiación

Uno de los objetivos de emplear técnicas numéricas en relatividad es obtener las señales de ondas gravitacionales generadas por eventos astrofísicos. Una forma de extraer la radiación en las simulaciones consiste en expresar los tensores relevantes en términos de escalares complejos de Newmann-Penrose. Empleando este formalismo, la radiación gravitacional está codificada en el escalar Ψ_4 y la radiación electromagnética en Φ_2 .

5.1. Extracción de ondas gravitacionales

5.1.1. Ecuaciones linealizadas de Einstein

Las ondas gravitacionales son ondulaciones del espacio tiempo. Lejos de las fuentes que las originan podemos considerar que el espacio es del tipo Minkowski más una perturbación

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O((h_{\mu\nu})^2), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (5.1.1)$$

los símbolos de Christoffel linealizados asociados a esta métrica, son

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\beta} h_{\alpha}^{\mu} + \partial_{\alpha} h_{\beta}^{\mu} - \partial^{\mu} h_{\alpha\beta} \right). \quad (5.1.2)$$

Una vez calculados, el tensor de Ricci es

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\alpha} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\alpha} + \partial_{\alpha} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\alpha} - \partial_{\alpha} \partial^{\alpha} h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h \right), \quad (5.1.3)$$

donde

$$h := h_{\alpha}^{\alpha} = \eta^{\mu\alpha} h_{\mu\alpha}. \quad (5.1.4)$$

En la aproximación lineal, el escalar de Ricci es la contracción del tensor de Ricci con el tensor contravariante de la métrica de Minkowski

$$R \simeq \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (5.1.5)$$

Finalmente, en su versión linealizada, las ecuaciones de Einstein son

$$\partial^\alpha \partial_\nu h_{\mu\alpha} + \partial^\alpha \partial_\mu h_{\nu\alpha} - \partial_\alpha \partial^\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \left(\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^\alpha \partial_\alpha h \right) = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (5.1.6)$$

A pesar de simplificarse considerablemente, las ecuaciones de Einstein aún no sugieren un comportamiento de tipo onda. Para convertir la ecuación (5.1.6) a una del tipo onda, definimos el tensor de traza inversa

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^\lambda{}_\lambda. \quad (5.1.7)$$

con lo cual (5.1.6) se reduce a:

$$-\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} + 4\partial^\alpha \partial_{(\mu} \bar{h}_{\nu)\alpha} = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (5.1.8)$$

El lado izquierdo es el operador D'Alambertiano en el espacio plano, $\square \bar{h}_{\mu\nu} := \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu}$ que se puede asociar a un operador para la ecuación de onda. Los términos restantes pueden ser eliminados si consideramos la libertad de norma asociada a cambios infinitesimales en las coordenadas: $x^{\bar{\mu}} = x^\mu + \xi^\mu$, con $\vec{\xi}$ un vector pequeño tal que $|\partial_\nu \xi^\mu| \ll 1$. Se tiene la transformación

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - 2\partial_{(\mu} \xi_{\nu)}. \quad (5.1.9)$$

En la *norma de Lorentz* elegimos un vector $\vec{\xi}$ tal que sea la solución de

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \xi^\beta = \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (5.1.10)$$

por lo tanto, la aproximación lineal en la norma de Lorentz, las ecuaciones de Einstein son

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}. \quad (5.1.11)$$

Notemos que es una ecuación de onda para $h_{\mu\nu}$. En el vacío $T_{\mu\nu} = 0$, la solución más simple para la ecuación de onda (5.1.11) es

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (5.1.12)$$

donde $A_{\mu\nu}$ es la amplitud de la onda y k^α es el vector de onda. Como $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, inmediatamente se obtiene que

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (5.1.13)$$

es decir k^α es un vector nulo y por lo tanto las ondas se propagan a la velocidad de la luz. Además, en la norma de Lorentz, $\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ tenemos:

$$A_{\mu\nu} k^\mu = 0, \quad (5.1.14)$$

que significa que la amplitud es perpendicular a la dirección de propagación, es decir son ondas transversales que viajan en la geometría del espaciotiempo.

Un hecho falta por ser explotado y es reducir el número de grados de libertad. Hasta ahora parecería que son seis las componentes de las ondas gravitacionales, diez asociadas a la métrica por

ser un tensor simétrico menos cuatro obtenidas por la elección de la norma de Lorentz. Es debida a esta última que podemos sumar un vector a la amplitud $A_{\mu\nu}$ tal que $\square \bar{\xi}^\alpha = 0$ y las ecuaciones permanecen inalteradas. Dicho esto, elegimos $\bar{\xi}^\alpha$ tal que $A_{\mu\nu}$ sea sin traza y ortogonal a un vector arbitrario temporal u^α unitario

$$A^\mu{}_\mu = 0, \quad A_{\mu\nu}u^\nu = 0. \quad (5.1.15)$$

Un tensor que cumpla con lo anterior se le llama tensor transversal sin traza o TT (del inglés transverse-traceless) por tener traza nula y ser ortogonal a su dirección de propagación. Si tomamos $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ y la propagación en dirección z entonces las componentes distintas de cero e independientes son

$$A_{11} = -A_{22} = A^+, \quad A_{12} = A_{21} = A^\times, \quad (5.1.16)$$

Por lo anterior, las ondas gravitacionales únicamente tienen dos polarizaciones, las cuales llamaremos $+$ y \times .

Si calculamos la 4-velocidad partículas de prueba bajo la influencia de una onda gravitacional se obtiene que permanece constante, y esto da la impresión de que el efecto de las ondas gravitacionales es meramente un efecto de norma y no físico. Sin embargo, debemos recordar que se eligió la norma TT en el que estamos en el sistema de referencia de las partículas y por lo tanto en este sistema la velocidad propia debe permanecer constante. El efecto físico que producen ambas polarizaciones se calcula a partir de las fuerzas de marea. Si suponemos a una colección de partículas momentáneamente en reposo separadas por el vector de posición \vec{l} , la aceleración relativa es

$$\frac{d\ddot{l}_j}{d\tau} = \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk}^{TT} l^k. \quad (5.1.17)$$

Si a $t = 0$, las partículas estaban en el plano xy en x_0, y_0 , y una onda se propaga en dirección z , la posición relativa de las partículas es

$$x = x_0 + \frac{h^+}{2} x_0 \sin \omega t, \quad (5.1.18)$$

$$y = y_0 - \frac{h^+}{2} y_0 \sin \omega t, \quad (5.1.19)$$

$$(5.1.20)$$

para polarización $+$. Para la polarización \times se tiene

$$x = x_0 + \frac{h^\times}{2} x_0 \sin \omega t, \quad (5.1.21)$$

$$y = y_0 + \frac{h^\times}{2} y_0 \sin \omega t, \quad (5.1.22)$$

$$(5.1.23)$$

donde se ha elegido $k^\alpha = (\omega, 0, 0, k_z)$. El efecto es más ilustrativo en una colección de partículas que formen un anillo. En la polarización $+$ las partículas son comprimidas y elongadas en la dirección x, y mientras que en la polarización \times , la compresión y elongación se produce en las diagonales.

5.1.2. El tensor de Weyl y el formalismo de Newmann-Penrose

El método que usaremos para la extracción de ondas gravitacionales está basado en el tensor de Weyl y su descomposición en funciones escalares empleando el formalismo de Newmann-Penrose.

La curvatura de un espacio en n dimensiones está codificada en las $n^2(n^2 - 1)/2$ componentes independientes del tensor de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Su contracción, el tensor de Ricci tiene $n(n + 1)/2$ componentes independientes, esto motiva a definir al tensor de Riemann en términos de su parte sin traza y el tensor de Ricci.

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} := R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{2}{n-2} [g_{\alpha[\mu}R_{\nu]\beta} - g_{\beta[\mu}R_{\nu]\alpha}] + \frac{2}{(n-1)(n-2)} g_{\alpha[\mu}g_{\nu]\beta}R. \quad (5.1.24)$$

a $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ se le conoce como el tensor de Weyl. Notemos que en un espacio de cuatro dimensiones, el tensor de Riemann tiene 20 componentes, 10 de ellas están especificadas en su contracción, el tensor de Ricci. Las restantes están codificadas en su parte sin traza, el tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\mu\nu}$. Notemos que en vacío el tensor de Riemann y el de Weyl coinciden.

Usando al tensor de Weyl podemos construir su parte eléctrica y magnética

$$E_{\mu\nu} := n^\alpha n^\beta C_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (5.1.25)$$

$$B_{\mu\nu} := n^\alpha n^\beta C_{\alpha\beta\mu\nu}^*, \quad (5.1.26)$$

donde n^α es un vector unitario temporaloide y $C_{\alpha\beta\mu\nu}^*$ es el tensor dual de Weyl.

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}^* := \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\lambda\sigma} \epsilon^{\lambda\sigma}_{\mu\nu}, \quad (5.1.27)$$

y $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ es el tensor de Levi-Civita. Las simetrías del tensor de Weyl implican que $E_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ son tensores simétricos, sin traza y espacialoides en el sentido de que

$$n^\mu E_{\mu\nu} = 0, \quad n^\mu B_{\mu\nu} = 0. \quad (5.1.28)$$

usando las ecuaciones de Gauss-Codazzi (1.1.9) y Codazzi-Mainardi (1.1.10) escribimos $E_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ en el lenguaje 3+1 como

$$E_{ij} = R_{ij} + K K_{ij} - K_{im} K_j^m - 4\pi \left[S_{ij} + \frac{1}{3} (4\rho - S) \right], \quad (5.1.29)$$

$$B_{ij} = \epsilon_i^{mn} [D_m K_{nj} - 4\pi \gamma_{jm} j_n], \quad (5.1.30)$$

con $\epsilon_{\beta\mu\nu} = n^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$. En el formalismo BSSN, podemos reescribirlas como

$$E_{ij} = {}^{(3)}R_{ij} + e^{4\phi} \left(-\hat{A}_{im} \hat{A}_j^m + \frac{1}{3} K \hat{A}_{ij} + \frac{2}{9} \hat{\gamma}_{ij} K^2 \right), \quad (5.1.31)$$

$$B_{ij} = \epsilon_{(i}^{mn} D_m A_{j)n}. \quad (5.1.32)$$

5.1.3. Escalares de Weyl

En el formalismo de Newman-Penrose, las 10 componentes del tensor del Weyl se expresan en cinco escalares complejos $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_4$. Los escalares son construidos a partir de una tétrada compleja nula, para ello, es necesario reescribir la métrica en términos de un sistema ortonormal de tétradas $\{\vec{e}_{(a)}\}$ tales que

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)}, \quad (5.1.33)$$

tal que $\eta_{(a)(b)}$ son las componentes de la métrica de Minkoski. Utilizando al sistema de tétradas la métrica se reescribe como

$$g_{\mu\nu} = -e_{(0)\mu}e_{(0)\nu} + e_{(1)\mu}e_{(1)\nu} + e_{(2)\mu}e_{(2)\nu} + e_{(3)\mu}e_{(3)\nu}, \quad (5.1.34)$$

donde se elige a $e_{(0)}^\mu = n^\mu$ como el vector normal unitario a las hipersuperficies, $e_{(1)}^\mu = e_r^\mu$ como el vector radial unitario en coordenadas esféricas y $(e_{(2)}^\mu, e_{(3)}^\mu)$ son los vectores unitarios en las direcciones angulares. En general e_θ^μ y e_ϕ^μ no son ortogonales por lo que debe emplearse el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para construir una base ortogonal. Con estas definiciones, la tétrada nula se construye como

$$l^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_{(0)}^\mu + e_{(1)}^\mu \right), \quad (5.1.35)$$

$$k^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_{(0)}^\mu - e_{(1)}^\mu \right), \quad (5.1.36)$$

$$m^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_{(2)}^\mu + ie_{(3)}^\mu \right), \quad (5.1.37)$$

$$\bar{m}^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_{(2)}^\mu - ie_{(3)}^\mu \right). \quad (5.1.38)$$

Estos vectores forman la tétrada y satisface que los únicos productos internos distintos de cero son

$$-l^\mu k_\mu = m^\mu \bar{m}_\mu = 1. \quad (5.1.39)$$

A partir de estas definiciones, los escalares de Weyl se definen como

$$\Psi_0 := C_{\alpha\beta\mu\nu} l^\alpha m^\beta l^\mu m^\nu, \quad (5.1.40)$$

$$\Psi_1 := C_{\alpha\beta\mu\nu} l^\alpha k^\beta l^\mu m^\nu, \quad (5.1.41)$$

$$\Psi_2 := C_{\alpha\beta\mu\nu} l^\alpha m^\beta \bar{m}^\mu k^\nu, \quad (5.1.42)$$

$$\Psi_3 := C_{\alpha\beta\mu\nu} l^\alpha k^\beta \bar{m}^\mu k^\nu, \quad (5.1.43)$$

$$\Psi_4 := C_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha \bar{m}^\beta k^\mu \bar{m}^\nu. \quad (5.1.44)$$

$$(5.1.45)$$

En el lenguaje 3+1, definiendo el tensor $Q_{ij} := E_{ij} - iB_{ij}$, los escalares de Weyl son

$$\Psi_0 := Q_{ij}m^i m^j, \quad (5.1.46)$$

$$\Psi_1 := -\frac{1}{2}Q_{ij}m^i e_r^j, \quad (5.1.47)$$

$$\Psi_2 := \frac{1}{2}Q_{ij}e_r^i e_r^j, \quad (5.1.48)$$

$$\Psi_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}Q_{ij}\bar{m}^i e_r^j, \quad (5.1.49)$$

$$\Psi_4 := Q_{ij}\bar{m}^i \bar{m}^j. \quad (5.1.50)$$

Una propiedad importante de los escalares de Weyl se obtiene del *teorema de Peeling*, que nos dice que asintóticamente se comportan como

$$\Psi_n \sim \frac{1}{r^{5-n}}, \quad (5.1.51)$$

esta propiedad nos permitirá comparar los resultados de la extracción de ondas gravitacionales de dos observadores a distintos radios. Si éstos se encuentran en la región asintóticamente plana, $r\Psi^4$ deberán obtener mediciones similares difiriendo únicamente en el tiempo de medición pues la señal de ondas gravitacionales se propagan a la velocidad de la luz.

5.1.4. Energía radiada por ondas gravitacionales

En relatividad general, generalmente no es posible definir de forma global el concepto de energía. Si bien, se tiene la ley de conservación para el tensor de energía-momento $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, esta conservación es únicamente a nivel local puesto que el tensor de energía-momento que representa a la densidad de energía de la materia, no considera la energía asociada al campo gravitacional. Sin embargo, en espacios asintóticamente planos, es posible definir el concepto de energía y para nuestro interés se definirá el flujo de energía emitido por ondas gravitacionales en la aproximación de campo débil.

El tensor de energía-momento asociado a las ondas gravitacionales, se deriva a partir de considerar una métrica de fondo y una perturbación a segundo orden

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \epsilon h_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon^2 h_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (5.1.52)$$

Desarrollando las ecuaciones de Einstein a segundo orden, se obtienen términos que son lineales en la perturbación a segundo orden $h_{\mu\nu}^{(2)}$ y cuadráticos en la perturbación a primer orden $h_{\mu\nu}^{(1)}$. Al tomar un promedio sobre distintas longitudes de onda, se obtiene el *tensor de energía-momento de Isaacson*, que en la norma TT toma la forma

$$T_{\mu\nu}^G = \frac{1}{32\pi} \left\langle h_{\alpha\beta|\mu} h_{|\nu}^{\alpha\beta} \right\rangle, \quad (5.1.53)$$

donde $|_\mu$ es la derivada covariante respecto a la métrica $g_{\mu\nu}^{(0)}$. La energía radiada se calcula asumiendo que la medición se realiza muy lejos de la fuente que la originó, pudiendo tomar la métrica de fondo

como Minkowski. En coordenadas localmente planas la perturbación toma la forma

$$h_{\mu\nu} = h^+ A_{\mu\nu}^+ + h^\times A_{\mu\nu}^\times, \quad (5.1.54)$$

donde $h^{+, \times}$ son la amplitud de las dos polarizaciones y $A_{\mu\nu}$ son los tensores de polarización simétricos que cumplen (5.1.14) y (5.1.15). Tomando la base ortonormal $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$, elegimos la normalización tal que $A_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^+ = A_{\hat{\theta}\hat{\varphi}}^\times = 1$ y las componentes distintas de cero son

$$A_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^+ = -A_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}^+ = 1, \quad (5.1.55)$$

$$A_{\hat{\theta}\hat{\varphi}}^\times = -A_{\hat{\varphi}\hat{\theta}}^\times = 1. \quad (5.1.56)$$

$$(5.1.57)$$

Usando lo anterior el tensor de Isaacson en coordenadas un sistema localmente cartesiano toma la forma

$$T_{\mu\nu}^G = \frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial_\mu H \partial_\nu \bar{H} S \rangle, \quad (5.1.58)$$

donde $H := h^+ - ih^\times$ y $\text{Re}(z)$ es la parte real de z .

Asumiendo de nuevo que nos encontramos lejos de la fuente, en el vacío el tensor de Riemann y Weyl coinciden y en la norma TT para ondas que viajan en la dirección \hat{r} , los escalares de Weyl son

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad (5.1.59)$$

$$\Psi_0 = -\frac{1}{4}(\partial_t^2 h^+ + 2\partial_t \partial_r h^+ + \partial_r^2 h^+) - \frac{i}{4}(\partial_t^2 h^\times + 2\partial_t \partial_r h^\times + \partial_r^2 h^\times), \quad (5.1.60)$$

$$\Psi_4 = -\frac{1}{4}(\partial_t^2 h^+ - 2\partial_t \partial_r h^+ + \partial_r^2 h^+) + \frac{i}{4}(\partial_t^2 h^\times - 2\partial_t \partial_r h^\times + \partial_r^2 h^\times). \quad (5.1.61)$$

resulta que la cantidad H puede ser reescrita en términos del escalar de Weyl Ψ_4 . Para ondas salientes $h = h(t - r)$, $\partial_t h = -\partial_r h$.

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad (5.1.62)$$

$$\Psi_4 = -\ddot{h}^+ + i\ddot{h}^\times = \ddot{H}. \quad (5.1.63)$$

Por lo tanto

$$H = - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{t'} \Psi_4 dt'' dt. \quad (5.1.64)$$

Para ondas entrantes $\partial_t h = \partial_r h$ y el único escalar de Weyl distinto de cero es $\Psi_0 = -\ddot{H}$. Es importante notar que las expresiones anteriores solo son válidas en un espacio plano al no haber una forma única de elegir tétradas nulas. Sin embargo, en cualquier elección de tétradas éstas tienden asintóticamente a las tétradas esféricas del espacio plano.

La componente T^{0i} del tensor de energía momento representa el flujo de energía en la dirección i , aplicando esto al tensor de energía-momento de las ondas gravitacionales, el flujo de energía en la dirección r es

$$\frac{dE_{rad}^G}{dt dA} = \frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial^0 H \partial^r \bar{H} \rangle = -\frac{1}{16\pi} \text{Re} \langle \partial_t H \partial_r \bar{H} \rangle , \quad (5.1.65)$$

con dA es el elemento de área ortogonal a la dirección radial. Para ondas salientes $\partial_t h = -\partial_r h$

$$\frac{dE_{rad}^G}{dt dA} = \langle |\dot{H}|^2 \rangle . \quad (5.1.66)$$

Por lo tanto, el flujo total de energía es

$$\frac{dE_{rad}^G}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 d\Omega . \quad (5.1.67)$$

5.2. Extracción de ondas electromagnéticas

Al igual que con el tensor de Weyl, en el formalismo de Newman-Penrose se definen escalares complejos asociados a las ecuaciones de Maxwell [71], los cuales son

$$\Phi_0 := F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu , \quad (5.2.1)$$

$$\Phi_1 := \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu k^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu) , \quad (5.2.2)$$

$$\Phi_2 := F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu k^\nu , \quad (5.2.3)$$

donde, k, l, m, \bar{m} son las tétradas definidas en (5.1.35), (5.1.36), (5.1.37), (5.1.38). Los escalares $\Phi_{1,2}$ se comportan para ondas salientes como

$$\Phi_1 \sim \frac{1}{2} (E_{\hat{r}} + iB_{\hat{r}}) , \quad (5.2.4)$$

$$\Phi_2 \sim E_{\hat{\theta}} - iE_{\hat{\phi}} , \quad (5.2.5)$$

cuyo comportamiento asintótico [72] es $\Phi_0 \sim r^{-3}$, $\Phi_1 \sim r^{-2}$ y $\Phi_2 \sim r^{-1}$. Un invariante asociado al campo [26] está dado por

$$\Phi_0 \Phi_2 - \Phi_1^2 = \frac{1}{8} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}) . \quad (5.2.6)$$

Un campo electromagnético es llamado nulo si el invariante anterior es cero, en otras palabras, si $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$ y $F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} = 0$. Por otro lado, un vector nulo V^μ es una dirección principal si

$$F_{\mu[\nu} V_{\sigma]} V^\mu = 0 . \quad (5.2.7)$$

Si V^μ es cualquiera de las tétradas definidas, entonces esta codición es equivalente a tener $\Phi_0 = 0$. Siguiendo la misma idea de la clasificación de Petrov (apéndice B) para los escalares de Newman-Penrose $\Psi_{0,1,2,3,4}$ [72], un campo electromagnético nulo tiene una dirección principal de multiplicidad dos y si está alineado con la tétrada l^μ , el tensor de energía momento será

$$T_{EM}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \Phi_2 \bar{\Phi}_2 l^\mu l^\nu . \quad (5.2.8)$$

Por lo tanto el flujo de energía radiada en dirección r es

$$\frac{dE_{rad}^{EM}}{dt dA} = T^{tr} = \frac{1}{4\pi} \Phi_2 \bar{\Phi}_2 l^t l^r . \quad (5.2.9)$$

Notemos que asintóticamente cuando $r \rightarrow \infty$, $l^\mu \rightarrow 1$ para $\mu = t, r$. Con esto, el flujo total de energía radiada es

$$\frac{dE_{rad}^{EM}}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{4\pi} \int |\Phi_2|^2 d\Omega , \quad (5.2.10)$$

donde se ha tomado el límite de l^μ .

5.2.1. Estimación clásica de la energía emitida

Antes de proceder con las colisiones en el marco de relatividad general, es ilustrativo calcular la energía emitida por el choque de partículas puntuales cargadas en un marco clásico para conocer las diferencias, para ello consideremos partículas de carga $q = Q/2$ y masa $m = M/2$ colocadas a una distancia $z = \pm d/2$ del ecuador.

Para dos partículas cargadas con masa m_1, m_2 , carga q_1, q_2 y separadas una distancia r , la energía potencial asociada al sistema es

$$V = \frac{-Gm_1 m_2}{r} + k \frac{q_1 q_2}{r} , \quad (5.2.11)$$

con G la constante de gravitación universal y k la constante de Coulomb las cuales para fines prácticos se tomarán como $G = k = 1$. En el caso de interés se considera $m_1 = m_2 = M/2$ y $q_1 = q_2 = Q/2$. Para reducir el número de variables del sistema, se aprovecha la simetría ecuatorial del problema, representando por z la distancia de una partícula al eje ecuatorial ($z = 0$). Si las partículas parten del reposo en $z = d/2$, empleando el teorema de conservación de energía se tiene

$$M\dot{z}^2 - \frac{M^2 \kappa}{4z} = -\frac{M^2 \kappa}{2d} , \quad (5.2.12)$$

donde $\kappa := 1 - Q^2/M^2$. La ecuación de movimiento se obtiene al derivar respecto de t

$$\ddot{z} = -M \frac{\kappa}{8z^2} \quad (5.2.13)$$

Para calcular la energía radiada, calculemos el desarrollo multipolar del campo eléctrico \vec{E} en la dirección \hat{r} de la configuración [73].

$$E_{\hat{r}} = 4\pi \sum_{l,m} \frac{(l+1)}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+2}} , \quad (5.2.14)$$

donde Y_{lm} el armónico esférico de grado l y orden m , q_{lm} son los coeficientes del desarrollo multipolar

$$q_{lm} = \int \bar{Y}_{lm}(\theta', \phi') r'^l \rho_{em}(\vec{x}') d^3 \vec{x}' . \quad (5.2.15)$$

La densidad de carga en términos de funciones delta de Dirac es

$$\rho_{em}(\vec{x}) = \frac{Q}{2} [\delta(x)\delta(y)\delta(d/2) + \delta(x)\delta(y)\delta(-d/2)] , \quad (5.2.16)$$

empleando esto, los términos del campo eléctrico hasta el término cuadrupolar son

$$E_{\hat{r}} = \sqrt{4\pi}Q \frac{Y_{00}}{r^2} + \sqrt{\frac{9\pi}{20}}Qd^2 \frac{Y_{20}}{r^4} + \dots , \quad (5.2.17)$$

donde el termino asociado al dipolo es nulo debido a que $q_{1,m}$ es idénticamente cero al tener simetría ecuatorial. Notemos que el valor $q_{1,m} = 0$ es preservado durante toda la evolución, siendo el término cuadrupolar el único que contribuye a la energía emitida por radiación¹. La potencia emitida por esta contribución es [74]

$$\frac{dE_{rad}^{EM}}{dt} = \frac{1}{360} \sum_{ij} \ddot{Q}_{ijEM}^2 = \frac{\kappa^3 M^3 Q^2}{1920z^4} \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{d} \right) , \quad (5.2.18)$$

donde $Q_{ijEM} = \int \rho(\vec{x}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) d^3\vec{x}$ es el tensor eléctrico cuadrupolar. La energía total es la integral en el tiempo de la ecuación (5.2.18) que puede realizarse en términos de z realizando el cambio de variable $dt = dz/\dot{z}$ y reemplazando \dot{z} por la ecuación (5.2.12). Los límites de integración serán $z_{max} = d/2$ hasta z_{min}

$$\frac{E_{rad}^{EM}}{M} = \kappa^{5/2} M^{3/2} Q^2 \frac{(d - 2z_{min})^{3/2} (15d^2 + 24dz_{min} + 32z_{min}^2)}{50400 (dz_{min})^{7/2}} . \quad (5.2.19)$$

La expresión clásica para la radiación gravitacional se puede obtener de forma similar, partiendo de que la primera contribución a la energía radiada gravitacional es la emitida por el término cuadrupolar

$$\frac{dE_G}{dt} = \frac{1}{45} \sum_{ij} \ddot{Q}_{ijG}^2 = \frac{\kappa^3 M^5}{480z^4} \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{d} \right) , \quad (5.2.20)$$

donde $Q_{ijG} = \int \rho_m(\vec{x}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) d^3\vec{x}$ es el tensor cuadrupolar asociado a la distribución de masa ρ_m :

$$\rho_m(\vec{x}) = \frac{M}{2} [\delta(x)\delta(y)\delta(d/2) + \delta(x)\delta(y)\delta(-d/2)] . \quad (5.2.21)$$

Al realizar la integral en el tiempo y hacer el cambio de variable $dt = dz/\dot{z}$ se obtiene

$$\frac{E_{rad}^G}{M} = \kappa^{5/2} M^{7/2} \frac{(d - 2z_{min})^{3/2} (15d^2 + 24dz_{min} + 32z_{min}^2)}{12600 (dz_{min})^{7/2}} \quad (5.2.22)$$

que es similar a (5.2.19) cambiando Q por M y un factor de 4. Claramente (5.2.19) y (5.2.22) divergen si $z_{min} = 0$, por lo cual es necesario dar un límite inferior distinto de cero. En [74, 75]

¹Al tener dos cargas iguales se produce una desaceleración de las cargas debida a la repulsión mutua, esta desaceleración produce radiación *Bremsstrahlung* (o radiación de frenado) pero por simplicidad se ignorará esta contribución.

se propone que la distancia mínima sea un múltiplo del radio de horizonte de eventos inicial $r_e = M(1 + \sqrt{\kappa})/2$, $z_{min} = \lambda r_e$. Además, el cociente de (5.2.19) y (5.2.22) es

$$\frac{E_{rad}^{EM}}{E_{rad}^G} = \frac{Q^2}{4M^2}, \quad (5.2.23)$$

si $Q < M$ la predicción clásica de la energía radiada en forma de ondas electromagnéticas será hasta el 25% de la energía gravitacional emitida.

5.3. Descomposición multipolar

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) , una función compleja f definida sobre la esfera S^2 cuyas entradas corresponden a un tensor definido sobre la base ortonormal $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ se dice que tiene peso de espín s , si al rotar los vectores de la base angular $(\hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ con un ángulo η , la función se transforma como $f \rightarrow e^{-is\eta} f$. Los armónicos esféricos con peso de espín fueron introducidos por Newman y Penrose [76] para el estudio de radiación gravitacional pero pueden ser empleadas para el estudio de las ecuaciones de Maxwell o cualquier campo dinámico con peso de espín arbitrario.

Las funciones con peso de espín s pueden expresarse en una base ortonormal cuyos elementos ${}_s\bar{Y}^{l,m}(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos con peso de espín s .

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} f^{l,m} \left({}_sY^{l,m}(\theta, \varphi) \right), \quad (5.3.1)$$

donde ${}_s\bar{Y}^{l,m}(\theta, \varphi)$ pueden expresarse en términos de las matrices de rotación de Wigner-d ²

$${}_sY^{l,m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} e^{-im\varphi} d_{-ms}^l(\theta). \quad (5.3.2)$$

y los coeficientes $f^{l,m}$ son calculados por

$$f^{l,m} = \oint f(\theta, \varphi) {}_s\bar{Y}^{l,m}(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (5.3.3)$$

Puede mostrarse que el escalar de Weyl Ψ_4 y el escalar Φ_2 tienen peso de espín $s = -2$ y $s = -1$ respectivamente, por lo tanto, se pueden descomponer como

$$\Psi_4(t, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \psi^{l,m}(t) \left({}_{-2}\bar{Y}^{l,m}(\theta, \varphi) \right). \quad (5.3.4)$$

$$\Phi_2(t, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \phi^{l,m}(t) \left({}_{-1}\bar{Y}^{l,m}(\theta, \varphi) \right). \quad (5.3.5)$$

Sustituyendo en la expresión para la energía (5.1.67) y las propiedades de ortonormalidad de los

²definidas en mecánica cuántica como el elemento de matriz del operador de rotación alrededor del eje \hat{y}

$$d_{ms}^l(\theta) := \langle l, m | e^{-i\hat{J}_y\theta} | l, s \rangle$$

armónicos esféricos con peso de espín [13], tenemos las expresiones para el flujo total de energía emitida por ondas gravitacionales y ondas electromagnéticas

$$\frac{dE_{rad}^G}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \sum_{l,m} \left| \int_{-\infty}^{t'} \psi^{l,m} dt' \right|^2, \quad (5.3.6)$$

$$\frac{dE_{rad}^{EW}}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{4\pi} \sum_{l,m} |\phi^{l,m}|^2 \quad (5.3.7)$$

5.4. Ondas de Teukoslky

Además de las polarizaciones $+, \times$, las ondas gravitacionales se pueden clasificar por su paridad en su descomposición por armónicos esféricos con peso de espín ${}_s Y^{lm}$: par (o polar) e impar (o axial). Las ondas *pares* tienen paridad $(-1)^l$ ante la inversión espacial $(\theta, \varphi) \rightarrow (\pi - \theta, \varphi + \pi)$ o *impar* si transforman como $(-1)^{l+1}$. Una solución usada para probar códigos de extracción de ondas gravitacionales es la solución de Teukosky [77]. Esta solución está construida para tener únicamente el cuadrupolo $l = 2$ que normalmente es el modo que posee la mayor parte de la energía, aproximadamente el 95 %³. La forma explícita en coordenadas esféricas (r, θ, φ) para la métrica es

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + (1 + A_{rr})dr^2 + (2Bf_{r\theta})rdrd\theta + (2Bf_{r\varphi})r \sin \theta drd\varphi \\ &+ \left(1 + Cf_{\theta\theta}^{(1)} + Af_{\theta\theta}^{(2)}\right)r^2 d\theta^2 + [2(A - 2C)f_{\theta\varphi}]r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &+ \left(1 + Cf_{\varphi\varphi}^{(1)} + Af_{\varphi\varphi}^{(2)}\right)r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Los coeficientes A, B, C son construidos a partir de

$$A = 3 \left[\frac{F^{(2)}}{r^3} + \frac{3F^{(1)}}{r^4} + \frac{3F}{r^5} \right], \quad (5.4.2)$$

$$B = - \left[\frac{F^{(3)}}{r^2} + \frac{3F^{(2)}}{r^3} + \frac{6F^{(1)}}{r^4} + \frac{6F}{r^5} \right], \quad (5.4.3)$$

$$C = \frac{1}{4} \left[\frac{F^{(4)}}{r} + \frac{2F^{(3)}}{r^2} + \frac{9F^{(2)}}{r^3} + \frac{21F^{(1)}}{r^4} + \frac{21F}{r^5} \right], \quad (5.4.4)$$

$$F = F_1(t - r) + F_2(t + r), \quad (5.4.5)$$

$$F^{(n)} := \left[\frac{d^n F(x)}{dr} \right]_{|x=t-r} + (-1)^n \left[\frac{d^n F(x)}{dr} \right]_{|x=t+r}. \quad (5.4.6)$$

Se ha elegido la dependencia $F = F_1(t - r) + F_2(t + r)$ porque representa a una superposición de funciones salientes y entrantes. Las funciones f_{ij} dependen del parámetro $m = \pm 2, \pm 1, 0$, pero en

³Para su generalización a otros multipolos véase [78]

simetría axial, al no tener coeficientes que dependan de φ el único modo distinto de cero es $m = 0$.

$$f_{rr} = 2 - 3 \sin^2 \theta, \quad (5.4.7)$$

$$f_{r\theta} = -3 \sin \theta \cos \theta, \quad (5.4.8)$$

$$f_{r\varphi} = 0, \quad (5.4.9)$$

$$f_{\theta\theta}^{(1)} = 3 \sin^2 \theta, \quad (5.4.10)$$

$$f_{\theta\theta}^{(2)} = -1, \quad (5.4.11)$$

$$f_{\theta\varphi} = 0, \quad (5.4.12)$$

$$f_{\varphi\varphi}^{(1)} = -f_{\theta\theta}^{(1)}, \quad (5.4.13)$$

$$f_{\varphi\varphi}^{(2)} = 3 \sin^2 \theta - 1. \quad (5.4.14)$$

Al realizar los cálculos para las polarizaciones h_+ , h_\times se obtiene

$$h^+ = C f_{\theta\theta}^1, \quad h^\times = -2C f_{\theta\varphi}, \quad (5.4.15)$$

por lo tanto el escalar de Weyl Ψ_4 es

$$\Psi_4 = -\ddot{C} f_{\theta\theta}^1 + 2i\ddot{C} f_{\theta\varphi}. \quad (5.4.16)$$

Observemos que la única polarización de (5.4.1) es h^+ . Este resultado se obtiene de forma general para un espacio axisimétrico sin momento angular. De las definiciones de (5.1.29), (5.1.30) y (5.1.50)

$$\Psi_4 = \frac{1}{2} [E_{(2)(2)} - E_{(3)(3)} - 2B_{(2)(3)} - i(B_{(2)(2)} - B_{(3)(3)} + 2E_{(2)(3)})]. \quad (5.4.17)$$

En un espacio axisimétrico sin momento angular, las componentes de la parte eléctrica del tensor de Weyl son $E_{\mu\varphi} = 0$ con $\mu \neq \varphi$, mientras que para la parte magnética las únicas no nulas son $B_{\mu\varphi}$ con $\mu = \rho, z$, esto implica que la parte imaginaria de Ψ_4 es cero y por lo tanto de (5.1.63), h_\times también es nulo.

El espacio construido asume que una elección posible para $F_{1,2}$ propuesta por Baumgarte y Shapiro [69] es

$$F_1(x) = -F_2(x) = \mathcal{A} x e^{-(x/\lambda)^2}, \quad (5.4.18)$$

donde \mathcal{A} es la amplitud de la onda y λ su longitud de onda. Esta elección garantiza tener un momento de simetría temporal $K_{ij} = 0$ a $t = 0$. Al ser un espaciotiempo obtenido mediante la linealización de las ecuaciones de Einstein, $\mathcal{A} \ll 1$ para garantizar que en efecto se trate de una perturbación.

5.4.1. Pruebas numéricas

Utilizando como condición inicial la métrica (5.4.1) a $t = 0$, con $\mathcal{A} = 0.01$, evolucionando con una foliación geodésica en un esquema de diferencias finitas e integración en el tiempo utilizando el método de Runge-Kutta ambos a cuarto orden, se realizaron pruebas numéricas de la subrutina para la extracción de ondas gravitacionales en mallas cuadradas de $240^2, 480^2, 960^2$ con $\Delta_1 = 0.05, \Delta_2 =$

0.025, $\Delta_3 = 0.0125$ respectivamente. La señal de onda gravitacional se extrajo en tres distintos radios, $r = 6, 7, 8$ para verificar que el radio de extracción corresponde a la zona de radiación. En la figura 5.1 se muestra el producto $r\psi_{20}$ de las tres señales a $r = 6, 7, 8$ desfasadas en el tiempo correspondiente al retraso de la señal para hacerlas coincidir, mostrando una excelente concordancia entre las señales. La figura 5.2 compara de forma cualitativa la solución analítica y la obtenida

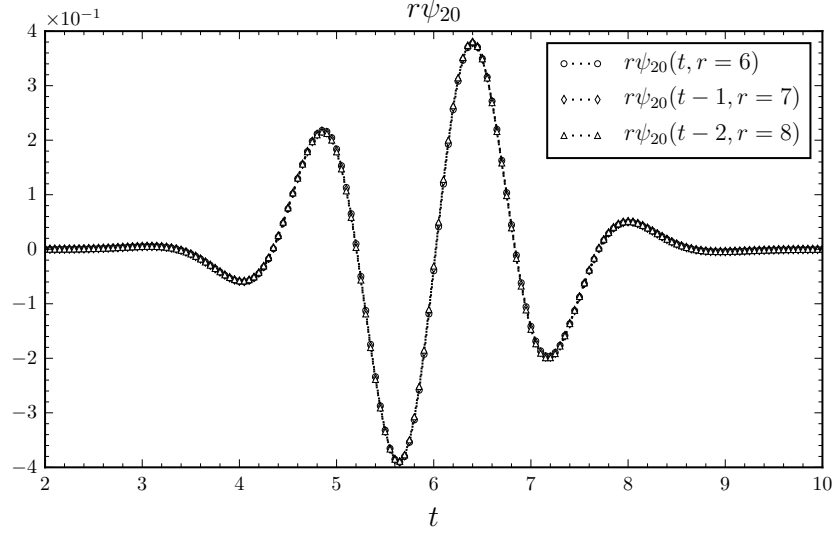


Figura 5.1: Multipolo $l = 2, m = 0$, onda gravitacional con datos iniciales de Teukolsky, extraído a $r = 6, 7, 8$.

de forma numérica en $r = 6$, mostrando concordancia entre la solución analítica y la numérica. La figura 5.3 muestra la diferencia entre la solución analítica y la numérica para las resoluciones $\Delta_1 = 0.05$, $\Delta_2 = 0.025$ y $\Delta_3 = 0.0125$, estas últimas reescaladas por un factor de 16 y 254, siendo consistente con el orden de convergencia del código.

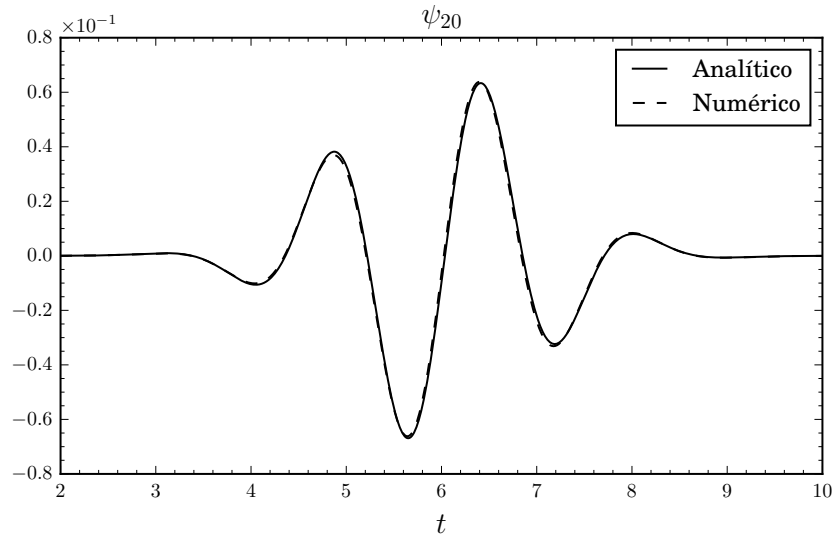


Figura 5.2: Comparación del multipolo $l = 2, m = 0$ de la Onda de Teukolsky, extraído a $r = 6$ de forma analítica y numérica.

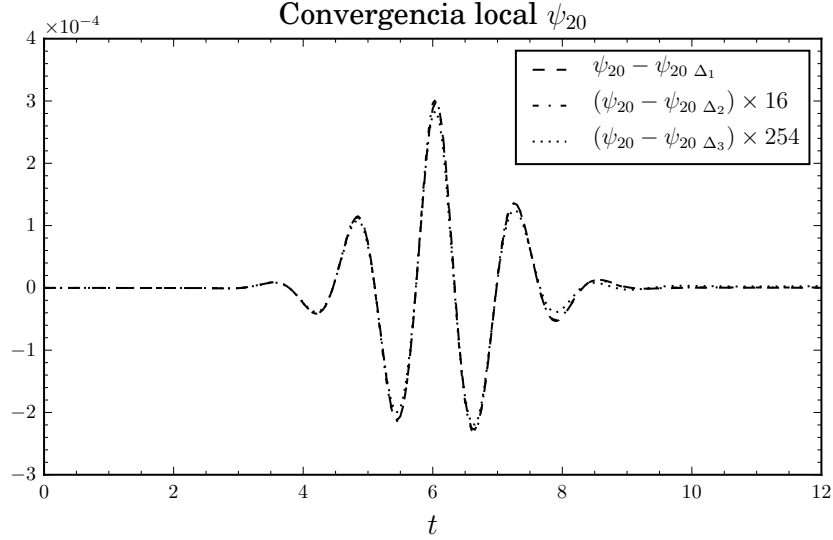


Figura 5.3: Diferencia de la solución analítica y la numérica a dos distintas resoluciones, extraídas en $r = 6$.

5.5. Extracción de radiación en la colisión de agujeros negros

A forma de probar el código con una solución no analítica, se presenta la señal de onda gravitacional producida por la colisión de dos agujeros negros momentáneamente en reposo desde aproximadamente la distancia ISCO. Los datos iniciales para los agujeros negros son del tipo Brill-Lindquist de masa $m = 0.5$ separados por una distancia $d = 2.303M^4$ con M la masa total del sistema. La evolución fue realizada mediante el método de evolución de punturas a cuarto orden en tiempo y espacio, con un parámetros de disipación igual a 0.005 y un factor CFL de 0.5. El shift empleado es del tipo Gamma-Driver con un parámetro de disipación igual a $\eta = 2/M$. Para verificar la convergencia de la señal extraída se realizaron tres simulaciones con $\Delta_1 = 0.05M$, $\Delta_2 = 0.042M$, $\Delta_3 = 0.04M$ con fronteras colocadas en $r = 50M$ con M la masa total del sistema.

La figura 5.4 muestra el modo $(2, 0)$ de $r\Psi_4$ extraído por OllinAxis y la reportada por Zhoujian *et al.* en [81] a un radio de $r = 20M$. La señal de OllinAxis ha sido desfasada por $t/M = 0.96$ para que los máximos coincidan, la diferencia de fases posiblemente se deba a error numérico. Notemos que de forma cualitativa, las mayores discrepancias se encuentran en el principio y final, pero en general la forma y amplitud se reproducen de forma satisfactoria. La señal es extraída a tres distintos radios $r = 20, 30, 40M$ y el producto $r\psi_{20}$ es desfasado en un tiempo igual al que la onda viaja entre cada radio de observación (si suponemos que $c = 1$ la señal debe desfasarse $t/M = 10$ si $r = 30M$ y $t/M = 20$ si $r = 40M$). La figura 5.5 confirma que efectivamente la señal en $r = 20M$ se encuentra

⁴En este contexto, la separación ISCO (*innermost stable circular orbit*) es la distancia mínima en la cual dos agujeros negros orbitan mutuamente y es función del momento angular total y la masa del sistema. Aunque también se denomina radio ISCO al mínimo radio de la órbita de una partícula de prueba en la geometría de Schwarzschild. La distancia usada corresponde aproximadamente al radio ISCO para dos agujeros negros sin espín orbitándose mutuamente de masa m y momento angular total $J \sim 2.96m^2$ [79, 80]

en la zona de radiación. Finalmente, se muestra una gráfica de convergencia, figura 5.6, que nos indica una pérdida de convergencia a cuarto orden pero superior a tercero.

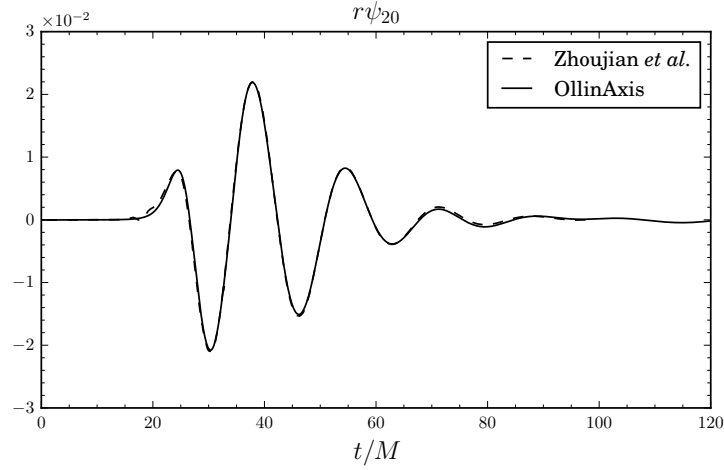


Figura 5.4: Comparación del modo (2, 0) del escalar de Weyl $r\Psi_4$ obtenido por OllinAxis y el reportado por Zhoujian *et al.* a un radio de extracción $r = 20M$. La señal de OllinAxis ha sido desfasada para hacer coincidir los máximos.

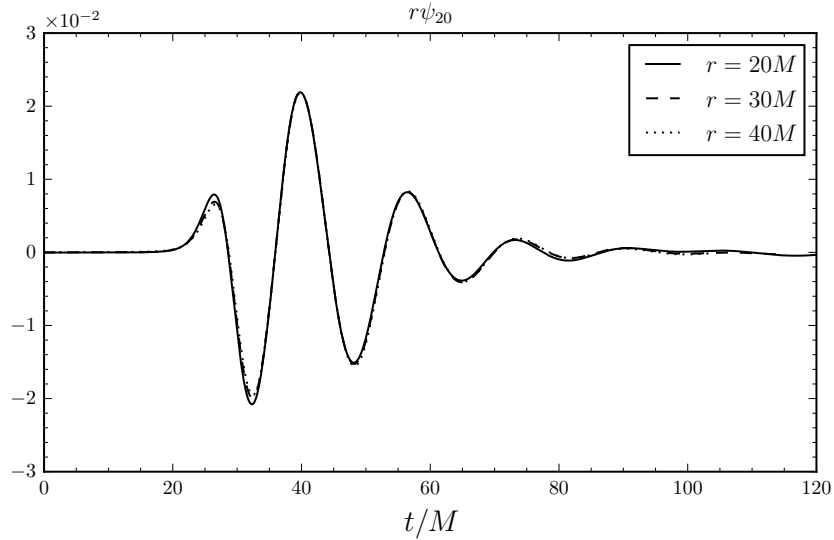


Figura 5.5: Modo (2, 0) de $r\Psi_4$. Las señales se han desfasado un tiempo igual al que le toma viajar la onda a cada radio de extracción.

Como último ejemplo, consideremos la colisión frontal de dos agujeros negros cargados separados a la misma distancia ISCO, con los mismos parámetros de malla anteriores. La evolución se realizará nuevamente utilizando el método de evolución de punturas. En este caso el único parámetro variable es la relación carga-masa (total del sistema) Q/M para el cual se tomará cinco valores $Q/M = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. De la misma forma en que se calculó de forma clásica la energía radiada, la

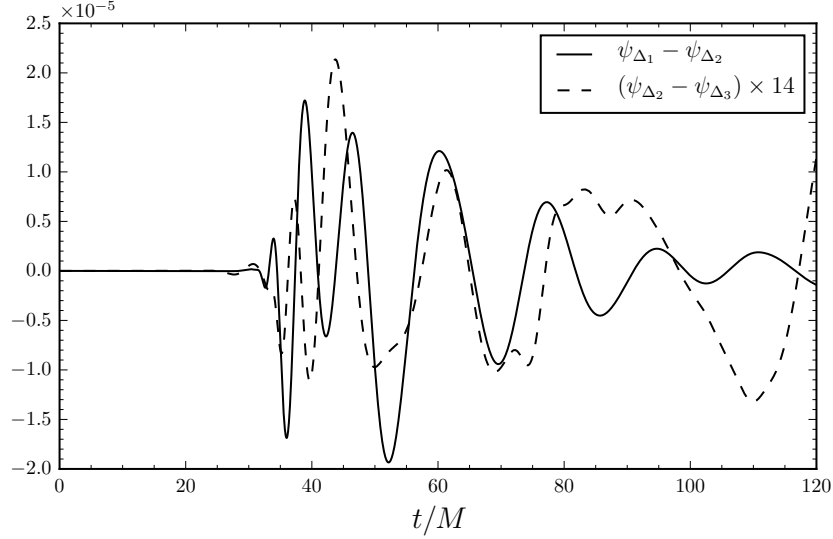


Figura 5.6: Análisis de convergencia del modo $(2,0)$ de Ψ_4 . La diferencia de las señales en las resoluciones más finas se han reescalado por un factor de 14, mostrando pérdida de convergencia a cuarto orden pero superior a tercero.

masa m y carga q individuales serán $m = M/2$ y $q = Q/2$, para poder compararlos se fijará $M = 1$ en todas las evoluciones.

En estos casos el modo $(2,0)$ de Ψ_4 y Φ_2 emite aproximadamente el 95% o más de la energía, por lo que será el único que se represente. La figura 5.7 muestra el modo $(2,0)$ de Ψ_4 para cada valor de Q/M y su comparación con el caso neutro. Aunque las diferencias son mínimas, existe una disminución en la amplitud conforme la relación Q/M aumenta, esto puede apreciarse mejor al calcular el flujo de energía dE_G/dt , siendo que los picos de menor amplitud corresponden a los cocientes carga-masa más altos, figura 5.8.

Su contraparte electromagnética se muestra en la figura 5.10, en la que es apreciable la diferencia de amplitud entre las señales, observando que la amplitud crece conforme la relación carga-masa lo hace. La figura 5.10 muestra el flujo de energía electromagnética, el cual muestra el mismo comportamiento que la señal electromagnética, los picos más altos son los que corresponden a mayores valores de la relación carga-masa. Notemos que existen dos órdenes de magnitud de diferencia entre el flujo de energía gravitacional y el electromagnético. Las ondas electromagnéticas al ser más débiles es de esperarse que la distancia a la que se extraen corresponda a la zona de radiación. Para verificarlo se debe de realizar un procedimiento similar al realizado para Ψ_4 ya que Φ_2 se comporta asintóticamente como r^{-1} , la figura 5.11 muestra que la señal más fuerte $Q = 0.4M$ se ha extraído en la zona de radiación.

Se puede verificar la conservación de energía a partir de la energía total radiada por las ondas y la masa del horizonte aparente. La tabla 5.1 muestra la energía emitida por ondas gravitacionales y electromagnéticas. En la estimación clásica se ha tomado como distancia mínima la distancia en la que el buscador de horizontes encuentra un horizonte común por primera vez, que es aproximadamente en $z \sim 0.7$. Notemos que la estimación clásica de la energía gravitacional está por arriba del

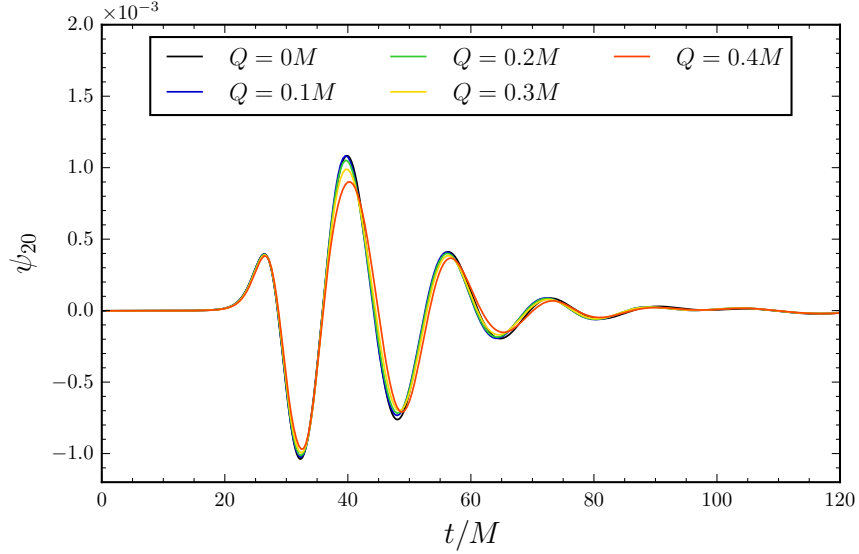


Figura 5.7: Modo (2, 0) de Ψ_4 . Las amplitudes son ligeramente menores para los casos cargados en comparación con el caso neutro.

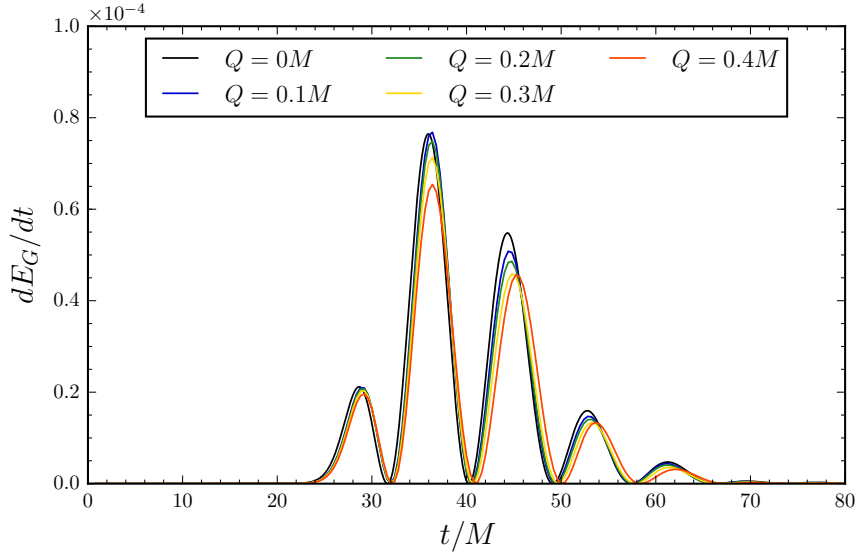


Figura 5.8: Flujo de energía gravitacional. Los casos cargados tienen un menor flujo de energía gravitacional.

cálculo numérico, difiriendo en un 30 % aproximadamente, mientras que la energía electromagnética calculada de forma numérica es mayor por un 25 % aproximadamente comparada al cálculo clásico, esto da como resultado que la razón de energía electromagnética y la gravitacional emitida relativista sea aproximadamente 1.5 veces mayor que el caso clásico. La tabla 5.2 muestra la masa del horizonte aparente y la energía total radiada, de acuerdo con el cálculo clásico, la mayor energía radiada debe de ocurrir en el caso neutro que es similar a lo obtenido, además dado que la masa inicial del sistema $M_{ADM} = 1$, la suma de la masa del horizonte aparente y la energía total no rebasan la unidad siendo consistente con la conservación de energía salvo error numérico.

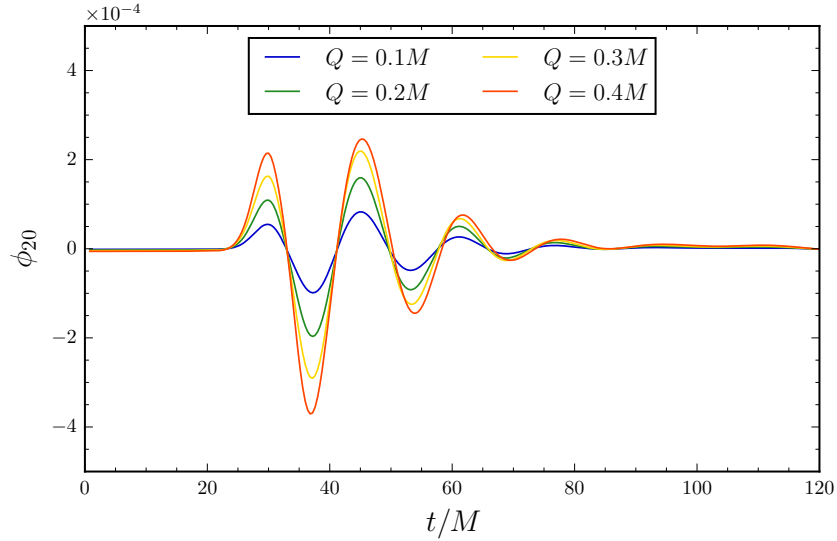


Figura 5.9: Modo (2,0) de Φ_2 . Al contrario que la señal gravitacional, las amplitudes aumentan conforme la relación carga-masa crece.

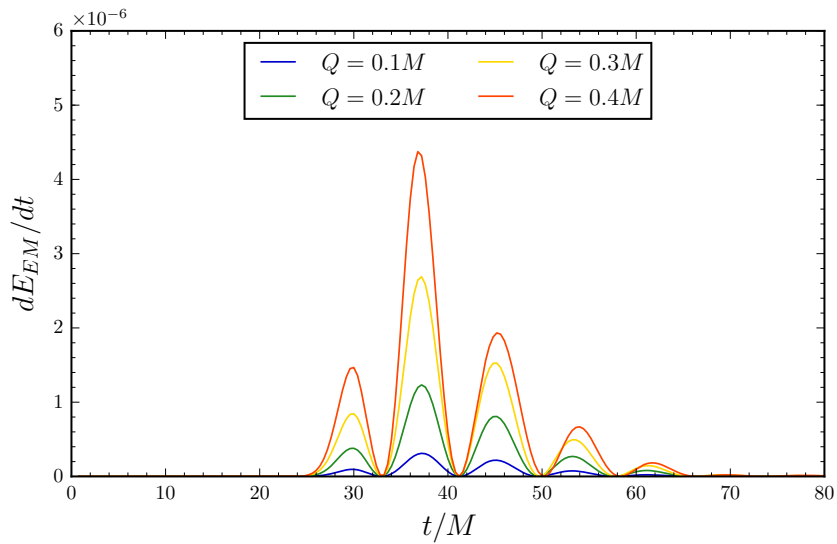


Figura 5.10: Flujo de energía electromagnética. Los picos más altos pertenecen a los casos donde la relación carga-masa es mayor.

La conservación de la carga eléctrica puede también verificarse integrando la carga encerrada por el horizonte, apéndice A.2. La figura 5.12 muestra que la carga es conservada en los casos mostrado.

Por último, se muestra las gráficas de convergencia para las ondas gravitacionales y electromagnéticas de los casos $Q = 0.1, 0.2, 0.3$ y 0.4 , figura 5.13, 5.14 obteniendo convergencia a cuarto orden.

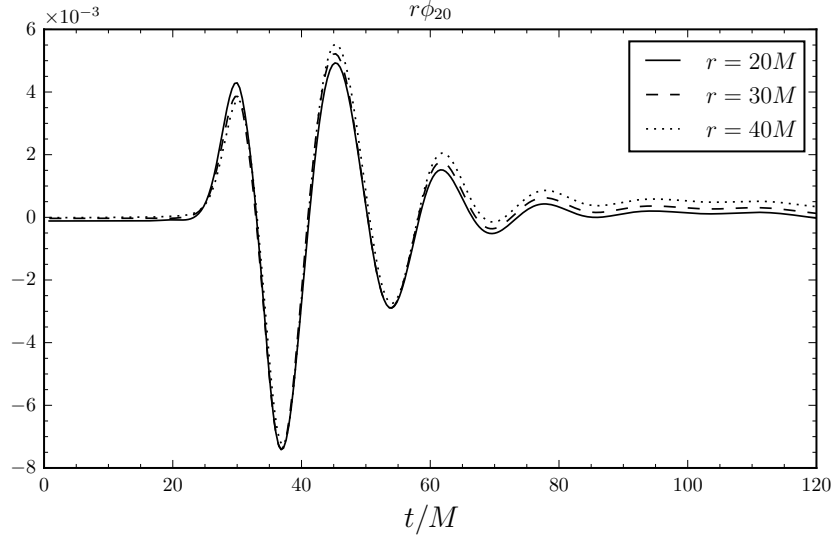


Figura 5.11: Asintóticamente $\Phi_2 \sim r^{-1}$. La gráfica muestra el modo $(2,0)$ de ϕ_{20} multiplicado por la distancia de observación, verificando que el modo electromagnético también es extraído en la zona de radiación.

Q/M	$E_G \times 10^{-4}$	$E_{EM} \times 10^{-6}$	$\frac{E_{EM}}{E_G} \times 10^{-3}$	$E_{c.rad}^G \times 10^{-4}$	$E_{c.rad}^{EM} \times 10^{-6}$	$\frac{E_{c.EM}}{E_{c.G}} \times 10^{-3}$
0	7.25	—	—	9.9	—	—
0.1	6.98	2.99	4.16	9.07	2.27	2.50
0.2	6.77	11.08	16.38	8.39	8.39	10.0
0.3	6.46	22.68	35.13	7.37	16.6	22.5
0.4	6.25	34.33	54.89	8.20	32.8	40.0

Tabla 5.1: Energía emitida por ondas gravitacionales y electromagnéticas (columnas 2 y 3) comparadas con su estimación clásica (columnas 5 y 6). La energía emitida por ondas gravitacionales es menor que la calculada de forma clásica, mientras que para las ondas electromagnéticas ocurre lo contrario.

Q/M	M_{AH}	$E_{radTot} \times 10^{-4}$	$M_{AH} + E_{tot}$
0	0.998	7.25	0.999
0.1	0.997	7.05	0.998
0.2	0.997	6.92	0.998
0.3	0.996	6.73	0.997
0.4	0.995	6.63	0.996

Tabla 5.2: Masa del horizonte aparente y energía total radiada.

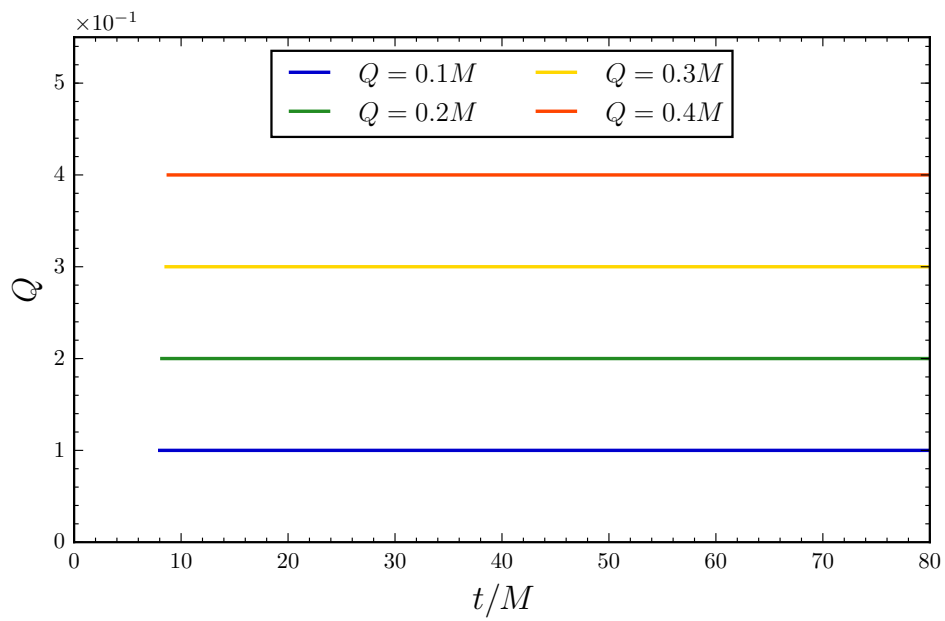


Figura 5.12: Carga eléctrica encerrada por el horizonte verificando su conservación en toda la simulación.

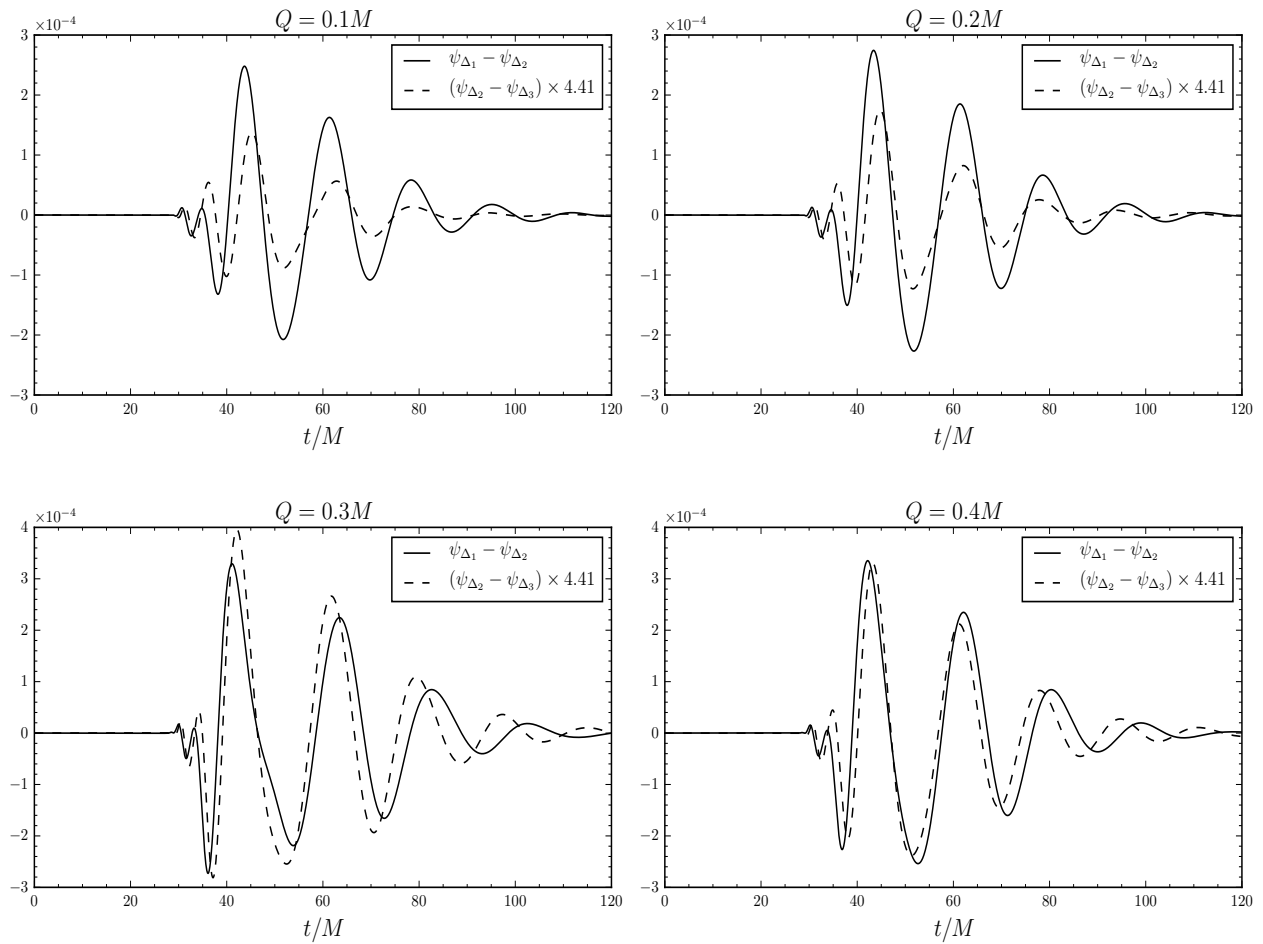


Figura 5.13: Análisis de convergencia para ϕ_{20} para los distintos valores de la relación carga-masa. El factor que multiplica a la diferencias de las resoluciones más altas es el correspondiente para tener convergencia a cuarto orden.

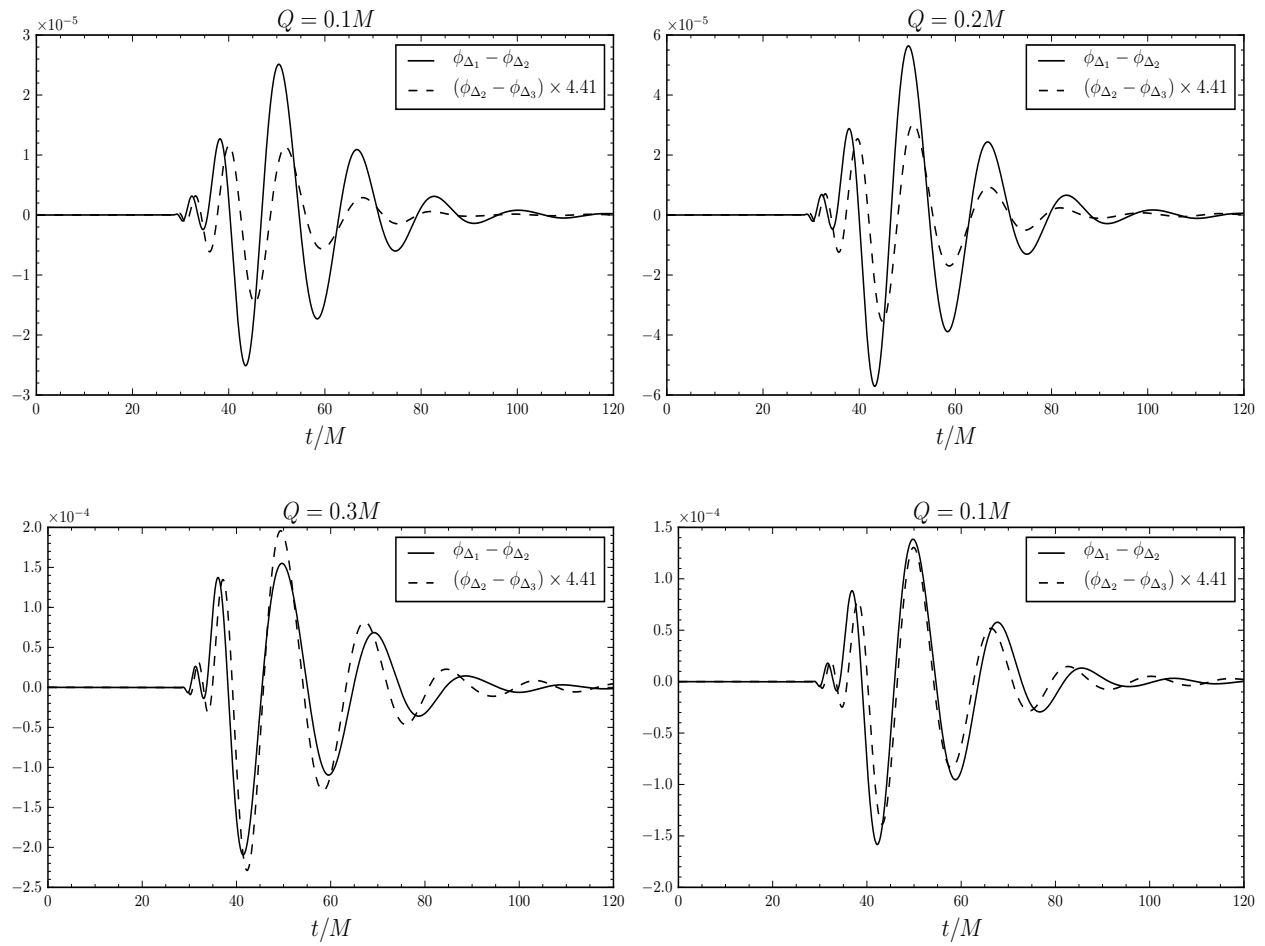


Figura 5.14: Análisis de convergencia para ψ_{20} para los distintos valores de la relación carga-masa. El factor que multiplica a la diferencias de las resoluciones más altas es el correspondiente para tener convergencia a cuarto orden.

Capítulo 6

Ondas de Brill

Motivado por los trabajos de Weber y Wheeler [82], Dieter Brill propone una solución axisimétrica no lineal y en vacío [83, 84] que contiene ondas gravitacionales. Los primeros estudios numéricos de este tipo de solución realizados por Eppley [85] muestran que las ondas (de Brill) presentan dos comportamientos, las de menor amplitud se dispersan y dejan un espacio plano, mientras que las de mayor amplitud colapsan formando un agujero negro. Contrario a lo que intuitivamente se esperaría, este tipo de solución muestra que a pesar de carecer de una fuente, es posible construir soluciones no triviales cuya energía sea positiva definida.

Debida a la compleja dinámica de las ondas de Brill, se han utilizado para probar códigos numéricos para la extracción de ondas gravitacionales y la localización de horizontes aparentes [70]. Aún más interesante es que Abrahams y Evans [57, 86] han encontrado que en soluciones axisimétricas de vacío en el umbral para la formación de agujeros negros, existe un comportamiento crítico para el colapso gravitacional.

El comportamiento crítico de un colapso gravitacional fue descubierto inicialmente por Choptuik [87] en el colapso de un campo escalar sin masa en simetría esférica, obteniendo que para una familia de soluciones asintóticamente planas parametrizadas por p , para una amplitud crítica p_* , la masa de los agujeros negros escala como una potencia

$$M_{BH} \sim (p - p_*)^\gamma, \quad (6.0.1)$$

donde el exponente γ es independiente de la familia elegida. Además, se encuentra que la solución crítica Z^* presenta cierto reescalamiento a distintos tiempos o “ecos”

$$Z^*(x, \tau) = Z^*(x + \Delta, \tau + \Delta), \quad x := -r/t, \tau := -\ln(-t). \quad (6.0.2)$$

donde r es una coordenada de área y t es el tiempo propio del observador central. Por otro lado, Abrahams y Evans en el estudio de las soluciones axisimétricas encontraron valores similares a Choptuik para γ y Δ sugiriendo que el fenómeno puede ser un comportamiento independiente del modelo usado, es decir que es propio de la teoría. Una revisión más completa realizada por Gundlach se puede encontrar en [88].

Desafortunadamente, el análisis de la solución crítica es casi imposible para el estado actual del

código OllinAxis debido a que se necesitan mallas adaptativas (refinamientos más finos) alrededor del eje debido a los errores introducidos que ocasionan inestabilidades en la evolución. La intención de evolucionar ondas de Brill será para probar que el código OllinAxis puede reproducir los datos reportados en la bibliografía y ver si una elección del lapso que evite choques de norma provee de simulaciones más estables.

6.1. Ecuación elíptica para el factor conforme

Para construir la solución de Ondas de Brill, se considera una métrica axisimétrica con simetría temporal en coordenadas cilíndricas (ρ, z, φ)

$$dl^2 = \Psi^4 [e^{2q}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (6.1.1)$$

y donde Ψ, q son funciones de t, ρ, z . La función q debe satisfacer las condiciones

$$q|_{\rho=0} = 0, \quad (6.1.2)$$

$$\partial_\rho^n q|_{\rho=0} = 0 \quad \text{para } n \text{ impar}, \quad (6.1.3)$$

$$q|_{r \rightarrow \infty} = O(r^{-2}). \quad (6.1.4)$$

donde $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. La función Ψ se resuelve por medio de las constricciones hamiltoniana y de momentos. Inmeditamente la constricción de momentos es trivialmente resuelta por ser un instante de simetría en vacío; por otro lado, la constricción hamiltoniana toma la forma

$$D_{plano}^2 \Psi + \frac{1}{4} (\partial_\rho^2 q + \partial_z^2 q) \Psi = 0. \quad (6.1.5)$$

Esta es una ecuación del tipo elíptica por lo que debe agregarse una condición a la frontera. Por ser espacios asintóticamente planos, se tiene $\Psi|_{r \rightarrow \infty} = 1$, sin embargo, en un dominio finito se pide que $\Psi \sim 1 + 2M/r$ dado que se aproxima a un espacio de Schwarzschild. En la práctica no se tiene el valor de M pero se reemplaza por una versión diferencial del valor asintótico

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi - 1}{r} \approx O(r^{-3}). \quad (6.1.6)$$

El último ingrediente para resolver Ψ es proponer q . El estudio de Eppley propone la forma

$$q = a \frac{\rho^2}{1 + (r/\lambda)^n}, \quad (6.1.7)$$

donde a, λ, n son parámetros libres, Eppley toma $\lambda = 1, n = 5$ y varia a . Posteriormente, Holz *et al.* [89] usan la forma

$$q = a\rho^2 e^{-(\rho^2 + z^2)}, \quad (6.1.8)$$

con a una constante que representa la amplitud de la onda. David Hilditch usa una variación de esta condición llamándola onda de Brill “prolata”.

$$q = a\rho^2 e^{-[(\rho-\rho_0)^2/\sigma_\rho^2 + (z-z_0)^2/\sigma_z^2]}, \quad (6.1.9)$$

con $a > 0$, $\rho_0, z_0, \sigma_0, \sigma_\rho, \sigma_z$ constantes.

6.2. Comparación de soluciones

6.2.1. Masa y factor conforme

Alcubierre *et al.* [70] publica la masa del espaciotiempo para distintas amplitudes utilizando datos iniciales del tipo Holz, la forma de la solución para $a = 10$ y el horizonte aparente de la solución $a = 12$. Las primeras pruebas consistirán en reproducir los datos mencionados para verificar la fiabilidad del código.

Los datos iniciales son comparados calculando la masa (pseudomasa de Schwarzschild ecuación (A.6)) para distintas amplitudes, tabla 6.1 utilizando los mismos parámetros para la malla que Alcubierre *et al* usa. $\Delta\rho = 0.03125, \Delta z = 0.03125$ en una malla cuadrada de 800^2 puntos.

a	M (OllinAxis)	M (Alcubierre et al)
1	3.39×10^{-2}	3.38×10^{-2}
2	1.263×10^{-1}	1.262×10^{-1}
5	6.989×10^{-1}	6.96×10^{-1}
10	2.912	2.912
12	4.67	4.67

Tabla 6.1: Comparación de las masas para datos iniciales de onda de Brill del tipo Holz.

Aunque no se especifica el orden de discretización empleado, el realizado por OllinAxis es a cuarto orden, lo cual podría explicar las ligeras variaciones para las amplitudes menores. No obstante, se considera que los datos obtenidos con OllinAxis son confiables dado que difieren en menos del 1% con los reportados por Alcubierre *et al.* La figura 6.1 muestra $\Psi(\rho, z)$ para las amplitudes descritas arriba, ejemplificando que el parámetro a influye sobre la amplitud de Ψ : a mayores valores de a el valor máximo de Ψ crece formando un bulto alrededor del origen.

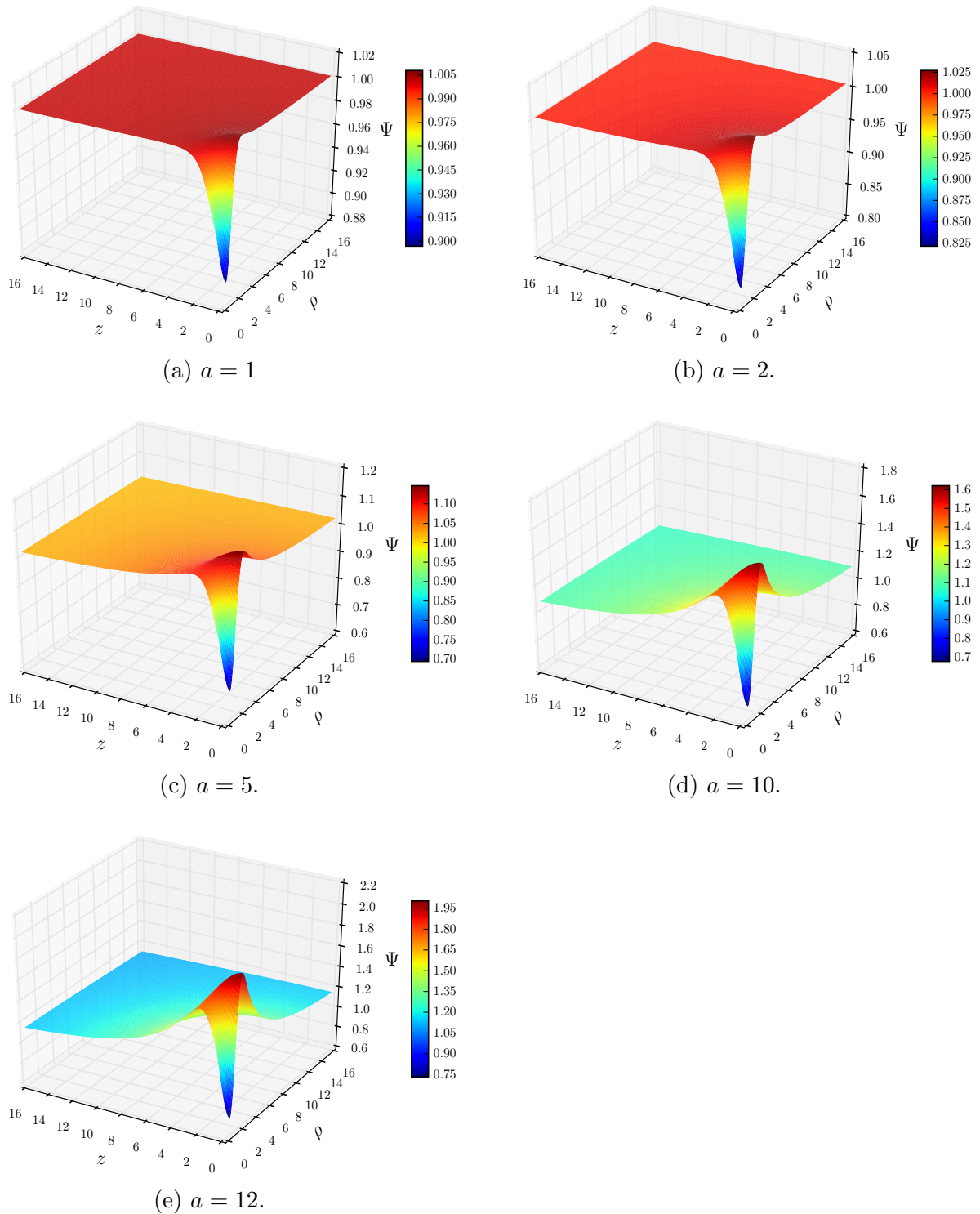


Figura 6.1: $\Psi(\rho, z)$ con distintas amplitudes de prueba utilizando un perfil para q del tipo Holz.

De forma cualitativa se puede comparar el factor conforme $\Psi(\rho, z)$ con $a = 10$ obtenido con OllinAxis usando el resolvidor elíptico Axelisol y la obtenida de las imágenes del artículo mediante

el software WebPlotDigitizer [90]. Las figuras 6.2, 6.3, 6.4 muestran una buena coincidencia de las soluciones, discrepando ligeramente sobre la diagonal de la malla. Para revisar convergencia se utilizaron mallas a resoluciones $\Delta_1 = 0.125$, $\Delta_2 = 0.0625$, $\Delta_3 = 0.03125$ con 200^2 , 400^2 y 800^2 puntos respectivamente. Los test de convergencia muestran un factor de convergencia local a segundo orden sobre ρ, z y a cuarto orden en $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ (la diagonal), figuras 6.5, 6.6, 6.7. Por otro lado la norma rms del valor residual de la constricción hamiltoniana (1.1.14) es $|\mathcal{H}|_{\Delta_1} = 1.45 \times 10^{-1}$, $|\mathcal{H}|_{\Delta_2} = 8.32 \times 10^{-3}$, $|\mathcal{H}|_{\Delta_3} = 5.00 \times 10^{-4}$ resultando en un factor de convergencia global igual a 17.51 que es consistente con la discretización a cuarto orden del código.

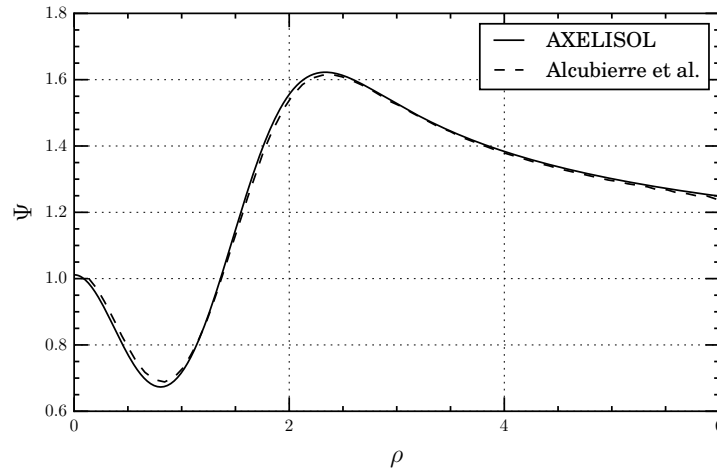


Figura 6.2: Factor conforme sobre ρ .

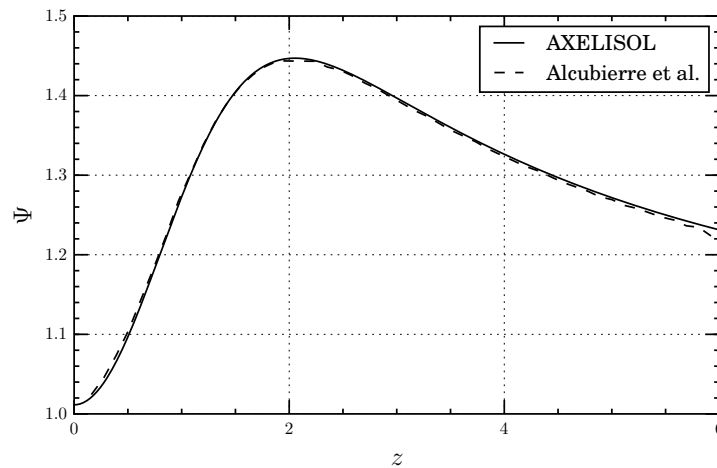


Figura 6.3: Factor conforme sobre z .

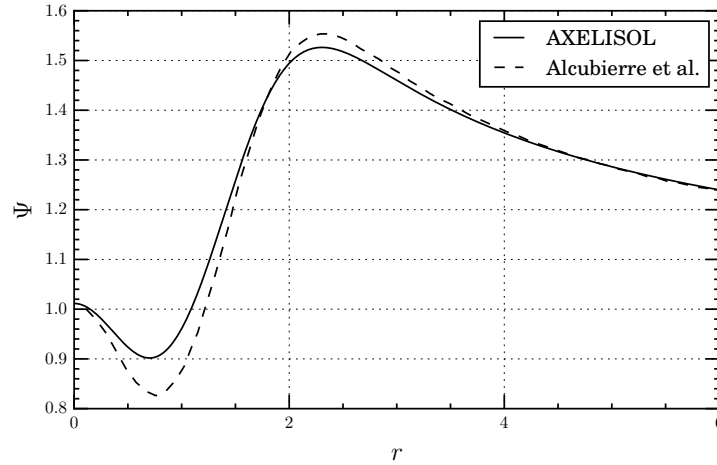


Figura 6.4: Factor conforme sobre r (la diagonal).

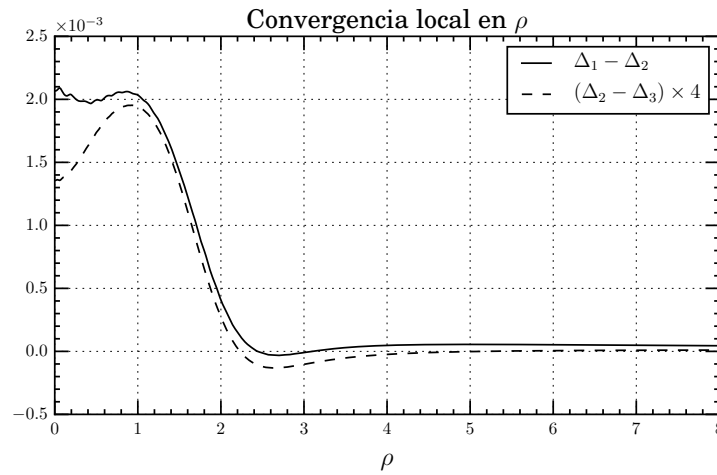


Figura 6.5: Factor de convergencia local sobre ρ , la diferencia de las resoluciones más altas están reescaladas por 4, mostrando convergencia a segundo orden de $\Psi(\rho, 0)$.

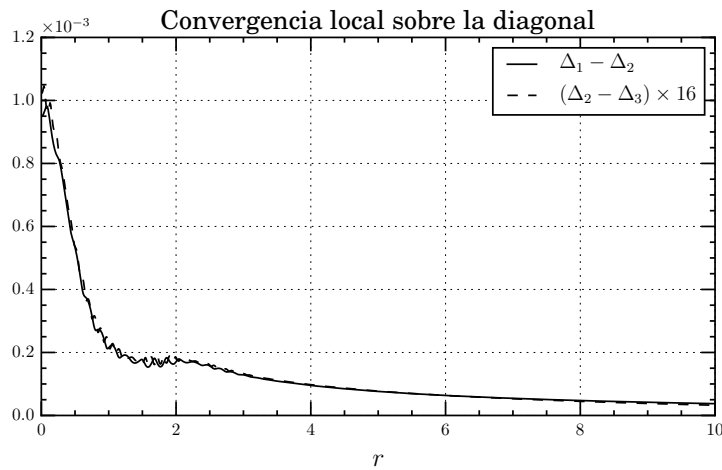


Figura 6.7: Factor de convergencia local sobre la diagonal, la diferencia de las resoluciones más altas están reescaladas por 16, mostrando convergencia a segundo orden en $\Psi(r = \sqrt{\rho^2 + z^2})$.

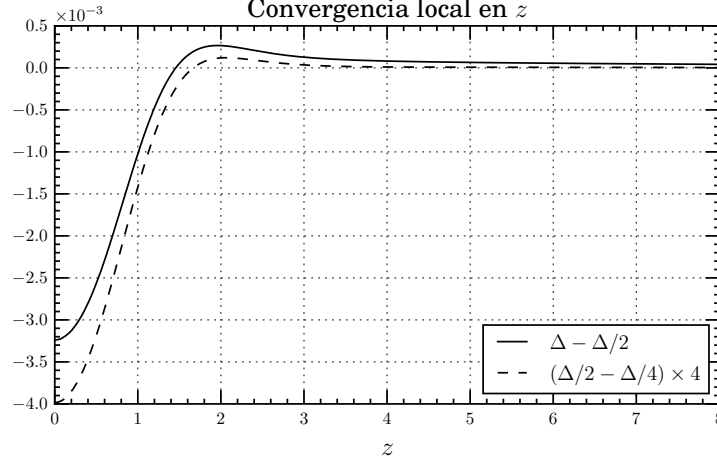
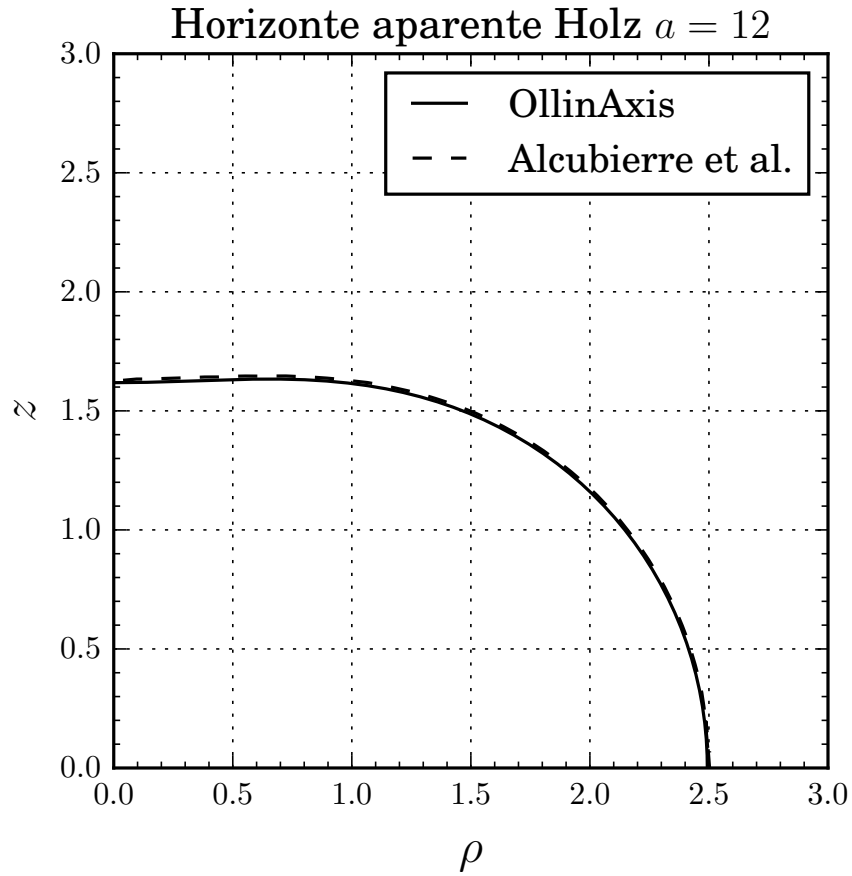
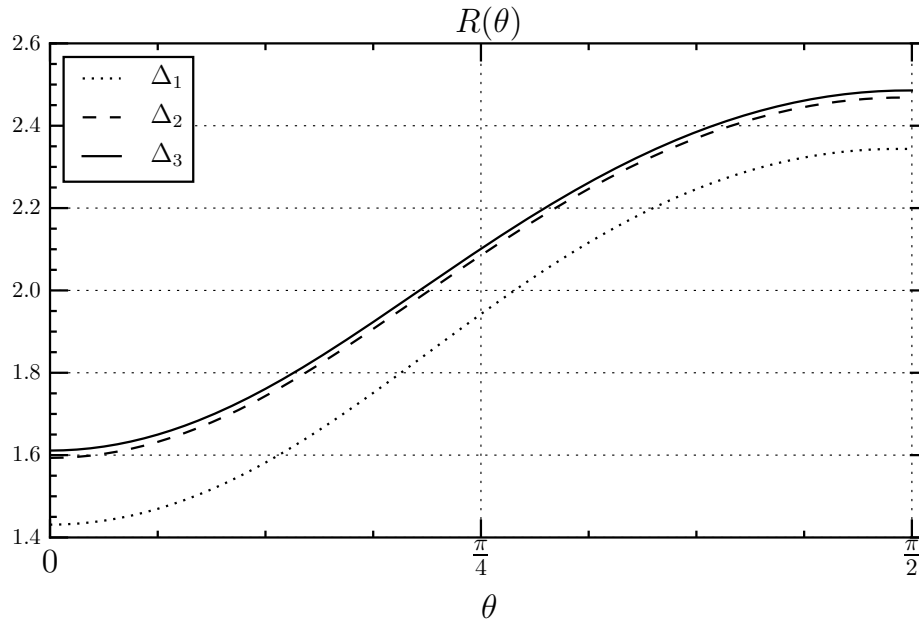


Figura 6.6: Factor de convergencia local sobre z , la diferencia de las resoluciones más altas están reescaladas por 4, mostrando convergencia a segundo orden en $\Psi(0, z)$.

6.2.2. Horizonte aparente

Como última prueba se busca replicar la formación de horizontes aparentes en datos iniciales. Alcubierre *et al* reporta que la primera presencia de horizontes aparentes se encuentra en el intervalo $a^* \in [11.81, 11.82]$ para su buscador en simetría axial y $a^* \in [11.8, 11.8]$ para el buscador en tres dimensiones. El código OllinAxis encuentra que la amplitud crítica es $a^* \in [11.8156, 11.8157]$ en un esquema de diferencias finitas a segundo orden y $a^* \in [11.8224, 11.8225]$ a cuarto orden, en ambos casos la masa del horizonte aparente es $M = 4.499$ concordando con la reportada de $M \approx 4.5$.

En la figura 6.8 se muestra el horizonte aparente para $a = 12$ y es comparada de forma cualitativa con el buscador de horizontes de OllinAxis, mostrando coincidencia entre ambas gráficas. Para verificar la convergencia se realizaron tres corridas con mallas a $\Delta_1 = 1/8$, $\Delta_2 = 1/16$ y $\Delta_3 = 1/32$ con mallas cuadradas de 128^2 , 256^2 y 512^2 puntos respectivamente. La masa del horizonte aparente es $M_{\Delta_1} = 4.664$, $M_{\Delta_2} = 4.659$, $M_{\Delta_3} = 4.658$ con un factor de convergencia $C_M = 25.070$ teniendo un factor de convergencia mayor a cuarto orden. Por otro lado, el factor de convergencia local para el horizonte es a tercer orden en $\theta = 0$ pero menor en $\theta = \pi/2$ el cual podría deberse al método de bisección, figuras 6.9 y 6.10. En la mejor resolución, se obtiene un área del horizonte $A = 1.091 \times 10^{-3}$ y la masa ADM es $M = 4.67$ (tabla 6.1), de los cuales encontramos que la desigualdad de Penrose $16\pi M^2/A \approx 1.005$ se satisface.

Figura 6.8: Radio horizonte aparente $a = 12$.Figura 6.9: Radio de horizonte aparente a tres resoluciones: $\Delta_1 = 1/8$, $\Delta_2 = 1/16$, $\Delta_3 = 1/32$.

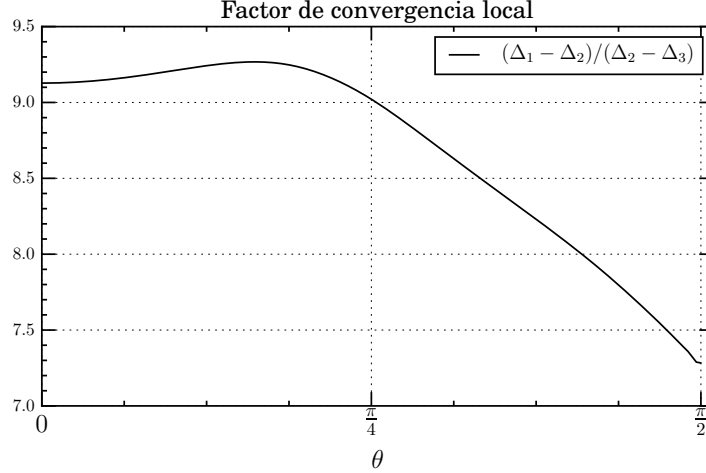


Figura 6.10: Cociente de las diferencias para el radio del horizonte aparente de la onda de Brill con $a = 12$.

6.3. Colapso de ondas de Brill

Los primeros estudios exitosos para determinar la amplitud crítica en el colapso de ondas de Brill fueron realizados por Alcubierre *et al* [58]. En el estudio utilizan el código CACTUS a segundo orden empleando foliación maximal sin vector de corrimiento, tomando como perfil de $q(\rho, z)$ la condición de Holz (6.1.8) encuentran que existe colapso si a se encuentra en el rango $[4, 6]$ y con un refinamiento $a = 4.85 \pm 0.15$. Para una amplitud supercrítica encuentran que en $a = 6$ se forma un horizonte aparente en $t = 7.7$ con masa $m_H = 0.87$. y además analizan la señal de onda gravitacional obteniendo que la energía radiada es de 0.12. La masa del horizonte aparente y la energía radiada son consistente con la masa inicial del espaciotiempo $M_{ADM} = 0.99$.

Garfinkle y Dunkan [59] utilizan el perfil de Holz para q empleando una formulación axisimétrica que resuelve un sistema elíptico-hiperbólico con un lapso maximal. Encuentran que la amplitud crítica se encuentra entre $a = 4$ y $a = 6$ aunque no pueden determinar de forma precisa la amplitud debido a limitaciones prácticas de su código.

David Hilditch *et al* [91] utilizando el método para evolucionar las punturas (foliación $1 + \log$ con $N = 2$ y shift del tipo Gamma-Driver) evoluciona ondas de Brill con el perfil de Holz con amplitudes $a = 1, 2.5, 5$, observando que para las amplitudes débiles $a = 1, 2.5$, la onda se dispersa y el espaciotiempo regresa a Minkowski. La simulación con amplitud $a = 5$ no es exitosa debido a que desarrollan largos gradientes en la curvatura extrínseca y en el coeficiente de la métrica radial en el intervalo $r = 1.5$ a $r = 2$, teorizando que el colapso de la simulación es debido a la existencia de una singularidad coordinada. Posterior a este estudio, utilizando bamps, un código pseudospectral en la formulación harmónica generalizada [92] que usa mallas adaptativas, encuentran que la amplitud crítica a^* se encuentra en el rango $[4.6966875, 4.696703125]$, que representa un error de 10^{-6} . En el estudio pueden determinar el exponente crítico $\gamma \approx 0.37$ aunque no lo consideran conclusivo al solo observar un eco en sus resultados.

6.3.1. Pruebas numéricas

Antes de proceder a evolucionar ondas de Brill cerca de la amplitud crítica, se buscará reproducir las evoluciones que reportan en [58] con $a = 4$ y $a = 6$ para un perfil del tipo Holz. Las simulaciones con $a = 4$ se realizaron con $\Delta_1 = 1/32$, $\Delta_2 = 1/\sqrt{2}32$, $\Delta_3 = 1/64$, con 256^2 , 362^2 y 512^2 puntos respectivamente utilizando el lapso maximal. La diferenciación en el espacio utiliza un esquema de diferencias finitas e integración en el tiempo con el método de Runge-Kutta, ambos a cuarto orden y se agrega un término de disipación igual a 0.005 para evitar oscilaciones fuertes. De forma cualitativa se observa que la onda realiza algunos rebotes hasta $t \approx 6$ para posteriormente dispersarse dejando atrás un espaciotiempo del tipo Minkowski, este comportamiento concuerda con lo reportado por Alcubierre *et al*, figura 6.11. La convergencia de la norma r.m.s de la constricción hamiltonaiana muestra que la convergencia es a tercer orden, figura 6.12.

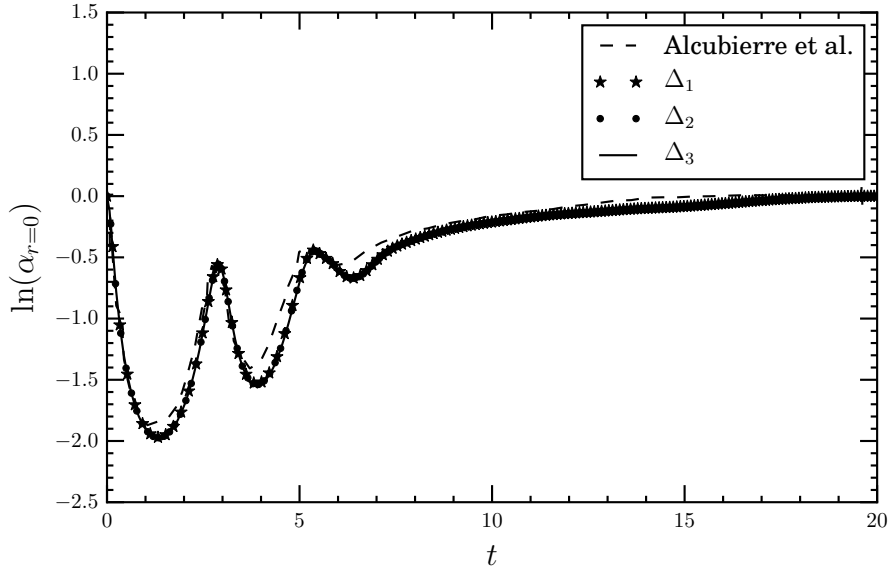


Figura 6.11: Comparación de la evolución del logaritmo del valor central del lapso en $r = 0$, reportado por Alcubierre *et al.* y obtenido por OllinAxis para una amplitud $a = 4$ a tres diferentes resoluciones: $\Delta_1 = 1/32$, $\Delta_2 = 1/\sqrt{2}32$, $\Delta_3 = 1/64$.

Procediendo con la evolución de la onda de Brill $a = 6$, con OllinAxis se realizaron tres simulaciones con $\Delta_1 = 1/32$, $\Delta_2 = 1/\sqrt{2}32$ y $\Delta_3 = 1/64$, en la resolución mas alta la masa inicial del espaciotiempo es $m_{ADM} = 0.991$ con un parámetro de disipación igual a 0.005. En la evolución se encuentra un horizonte a $t = 6.25$ con $m_H = 0.85$, la energía radiada por ondas gravitacionales es $E_{rad}^G = 0.141$ siendo consistente con la masa inicial del espaciotiempo. La convergencia de las soluciones puede observarse en la figura 6.13, desafortunadamente se observa una disminución de la convergencia para tiempos tardíos, pasando de cuarto a tercer orden.

Con estos datos, podemos también concluir que la amplitud crítica se encuentra en el rango $[4, 6]$, por lo cual, se debe proceder con una bisección en el intervalo para refinar la amplitud. Sin embargo, el tiempo de cómputo de la ecuación diferencial elíptica del lapso maximal impone una limitante práctica. En la resolución más alta, el tiempo de cómputo para $a = 6$ asciende aproximadamente a

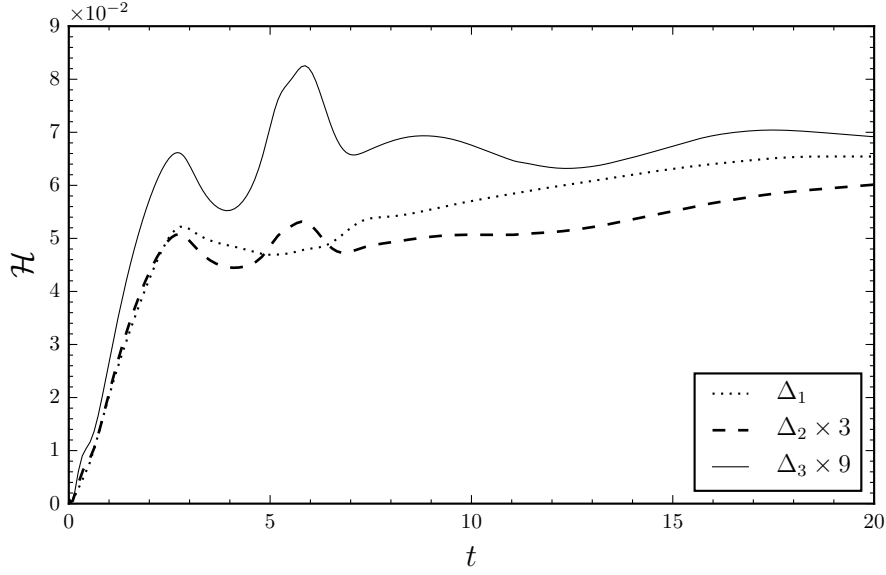


Figura 6.12: Evolución del logaritmo del lapso en $r = 0$ a tres diferentes resoluciones: $\Delta_1 = 1/32$, $\Delta_2 = 1/\sqrt{232}$, $\Delta_3 = 1/64$.

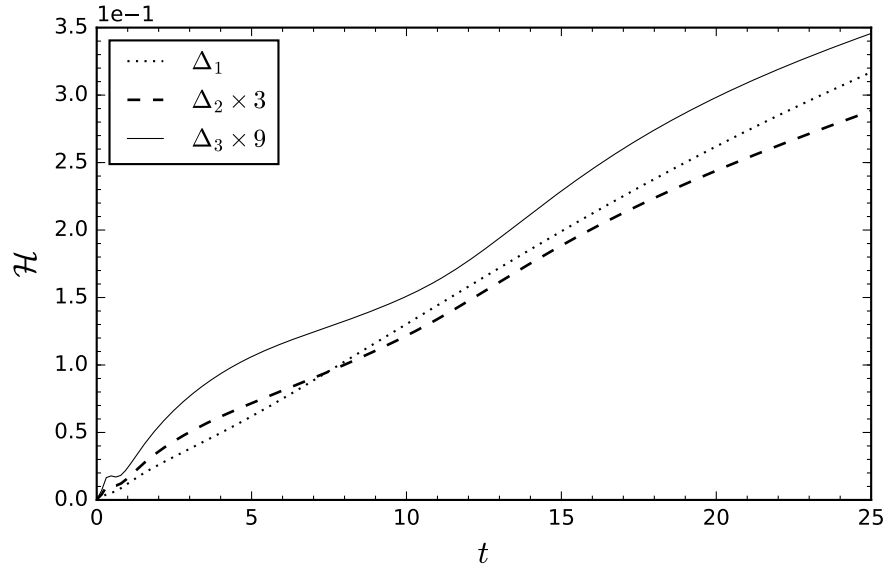


Figura 6.13: Evolución de la norma de la constricción hamiltoniana a tres diferentes resoluciones: $\Delta_1 = 1/32$, $\Delta_2 = 1/\sqrt{232}$, $\Delta_3 = 1/64$.

90 horas usando cuatro procesadores del clúster *Xook* del Instituto de Ciencias Nucleares. Choptuik enfatiza en [87] la necesidad de utilizar mejores refinamientos en tiempo y espacio a medida que se desarrolla la evolución con el fin de obtener el fenómeno físico y no terminar con algún artefacto propio de la simulación numérica. Por ejemplo en su artículo sobre el colapso de un campo escalar sin masa en simetría esférica, una vez determinada la solución crítica, analiza un eco a una escala treinta

veces menor. Si nos planteamos realizar este procedimiento en OllinAxis, rápidamente notamos que el tiempo de cómputo es una severa limitante aunado a que aún no se cuenta con la estructura que permita realizar refinamientos de la malla a medida que evolucione el sistema.

Comunmente la alternativa al lapso maximal para la simulación de agujeros negros es elegir un lapso hiperbólico, en el cual destaca la elección $1 + \log$ (con $N = 2$) y para obtener simulaciones más estables se agrega un shift del tipo Gamma-Driver. Como ya se ha mencionado anteriormente, David Hilditch usó este enfoque sin éxito. La simulación desarrolla una singularidad en $t = 5$ alrededor de $r = 1.5$ a $r = 2$. El hecho de obtener una singularidad a pesar de usar la foliación $1 + \log$ sugiere que la patología puede ser de otra naturaleza.

Siguiendo esta idea, se realizaron simulaciones con amplitudes ligeramente inferiores y superiores a la crítica, $a = 4.65, 4.7$ y utilizando un lapso $1 + \log$ sin shift con un parámetro de disipación igual a 0.005 y un paso de tiempo adaptativo $\Delta t = \min(\Delta_\rho, \Delta_z)/\sqrt{2}v_g$ con v_g la velocidad de propagación de los campos de norma dada por la ecuación (1.4.7). La resolución de las mallas son $\Delta_1 = 0.05$, $\Delta_2 = 0.025$ y $\Delta_3 = 0.0125$ utilizando mallas con $256^2, 512^2$ y 1024^2 puntos respectivamente. Aproximadamente en $t \approx 4.6$, con $a = 4.65$ el lapso desarrolla una esquina en $\rho \approx 0.2$ y la traza de la curvatura extrínseca desarrolla un pico en $\rho \approx 0.2$, mientras que para $a = 4.7$, en $t \approx 4.7$ el lapso desarrolla una esquina en $\rho \approx 0.3$ y la traza de la curvatura extrínseca desarrolla un pico en $\rho \approx 0.3$. Notemos que la amplitud de los picos crecen conforme se aumenta la resolución de la malla, figura 6.14.

Como ya se ha mencionado en la sección 1.9, existen otro tipo de singularidades que pueden surgir debido a los choques de norma y como última parte de esta tesis, se explorará esta opción. Consideraremos un lapso que evite choques tomado $k = 1$ de la ecuación (1.9.3). Esta elección garantiza que si $\alpha \sim 1$, $f(\alpha) \sim 2$ teniendo el mismo comportamiento asintótico que el lapso $1 + \log$ con $N = 2$.

Para comparar esta elección de lapso, utilizaremos los mismos parámetros para las mallas y el paso de tiempo de la simulación con la foliación $1 + \log$. La onda con amplitud $a = 4.65$ evoluciona satisfactoriamente, obteniendo que la onda deja el dominio numérico en un tiempo $t \approx 30$ dejando atrás un espacio del tipo Minkowski. Similar al caso $a = 4$ se observa que en tiempos tardíos se tiene una disminución del factor de convergencia, aunque en este caso la convergencia es a segundo orden.

El caso con $a = 4.7$ al ser supercrítico, debe colapsar a un agujero negro. La simulación con el espaciamiento $\Delta_1 = 0.05$ no encuentra ningún horizonte, por lo cual es sustituida con una simulación de parámetros $\Delta_* = 0.02$ con 210^2 puntos. El tiempo en el que el buscador encuentra un horizonte por primera vez, la masa inicial y final se muestran en la tabla 6.2, teniendo convergencia de los datos a tercer orden. La masa del horizonte encontrada se encuentra en el intervalo encontrado por Hilditch *et al.* $M_H = [0.27, 0.3]$. La masa del horizonte encontrado permanece estable en un intervalo aproximado $\delta t = 2$ antes de que el código colapse. La forma del horizonte a $t = 21$ en las tres resoluciones se muestra en la figura 6.16 el cual tiene un perfil achatado en los polos.

Al tener éxito con la elección del lapso, resta encontrar la amplitud crítica para el colapso gravitacional. Nuevamente se realizaron tres simulaciones con resoluciones antes usadas $\Delta_2 = 0.025$, $\Delta_* = 0.02$ y $\Delta_3 = 0.0125$. En las simulaciones con las resoluciones Δ_2, Δ_* se encuentra que la

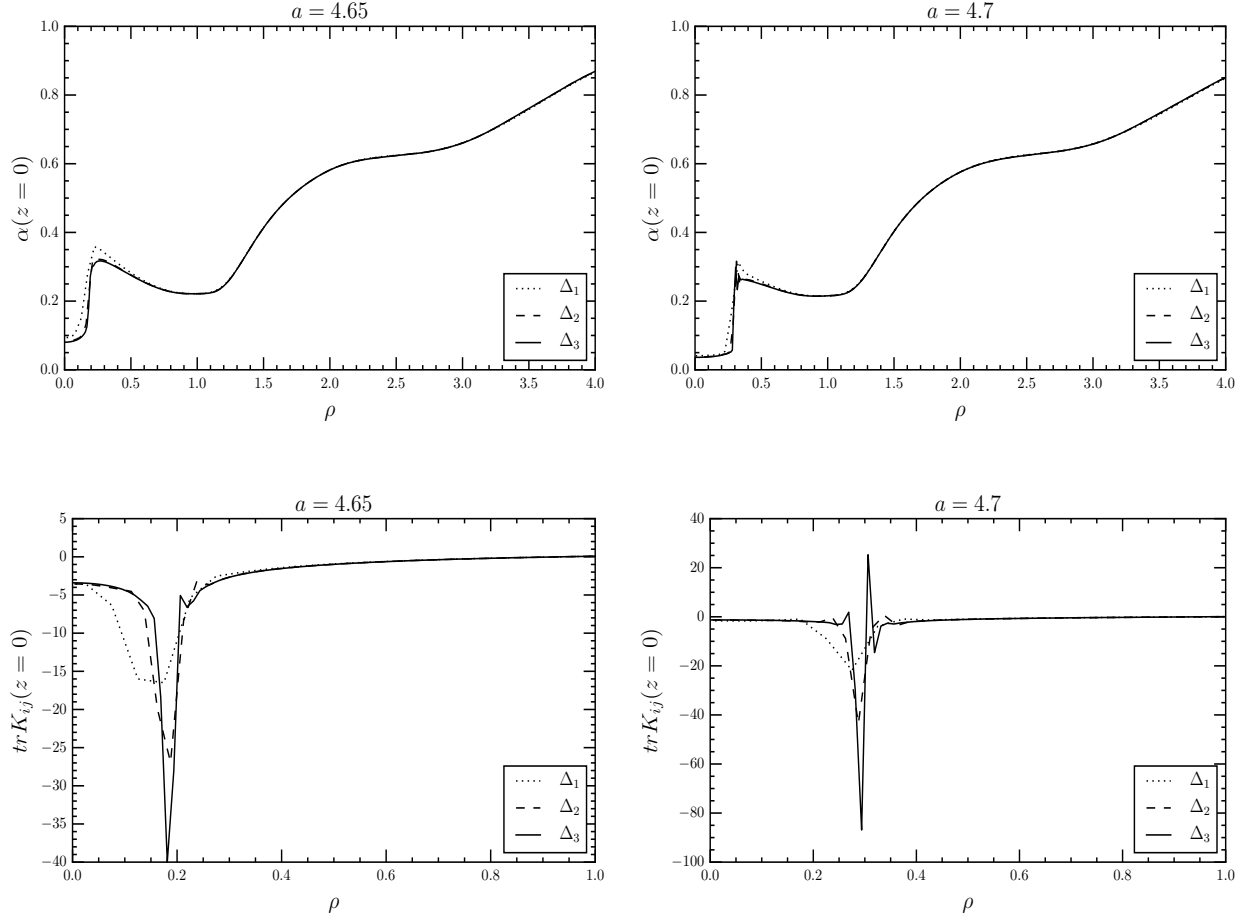


Figura 6.14: Gráficas superiores: Lapso para las amplitudes $a = 4.65$ y 4.7 . Gráficas inferiores: Traza de la curvatura extrínseca para las amplitudes $a = 4.65$ y 4.7 . El caso con la amplitud $a = 4.65$ desarrolla un esquina en el lapso y un pico en la curvatura extrínseca en $\rho \approx 0.2$ a $t \approx 4.6$, el caso con $a = 4.7$ se observa el mismo comportamiento pero en $\rho \approx 0.3$ a $t \approx 4.7$, ambos picos crecen al aumentar la resolución de la malla.

Δ	t	M_{H0}	M_H
0.025	20.459	0.266	0.278
0.2	19.541	0.251	0.275
0.0125	18.680	0.259	0.277

Tabla 6.2: Tiempo de formación, masa inicial y final del horizonte aparente para la onda de Brill con amplitud $a = 4.7$ a tres distintas resoluciones. El factor de convergencia es a tercer orden.

amplitud crítica está acotada en el intervalo $[4.69, 4.7]$ y para la resolución Δ_3 la cota se encuentra en $[4.695, 4.7]$. Ambos intervalos concuerdan con los reportados por Hilditch *et al.* Por razones prácticas no se realizaron simulaciones con resoluciones más finas. Recordemos que para obtener una condición de frontera de segundo orden el resolvidor elíptico AXELISOL debe situar la frontera en

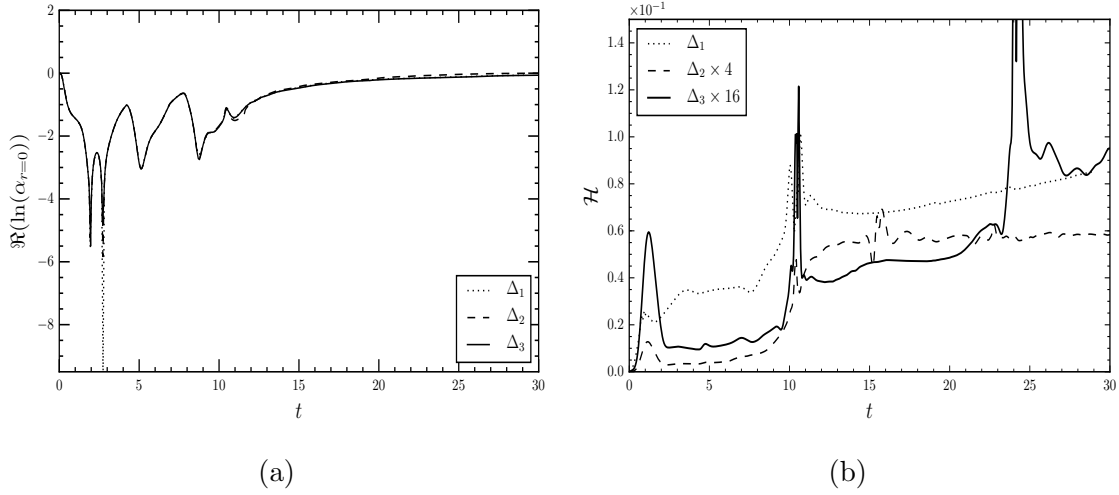


Figura 6.15: a) Parte real del valor central del logaritmo del lapso a tres diferentes resoluciones. La dinámica más fuerte ocurre antes de $t < 10$. b) Evolución de la norma de la constricción hamiltoniana en tres diferentes resoluciones. En tiempos tardíos se observa que la solución converge a segundo orden.

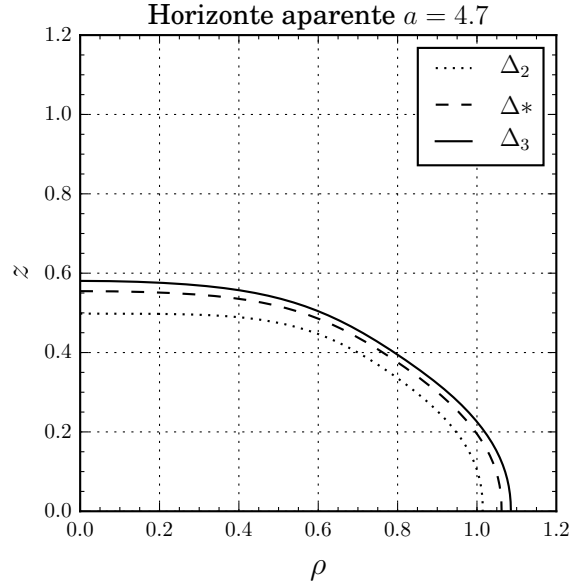


Figura 6.16: Horizonte aparente a $t = 21$ para la onda de Brill con amplitud $a = 4.7$.

$1/\sqrt{\Delta}$ y elegir una resolución más fina de las usadas, por ejemplo elegir la resolución $\Delta_3/2 = 0.00625$ situaría la frontera en $\rho, z = 12.65$, requiriendo usar una malla de 2048^2 puntos. Utilizar una malla igualmente espaciada con esta cantidad de puntos no es la mejor forma de aprovechar los recursos de cómputo.

Los fenómenos críticos son sensibles al error numérico y por ello es necesario considerar que al tener la dinámica más violenta alrededor del eje de simetría es necesario poder resolver las ecuaciones con mayor detalle en esta región y no así en las fronteras. En adición la distancia en la que se

colocan las fronteras determinará si los resultados son contaminados debido a las reflexiones espurias provocadas por las fronteras artificiales del dominio. Esto motiva la necesidad de usar un método de mallas adaptativas para resolver las regiones de interés de forma más eficiente. Sin embargo esta elección del lapso ha mostrado ser útil para poder estudiar con más detalle el comportamiento crítico del colapso para ondas de Brill.

Capítulo 7

Conclusiones

El trabajo desarrollado en esta tesis consistió en la construcción de subrutinas numéricas de extracción de radiación gravitacional y electromagnética y un buscador de horizontes aparentes en axisimetría para complementar el código de evolución OllinAxis.

Los capítulos 1, 2 y 3 presentan una breve descripción de la descomposición $3+1$ y el formalismo BSSN utilizado por el código OllinAxis, describiendo además la descomposición de las ecuaciones de Maxwell en el formalismo $3+1$ y la forma en que se construyen datos iniciales para agujeros negros neutros y cargados.

En el capítulo 4 se describió el algoritmo para construir el buscador de horizontes aparentes en axisimetría parametrizando el radio de la superficie como función del ángulo polar. La ecuación que permite buscar el horizonte aparente es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden por lo cual se emplea en método de Runge-Kutta para resolverla de forma numérica junto con el método de disparo. El caso con simetría ecuatorial se soluciona fácilmente pues únicamente es necesario imponer que la superficie sea suave en las fronteras $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ por lo cual el método de disparo prueba con distintos radios y los refina utilizando un método de bisección, no obstante el caso sin simetría se observa que la ecuación diferencial diverge para $\theta > \pi/2$ haciendo que el método de disparo falle. La solución propuesta modifica ligeramente el método de disparo, al buscar cambios de signo en la derivada del radio de la superficie y los refina utilizando el método de bisección hasta cierta tolerancia numérica. Este método es probado con superficies maximales de espaciotiempos estacionarios encontrado convergencia a cuarto orden con los resultados esperados.

El capítulo 5 explica el proceso de extracción de ondas gravitacionales y electromagnéticas utilizando el formalismo de Newmann-Penrose. El extractor de ondas gravitacionales y electromagnéticas es empleado en la colisión frontal de dos agujeros negros de igual masa momentáneamente en reposo partiendo del radio ISCO. El cálculo de la energía gravitacional radiada en la simulación muestra que es menor hasta un 30% comparado a la estimación clásica de la energía radiada por un cuadrupolo, mientras que la energía electromagnética es mayor hasta un 25% a su contraparte clásica, obteniendo además que la radiación gravitacional supera en dos órdenes de magnitud a la electromagnética.

Por último, el capítulo 6 compara las soluciones obtenidas por OllinAxis con las reportadas en la bibliografía, además presenta la evolución de ondas de Brill con amplitudes cercanas a la crítica. A

partir de los resultados publicados por Hilditch *et al.* utilizando el método de evolución de punturas y algunas pruebas empleando un lapso del tipo $1 + \log$, se conjetura que la dificultad al realizar evoluciones de ondas de Brill es debido a los choques de norma. La elección de un lapso que evita choques de norma muestra resultados satisfactorios pudiendo acotar la amplitud crítica al intervalo $[4.695, 4.7]$. La dificultad para refinar la amplitud radica en limitaciones prácticas asociadas al código OllinAxis, siendo necesaria la implementación de un esquema de mallas adaptativas para disminuir el error numérico en la simulación, el cual puede contaminar los resultados cercanos a la amplitud crítica.

Apéndice A

Integrales de masa, momento y carga

A.1. Integrales ADM

En relatividad general el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ codifica las propiedades energéticas de la materia, el cual además satisface una ley de conservación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Esta propiedad permite definir de forma local la conservación de la energía, pero no permite establecer la conservación de energía de forma global para espacios generales¹. La razón física de esto es que el tensor $T_{\mu\nu}$ no incluye la contribución energética del campo gravitacional y esto es debido a que en relatividad general no es posible definir de forma general la energía asociada al campo gravitacional.

Por otro lado, es posible definir un concepto de energía total en un sistema aislado al considerarlo asintóticamente plano. En este caso la métrica está dada por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con $h_{\mu\nu} \ll 1$. En este espacio es natural definir la masa y momento como

$$M = \int \rho \, dV, \quad P_i = \int j_i \, dV. \quad (\text{A.1})$$

Para reescribirlas en el lenguaje 3+1 se emplean las constricciones hamiltoniana (1.1.14) y de momentos (1.1.15), y recordando que se está considerando el límite de campo débil en el que la curvatura extrínseca es despreciable, las integrales (A.1) después de aplicar el teorema de la divergencia toman la forma

$$M = \frac{1}{16\pi} \oint_S (\partial_i h_{ij} - \partial_j h) \, dS^j, \quad P_i = \frac{1}{8\pi} \oint_S (K_{ij} - \delta_{ij} K) \, dS^j, \quad (\text{A.2})$$

donde las integrales son calculadas sobre superficies alejadas de las fuentes de materia y $dS^i = s^i dA$, con s^i el vector normal apuntando hacia afuera de la hipersuperficie y dA el elemento de área. A las integrales (A.2) se les llama integrales ADM de masa y momento [11] (por Arnowitt, Deser y Misner).

Al tener interacciones fuertes, como ondas gravitacionales, las expresiones de arriba no son válidas y es necesario tomar el límite de un radio infinito, en el que la aproximación de campo débil

¹Excepto cuando existe un vector de Killing ξ^μ temporalmente.

siga siendo válida

$$M_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S (\delta^{ij} \partial_i h_{jk} - \partial_k h) dS^k, \quad (\text{A.3})$$

$$P_{ADM}^i = \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S (K_j^i - \delta_j^i K) dS^j. \quad (\text{A.4})$$

La desventaja de la expresión (A.3) es que necesita evaluarse en coordenadas cartesianas y además, al trabajar con dominios finitos en las simulaciones numéricas, la expresión converge muy lento para un radio finito. Se tiene una mejor expresión si la métrica es conformemente plana, esto es $\gamma_{ij} = \psi^4 \delta_{ij}$, la masa ADM se reduce a

$$M_{ADM} = -\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S \partial_j \psi dS^j, \quad (\text{A.5})$$

donde se asume que ψ tiende a uno en infinito o lo suficientemente rápido en el dominio numérico.

Una forma menos formal de calcular la masa es la llamada *pseudomasa de Schwarzschild* que calcula la masa sobre esferas de radio r para espacios que asintóticamente tienden a un espaciotiempo de Schwarzschild

$$M = \left(\frac{A}{16\pi} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{(dA/dr)^2}{16\pi g_{rr} A} \right], \quad (\text{A.6})$$

donde A es el área de una esfera coordenada a un radio finito y g_{rr} puede tomarse como su promedio sobre toda la esfera. En la práctica, se calcula la masa para disntitos radios dentro del dominio y la masa será el valor al que converge. Esta expresión converge más rápido que la integral ADM e incluso funciona en espacios con momento angular en los que el término de momento angular decaen más rápido que los asociados a la masa.

A.2. Integral de carga

De la ecuación de continuidad para el tensor de energía momento asociado al campo electromagnético, se demuestra que la carga es una cantidad conservada.

$$Q = \int_V \rho_{em} dV = \frac{1}{4\pi} \int_V {}^{(3)}\nabla_m E^m dV. \quad (\text{A.1})$$

Usando el teorema de la divergencia, la integral de volumen puede cambiarse por una sobre la superficie

$$Q = \frac{1}{4\pi} \oint_S E^m dA_m. \quad (\text{A.2})$$

Escrita en términos de cantidades conformes $\hat{\rho}_{em} = \psi^6 \rho_{em}$, $\hat{E}^\mu = \psi^6 E^\mu$ y $\hat{\gamma}_{ij} = \psi^{-4} \gamma_{ij}$, $dV = \psi^{-6} d\hat{V}$.

$$Q = \int_V \hat{\rho}_{em} d\hat{V} = \frac{1}{4\pi} \oint_S \hat{E}^m d\hat{A}_m, \quad (\text{A.3})$$

donde se ha usado $\hat{\nabla}_m \hat{E}^m = 4\pi \hat{\rho}_{em}$.

Apéndice B

Clasificación de Petrov

Los escalares de Weyl Ψ_a , por construcción dependen en la forma que se definan las tétradas nulas. Por lo cual, es natural preguntarse si mediante alguna transformación de tétradas algunos escalares sean nulos. Las tétradas pueden ser transformadas mediante rotaciones en el espaciotiempo, las cuales están descritas por los elementos del grupo de transformación de Lorentz teniendo seis grados de libertad. Tres de ellos corresponden a rotaciones en el espacio y el resto a boost en las direcciones x, y, z que mezclan la dirección temporal con alguna espacial.

Estas transformaciones se clasifican en tres tipos

- Rotaciones nulas de clase I, que dejan al vector \vec{l} invariante.

$$l^\mu \rightarrow l^\mu, \quad m^\mu \rightarrow m^\mu + al^\mu, \quad \bar{m}^\mu \rightarrow \bar{m}^\mu + \bar{a}l^\mu \quad , \quad (\text{B.1})$$

$$k^\mu \rightarrow k^\mu + \bar{a}m^\mu + a\bar{m}^\mu + a\bar{a}l^\mu. \quad (\text{B.2})$$

- Rotaciones nulas del tipo II que dejan invariante al vector \vec{k} .

$$k^\mu \rightarrow k^\mu, \quad m^\mu \rightarrow m^\mu + bk^\mu, \quad \bar{m}^\mu \rightarrow \bar{m}^\mu + \bar{b}k^\mu \quad , \quad (\text{B.3})$$

$$l^\mu \rightarrow l^\mu + \bar{b}m^\mu + b\bar{m}^\mu + \bar{b}b k^\mu. \quad (\text{B.4})$$

- Rotaciones nulas del tipo III, que dejan invariantes a los vectores \vec{l}, \vec{k} y al producto $k^\mu l_\mu$.

$$l^\mu \rightarrow \lambda^{-1}l^\mu, \quad k^\mu \rightarrow \lambda k^\mu, \quad m^\mu \rightarrow e^{i\theta}m^\mu, \quad \bar{m}^\mu \rightarrow e^{-i\theta}\bar{m}^\mu. \quad (\text{B.5})$$

Para usar estas transformaciones, supongamos que $\Psi_4 \neq 0$ lo cual siempre se puede realizar si el espacio no es plano. Aplicando una transformación de tipo I se obtiene

$$\Psi_0 \rightarrow \Psi_0, \quad (\text{B.6})$$

$$\Psi_1 \rightarrow \Psi_1 + \bar{a}\Psi_0, \quad (\text{B.7})$$

$$\Psi_2 \rightarrow \Psi_2 + 2\bar{a}\Psi_1 + \bar{a}^2\Psi_0, \quad (\text{B.8})$$

$$\Psi_3 \rightarrow \Psi_3 + 3\bar{a}\Psi_2 + \bar{a}^2\Psi_1 + \bar{a}^3\Psi_0, \quad (\text{B.9})$$

$$\Psi_4 \rightarrow \Psi_4 + 4\bar{a}\Psi_3 + 6\bar{a}^2\Psi_2 + 4\bar{a}^3\Psi_1 + \bar{a}^4\Psi_0. \quad (\text{B.10})$$

Mientras que para las transformaciones de clase II

$$\Psi_0 \rightarrow \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi^4, \quad (\text{B.11})$$

$$\Psi_1 \rightarrow \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4, \quad (\text{B.12})$$

$$\Psi_2 \rightarrow \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \quad (\text{B.13})$$

$$\Psi_3 \rightarrow \Psi_3 + b\Psi_4, \quad (\text{B.14})$$

$$\Psi_4 \rightarrow \Psi_4. \quad (\text{B.15})$$

$$(\text{B.16})$$

Notemos que $\Psi_0 = 0$ si b es la raíz de la ecuación

$$\Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi^4 = 0. \quad (\text{B.17})$$

La ecuación (B.17) en general tiene cuatro soluciones complejas, estos valores nos proporcionarán las direcciones en que se modifica l^μ

$$l^\mu \rightarrow l^\mu + \bar{b}m^\mu + b\bar{m}^\mu + b\bar{b}k^\mu. \quad (\text{B.18})$$

y son conocidas como las *direcciones principales nulas* del tensor de Weyl. Una forma alternativa de verificar si un vector apunta en una de las direcciones principales nulas es comprobar que satisface la relación [26, 93]

$$k^\alpha k^\beta k_{[\mu} C_{\nu]\alpha\beta[\lambda} k_{\sigma]} = 0, \quad (\text{B.19})$$

donde $C_{\alpha\beta\mu\nu}$ es el tensor de Weyl y k^μ es un vector nulo. Si alguna de las raíces de la ecuación (B.17) coinciden, se dice que el espacio es *algebraicamente especial*. Esto nos permite clasificarlos dependiendo del número del número de raíces distintas. A esta clasificación se le llama de Petrov [94].

- Tipo I: Cuatro raíces distintas. Si se realiza una transformación del tipo II y posteriormente una del tipo I, podemos obtener que $\Psi_4 = 0$. Por lo tanto siempre se puede elegir una tétrada tal que $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ sean distintos de cero.
- Tipo II: Dos raíces coinciden. Mediante sucesivas transformaciones del tipo I se obtiene que $\{\Psi_2, \Psi_3\}$ son distintos de cero.
- Tipo III : Tres raíces coinciden. Primero una transformación del tipo II y seguida de una del

tipo I obtenemos que Ψ_3 es distinto de cero.

- Tipo N: Todas las raíces son iguales y usando transformaciones del tipo II, el único escalar distinto de cero es Ψ_4 .
- Tipo D: Dos pares de raíces coinciden. En este caso se puede obtener que el único escalar no nulo es Ψ_2 .
- Tipo O: El tensor de Weyl es idénticamente cero. El espacio es conformemente plano.

Apéndice C

Construcción de una tétrada ortonormal

C.1. Transformación a coordenadas esféricas

La forma más sencilla de construir coordenadas esféricas a partir de coordenadas cilíndricas es preservar el ángulo polar φ y realizar una transformación en (ρ, z) a (r, θ) . La definición estándar es

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (\text{C.1})$$

cuya transformación inversa es

$$r^2 = \rho^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{\rho}{z}, \quad (\text{C.2})$$

de estas transformaciones, la matriz jacobiana y su inversa son

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho, z)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{bmatrix} \rho/r & z \\ z/r & -\rho \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(\rho, z)} &= \begin{bmatrix} \rho/r & z/r \\ z/r^2 & -\rho/r^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Empleando estas transformaciones, la métrica conforme (3.2.1) en coordenadas esféricas es

$$\hat{\gamma}_{rr} = \frac{1}{r^2} (\rho^2 A + 2\rho^2 z C + z^2 B), \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{\gamma}_{\theta\theta} = \rho^2 B - 2\rho^2 z C + z^2 A, \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{\gamma}_{\varphi\theta} = \rho^2 H, \quad (\text{C.6})$$

$$\hat{\gamma}_{r\theta} = \frac{1}{r} (\rho z (A - B) + (z^2 - \rho^2) \rho C), \quad (\text{C.7})$$

$$\hat{\gamma}_{r\varphi} = \frac{\rho^2}{r} (\rho^2 C_1 + z C_2), \quad (\text{C.8})$$

$$\hat{\gamma}_{\theta\phi} = \rho^3 (z C_1 - C_2). \quad (\text{C.9})$$

La transformación de vectores contravariantes es

$$v^r = \frac{1}{r} (\rho v^\rho + z v^z), \quad (\text{C.10})$$

$$v^\theta = \frac{1}{r^2} (z v^\rho - \rho v^z), \quad (\text{C.11})$$

y al conservar el ángulo azimutal, la componente φ no cambia.

C.2. Construcción de una tétrada ortonormal

En el formalismo de Newmann-Penrose se introduce una tétrada de vectores $\{\vec{e}_{(a)}\}$ tales que satisfacen la relación

$$e_{(a)}^\mu e_{\mu(b)} = \eta_{(a)(b)}, \quad (\text{C.1})$$

con $\eta_{(a)(b)}$ la métrica de Minkowski. La inversa de $\eta_{(a)(b)}$ es una matriz tal que

$$\eta^{(a)(c)} \eta_{(c)(b)} = \delta_{(b)}^{(a)}, \quad (\text{C.2})$$

esto permite definir otro conjunto de vectores $\{\vec{e}^{(a)}\}$ tales que

$$\vec{e}^{(a)} := \eta^{(a)(b)} \vec{e}_{(b)}. \quad (\text{C.3})$$

En términos $\{\vec{e}_{(a)}\}$ y $\{\vec{e}^{(a)}\}$, la métrica se expresa como

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= e_{(a)\mu} e_{(b)\nu} = \eta^{(a)(b)} e_{(a)\mu} e_{(b)\nu} \\ &= -e_{(0)\mu} e_{(0)\nu} + e_{(1)\mu} e_{(1)\nu} + e_{(2)\mu} e_{(2)\nu} + e_{(3)\mu} e_{(3)\nu}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Típicamente, se toma a $e_{(0)}^\mu$ como el vector normal a las hipersuperficies espaciales Σ_t , $e_{(0)}^\mu = n^\mu$, $e_{(1)}^\mu$ como el vector normal radial unitario, $e_{(1)}^\mu = e_r^\mu$, $e_{(2)}^\mu = e_\theta^\mu$ como el vector normal azimutal y $e_{(3)}^\mu = e_\varphi^\mu$ como el vector normal polar. Los vectores espaciales $\vec{e}_{(i)}$ serán los unitarios conocidos en coordenadas esféricas (r, θ, φ) en el régimen asintótico, pero para un radio finito en general no lo son. Para dar una expresión explícita en términos de las componentes de la métrica en coordenadas esféricas, consideremos que en un espacio en axisimetría existe un vector de Killing azimutal $\vec{\xi}$ y supondremos que podemos definir una dirección saliente \vec{s} en las hipersuperficies Σ_t . El producto exterior de $\vec{\xi}$ con el vector \vec{s} nos proporcionará el vector restante para conformar una triada de vectores ortogonales. Una última observación es que en general \vec{s} y $\vec{\xi}$ no serán ortonormales por lo cual, es necesario realizar el procedimiento de Gram-Schmidt.

Podemos emplear a \vec{s} y $\vec{\xi}$ para construir la triada de vectores espaciales. La forma más sencilla

de proceder es pedir que $\vec{e}_{(1)}$ sea ortogonal a $\vec{e}_{(3)}$, con esto

$$\vec{e}_{(3)} = \hat{\xi}, \quad (\text{C.5})$$

$$\vec{e}_{(1)} = \frac{\hat{s} - \langle \hat{\xi}, \hat{s} \rangle \hat{\xi}}{\sqrt{1 - \langle \hat{\xi}, \hat{s} \rangle^2}}, \quad (\text{C.6})$$

donde \hat{s} , $\hat{\xi}$ son vectores unitarios contruidos a partir de \vec{s} y $\vec{\xi}$ respectivamente. El último vector será simplemente

$$\vec{e}_{(2)} = \vec{e}_{(3)} \times \vec{e}_{(1)}. \quad (\text{C.7})$$

Si tomamos a \vec{s} como la dirección radial esférica r

$$\hat{s}^\mu = \frac{\delta_r^\mu}{\sqrt{\gamma_{rr}}}, \quad (\text{C.8})$$

las componentes espaciales de la triada de vectores son

$$e_{(1)}^i = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}} \frac{\gamma^{\theta\theta} \gamma^{ir} - \gamma^{\theta r} \gamma^{i\theta}}{\sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\varphi\varphi} - \gamma_{r\varphi}^2}} \quad (\text{C.9})$$

$$e_{(2)}^i = \frac{\sqrt{\gamma} \gamma^{i\theta}}{\sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\varphi\varphi} - \gamma_{r\varphi}^2}} \quad (\text{C.10})$$

$$e_{(3)}^i = \frac{\delta_\varphi^i}{\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}}, \quad (\text{C.11})$$

donde γ es el determinante de la métrica espacial en coordenadas esféricas. Notemos que por construcción $e_{(j)}^0 = 0$ con $j = 1, 2, 3$. Para un espacio axisimétrico sin momento angular, las componentes se reducen aún más

$$e_{(1)}^i = \frac{\delta_r^i}{\sqrt{\gamma_{rr}}}, \quad (\text{C.12})$$

$$e_{(2)}^i = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{rr} \gamma_{\varphi\varphi}}} \gamma^{i\theta}, \quad (\text{C.13})$$

$$e_{(3)}^i = \frac{\delta_\varphi^i}{\sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}}, \quad (\text{C.14})$$

siendo evidente que si $\gamma_{\mu\nu}$ es la métrica de un espacio Euclidianio en coordenadas esféricas, se recupera la definición usual de vectores unitarios $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$.

Bibliografía

- [1] A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pag. 844-847., 1915.
- [2] A. Einstein. Zur allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pag. 778-786., 1915.
- [3] Susan G Hahn and Richard W Lindquist. The two-body problem in geometrodynamics. *Annals of Physics*, 29(2):304 – 331, 1964.
- [4] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific & Virgo Collaboration). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, 2016.
- [5] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration & Virgo Collaboration). Gw151226: Observation of gravitational waves from a 22-solar-mass binary black hole coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 116:241103, 2016.
- [6] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific & Virgo Collaboration). Gw170104: Observation of a 50-solar-mass binary black hole coalescence at redshift 0.2. *Phys. Rev. Lett.*, 118:221101, 2017.
- [7] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration & Virgo Collaboration). Gw170814: A three-detector observation of gravitational waves from a binary black hole coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 119:141101, 2017.
- [8] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration & Virgo Collaboration). Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119:161101, 2017.
- [9] Einstein Toolkit: Open software for relativistic astrophysics.
- [10] José Manuel Torres Chávez. *Dinámica de materia cargada en relatividad general 3+1*. PhD thesis, 2016.
- [11] Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 40(9):1997–2027, 2008.
- [12] J. W. York, Jr. Kinematics and dynamics of general relativity. In Cambridge Univ. Press., editor, *Sources of Gravitational Radiation*, pages 83–126, 1979.

-
- [13] Miguel Alcubierre. *Introduction to 3+1 numerical relativity*. International series of monographs on physics. Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [14] Y. Foures-Bruhat. Theoreme d’existence pour certains systemes derivees partielles non lineaires. *Acta Mat.*, 88:141–225, 1952.
- [15] T. Nakamura, K. Oohara, and Y. Kojima. General Relativistic Collapse to Black Holes and Gravitational Waves from Black Holes. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 90:1–218, 1987.
- [16] Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. Numerical integration of einstein’s field equations. *Phys. Rev. D*, 59:024007, 1998.
- [17] Miguel Alcubierre and Martha D. Mendez. Formulations of the 3+1 evolution equations in curvilinear coordinates. *General Relativity and Gravitation*, 43(10):2769, 2011.
- [18] Larry Smarr and James W. York. Kinematical conditions in the construction of spacetime. *Phys. Rev. D*, 17:2529–2551, 1978.
- [19] Carles Bona, Joan Massó, Edward Seidel, and Joan Stela. New formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 75:600–603, 1995.
- [20] Miguel Alcubierre, Bernd Brügmann, Peter Diener, Michael Koppitz, Denis Pollney, Edward Seidel, and Ryoji Takahashi. Gauge conditions for long-term numerical black hole evolutions without excision. *Phys. Rev. D*, 67:084023, 2003.
- [21] Miguel Alcubierre, Bernd Brügmann, Denis Pollney, Edward Seidel, and Ryoji Takahashi. Black hole excision for dynamic black holes. *Phys. Rev. D*, 64:061501, Aug 2001.
- [22] C. Bona, J. Massó, E. Seidel, and J. Stela. First order hyperbolic formalism for numerical relativity. *Phys. Rev. D*, 56:3405–3415, 1997.
- [23] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. Gravitation. W. H. Freeman, 1973.
- [24] M. D. Kruskal. Maximal extension of schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119:1743–1745, 1960.
- [25] G. Szekeres. On the singularities of a Riemannian manifold. *Publ. Math. Debrecen*, 7:285–301, 1960.
- [26] Jerry B. Griffiths and Jiří Podolský. *Exact Space-Times in Einstein’s General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009.
- [27] Miguel Zilhão, Vitor Cardoso, Carlos Herdeiro, Luis Lehner, and Ulrich Sperhake. Testing the nonlinear stability of kerr-newman black holes. *Phys. Rev. D*, 90:124088, 2014.
- [28] Bernd Reimann. Slice stretching effects for maximal slicing of a schwarzschild black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 22(21):4563–4587, 2005.
- [29] Edward Seidel and Wai-Mo Suen. Towards a singularity-proof scheme in numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 69:1845–1848, ep 1992.

-
- [30] Bernd Brügmann, Wolfgang Tichy, and Nina Jansen. Numerical simulation of orbiting black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 92:211101, 2004.
- [31] G. B. Cook, M. F. Huq, S. A. Klasky, M. A. Scheel, A. M. Abrahams, A. Anderson, P. Anninos, T. W. Baumgarte, N. T. Bishop, S. R. Brandt, J. C. Browne, K. Camarda, M. W. Choptuik, R. R. Correll, C. R. Evans, L. S. Finn, G. C. Fox, R. Gómez, T. Haupt, L. E. Kidder, P. Laguna, W. Landry, L. Lehner, J. Lenaghan, R. L. Marsa, J. Masso, R. A. Matzner, S. Mitra, P. Papadopoulos, M. Parashar, L. Rezzolla, M. E. Rupright, F. Saied, P. E. Saylor, E. Seidel, S. L. Shapiro, D. Shoemaker, L. Smarr, W. M. Suen, B. Szilágyi, S. A. Teukolsky, M. H. P. M. van Putten, P. Walker, J. Winicour, and J. W. York. Boosted three-dimensional black-hole evolutions with singularity excision. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2512–2516, 1998.
- [32] Miguel Alcubierre. Hyperbolic slicings of spacetime: singularity avoidance and gauge shocks. *Classical and Quantum Gravity*, 20(4):607–623, 2003.
- [33] Frans Pretorius. Evolution of binary black-hole spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, 95:121101, 2005.
- [34] John G. Baker, Joan Centrella, Dae-Il Choi, Michael Koppitz, and James van Meter. Binary black hole merger dynamics and waveforms. *Phys. Rev. D*, 73:104002, 2006.
- [35] John G. Baker, Joan Centrella, Dae-Il Choi, Michael Koppitz, and James van Meter. Gravitational-wave extraction from an inspiraling configuration of merging black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 96:111102, 2006.
- [36] M. Campanelli, C. O. Lousto, P. Marronetti, and Y. Zlochower. Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. *Phys. Rev. Lett.*, 96:111101, Mar 2006.
- [37] H. Kreiss and Joseph Oliger. Methods for the approximate solution of time dependent problems. page 107 p., 1973. At head of title: Global Atmospheric Research Programme (GARP) WMO-ICSU Joint Organizing Committee.
- [38] Miguel Alcubierre. Appearance of coordinate shocks in hyperbolic formalisms of general relativity. *Phys. Rev. D*, 55:5981–5991, 1997.
- [39] Miguel Alcubierre. Are gauge shocks really shocks? *Classical and Quantum Gravity*, 22(19):4071–4081, 2005.
- [40] Miguel Alcubierre and Joan Massó. Pathologies of hyperbolic gauges in general relativity and other field theories. *Phys. Rev. D*, 57:R4511–R4515, 1998.
- [41] Robert M. Wald. Black hole in a uniform magnetic field. *Phys. Rev. D*, 10:1680–1685, 1974.
- [42] Miguel Alcubierre, Juan Carlos Degollado, and Marcelo Salgado. Einstein-maxwell system in $3 + 1$ form and initial data for multiple charged black holes. *Phys. Rev. D*, 80:104022, 2009.
- [43] M. Cvetič, G. W. Gibbons, and C. N. Pope. Super-geometrodynamics. *Journal of High Energy Physics*, 2015(3):29, 2015.

-
- [44] Charles W Misner and John A Wheeler. Classical physics as geometry. *Annals of Physics*, 2(6):525 – 603, 1957.
- [45] L. L. Smarr. *The structure of general relativity with a numerical illustration: The collision of two black holes*. PhD thesis, Texas Univ., Austin., 1975.
- [46] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. Collisions of relativistic clusters and the formation of black holes. *Phys. Rev. D*, 45:2739–2750, 1992.
- [47] Peter Anninos, David Hobill, Edward Seidel, Larry Smarr, and Wai-Mo Suen. Collision of two black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 71:2851–2854, 1993.
- [48] John Baker, Andrew Abrahams, Peter Anninos, Steve Brandt, Richard Price, Jorge Pullin, and Edward Seidel. Collision of boosted black holes. *Phys. Rev. D*, 55:829–834, 1997.
- [49] Peter Anninos and Steven Brandt. Head-on collision of two unequal mass black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 81:508–511, 1998.
- [50] Takashi Nakamura, Kei-Ichi Maeda, Shoken Miyama, and Misao Sasaki. General relativistic collapse of an axially symmetric star leading to the formation of neutron stars and black holes. *Symposium - International Astronomical Union*, 93:326–326, 1981.
- [51] T. Nakamura. General Relativistic Collapse of Axially Symmetric Stars Leading to the Formation of Rotating Black Holes. *Progress of Theoretical Physics*, 65:1876–1890, 1981.
- [52] Richard F. Stark and Tsvi Piran. Gravitational-wave emission from rotating gravitational collapse. *Phys. Rev. Lett.*, 55:891–894, 1985.
- [53] Andrew M. Abrahams, Gregory B. Cook, Stuart L. Shapiro, and Saul A. Teukolsky. Solving einstein’s equations for rotating spacetimes: Evolution of relativistic star clusters. *Phys. Rev. D*, 49:5153–5164, 1994.
- [54] Andrew M. Abrahams, Stuart L. Shapiro, and Saul A. Teukolsky. Disk collapse in general relativity. *Phys. Rev. D*, 50:7282–7291, 1994.
- [55] Sergio Dain. Axially symmetric spacetimes: numerical and analytical perspectives. *Journal of Physics: Conference Series*, 314:012015, 2011.
- [56] Kenneth Eppley. Evolution of time-symmetric gravitational waves: Initial data and apparent horizons. *Phys. Rev. D*, 16:1609–1614, 1977.
- [57] Andrew M. Abrahams and Charles R. Evans. Critical behavior and scaling in vacuum axisymmetric gravitational collapse. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2980–2983, ay 1993.
- [58] Miguel Alcubierre, Gabrielle Allen, Bernd Brügmann, Gerd Lanfermann, Edward Seidel, Wai-Mo Suen, and Malcolm Tobias. Gravitational collapse of gravitational waves in 3d numerical relativity. *Phys. Rev. D*, 61:041501, 2000.

-
- [59] David Garfinkle and G. Comer Duncan. Numerical evolution of brill waves. *Phys. Rev. D*, 63:044011, 2001.
- [60] Oliver Rinne. Constrained evolution in axisymmetry and the gravitational collapse of prolate brill waves. *Classical and Quantum Gravity*, 25(13):135009, 2008.
- [61] Evgeny Sorkin. On critical collapse of gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 28(2):025011, 2011.
- [62] Oliver Rinne and John M Stewart. A strongly hyperbolic and regular reduction of einstein equations for axisymmetric spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22(6):1143–1166, 2005.
- [63] Milton Javier Ruíz Meneses. *Relatividad numérica : simetría axial, ondas gravitacionales y condiciones de frontera*. PhD thesis, 2008.
- [64] Santiago Ontañón Sánchez. *Resolvedor elíptico para relatividad numérica y su aplicación en ondas de Brill*. 2018.
- [65] Santiago Ontañón Sánchez. Resolvedor elíptico axelisol, 2018.
- [66] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [67] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [68] Jonathan Thornburg. Event and apparent horizon finders for 3 + 1 numerical relativity. *Living Reviews in Relativity*, 10(1):3, 2007.
- [69] T.W. Baumgarte and S.L. Shapiro. *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
- [70] M Alcubierre, S Brandt, B Brügmann, C Gundlach, J Massó, E Seidel, and P Walker. Test-beds and applications for apparent horizon finders in numerical relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 17(11):2159–2190, 2000.
- [71] Ezra Newman and Roger Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, 3(3):566–578, 1962.
- [72] S Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*. Oxford classic texts in the physical sciences. Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [73] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY, 3rd ed. edition, 1999.
- [74] Miguel Zilhão, Vitor Cardoso, Carlos Herdeiro, Luis Lehner, and Ulrich Sperhake. Collisions of charged black holes. *Phys. Rev. D*, 85:124062, 2012.
- [75] Miguel Zilhão, Vitor Cardoso, Carlos Herdeiro, Luis Lehner, and Ulrich Sperhake. Collisions of oppositely charged black holes. *Phys. Rev. D*, 89:044008, 2014.

-
- [76] E. T. Newman and R. Penrose. Note on the bondi-metzner-sachs group. *Journal of Mathematical Physics*, 7(5):863–870, 1966.
- [77] Saul A. Teukolsky. Linearized quadrupole waves in general relativity and the motion of test particles. *Phys. Rev. D*, 26:745–750, 1982.
- [78] Oliver Rinne. Explicit solution of the linearized einstein equations in the transverse-traceless gauge for all multipoles. *Classical and Quantum Gravity*, 26(4):048003, 2009.
- [79] Gregory B. Cook. Three-dimensional initial data for the collision of two black holes. ii. quasicircular orbits for equal-mass black holes. *Phys. Rev. D*, 50:5025–5032, 1994.
- [80] Thomas W. Baumgarte. Innermost stable circular orbit of binary black holes. *Phys. Rev. D*, 62:024018, 2000.
- [81] Zhoujian Cao, Hwei-Jang Yo, and Jui-Ping Yu. Reinvestigation of moving punctured black holes with a new code. *Phys. Rev. D*, 78:124011, 2008.
- [82] Joseph Weber and John A. Wheeler. Reality of the cylindrical gravitational waves of einstein and rosen. *Rev. Mod. Phys.*, 29:509–515, 1957.
- [83] Dieter R. Brill. On the positive definite mass of the bondi-weber-wheeler time-symmetric gravitational waves. *Annals of Physics*, 7(4):466 – 483, 1959.
- [84] Dieter R. Brill and James B. Hartle. Method of the self-consistent field in general relativity and its application to the gravitational geon. *Phys. Rev.*, 135:B271–B278, 1964.
- [85] K. Eppley. Pure gravitational waves. In L. L. Smarr, editor, *Sources of Gravitational Radiation*, pages 275–291, 1979.
- [86] Andrew M. Abrahams and Charles R. Evans. Universality in axisymmetric vacuum collapse. *Phys. Rev. D*, 49:3998–4003, 1994.
- [87] Matthew W. Choptuik. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, 70:9–12, 1993.
- [88] Carsten Gundlach and José M. Martín-García. Critical phenomena in gravitational collapse. *Living Reviews in Relativity*, 10(1):5, 2007.
- [89] B.L. Hu and T.A. Jacobson. *Directions in General Relativity: Volume 2: Proceedings of the 1993 International Symposium, Maryland: Papers in Honor of Dieter Brill*. Number v. 2. Cambridge University Press, 1956.
- [90] Ankit Rohatgi. Webplotdigitizer, 2019.
- [91] David Hilditch, Thomas W. Baumgarte, Andreas Weyhausen, Tim Dietrich, Bernd Brügmann, Pedro J. Montero, and Ewald Müller. Collapse of nonlinear gravitational waves in moving-puncture coordinates. *Phys. Rev. D*, 88:103009, 2013.

- [92] David Hilditch, Andreas Weyhausen, and Bernd Brügmann. Evolutions of centered brill waves with a pseudospectral method. *Phys. Rev. D*, 96:104051, 2017.
- [93] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010.
- [94] A. Z. Petrov. The classification of spaces defining gravitational fields. *General Relativity and Gravitation*, 32(8):1665–1685, 2000.