



Universidad Nacional Autónoma de México

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

CONVECCIÓN NATURAL EN UNA CAVIDAD INCLINADA CON
ROTACIÓN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

Presenta:

Diana Alejandra Pérez Espejel

TUTOR PRINCIPAL

RUBÉN ÁVILA RODRÍGUEZ, CIA, DEPARTAMENTO DE
TERMOFLUIDOS

MÉXICO, CDMX. JUNIO 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado:

Presidente: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier

Secretario: Dr. Cuevas García Sergio

Vocal: Dr. Ávila Rodríguez Rubén

1er. Suplente: Dr. Quintanar Isaías Ignacio Arturo

2do. Suplente: Dr. Ramos Mora Eduardo

Lugar donde se realiza la tesis: Ciudad Universitaria, CDMX,
México

Tutor de tesis:

RUBÉN ÁVILA RODRÍGUEZ

Firma

Agradecimientos

Al Dr. Rubén Avila por sus enseñanzas y apoyo para realizar este proyecto.

Al Dr. Eduardo Ramos, Dr. Francisco Solorio y al Dr. Arturo Quintanar por sus comentarios y consejos que sirvieron para mejorar este proyecto.

A CONACyT por la beca otorgada para la realización de mis estudios doctorales.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al proyecto PAPIIT IN117314 "Transferencia de calor en un sistema esférico (fluido-sólido) con campo magnético y precesión" por los apoyos otorgados para la realización de este proyecto.

A mis amigos del Club de los P. por hacer estos años muy divertidos.

A mis hermanos y a mis tíos-hermanos.

A mis padres por su amor incondicional.

A mi esposo por siempre darme el amor y apoyo necesario para concluir este proyecto.

Resumen

En el presente trabajo se muestra un estudio del efecto que tiene la fuerza de Coriolis sobre la convección natural de un fluido de Boussinesq confinado en una cavidad inclinada infinita. El fluido es calentado por la placa inferior, lo que genera una condición de inestabilidad térmica para ángulos de inclinación menores a 90° , y una condición de estabilidad térmica para ángulos de inclinación mayores a 90° (cuando el calentamiento se lleva a cabo por arriba). El eje de rotación es ortogonal a las placas y pasa por el centro de éstas. El estudio fue realizado considerando un número de Prandtl fijo igual a 1.07.

Primeramente se presenta un estudio del estado base, en donde se deduce el sistema de ecuaciones que describen al flujo. Posteriormente se realiza una aproximación numérica de los perfiles de velocidad, en donde se observa que se generan espirales de Ekman debido a la rotación y a las condiciones de no deslizamiento en las placas.

Una vez conociendo los perfiles de velocidad del flujo base para diferentes ángulos de inclinación de las placas y diferentes tasas de rotación, se realiza un estudio de estabilidad lineal, en donde se desarrollan las ecuaciones de estabilidad para las variables de perturbación de velocidad vertical, temperatura y vorticidad, las cuales son presentadas como ondas periódicas de dos dimensiones. Se utiliza el método de Tau-Chebyshev para resolver las ecuaciones de estabilidad, el cual es formulado como un problema de eigenvalores y eigenvectores, en donde el número de Rayleigh es el eigenvalor a determinar. De esta manera se obtiene el número de Rayleigh crítico y el número de onda crítico (valores del inicio de la convección) para diferentes números de Taylor y diferente inclinación de las placas.

Una vez que se conocen los valores críticos, se realizan simulaciones numéricas no lineales para valores supercríticos del número de Rayleigh en una cavidad de tres dimensiones. Se consideran fronteras periódicas en las caras laterales de la cavidad. La solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes se realiza mediante el método de elementos espectrales hp. Las simulaciones

numéricas muestran que los patrones convectivos del inicio de la convección coinciden con los resultados de estabilidad lineal. Los resultados no lineales también muestran los patrones que predominan en los valores supercríticos. Finalmente se calcula el número de Nusselt para diferentes números de Taylor y ángulos de inclinación.

Abstract

In the present work, the effect of the Coriolis force on the natural convection of a Boussinesq fluid confined in an infinite inclined cavity is studied. The fluid is heated by the lower plate, which generates a condition of thermal instability for inclination angles less than 90° , and a thermal stability condition for inclination angles greater than 90° (when warming takes place on the upper plate). The rotation axis passes through the center of the plates and it is orthogonal to the hot and cold surfaces. The study was carried out considering a fixed Prandtl number equal to 1.07.

First, a study of the basic state is presented, where the system of equations that describe the flow is deduced. Subsequently, a numerical approximation of the velocity profiles is performed, where it is observed that Ekman spirals are generated due to the rotation and the no-slip conditions in the plates.

Once knowing the velocity profiles of the basic flow for different inclination angles of the plates and rotation rates, a linear stability study is carried out, where the stability equations are developed for the vertical velocity, temperature and vorticity disturbances, which are presented as two dimensional periodic waves. The Tau-Chebyshev method is used to solve the stability equations which are formulated as a problem of eigenvalues and eigenvectors, where the Rayleigh number is the eigenvalue to be determined. In this way, the critical Rayleigh number and the critical wave number (values at the onset of convection) are obtained for different Taylor numbers and inclination of the plates.

Once the critical values are known, non-linear numerical simulations are performed for supercritical Rayleigh numbers in a three dimensional cavity. Periodic boundaries conditions are considered on the lateral faces of the cavity. The numerical solution of the Navier-Stokes equations is done by the spectral element method hp. The numerical simulations show that the convective patterns at the onset of convection coincide with the linear stability results. The non-linear results also show the patterns that predominate in the supercritical

values. Finally, the Nusselt number is calculated for different Taylor numbers and tilted angles.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Lista de figuras	IX
1 Introducción	1
1.1 Convección Rayleigh-Beñard	3
1.2 Convección Rayleigh-Beñard con rotación	5
1.3 Convección natural en cavidades inclinadas	6
1.4 Convección natural en sistemas con esfuerzos cortantes y rotación	8
1.5 Objetivos	9
2 Modelo	11
2.1 Modelo físico	11
2.2 Ecuaciones de gobierno	12
3 Estado base	17
3.1 Obtención de las ecuaciones que describen al estado base	17
3.2 Análisis del flujo base	19
4 Estabilidad lineal	25
4.1 Desarrollo de las ecuaciones de estabilidad lineal	25
4.2 Método de Tau Chebyshev	33
4.3 Validación del código	38
4.4 Resultados	42
5 Simulaciones numéricas de las ecuaciones no lineales	59
5.1 Sistema de ecuaciones	59
5.2 Métodos de elementos espectrales <i>hp</i>	61
5.3 Validación del código	66
5.4 Simulaciones cavidad inclinada con rotación	66

6 Conclusiones	81
Bibliografía	82

Índice de figuras

1.1	Rollos convectivos (<i>cloud streets</i>) extendiéndose en la costa este de Estados Unidos.	2
1.2	Rollos convectivos (<i>cloud streets</i>) sobre la ciudad de Sooke, Canadá.	3
1.3	Celdas hexagonales de Bénard.	4
1.4	Rollos longitudinales y rollos transversales en una cavidad inclinada.	8
1.5	Número de Rayleigh crítico y punto de codimensión para una cavidad inclinada.	8
2.1	Esquema de la cavidad de estudio.	11
3.1	Perfiles de velocidad del flujo base de una cavidad inclinada con rotación	20
3.2	Flujo base para diferentes números de Taylor	21
3.3	Descripción esquemática del ángulo γ y su variación de con respecto al número de Ta	22
3.4	Valores máximos de las componentes de la velocidad y su posición en el eje vertical.	22
3.5	Valores máximos de magnitud de la velocidad y su posición en el eje vertical.	23
3.6	Primeras y segundas derivadas de las componentes de la velocidad.	24
3.7	Variación de los esfuerzos en la pared respecto al número de Ta	24
4.1	Esquema de placas infinitas para el análisis de estabilidad lineal.	26
4.2	Orientación de rollos oblicuos.	33
4.3	Reproducción de curvas de estabilidad de Chen and Pearlstein (1989).	39
4.4	Curvas de estabilidad (Chen and Pearlstein (1989)).	39
4.5	Curvas de estabilidad para $\delta = 0^\circ$ (Rayleigh–Bénard con rotación.)	40
4.6	Valores críticos de rollos longitudinales para diferentes números de Taylor.	42

4.7	Números de Rayleigh crítico para diferentes valores de ϕ	44
4.8	Números de onda crítico para diferentes valores de ϕ	45
4.9	Número de Ra crítico con respecto al ángulo de inclinación. . .	46
4.10	Parámetros críticos con respecto al número de Taylor.	48
4.11	Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 0, \delta = 30^\circ$ y $\phi = 0^\circ$	50
4.12	Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 0, \delta = 70^\circ$ y $\phi = 0^\circ$	51
4.13	Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 0, \delta = 120^\circ$ y $\phi = 90^\circ$	51
4.14	Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 100, \delta = 30^\circ$, y $\phi = 20^\circ$	52
4.15	Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 100, \delta = 70^\circ$ y $\phi = 20^\circ$	52
4.16	Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 100, \delta = 120^\circ$ y $\phi = 111^\circ$	53
4.17	Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 500, \delta = 30^\circ$ y $\phi = 40^\circ$	53
4.18	Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 500, \delta = 70^\circ$, y $\phi = 40^\circ$	54
4.19	Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 500, \delta = 120^\circ$ y $\phi = 135^\circ$	54
4.20	Perfiles de perturbación de temperatura para $Ta=0$	57
4.21	Perfiles de perturbación de temperatura para $Ta = 500$	58
5.1	Discretización espacial del método de elementos espectrales . . .	65
5.2	Detalle de malla computacional.	65
5.3	Validación del código numérico para la solución de las ecuaciones de N-S para el estudio de patrones convectivos.	67
5.4	Número de Nusselt promedio.	70
5.5	Número de Nusselt promedio para diferentes parámetros.	70
5.6	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 30, Ra =$ 4000 y $Ta = 0$	73
5.7	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 30, Ra =$ 4000 y $Ta = 100$	73
5.8	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 30, Ra =$ 4000 y $Ta = 300$	74
5.9	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 30, Ra =$ 4000 y $Ta = 500$	74
5.10	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 70, Ra =$ 6000 y $Ta = 0$	75

5.11	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 70$, $Ra = 6000$ y $Ta = 100$	75
5.12	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 70$, $Ra = 6000$ y $Ta = 300$	76
5.13	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 70$, $Ra = 6000$ y $Ta = 500$	77
5.14	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 100$, $Ra = 13000$ y $Ta = 0$	78
5.15	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 100$, $Ra = 13000$ y $Ta = 100$	78
5.16	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 100$, $Ra = 13000$ y $Ta = 300$	79
5.17	Perfiles de temperatura en el plano medio para $\delta = 100$, $Ra = 13000$ y $Ta = 500$	79
5.18	Mapa de patrones convectivos para $Ta = 100$	80

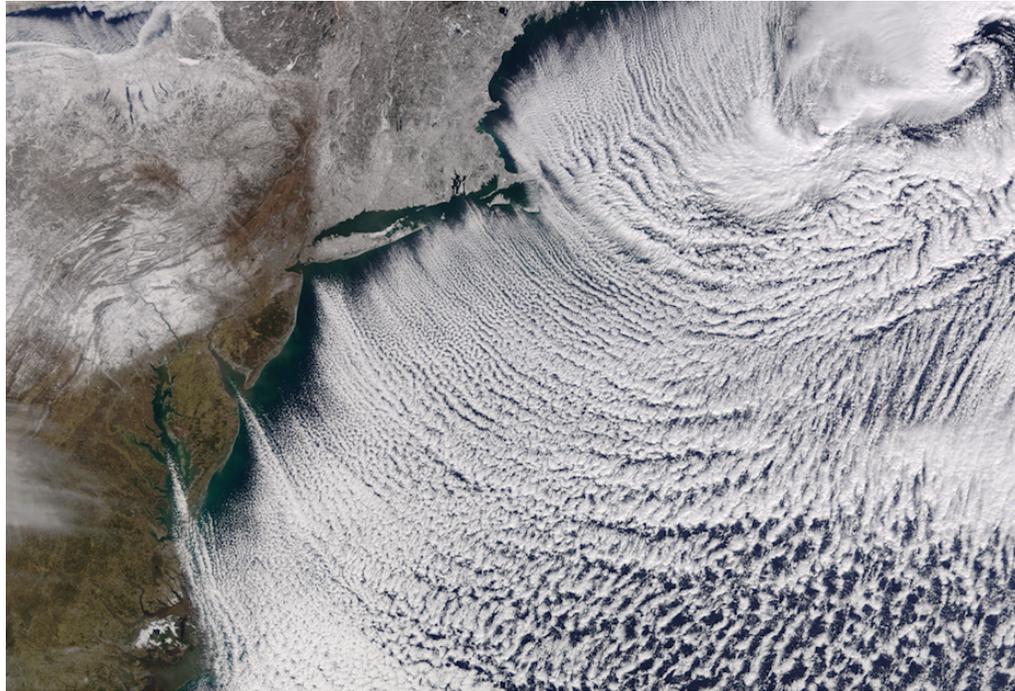
Capítulo 1

Introducción

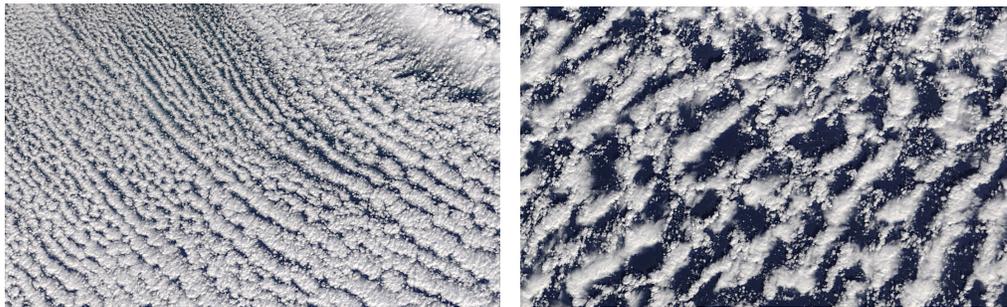
La convección es una característica dinámica de gran importancia de la atmósfera y del océano ya que esta conlleva al transporte de calor y masa a pequeña, mediana y gran escala, por lo que el clima y la biodiversidad del planeta y su cambio a través del tiempo se rigen por procesos de convección. Además, los patrones de movimiento convectivo también son relevantes en procesos de transporte de especies, tanto de nutrientes como de microorganismos así como de sustancias tóxicas.

El estudio de sistemas convectivos someros son de gran interés debido a que revelan el comportamiento de sistemas complejos presentes en sistemas climáticos globales (Lappa, 2009). En estos sistemas, la aparición de inestabilidades térmicas e inerciales pueden manifestarse con diferentes características, por ejemplo, pueden aparecer en forma de vórtices organizados, tal es el caso de las llamadas *cloud streets* en la atmósfera (ver figuras 1.1 y 1.2) así como de la circulación de Langmuir que se genera en cuerpos de agua de gran tamaño (Etling and Brown, 1993), en donde la aparición de rollos convectivos se puede generar cuando existe viento constante sobre la superficie de los cuerpos acuáticos. De manera general, la formación de los patrones convectivos depende de la competencia entre una fuerza perturbadora y un mecanismo disipativo (Daniels et al., 2000), las perturbaciones pueden ser de carácter térmico o inercial.

Estos fenómenos también se encuentran en procesos industriales, en los que según el propósito del proceso se puede requerir tener un alto nivel de convección o se requiere evitarlo, por ejemplo durante los procesos de fundición para materiales de uso electrónico, en los cuales la homogeneidad y pureza de los cristales puede ser altamente afectada por los movimientos convectivos durante la fundición (Braunsfurth et al., 1997) por lo que es necesario predecir la apa-



(a)



(b)

(c)

Figura 1.1: (a) Rollos convectivos (*cloud streets*) extendiéndose en la costa este de Estados Unidos. (b) Ampliación de imagen y detalle de rollos. (c) Ampliación de imagen en donde se observa detalle de otros patrones convectivos. Imagen obtenida con MODIS (Moderate Resolution Imaging Spectroradiometer) el 14 de febrero del 2016. (Jeff Schmaltz, NASA, 2016).



Figura 1.2: Rollos convectivos (*cloud streets*) sobre la ciudad de Sooke, Canadá el 13 de febrero del 2015 (Bill Needoba, 2015).

rición de dichas inestabilidades (Lappa, 2005). Es por ello que se han realizado diversos estudios en aplicaciones industriales en esta área (Hurle et al., 1974; Lappa, 2005; Gill, 1974; Ceotto, 2013; Chokri and Brahim, 2016). Fenómenos similares se pueden encontrar en ingeniería energética y espacial, por ejemplo en sistemas de refrigeración de reactores nucleares, en colectores solares, almacenamiento de combustible, entre otros (Pivovarov, 2013).

La convección natural se genera cuando existe un gradiente de temperatura en un fluido que ocasiona que la fuerza de flotación, producida por la diferencia de densidades, genere movimiento, este se generará siempre y cuando la fuerza de flotación supere al mecanismo disipativo, es decir a las fuerzas viscosas.

1.1 Convección Rayleigh-Bénard

Uno de los fenómenos convectivos más estudiados es la convección de Rayleigh-Bénard (RBC), en el cual el fluido se encuentra confinado en dos placas paralelas horizontales y es calentado por la placa inferior. En este sistema el fluido permanece estático hasta cierto gradiente de temperatura, o cierto número de Rayleigh¹ (Ra), el cual ocasiona que inicie la convección debido a la fuerza de flotación. A este valor se le conoce como número de Ra crítico (Ra_c) y tiene un valor de 1708 para la convección de Rayleigh-Bénard (Chandrasekhar, 1970).

El estado en el que se encuentra un fluido que tiene un número de Ra menor al Ra_c se le conoce como estado base. En RBC el estado base consta de un fluido estático y se tiene un perfil lineal de la temperatura, por lo que la transferencia de calor se da por conducción pura.

Uno de los primero experimentos realizados fue en 1900 por Bénard, en el

¹La descripción de números adimensionales se encuentra en la sección 2.2

cual se observó que la convección inicia con patrones hexagonales (ver figura 1.3). Por otro lado, Lord Rayleigh sentó las bases teóricas en donde manifestó que la estabilidad de una capa de fluido calentada por abajo depende de un parámetro adimensional, es decir del número de Rayleigh. El sistema RBC y muchas de sus variantes han sido ampliamente estudiados y documentados (Chandrasekhar, 1970; Bodenschatz et al., 2000; Lappa, 2009).

En los sistemas RBC los patrones convectivos que se forman depende, entre otras cosas, de la presencia de simetría de inversión, es decir, que no hay variación espacial de las propiedades del fluido en el plano medio de la capa de fluido. Si existe simetría se obtienen rollos convectivos, los cuales se pueden observar en experimentos de pequeña escala. De lo contrario se pueden observar estructuras poligonales, las cuales son muy comunes en la atmósfera debido a grandes variaciones de la temperatura, y consecuentemente grandes variaciones en la densidad y viscosidad (Lappa, 2009).

Se puede encontrar similitudes entre patrones convectivos que se presentan en la convección de Rayleigh-Bénard y los patrones de nubes en sistemas de convección somera en la mesoescala (Lappa, 2009). Estas manifestaciones tipo RBC se deben a la interacción océano-atmósfera y son comúnmente conocidos como convección celular de mesoescala (MCC por sus siglas en inglés).

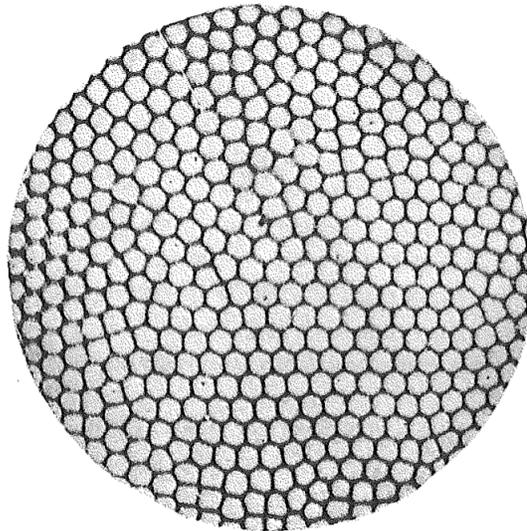


Figura 1.3: Celdas hexagonales de Bénard. Reproducción de una de las fotografías originales de Bénard (Chandrasekhar, 1970).

Tabla 1.1: Número de Rayleigh crítico y número de onda crítico k_c para diferentes números de Taylor (Chandrasekhar, 1970).

Ta	Superficies rígidas		Superficies libres	
	Ra_c	k_c	Ra_c	k_c
10	1713.0	3.10	677.1	2.270
100	1755.6	3.15	826.3	2.594
500	1940.5	3.30	1275	3.278
1000	2151.7	3.50	1676	3.710
2000	2530.5	3.75	2299	4.221
5000	3469.2	4.25	3670	5.011
10^4	4713.1	4.80	5377	5.698
10^5	16721	7.20	21310	8.626
10^6	71132	10.80	92220	12.86
10^8	1.5313×10^6	24.5	1.897×10^6	28.02
10^{10}	3.4636×10^7	55.5	4.047×10^{10}	60.52

1.2 Convección Rayleigh-Beñard con rotación

La convección natural en placas paralelas infinitas con rotación es una de las variantes de RBC, esta variante ha sido de gran interés para el estudio de fenómenos en sistemas someros, ya que es reproducible eficazmente en laboratorio y puede ser estudiado en modelos con condiciones de frontera periódicas en las laterales (Lappa, 2012). Se han realizado numerosos estudios con el eje de rotación vertical (Clever and Busse, 1979; Busse and Heikes, 1980; Hu et al., 1997; Bodenschatz et al., 2000), así como con el eje de rotación inclinado (Busse, 1982; Hathaway and Somerville, 1983), este último caso se utiliza para el estudio de fluidos geofísicos a diferentes latitudes.

Estudios para determinar el inicio de la convección mediante análisis de estabilidad lineal han sido llevado a cabo por Chandrasekhar (1961, 1953). En la tabla 1.1 se muestra la variación de los parámetros críticos con respecto a la rotación vía el número de Taylor¹ (Ta) para condiciones de no deslizamiento en las placas (superficies rígidas) y para condiciones sin esfuerzos cortantes (superficies libres). En estos trabajos se determina que al aumentar la rotación, la convección despierta a mayores números de Ra , es decir que la rotación tiene un efecto estabilizador sobre la convección. En la tabla se observa que el número de onda crítico también incrementa al aumentar el número de Taylor.

¹La descripción de números adimensionales se encuentra en la sección 2.2

Además de placas paralelas, se han llevado a cabo numerosos estudios de convección natural con rotación para diferentes geometrías, tanto experimentales como numéricos (Yadav et al., 2015; Lin and Yan, 2000; Bajaj et al., 1998; Chokri and Brahim, 2016; Cheng et al., 2015; Ker and Lin, 1996; King et al., 2012; Saleh and Hashim, 2014; Sedelnikov et al., 2012; Stevens et al., 2013). En estos trabajos se estudia el efecto que tiene la rotación en los patrones convectivos, en la transferencia de calor y en el inicio de la convección.

1.3 Convección natural en cavidades inclinadas

Por otro lado, cuando además del gradiente térmico se tiene una inclinación con respecto a la gravedad, se cuenta con una segunda fuerza que afecta al fluido, ya que el vector gravedad se descompone en dos componentes; uno ortogonal a la inclinación que ocasiona la flotación, y otra tangencial, la cual genera esfuerzos cortantes. Para ángulos de inclinación menores a 90° tanto la flotación como el flujo cortante actúan como desestabilizadores, por otro lado para ángulos mayores a 90° la flotación es estabilizador y el flujo cortante desestabilizador. Cada tipo de fuerza predominante define los patrones convectivos que se originan, la primer inestabilidad ocasionada por la flotación son los rollos longitudinales, mientras que para los esfuerzos cortantes la primer estabilidad en aparecer son los rollos transversales. Este tipo de sistema se le conoce como ILC (Inclined Layer Convection), que consiste en un fluido confinado entre dos placas paralelas inclinadas.

Los estudios referente a la convección de cavidades inclinadas han sido de gran interés ya que permiten estudiar diferentes fenómenos naturales e industriales. Se han llevado a cabo diferentes estudios experimentales sobre ILC (Hart, 1971; Sparrow and Husar, 1969; Lloyd and Sparrow, 1970; Busse and Clever, 1979; Kirchartz and Oertel Jr, 1988; Daniels et al., 2000; Subramanian et al., 2016; Henderson et al., 2007; Khezzar et al., 2012; Dou et al., 2013) en los que determinan el número de Rayleigh a partir del cual se despierta la convección (número de Rayleigh crítico) para los diferentes patrones convectivos y su comportamiento para diferentes ángulos de inclinación, número de Prandtl y relación de aspecto (separación entre placas/longitud de la placas). Algunos de estos grupos de investigación también han realizado diversos estudios numéricos así como análisis de estabilidad lineal.

Otra diferencia respecto a RBC, el sistema ILC presenta un perfil de velocidad cúbico para valores subcríticos del número de Ra . En este estado base el fluido cercano a la placa caliente sube y cerca de la superficie fría baja, debido al no deslizamiento en las placas el perfil es cúbico y simétrico. Al igual que en RBC, el estado base tiene un perfil de temperatura lineal.

Una característica importante en este tipo de sistemas es que el inicio de la convección depende del ángulo de inclinación así como del número de Prandtl¹ (Pr) (para inestabilidades generadas por esfuerzos cortantes). Dependiendo de estos parámetros existen dos principales patrones convectivos que inician la convección en ILC. Uno de ellos son los rollos longitudinales, los cuales están orientados a lo largo del esfuerzo cortante y son paralelos a la inclinación de la cavidad (figura 1.4a), estos se forman cuando predomina la flotación. En este caso el número de Ra crítico solo depende del ángulo de inclinación. La segunda estructura que puede aparecer al inicio de la convección son los rollos transversales, estos tienen una orientación perpendicular al esfuerzo cortante y al ángulo de inclinación (figura 1.4b) y estos son originados cuando predominan los esfuerzos cortantes causados por la inclinación. Para éstos, además del ángulo de inclinación, el inicio de la convección (Ra_c) también depende del número de Pr .

Existe un valor del ángulo de inclinación en donde ambas inestabilidades tienen el mismo valor de Ra_c llamado ángulo de codimensión (δ_{co}) (ver figura 1.5). Para un número de Pr de 1.07, $\delta_{co} \approx 78^\circ$, por lo tanto para ángulos menores a δ_{co} los rollos longitudinales son los más inestables, mientras que para ángulos mayores a δ_{co} los rollos transversales son los que aparecerán (Daniels et al., 2000; Subramanian et al., 2016). Del trabajo de Hart (1971) se puede observar que el ángulo de codimensión para un número de Pr de 6.7, $\delta_c \approx 87^\circ$. Para números de Pr pequeños los rollos transversales aparecerán a menores ángulos de inclinación ya que al disminuir el número de Pr , δ_{co} también disminuye. Fujimura and Kelly (1993) encontraron los ángulos de codimensión para diferentes números de Pr , mientras que Chen and Pearlstein (1989) reportan que para números de $Pr \leq 0.26$ la convección siempre inicia con la inestabilidad transversal a cualquier ángulo de inclinación.

Por otro lado, los rollos oblicuos son inestabilidades que exhiben una orientación diferente con respecto a los rollos longitudinales y transversales. Sin embargo, para ILC los rollos oblicuos nunca son los más inestables (Gershuni and Zhukhovitskii, 1969).

¹La descripción de números adimensionales se encuentra en la sección 2.2

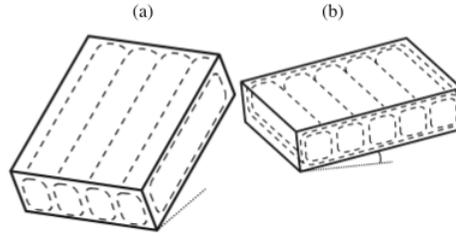


Figura 1.4: Descripción esquemática de rollos convectivos (Pivovarov, 2013). (a) Rollos longitudinales (b) Rollos transversales.

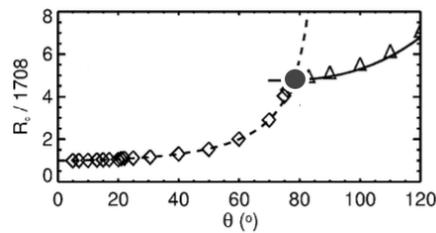


Figura 1.5: Número de Rayleigh crítico para rollos longitudinales (rombos), rollos transversales (triángulos) y el punto de codimensión (círculo gris) (Daniels et al., 2000).

Estudios de patrones convectivos en régimen supercrítico ($Ra > Ra_c$) y las transiciones desde rollos longitudinales o transversales han sido estudiados por diversos autores (Clever and Busse, 1977; Daniels et al., 2000; Subramanian et al., 2016).

1.4 Convección natural en sistemas con esfuerzos cortantes y rotación

En muchos fenómenos geofísicos y astrofísicos la convección es influenciada tanto por rotación como por un flujo que genere esfuerzos cortantes (Matthews and Cox, 1997). Hathaway and Somerville (1983) estudiaron el efecto que tiene el eje de rotación inclinado en placas paralelas. La inclinación del eje simula diferentes latitudes. En este sistema se generan capas de Ekman en el flujo base, las cuales producen esfuerzos cortantes en el interior de las placas. Ellos encontraron que la componente vertical del eje de rotación inhibe el movimiento convectivo, además se generan celdas mucho mas pequeñas, mientras que la componente horizontal del eje induce la formación de celdas a lo largo de la dirección del eje de rotación.

También se han realizado diversos estudios en donde además de la inclinación del eje de rotación también se tiene una velocidad impuesta en una o en ambas placas que confinan al fluido, en tales sistemas los efectos del flujo cortante impuesto y de la rotación tienden a querer alinear a los rollos convectivos a una determinada orientación individualmente, por lo que diversos estudios están enfocados a determinar la orientación y los valores críticos de los rollos convectivos. Matthews and Cox (1997) determinaron que cuando la rotación es paralela al flujo cortante se induce la aparición de rollos convectivos oblicuos y el número de Ra crítico es menor al de RBC. Ponty et al. (2003) también estudiaron el caso del eje de rotación inclinado junto con un flujo de Couette. Encontraron que cuando existe el componente horizontal del eje de rotación las características del inicio de la convección son sensibles a la orientación de la velocidad impuesta. Para números de Reynolds ($Re = \frac{\rho u_0 d}{\mu}$) positivos el número de Ra crítico es más pequeño que para números de Re negativos. Resultados similares fueron encontrados por Cox (1998).

Otro mecanismo en el que se forma un flujo base que genera esfuerzo cortante es el caso de calentamiento lateral, comúnmente utilizado para estudiar celdas de Hadley, las cuales son celdas convectivas atmosféricas en donde aire caliente sube cerca del ecuador y baja a latitudes mayores. Medelfef et al. (2017) investigaron este tipo de sistemas con un eje de rotación vertical y estudiaron los efectos del número de Prandtl y el número de Taylor para tres tipos de inestabilidades (oscilatorio, cortante e inestabilidad de Rayleigh), observaron que los tres tipos fueron estabilizados por la rotación debido al decremento que presenta la velocidad longitudinal del flujo base cuando está sometido a rotación. Además determinaron la orientación crítica de rollos oblicuos para diferentes números de Taylor.

Por lo tanto, se ha encontrado que tanto la rotación como el flujo cortante generado por la inclinación afectan el comportamiento de la convección y a sus propiedades, por ejemplo en ambos casos de forma individual se inhibe el inicio de la convección.

1.5 Objetivos

Objetivo general

Investigar el efecto que tiene la rotación sobre la convección de un fluido confinado en una cavidad inclinada y calentada por la parte de abajo.

Objetivos específicos

- Revisar el estado del arte.
- Formular el modelo del flujo base.
- Formular las ecuaciones lineales para la obtención del inicio de la convección.
- Realizar simulaciones mediante el uso de la Dinámica de Fluidos Computacional para la obtención de los campos de temperatura y visualización de los patrones convectivos.
- Validar los códigos numéricos utilizados con datos reportados en la literatura.
- Realizar un análisis de la transferencia de calor.

Capítulo 2

Modelo

2.1 Modelo físico

Se considera un fluido confinado en dos placas paralelas e inclinadas con respecto al vector gravedad. El fluido es calentado por la superficie inferior y enfriado por la superior. Esta configuración es comúnmente utilizada para estudiar el efecto de superficies inclinadas en parcelas de fluidos geofísicos. Esta inclinación produce que la gravedad se descomponga en dos componentes; una en dirección ortogonal a las superficies y la otra en la misma dirección de éstas, lo que genera dos fuerzas; la fuerza de flotación y esfuerzo cortante, respectivamente. Además de los efectos mencionados, el fluido también es sometido a rotación, cuyo eje es ortogonal a las superficies caliente y fría. La figura 2.1 muestra la representación esquemática de la geometría estudiada.

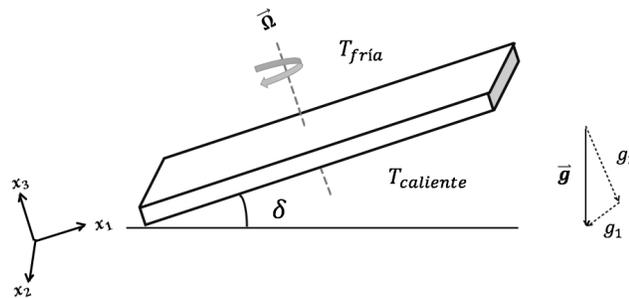


Figura 2.1: Esquema de la cavidad.

Las temperaturas de las paredes superior e inferior se mantienen constantes mientras que las paredes laterales se considera una condición de frontera periódica. En las placas, las condiciones de frontera para la velocidad son de no deslizamiento.

2.2 Ecuaciones de gobierno

Para estudiar matemáticamente al sistema descrito en la sección 2.1 se utilizarán las ecuaciones de cantidad de movimiento, ecuación de continuidad y la ecuación de la energía, considerando propiedades constantes.

Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad esta dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

Sin embargo, como se mencionó anteriormente, las propiedades son consideradas constantes, por lo que el término del cambio de la densidad con respecto al tiempo y al espacio son cero y la ecuación de conservación de masa es:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

La ecuación de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano y con propiedades constantes es:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \sum F_i \quad (2.3)$$

Donde $\sum F_i$ es la sumatoria de fuerzas a las que está sometido el fluido. Debido a la rotación, en el sistema de estudio se debe de considerar la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga. Por otro lado, la fuerza de flotación se encuentra en el término $\rho \mathbf{g}$, ya que al calentar la placa por la parte inferior el fluido adyacente es menos denso que la parte del fluido que se encuentra sobre de él. Debido a esto se hace uso de la aproximación de Boussinesq, la cual considera a la densidad como constante en todas las ecuaciones excepto en el término de flotación. La densidad en ese término se puede expresar como:

$$\rho \cong \rho_0 [1 - \beta(T - T_{ref})] \quad (2.4)$$

Donde β es el coeficiente de expansión térmica y T_{ref} es una temperatura de referencia. Por otro lado se pueden eliminar los términos estáticos de la ecuación de movimiento ya que $-\nabla p_{est} + \rho_0 \mathbf{g} = 0$, por lo que la fuerza de flotación puede escribirse como $\beta \mathbf{g}(T - T_\infty)$ y la gravedad está definida como

$\mathbf{g} = \hat{g} \sin \delta \mathbf{i}_1 + 0\mathbf{i}_2 + \hat{g} \cos \delta \mathbf{i}_3$, donde δ es el ángulo de inclinación de las placas. Tomando en cuenta las consideraciones mencionadas, la ecuación de cantidad de movimiento se puede escribir cómo:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta \mathbf{g}(T - T_\infty) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.5)$$

Donde ν es la viscosidad cinemática y T_∞ es una temperatura de referencia que es el promedio entre las temperaturas de ambas placas.

Por otro lado, el término de aceleración centrífuga se puede expresar como:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \right) \quad (2.6)$$

Por lo que se puede acoplar al gradiente de presión en la ecuación (2.5), definiendo una presión virtual de la forma:

$$P = \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \quad (2.7)$$

Finalmente, la ecuación de cantidad de movimiento se expresa cómo:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta \mathbf{g}(T - T_\infty) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \quad (2.8)$$

De la figura 2.1 se puede observar que la dirección del eje de rotación es únicamente en x_3 , por lo que $\boldsymbol{\Omega} = 0\mathbf{i}_1 + 0\mathbf{i}_2 + \Omega_3 \mathbf{i}_3$.

Ecuación de la energía

La ecuación de la energía sin considerar calentamiento por disipación viscosa y en ausencia de fuentes y sumideros de calor es:

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.9)$$

Donde α es la difusividad térmica.

Finalmente el sistema de ecuaciones que se utilizó en este estudio es el que describen las ecuaciones (2.10)-(2.12).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \nabla^2 u_1 + \beta \hat{g} \sin \delta (T - T_\infty) + 2\Omega_3 u_2 \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu \nabla^2 u_2 - 2\Omega_3 u_1 \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \nu \nabla^2 u_3 + \beta \hat{g} \cos \delta (T - T_\infty) \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2.12)$$

Con condiciones de no deslizamiento y temperaturas fijas en las placas:

$T = T_c$ en la placa inferior,

$T = T_f$ en la placa superior y

$\mathbf{u} = 0$ en ambas placas.

En los capítulos siguientes se adimensionalizarán las ecuaciones para los diferentes análisis presentes en este trabajo. Al adimensionalizar ecuaciones se obtienen números adimensionales que son los parámetros que describen al sistema. Los números adimensionales que se encontrarán en los siguientes capítulos son los descritos a continuación.

Número de Grashof

El número de Grashof representa la relación entre las fuerzas de flotación y las fuerzas viscosas.

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T D^3}{\nu^2}$$

Número de Prandtl

Este número representa la relación entre el transporte molecular de momento y el transporte molecular de calor. Este número caracteriza al fluido.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Número de Rayleigh

El número de Rayleigh representa la magnitud de la velocidad de flotación ($\frac{\beta g \Delta T D^3}{\nu}$) entre la velocidad de difusividad térmica.

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T D^3}{\alpha \nu} = Gr Pr$$

Número de Taylor

El número que relaciona los efectos de rotación entre los efectos viscosos es el número de Taylor.

$$Ta = \frac{4\Omega^2 D^4}{\nu^2}$$

Número de Nusselt

El número de Nusselt indica la relación entre el calor convectivo y el calor por conducción, por lo que es un indicador de la transferencia de calor por convección.

$$Nu = \frac{hD}{k_q}$$

Donde k_q es la conductividad térmica y h el coeficiente convectivo de transferencia de calor.

Capítulo 3

Estado base

3.1 Obtención de las ecuaciones que describen al estado base

En sistemas convectivos se pueden encontrar ciertos patrones de movimiento estacionarios que se encuentran por debajo del número de Rayleigh crítico, los cuales son estables a perturbaciones. Para números de Rayleigh mayores al crítico y si el estado base es perturbado el sistema se vuelve inestable y se inicia la convección.

Se sabe que para cavidades inclinadas el flujo base tiene un perfil cúbico y depende del ángulo de inclinación (Hart, 1971; Subramanian et al., 2016). La ecuación analítica de dicho perfil se obtiene de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento y de la energía, considerando que sólo se tiene velocidad en la dirección paralela a la inclinación (u_1) y esta cambia únicamente en la dirección vertical (x_3). Se puede recurrir a la figura 2.1 para ver el esquema de la cavidad. Además, se considera que el cambio de la temperatura con respecto a la vertical es lineal, ya que al no haber iniciado la convección se tiene únicamente conducción unidireccional.

Para la obtención del flujo base del problema estudiado se tomó en cuenta que la velocidad sería desviada por Coriolis, por lo que se tiene además velocidad en la dirección x_2 . Se consideró que u_2 solo cambiaría con x_3 y que se tendría conducción unidireccional, por lo que al igual que en ILC la temperatura cambia de forma lineal con x_3 . Dichas consideraciones son descritas por el sistema (3.1).

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 \neq 0, \quad \bar{u}_2 \neq 0, \quad \bar{u}_3 = 0 \\ \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} \neq 0, \quad \frac{d\bar{u}_2}{dx_3} \neq 0, \quad \frac{d\bar{T}}{dx_3} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

En el presente trabajo las variables con una barra denotan a las correspondientes al flujo base. Con las consideraciones (3.1) y partiendo de la ecuación (2.8) se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} + \beta \hat{g} \sin \delta (\bar{T} - T_\infty) + 2\Omega \bar{u}_2 = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_3^2} - 2\Omega \bar{u}_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se tiene además que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} P = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} P = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por lo que para eliminar los términos de presión se derivan las ecuaciones con respecto a x_3 , por lo tanto:

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^3 \bar{u}_1}{\partial x_3^3} + \beta \hat{g} \sin \delta \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + 2\Omega \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} = 0 \\ \nu \frac{\partial^3 \bar{u}_2}{\partial x_3^3} - 2\Omega \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para adimensionalizar las ecuaciones se utilizan los parámetros adimensionales utilizados en Hart (1971) y adaptados al sistema de estudio.

$$\begin{aligned} x_i^* = x_i \frac{2}{D} \quad u_i^* = u_i \frac{4\nu}{\beta \hat{g} \Delta T D^2} \\ g_i^* = \frac{g_i}{\hat{g}} \quad T^* = \frac{2T - T_c - T_f}{\Delta T} \end{aligned}$$

Además, considerando conducción unidireccional y adimensionalizando la ecuación de la energía (2.9) se llega a que $\bar{T}^* = -x_3^*$.

La adimensionalización lleva a tener un dominio de $[-1,1]$ tanto para x_3^* como para T^* , lo cual es necesario el análisis de estabilidad lineal descrito en la sección 4. Finalmente, el sistema de ecuaciones que describen al flujo base es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \bar{u}_1^*}{\partial x_3^{*3}} - \frac{\sin \delta}{2} + \frac{Ta^{1/2}}{4} \frac{\partial \bar{u}_2^*}{\partial x_3^*} &= 0 \\ \frac{\partial^3 \bar{u}_2^*}{\partial x_3^{*3}} - \frac{Ta^{1/2}}{4} \frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial x_3^*} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Con condiciones:

$$\begin{aligned} u_i^*(-1) &= 0 & T^*(-1) &= 1 \\ u_i^*(1) &= 0 & T^*(1) &= -1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Adicionalmente se impuso una condición de simetría, teniendo así que las derivadas de u_1^* son iguales en $x_3^* = -1$ y 1 , y de igual manera para u_2^* .

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_3^*}(-1) = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_3^*}(1) \quad (3.7)$$

3.2 Análisis del flujo base

La solución del perfil del flujo base que describe el sistema de ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) se resolvió numéricamente haciendo uso de las subrutinas de la librería NAG para diferentes ángulos de inclinación y números de Taylor. Cabe mencionar que la adimensionalización fue dada con el propósito de que el número de Rayleigh no aparezca en las ecuaciones del flujo base, sin embargo un aumento en el número de Rayleigh implica un aumento en la velocidad dimensional cuando se tiene una cavidad inclinada.

En la figura 3.1 se muestra el comportamiento del flujo base con respecto a x_3^* , se puede observar que tiene la forma de cuatro capas de Ekman debido a que ambas superficies son rígidas.

En la figura 3.2a se muestra el efecto que tiene el número de Taylor sobre el perfil de velocidad. Se puede observar que u_1^* disminuye al aumentar la rotación, mientras que u_2^* aumenta hasta cierto valor de Ta en el que empieza a

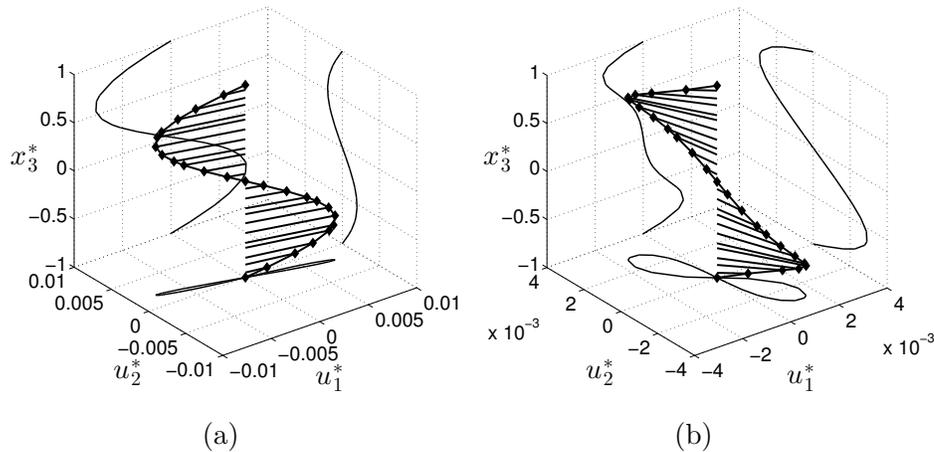


Figura 3.1: Flujo base para $\delta = 15$. (a) $Ta = 100$ (b) $Ta = 10,000$

disminuir, esto es debido a que en un estado sin rotación u_2^* es igual a cero y esta aumenta al aumentar la rotación debido a la fuerza de Coriolis, sin embargo el efecto amortiguador de la rotación predomina a cierto número de Ta . Otra característica importante que se puede apreciar de la figura 3.2a es que los valores máximos en la vertical de u_1^* y u_2^* se posicionan más cerca de las placas al aumentar la rotación.

Las características mencionadas en el párrafo anterior se pueden apreciar mejor en la figura 3.4 en donde se muestran los valores máximos de las componentes de la velocidad y su posición en x_3^* . u_2^* llega a su valor máximo para $Ta \approx 1700$ el cual es invariante respecto al ángulo de inclinación. Cabe mencionar que a pesar que existe un rango en el que u_2^* aumenta, la magnitud de la velocidad ($|u^*|$) siempre disminuye al aumentar el número de Taylor (figura 3.5). Además, es preciso señalar que la velocidad empieza a disminuir significativamente a $Ta \approx 200$.

De las figuras 3.2a y 3.2b se puede observar que que la magnitud de la velocidad máxima ($|u^*|$ de la figura 3.5), cambia de orientación en el plano $x_1^*-x_2^*$ al aumentar el número de Ta , formando un ángulo γ con respecto al eje x_1^* , para una representación esquemática de γ y su variación con respecto a la rotación (ver figura 3.3).

Las primeras y segundas derivadas de las componentes de la velocidad se muestran en la figura 3.6. Al aumentar la rotación las derivadas tienden a ser cero al centro de la cavidad, mientras que en las placas, las primeras derivadas

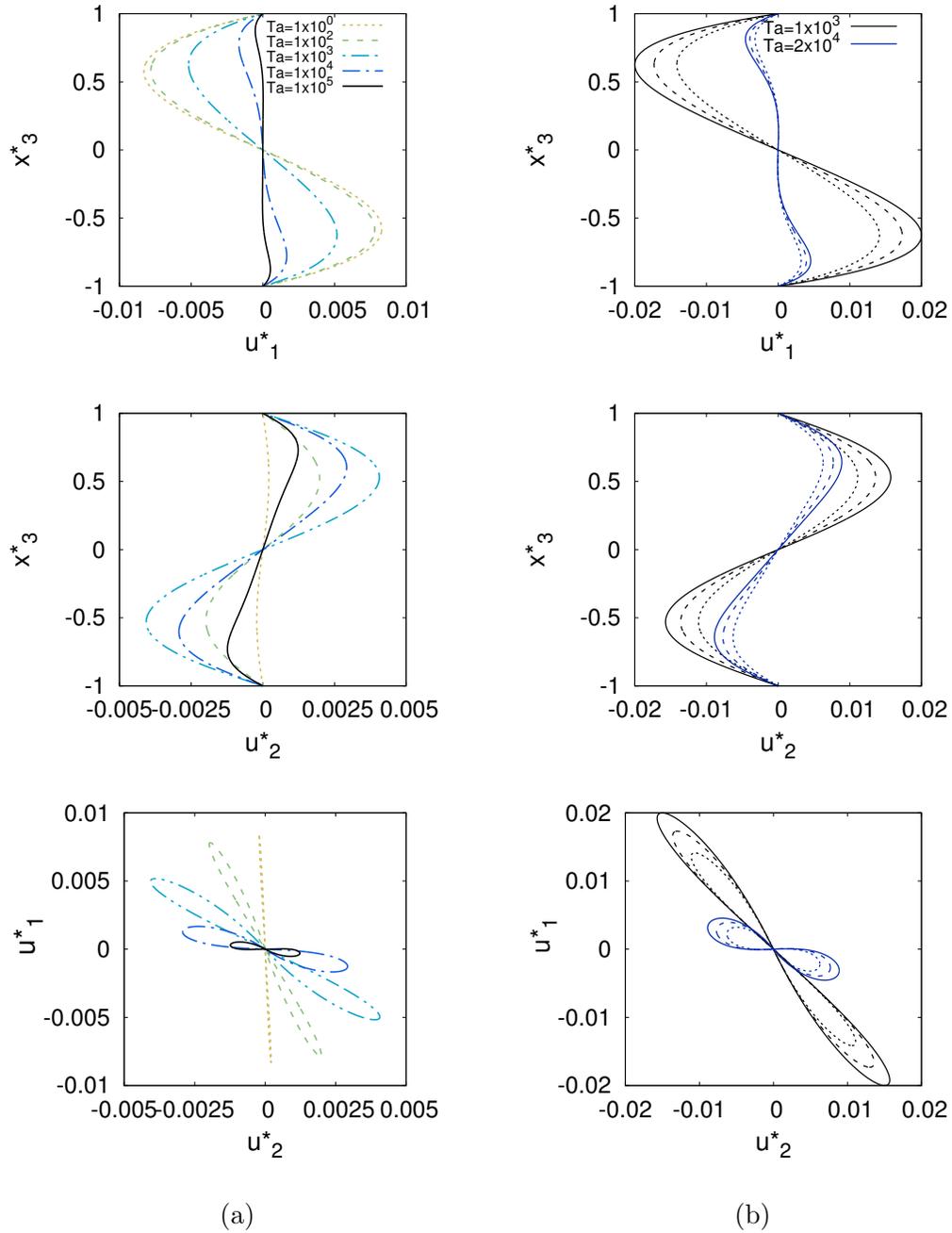


Figura 3.2: Flujo base (a) Efecto del número de Taylor en un ángulo de inclinación de $\delta = 15^\circ$. (b) Efecto de la inclinación, líneas continuas: $\delta = 90^\circ$, guiones: $\delta = 60^\circ$ y líneas punteadas: $\delta = 45^\circ$.

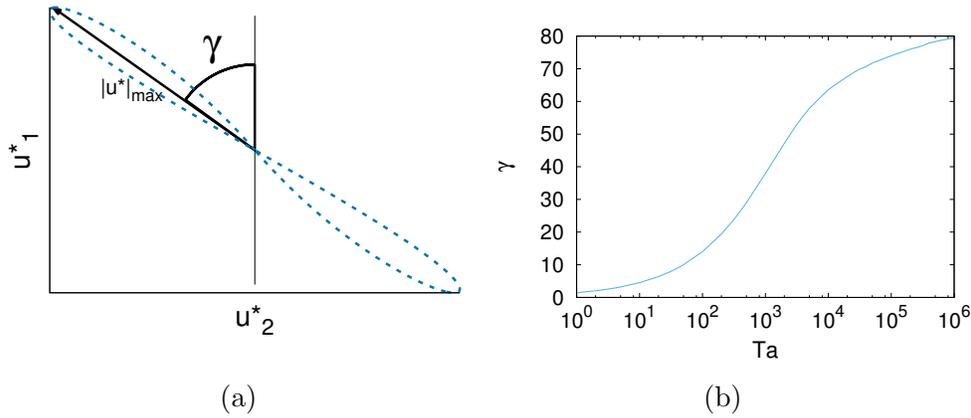


Figura 3.3: (a) Descripción esquemática del ángulo formado por $|u^*|_{max}$ y la coordenada x^*_1 , (b) variación de γ con respecto al número de Taylor.

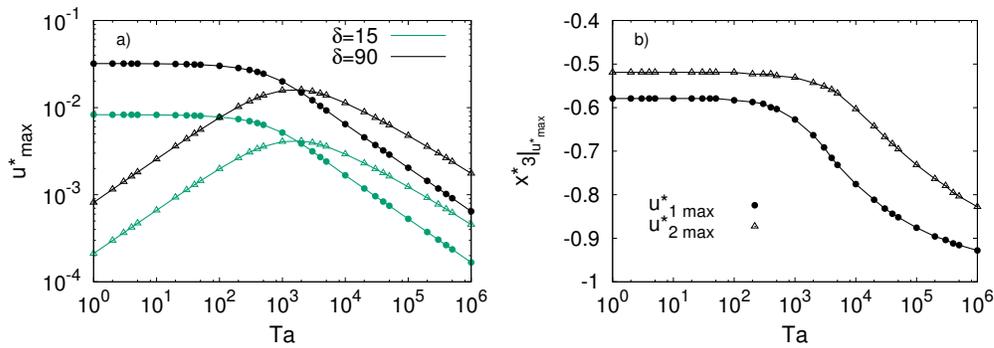


Figura 3.4: Valores máximos de las componentes de la velocidad (a) y su posición en el eje vertical (b), debido a la simetría los valores máximos se encuentran también en el valor positivo de x^*_3 . En ambas gráficas los círculos rellenos corresponden a u^*_1 y los triángulos vacíos a u^*_2 .

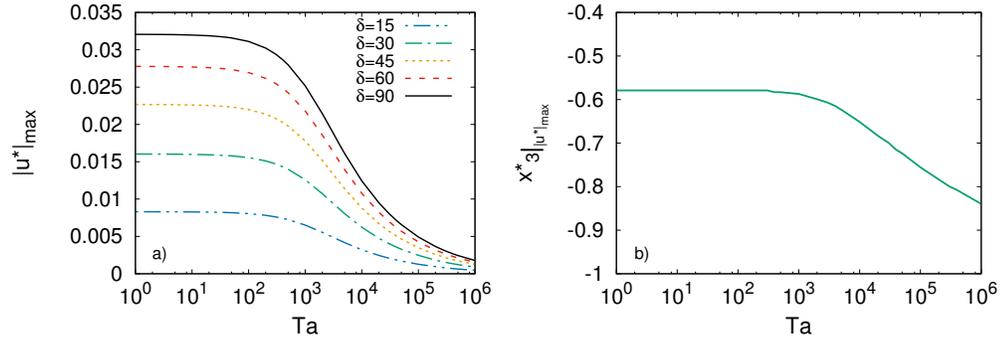


Figura 3.5: Valores máximos de la magnitud de la velocidad (a) y su posición en el eje vertical (b), debido a la simetría los valores máximos se encuentran también en el valor positivo de x^*_3 .

disminuyen y las segundas permanecen igual.

Por otro lado, se calculó el esfuerzo cortante ejercido sobre las placas (t^*_{wall}) mediante la ecuación (3.8).

$$t^*_{wall} = \left[\left(\frac{\partial u^*_1}{\partial x^*_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*_2}{\partial x^*_3} \right)^2 \right]^{1/2} \Bigg|_{x^*_3 = -1,1} \quad (3.8)$$

La figura 3.7 muestra el la variación de t^*_{wall} con respecto al número de Taylor. Se puede observar que esta disminuye al aumentar la rotación, sin embargo, al normalizar el valor de t^*_{wall} con la velocidad máxima del flujo base que corresponde al número de Taylor, se observa que aumenta al incrementar la rotación, esto debido a que la velocidad máxima se acerca a las placas al aumentar la rotación.

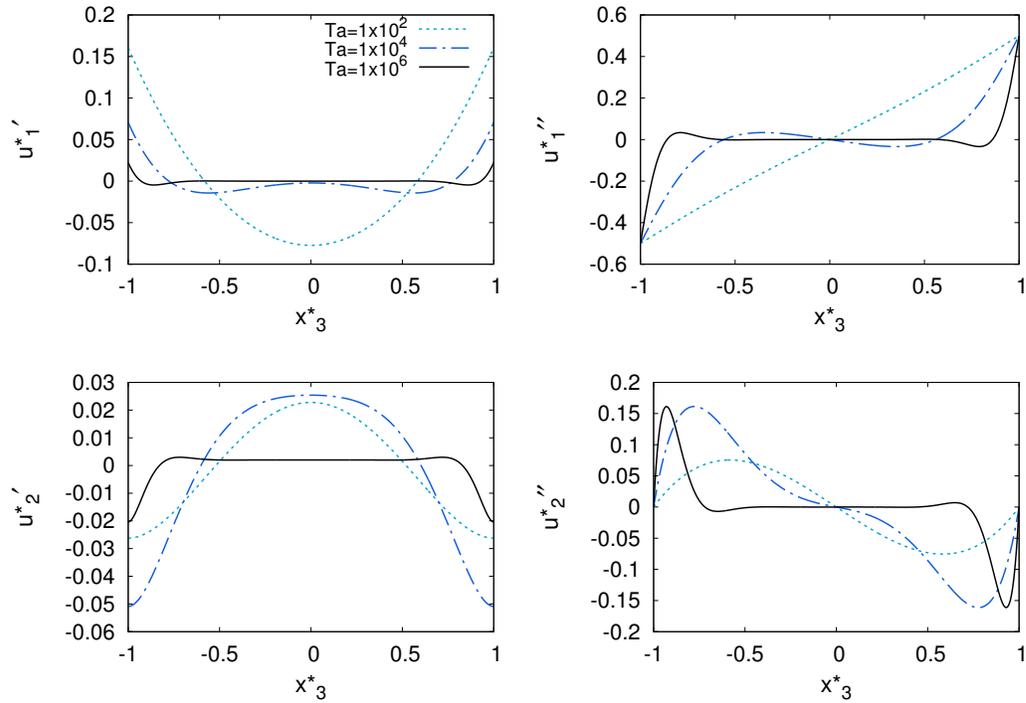


Figura 3.6: Primeras y segundas derivadas de las componentes de la velocidad.

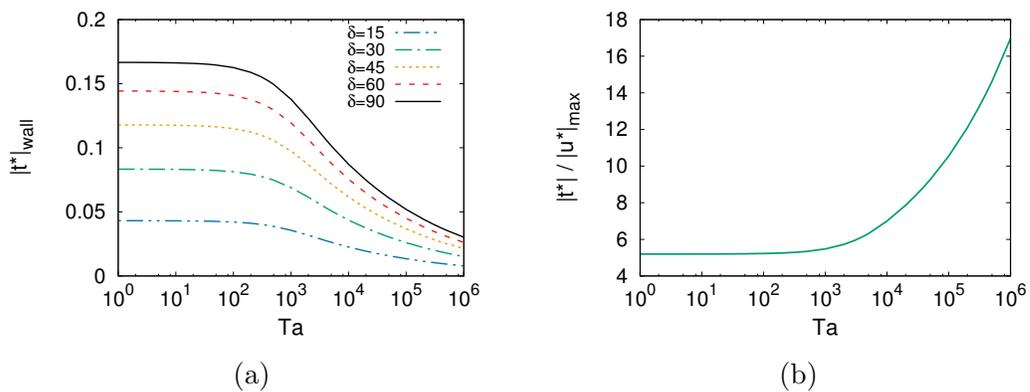


Figura 3.7: Variación de los esfuerzos en la pared respecto al número de Ta (a) y su valor normalizado por la velocidad máxima (b).

Capítulo 4

Estabilidad lineal

Los flujos laminares pueden ser afectados por pequeñas perturbaciones. Si la perturbación disminuye con el tiempo el flujo base es considerado como estable, en caso contrario en el que la perturbación se magnifique con el tiempo el flujo es considerado como inestable. La teoría de estabilidad en flujos laminares descompone a las propiedades en un estado base más una perturbación. Las fluctuaciones de se consideran muy pequeñas por lo que todos los términos cuadráticos de las perturbaciones son despreciados y se considera entonces solo los términos lineales (Schlichting and Gersten, 2016).

En la sección 4.1 se describe el desarrollo para la obtención de las ecuaciones de estabilidad lineal, las cuales servirán para conocer los parámetros críticos del inicio de la convección. Se utiliza el método de Tau-Chebyshev para obtener el número de Ra crítico, este método es descrito en la sección 4.2. Por otro lado, la validación del código numérico se presenta en la sección 4.3, mientras que en la sección 4.4 se presentan los resultados de estabilidad.

4.1 Desarrollo de las ecuaciones de estabilidad lineal

El análisis de estabilidad lineal se realiza para obtener los parámetros críticos a partir de los cuales se inicia la convección. Se utiliza el método usado por Chandrasekhar (1961) al sistema representado en la figura 4.1, en el que se consideran placas infinitas paralelas.

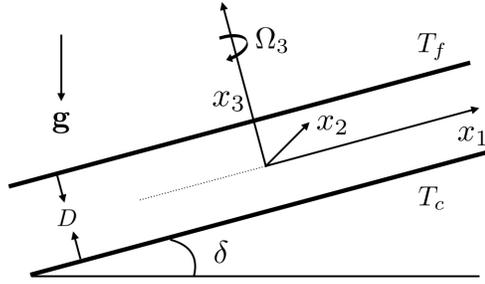


Figura 4.1: Esquema de placas infinitas para el análisis de estabilidad lineal.

Para obtener las ecuaciones de estabilidad lineal se parte de las ecuaciones (2.8), (2.2) y (2.9).

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta \mathbf{g}(T - T_\infty) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (4.3)$$

En las ecuaciones anteriores las variables se pueden representar como la suma de un estado base más una perturbación, en dónde el estado base es el analizado en la sección 3.

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad T = \bar{T} + T', \quad P = \bar{P} + P' \quad (4.4)$$

Recordando que para el flujo base se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 \neq 0, \quad \bar{u}_2 \neq 0, \quad \bar{u}_3 = 0 \quad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \neq 0, \quad \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \neq 0 \end{aligned}$$

Al sustituir (4.4) en la ecuación (4.1) y tomando en cuenta las consideraciones anteriores para flujo base, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_1}{\partial t} + (\bar{u}_1 + u'_1) \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + (\bar{u}_2 + u'_2) \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} + u'_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} + u'_3 \frac{\partial u'_1}{\partial x_3} = \\ - \frac{\partial P'}{\partial x_1} + \nu \nabla^2 u'_1 + \beta \hat{g} T' \sin \delta + 2\Omega_3 u'_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_2}{\partial t} + (\bar{u}_1 + u'_1) \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} + (\bar{u}_2 + u'_2) \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + u'_3 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} + u'_3 \frac{\partial u'_2}{\partial x_3} = \\ - \frac{\partial P'}{\partial x_2} + \nu \nabla^2 u'_2 - 2\Omega_3 u'_1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_3}{\partial t} + (\bar{u}_1 + u'_1) \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} + (\bar{u}_2 + u'_2) \frac{\partial u'_3}{\partial x_2} + u'_3 \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} = \\ - \frac{\partial P'}{\partial x_3} + \nu \nabla^2 u'_3 + \beta \hat{g} T' \cos \delta \end{aligned} \quad (4.7)$$

Se eliminan además todos los términos no lineales al considerar que la multiplicación de dos perturbaciones es despreciable. Realizando lo mismo para en la ecuación de la energía (Eq. (4.3)) y la ecuación de continuidad (Eq. (4.2)), las ecuaciones de perturbación son:

$$\frac{\partial u'_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} + u'_3 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} = - \frac{\partial P'}{\partial x_1} + \nu \nabla^2 u'_1 + \beta \hat{g}(T') \sin \delta + 2\Omega_3 u'_2 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + u'_3 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} = - \frac{\partial P'}{\partial x_2} + \nu \nabla^2 u'_2 - 2\Omega_3 u'_1 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u'_3}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial u'_3}{\partial x_2} = - \frac{\partial P'}{\partial x_3} + \nu \nabla^2 u'_3 + \beta \hat{g}(T') \cos \delta \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial T'}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial T'}{\partial x_2} + u'_3 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} = \alpha \nabla^2 T' \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} = 0 \quad (4.12)$$

O en su forma vectorial:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x_2} + u'_3 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_3} = -\nabla P' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}' + \beta \mathbf{g} T' - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' \quad (4.13)$$

$$\frac{DT'}{Dt} = \alpha \nabla^2 T' \quad (4.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (4.15)$$

Donde:

$$\mathbf{u}' = u'_1 \mathbf{i}_1 + u'_2 \mathbf{i}_2 + u'_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{g} = \hat{g} \sin \delta \mathbf{i}_1 + 0 \mathbf{i}_2 + \hat{g} \cos \delta \mathbf{i}_3$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_1 \mathbf{i}_1 + \bar{u}_2 \mathbf{i}_2 + 0 \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\Omega} = 0 \mathbf{i}_1 + 0 \mathbf{i}_2 + \Omega_3 \mathbf{i}_3$$

Se aplica el rotacional a la ecuación (4.13) obteniendo la ecuación de la vorticidad. El término de presión se elimina ya que $\nabla \times (\nabla P') = 0$.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\omega}}}{\partial t} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u'_j \right) \mathbf{i}_k + \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u'_j \right) \mathbf{i}_k \quad \dots \\ & + \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u'_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{u}_j \right) \mathbf{i}_k = \nu \nabla^2 \hat{\boldsymbol{\omega}} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta g_j T') \mathbf{i}_k + 2\Omega_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \mathbf{i}_k \quad (4.16) \end{aligned}$$

Donde la vorticidad está definida como $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \times \mathbf{u}'$. Aplicando nuevamente el rotacional se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u'_j \mathbf{i}_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u'_i \right) \mathbf{i}_j - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} u'_j \right) \mathbf{i}_j \quad \dots \quad (4.17)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u'_i \right) \mathbf{i}_j - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} u'_j \right) \mathbf{i}_j \quad \dots \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u'_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{u}_i \right) \mathbf{i}_j - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(u'_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{u}_j \right) \mathbf{i}_j = \\ & -\nu \frac{\partial^4}{\partial x_i^4} u'_j \mathbf{i}_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\beta g_i T') \mathbf{i}_j - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\beta g_j T') \mathbf{i}_j + 2\Omega_i \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\omega}_j \mathbf{i}_j \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior y la ecuación de vorticidad por $\lambda = 0\mathbf{i}_1 + 0\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 u'_3 - \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 u'_3 + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} - \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\nabla^2 u'_3 + \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_3^2} \frac{\partial u'_3}{\partial x_2} = (4.19)$$

$$-\nu \nabla^4 u'_3 + \beta g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} T' - \beta g_3 \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial x_2^2} \right) + 2\Omega_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{\omega}_3$$

$$\frac{\partial \hat{\omega}_3}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \hat{\omega}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \frac{\partial u'_3}{\partial x_2} + \bar{u}_2 \frac{\partial \hat{\omega}_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} = (4.20)$$

$$\nu \nabla^2 \hat{\omega}_3 - \frac{\partial T'}{\partial x_2} \beta g_1 + 2\Omega_3 \frac{\partial u'_3}{\partial x_3}$$

Las ecuaciones anteriores junto con la ecuación (4.11) forman un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Por otro lado, las perturbaciones se pueden representar en términos de una onda periódica bidimensional (Chandrasekhar, 1961), por lo que se las perturbaciones se sustituyen por los siguientes modos armónicos:

$$u'_3 = U_3(x_3) e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1 - \omega t)} \quad (4.21)$$

$$T' = \Theta(x_3) e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1 - \omega t)}$$

$$\hat{\omega}_3 = W(x_3) e^{i(k_1 x_2 + k_2 x_1 - \omega t)}$$

Donde la longitud de la onda está dada por $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, donde $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. Las perturbaciones en las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.11) son sustituidas con (4.21) obteniendo un sistema de ecuaciones para U_3 , Θ y W .

$$i\omega \left(\frac{d^2 U_3}{dx_3^2} - k^2 U_3 \right) - ik_2 \bar{u}_1 \left(\frac{d^2 U_3}{dx_3^2} - k^2 U_3 \right) + ik_2 \frac{d^2 \bar{u}_1}{dx_3^2} U_3 - (4.22)$$

$$ik_1 \bar{u}_2 \left(\frac{d^2 U_3}{dx_3^2} - k^2 U_3 \right) + ik_1 \frac{d^2 \bar{u}_2}{dx_3^2} U_3 =$$

$$-\nu \left(\frac{d^2}{dx_3^2} - k^2 \right)^2 U_3 + i\beta g_1 k_2 \frac{d\Theta}{dx_3} + \beta g_3 k^2 \Theta - 2\Omega_3 \frac{dW}{dx_3}$$

$$-i\omega\Theta + ik_2\bar{u}_1\Theta + ik_1\bar{u}_2\Theta + \frac{d\bar{T}}{dx_3}U_3 = \alpha \left(\frac{d^2\Theta}{dx_3^2} - k^2\Theta \right) \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} -i\omega W + ik_2\bar{u}_1W - ik_1\frac{d\bar{u}_1}{dx_3}U_3 + ik_1\bar{u}_2W + ik_2\frac{d\bar{u}_2}{dx_3}U_3 = & \quad (4.24) \\ \nu \left(\frac{d^2W}{dx_3^2} - k^2W \right) - ik_1\beta g_1\Theta - 2\Omega_3\frac{dU_3}{dx_3} \end{aligned}$$

Para adimensionalizar las ecuaciones anteriores se utilizan los parámetros adimensionales utilizados en Hart (1971) y adaptados al sistema de estudio.

$$x_i^* = \frac{2}{D}x_i, \quad k^* = \frac{D}{2}k, \quad \Theta^* = \frac{\Theta}{\Delta T}, \quad g_i^* = \frac{g_i}{\hat{g}}$$

$$U_i^* = \frac{4\nu}{\hat{g}\beta\Delta TD^2}U_i, \quad t^* = \frac{\hat{g}\beta\Delta TD}{2\nu}t, \quad \omega^* = \frac{2\nu}{\hat{g}\beta\Delta TD}\omega$$

$$\bar{T}^* = \frac{2\bar{T} - T_c - T_f}{\Delta T}, \quad \text{Donde } \Delta T = T_c - T_f$$

Dónde x_3^* y T^* van de -1 a 1. Sustituyendo las variables adimensionales se tiene:

Ecuación para U_3^* :

$$\begin{aligned} i\omega^*Gr \left(\frac{d^2U_3^*}{dx_3^{*2}} - k^{*2}U_3^* \right) - ik_2^*\bar{u}_1^*Gr \left(\frac{d^2U_3^*}{dx_3^{*2}} - k^{*2}U_3^* \right) + ik_2^*Gr \frac{d^2\bar{u}_1^*}{dx_3^{*2}}U_3^* \dots \\ - ik_1^*\bar{u}_2^*Gr \left(\frac{d^2U_3^*}{dx_3^{*2}} - k^{*2}U_3^* \right) + ik_1^*Gr \frac{d^2\bar{u}_2^*}{dx_3^{*2}}U_3^* + 8 \left(\frac{d^2}{dx_3^{*2}} - k^{*2} \right)^2 U_3^* \dots \\ - 8ik_2^*g_1^*\frac{d\Theta^*}{dx_3^*} - 8k^{*2}g_3^*\Theta^* - 2Ta^{1/2}\frac{dW^*}{dx_3^*} = 0 \quad (4.25) \end{aligned}$$

Ecuación para Θ^* :

$$-i\omega^* Ra\Theta^* + ik_2^* \bar{u}_1^* Ra\Theta^* + ik_1^* \bar{u}_2^* Ra\Theta^* + \frac{Ra}{2} \frac{d\bar{T}^*}{dx_3^*} U_3^* - \dots$$

$$8 \left(\frac{d^2 \Theta^*}{dx_3^{*2}} - k_2^* \Theta^* \right) = 0 \quad (4.26)$$

Ecuación para W^* :

$$-i\omega^* GrW^* + ik_2^* \bar{u}_1^* GrW^* - ik_1^* \frac{d\bar{u}_1^*}{dx_3^*} GrU_3^* + ik_1^* \bar{u}_2^* GrW^* + \dots$$

$$ik_2^* \frac{d\bar{u}_2^*}{dx_3^*} GrU_3^* - 8 \left(\frac{d^2 W^*}{dx_3^{*2}} - k^{*2} W^* \right) + 8ik_1^* g_1 \Theta^* - 2Ta^{1/2} \frac{dU_3^*}{dx_3^*} = 0 \quad (4.27)$$

Donde :

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\alpha \nu}, \quad Ta = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2}, \quad Gr = \frac{Ra}{Pr}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Finalmente se acomodan las ecuaciones para que todos los términos con el número de Ra se encuentren del lado derecho de la igualdad, ya que este será tomado como el eigenvalor en el método de Tau-Chebyshev. Además $\omega^* = 0$ para obtener inestabilidades estacionarias y del capítulo 3 se sabe que $\frac{d\bar{T}^*}{dx_3^*} = -1$. Con esto se tiene:

Ecuación para U_3^* :

$$\frac{d^4 U_3^*}{dx_3^{*4}} - 2k^{*2} \frac{d^2 U_3^*}{dx_3^{*2}} + k^{*4} U_3^* - ik_2^* g_1 \frac{d\Theta^*}{dx_3^*} - k^{*2} g_3 \Theta^* - \frac{Ta^{1/2}}{4} \frac{dW^*}{dx_3^*} =$$

$$\frac{i Ra}{8 Pr} \left(\bar{u}_1^* k_2^* \frac{d^2 U_3^*}{dx_3^{*2}} - \bar{u}_1^* k^{*2} k_2^* U_3^* - k_2^* \frac{d^2 \bar{u}_1^*}{dx_3^{*2}} U_3^* + \right.$$

$$\left. \bar{u}_2^* k_1^* \frac{d^2 U_3^*}{dx_3^{*2}} - \bar{u}_2^* k^{*2} k_1^* U_3^* - k_1^* \frac{d^2 \bar{u}_2^*}{dx_3^{*2}} U_3^* \right) \quad (4.28)$$

Ecuación para Θ^* :

$$\frac{d^2 \Theta^*}{dx_3^{*2}} - k_2^* \Theta^* = i \frac{Ra}{8} \left(k_2^* \bar{u}_1^* \Theta^* + k_1^* \bar{u}_2^* \Theta^* - \frac{U_3^*}{2} \right) \quad (4.29)$$

Ecuación para W^* :

$$\frac{d^2 W^*}{dx_3^{*2}} - k^{*2} W^* - ik_1^* g_1 \Theta^* + \frac{Ta^{1/2}}{4} \frac{dU_3^*}{dx_3^*} = \frac{i Ra}{8 Pr} \left(k_2^* \bar{u}_1^* W^* - k_1^* \frac{d\bar{u}_1^*}{dx_3^*} U_3^* + k_1^* \bar{u}_2^* W^* + k_2^* \frac{d\bar{u}_2^*}{dx_3^*} U_3^* \right) \quad (4.30)$$

Las ecuaciones (4.28), (4.29), y (4.30) son las ecuaciones adimensionales de estabilidad lineal para el sistema de estudio. Se recuerda que $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ y que $g_1^* = \sin \delta$, $g_2^* = \cos \delta$.

Flujo base

Las ecuaciones de estabilidad contienen términos con \bar{u}_1^* , \bar{u}_2^* y sus derivadas. Al no tener una solución analítica del flujo base y teniendo únicamente soluciones numéricas (capítulo 3), se generaron polinomios tipo (4.31) que describen a las variables, teniendo un polinomio para cada ángulo de inclinación y para cada número de Taylor. El orden de polinomio aumentaba al incrementar el número de Taylor.

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^* &= a_0 + a_1 x_3^* + a_2 x_3^{*2} + a_3 x_3^{*3} + \dots a_n x_3^{*n} \\ \frac{d\bar{u}_i^*}{dx_3^*} &= b_0 + b_1 x_3^* + b_2 x_3^{*2} + b_3 x_3^{*3} + \dots b_n x_3^{*n} \\ \frac{d^2 \bar{u}_i^*}{dx_3^{*2}} &= c_0 + c_1 x_3^* + c_2 x_3^{*2} + c_3 x_3^{*3} + \dots c_n x_3^{*n} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Rollos oblicuos

En la sección 1 se mencionó que los principales patrones convectivos que aparecen en el problema de cavidad inclinada sin rotación son los rollos longitudinales (para $\delta < \delta_{co}$) y los rollos transversales (para $\delta > \delta_{co}$). Los primeros son ocasionados por la fuerza de flotación y se generan a lo largo del eje x_1 , son la primera inestabilidad que aparece para ángulos menores a 78 grados de inclinación. Los rollos transversales son generados por esfuerzos cortantes y aparecen a lo largo del eje x_2 . En trabajos realizados por Gershuni and Zhukhovitskii (1969) y Subramanian et al. (2016) se han estudiado la estabilidad

de rollos oblicuos en cavidades inclinadas (rollos con una orientación inclinada con respecto al eje x_1 , ver figura 4.2), los cuales determinan que únicamente las orientaciones con $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 90^\circ$ son relevantes para el sistema estudiado. En este trabajo se llevó a cabo el estudio de los rollos oblicuos, ya que se consideró que el efecto que tiene la rotación sobre los rollos puede admitir a rollos oblicuos como los más inestables. Por lo que las componentes del número de onda k^* son $k_1^* = k^* \cos \phi$ y $k_2^* = k^* \sin \phi$ en las ecuaciones (4.28), (4.29), y (4.30).

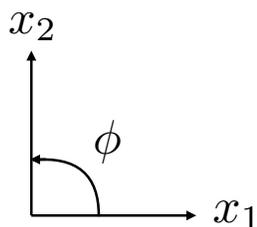


Figura 4.2: Orientación de rollos oblicuos. Para $\phi = 0^\circ$ Rollos longitudinales, $\phi = 90^\circ$ Rollos oblicuos.

4.2 Método de Tau Chebyshev

El método espectral de Tau es un método de residuos ponderados cuando se utilizan polinomios de Chebyshev como funciones de prueba y $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ como función de peso. Los polinomios de Chebyshev satisfacen la relación de ortogonalidad (4.32) en el intervalo $[-1,1]$ (Orszag, 1971; Dongarra et al., 1996).

$$\int_{-1}^1 T_p(x)T_q(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \pi, & p = q = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & p = q \neq 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Este método es utilizado en la solución de problemas de eigenvalores que surgen en análisis de estabilidad en problemas hidrodinámicos. Es un método preciso y eficiente (Orszag, 1971; Dongarra et al., 1996; Boyd, 2001; Bourne, 2003). Otra ventaja del método es que puede calcular todos los eigenvalores requeridos, no solo el dominante (Bourne, 2003). Sin embargo, la principal desventaja del método es la aparición de valores espurios, los cuales son aproximaciones deficientes de los valores propios.

Los polinomios de Chebyshev son un caso particular de los polinomios de Jacobi $P_p^{(\alpha,\beta)}(x)$ de grado p los cuales son una familia de polinomios ortogonales

que comprenden todas las soluciones de polinomios de un problema singular de Sturm-Liouville en $[-1,1]$ (Canuto et al., 2006).

$$P_p^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^p}{2^p p!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^p}{dx^p} ((1-x)^{\alpha+p} (1+x)^{\beta+p}) \quad (4.33)$$

Cuando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ se tienen los polinomios de Chebyshev, y se definen como:

$$T_p(x) = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p)!} P_p^{-1/2, -1/2}(x) \quad (4.34)$$

o como series de potencia:

$$T_p(x) = \frac{p}{2} \sum_{l=0}^{p/2} (-1)^l \frac{(p-l-1)!}{l!(p-2l)!} (2x)^{p-2l} \quad (4.35)$$

Los primeros seis polinomios de Chebyshev son:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 3x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned} \quad (4.36)$$

La expansión de Chebyshev de una función u es:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N+2} a_n T_n(x) \quad (4.37)$$

Donde a_n son los coeficientes de Chebyshev. Las derivadas de una función u se puede escribir como:

$$\frac{d^q u(x)}{dx^q} = \sum_{n=0}^N a_n^{(q)} T_n(x) \quad (4.38)$$

Dónde q indica la derivada. Los coeficientes a_n^q se obtienen con las siguientes relaciones:

$$a_{n-1}^q = \frac{1}{c_{n-1}} \left(2na_n^{(q-1)} + a_{n+1}^{(q)} \right), \quad n = N, N-1, N-2, \dots, 1 \quad (4.39)$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & \text{para } n = 0 \\ 1 & \text{para } n > 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

y

$$a_N^q = a_{N+1}^q = 0 \quad (4.41)$$

De lo anterior se puede observar que las derivadas de una función pueden ser expresadas en términos de los coeficientes de la función sin derivar, ya que a_n^0 son los coeficientes a_n de la ecuación (4.37). Por ejemplo para obtener $\frac{du(x)}{dx}$ con $N = 8$ se tiene:

$$\frac{du(x)}{dx} = \sum_{n=0}^8 a_n^{(1)} T_n(x) \quad (4.42)$$

De (4.41) se sabe que $a_8^{(1)} = a_9^{(1)} = 0$. Además para $a_7^{(1)}$ se tiene que:

$$a_7^{(1)} = \frac{1}{c_7} \left(2(8)a_8^{(0)} + a_9^{(1)} \right) = 16a_8^{(0)} \quad (4.43)$$

$$a_6^{(1)} = \frac{1}{c_6} \left(2(7)a_7^{(0)} + a_8^{(1)} \right) = 14a_7^{(0)} \quad (4.44)$$

$$a_5^{(1)} = \frac{1}{c_5} \left(2(6)a_6^{(0)} + a_7^{(1)} \right) = 12a_6^{(0)} + a_7^{(1)} = 12a_6^{(0)} + 16a_8^{(0)} \quad (4.45)$$

Y de forma similar para todos los coeficientes, de tal manera que:

$$\frac{du(x)}{dx} = \sum_{n=0}^N \left[\frac{2}{c_n} \sum_{p=n+1}^N \underset{p+n \text{ impar}}{p} a_p \right] T_n(x) = \sum_{n=0}^N a_n^{(1)} T_n(x) \quad (4.46)$$

Donde $a_n^{(1)}$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$a_n^{(1)} = D_{np}^{(1)} a_p = \frac{2}{c_n} \sum_{p=n+1, p+n \text{ odd}}^N p a_p \quad (4.47)$$

Es decir:

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ \dots \\ a_N^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{0,0}^{(1)} & D_{0,1}^{(1)} & \dots & D_{0,N}^{(1)} \\ D_{1,0}^{(1)} & D_{1,1}^{(1)} & \dots & D_{1,N}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{N,0}^{(1)} & D_{N,1}^{(1)} & \dots & D_{N,N}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Donde $D_{np}^{(1)}$ es la matriz de derivación. Para una derivada de orden q se tiene:

$$\frac{d^q u(x)}{dx^q} = \sum_{n=0}^N a_n^{(q)} T_n(x) = \sum_{n=0}^N D_{np}^q a_p T_n(x) \quad (4.49)$$

De modo que un problema de eigenvalores del tipo:

$$u''(x) = -\lambda u(x) \quad x \in [-1, 1] \quad (4.50)$$

Puede ser escrito como $D^2 a_n = -\lambda D a_n$, es decir, un problema del tipo:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = -\lambda \mathbf{B} \mathbf{x} \quad (4.51)$$

Con lo anterior, las variables U_3 , Θ , W y sus derivadas son expandidas utilizando polinomios ortogonales de Chebyshev en las ecuaciones (4.28), (4.29), y (4.30).

Expansión de Chebyshev en las ecuaciones de estabilidad

Se utilizaron las fórmulas explícitas de Gottlieb and Orszag (1977) para los coeficientes de expansión, de manera que las variables de las ecuaciones (4.28), (4.29), y (4.30) fueron sustituidas por:

$$U_3^* = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x_3^*) \quad (4.52)$$

$$\Theta^* = \sum_{n=0}^N b_n T_n(x_3^*) \quad (4.53)$$

$$W^* = \sum_{n=0}^N d_n T_n(x_3^*) \quad (4.54)$$

$$\frac{dU_3^*}{dx_3^*} = \sum_{n=0}^N \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \text{ impar}}}^N p a_p T_n(x_3^*) \quad (4.55)$$

$$\frac{d\Theta^*}{dx_3^*} = \sum_{n=0}^N \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \text{ impar}}}^N p b_p T_n(x_3^*) \quad (4.56)$$

$$\frac{dW^*}{dx_3^*} = \sum_{n=0}^N \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \text{ impar}}}^N p d_p T_n(x_3^*) \quad (4.57)$$

$$\frac{dU_3^{*2}}{dx_3^{*2}} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n \text{ par}}}^N p(p^2 - n^2) a_p T_n(x_3^*) \quad (4.58)$$

$$\frac{d\Theta^{*2}}{dx_3^{*2}} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n \text{ par}}}^N p(p^2 - n^2) b_p T_n(x_3^*) \quad (4.59)$$

$$\frac{dW^{*2}}{dx_3^{*2}} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n \text{ par}}}^N p(p^2 - n^2) d_p T_n(x_3^*) \quad (4.60)$$

$$\frac{dU_3^{*4}}{dx_3^{*4}} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{c_n} \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p+n \text{ par}}}^N p[p^2(p^2 - 4)^2 - 3n^2 p^4 + 3n^4 p^2 - n^2(n^2 - 4)^2] a_p T_n(x_3^*) \quad (4.61)$$

En las expansiones, se debe de utilizar una N suficientemente grande hasta que la solución no cambie con N . Los valores espurios se pueden identificar cambiando el valor de N (Boyd, 2001). Para este trabajo se utilizaron valores de N de 26 a 32.

Por otro lado no se cuentan con fórmulas explícitas para términos que contienen producto entre U_3^* , W^* , Θ^* con x_3^{*n} , es decir, en los términos que contienen a \bar{u}_1^* , \bar{u}_2^* y a sus derivadas (variables que fueron sustituidas con las expresiones (4.31)), por lo que se utilizó un procedimiento en dónde $T_n(x_3^*)$ se desarrollan utilizando las relaciones recursivas de (4.39), además de:

$$T_0(x_3^*) = 1, \quad T_1(x_3^*) = x_3^* \quad (4.62)$$

$$T_{n+1}(x_3^*) = 2x_3^*T_n(x_3^*) - T_{n-1}(x_3^*), \quad \text{para } n \geq 1 \quad (4.63)$$

Utilizando las fórmulas explícitas y el procedimiento mencionado en el párrafo anterior se construyeron las matrices \mathbf{A}_r , \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_r y \mathbf{B}_i para obtener un problema de eigenvalores del tipo (4.51). Las matrices con subíndices r se construyeron con los términos reales de las ecuaciones de estabilidad, mientras que las que tienen los subíndices i se construyeron con los términos imaginarios, obteniendo así el problema de eigenvalores:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -Ra\mathbf{B}\mathbf{x} \quad (4.64)$$

Donde el eigenvalor es el número de Rayleigh. Las matrices tienen dimensiones de $3N \times 3N$ debido a que son tres ecuaciones y tres variables.

El sistema (4.64) se resolvió para diferentes valores de Ta , k^* , δ y ϕ utilizando la subrutina F02GJF de la biblioteca NAG. La subrutina es el análogo al algoritmo QZ para matrices complejas.

4.3 Validación del código

Para la validación del código se reprodujeron trabajos de estabilidad para placas paralelas con inclinación sin rotación, además del caso con rotación sin inclinación. Para el primer caso se reprodujeron los resultados obtenidos por Chen and Pearlstein (1989) (figuras 4.3, 4.4) que muestran las curvas de estabilidad de un fluido con viscosidad constante con un número de Prandtl de 6.7 confinado entre placas infinitas inclinadas. Las curvas de estabilidad muestran los resultados del número de Rayleigh que corresponde a un número de onda fijo. Una de las figuras presentadas por Chen y Pearlstein muestra dos curvas de estabilidad desconectadas, la cual pudo ser reproducida en este trabajo.

Por otro lado se obtuvieron los resultados del inicio de la convección para el problema de Bénard con rotación obtenidos por Chandrasekhar (1961). La figura 4.5 muestra las curvas de estabilidad de para números de Taylor de 1×10^3 , 1×10^4 , 1×10^5 y 1×10^6 . El número de Rayleigh crítico corresponde al valor mínimo que presenta la curva de estabilidad. El número de onda crítico es el valor que corresponde al número de Rayleigh crítico. La tabla 4.1 muestra algunos de los valores de las curvas de estabilidad. Los datos de las tablas se puede comparar los valores reportados por Chandrasekhar (1961).

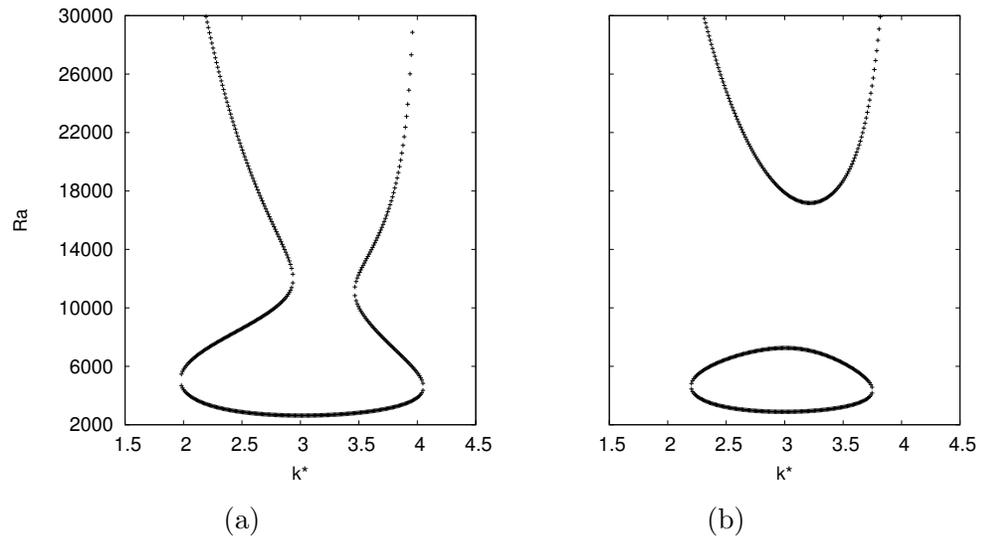


Figura 4.3: Reproducción de curvas de estabilidad de Chen and Pearlstein (1989). (a) $\delta = 22^\circ$, (b) 23° .

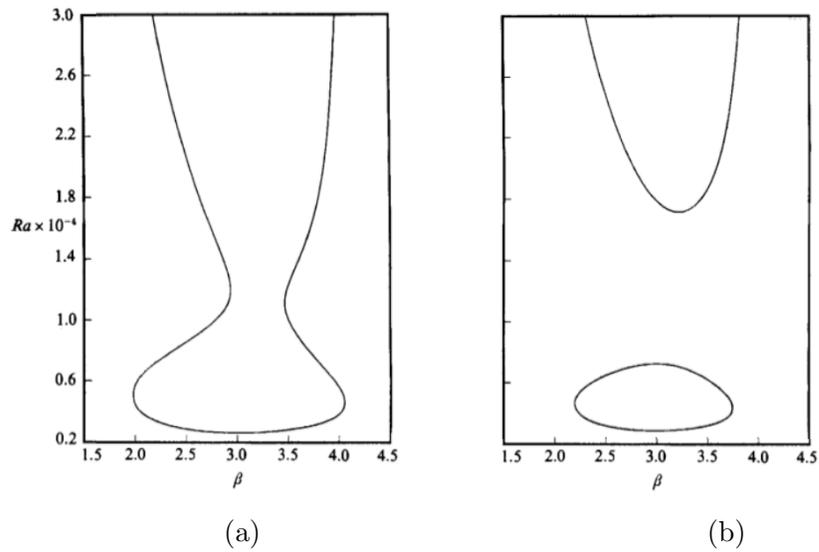


Figura 4.4: Curvas de estabilidad (a) $\delta = 22^\circ$, (b) 23° . Figura original de Chen and Pearlstein (1989).

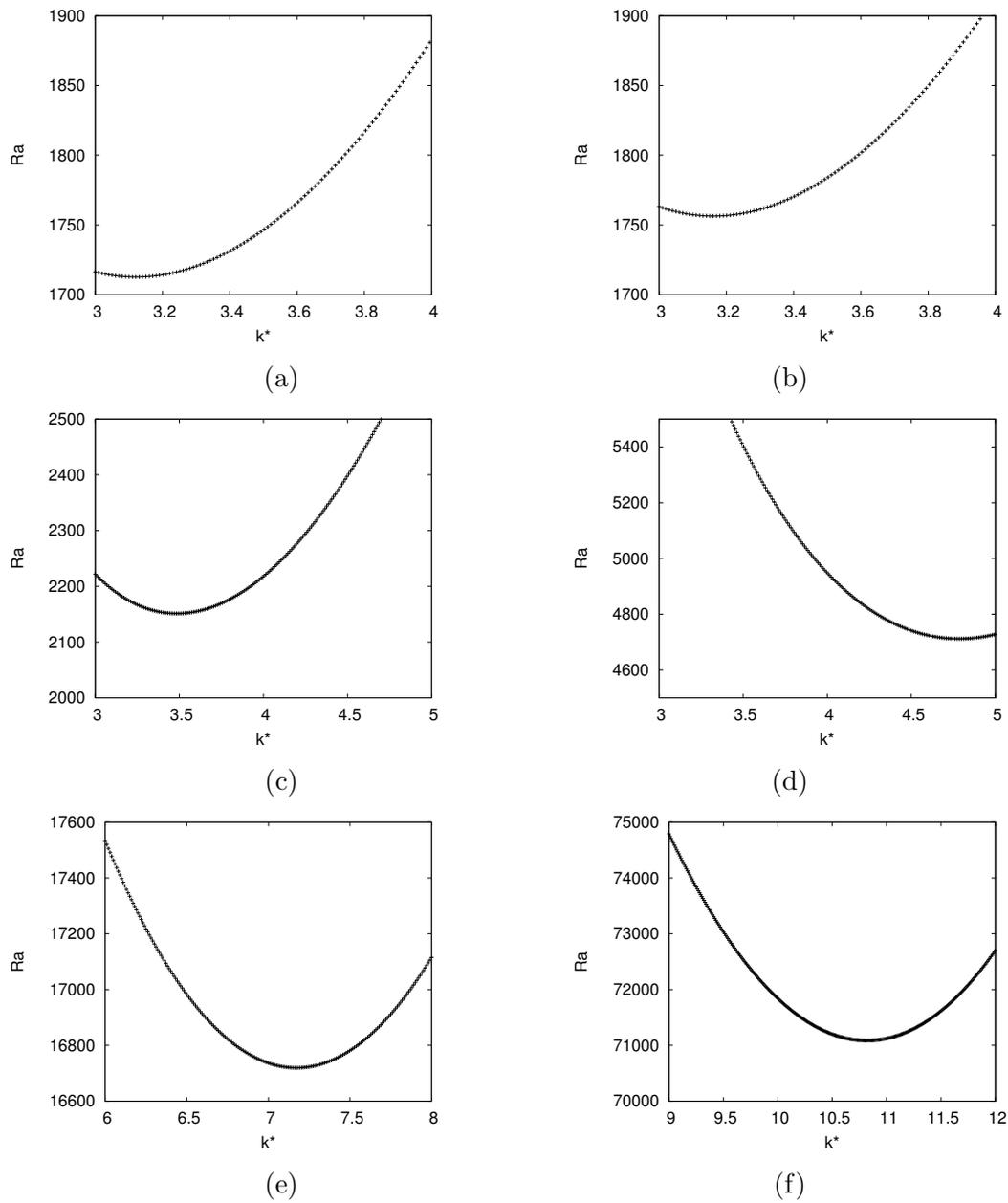


Figura 4.5: Curvas de estabilidad para $\delta = 0^\circ$ (Rayleigh-Bénard con rotación).
(a) $Ta = 1000$, (b) $Ta = 10000$, (c) $Ta = 100000$, (d) $Ta = 1000000$.

Tabla 4.1: Números de Rayleigh y números de onda de las curvas de estabilidad.

$Ta = 100$		$Ta = 1000$	
k^*	Ra	k^*	Ra
3.11055279	1756.9982667810427	3.43216085	2152.0956381210744
3.12060308	1756.7630114514309	3.44221115	2151.8337433859451
3.13065338	1756.5806704516822	3.45226121	2151.6278108978122
3.14070344	1756.4508383520269	3.46231151	2151.4775124554644
3.15075374	1756.3730954039045	3.47236180	2151.3825418317701
3.16080403	1756.3473006142788	3.48241210	2151.3426259278881
3.17085433	1756.3729406244627	3.49246240	2151.3574269579094
3.18090463	1756.4495175913264	3.50251245	2151.4266459070523
3.19095469	1756.5772955744212	3.51256275	2151.5500086917259
3.20100498	1756.7553262892261	3.52261305	2151.7273922338645

$Ta = 10000$		$Ta = 100000$	
k^*	Ra	k^*	Ra
4.74874353	4712.5019990847650	7.13567829	16720.187917323372
4.75879383	4712.2813602222996	7.14572859	16719.822592362325
4.76884413	4712.1322172679256	7.15577888	16719.573798658439
4.77889442	4712.0545038851287	7.16582918	16719.441746852342
4.78894472	4712.0480382323312	7.17587948	16719.426279932784
4.79899502	4712.1124262544108	7.18592978	16719.527280084552
4.80904531	4712.2469064443121	7.19598007	16719.744855283247
4.81909561	4712.4536688141434	7.20603037	16720.078833196156
4.82914591	4712.7302563391040	7.21608019	16720.529455904150
4.83919621	4713.0771181635537	7.22613049	16721.096721062320

4.4 Resultados

Como se mencionó anteriormente, el problema de eigenvalores generado por las ecuaciones de estabilidad lineal se resolvió con el método de Tau-Chebyshev considerando rollos estacionarios. Las ecuaciones son formuladas en términos de seis parámetros adimensionales que gobiernan al sistema, los cuales son el ángulo de inclinación δ , el número de Taylor Ta , el número de Rayleigh Ra , el número de Prandtl Pr , la orientación de los rollos convectivos ϕ y la magnitud del número de onda k^* , cuyos componentes son k_1^* y k_2^* . Debido a la complejidad del sistema se fijó el número de Prandtl a $Pr = 1.07$ para que el trabajo sea comparable con los trabajos de Daniels et al. (2000) y Subramanian et al. (2016).

Con el método de Tau-Chebyshev y tomando el eigenvalor al número de Rayleigh se obtienen curvas de estabilidad similares a las mostradas en las figuras 4.3 y 4.5 para cada ángulo de inclinación, número de Taylor y orientación del rollo. De las curvas se obtienen los valores críticos, el número de Rayleigh crítico Ra_c corresponde al menor valor que presenta la curva, mientras que el número de onda crítico k_c es el que se encuentra asociado a Ra_c .

Rollos longitudinales $\phi = 0$

Para observar el efecto de la rotación sobre una orientación de rollo convectivo fija se obtuvieron los valores críticos para rollos longitudinales (figura 4.6).

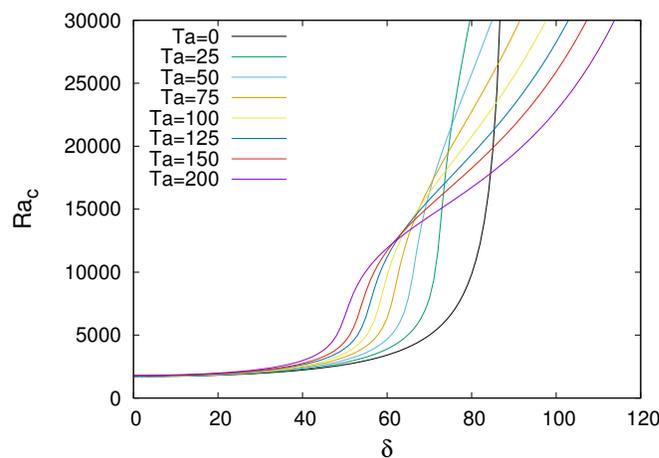


Figura 4.6: Valores críticos de rollos longitudinales para diferentes números de Taylor.

Rollos oblicuos $\phi \neq 0$

Para el estudio de rollos oblicuos, la orientación del rollo está denotada por el parámetro ϕ , el cual es el ángulo que describe la orientación con respecto a la coordenada x_1^* . En la figura 4.7 se muestran los valores críticos para $Ta = 0, 30, 100, 200, 300, 500, 1000$ y 2000 , para diferentes valores de ϕ y δ de 0° a 120° . Los resultados para $Ta = 0$ coinciden bien con los reportados por Subramanian et al. (2016), donde los modos oblicuos no aparecen como los más inestables para ningún ángulo de inclinación. En una cavidad inclinada sin rotación se tiene que las inestabilidades que aparecen en el inicio de la convección son rollos longitudinales y rollos transversales, estos últimos para ángulos de inclinación altos (para $Pr = 1.07$ el punto de codimensión es $\delta \approx 77^\circ$). De la figura 4.7 se observa que cuando una cavidad inclinada es sometida a rotación, los rollos longitudinales ya no son la primera inestabilidad en aparecer, ya que los rollos oblicuos aparecen a menores números de Rayleigh, esto debido a que la rotación modifica la distribución del esfuerzo cortante, ya no solo a lo largo de x_3^* , sino también de x_2^* . También se puede observar que al aumentar el número de Taylor, la orientación ϕ más inestable también aumenta, es decir, para $Ta = 100$ $\phi_c \approx 20^\circ$, mientras que para $Ta = 300$ $\phi_c \approx 30^\circ$. También se puede observar que las soluciones para los rollos oblicuos lejos de ϕ_c son menos favorables, por ejemplo para $Ta = 500, 1000$ y 2000 , los rollos longitudinales tienen un comportamiento parecido al de los rollos transversales en el caso no rotatorio.

El efecto que tiene la rotación en k_c^* se presenta en la figura 4.8, en donde se observa que para los rollos oblicuos más inestables correspondientes a cada número de Taylor, el número de onda crítico disminuye al aumentar el ángulo de inclinación. Las líneas incompletas que aparecen en las figuras para $Ta = 1000$ y 2000 , tanto en Ra_c como en k_c^* son líneas que a partir de la discontinuidad no se encontraron soluciones en un rango de $0 < Ra < 300,000$.

Para un número de Taylor determinado, existe un valor de ϕ en el cual el número de onda no cambia respecto al ángulo de inclinación (como en el caso sin rotación de $\phi = 0^\circ$) y ese valor de ϕ corresponde aproximadamente al valor del ángulo γ (ver figura 3.3) que genera el flujo base de dicho número de Taylor. Por lo que para $\phi < \gamma$, k_c^* incrementa al aumentar el ángulo de inclinación, mientras que para $\phi > \gamma$, k_c^* disminuye, en algunos casos teniendo un comportamiento similar al del caso no rotatorio de los rollos transversales, el cual exhibe un pico característico. Como se mencionó en el capítulo 3, γ no cambia respecto al ángulo de inclinación, solo cambia respecto al número de Ta .

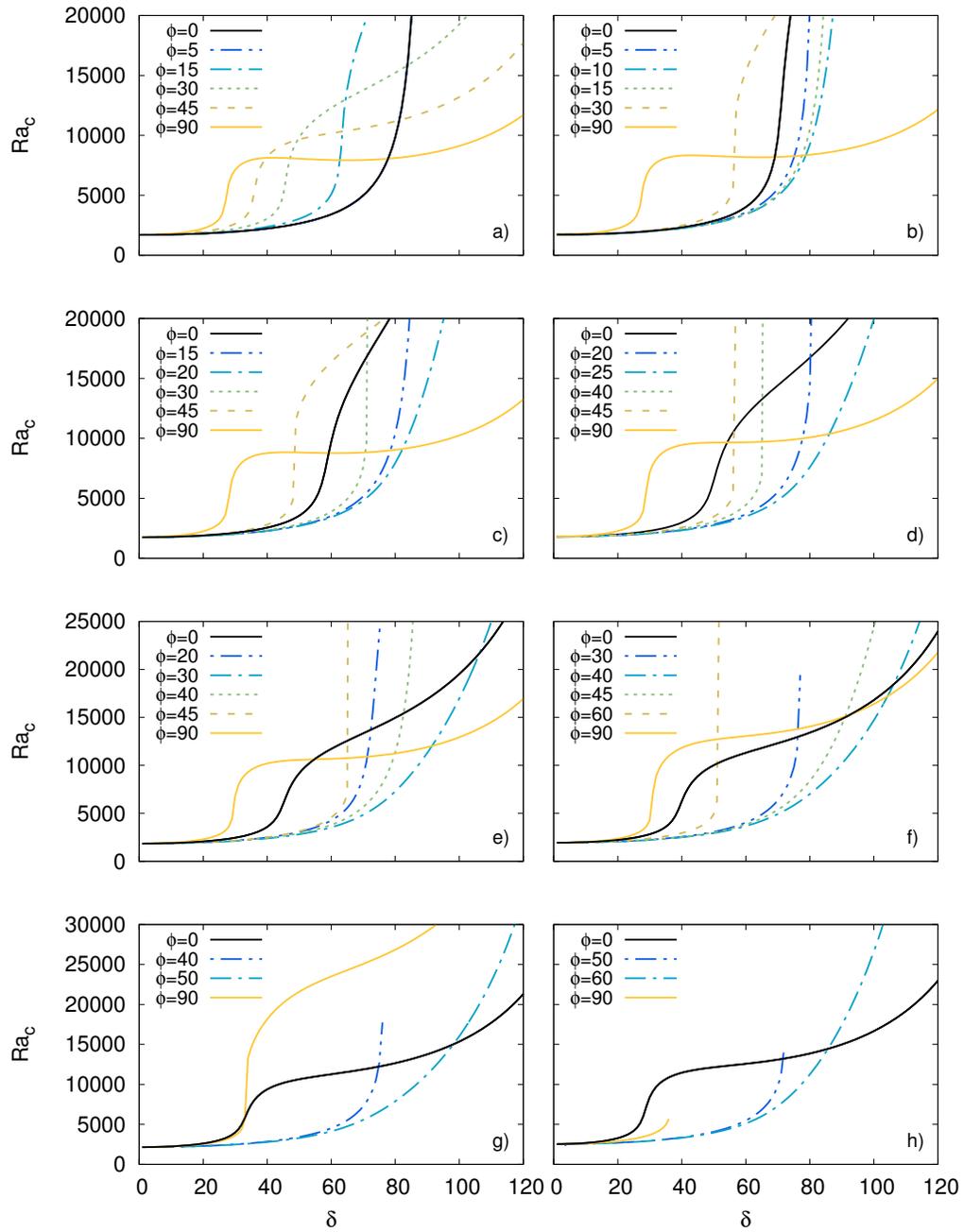


Figura 4.7: Números de Rayleigh crítico. a) $Ta = 0$, b) $Ta = 30$, c) $Ta = 100$, d) $Ta = 200$, e) $Ta = 300$, f) $Ta = 500$, g) $Ta = 1000$, h) $Ta = 2000$

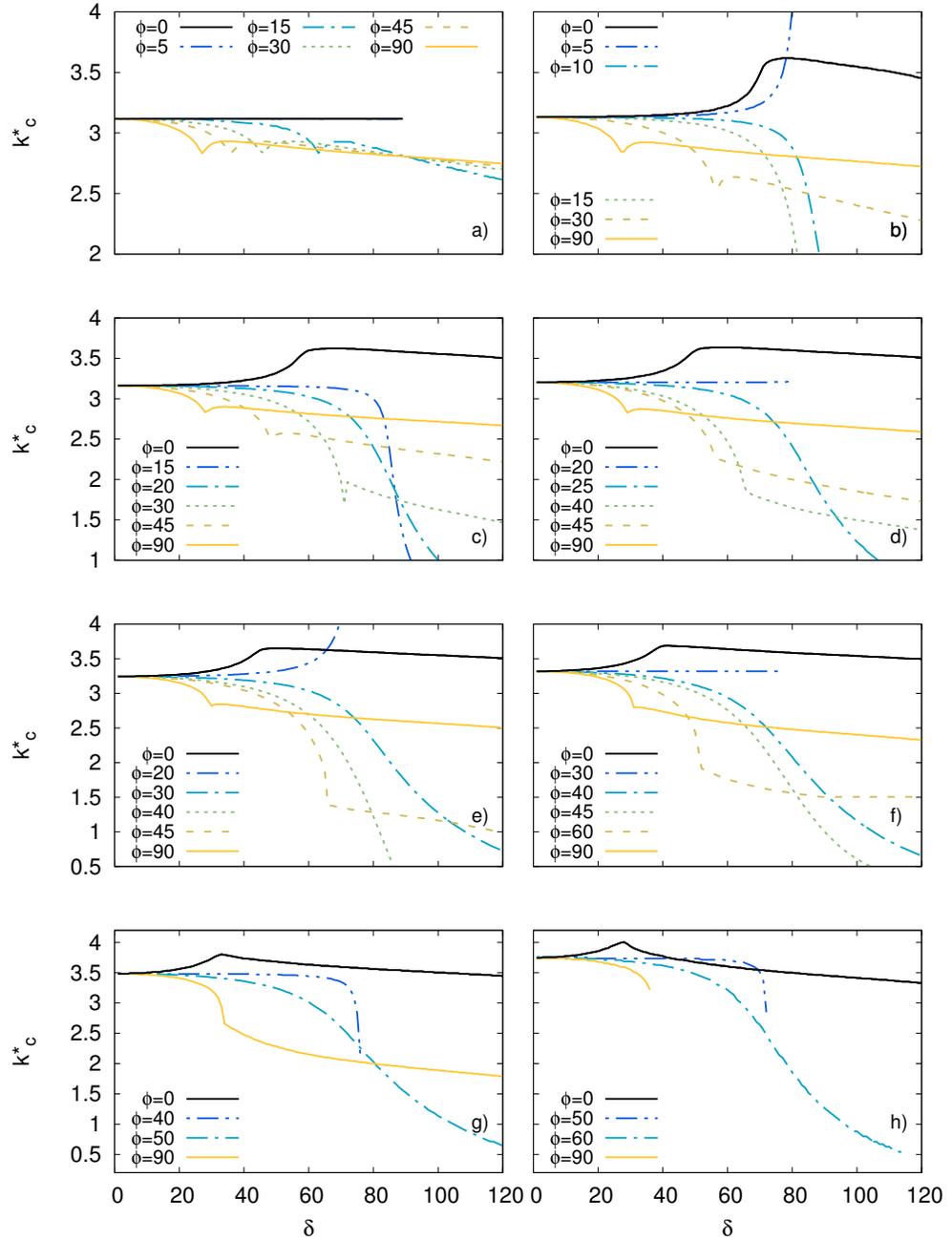


Figura 4.8: Números de onda crítico. a) $Ta = 0$, b) $Ta = 30$, c) $Ta = 100$, d) $Ta = 200$, e) $Ta = 300$, f) $Ta = 500$, g) $Ta = 1000$, h) $Ta = 2000$

Inicio de la convección

En las gráficas anteriores se ha mostrado el número de Ra crítico para un determinado número de Ta e inclinación de rollo respecto a los ejes, sin embargo en el sistema estudiado la convección iniciará con una determinada orientación de rollo (ϕ_c) que es la más inestable para determinado Ta y ángulo δ , es decir, es la orientación que presenta el menor número de Ra . Similarmente al caso sin rotación, en un determinado rango de δ se tiene un valor de ϕ_c y para otro rango de inclinación de la cavidad se tiene otro valor de ϕ_c , el punto de intersección entre las dos líneas de los valores críticos más inestables es llamado punto de codimensión (δ_{co}). Como se mencionó en el capítulo 1, para un sistema como el estudiado que no se encuentra sometido a rotación, el punto de codimensión es $\delta_c \approx 78^\circ$ (Subramanian et al., 2016).

La figura 4.9 muestra los parámetros del inicio de la convección para diferentes números de Taylor y ángulo de inclinación de la cavidad. Se observa, por ejemplo, que para $Ta = 100$ la convección inicia con rollos convectivos oblicuos de $\phi_c = 20^\circ$ para ángulos de inclinación menores al ángulo de codimensión ($\delta < \delta_{co}$), mientras que la convección inicia como rollos con $\phi_c = 111^\circ$ para $\delta > \delta_{co}$. De igual manera, para $Ta = 500$ inicia con $\phi_c = 38^\circ$ (para $\delta < \delta_{co}$) y $\phi_c = 135^\circ$ (para $\delta > \delta_{co}$). Los puntos de codimensión se muestran en la tabla 4.2 para cada número de Taylor.

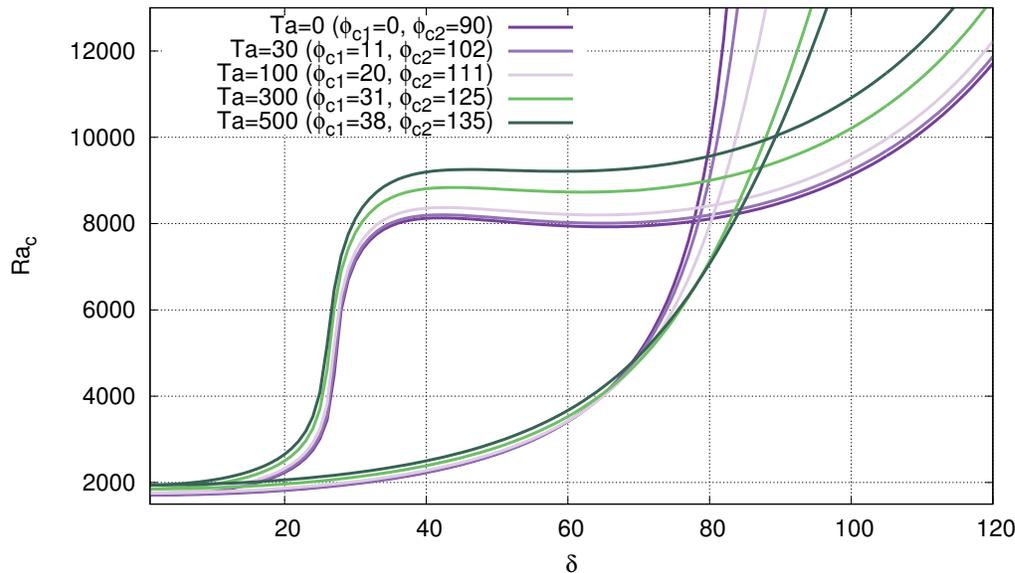


Figura 4.9: Número de Ra crítico y orientación crítica para $Pr = 1.07$ con respecto al ángulo de inclinación.

Tabla 4.2: Ángulos de codimensión para diferentes números de Taylor.

Número de Taylor	Codimensión δ_{co}
0	77.7° ($Ra_c = 8051.9$)
30	78.7° ($Ra_c = 8164.9$)
100	81° ($Ra_c = 8440.6$)
300	86.1° ($Ra_c = 9244.4$)
500	89.4° ($Ra_c = 10035.5$)

De la figura 4.9, también se puede observar que al aumentar la rotación se retrasa el inicio de la convección, es decir, que el número de Ra crítico aumenta para casi todos los ángulos de inclinación, excepto en un rango en donde las líneas se cruzan ($\delta \approx 70 - 85^\circ$), por ejemplo, para $\delta = 80^\circ$, el número de Ra_c disminuye. Tomando en cuenta lo anterior, se obtuvieron los valores críticos Ra_c , k_c^* y ϕ_c para $\delta = 70^\circ$ y para números de Taylor de 1 a 1×10^6 (figura 4.10). En esta figura se muestra de forma más clara la disminución del número de Ra_c para $Ta \approx < 600$. De manera similar, el número de onda crítico disminuye en el mismo rango para después incrementarse al aumentar la rotación. La línea punteada representa los valores críticos de RBC con rotación (Chandrasekhar, 1961), es decir, sin el efecto de la inclinación, por lo que se puede apreciar que el efecto que tiene la inclinación sigue siendo importante para números de Ta de hasta 1×10^6 .

Perturbaciones U_3^* , Θ^* , W^* , u_1^* y u_2^*

Mediante el método presentado en la sección 4.2 se obtienen, además del número de Ra como eigenvalor, los eigenvectores correspondientes a U_3^* , Θ^* y W^* . Las figuras 4.11 - 4.19 muestran la variación de dichas variables de perturbación y de sus derivadas con respecto a la coordenada x_3^* para los valores críticos k_c^* y ϕ_c para ángulos de inclinación de 30, 70 y 120° y números de Taylor de 0,100 y 500. En las figuras el operador D indica la derivada d/dx_3^* .

Recordando que la convección inicia en forma de rollos, las gráficas sólo muestran una línea a lo largo de la coordenada vertical, observando por ejemplo la figura 4.11 se aprecia que la perturbación de la velocidad en la tercera dirección U_3^* es cero en las fronteras (debido a las condiciones de frontera) y disminuye hasta un valor mínimo en el centro de las placas, debido a que la perturbación son valores negativos indica que el fluido se mueve hacia abajo

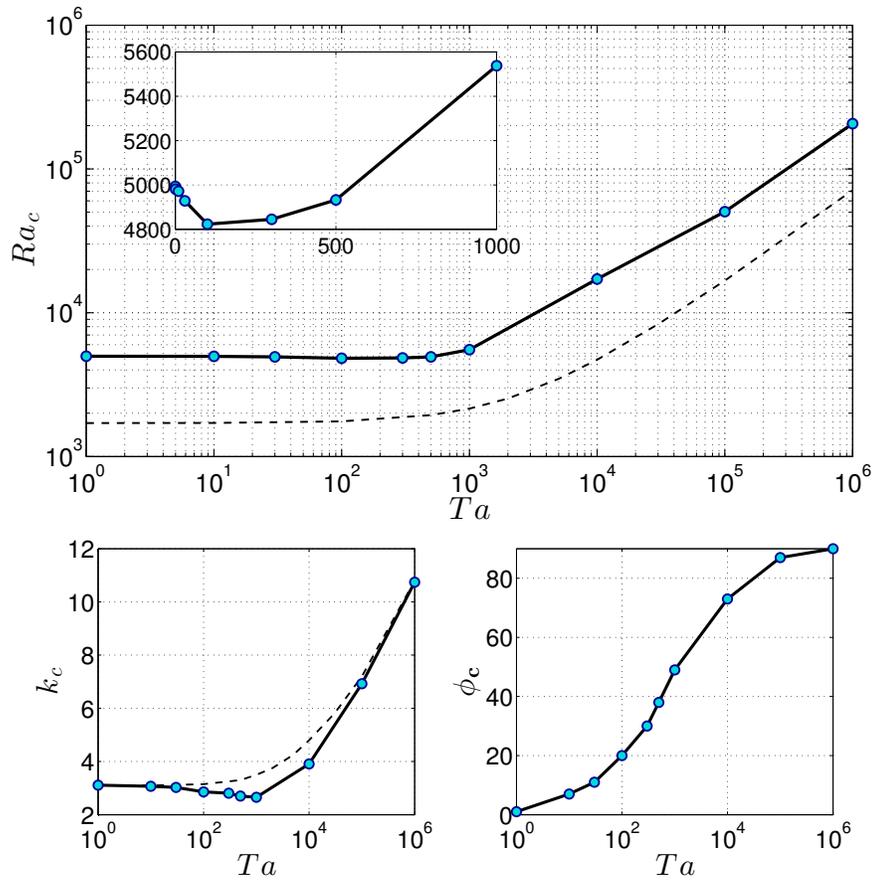


Figura 4.10: Parámetros críticos para $\delta = 70$ y $Pr = 1.07$ con respecto al número de Taylor. La línea punteada son los valores críticos de RBC con rotación (Chandrasekhar, 1961).

en esa línea entre -1 y 1 de x_3^* . De manera similar se puede observar la perturbación de la temperatura Θ^* y su derivada $D\Theta^*$.

Para determinar el cambio que sufre la transferencia de calor al aumentar la rotación, se puede utilizar el número de Nusselt (este tema se aborda con mas detalle en la subsección 5.4). El número de Nusselt Nu se define como:

$$Nu = \frac{hD}{k_q} \quad (4.65)$$

Donde k_q es la conductividad térmica y h es el coeficiente convectivo, y es igual a:

$$h = -\frac{k_q}{\Delta T} \frac{dT}{dx_3} \Big|_{placa} \quad (4.66)$$

Adimensionalizando a las variables T y x_3^* :

$$h = -\frac{k_q}{\Delta T} \frac{dT^*}{dx_3^*} \Big|_{placa} \left(\frac{2}{D} \right) \left(\frac{\Delta T}{2} \right) = -\frac{k_q}{D} \frac{dT^*}{dx_3^*} \Big|_{placa} \quad (4.67)$$

Recordando que las propiedades se pueden expresar como la suma de la propiedad en el flujo base mas la perturbación de la propiedad, se tiene que:

$$h = \bar{h} + h' \quad (4.68)$$

Por lo tanto:

$$Nu = \bar{N}u + h' \quad (4.69)$$

Por lo que el la perturbación del número de Nusselt se expresa como:

$$Nu' = h' \frac{D}{k} = -\frac{k_q}{D} \frac{dT^*}{dx_3^*} \Big|_{placa} \frac{D}{k} = -\frac{dT^*}{dx_3^*} \Big|_{placa} \quad (4.70)$$

De las ecuaciones (4.21) se sabe que:

$$\frac{dT^*}{dx_3^*} = 2 \frac{d\Theta^*}{dx_3^*} e^{i(k_2^* x_1^* + k_1^* x_2^*)} \quad (4.71)$$

Por lo tanto la perturbación del número de Nusselt es:

$$Nu' = -2 \frac{d\Theta^*}{dx_3^*} \Big|_{placa} e^{i(k_2^* x_1^* + k_1^* x_2^*)} \quad (4.72)$$

En las gráficas de $D\Theta^*$ se puede apreciar que el flujo de calor tiene la dirección hacia $x_3^* = -1$. Lo anterior tiene sentido ya que en esa línea entre ambas placas el fluido se mueve hacia la placa en $x_3^* = -1$, como se mencionó anteriormente. De la ecuación (4.72) se observa que la transferencia de calor es proporcional a $-2D\Theta^*$ en las placas, por lo que, si se observan las gráficas correspondientes a $\delta = 30^\circ$ (figuras 4.11, 4.14 y 4.17) se observa que el valor de la derivada en la placa inferior ($x_3^* = -1$) casi no cambia al aumentar el número de Taylor. Lo mismo sucede para el caso de $\delta = 70^\circ$ (figuras 4.12, 4.15 y 4.18). y de $\delta = 120^\circ$ (figuras 4.13, 4.16 y 4.19). Esto quiere decir que la transferencia de calor justo al inicio de la convección (para Ra_c) no se ve muy afectada hasta para números de Taylor de 500.

Por otro lado se observa que $W^* = 0$ para $Ta = 0$, esto es lo que se esperaba ya que la vorticidad solo aparece en las ecuaciones de estabilidad al considerar rotación. La variación del perfil de U_3^* sobre la línea de x_3^* con respecto al número de Taylor disminuye su magnitud al aumentar la rotación debido al efecto amortiguador de esta. De manera contraria ocurre con la perturbación de la vorticidad W^* ya que aumentan (o disminuyen) sus valores máximos (o mínimos). La perturbación de la temperatura se mantiene casi constante a cambios del número de Taylor, al igual que su derivada.

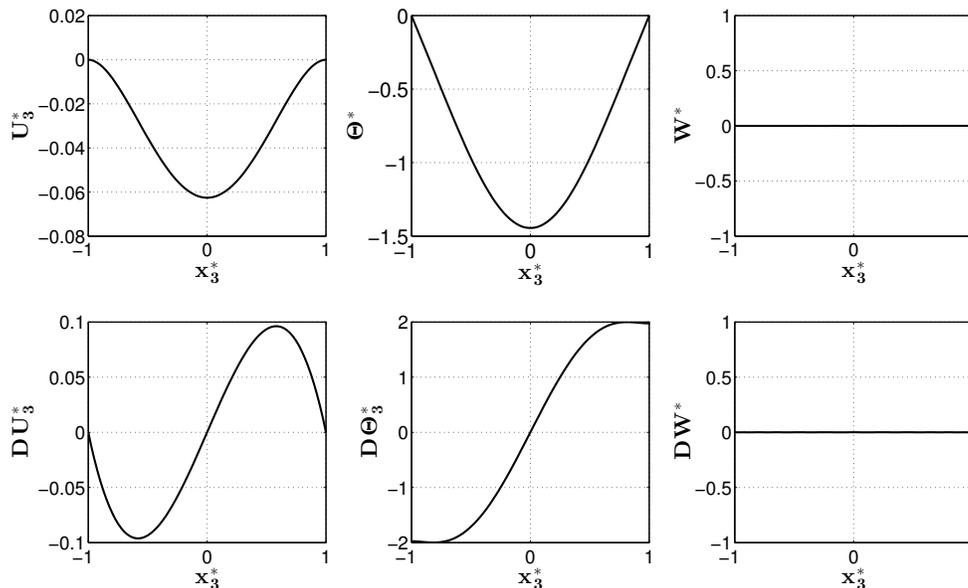


Figura 4.11: Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 0$, $\delta = 30^\circ$ y $\phi = 0^\circ$

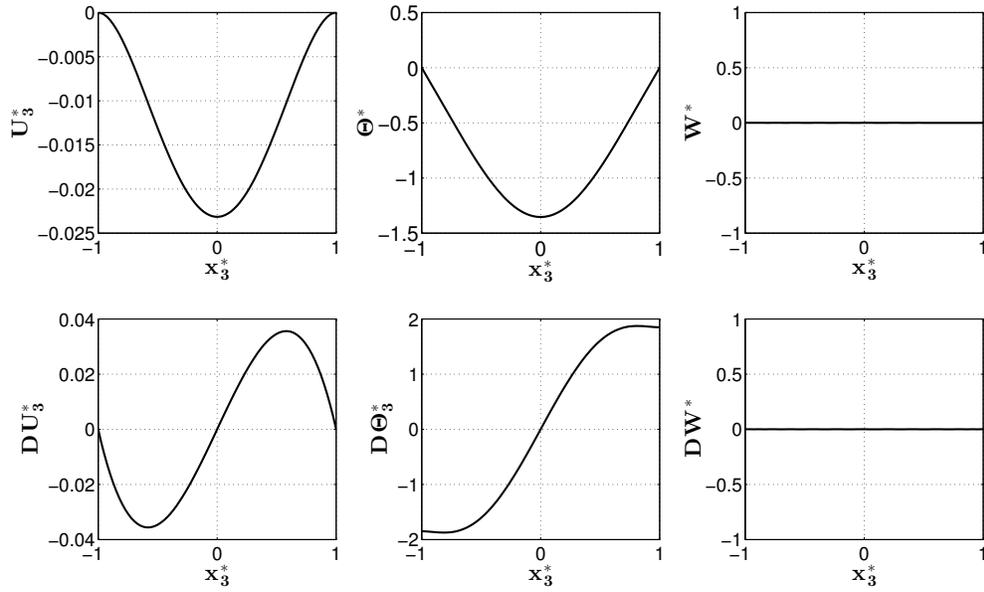


Figura 4.12: Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 0$, $\delta = 70^\circ$ y $\phi = 0^\circ$

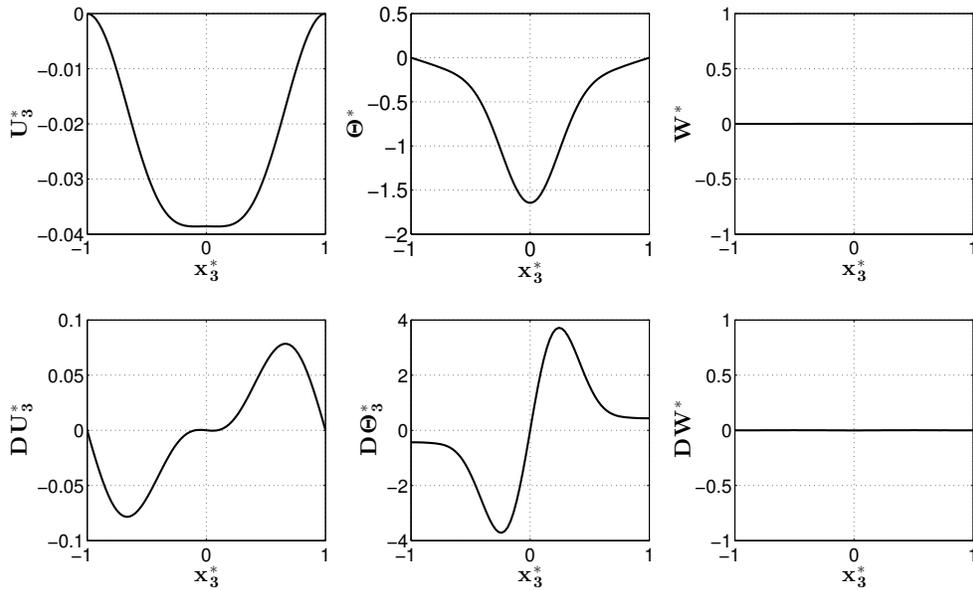


Figura 4.13: Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 0$, $\delta = 120^\circ$ y $\phi = 90^\circ$

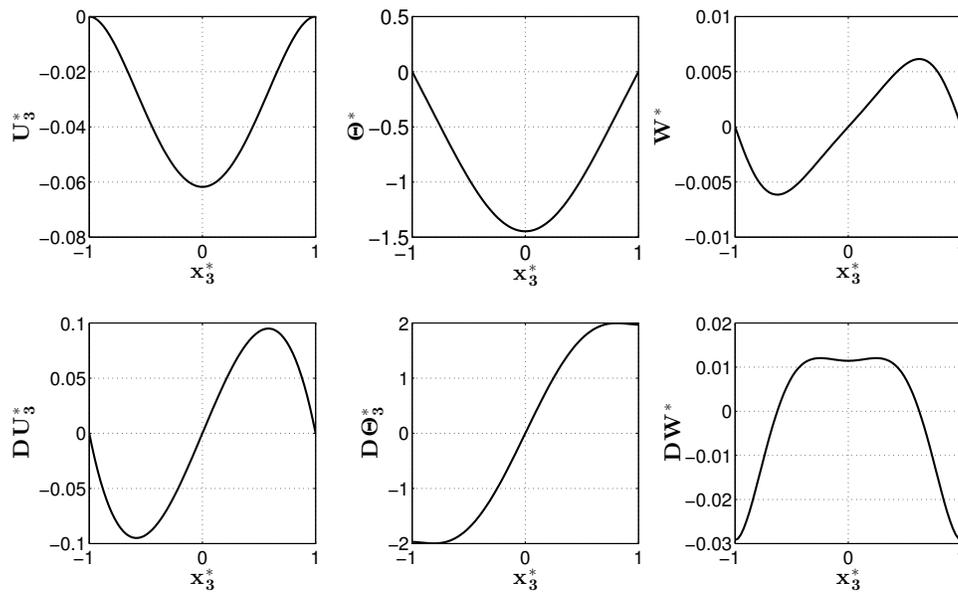


Figura 4.14: Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 100$, $\delta = 30^\circ$, y $\phi = 20^\circ$

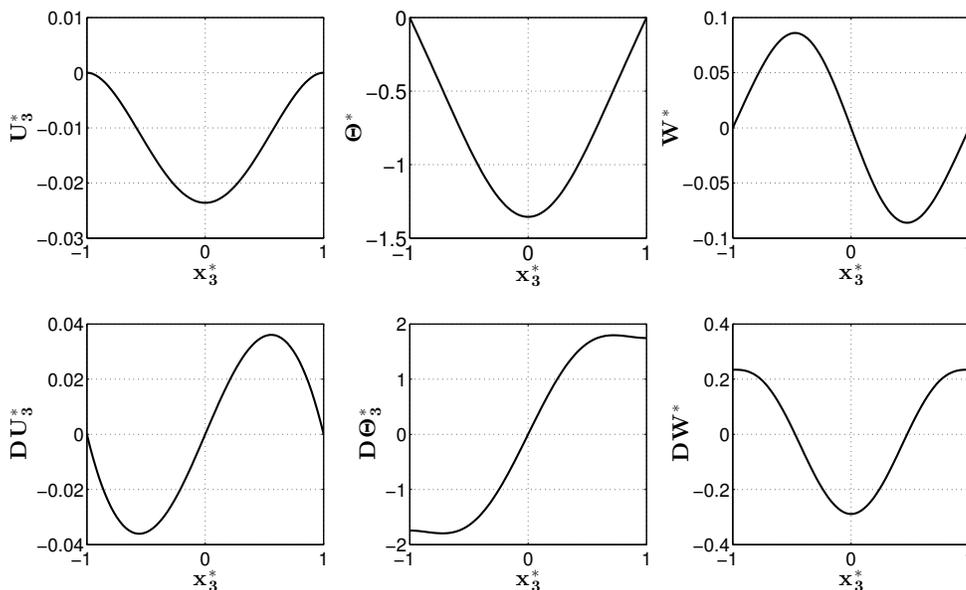


Figura 4.15: Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 100$, $\delta = 70^\circ$ y $\phi = 20^\circ$

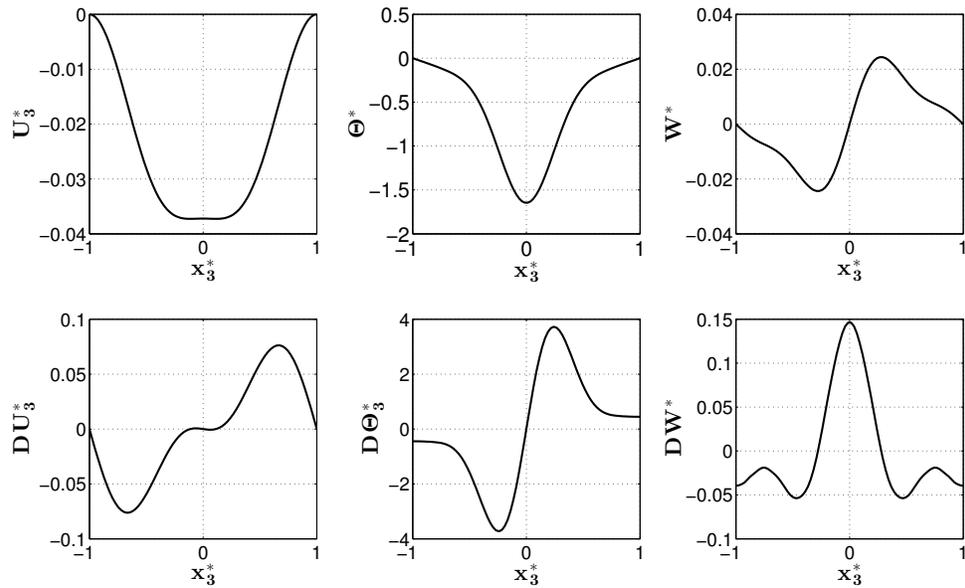


Figura 4.16: Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 100$, $\delta = 120^\circ$ y $\phi = 111^\circ$

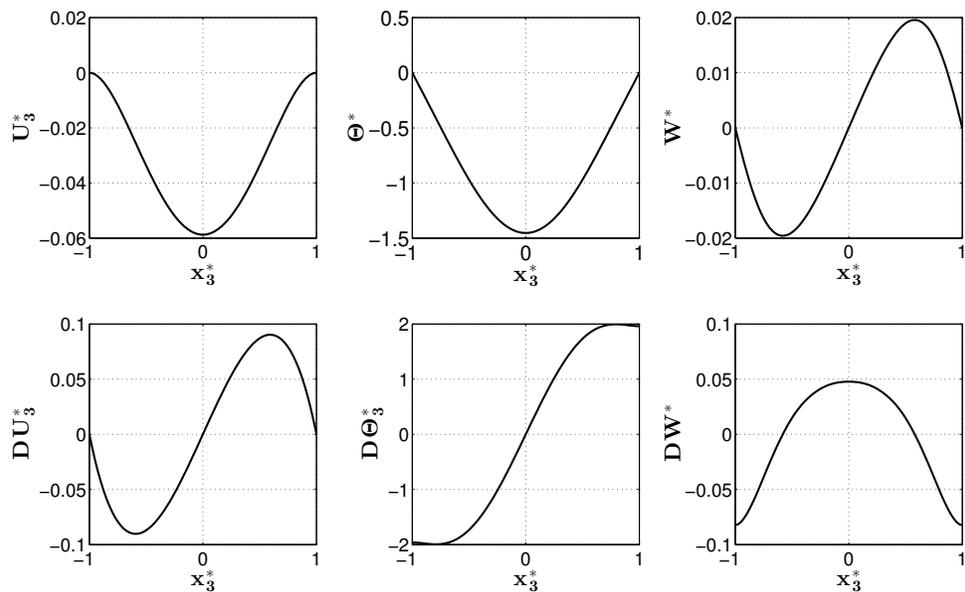


Figura 4.17: Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 500$, $\delta = 30^\circ$ y $\phi = 40^\circ$

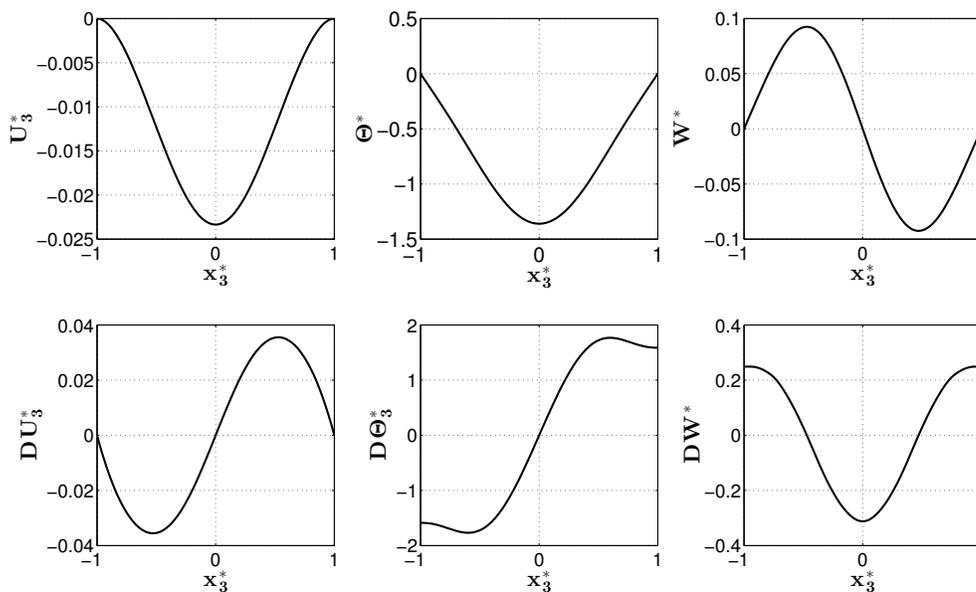


Figura 4.18: Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 500$, $\delta = 70^\circ$, y $\phi = 40^\circ$

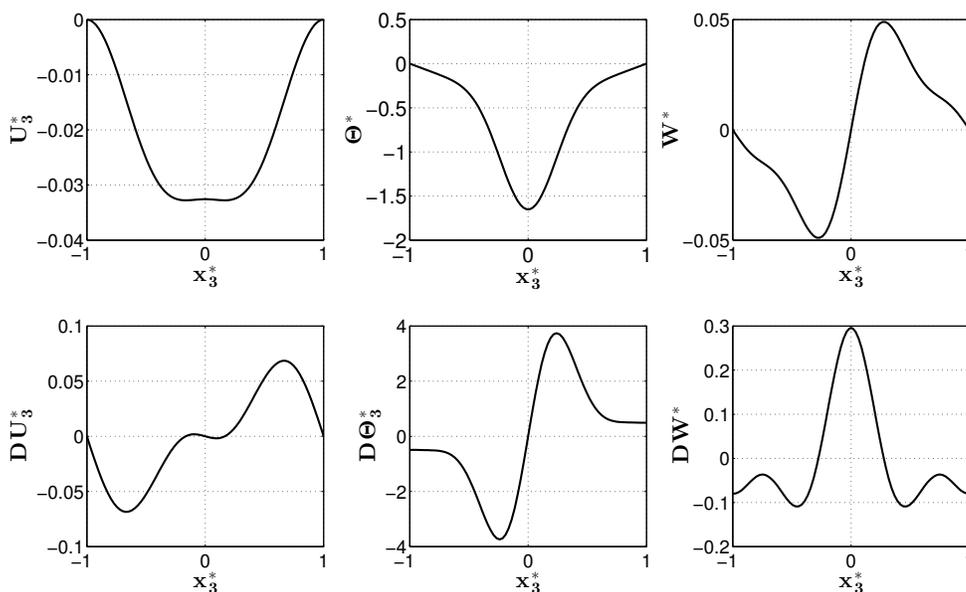


Figura 4.19: Variables de perturbación y sus derivadas con respecto a x_3^* para $Ta = 500$, $\delta = 120^\circ$ y $\phi = 135^\circ$

Por otro lado, mediante la descomposición de Helmholtz (ecuación (4.73)) se pueden obtener relaciones para la obtención de u_1^* y u_2^* .

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi - \nabla \times \Psi \quad (4.73)$$

Donde Φ es el potencial escalar y Ψ es el vector potencial, los cuales tienen las siguientes características:

$$\begin{aligned} \nabla \times \Psi &\perp \nabla\Phi \\ \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla\Phi) &= 0 \end{aligned}$$

Para un flujo en dos dimensiones se tiene que:

$$\begin{aligned} u_3 &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \quad \Psi = \Psi_3 \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{u} &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_2} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{i}_2 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Por lo que:

$$u_1^* = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_2} \quad (4.75)$$

$$u_2^* = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial\Psi_3}{\partial x_1} \quad (4.76)$$

Sustituyendo por variables armónicas:

$$\Phi(x_3) = \hat{\Phi} e^{i(k_2^* x_1^* + k_1^* x_2^*)} \quad (4.77)$$

$$\Psi_3(x_3) = \hat{\Psi} e^{i(k_2^* x_1^* + k_1^* x_2^*)} \quad (4.78)$$

Y con la definición de Φ y Ψ se puede demostrar que:

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{k^2} \frac{dU_3}{dx_3}(x_3) \quad (4.79)$$

$$\hat{\Psi} = -\frac{1}{k^2} W(x_3) \quad (4.80)$$

Utilizando las ecuaciones (4.75) y (4.76) y adimensionalizando con las mismas variables adimensionales utilizadas en la deducción de las ecuaciones de estabilidad, se obtienen las siguientes expresiones para las velocidades.

$$u_1^* = \frac{i}{k^{*2}} \left[k_2^* \frac{dU_3^*}{dx_3^*} + k_1^* W \right] e^{i(k_2^* x_1^* + k_1^* x_2^*)} \quad (4.81)$$

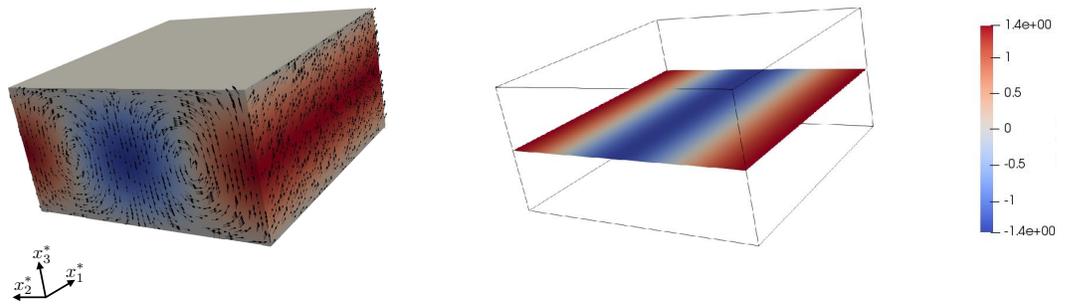
$$u_2^* = \frac{i}{k^{*2}} \left[k_1^* \frac{dU_3^*}{dx_3^*} + k_2^* W \right] e^{i(k_2^* x_1^* + k_1^* x_2^*)} \quad (4.82)$$

Las expansiones de las ondas de perturbación a lo largo de x_1^* y x_2^* se pueden obtener también con la siguiente relación:

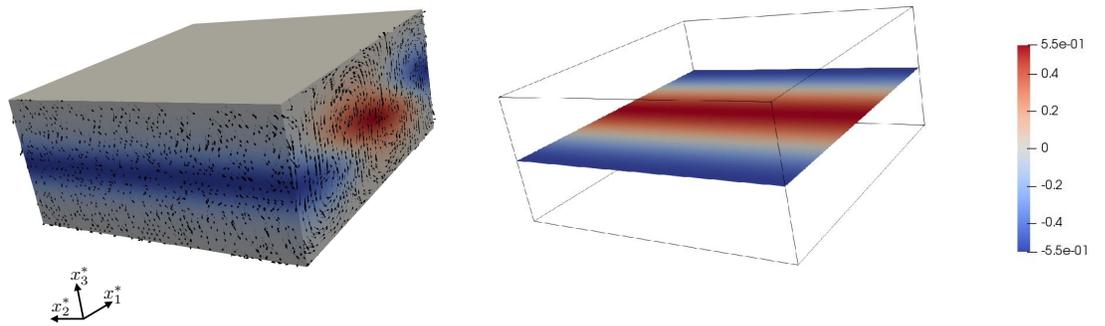
$$e^{i(k_2^* x_1^* + k_1^* x_2^*)} = \cos(k_2^* x_1^* + k_1^* x_2^*) + i \sin(k_2^* x_1^* + k_1^* x_2^*)$$

De esta manera se obtuvieron perfiles de perturbación de temperatura y campo de velocidades en una malla con dimensiones $(\lambda_c^* \times \lambda_c^* \times 1)D$ para las direcciones x_1^* , x_2^* , x_3^* respectivamente, en donde $\lambda_c^* = \frac{2\pi}{k_c^*}$.

Las figuras 4.20 y 4.21 muestran contornos de perturbación de la temperatura en el plano medio $x_1^* - x_2^*$ de x_3^* , además de los vectores de velocidad. En la figura 4.20 se tiene un número de Taylor de 0, en donde los valores críticos de la orientación de los rollos son de $\phi = 0^\circ$ (rollos longitudinales fig. 4.20a) para un ángulo de inclinación de la cavidad de 30° , y de $\phi = 90^\circ$ (rollos transversales fig. 4.20b) para un ángulo de inclinación de la cavidad de 120° . Cabe mencionar que los vectores no están escalados a su magnitud con el propósito de mejorar la visualización de los rollos. Por otro lado, en la figura 4.21 se tiene un número de Taylor de 500, en donde, además del plano medio $x_1^* - x_2^*$, se presenta un plano ortogonal a la orientación de los rollos, teniendo $\phi = 40^\circ$ para $\delta = 30^\circ$ (fig. 4.21a) y $\phi = 135^\circ$ para $\delta = 120^\circ$ (fig. 4.21b).



(a) $\delta = 30^\circ$, $\phi = 0^\circ$, $k_c^* = 3.116$, $\lambda_c^* = 2.02$.



(b) $\delta = 120^\circ$, $\phi = 90^\circ$, $k_c^* = 2.746$, $\lambda_c^* = 2.29$.

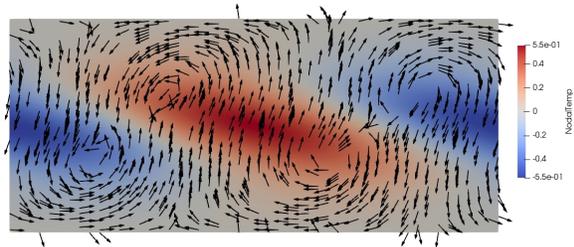


Figura 4.20: Perfiles de perturbación de temperatura y campo de perturbación de velocidad para $Ta = 0$.

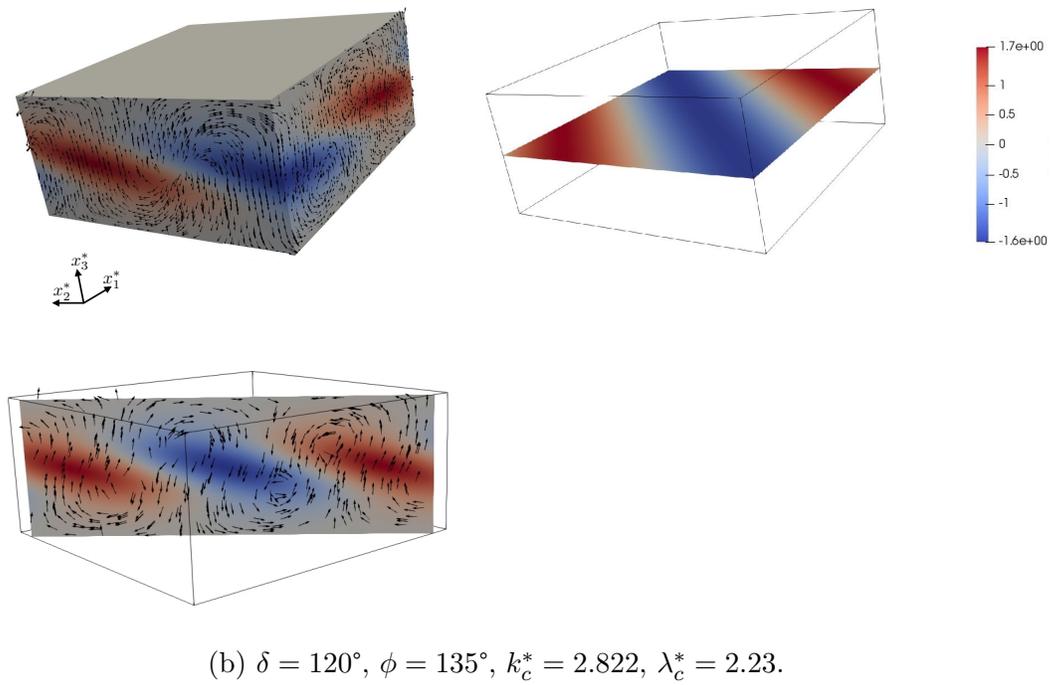
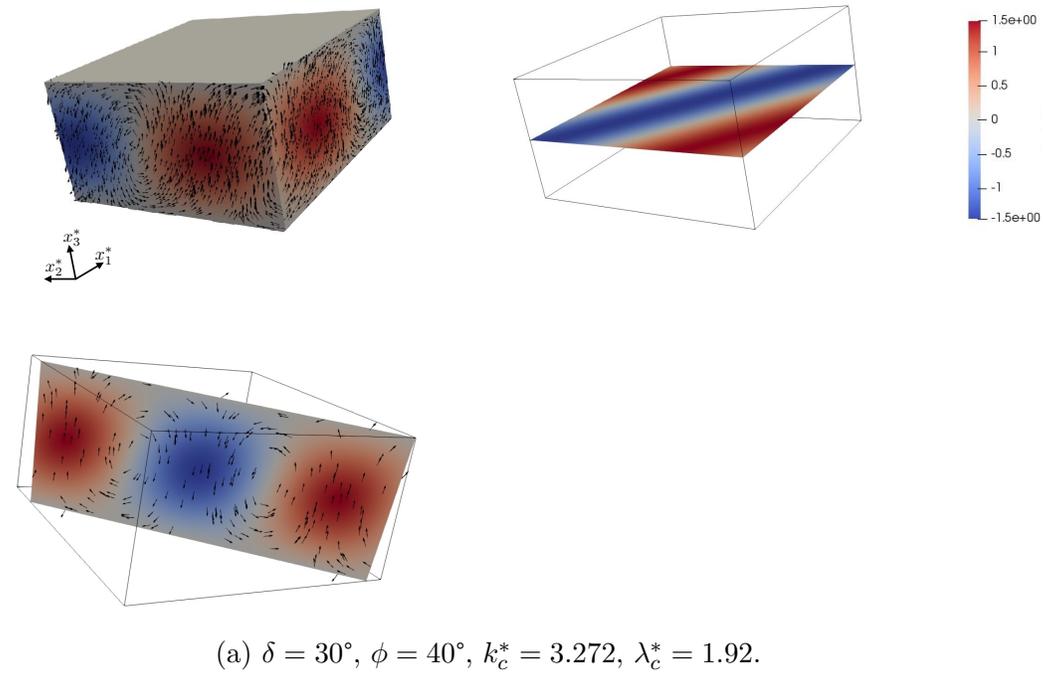


Figura 4.21: Perfiles de perturbación de temperatura y campo de perturbación de velocidad para $Ta = 500$.

Capítulo 5

Simulaciones numéricas de las ecuaciones no lineales

Para el estudio de los patrones convectivos y de la transferencia de calor en la cavidad inclinada con rotación se utilizó el código libre Nek5000 (Paul F. Fischer and Kerkemeier, 2008), el cual es una paquetería libre tipo DNS para la solución no estacionaria de las ecuaciones de Navier-Stokes, el cual fue diseñado para simular flujo laminar, turbulento con transferencia de calor y transporte de especies. La discretización espacial del código esta basada en el método de elementos espectrales (SEM por sus siglas en inglés). Los métodos SEM presentan poca dispersión y disipación numérica, lo cual puede ser de gran importancia en cálculos de estabilidad, integración de largo periodo de tiempo y en flujos con un número de Reynolds elevado (Paul F. Fischer and Kerkemeier, 2008).

Las ecuaciones que se utilizaron para las simulaciones numéricas no lineales se describe en la sección 5.1. En la sección 5.2 se describen los métodos numéricos que se utilizan, en donde también se realiza una descripción de la malla computacional, mientras que en la sección 5.3 se presenta la validación del código numérico. Finalmente la sección 5.4 presenta las simulaciones numéricas y el cálculo del número de Nusselt.

5.1 Sistema de ecuaciones

Recordando que el modelo matemático consisten la ecuación de cantidad de movimiento, energía y continuidad (ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) respectivamente):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \nu \nabla^2 u_1 + \beta \hat{g} \sin \delta(T - T_\infty) + 2\Omega_3 u_2 \\
 \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \nu \nabla^2 u_2 - 2\Omega_3 u_1 \\
 \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \nu \nabla^2 u_3 + \beta \hat{g} \cos \delta(T - T_\infty) \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \alpha \nabla^2 T \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (5.3)$$

El método de elementos espectrales fue utilizado para resolver las ecuaciones anteriores de forma adimensional utilizando los siguientes parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned}
 x_i^* &= \frac{x_i}{D}, & g_i^* &= \frac{g_i}{\hat{g}} & u_i^* &= \frac{D}{\alpha} u_i, & t^* &= \frac{\alpha}{D^2} t, \\
 T^* &= \frac{T - T_f}{\Delta T}, & \text{Donde } \Delta T &= T_c - T_f
 \end{aligned}$$

Donde x_3^* va de 0 a 1, mientras que la temperatura T^* va de 1 a 0. Las ecuaciones adimensionales son:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot (\nabla^* u_1^*) \right) &= -\frac{\partial P^*}{\partial x_1^*} + \nabla^{*2} u_1^* + Ra \sin \delta(T^* - T_\infty^*) + Ta^{1/2} u_2^* \\
 \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot (\nabla^* u_2^*) \right) &= -\frac{\partial P^*}{\partial x_2^*} + \nabla^{*2} u_2^* - Ta^{1/2} u_1^* \\
 \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial u_3^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot (\nabla^* u_3^*) \right) &= -\frac{\partial P^*}{\partial x_3^*} + \nabla^{*2} u_3^* + Ra \cos \delta(T^* - T_\infty^*) \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + u_3^* \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} = \nabla^{*2} T^* \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} = 0 \quad (5.6)$$

Donde Ta , Ra , Pr son los números de Taylor, Rayleigh, y Prandtl respectivamente.

Se obtuvieron aproximaciones para las ecuaciones (5.4), (5.5) y (5.6) con las condiciones de frontera:

$$u_i^* = 0 \quad \text{en} \quad x_3^* = 0, 1 \quad (5.7)$$

$$T^* = 1 \quad \text{en} \quad x_3^* = 0 \quad (5.8)$$

$$T^* = 0 \quad \text{en} \quad x_3^* = 1 \quad (5.9)$$

Y condiciones periódicas en las paredes laterales. El estado base para $Ta = 0$ fue utilizado como condiciones iniciales agregando una perturbación a cada variable.

$$T^* = \bar{T}^*(1 + \sigma r) \quad (5.10)$$

$$u_i^* = \bar{u}_i^*(1 + \sigma r) \quad (5.11)$$

donde σ es la amplitud de la perturbación y es igual a 0.001, mientras que r es un número aleatorio entre -1 y 1 .

Las simulaciones numéricas fueron realizadas en un clúster utilizando de 10 a 20 procesadores para cada caso.

5.2 Métodos de elementos espectrales *hp*

Los métodos de elementos espectrales *hp* utilizan dos diferentes tipos de expansiones. En el tipo de método *h* utiliza expansiones de elementos finitos,

en donde h representa el tamaño característico del elemento y la convergencia del método se logra disminuyendo el tamaño del elemento. Por otro lado, el tipo p utiliza expansiones de polinomios de alto orden en cada elemento y la convergencia se logra incrementando el orden del polinomio. Si en la solución del dominio se utiliza un solo elemento entonces el método se convierte en un método puramente espectral. Los métodos espectrales han sido muy populares en estudios de flujo turbulento, sin embargo, su uso ha sido limitado en geometrías complejas, mientras que los métodos de elementos finitos se adaptan bien a diferentes geometrías (Karniadakis and Sherwin, 2013). Por lo que el método de elementos espectrales combina las ventajas y desventajas de los métodos espectrales de Galerkin con los métodos de elementos finitos, aplicando el método espectral a cada elemento Van de Vosse and Minev (1996).

El método de elementos espectrales fue propuesto por Patera (1984) y pertenece a los métodos de residuos ponderados.

Método de residuos ponderados

Considerando la siguiente ecuación diferencial en el dominio Ω :

$$u'(x) = f(x, u) \quad (5.12)$$

En el método de residuos ponderados se asume que la solución $u(x)$ de una ecuación diferencial se puede aproximar a una solución del tipo:

$$u'(x) = \phi(x, \hat{u}) \quad (5.13)$$

Donde \hat{u} son coeficientes indeterminados. Con lo anterior, se debe cumplir:

$$\phi'(x, \hat{u}) \approx f(x, \phi(x, \hat{u})) \quad (5.14)$$

Se desea que el residuo $R(x) = \phi'(x, \hat{u}) - f(x, \phi(x, \hat{u}))$ sea lo más pequeño posible, por lo que se impone una restricción, el cual es que el producto punto del residual con respecto a una función de peso sea cero. El producto punto de dos funciones se define como:

$$(g, h) = \int_{\Omega} g(x), h(x) dx \quad (5.15)$$

Por lo que la restricción sobre el residuo es:

$$(w, R) = \int_{\Omega} w(x)R(x)dx = 0 \quad (5.16)$$

Donde $w(x)$ es la función de peso o la función de ponderación.

Cuando se tiene una ecuación diferencial que depende también del tiempo, la solución $u(x, t)$ se puede aproximar como:

$$u^\delta(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{i=1}^{N_c} \hat{u}_i(t) \Phi_i(x) \quad (5.17)$$

Donde $\Phi_i(x)$ es la función de prueba o función de expansión, $\hat{u}_i(t)$ son coeficientes indeterminados y $u_0(x, t)$ es seleccionado para satisfacer las condiciones iniciales y de frontera. El problema se reduce a determinar los coeficientes de la función de expansión

Dependiendo de la función de peso o función de prueba utilizada será el tipo de método que se obtiene. La tabla 5.1 muestra algunos métodos que pertenecen a los métodos de residuos ponderados y las funciones de prueba que utilizan.

Tabla 5.1: Funciones de prueba y su correspondiente método de residuos ponderados (Karniadakis and Sherwin, 2013)

Función de prueba	Método
$\delta(x - x_j)$	Colocación
1 dentro de Ω^j 0 fuera de Ω^j	Volumen finito
$\frac{\partial R}{\partial \hat{u}_j}$	Mínimos cuadrados
x^j	Método de momentos
Φ_j	Galerkin
$\Psi_i \neq \Phi_j$	Petrov-Galerkin

Un caso particular de este tipo de métodos es el método de colocación ortogonal, donde las funciones propuestas son polinomios y los puntos de colocación se calculan automáticamente. En este método se utilizan polinomios

de Legendre, los cuales son un tipo de polinomios de Jacobi, en donde α y β son cero en la ecuación (4.33), los primeros 6 polinomios de Legendre son:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= x \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ L_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ L_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

Los demás polinomios se pueden obtener con la siguiente relación:

$$L_{p+1}(x) = \frac{2p+1}{p+1}xL_p(x) - \frac{p}{p+1}L_{p-1}(x) \quad (5.18)$$

Estos polinomios son ortogonales entre sí en el dominio $[-1,1]$, esto es:

$$\int_{-1}^1 L_m(x)L_n(x)dx = 0 \quad \text{para } n \neq m \quad (5.19)$$

El método espectral es un método de colocación ortogonal, en donde se requiere el cálculo de las integrales de polinomios de cierto orden. El problema de integración formula que se debe de encontrar $w(x)$ tal que $R(x) = 0$ para polinomios de mayor grado posible.

Cuadratura Gauss-Lobatto Legendre

Se utilizó la cuadratura Gauss-Lobatto Legendre, en donde los nodos son las raíces de los polinomios de Legendre los cuales no son equispaciados y tienden a aglomerarse en los extremos. La cuadratura está conformada por:

Puntos de Gauss-Lobatto:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, \\ x_j &= \text{ceros de } L_N, \quad 1 \leq j \leq N-1, \\ x_N &= 1 \end{aligned}$$

Pesos para la integración numérica:

$$w_j = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{[L_N(x_j)]^2} \quad j = 0, \dots, N$$

Mallas computacionales

Como se mencionó anteriormente, el método de elementos espectrales realiza la discretización espacial mediante macroelementos, en donde los nodos de la malla se sitúan en las raíces de un polinomio de Lagrange de orden N para cada dirección de cada macroelemento. La figura 5.1 muestra una malla con 20 macroelementos en las direcciones x_1^* y x_2^* (representadas en la figura como x y z respectivamente) y 2 macroelementos en la dirección x_3^* (representada en la figura como y), y con un orden de polinomio de 8 en cada dirección, obteniendo en total 409,600 nodos. En la figura 5.2 se observa una ampliación de la malla en donde se puede apreciar que la distancia entre nodos no es la misma y que tienden a aglomerarse en los extremos de los macroelementos.

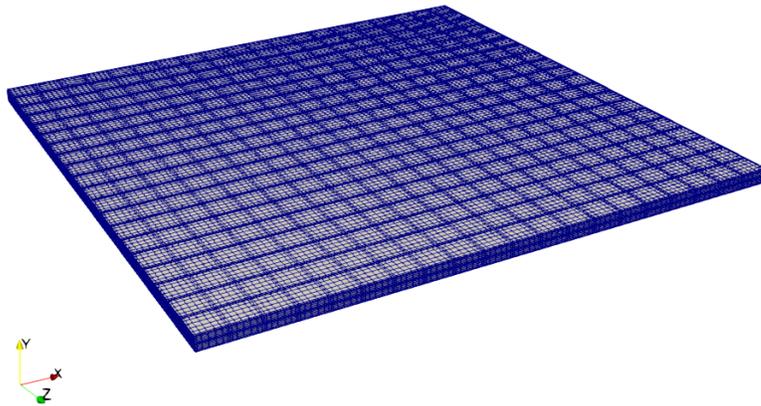


Figura 5.1: Discretización espacial del método de elementos espectrales (malla computacional).

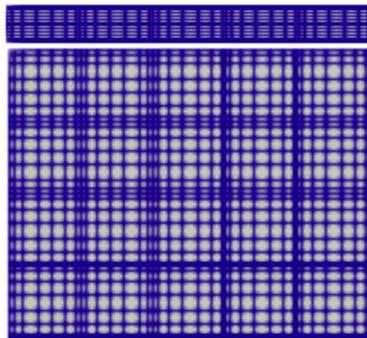


Figura 5.2: Detalle de malla computacional. En la figura se muestran $5 \times 4 \times 2$ macroelementos utilizando un polinomio de orden 8 en cada macroelemento.

5.3 Validación del código

Para la validación del código se reprodujeron los resultados numéricos de Subramanian et al. (2016) y los resultados experimentales de Daniels et al. (2000), quienes utilizaron la técnica de sombras para un fluido con un número de Prandtl de 1.07. Para lo anterior, se utilizó una malla de 800 elementos; 20 en x_1^* , 20 en x_2^* y 2 en x_3^* y se utilizó un polinomio de orden 8. Las dimensiones de la malla son de $(40 \times 40 \times 1)D$ (donde D es la distancia entre las placas). Como se mencionó anteriormente, las condiciones de frontera son de no deslizamiento y temperatura de 1 y 0 en la placa inferior y superior respectivamente, y condiciones periódicas en las paredes laterales. Para las condiciones iniciales se le agregó una perturbación de baja amplitud a los perfiles de temperatura y velocidad del estado base.

La figura 5.3 muestra los resultados de los trabajos mencionados en el párrafo anterior para diferentes ángulos de inclinación y números de Ra supercríticos, y en la tercera columna de imágenes muestra los resultados que obtuvimos con el código numérico. Las imágenes que corresponden a soluciones numéricas son los perfiles de temperatura de un corte medio ortogonal a las placas, mientras que las correspondientes al experimento son imágenes mejoradas digitalmente obtenidas de la técnica de sombras. En la figura se observa que se lograron reproducir adecuadamente los patrones convectivos para los parámetros señalados. El parámetro ϵ indica qué tan encima nos encontramos del número de Ra crítico, por lo que ϵ se define como:

$$\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$$

5.4 Simulaciones cavidad inclinada con rotación

Con el propósito de observar los patrones convectivos y estudiar la transferencia de calor en convección supercrítica mediante el cálculo del número de Nusselt, se realizaron simulaciones numéricas con el método de elementos espectrales para una cavidad con fronteras laterales periódicas en estado transitorio. Además, se obtuvo un mapa de patrones convectivos para un número de Taylor de 100 a diferentes ángulos de inclinación y números de Ra .

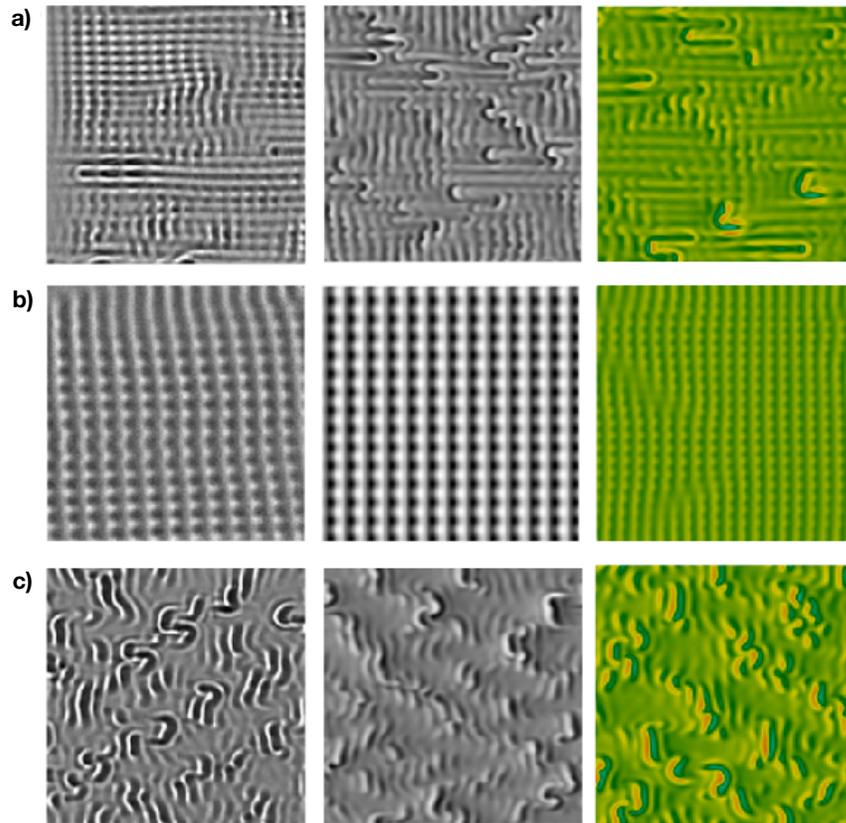


Figura 5.3: Validación del código numérico para la solución de las ecuaciones de N-S para el estudio de patrones convectivos. La primera columna de imágenes corresponde a los experimentos realizados por Daniels et al. (2000), la segunda al trabajo numérico realizado por Subramanian et al. (2016) y la tercera son las realizadas con el código Nek5000. a) $\delta = 79^\circ$, $\epsilon = 0.1$ b) $\delta = 80^\circ$, $\epsilon = 0.05$ c) $\delta = 100^\circ$, $\epsilon = 0.19$.

Tabla 5.2: Parámetros utilizados en simulaciones numéricas.

$\delta = 30^\circ, Ra = 4000$	$Ta = 0, 100, 300, 500$
$\delta = 70^\circ, Ra = 6000$	$Ta = 0, 100, 300, 500$
$\delta = 100^\circ, Ra = 13000$	$Ta = 0, 100, 300, 500$

Tabla 5.3: Mallas computacionales utilizadas.

Características	Malla 1	Malla 2
Macroelementos	$20 \times 20 \times 2$	$40 \times 40 \times 1$
Orden del polinomio	8	8
No. de nodos totales	409,600	819,200
Dimensiones	$(40 \times 40 \times 1)D$	$(80 \times 80 \times 1)D$

Transferencia de calor

En esta sección se muestra el efecto que tiene la rotación sobre el número de Nusselt. Para ésto se varió el número de Ta y se seleccionaron valores de número de Ra y del ángulo de inclinación en donde se tuviera convección supercrítica en todo el rango de Ta utilizado (basado en los resultados de estabilidad lineal para Ra_c). Las simulaciones se realizaron para los parámetros mostrados en la tabla 5.2. Además se utilizaron dos mallas computacionales para llevar a cabo las simulaciones, la tabla 5.3 muestra las características de cada una de ellas.

Cálculo del número de Nusselt

El número de Nusselt sirve como un indicador para evaluar la transferencia de calor por convección. El número de Nusselt se define cómo:

$$Nu = \frac{hD}{k_q} \quad (5.20)$$

En la capa límite en las placas se tiene que:

$$\dot{q}_{convectiva} = h\Delta T = \dot{q}_{conductiva} = -k_q \left. \frac{dT}{dx_3} \right|_{placa} \quad (5.21)$$

Por lo que,

$$h = -\frac{k_q}{\Delta T} \frac{dT}{dx_3} \Big|_{placa} \quad (5.22)$$

y

$$Nu = -\frac{D}{\Delta T} \frac{dT}{dx_3} \Big|_{placa} \quad (5.23)$$

Adimensionalizando con las variables adimensionales mostradas en la sección 5.1 se tiene que el número de Nusselt en la placa inferior del sistema de estudio es:

$$Nu = -\frac{dT^*}{dx_3^*} \Big|_{x_3^*=0} \quad (5.24)$$

Nótese que para el flujo base $\frac{dT^*}{dx_3^*} = -1$ (capítulo 3), por lo que el número de Nusselt del flujo base es 1, es decir, se tiene conducción pura.

Para obtener el número de Nusselt promedio en toda la placa se utilizó la siguiente expresión:

$$Nu_{avg} = \frac{1}{A} \int Nu = -\frac{1}{A} \int \frac{dT^*}{dx_3^*} \Big|_{x_3^*=0} \quad (5.25)$$

Se realizó una simulación para convección de Rayleigh-Beñard sin rotación y sin tener inclinación de la cavidad para un número de Ra de 2000. En la figura 5.4 se muestra el resultado.

Se realizaron también simulaciones numéricas en las que se obtuvieron resultados de número de Nusselt promedio para números de Taylor de 0, 100, 300 y 500, y números de Rayleigh de 4000 (para $\delta = 30^\circ$), 6000 (para $\delta = 70^\circ$) y 13000 (para $\delta = 100^\circ$). Con estos ángulos de inclinación se puede estudiar los casos en el que la cavidad es calentada por la parte de abajo y calentada por la parte de arriba, así como el caso en el tanto la fuerza de flotación y el esfuerzo cortante ocasionado por la inclinación tienen una gran influencia en los patrones convectivos, es decir, para $\delta = 70^\circ$.

En la figura 5.5 se puede observar que para $\delta = 30^\circ$ el número de Nusselt disminuye ligeramente al aumentar el número de Taylor. Además, cuando se

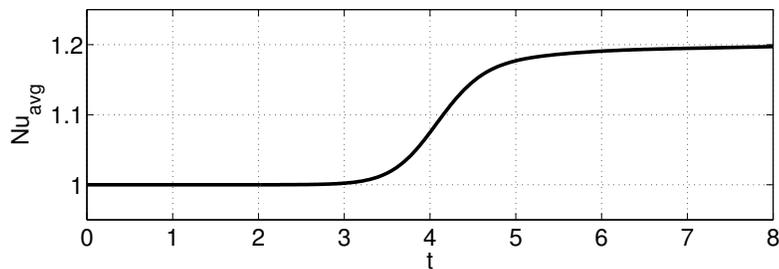


Figura 5.4: Número de Nusselt promedio respecto al tiempo para $\delta = 0^\circ$, $Ta = 0$ y $Ra = 2000$.

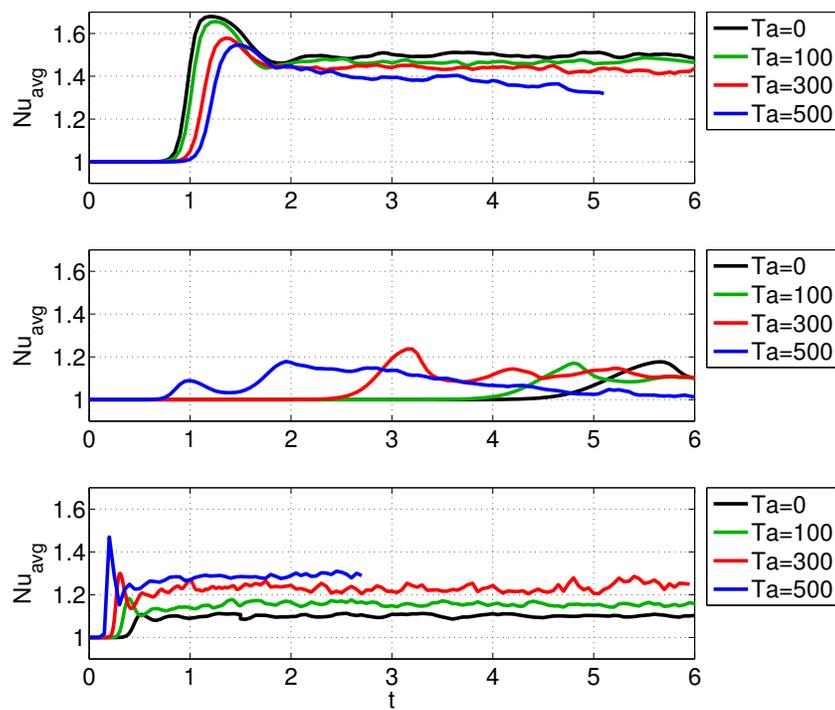


Figura 5.5: Número de Nusselt promedio respecto al tiempo. De arriba a abajo: $\delta = 30^\circ$ y $Ra = 4000$, $\delta = 70^\circ$ y $Ra = 6000$, $\delta = 100^\circ$ y $Ra = 13000$.

tiene rotación, el inicio de la convección se retrasa un poco con respecto al caso en el que no rota. Esto se debe al efecto amortiguador que tiene la rotación con respecto al movimiento. En el caso contrario, cuando se tiene que la cavidad es calentada por la parte superior ($\delta = 100^\circ$), se tiene que al incrementar la rotación el número de Nusselt aumenta y el inicio de la convección se adelanta. Para $\delta = 70^\circ$ no existe una clara dependencia del número de Nusselt con respecto al número de Taylor, esto debido a que existe una fuerte competencia entre las inestabilidades térmicas y las inerciales, sin embargo si se puede observar que el inicio de la convección inicia a un menor tiempo cuando el sistema está sujeto a rotación.

Por otro lado, se observa que el número de Nusselt tiene un valor máximo y al transcurrir el tiempo decrece hasta un valor que se mantiene constante (o a oscilar alrededor de él).

Las figuras 5.6 - 5.17 muestran planos $x_1^* - x_2^*$ en $x_3^* = 0.5$ (plano medio) de perfiles de temperatura para diferentes tiempos, en donde se puede apreciar que la convección inicia de una forma ordenada con rollos oblicuos, en el momento que se empiezan a deformar se presenta el número de Nusselt máximo, después comienza la transición a un estado más caótico y el número de Nusselt comienza a disminuir hasta mantenerse en un valor en el que los patrones convectivos mantienen su forma caótica con respecto al tiempo. Se puede observar que el ángulo de inclinación de los rollos oblicuos con respecto al eje x_1^* coincide con el reportado en el análisis de estabilidad lineal.

Cuando se tiene un ángulo de inclinación de $\delta = 70^\circ$ se pueden presentar patrones en los cuales compiten ambos tipos de inestabilidades, es decir, inestabilidades generadas por el esfuerzo cortante y las generadas por la flotación, al menos en un principio, por ejemplo en $t = 1.85$ para $Ra = 6000$ y $Ta = 300$ se tiene un patrón cuadrículado, así como también en $t = 1.35$ para $Ra = 6000$ y $Ta = 500$. Además, para este ángulo de inclinación la convección inicia a mayor tiempo que en los casos $\delta = 30^\circ$ y $\delta = 100^\circ$. Otro tipo de patrón que podemos encontrar es a $t > 4.8$ de la figura 5.11 para $Ta = 100$ y $Ra = 6000$, el cual es similar al llamado *Transverse bursts* por Subramanian et al. (2016). Cabe mencionar que los casos presentados en las figuras 5.12, 5.13 y 5.17 se utiliza una malla diferente que es cuatro veces más grande que la utilizada en el resto de los casos. Las características de cada malla se describen al principio de esta sección (sec 5.4).

Para una inclinación de las placas de $\delta = 100^\circ$ y sin rotación (figura 5.14) podemos encontrar a $t > 1.5$ un patrón llamado *Chaotic switching rolls* por

Subramanian et al. (2016) y mostrado anteriormente en la validación del código en la figura 5.3c. Se puede observar que al aumentar la rotación a $Ta = 100$ (figura 5.15) se tienen patrones similares pero con una apariencia menos homogénea.

Por otro lado, para un número de Taylor de 500 y un ángulo de inclinación de $\delta = 70^\circ$ la convección pasa por diferentes patrones convectivos, hasta un tiempo donde se amortigua y el plano medio mantiene una temperatura casi constante en todo el plano, en ese momento se observa que en la gráfica del número de Nusselt promedio (figura 5.5), Nu_{avg} regresa al valor de 1, que es el valor que corresponde al estado base, es decir de conducción pura.

Finalmente, cabe mencionar que para $Ta \geq 300$ para $\delta = 70, 100^\circ$ se observan unos patrones con estructuras alargadas, en donde se tienen brotes de alta temperatura.

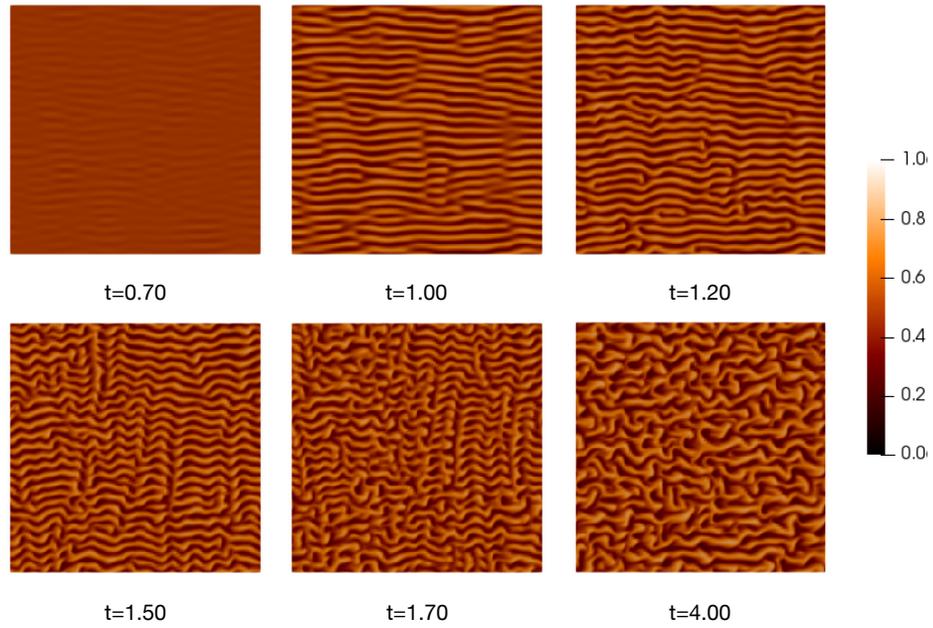


Figura 5.6: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 1 para $\delta = 30^\circ$, $Ra = 4000$ y $Ta = 0$.

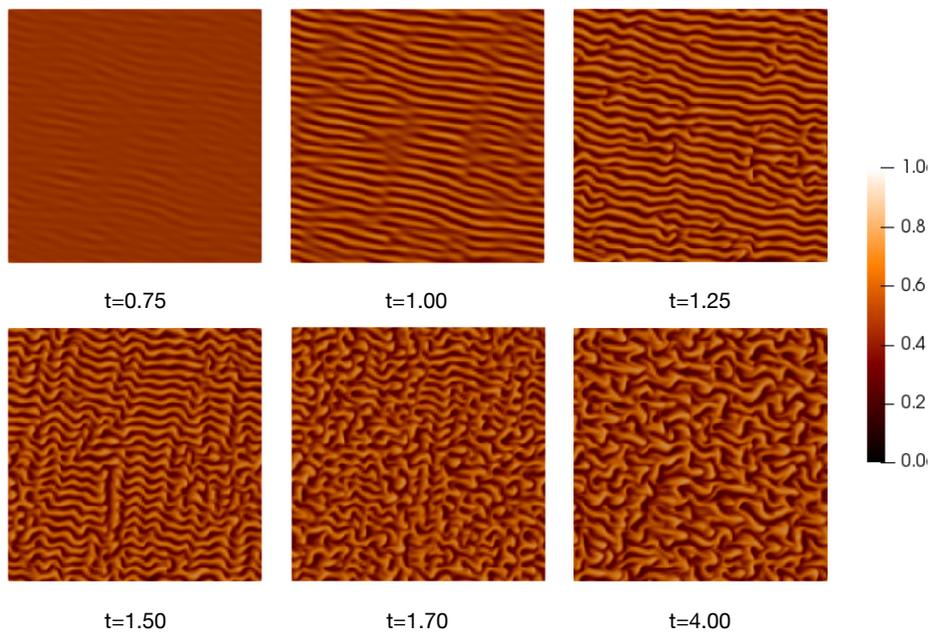


Figura 5.7: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 1 para $\delta = 30^\circ$, $Ra = 4000$ y $Ta = 100$.

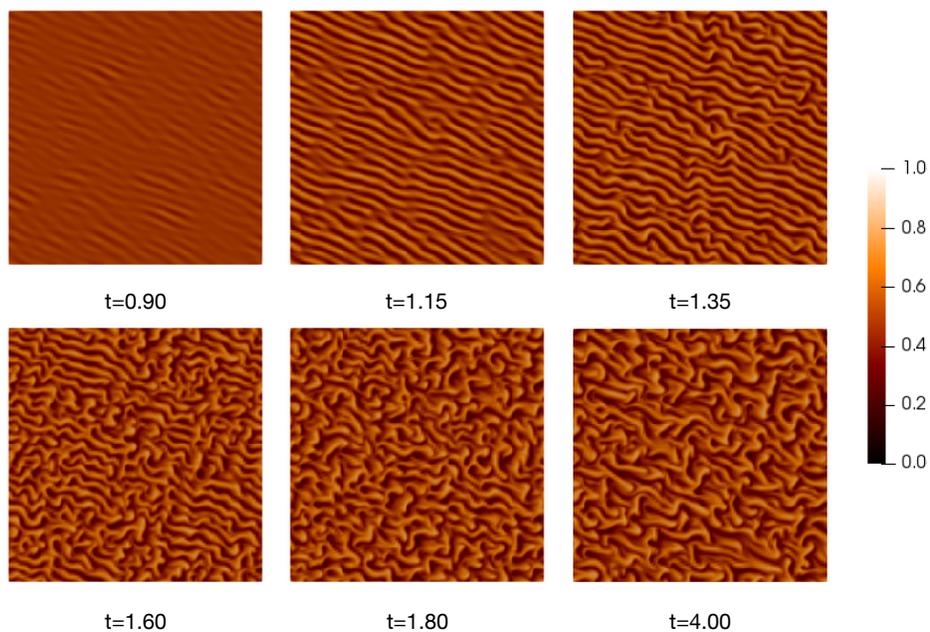


Figura 5.8: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 1 para $\delta = 30^\circ$, $Ra = 4000$ y $Ta = 300$.

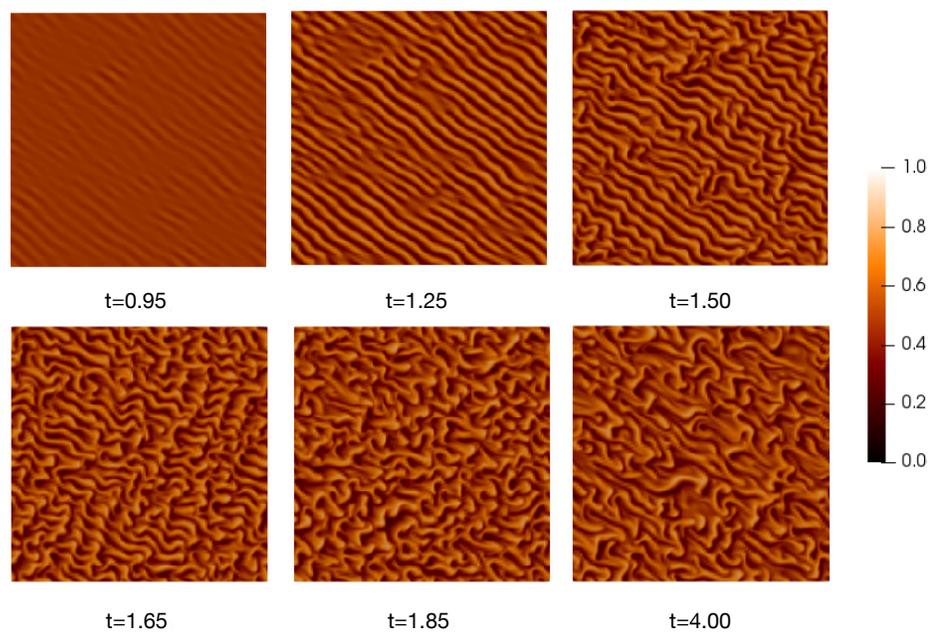


Figura 5.9: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 1 para $\delta = 30^\circ$, $Ra = 4000$ y $Ta = 500$.

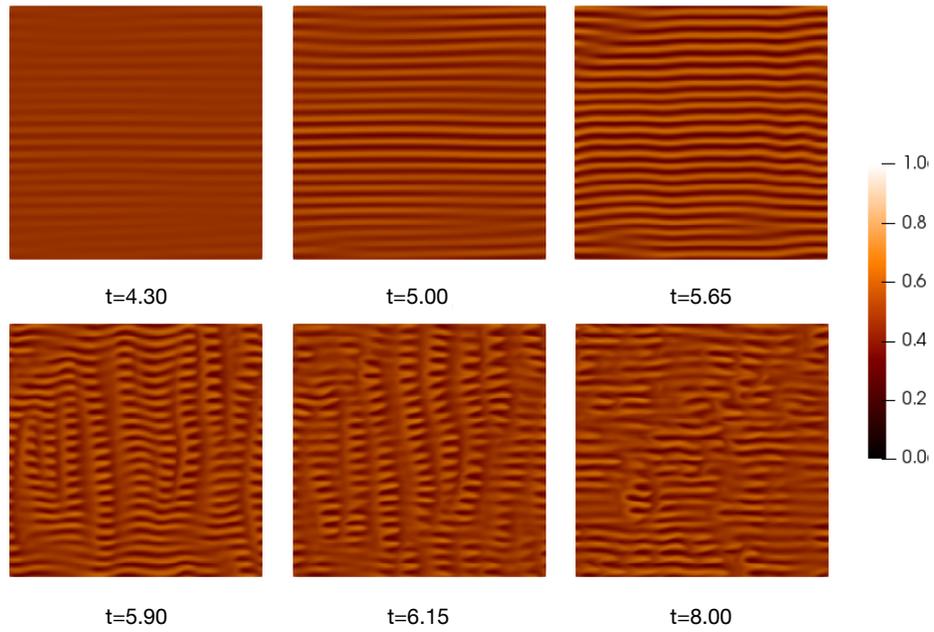


Figura 5.10: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 1 para $\delta = 70^\circ$, $Ra = 6000$ y $Ta = 0$.

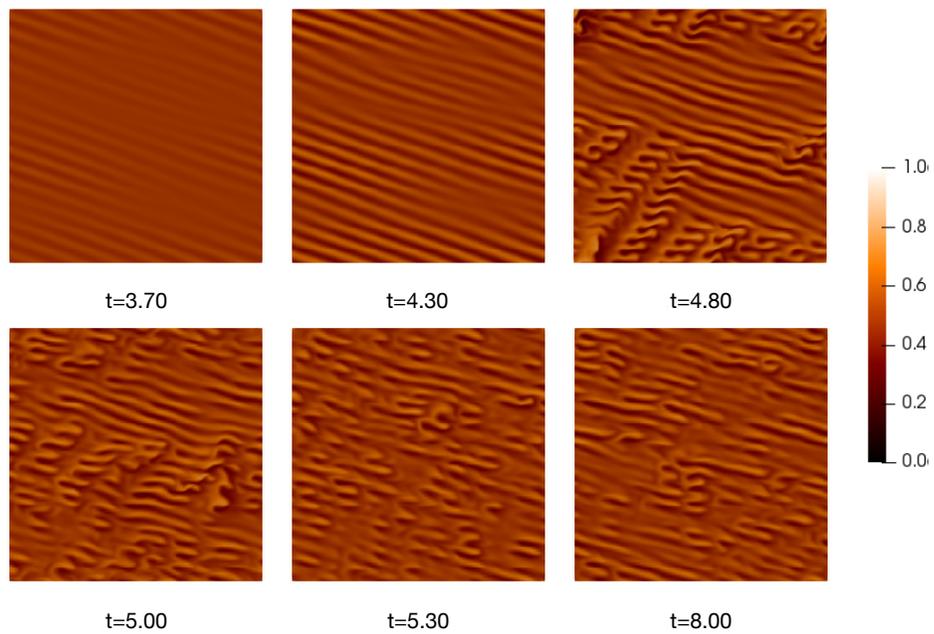


Figura 5.11: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 1 para $\delta = 70^\circ$, $Ra = 6000$ y $Ta = 100$.

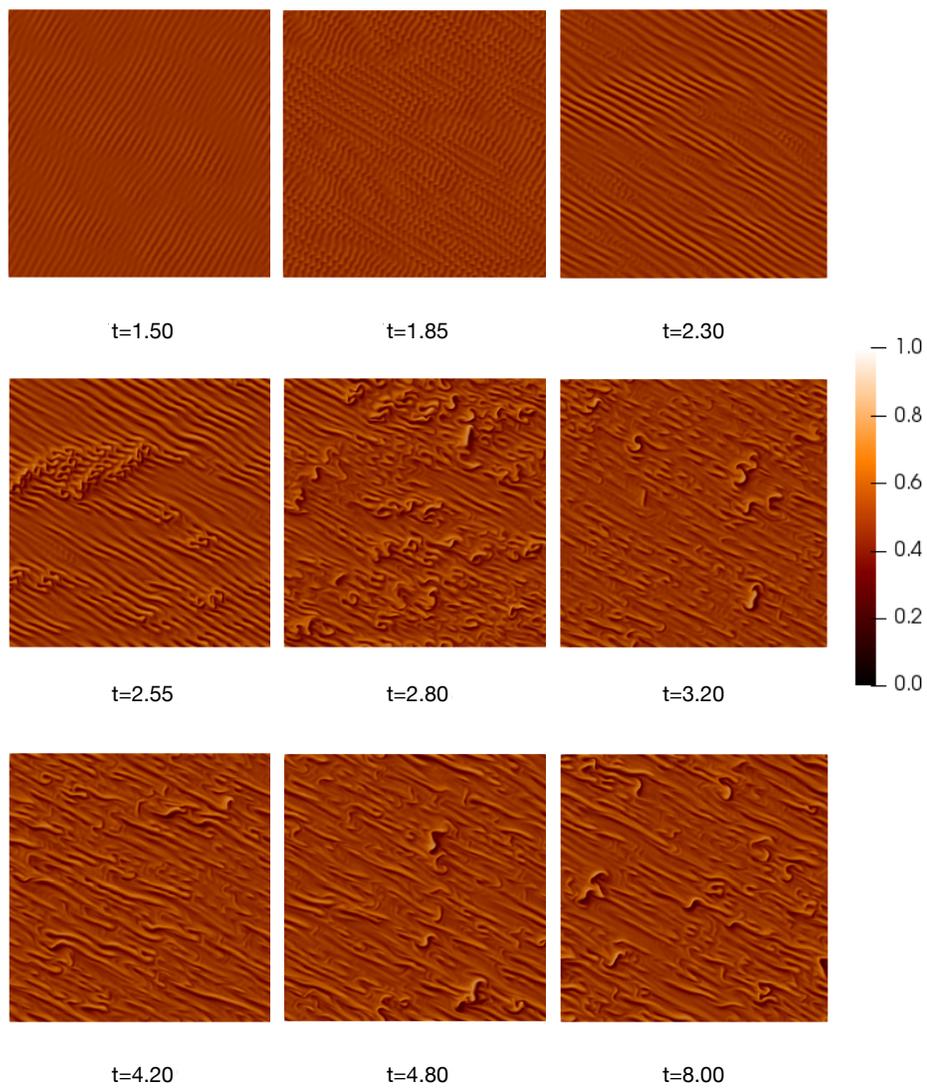


Figura 5.12: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 2 para $\delta = 70^\circ$, $Ra = 6000$ y $Ta = 300$.

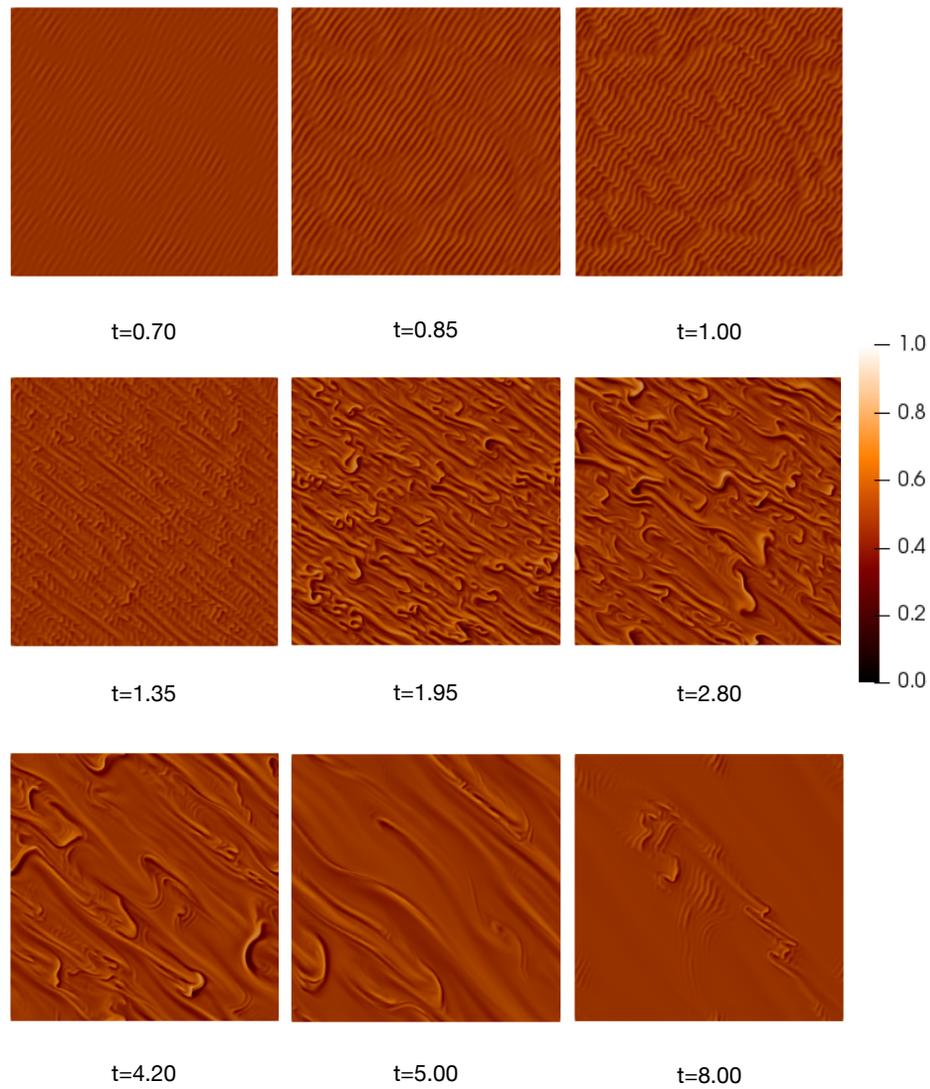


Figura 5.13: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 2 para $\delta = 70^\circ$, $Ra = 6000$ y $Ta = 500$.

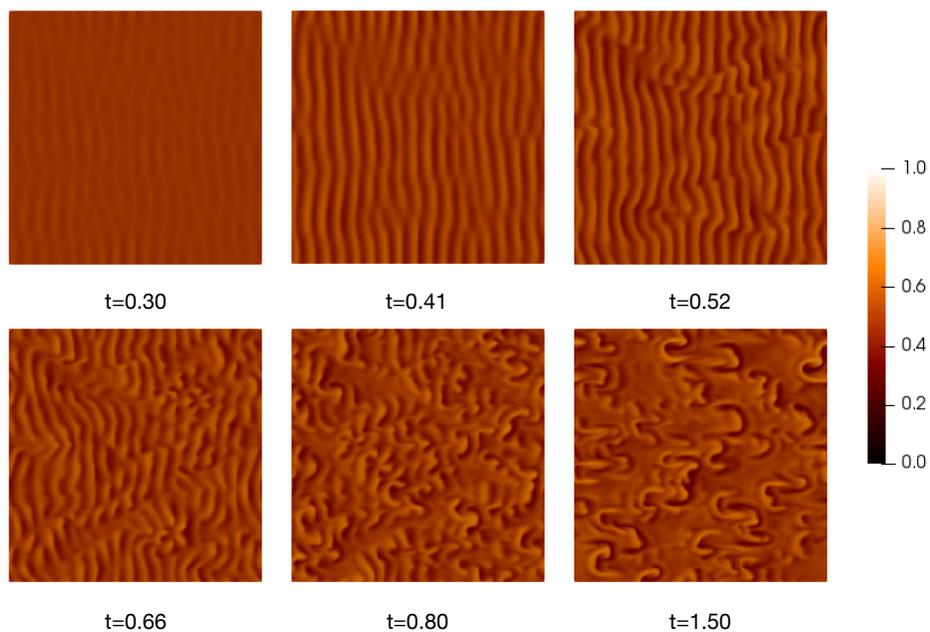


Figura 5.14: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 1 para $\delta = 100^\circ$, $Ra = 13000$ y $Ta = 0$.

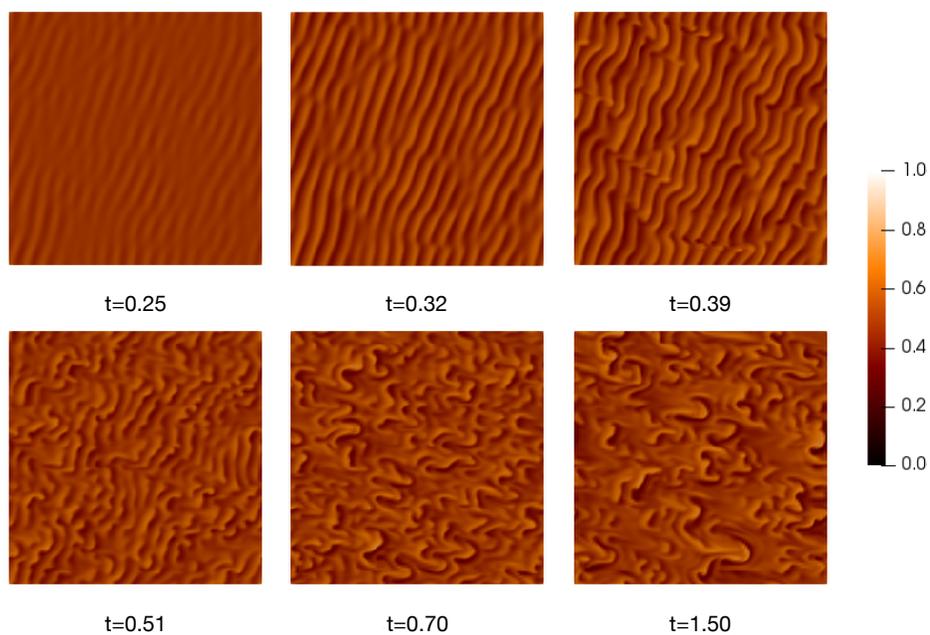


Figura 5.15: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 1 para $\delta = 100^\circ$, $Ra = 13000$ y $Ta = 100$.

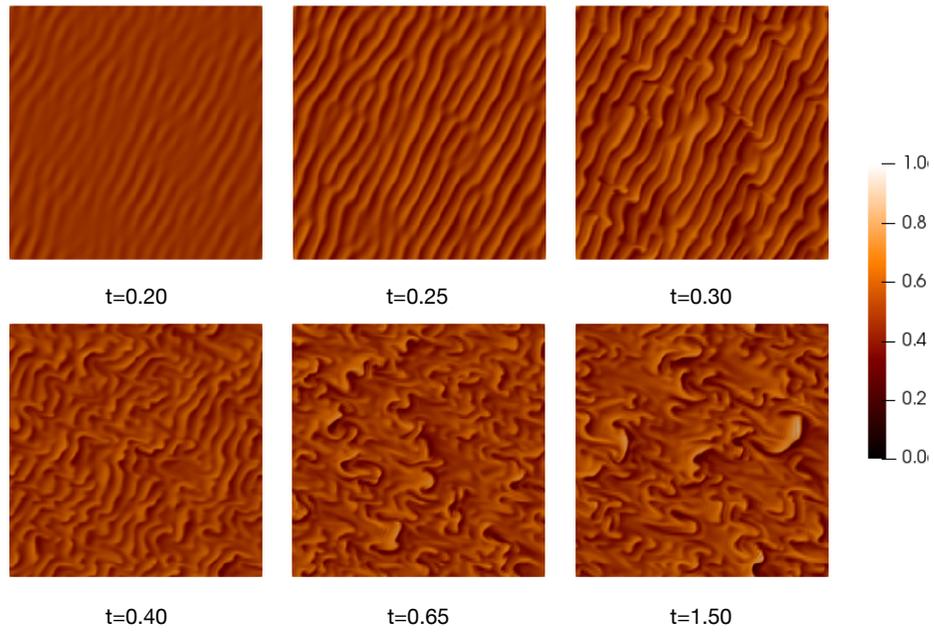


Figura 5.16: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 1 para $\delta = 100^\circ$, $Ra = 13000$ y $Ta = 300$.

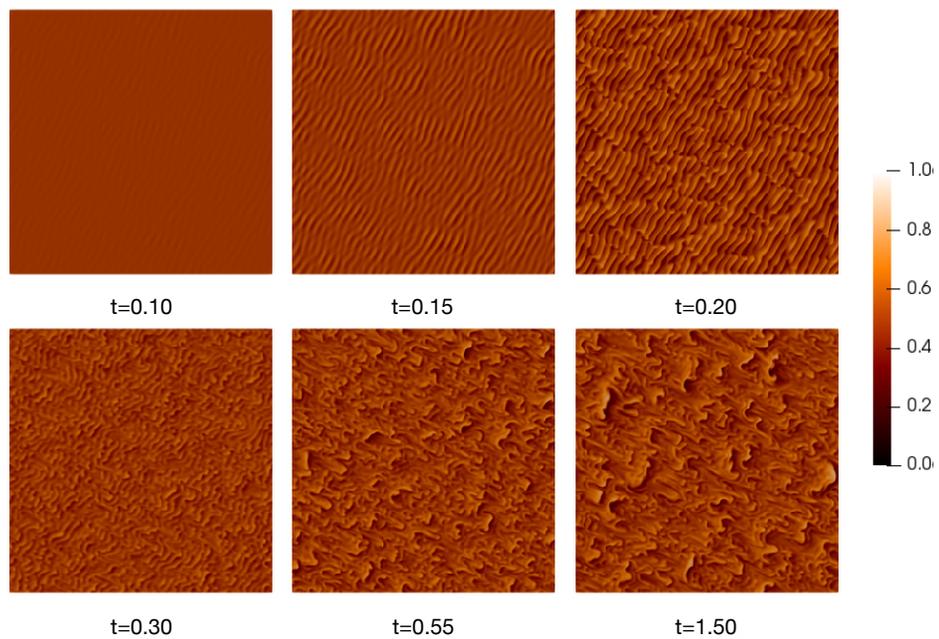


Figura 5.17: Perfiles de temperatura en el plano medio $x_1 - x_2$ en la Malla 2 para $\delta = 100^\circ$, $Ra = 13000$ y $Ta = 500$.

Mapa de patrones convectivos

La figura 5.18 muestra los patrones convectivos supercríticos que se pueden encontrar a diferentes números de Ra y ángulos de inclinación para un número de Taylor de 100.

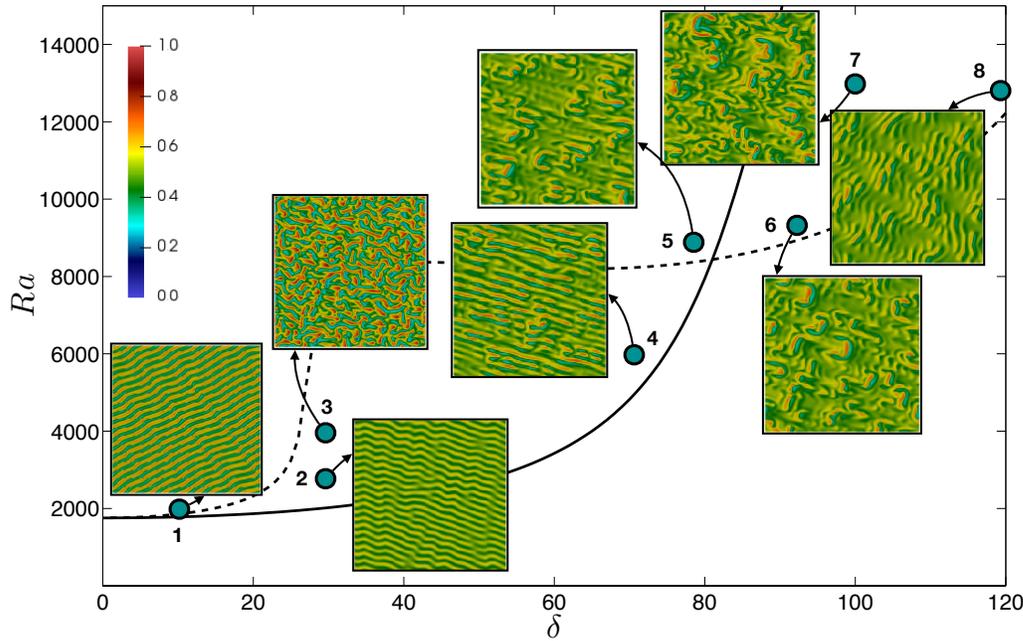


Figura 5.18: Mapa de patrones convectivos para $Ta = 100$. La línea continua muestra el Ra_c obtenido por el análisis de estabilidad lineal para una orientación de rollo de $\phi_c = 20^\circ$. Línea punteada Ra_c para $\phi_c = 111^\circ$. Las imágenes muestran los perfiles de temperatura en un corte medio en el plano $x_1 - x_2$.

De la figura 5.18 se pueden observar principalmente tres características. La primera es que los patrones presentan un estado más caótico al alejarse del inicio de la convección, por ejemplo en el caso 3 y 7 que son los que se encuentran más alejados de las líneas del inicio de la convección. Por otro lado, se observa que los patrones que se encuentran cerca del punto de codimensión (para $Ta = 100$, $\delta_{co} = 81^\circ$) no se presentan como rollos con una dirección predominante, sino que se tienen modos mixtos debido a que tanto el esfuerzo cortante como la fuerza de flotación son predominantes (casos 4, 5 y 6). Finalmente, en todos los patrones se observa una orientación diferente al caso cuando no se tiene rotación en la cavidad, Subramanian et al. (2016) presenta un mapa de patrones convectivos para una cavidad inclinada sin rotación.

Capítulo 6

Conclusiones

El perfil de velocidad del flujo base en una cavidad inclinada es una función cúbica y de una sola componente. Cuando ese perfil es sometido a rotación, la fuerza de Coriolis ocasiona que la velocidad sea desviada y aparezca otra componente de la velocidad del plano ortogonal al eje de rotación. En este caso el perfil tiene la forma de cuatro capas de Ekman, esto debido a que se tiene velocidad cero tanto en el centro como en las placas, por lo que además, se tienen puntos de velocidades máximas a lo largo del eje vertical, los cuales se pegan a las placas al aumentar la rotación. Para números de Taylor menores a 1700 se tiene que la componente de la velocidad que aparece con el efecto de la rotación aumenta al incrementar el número de Taylor, sin embargo, la magnitud de la velocidad del flujo base siempre disminuye al aumentar la rotación.

La rotación también afecta el inicio de la convección, debido a que la rotación modifica la distribución del esfuerzo cortante, se encontró que los rollos oblicuos son la inestabilidad dominante, y por lo tanto la convección inicia como rollos con una inclinación respecto al eje paralelo a la inclinación de las placas. Esta desviación crítica de los rollos oblicuos se incrementa al aumentar la tasa de rotación.

Del análisis de estabilidad lineal también se observó que el número de Rayleigh crítico siempre aumenta al incrementar el ángulo de inclinación de la cavidad para un número de Taylor fijo. Además, el número de Rayleigh crítico se incrementa al aumentar la rotación para casi todos los ángulos de inclinación, con excepción de un rango de inclinación que se encuentra en la región cercana a los puntos de codimensión. Por otro lado, para un número de Taylor diferente de 0, el número de onda crítico siempre disminuye al aumentar la inclinación de las placas.

En convección supercrítica y para un número de Taylor diferente de 0 se tiene que la convección inicia de una forma ordenada como rollos oblicuos, alcanzando un número de Nusselt máximo cuando los rollos comienzan a deformarse para dar paso a otro tipo de patrones convectivos más caóticos, en donde el número de Nusselt decae hasta mantener un valor constante. Cuando se tiene un estado donde predomina la inestabilidad térmica (ángulos de inclinación mucho menores a 90 grados), el número de Nusselt disminuye al incrementar el número de Taylor. En el caso contrario, cuando se tiene un estado de estabilidad térmica (ángulos mayores a 90 grados) el número de Nusselt se incrementa al aumentar la rotación. Sin embargo, para ángulos de inclinación en donde la fuerza de flotación y el esfuerzo cortante compiten fuertemente (región cercana a los puntos de codimensión) no existe una clara dependencia del número de Nusselt con respecto al número de Taylor.

Bibliografía

- Kapil MS Bajaj, Jun Liu, Brian Naberhuis, and Guenter Ahlers. Square patterns in rayleigh-bénard convection with rotation about a vertical axis. *Physical review letters*, 81(4):806, 1998.
- Bill Needoba. Morning cloud streets over sooke, 2015. URL <https://vancouverisland.ctvnews.ca/weather/morning-cloud-streets-over-sooke-1.2235414>. Published Friday, February 13, 2015 12:06PM PST by CTV News.
- Eberhard Bodenschatz, Werner Pesch, and Guenter Ahlers. Recent developments in rayleigh-bénard convection. *Annual review of fluid mechanics*, 32(1):709–778, 2000.
- David Bourne. Hydrodynamic stability, the chebyshev tau method and spurious eigenvalues. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 15(6):571–579, 2003.
- John P Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation, 2001.
- MG Braunsfurth, AC Skeldon, A Juel, T Mullin, and DS Riley. Free convection in liquid gallium. *Journal of Fluid Mechanics*, 342:295–314, 1997.
- FH Busse. Generation of mean flows in a rotating convection layer. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 37(8):752–758, 1982.
- FH Busse and RM Clever. Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate prandtl number. *Journal of Fluid Mechanics*, 91(02):319–335, 1979.
- FH Busse and KE Heikes. Convection in a rotating layer: a simple case of turbulence. *Science*, 208(4440):173–175, 1980.
- Claudio Canuto, M Youssuff Hussaini, Alfio Quarteroni, and Thomas A Zang. *Spectral methods*. Springer, 2006.

- D Ceotto. Thermal diffusivity, viscosity and prandtl number for molten iron and low carbon steel. *High Temperature*, 51(1):131–134, 2013.
- Subrahmanyam Chandrasekhar. The instability of a layer of fluid heated below and subject to coriolis forces. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 217, pages 306–327. The Royal Society, 1953.
- Subrahmanyam Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydrodynamic stability*. OUP, 1961.
- Subrahmanyam Chandrasekhar. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. 1970.
- Yen-Ming Chen and Arne J Pearlstein. Stability of free-convection flows of variable-viscosity fluids in vertical and inclined slots. *Journal of Fluid Mechanics*, 198:513–541, 1989.
- JS Cheng, S Stellmach, A Ribeiro, A Grannan, EM King, and JM Aurnou. Laboratory-numerical models of rapidly rotating convection in planetary cores. *Geophysical Journal International*, 201(1):1–17, 2015.
- Rihani Chokri and Ben-Beya Brahim. Three-dimensional natural convection of molten lithium in a differentially heated rotating cubic cavity about a vertical ridge. *Powder Technology*, 291:97–109, 2016.
- RM Clever and FH Busse. Instabilities of longitudinal convection rolls in an inclined layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 81(1):107–127, 1977.
- RM Clever and FH Busse. Nonlinear properties of convection rolls in a horizontal layer rotating about a vertical axis. *Journal of Fluid Mechanics*, 94(04):609–627, 1979.
- Stephen M Cox. Rotating convection in a shear flow. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 454, pages 1699–1717. The Royal Society, 1998.
- Karen E Daniels, Brendan B Plapp, and Eberhard Bodenschatz. Pattern formation in inclined layer convection. *Physical review letters*, 84(23):5320, 2000.
- JJ Dongarra, B Straughan, and DW Walker. Chebyshev tau-qz algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems. *Applied Numerical Mathematics*, 22(4):399–434, 1996.

- Hua-Shu Dou, Gang Jiang, and Chengwang Lei. Numerical simulation and stability study of natural convection in an inclined rectangular cavity. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 2013.
- Do Etling and RA Brown. Roll vortices in the planetary boundary layer: A review. *Boundary-Layer Meteorology*, 65(3):215–248, 1993.
- K Fujimura and RE Kelly. Mixed mode convection in an inclined slot. *Journal of Fluid Mechanics*, 246:545–568, 1993.
- GZ Gershuni and EM Zhukhovitskii. Stability of plane-parallel convective motion with respect to spatial perturbations: Pmm vol. 33, no 5, 1969, pp. 855–860. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 33(5):830–835, 1969.
- AE Gill. A theory of thermal oscillations in liquid metals. *J. Fluid Mech*, 64(3):577–588, 1974.
- David Gottlieb and Steven A Orszag. *Numerical analysis of spectral methods: theory and applications*, volume 26. Siam, 1977.
- John E Hart. Stability of the flow in a differentially heated inclined box. *Journal of Fluid Mechanics*, 47(03):547–576, 1971.
- David H Hathaway and Richard CJ Somerville. Three-dimensional simulations of convection in layers with tilted rotation vectors. *Journal of Fluid Mechanics*, 126:75–89, 1983.
- Douglas Henderson, Haroon Junaidi, Tariq Muneer, Tom Grassie, and John Currie. Experimental and cfd investigation of an icsswh at various inclinations. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 11(6):1087–1116, 2007.
- Yuchou Hu, Robert E Ecke, and Guenter Ahlers. Convection under rotation for prandtl numbers near 1: Linear stability, wave-number selection, and pattern dynamics. *Physical Review E*, 55(6):6928, 1997.
- DTJ Hurle, E Jakeman, and CP Johnson. Convective temperature oscillations in molten gallium. *Journal of Fluid Mechanics*, 64(03):565–576, 1974.
- Jeff Schmaltz, NASA. Cloud streets trace cold coastal winds, 2016. URL <https://earthobservatory.nasa.gov/images/87524/cloud-streets-trace-cold-coastal-winds>. LANCE/EOSDIS Rapid Response. Caption by Mike Carlowicz and Adam Voiland.

- George Karniadakis and Spencer Sherwin. *Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics*. Oxford University Press, 2013.
- YT Ker and TF Lin. A combined numerical and experimental study of air convection in a differentially heated rotating cubic cavity. *International journal of heat and mass transfer*, 39(15):3193–3210, 1996.
- Lyes Khezzar, Dennis Siginer, and Igor Vinogradov. Natural convection in inclined two dimensional rectangular cavities. *Heat and Mass Transfer*, 48(2):227–239, 2012.
- EM King, S Stellmach, and JM Aurnou. Heat transfer by rapidly rotating rayleigh–bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 691:568–582, 2012.
- KR Kirchartz and H Oertel Jr. Three-dimensional thermal cellular convection in rectangular boxes. *Journal of Fluid Mechanics*, 192:249–286, 1988.
- Marcello Lappa. Thermal convection and related instabilities in models of crystal growth from the melt on earth and in microgravity: Past history and current status. *Crystal Research and Technology*, 40(6):531–549, 2005.
- Marcello Lappa. *Thermal convection: patterns, evolution and stability*. John Wiley & Sons, 2009.
- Marcello Lappa. *Rotating thermal flows in natural and industrial processes*. John Wiley & Sons, 2012.
- David Lin and Wei-Mon Yan. Experimental study of unsteady thermal convection in heated rotating inclined cylinders. *International journal of heat and mass transfer*, 43(18):3359–3370, 2000.
- JR Lloyd and EM Sparrow. On the instability of natural convection flow on inclined plates. *Journal of Fluid Mechanics*, 42(03):465–470, 1970.
- Paul Matthews and Stephen Cox. Linear stability of rotating convection in an imposed shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 350:271–293, 1997.
- A Medelfef, D Henry, A Bouabdallah, S Kaddeche, and R Boussaa. Effect of rotation on the stability of side-heated buoyant convection between infinite horizontal walls. *Physical Review Fluids*, 2(9):093902, 2017.
- Steven A Orszag. Accurate solution of the orr–sommerfeld stability equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 50(04):689–703, 1971.

- Anthony T Patera. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of computational Physics*, 54(3):468–488, 1984.
- James W. Lottes Paul F. Fischer and Stefan G. Kerkemeier. nek5000 Web page, 2008. <http://nek5000.mcs.anl.gov>.
- DE Pivovarov. Three-dimensional convective interactions in an inclined longitudinal air layer. *Fluid Dynamics*, 48(3):321–329, 2013.
- Y Ponty, Andrew D Gilbert, and Andrew M Soward. The onset of thermal convection in ekman–couette shear flow with oblique rotation. *Journal of Fluid Mechanics*, 487:91–123, 2003.
- H Saleh and Ishak Hashim. Numerical analysis of nanofluids in differentially heated enclosure undergoing orthogonal rotation. *Advances in Mathematical Physics*, 2014, 2014.
- Hermann Schlichting and Klaus Gersten. *Boundary-layer theory*. Springer, 2016.
- GA Sedelnikov, FH Busse, and DV Lyubimov. Convection in a rotating cubical cavity. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 31:149–157, 2012.
- EM Sparrow and RB Husar. Longitudinal vortices in natural convection flow on inclined plates. *Journal of Fluid Mechanics*, 37(02):251–255, 1969.
- Richard JAM Stevens, Herman JH Clercx, and Detlef Lohse. Heat transport and flow structure in rotating rayleigh–bénard convection. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 40:41–49, 2013.
- Priya Subramanian, Oliver Brausch, Karen E Daniels, Eberhard Bodenschatz, Tobias M Schneider, and Werner Pesch. Spatio-temporal patterns in inclined layer convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 794:719–745, 2016.
- FN Van de Vosse and PD Mineev. Spectral elements methods: Theory and applications. *EUT Report*, 1996.
- Rakesh K Yadav, Thomas Gastine, Ulrich R Christensen, LDV Duarte, and Ansgar Reiners. Effect of shear and magnetic field on the heat-transfer efficiency of convection in rotating spherical shells. *Geophysical Journal International*, 204(2):1120–1133, 2015.