



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL**

**OBSERVADORES POR MODOS DESLIZANTES BASADOS EN DISIPATIVIDAD**  
**PARA SISTEMAS NO LINEALES DE ORDEN 2**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**OSCAR TESIS LOAIZA**

**TUTOR PRINCIPAL**  
**DR. LEONID FRIDMAN, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM**

**CIUDAD DE MÉXICO, JULIO 2019**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio  
Secretario: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto  
1er. Vocal: Dr. Fridman Leonid  
2o. Vocal: Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel  
3er. Vocal: Dr. Dávila Montoya Jorge Ángel

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:  
DR. LEONID FRIDMAN

---

FIRMA

# Índice general

---

<b>Lista de acrónimos</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema	4
1.1.1. Primera clase de sistemas no lineales	5
1.1.2. Segunda clase de sistemas no lineales	5
1.2. Objetivo general	5
1.3. Contribuciones	6
1.4. Estructura de la tesis	6
<b>2. Marco teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Disipatividad	7
2.1.1. Definiciones	8
2.1.2. Una clase especial de disipatividad	9
2.1.3. Problema de Lurie y criterio del círculo	10
2.2. Homogeneidad	12
2.2.1. Homogeneidad ponderada	12
2.2.2. Función de Lyapunov homogénea	13
2.3. Generalización homogénea del problema de Lurie	14
2.4. Derivador de primer orden	15
2.4.1. Función de Lyapunov homogénea para el derivador de Levant	16
<b>3. Observadores por modos deslizantes basados en disipatividad y homogeneidad para sistemas no lineales de segundo orden</b>	<b>17</b>
3.1. Introducción	17
3.2. Ejemplo motivacional	17
3.3. Planteamiento del problema	19
3.4. Estructura del observador	20
3.5. Resultado principal	20
3.6. Ejemplo	22
3.7. Discusión	23
<b>4. Observadores por modos deslizantes basados en disipatividad y dominación homogénea para sistemas no lineales de segundo orden</b>	<b>25</b>
4.1. Introducción	25
4.2. Ejemplo motivacional	25

4.3. Planteamiento del problema . . . . .	28
4.4. Estructura del observador . . . . .	29
4.5. Resultado principal . . . . .	29
4.6. Ejemplo . . . . .	31
4.7. Conclusiones . . . . .	32
<b>5. Conclusiones</b>	<b>33</b>

# Lista de acrónimos

---

BIBS	Bounded-Input-Bounded-State ( <i>Entrada-Estado Acotado</i> )
HOSM	Higher-Order Sliding Modes ( <i>Modos Deslizantes de Orden Superior</i> )
UIO	Unknown Input Observer ( <i>Observador con Entradas Desconocidas</i> )
SMO	Sliding Mode Observer ( <i>Observador por Modos Deslizantes</i> )
LTI	Linear Invariant Time ( <i>Lineal Invariante en el Tiempo</i> )
MIMO	Multiple-input Multiple-output ( <i>Múltiple entrada múltiple salida</i> )
LF	Lyapunov Function ( <i>Función de Lyapunov</i> )
SM	Sliding mode ( <i>Modos deslizantes</i> )



# Introducción

---

Generalmente en los sistemas de control no todos los estados están disponibles para su medición, por ello, es necesario diseñar observadores o estimadores para poder conocerlos. La tarea básica de un observador es estimar variables no medidas a partir de las mediciones y el conocimiento del modelo, esto es posible solo si hay suficiente información disponible, *i.e.* si el sistema es observable (o detectable).

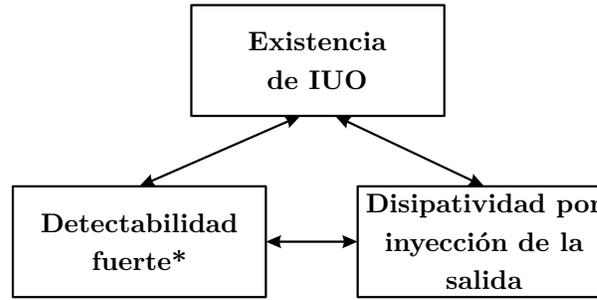
En la actualidad el problema de diseño de observadores para sistemas lineales ha sido ampliamente estudiado y existen diferentes métodos de diseño. Sin embargo, con respecto al diseño de observadores para sistemas no lineales, la tarea se vuelve complicada [6]. El diseño de observadores para sistemas no lineales ha sido estudiado por medio de la teoría de disipatividad, dicha técnica ha demostrado ser eficiente para ciertas clases de sistemas no lineales.

La disipatividad fue desarrollada en los 60's y 70's especialmente por J. C. Willeams [30], [31], para entender las propiedades de estabilidad de los sistemas interconectados. La teoría de disipatividad ha sido motivada por los trabajos sobre el problema de estabilidad absoluta, el criterio de Popov, el trabajo de Yakubovich, el lema Kalman-Yakubovich y la pasividad.

La idea de utilizar conceptos de disipatividad para el diseño de observadores se ha utilizado en [18], [28], [19], [20], [25],[26], los cuales usan la teoría de disipatividad para contrarrestar los efectos de las no linealidades en el diseño de observadores lineales. Además, la clase de sistemas que son disipativos por naturaleza puede ser ampliada para otros sistemas mediante una retroalimentación del estado o de la salida, como ha se a mostrado en [7] y [24].

El diseño de observadores para sistemas lineales y no lineales se complica si el sistema tiene entradas desconocidas. Los observadores con entradas desconocidas son una clase especial de estimadores que son capaces de reconstruir el estado de un sistema, a pesar de las entradas inciertas. El diseño de estos observadores puede ser basándose en un diseño disipativo o en un diseño por modos deslizantes.

En el caso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) con entradas desconocidas, la detectabilidad fuerte\* (detectabilidad fuerte y grado relativo uno) es una condición necesaria y suficiente para asegurar la existencia de un observador [14]. El problema de existencia de un OUI para el sistema LTI con entradas desconocidas arbitrarias, ha sido analizado bajo un enfoque de disipatividad [18], donde la existencia de un observador es equivalente a la posibilidad de hacer que la planta sea disipativa por inyección de salida (ver Figura 1.1).



**Figura 1.1:** Condiciones de existencia para un IUO.

En sistemas no lineales con entradas desconocidas, las condiciones para la existencia de un IUO no están muy bien establecidas, como es el caso de los sistemas LTI. Un análisis similar al caso de los sistemas lineales presentado en [18], resultó en una propiedad disipativa incremental para los sistemas no lineales MIMO con entradas desconocidas, donde existe la posibilidad de hacer a la planta disipativa mediante una inyección de la salida, satisfaciendo la condición de grado relativo uno, la cual es necesaria para la existencia de un observador con entradas desconocidas ([25]). El enfoque disipativo también es aplicable a sistemas con no linealidades discontinuas o multivaluadas como se mostró en [22] y [11].

Una interpretación dinámica de los conceptos de observabilidad fuerte y detectabilidad para sistemas no lineales con perturbaciones inciertas fue hecha en [21], lo que permite tratar el problema de la existencia del observador para sistemas no lineales.

El grado relativo uno es una condición necesaria para la existencia de un observador basado en propiedades disipativas con entradas desconocidas, en sistemas lineales y no lineales. Esto representa una restricción para la clase de sistemas que se pueden tratar, ya que la presencia de entradas desconocidas con un grado relativo mayor que uno se da en muchos sistemas, e.g. sistemas mecánicos y sistemas electromecánicos. Si la entrada desconocida es acotada cuando el grado relativo es mayor a uno, los observadores disipativos pueden proporcionar la convergencia del error de estimación a una región cercana al origen.

Para estimar de manera exacta los estados del sistema, cuando el grado relativo de la entrada desconocida con respecto a la salida es mayor a uno, es necesario derivar. Una opción para el proceso de diferenciación son los modos deslizantes. Sin embargo, un inconveniente de los observadores por modos deslizantes y su proceso de diferenciación, es que la mayoría de ellos, necesita que el vector de estado afectado por la entrada desconocida esté delimitado de manera uniforme, en este caso se requiere la propiedad BIBS. El diseño de observadores por modos deslizantes se puede clasificar en tres principales etapas.

La primera etapa considera sistemas que poseen la propiedad BiBS, como es en el caso del trabajo de Walcott y Zack [29] para sistemas LTI. El primer diferenciador por modos deslizantes que aparece en la literatura, es el basado en el Algoritmo Super-Twisting (STA) ([17]). Este diferenciador por modos deslizantes se define como

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -1.5L^{\frac{1}{2}}|z_1 - f(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(z_1 - f(t)) + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -1.1L\text{sign}(z_1 - f(t)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

el cual garantiza una estimación en tiempo finito, de la derivada del tiempo de  $f(t)$  cuando  $|\ddot{f}(t)| \leq L$ , donde  $z_1$  converge a  $f(t)$  y  $z_2$  converge a  $\dot{f}(t)$  en tiempo finito. El uso del diferenciador de Levant se encuentra ampliamente reportado *i.e.* [9], [10], [5].

La segunda etapa considera la conexión en cascada de un estabilizador con un observador por modos deslizantes, para superar la restricción de la propiedad BIBS. Para los sistemas LTI con entradas desconocidas, en el trabajo de [13] se propone la conexión en cascada de dos observadores (ver Figura 1.2); un observador de Luenberger, el cual lleva al error de estimación a una región cerca de origen, y un diferenciador por modos deslizantes de orden superior (HOSM), el cual permite una estimación teóricamente global y en tiempo finito a los estados del sistema.

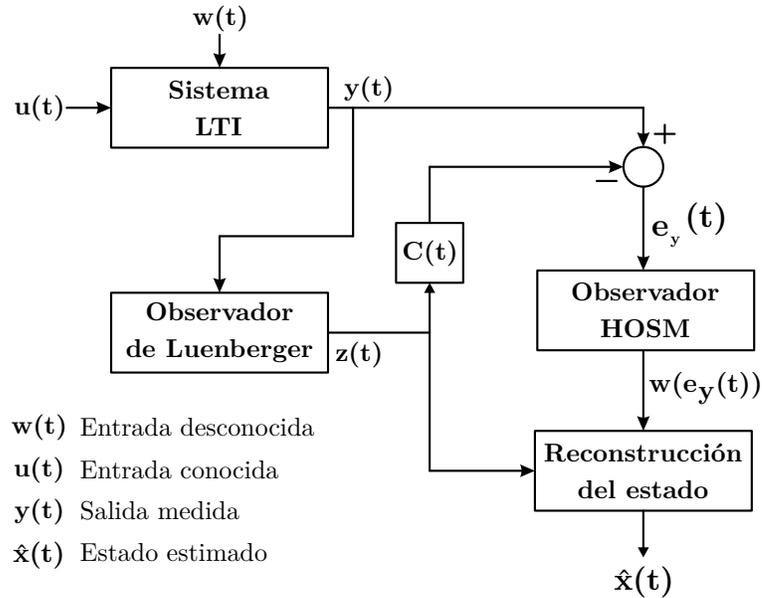


Figura 1.2: Observador en cascada.

Para el caso de sistemas no lineales, en [2] se propone un observador por modos deslizantes de orden superior con estabilizadores disipativos escalados (ver Figura 1.3); en dicho trabajo se muestra y se prueba que la conexión en cascada directa, de un observador disipativo con un diferenciador HOSM proporciona una estimación teóricamente exacta en tiempo finito de los estados reales. Dicha conexión directa presenta algunos inconvenientes debido a que las ganancias del diferenciador HOSM crecen junto con las ganancias disipativas del observador. Es por tal motivo, que en el mismo trabajo se propone un Estabilizador Disipativo a Escala (EDE). Este EDE garantiza que las ganancias del diferenciador HOSM se puedan elegir, de acuerdo con el límite superior de la entrada desconocida. Además, las ganancias del estabilizador disipativo escalado pueden crecer y no afectar las ganancias del diferenciador HOSM. En consecuencia, se puede lograr la convergencia exacta en el tiempo finito global del observador de diferenciador HOSM disipativo escalado en cascada. La principal desventaja de los dos métodos mencionados tanto para sistemas lineales como no lineales es que el orden de los observadores es dos veces el orden del sistema, además del difícil cálculo de las ganancias.

La tercera etapa considera el diseño de un observador del mismo orden del sistema, que combina propiedades disipativas con modos deslizantes, el cual fue propuesto en [3], la idea consiste en construir un observador que establezca el error de observación con ayuda de propiedades disipativas, y que asegure la convergencia del error de estimación de manera exacta y en tiempo finito mediante modos deslizantes. En dicho trabajo, la dinámica del error de observación es localmente homogénea. Por lo tanto, en torno al origen, el observador tiene las mismas propiedades que el diferenciador de Levant [17]. Sin embargo, éste enfoque fue desarrollado para sistemas mecánicos con grado relativo

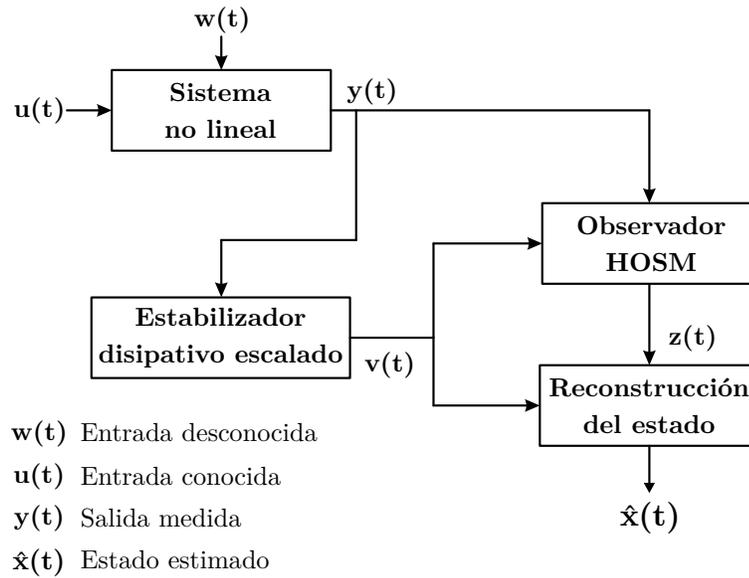


Figura 1.3: HOSM y observadores disipativos bajo un esquema en cascada.

dos, y en la actualidad no existe una metodología para extender este resultado a sistemas con grado relativo mayor a dos. Además, el diseño de las ganancias es complejo.

En resumen, los observadores en cascada y escalados, presentan un difícil diseño de ganancias y los observadores disipativos y los observadores por modos deslizantes requieren condiciones restrictivas para su buen desempeño en presencia de entradas desconocidas: la condición BIBS para los observadores por modos deslizantes y grado relativo uno para los observadores disipativos (ver Tabla 1.1).

Tabla 1.1: Características de los observadores por modos deslizantes y los basados en disipatividad.

Observador	Entrada desconocida	Grado relativo	Propiedad BIBS	Estimación	Tipo de observador
Disipativo	Arbitraria	uno	no requiere	asintótica	global
SM	acotada	mayor que uno	requiere	en tiempo finito	local

## 1.1. Planteamiento del problema

Se aborda el problema del diseño de observadores con entradas desconocidas para sistemas no lineales que no poseen la propiedad BIBS. En este sentido, se consideran las siguientes clases de sistemas no lineales.

### 1.1.1. Primera clase de sistemas no lineales

Considere el sistema de segundo orden no lineal con entradas desconocidas

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \psi(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= u - w(t), \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  son los estados,  $y$  la salida medida,  $u$  la entrada conocida,  $w(t)$  la entrada desconocida y  $\psi$  es una no linealidad del sistema. Note que la clase de sistemas considera sistemas inestables.

Para (1.2) considere el siguiente observador de estados,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \psi(y, x_2 + (\hat{x}_2 - x_2) + k_3\phi_3) - k_1\phi_1, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -k_2\phi_2 + u,\end{aligned}\tag{1.3}$$

donde  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  son lo estados estimados del sistema,  $k_1, k_2, k_3$  son ganancias de diseño y  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  representa términos de corrección.

El objetivo es diseñar a los términos de corrección, de tal manera que los estados de (1.3) converjan de forma global, exacta y en tiempo finito a los estados del sistema (1.2).

### 1.1.2. Segunda clase de sistemas no lineales

Considere el sistema de segundo orden no lineal con entradas desconocidas

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \varphi(x_1, x_2) + u - w(t), \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{1.4}$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  son los estados,  $y$  la salida medida,  $u$  la entrada conocida,  $w(t)$  la entrada desconocida y  $\varphi$  es una no linealidad del sistema.

Para (1.4) considere el siguiente observador de estados,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - k_1\phi_1(\hat{x}_1 - x_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \varphi(x_1, (\hat{x}_2 - k_3\phi_3(\hat{x}_1 - x_1))) - k_2\phi_2(\hat{x}_1 - x_1) + u,\end{aligned}\tag{1.5}$$

donde  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$  son lo estados estimados del sistema,  $k_1, k_2, k_3$  son ganancias de diseño y  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  representa términos de corrección.

El objetivo es diseñar a los términos de corrección de tal manera que los estados de (1.5), converjan de forma global, exacta y en tiempo finito a los estados del sistema (1.4).

## 1.2. Objetivo general

El objetivo es diseñar un observador que combine las propiedades de los observadores basados en disipatividad y las propiedades de los observadores por modos deslizantes, para sistemas no lineales de orden dos, que no posean la propiedad BIBS y cuyo grado relativo de la salida con respecto a la entrada desconocida sea dos (Ver Tabla 1.2).

**Tabla 1.2:** Características deseadas del observador con entradas desconocidas.

Observador	Entrada desconocida	Grado relativo	Propiedad BIBS	Estimación	Tipo de observador
toprule Disipativo	Arbitraria	uno	no requiere	asintotica	global
Modos deslizantes	Acotada	más grande que uno	requiere	en tiempo finito	local
Propuesto	Acotada	más grande que uno	no requiere	en tiempo finito	global

### 1.3. Contribuciones

En el presente trabajo se consideran dos clases de sistemas no lineales, con entradas desconocidas las cuales no necesariamente se desvanecen. Los observadores propuestos son globales y conservan las propiedades que brindan los modos deslizantes. Este trabajo considera además, sistemas no lineales con grado relativo igual a dos, donde por medio de propiedades disipativas se contrarrestan los efectos de las no linealidades del sistema, tal como se usa en el observador disipativo para sistemas no lineales con grado relativo igual a uno [26].

En este trabajo se presentan dos estructuras de observadores:

- La primera mantiene las propiedades y características del diferenciador de Levant a pesar de existir una no linealidad en el primer canal, con la condición de que los términos en el segundo canal deben estar acotados por una constante. El diseño de la estructura del observador permite que la prueba de estabilidad de la dinámica del error sea homogénea.
- La segunda amplía la clase de sistemas a los que se les puede diseñar un observador global con entradas desconocidas, ya que en el segundo canal pueden existir no linealidades, las cuales no necesariamente necesitan ser acotadas por una constante.

### 1.4. Estructura de la tesis

La organización del documento es la siguiente: En el Capítulo 2 se presentan las definiciones y conceptos básicos que serán utilizados durante el trabajo, así como las dos metodologías en las que se basa el diseño de los observadores propuestos. El Capítulo 3 muestra la primera clase de sistemas que se consideran, un ejemplo motivacional y el observador propuesto, así como un conjunto de ganancias, las cuales aseguran la convergencia del observador a los estados del sistema. El Capítulo 4 propone un observador para la segunda clase de sistemas y el conjunto de ganancias que aseguran la convergencia global a los estados verdaderos del sistema. Finalmente, el Capítulo 5 presenta algunas conclusiones y ciertas direcciones de trabajo a futuro.

---

## Capítulo 2

# Marco teórico

---

En este capítulo se establecerán algunas definiciones y conceptos que serán de gran utilidad en capítulos posteriores. Se describen algunas herramientas matemáticas que ayudaran a analizar y comprender mejor el problema en estudio.

A lo largo de este capítulo, se usaran las siguientes notaciones. Para una variable real  $z \in \mathbb{R}$  y un número real  $p \in \mathbb{R}$ , el símbolo

$$[z]^p = |z|^p \text{sign}(z),$$

es la potencia  $p$  signada de  $z$ . De acuerdo a esto,

$$\begin{aligned} [z]^0 &= \text{sign}(z), \\ \frac{d}{dz} [z]^p &= p|z|^{p-1}, \\ \frac{d}{dz} |z|^p &= p[z]^{p-1}, \end{aligned}$$

casi en todas partes para  $z$ . Note que

$$[z]^2 = |z|^2 \text{sign}(z) \neq z^2,$$

y si  $p$  es un número impar, entonces

$$[z]^p = z^p,$$

para cualquier número entero  $p$ . Además,

$$\begin{aligned} [z]^p [z]^q &= |z|^{p+q}, \\ [z]^p [z]^0 &= |z|^p, \\ [z]^0 |z|^p &= [z]^p. \end{aligned}$$

### 2.1. Disipatividad

La disipatividad ([30], [31], [15]) es un concepto entrada-salida que tiene una interpretación física (de tipo energético); un sistema disipativo es aquel sistema que almacena o disipa energía, pero no la genera.

En el caso particular en que el número de entradas y salidas de un sistema es igual y la potencia suministrada al sistema corresponde al producto inferior de la entrada y la salida, el concepto de disipatividad se denomina pasividad ([7]).

La pasividad tuvo su inicio en el análisis de interconexiones de sistemas con funciones de transferencia racionales, que se podían realizar con resistencias, inductancias y capacitancias pasivas, es decir, que no generan energía, sólo la almacenan o la disipan. Estas funciones de transferencia tienen la característica de ser positivas reales, es decir, las partes reales de las funciones de transferencia son positivas para toda frecuencia. En los años sesenta el Lema de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) relacionó este concepto de pasividad con el análisis de estabilidad de Lyapunov. A partir de este resultado, la pasividad comenzó a utilizarse como herramienta para estudiar la estabilización de sistemas lineales y posteriormente fue generalizada para sistemas no lineales.

La aportación más importante de este concepto, es la siguiente: la interconexión en retroalimentación de dos sistemas pasivos es pasiva.

La clase de sistemas disipativos puede ser ampliada, pues existe una clase más grande de sistemas que sin ser disipativos de origen, pueden hacerse disipativos por diversos medios, como pueden ser una retroalimentación de estados o de salidas o una inyección de las salidas.

### 2.1.1. Definiciones

En la presente sección se presenta la formalización de los conceptos de disipatividad y pasividad. Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, & x_0 &= x(0), \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial continuo que mapea de un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Esto garantiza que para cada condición inicial de  $x_0$ , existe al menos una solución de (2.1).

**Definición 2.1** [4] *Se dice que el origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio de (2.1) si  $f(0) = 0$ .*

△

**Definición 2.2** [4] *El origen de (2.1) con  $u = 0$  es*

- (I) *estable en el sentido de Lyapunov, si para cada  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$  existe  $\delta \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\forall x_0 \in B_\delta$ , las soluciones  $x(t, x_0) \in B_\epsilon, \forall t \geq 0$ .*
- (II) *localmente atractivo si existe  $\delta_0$  tal que  $\forall x_0 \in B_{\delta_0}, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = 0$ .*
- (III) *es local y asintóticamente estable (AE), si es estable en el sentido de Lyapunov y localmente atractivo. El origen es global y asintóticamente estable (GAE), si  $B_{\delta_0} = \mathbb{R}^n$ .*
- (IV) *es inestable si no satisface la condición (I).*

△

El concepto generalizado de la disipatividad para sistemas representados en espacio de estados se define con base en funciones de energía y en un balance de las mismas. La potencia suministrada al sistema (2.1) puede calcularse mediante una función que depende de los vectores de entrada y salida.

**Definición 2.3** [7] Sea  $w$  una función real definida en  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  denominada función de suministro de potencia. Se asume que para cualquier  $u(t)$  y para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , la salida  $y(t) = h(x(t), x_0, u)$  de (2.1) es tal que  $w(\tau) = w(u(\tau), y(\tau))$  satisface

$$\int_0^t |w(\tau)| d\tau < \infty, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.2)$$

△

Note que la integral de la potencia suministrada  $w$  representa la energía suministrada al sistema.

**Definición 2.4** [30] El sistema (2.1) es disipativo con respecto a la tasa de suministro  $w$  si existe una función  $V(x)$  llamada Función de Almacenamiento, tal que para todo  $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^+$ ,  $x_0 = x(t_0)$  y  $x_1 = x(t_1) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y, u \in \mathbb{R}$ , se satisface que

$$V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} w(u(t), y(t)) dt. \quad (2.3)$$

△

La condición dada en la ecuación (2.3) es conocida como la desigualdad de disipación y establece que el incremento de energía (función de almacenamiento) durante el intervalo  $(t_0, t_1)$  no es más grande que la energía entregada al sistema (por medio de la tasa de suministro), es decir, puede haber pérdida de energía. Lo anterior puede entenderse como sigue

$$\underbrace{V(x(t_1))}_{\text{Energía almacenada final}} \leq \underbrace{V(x(t_0))}_{\text{Energía almacenada inicial}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} w(u(t), y(t)) dt}_{\text{Energía suministrada}}.$$

Si en (2.3) se establece una igualdad estricta, entonces se dice que el sistema no tiene pérdidas.

### 2.1.2. Una clase especial de disipatividad

Esta forma de disipatividad en realidad proviene de un planteamiento energético del criterio del círculo (vea estabilidad absoluta [16]). Este planteamiento tiene a su vez su raíz en el uso de formas cuadráticas para sistemas lineales.

De la teoría general de disipatividad ([30], [31], [15], [17], [19]) los siguientes resultados son de relevancia.

Considere el siguiente sistema LTI

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^q$  y  $y \in \mathbb{R}^m$  son el vector de estados y los vectores de entrada y de salida, respectivamente. Considere la tasa de suministro cuadrática

$$w(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times q}$ , y  $Q, R$  simétricas.

**Definición 2.5** El sistema (2.4) se dice que es *Estrictamente Disipativo en los Estados (EDE)* con respecto a la tasa de suministro  $w(y, u)$ , o  $(Q, S, R)$  – EDE, si existe una matriz  $P = P^T > 0$ , y  $\epsilon > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \epsilon P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0. \quad (2.6)$$

△

**Definición 2.6** Una no linealidad sin memoria variante en el tiempo  $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$y = \psi(t, u), \quad (2.7)$$

continua a tramos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ , tal que,  $\psi(t, 0) = 0$ , se dice que es *disipativa* con respecto a la tasa de suministro  $w(y, u)$  (2.5), o  $(Q, S, R)$ -Disipativa  $((Q, S, R)$ -D), si para toda  $t \geq 0$  y  $u \in \mathbb{R}^q$

$$w(y, u) = w(\psi(t, u), u) \geq 0. \quad (2.8)$$

△

**Observación 2.1** Note que las condiciones de sector clásico ([16]) para las no linealidades cuadradas, i.e.  $m = q$ , se pueden representar de la forma anterior.

- Si  $\psi$  pertenece al sector  $[k_1, k_2]$ , es decir,  $(y - k_1 u)^T (k_2 u - y) \geq 0$ , entonces es  $(Q, S, R)$ -D, con  $(Q, S, R) = (-I, \frac{1}{2}(k_1 + k_2), -\frac{1}{2}(k_1^T k_2, k_2^T k_1))$ .

△

Una generalización del criterio de círculo sobre estabilidad absoluta para sistemas no cuadrados puede ser fácilmente obtenida, y usada en el lema siguiente.

**Lema 2.1** Considere la interconexión en retroalimentación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx \\ u &= -\psi(t, y). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si el sistema lineal  $(C, A, B)$  es  $(-R_N, S_N^T, -Q_N)$  – SSD, entonces el punto de equilibrio  $x = 0$  de (2.9), es global y exponencialmente estable para toda no linealidad  $(Q_N, S_N, R_N)$  – D.

△

### 2.1.3. Problema de Lurie y criterio del círculo

El problema de Lurie, permite analizar la estabilidad de sistemas con incertidumbres o cambios en sus características, en parte por sus conexiones importantes con la teoría de pasividad y en parte por su rol en el diseño de observadores no lineales.

El concepto fue introducido en 1944 por los ingenieros rusos A. I. Lurie y V. N. Posnikov cuando estudiaban la estabilidad de los aeroplanos; ellos dieron los primeros pasos en la obtención de condiciones suficientes para la estabilidad absoluta.

La posibilidad de aplicar el Segundo Método de Lyapunov al problema de la estabilidad absoluta, fue un procedimiento ideado por Lurie y es considerado como uno de los grandes logros del Método Directo de Lyapunov.

Como se mostró en la sección anterior, existe una relación entre la tasa de suministro de potencia  $w(y, u)$  y las condiciones de sector clásico, a continuación se replantea el Lema 2.1 en función de condiciones de sector [16].

Considere el sistema (2.10)-(2.12):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.10)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.11)$$

$$u = -\psi(t, y) \quad (2.12)$$

como es mostrado en la Figura 2.1, donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, y \in \mathbb{R}^p$ ,  $(A, C)$  es controlable,  $(A, C)$  es observable, y  $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  es una no linealidad sin memoria, posiblemente variable en el tiempo, continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $y$ . Suponga que la conexión en retroalimentación tiene un modelo de estado bien definido, que es el caso cuando

$$u = -\psi(t, Cx + Du) \quad (2.13)$$

produce una única solución en el dominio de interés. La matriz de función de transferencia del sistema lineal

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.14)$$

es cuadrada y propia. Note que las suposiciones de controlabilidad y observabilidad aseguran que  $\{A, B, C, D\}$  es una realización mínima de  $G(s)$ . Si la no linealidad  $\psi$  satisface la Definición 2.7, el origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema (2.10)-(2.11).

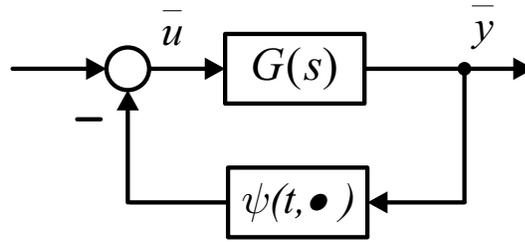


Figura 2.1: Diagrama en bloques del sistema de Lurie.

**Definición 2.7** [16] Una función sin memoria  $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Se dice que pertenece al sector

- $[a, b]$  con  $\alpha = b - a = \alpha^T > 0$  si  $[\Psi(t, y) - ay]^T [\Psi(t, y) - by] \leq 0 \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}^p$ .

△

El problema de interés es estudiar la estabilidad del origen, no para una no linealidad dada, sino para una clase de no linealidades que satisfacen una condición de sector. Si el origen es uniformemente asintóticamente estable para todas las no linealidades en el sector, se dice que el sistema es absolutamente estable. El problema fue formulado originalmente por Lurie y a veces se denomina problema de Lurie. Tradicionalmente, la estabilidad absoluta se ha definido para el caso cuando el

origen es globalmente asintóticamente estable. Para mantener esta tradición, usaremos la frase “estabilidad absoluta” cuando la condición del sector se cumpla globalmente y el origen sea globalmente asintóticamente uniformemente estable.

Para la estabilidad asintótica del origen, utilizando el análisis de Lyapunov, se puede elegir una función candidata de Lyapunov utilizando las herramientas de pasividad de la sección anterior. En particular, si el sistema en lazo cerrado se puede representar como una conexión en retroalimentación de dos sistemas pasivos, entonces la suma de las dos funciones de almacenamiento se puede usar como una función candidata de Lyapunov para el sistema de lazo cerrado. El uso de transformaciones de lazo nos permite cubrir varios sectores y funciones candidatas de Lyapunov, lo que lleva al criterio del círculo, el cual establece el siguiente Teorema.

**Teorema 2.1** [16] *El sistema (2.10)-(2.12) es absolutamente estable si*

- $\Psi \in [a, b]$  y  $[I + bG(s)][I + aG(s)]^{-1}$  es estrictamente positiva real.

△

La prueba del Teorema 2.1, se muestra en [16].

## 2.2. Homogeneidad

La homogeneidad es una propiedad de escalamiento de funciones y campos vectoriales que es consistente con respecto a un operador conocido como dilatación. La homogeneidad clásica surgió de estudiar polinomios. La generalización de la homogeneidad clásica propuesta por V.I. Zubov en los años 50's y por H. Hermes en los años 90's dio como nacimiento la noción de homogeneidad ponderada.

### 2.2.1. Homogeneidad ponderada

El operador dilatación es una transformación lineal definida por

$$\Delta_\varepsilon^r x : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n), \quad \forall \varepsilon > 0,$$

donde el vector  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Las constantes  $r_i \in \mathbb{R}_+$  con  $i = 1, \dots, n$ , son los pesos asociados a las coordenadas  $x_i$  y se pueden agrupar en el vector de pesos  $r = (r_1, \dots, r_n)$ . El mapeo también puede reescribirse como  $\Delta_\varepsilon^r x = \text{diag}(\varepsilon^{r_1}, \dots, \varepsilon^{r_n})x$ , donde  $\Delta_\varepsilon^r$  es la matriz de dilatación y  $x$  es el vector de coordenadas.

**Definición 2.8** [4] *Se dice que:*

- (I) Una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , es  $r$ -homogénea de grado  $m \in \mathbb{R}$  con respecto a  $\Delta_\varepsilon^r x$ , si  $V(\Delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^m V(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ;
- (II) Un campo vectorial  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es  $r$ -homogéneo de grado  $\tau \in \mathbb{R}$  con respecto a  $\Delta_\varepsilon^r x$ , si  $f(\Delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^\tau \Delta_\varepsilon^r f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ;
- (III) Un campo vectorial multivaluado  $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , es  $r$ -homogéneo de grado  $\tau \in \mathbb{R}$  con respecto a  $\Delta_\varepsilon^r x$ , si  $F(\Delta_\varepsilon^r x) = \varepsilon^\tau \Delta_\varepsilon^r F(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ;

△

Las funciones y campos vectoriales homogéneos tienen propiedades útiles, como se muestra en los siguientes resultados.

**Definición 2.9** [4] *Un sistema*

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.15)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada y  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados, se dice que es un sistema homogéneo de grado  $\tau$  con respecto a  $\Delta_\varepsilon^r x$  y  $\varepsilon^s u$  si,

$$f(\Delta_\varepsilon^r x, \varepsilon^s u) = \varepsilon^\tau \Delta_\varepsilon^r f(x, u).$$

△

**Lema 2.2** [1] *Sea  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  dos funciones homogéneas continuas, con pesos  $r = (r_1, \dots, r_n)$  y grados  $m$ , tal que se cumple lo siguiente:*

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \gamma(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta(x) < 0\}. \quad (2.16)$$

Entonces, existe un número real  $\lambda^*$  tal que, para toda  $\lambda \leq \lambda^*$  para toda  $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ , y alguna  $c > 0$ ,  $\eta(x) - \lambda\gamma(x) < -c\|x\|_{r,p}^m$ .

△

El Lema anterior resulta de gran importancia en la prueba de estabilidad en el sentido de Lyapunov, como se mostrara en capítulos posteriores.

### 2.2.2. Función de Lyapunov homogénea

Se sabe que un sistema lineal con punto de equilibrio AE posee una FL estricta, la cual tiene forma cuadrática. En el caso de sistemas homogéneos se admiten FL estrictas y homogéneas que no necesariamente tienen una estructura cuadrática. El siguiente teorema establece la existencia de una FL estricta para un sistema homogéneo.

**Teorema 2.2** [4] *Sea  $f$  un campo vectorial continuo en  $\mathbb{R}^n$  tal que el punto de equilibrio es localmente AE. Asuma que  $f$  es homogénea de grado  $\tau$  con algún vector de pesos  $r$ . Entonces, para cualquier  $p \in \mathbb{N}$  y cualquier  $m > p \cdot \max_i \{r_i\}$ , existe una FL estricta  $V$  para  $\dot{x} = f(x)$ , la cual es homogénea de grado  $m$  y de clase  $C^p$ . Además, la derivada con respecto al tiempo  $\dot{V} = \langle \lambda V(x), f(x) \rangle$  es homogénea de grado  $\tau + m$ .*

△

Una consecuencia importante del teorema anterior es que la velocidad de convergencia de un sistema homogéneo queda caracterizada por el grado de homogeneidad de su campo vectorial. Si el grado de homogeneidad cambia, también las trayectorias cambian su tipo de convergencia.

### 2.3. Generalización homogénea del problema de Lurie

La generalización homogénea del problema de Lurie y el criterio del círculo es presentado en [23], donde se considera el sistema (2.17)-(2.19):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2.17)$$

$$y = h(x), \quad (2.18)$$

$$u = -\Psi(t, y), \quad (2.19)$$

como es mostrado en la Fig. 2.2, donde  $x \in \mathbb{R}^n$  representan los estados,  $u$  la entrada y  $y$  la salida del sistema.

El campo vectorial del lado derecho de (2.17) es considerado continuo en  $x$  y homogéneo de grado  $l \in \mathbb{R}$  con respecto la dilatación  $\Delta_\varepsilon^r$  y  $\varepsilon^s u$ .

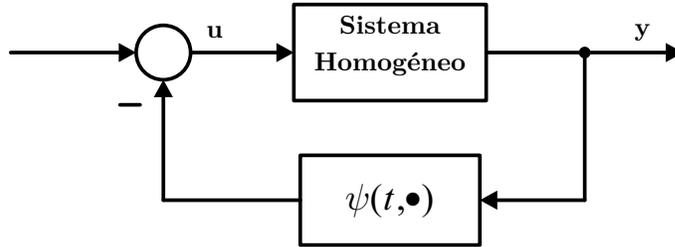


Figura 2.2: Diagrama en bloques del sistema de Lurie.

**Definición 2.10** Sea  $\Psi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que pertenece al sector.

- $[a, b]_\xi$ , si  $\Psi(t, y)$  satisface

$$(\Psi(t, y) - a\xi(h(y)))(\Psi(t, y) - b\xi(y)) \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

donde  $a < b$  con  $a$  y  $b$  constantes, y  $\xi(y)$  es una función homogénea.

△

Las condiciones suficientes para la estabilidad absoluta del sistema (2.17)-(2.19) se presentan en la siguiente proposición.

**Proposición 2.1** [23] El lazo cerrado del sistema (2.17)-(2.19) es absolutamente estable si

- $\Psi(t, y) \in [a, b]_\xi$ , con  $\beta = b - a$ , y existe una función de Lyapunov homogénea  $V(x)$  de grado  $m > \max_{1 \leq i \leq n} r_i$ , con respecto la dilatación  $\Delta_\varepsilon^r$ ;  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\eta$ , tal que  $L^T(x)L(x)$  sea una función definida positiva, y  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\eta$  para algún valor de  $\eta$ , satisfaciendo

$$\nabla V(x)(f(x) - ag(x)\xi(h(x))) = -L^T(x)L(x), \quad (2.21)$$

$$\nabla V(x)g(x) = \beta\xi(h(x))M^T(x)M(x) - 2L^T(x)M(x). \quad (2.22)$$

△

Note que la diferencia entre esta proposición y la condición para la estabilidad absoluta deriva del resultado de disipatividad mostrado en [15], es la introducción de la función homogénea o matriz de funciones  $M(x)$ .

## 2.4. Derivador de primer orden

Los resultados que se muestran a continuación son obtenidos de [8]. Sea  $f(t)$  una función medible-Lebesgue sobre  $[0, \infty)$ . Se asume que  $f(t) = f_0(t) + \nu(t)$ , donde  $f_0(t)$  es una señal base desconocida, cuya primera derivada es acotada, i.e.  $|\dot{f}_0| \leq L$  para una real y conocida constante  $L$ . El término incierto  $\nu(t)$  es una señal ruidosa acotada y uniforme. Definiendo las variables  $\varsigma_1 = f_0(t)$ ,  $\varsigma_2 = \dot{f}_0$ , donde  $\dot{f}_0(t) = \frac{d}{dt}f_0(t)$ ; la representación en estados de la señal base  $f_0$  es

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_1 &= \varsigma_2, \\ \dot{\varsigma}_2 &= \dot{f}_0(t).\end{aligned}$$

Para estimar la derivada en el tiempo de la señal base, se considera la siguiente familia de diferenciadores:

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= -k_1[\hat{x}_1 - f(t)]^{\frac{r_2}{r_1}} + x_2, \\ \hat{x}_2 &= -k_2[x_1 - f(t)]^{\frac{r_3}{r_1}},\end{aligned}\tag{2.23}$$

donde

$$r_i = 1 - (2 - i)d, \quad i = 1, 2, 3,\tag{2.24}$$

donde  $d$  es el grado de homogeneidad. Ya que (2.23) y (2.25) son discontinuos para  $d = -1$ , sus soluciones son estudiadas en el sentido de Filippov [12]. Para  $d = 0$ , se recupera un diferenciador lineal, para  $d = -1$ , se obtiene el diferenciador de Levant [17] y para  $d > -1$ , se obtiene un diferenciador continuo.

Considere el caso sin ruido, i.e.  $\nu(t) = 0$ . Definiendo los errores de diferenciación como  $e_1 \triangleq \hat{x}_1 - f_0(t)$  y  $e_2 \triangleq \hat{x}_2 - \dot{f}_0(t)$ , la dinámica del error está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -k_1[e_1]^{\frac{r_2}{r_1}} + e_2, \\ \dot{e}_2 &= -k_2[e_1]^{\frac{r_3}{r_1}} - \dot{f}_0(t).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Realizando la transformación del estado

$$z_1 = \frac{e_1}{1}, \quad z_2 = \frac{e_2}{k_1},\tag{2.26}$$

la dinámica (2.25) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -\tilde{k}_1([z_1]^{\frac{r_2}{r_1}} - z_2), \\ \dot{z}_2 &= -\tilde{k}_2[z_1]^{\frac{r_3}{r_1}} - \frac{\dot{f}_0(t)}{k_1},\end{aligned}\tag{2.27}$$

donde  $\tilde{k}_1 = k_1$  y  $\tilde{k}_2 = \frac{k_2}{k_1}$ . Dicha transformación de la dinámica del error a variable  $z$  es con el objetivo de facilitar el diseño de las ganancias.

### 2.4.1. Función de Lyapunov homogénea para el diferenciador de Levant

En la presente sección se muestra la función de Lyapunov homogénea para el derivador por modos deslizantes de orden uno propuesta en [8].

Sea el sistema (2.27) con  $d = -1$ , lo cual resulta en el diferenciador de Levant (2.28),

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\tilde{k}_1([z_1]^{\frac{1}{2}} - z_2), \\ \dot{z}_2 &= -\tilde{k}_2[z_1]^0 - \frac{\dot{f}_0(t)}{k_1}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para (2.28) considere la siguiente función:

$$V(z) = \beta_1\left(\frac{2}{3}|z_1|^{\frac{3}{2}} - z_1[z_2]\right) + \frac{1}{3}|z_2|^3 + \beta_2\frac{1}{3}|z_2|^3, \quad \beta_1, \beta_2 > 0; \quad (2.29)$$

donde  $V(z)$  cumple con las condiciones de Función candidata de Lyapunov.

**Teorema 2.3** [27] *Sea la señal  $f(t)$  como se indicó arriba. Considere el diferenciador homogéneo (2.28) y la función  $V$  dada por (2.29). Para cualquier  $\beta_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ , y  $p=3$ , entonces:*

- *Si  $\nu(t) \equiv 0$  y  $|\dot{f}(t)| \leq L$ , entonces para cualquier  $k_2 > L$ , existe una ganancia  $k_1$  adecuada, tal que  $V(z)$  es una Función de Lyapunov estricta para (2.28).*

△

Con el objetivo de probar que  $\dot{V}$  es definida negativa, se requiere el siguiente resultado.

**Lema 2.3** [27] *Sea  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función homogénea semicontinua que para cada punto en el dominio, tiene un único valor en el rango, de grado  $m > 0$  con pesos  $r = [r_1, \dots, r_n]^T$ . Sea  $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$  un mapa homogéneo multivaluado, semicontinuo por arriba de grados  $m$  con pesos  $r$  con valores convexos compactos. Suponga que  $\eta(x) \geq 0$  sobre  $\mathbb{R}^n$  y defina  $U = \{x \in \mathbb{R}^n | \eta(x) = 0\}$ . Si  $\min(\Gamma(x)) > 0$  para cada  $x \in U \setminus \{0\}$ , entonces existen constantes positivas  $\lambda^*$ ,  $c \in \mathbb{R}$  tal que para toda  $\lambda \geq \lambda^*$  y para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\lambda\eta(x) + \min(\Gamma(x)) \geq c\|x\|_{r,p}^m. \quad (2.30)$$

△

Observe que  $\Gamma$  es una función multivaluada, por lo tanto, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma(x)$  es un intervalo real, *i.e.*  $\Gamma(x) \subset \mathbb{R}$ . Así,  $\min(\Gamma(x))$  es el mínimo del conjunto  $\Gamma(x)$  para cada  $x$ .

Este lema establece una propiedad importante la cual es bien conocida para el caso de las funciones homogéneas continuas: dadas dos funciones semicontinuas inferiores  $r$ -homogéneas, una de ellas no negativa, su suma puede hacerse positiva definida por una gran ponderación de la función no negativa, si la otra es positiva cuando la no negativa desaparece.

# Observadores por modos deslizantes basados en disipatividad y homogeneidad para sistemas no lineales de segundo orden

---

## 3.1. Introducción

En la presente sección se propone un observador con entradas desconocidas, el cual está basado en un diferenciador con propiedades disipativas. Los términos de corrección de dicho observador mantiene la homogeneidad del diferenciador de Levant.

El observador propuesto amplía la clase de sistemas a los que se les puede diseñar un observador por modos deslizantes, es decir, permite sistemas los cuales no se encuentran en cadena de integradores.

## 3.2. Ejemplo motivacional

Considere el siguiente sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + (\cos^2(x_1) + 1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= w(t),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  son los estados,  $x_1$  es el estado medible y  $w \in \mathbb{R}$  es una entrada desconocida. Note que el sistema es de grado relativo dos respecto a  $w(t)$ .

Además no es posible diseñar un observador por modos deslizantes para el sistema (3.1), que estime el estado desconocido  $x_2$ , ya que el diferenciador de Levant requiere una estructura en cadena de integradores (véase Sec. 2.4).

### Observador disipativo.

La no linealidad  $\psi(x_1, x_2) = (\cos^2(x_1) + 1)x_2$  es Lipschitz con respecto a  $x_2$  con constante de Lipschitz  $L_\psi = 2$ , y satisface una propiedad disipativa, ya que  $\Psi(x_1, x_2, v_1) := \psi(x_1, x_2 + v_1) - \psi(x_1, x_2)$  es disipativa con respecto a la tasa de suministro

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ v_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & L_\psi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ v_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall v_1 \in \mathbb{R},$$

Aplicando el observador disipativo propuesto en [26], se obtiene:

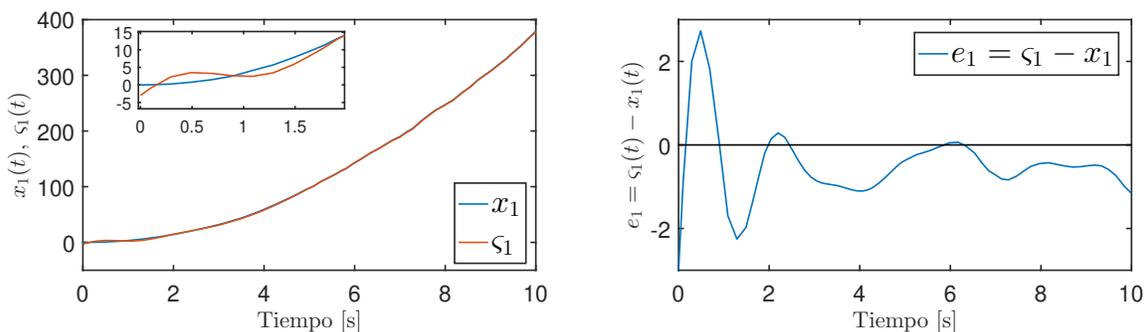
$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_1 &= \varsigma_2 + \psi(x_1, \varsigma_2 + l_3(y - \varsigma_1)) + l_1(y - \varsigma_1), \\ \dot{\varsigma}_2 &= l_2(y - \varsigma_1),\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde los parámetros  $l_1 = -0.74$ ,  $l_2 = -5.57$ ,  $l_3 = -0.67$  se obtienen como en [26].

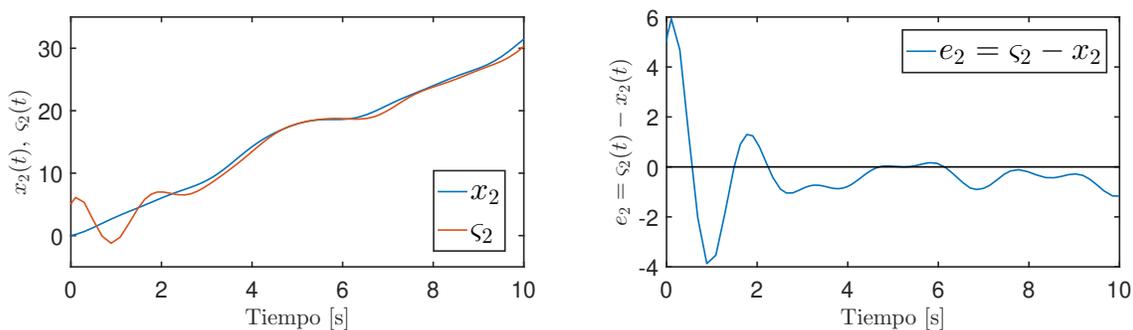
La simulación con condiciones iniciales  $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ ,  $(\varsigma_1(0), \varsigma_2(0)) = (-3, 5)$  y entrada desconocida como

$$w(t) = \sin(2t) + \sin(3t)\cos(t) - 1.5\cos(t) + 3,\tag{3.3}$$

muestra que los estados estimados  $\varsigma_1$  y  $\varsigma_2$  no convergen a los estados verdaderos del sistema (3.1), pero convergen a un vecindad cercana a ellos. Esto se debe a que el sistema es de grado relativo dos de la salida medida con respecto a la entrada desconocida.



**Figura 3.1:** Estado  $x_1(t)$  del sistema (3.1), estado  $\varsigma_1(t)$  del observador (3.2) y error de observación.



**Figura 3.2:** Estado  $x_2(t)$  del sistema (3.1), estado  $\varsigma_2(t)$  del observador (3.2) y error de observación.

Es claro del ejemplo motivacional, que un observador con propiedades disipativas no es capaz de estimar los estados verdaderos del sistema y además que debido a la estructura de (3.1) no es posible utilizar el diferenciador de Levant para estimar los estados desconocidos del sistema.

### 3.3. Planteamiento del problema

Considere el sistema de segundo orden no lineal con entradas desconocidas

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \psi(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= u - w(t), \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  son los estados,  $y$  la salida medida,  $u$  la entrada conocida,  $w(t)$  la entrada desconocida y  $\psi$  es una no linealidad del sistema.

Suponga que las clases de sistemas con entradas desconocidas representados por (4.6) satisfacen las siguientes suposiciones:

- H1. Para la no linealidad  $\psi(x_1, x_2)$  existen  $a_{\xi_1} \in \mathbb{R}_-$  y  $b_{\xi_1} \in \mathbb{R}_+$  con  $b_{\xi_1} - a_{\xi_1} > 0$ , tal que la no linealidad  $\Psi(x_1, x_2, v_1) := \psi(x_1, (x_2 + v_1)) - \psi(x_1, x_2)$  pertenece al sector  $[a_{\xi_1}, b_{\xi_1}]_{\xi_1}$  o bien, es  $\{p, s, r\}$ -disipativa con  $p < 0$ , *i.e.*

$$\begin{bmatrix} \Psi(x_1, x_2, v_1) \\ v_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p & s \\ s & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(x_1, x_2, v_1) \\ v_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall x_1, x_2, v_1 \in \mathbb{R}.$$

- H2. Para la entrada desconocida  $w(t)$ , existen  $a_{\xi_2} \in \mathbb{R}_-$  y  $b_{\xi_2} \in \mathbb{R}_+$  con  $b_{\xi_2} - a_{\xi_2} > 0$ , tal que  $w(t)$  pertenece al sector  $[a_{\xi_2}, b_{\xi_2}]_{\xi_2}$  donde  $\xi_2 = [z_1]^0$  (Ver Figura 3.3).

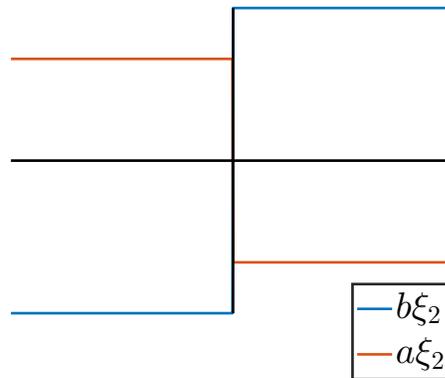


Figura 3.3: Sector  $\xi_2 = [z_1]^0$ .

La clase de no linealidades que se consideran son todas aquellas que pertenezcan al sector  $\xi_1$  *e.g.* funciones globalmente Lipschitz con respecto a  $x_2$  (*e.g.* fricción viscosa).

El objetivo principal de este capítulo es diseñar un observador global para el sistema (3.4) que estime el estado  $x_2$ , globalmente, de forma exacta y en tiempo finito, sin asumir la propiedad BIBS para (3.4).

### 3.4. Estructura del observador

Para el sistema (3.4), considere el siguiente observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - k_1[\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{2}} + \psi(x_1, (\hat{x}_2 - k_3\phi_3(\hat{x}_1 - x_1))), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= k_2[\hat{x}_1 - x_1]^0 + u,\end{aligned}\tag{3.5}$$

donde las ganancias de diseño para este sistema son

$$k_1, k_2, k_3 > 0.\tag{3.6}$$

El observador es una copia de la planta más términos no lineales de corrección. Note que dichos términos, permiten que la prueba de estabilidad de la dinámica del error sea homogénea.

### 3.5. Resultado principal

La dinámica del error entre el sistema (3.4) y (3.5) con  $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$ ,  $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$  es,

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - k_1[e_2]^{\frac{1}{2}} + \psi(x_1, x_2 + v) - \psi(x_1, x_2), \\ \dot{e}_2 &= -k_2[e_1]^0 - w\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde  $v = e_2 - k_3[e_1]^{\frac{1}{2}}$ . La no linealidad de la dinámica del error de observación es  $\Psi(x_1, x_2, v) = \psi(x_1, x_2 + v) - \psi(x_1, x_2)$ . Note que  $\Psi(x_1, x_2, 0) = 0$  para toda  $x_1$  y  $x_2$ .

Definiendo  $z_1 = e_1$  y  $z_2 = \frac{e_2}{k_1}$ , la dinámica del error (3.7) en variable  $z$  resulta

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -\tilde{k}_1([\tilde{z}_1]^{\frac{1}{2}} - z_2) + \psi(x_1, x_2 + \bar{v}) - \psi(x_1, x_2), \\ \dot{z}_2 &= -\tilde{k}_2[\tilde{z}_1]^0 - \frac{1}{k_1}w\end{aligned}\tag{3.8}$$

donde  $\bar{v} = k_1 z_2 - k_3[\tilde{z}_1]^{\frac{1}{2}}$ .

El sistema (3.8), puede ser reescrito en la forma de Lurie,

$$\begin{aligned}\dot{z} &= F(z) + Gu \\ y &= h(z) \\ u &= - \begin{bmatrix} \Psi(y, x_2, \bar{v}) \\ \frac{1}{k_1}w \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.9}$$

donde,

$$F(z) = \begin{bmatrix} -\tilde{k}_1([\tilde{z}_1]^{\frac{1}{2}} - z_2) \\ -\tilde{k}_2[\tilde{z}_1]^0 \end{bmatrix} \text{ y } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que para el análisis de la estabilidad de la dinámica del error, la no linealidad  $\Psi(x_1, x_2, \bar{v})$  debe satisfacer la suposición H1, la cual implica que la no linealidad pertenezca al sector  $\xi_1 = k_1 z_2 - k_3[\tilde{z}_1]^{\frac{1}{2}}$ , de la misma manera, la entrada desconocida  $\frac{1}{k_1}w$  debe satisfacer la suposición H2, la cual implica que la entrada desconocida pertenezca al sector  $\xi_2 = [\tilde{z}_1]^0$ .

Las condiciones suficientes para la estabilidad de la dinámica del error (3.9) se presentan en la siguiente preposición.

**Proposición 3.1** Si  $\Psi(y, x_2, \bar{v}_1)$  satisface la suposición  $H_1$  y existe una función de Lyapunov homogénea de grado  $m > \max_{1 \leq i \leq n} r_i$ , con respecto a la dilatación  $\Delta_\varepsilon^r$ ,  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $L^T(z)L(z)$  sea una función definida positiva, y  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  para algún valor de  $\eta$ , satisfaciendo

$$\nabla V(z)(F(z) - G\xi(h(z)))a = -L^T(z)L(z), \quad (3.10)$$

$$\nabla V(z)g = \alpha\xi(h(z))M^T(z)M(z) - 2L^T(z)M(z), \quad (3.11)$$

donde

$$\xi(h(z)) = \begin{bmatrix} k_1 z_2 - k_3 [z_1]^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & [z_1]^0 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{\xi_1}}{k_1} \\ \frac{\alpha_{\xi_2}}{k_1} \end{bmatrix} \quad y \quad \alpha = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{\xi_1}}{k_1} & \frac{\alpha_{\xi_2}}{k_1} \end{bmatrix}.$$

entonces, el sistema (3.9) es estable.  $\triangle$

**Demostración:** Para probar las condiciones (3.10) y (3.11), considere la siguiente función de Lyapunov homogénea de grado 3 y pesos homogéneos  $(r_1, r_2) = (2, 1)$ :

$$V(z) = \frac{2}{3}|z_1|^{\frac{3}{2}} - z_1 z_2 + \frac{2}{3}|z_2|^3. \quad (3.12)$$

La condición (3.11) es satisfecha si

$$\begin{aligned} \nabla V(z)G &= \left[ [z_1]^{\frac{1}{2}} - z_2, \quad -z_1 + 2[z_2]^2 \right] \\ &= \alpha\xi(z_1, z_2)M^T(z)M(z) - 2L^T(z)M(z). \end{aligned}$$

Esto se puede lograr haciendo

$$M(z) = \begin{bmatrix} \alpha_{\xi_1}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{\xi_2}^{-\frac{1}{2}}}{k_1^{-\frac{1}{2}}} |z_1|^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \frac{\alpha_{\xi_2}^{-\frac{1}{2}}}{k_1^{-\frac{1}{2}}} |z_2| \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L(z) = \begin{bmatrix} \alpha_{\xi_1}^{\frac{1}{2}} (z_2 - [z_1]^{\frac{1}{2}}) \\ \frac{\alpha_{\xi_2}^{\frac{1}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2}}} [z_1]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\alpha_{\xi_2}^{\frac{1}{2}}}{k_1^{\frac{1}{2}}} ([z_1]^0 |z_2| - z_2) \\ L_4(z) \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, la condición (3.10) se satisface si  $L_4^2(z) = -\nabla V(z)(F(z) - G\xi(h(z)))a - L_1^2(z) - L_2^2(z) - L_3^2(z)$  es una función definida positiva, esto es

$$\begin{aligned} L_4^2(z) &= \tilde{k}_1 (|z_1| - 2[z_1]^{\frac{1}{2}} z_2 + |z_2|^2) - \alpha_{\xi_1} (|z_1| - 2[z_1]^{\frac{1}{2}} z_2 + |z_2|^2) \\ &\quad - \alpha_{\xi_1} (|z_1| - 2[z_1]^{\frac{1}{2}} z_2 + |z_2|^2) + \tilde{k}_2 (2[z_1]^0 [z_2]^2 - |z_1|) \\ &\quad - \frac{\alpha_{\xi_2}}{k_1} (2[z_1]^0 [z_2]^2 - |z_1|) - \frac{\alpha_{\xi_2}}{k_1} (|z_1| - [z_1]^0 [z_2]^2 + \frac{5}{4}|z_2|^2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aplicando el Lema 2.3, es posible demostrar que (3.13) es definida positiva. La prueba se basa en dominar a los términos de signo no definido, haciendo la ganancia ( $\tilde{k}_1$ ) de la función semidefinida positiva suficientemente grande, tal que  $L_4^2(z)$  sea definida positiva. El Lema 2.3, se puede aplicar ya que cuando la función semidefinida positiva se hace cero, los términos restantes son positivos.  $\triangle$

**Teorema 3.1** Si las suposiciones  $H_1, H_2$  se cumplen, entonces existe un conjunto de ganancias

$$k_1 \geq b_{\xi_1}; k_2 > |a_{\xi_2}| + \frac{5}{4}\alpha_{\xi_2}, \text{ y } k_3 = k_1, \quad (3.14)$$

tal que el sistema (3.5) es un observador que converge de manera global, teóricamente exacto y en tiempo finito a los estados del sistema (3.4).

△

El Teorema 3.1, es consecuencia de la demostración, de la Proposición 3.1, ya que, eligiendo  $k_1, k_2$  y  $k_3$  como en el Teorema 3.1, la función  $L_4^2(z)$  de (3.13), es definida positiva, demostrando así que se cumple la Proposición 3.1.

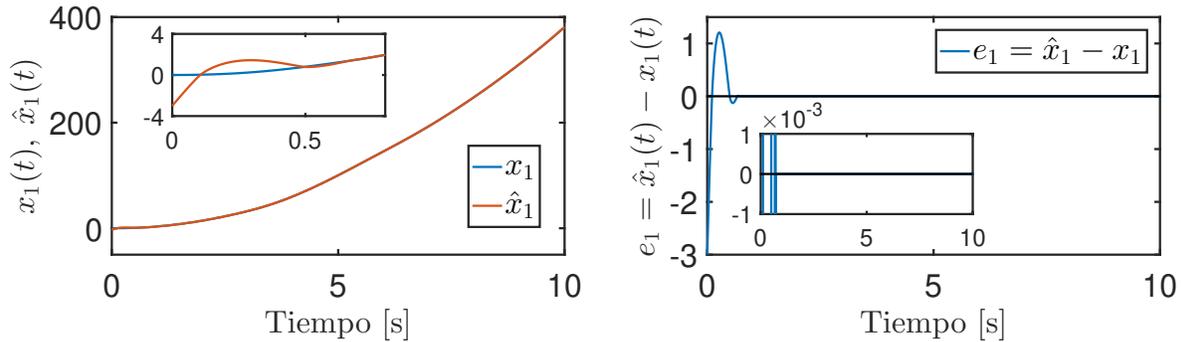
### 3.6. Ejemplo

Considere nuevamente el sistema 3.1, donde  $\psi(x_1, x_2) = (\cos^2(x_1) + 1)x_2$ , la entrada desconocida es la igual que (3.3). Para este ejemplo, las suposiciones H1 y H2 son satisfechas con  $a_{\xi_1} = -2$ ,  $b_{\xi_1} = 2$  y  $a_{\xi_2} = -6$ ,  $b_{\xi_2} = 6$ .

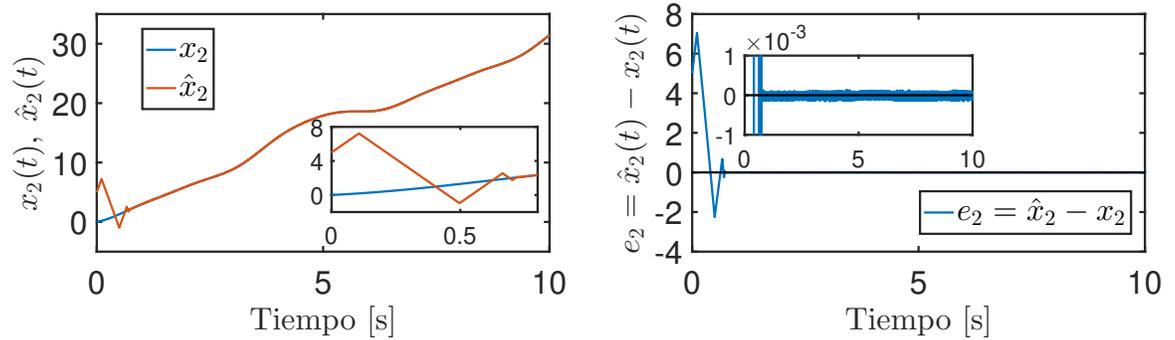
Las ganancias para (3.5) empleando (3.14), resultan :

$$k_1 = 3, k_2 = 21 \text{ y } k_3 = 3.$$

Para las simulaciones, las condiciones iniciales son consideradas como  $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ ,  $(\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0)) = (-3, 5)$ . Los estados estimados  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  convergen a los estados verdaderos del sistemas  $x_1$  y  $x_2$  a los 0.7s de la simulación, como se muestra en la Fig. 3.4 y 3.5.



**Figura 3.4:** Estado  $x_1(t)$  del sistema (3.1), estado  $\hat{x}_1$  del observador (3.5) y error de observación.



**Figura 3.5:** Estado  $x_2(t)$  del sistema (3.1), estado  $\hat{x}_2$  del observador (3.5) y error de observación.

### 3.7. Discusión

En la presente sección se consideró una clase de sistemas no lineales, para la cual se propuso un observador por modos deslizantes con propiedades disipativas, el cual provee convergencia en tiempo finito y teóricamente exacta a los estado verdaderos del sistema.

El análisis de las no linealidades por medio de sectores homogéneos, permite la combinación de los observadores por modos deslizantes y los observadores con propiedades disipativas, ampliando así la clases de sistemas a los que se les puede diseñar un observador con entradas desconocidas.



# Observadores por modos deslizantes basados en disipatividad y dominación homogénea para sistemas no lineales de segundo orden

---

## 4.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es proponer un observador por modos deslizantes que posea propiedades disipativas para una clase de sistemas más grande que el Capítulo 3. La idea es adicionar términos de diferente grado de homogeneidad en el diferenciador de Levant, los cuales permitan ampliar la clase de no linealidades con las que se pueda lidiar.

Un observador basado en esta idea fue presentado en [3], en el cual se utiliza el algoritmo del Super Twisting Generalizado como diferenciador y se combina con propiedades disipativas para el diseño de observadores con entradas desconocidas. Las principales diferencias con dicho trabajo son: los términos de corrección y la prueba de estabilidad de la dinámica del error, ya que esta se hace mediante una función de Lyapunov cuadrática, cuyo uso imposibilita la extensión del resultado a sistemas de orden mayor a dos.

El resultado obtenido en este capítulo se basa en el uso de una función de Lyapunov homogénea [8] y en la generalización homogénea del problema de Lurie [23], facilitando el diseño de las ganancias para el observador propuesto.

Nótese que la clase de sistemas considerados en esta sección puede ser más grande considerando que por medio de transformaciones de estado o de salida, algunos sistemas pueden ser transformados a la forma considerada en este capítulo.

## 4.2. Ejemplo motivacional

Considere el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\sin^2(0.5x_1)}{2(1 + \cos^2(x_1))}x_2 - 9.8\frac{\sin(0.2x_1)}{4(1 + \cos^2(x_1))} + w(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  son los estados,  $x_1$  es el estado medible y  $w \in \mathbb{R}$  es una entrada desconocida. Note que el sistema (4.1) no es BIBS y es de grado relativo dos respecto a  $w(t)$ .

### Observador por modos deslizantes

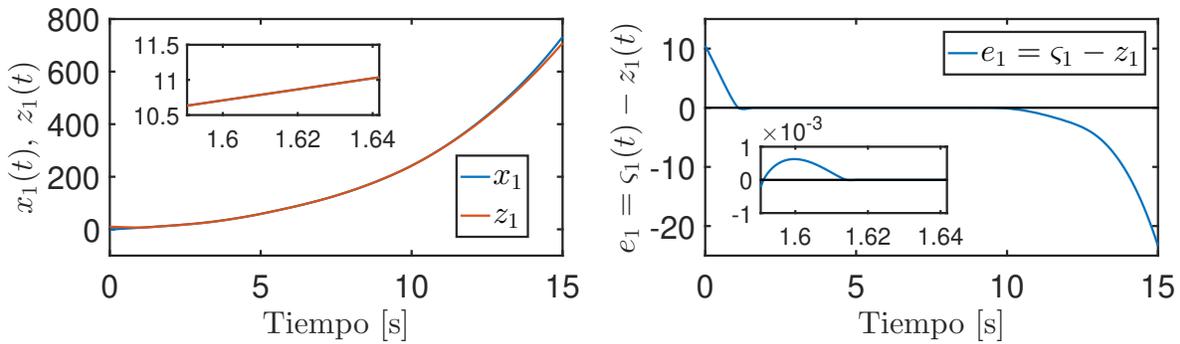
Aplicando el diferenciador de Levant (2.28), para la variable medida  $x_1$  del sistema (4.1), se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -k_1[z_1]^{\frac{1}{2}} + z_2, \\ \dot{z}_2 &= -k_2[z_1]^0,\end{aligned}\tag{4.2}$$

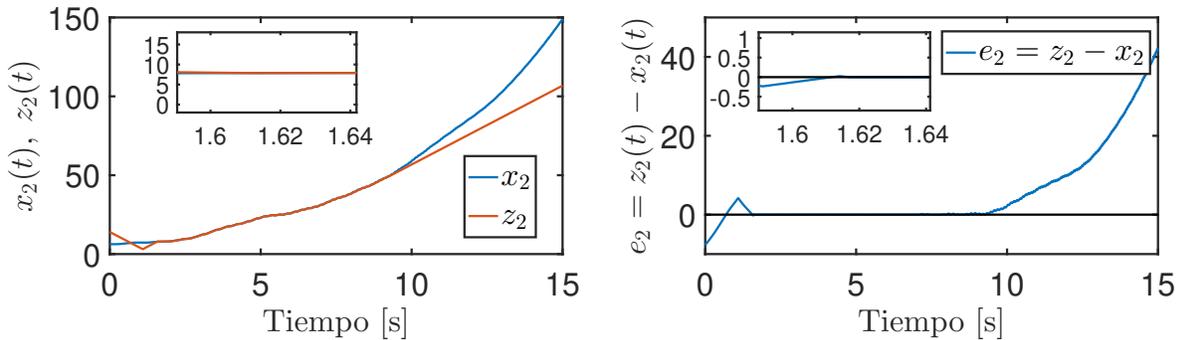
donde  $k_1 = 4$  y  $k_2 = 8$ .

Para la simulación se considera la entrada desconocida como  $w(t) = \sin(2t) + 0.5\sin(3t)\cos(t) - 1.5\cos(t) + 1$ , la cual siempre esta acotada por una constante  $L_w = 4$  además se consideran condiciones iniciales  $(x_1(0), x_2(0)) = (-0.5, 6.3)$  y  $(z_1(0), z_2(0)) = (-0, 0)$ .

De la Figura 4.1 y 4.2, se observa que los estados estimados  $z_1$  y  $z_2$  convergen los estados verdaderos  $x_1$  y  $x_2$  en tiempo finito para  $t = 1.618$ s.

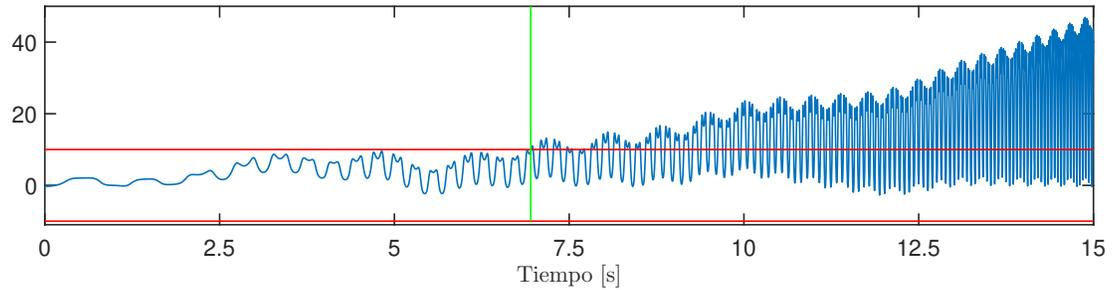


**Figura 4.1:** Estado  $x_1(t)$  del sistema (4.1), estado  $z_1(t)$  del observador (4.2) y error de observación.



**Figura 4.2:** Estado  $x_2(t)$  del sistema (4.1), estado  $z_2(t)$  del observador (4.2) y error de observación.

De las Figuras es fácil notar que el error de observación empieza a divergir para  $t = 6.9$ s. Esto sucede porque la magnitud de la no linealidad a lo largo de las trayectorias junto con  $w(t)$ , excede la ganancia de 8 del término discontinuo del diferenciador, ver Figura 4.3.



**Figura 4.3:** La función  $\varphi(x_1, x_2) + w(t)$  excede la ganancia 8 del termino discontinuo en el diferenciador (4.2).

### Observador disipativo

La no linealidad  $\varphi(x_1, x_2) = \frac{\sin^2(0.5x_1)}{2(1+\cos^2(x_1))}x_2 - 9.8 \frac{\sin(0.2x_1)}{4(1+\cos^2(x_1))}$  no es globalmente Lipschitz respecto a  $x_1$  (por que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$  no es uniformemente acotada), pero es Lipschitz con respecto a  $x_2$  con constante de Lipschitz  $L_\psi = 0.4$ .

La no linealidad  $\varphi(x_1, x_2)$  satisface un propiedad disipativa, ya que  $\Upsilon(x_1, x_2, v) := \varphi(x_1, x_2 + v) - \varphi(x_1, x_2)$  es disipativa con respecto a la tasa se suministro

$$\begin{bmatrix} \Upsilon \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & L_\psi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon \\ v \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Aplicando el observador disipativo propuesto en [26], se obtiene:

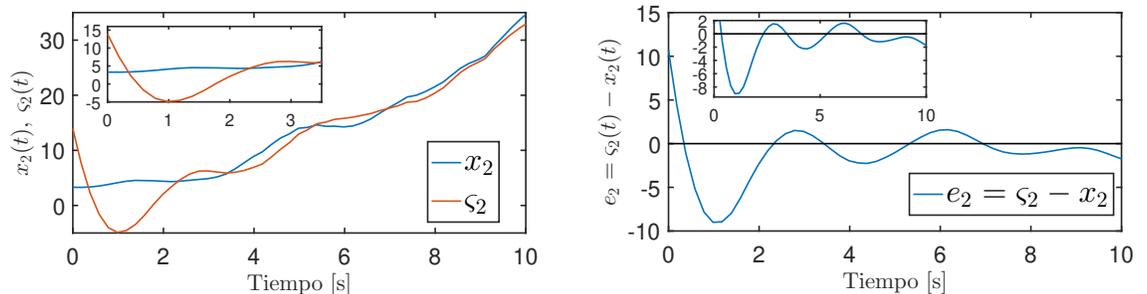
$$\begin{aligned} \dot{\varsigma}_1 &= \varsigma_2 + l_1(y - \varsigma_1), \\ \dot{\varsigma}_2 &= \varphi(x_1, \varsigma_2 + l_3(y - \varsigma_1)) + l_2(y - \varsigma_1), \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde los parámetros  $l_1 = -1.74$ ,  $l_2 = -3.57$ ,  $l_3 = -0.38$  se obtienen como en [26].

La simulación con condiciones iniciales  $(x_1(0), x_2(0)) = (-0.5, 6.3)$ ,  $(\varsigma_1(0), \varsigma_2(0)) = (10, 14)$  y entrada desconocida como

$$w(t) = \sin(2t) + 0.5\sin(3t)\cos(t) - 1.5\cos(t) + 1, \quad (4.5)$$

muestra que los estados estimados  $\varsigma_1$  y  $\varsigma_2$  no convergen a los estados verdaderos del sistema (4.1), pero convergen a una vecindad cercana a ellos. Esto se debe a que el sistema es de grado relativo dos de la salida medida con respecto a la entrada desconocida.



**Figura 4.5:** Estado  $x_2(t)$  del sistema (4.1), estado  $\varsigma_2$  del observador (4.4) y error de observación.

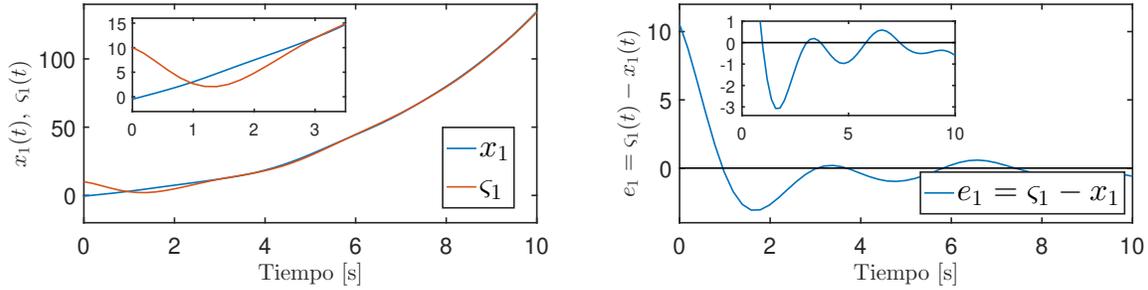


Figura 4.4: Estado  $x_1(t)$  del sistema (4.1), estado  $\zeta_1$  del observador (4.4) y error de observación.

Es claro del ejemplo motivacional propuesto, la pérdida de eficiencia del observador disipativo frente a entradas desconocidas y grado relativo mayor a uno, además de las limitaciones que presenta el diferenciador de Levant con sistemas que no poseen la propiedad BIBS.

### 4.3. Planteamiento del problema

Considere el sistema de segundo orden no lineal con entradas desconocidas

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \varphi(x_1, x_2) + u - w(t), \\ y &= x_1, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  son los estados,  $y$  la salida medida,  $u$  la entrada conocida,  $w(t)$  la entrada desconocida y  $\varphi$  es una no linealidad del sistema.

Suponga que la clases de sistemas con entradas desconocidas representados por (4.6) satisfacen las siguientes suposiciones:

H1. La entrada desconocida es acotada, *i.e.* existe una constante  $L_w$  tal que

$$|w| \leq L_w.$$

H2. Para la no linealidad  $\varphi(x_1, x_2)$  existen  $a \in \mathbb{R}_-$  y  $b \in \mathbb{R}_+$  con  $b - a > 0$ , tal que la no linealidad  $\varphi(x_1, x_2, v) := \varphi(x_1, (x_2 + v)) - \varphi(x_1, x_2)$  pertenece al sector  $[a, b]$  o bien, es  $\{p, s, r\}$ -disipativa con  $p < 0$ , *i.e.*

$$\begin{bmatrix} \varphi(x_1, x_2, v) \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p & s \\ s & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(x_1, x_2, v) \\ v \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall x_1, x_2, v \in \mathbb{R}.$$

La clase de no linealidades que se consideran son todas aquellas que pertenezcan al sector  $\xi$  *e.g.* funciones globalmente Lipschitz con respecto a  $x_2$  (*e.g.* fricción viscosa).

El objetivo principal de este capítulo es diseñar un observador global para el sistema (4.6) que estime el estado  $x_2$ , globalmente, de forma exacta y en tiempo finito, sin asumir la propiedad BIBS para (4.6).

## 4.4. Estructura del observador

Para el sistema (4.6), considere el siguiente observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 - k_1 \phi_1(\hat{x}_1 - x_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \varphi(x_1, (\hat{x}_2 - k_3 \phi_3(\hat{x}_1 - x_1))) - k_2 \phi_2(\hat{x}_1 - x_1) + u,\end{aligned}\tag{4.7}$$

donde  $\phi_3$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_1$  son

$$\begin{aligned}\phi_3(\hat{x}_1 - x_1) &:= [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \phi_2(\hat{x}_1 - x_1) &:= [\hat{x}_1 - x_1]^0 + \mu_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{2}}, \\ \phi_1(\hat{x}_1 - x_1) &:= [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{2}} + \mu_1 [\hat{x}_1 - x_1],\end{aligned}\tag{4.8}$$

donde las ganancias de diseño para este sistema son

$$k_1, k_2, k_3, \mu_1, \mu_2 > 0.\tag{4.9}$$

El observador (4.7) es una copia del sistema (4.6), más términos no lineales de corrección de estimación de la salida. Los términos  $\phi_2$  y  $\phi_1$  aparecen aditivamente en el observador, mientras el término  $\phi_3$  aparece aditivamente dentro de la no linealidad  $\varphi$ . El término discontinuo  $[\cdot]^0$  asegura la robustez del observador ante entradas desconocidas acotadas y los otros términos no lineales aseguran la convergencia en tiempo finito a los estados verdaderos del sistema. Se puede notar que el diferenciador de Levant, es modificado con términos no lineales de diferente grado de homogeneidad, esto con el fin de aumentar la clase de no linealidades permitidas.

## 4.5. Resultado principal

La dinámica del error entre el sistema (4.6) y (4.7) con  $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$ ,  $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$  es,

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - k_1([\![e_1]\!]^{\frac{1}{2}} + \mu_1[\![e_1]\!]), \\ \dot{e}_2 &= -k_2([\![e_1]\!]^0 + \mu_2[\![e_1]\!]^{\frac{1}{2}}) + \varphi(x_1, (x_2 + v)) - \varphi(x_1, x_2) + w,\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde  $v = e_2 - k_3[\![e_1]\!]^{\frac{1}{2}}$ . La no linealidad de la dinámica del error (4.10) es  $\Upsilon(x_1, x_2, v) := \varphi(x_1, (x_2 + v)) - \varphi(x_1, x_2)$ . Note que  $\Upsilon(x_1, x_2, 0) = 0$  para toda  $x_1$  y  $x_2$ .

Definiendo  $z_1 = e_1$  y  $z_2 = \frac{e_2}{k_1}$ , la dinámica del error (4.10) en variable  $z$  resulta

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \tilde{k}_1([\![z_1]\!]^{\frac{1}{2}} - z_2) - \tilde{k}_1 \mu_1 [\![z_1]\!] \\ \dot{z}_2 &= -\tilde{k}_2([\![z_1]\!]^0 + \mu_2 [\![z_1]\!]^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{k_1} (\varphi(x_1, (x_2 + \bar{v})) - \varphi(x_1, x_2) + w),\end{aligned}\tag{4.11}$$

donde  $\bar{v} = k_1 z_2 - k_3 [\![z_1]\!]^{\frac{1}{2}}$ .

La Ec.(4.11) puede ser reescrita en la forma de Lurie

$$\begin{aligned}\dot{z} &= F(z) + Gu, \\ y &= h(z), \\ u &= -\frac{1}{k_1} \Upsilon(x_1, x_2, \bar{v}_1)\end{aligned}\tag{4.12}$$

donde

$$F(z) = \begin{bmatrix} -\tilde{k}_1(\lceil e_1 \rceil^{\frac{1}{2}} - z_2) - \tilde{k}_1 \mu_1 \lceil z_1 \rceil \\ -\tilde{k}_2(\lceil z_1 \rceil^0 + \mu_2 \lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{k_1} w \end{bmatrix} \quad y \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que para el análisis de la estabilidad de la dinámica del error, la no linealidad  $\Upsilon(x_1, x_2, \bar{v})$  debe satisfacer la suposición H2, la cual implica que la no linealidad pertenezca al sector  $\xi = k_1 z_2 - k_3 \lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{2}}$ .

Las condiciones suficientes para la estabilidad de la dinámica del error (4.12) se presentan en la siguiente proposición.

**Proposición 4.1** *Si  $\Upsilon(y, x_2, \bar{v}_2)$  satisface la suposición H2 y existe una función de Lyapunov homogénea de grado  $m > \max_{1 \leq i \leq n} r_i$ , con respecto a la dilatación  $\Delta_\varepsilon^r$ ;  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $L^T(z)L(z)$  sea una función definida positiva, y  $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  para algún valor de  $\eta$ , satisfaciendo*

$$\nabla V(z)(F(z) - \frac{a}{k_1} G \xi(h(z))) = -L^T(z)L(z), \quad (4.13)$$

$$\nabla V(z)g = \frac{\alpha}{k_1} \xi(h(z))M^T(z)M(z) - 2L^T(z)M(z), \quad (4.14)$$

donde

$$\xi(h(z)) = k_1 z_2 - k_3 \lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{2}} \quad y \quad \alpha = b - a > 0,$$

entonces, el sistema (4.12) es estable.

△

**Demostración:** Para probar las condiciones (4.13) y (4.14), considere la siguiente función candidata de Lyapunov homogénea de grado 3 y pesos homogéneos  $(r_1, r_2) = (2, 1)$ :

$$V(z) = \frac{2}{3} |z_1|^{\frac{3}{2}} - z_1 z_2 + \frac{2}{3} |z_2|^3. \quad (4.15)$$

La condición (4.14) es satisfecha si

$$\begin{aligned} \nabla V(z)g(z) &= -z_1 + 2 \lceil z_2 \rceil^2 \\ &= \frac{\alpha}{k_1} \xi(h(z))M^T(z)M(z) - 2L^T(z)M(z). \end{aligned}$$

Esto se puede lograr haciendo

$$M(z) = \begin{bmatrix} 2^{\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{4}} \\ 4^{\frac{1}{2}} \alpha^{-\frac{1}{2}} \lceil z_2 \rceil^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(z) = \begin{bmatrix} \alpha^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} (\lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{4}} z_2 + |z_1|^{\frac{3}{4}}) \\ \alpha^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (|z_2|^{\frac{3}{2}} - \lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{2}} \lceil z_2 \rceil^{\frac{1}{2}}) \\ L_3(z) \end{bmatrix}.$$

Considerando  $|\frac{w}{k_1}| \leq \frac{L}{k_1} \lceil z_1 \rceil^0$ ,  $\tilde{k}_1 = k_1$  y  $k_4 = k_1$ , la condición (4.13) se satisface si  $L_3^2 \geq -V(z)(F(z) - aG\xi(h(z))) - L_1^2(z) - L_2^2(z)$  es una función definida positiva, esto es

$$L_3^2(z) \geq q_1(z) + q_2(z), \quad (4.16)$$

donde

$$q_1(z) = +\tilde{k}_1(\lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{2}} - z_2)^2 + 2\tilde{k}_2 \lceil z_1 \rceil^0 \lceil z_2 \rceil^2 - \tilde{k}_2 |z_1| - \frac{2L}{k_1} \lceil z_1 \rceil^0 \lceil z_2 \rceil^2 + \frac{L}{k_1} |z_1| \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} q_2(z) = & +\tilde{k}_1 \mu_1 (|z_1|^{\frac{3}{2}} - \lceil z_1 \rceil \lceil z_2 \rceil - \lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{2}} \lceil z_2 \rceil^2 + |z_2|^3) \\ & - \alpha \left( \frac{1}{8} |z_1|^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{8} \lceil z_1 \rceil \lceil z_2 \rceil - \frac{2}{4} \lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{2}} \lceil z_2 \rceil^2 - \frac{1}{4} |z_2|^3 \right) \\ & - \alpha \left( \frac{1}{8} |z_1|^{\frac{1}{2}} |z_2| + \frac{1}{4} |z_1| |z_2| \right) + \tilde{k}_2 \mu_2 (2 \lceil z_1 \rceil^{\frac{1}{2}} \lceil z_2 \rceil^2 - |z_1|^{\frac{3}{2}}) \\ & + \alpha k_1 (\lceil z_1 \rceil \lceil z_2 \rceil - |z_1|^{\frac{3}{2}}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Se puede observar que el grado de homogeneidad de (4.17) es igual a dos y que el grado de homogeneidad de (4.18) es igual a tres. Considerando  $\mu_1 = 2|a_{\xi_2}|$  y sabiendo del Lema 2.3, que una función de signo definido multiplicada por una ganancia, puede dominar a términos de signo indefinido del mismo grado de homogeneidad, es posible demostrar que  $q_1(z)$  y  $q_2(z)$  son definidas positivas.

△

**Teorema 4.1** *Si las suposiciones H1 y H2 se cumplen, entonces existe un conjunto de ganancias*

$$k_2 > L, \quad k_1 > \sqrt{2k_2}, \quad k_3 = k_1, \quad \mu_1 = 2|a_{\xi_2}| \quad \text{y} \quad \mu_2 > 0, \quad (4.19)$$

*tal que el sistema (4.7) es un observador que converge de manera global, teóricamente exacto y en tiempo finito a los estados del sistema (4.6).*

△

La prueba del Teorema 4.1 es consecuencia de la Proposición 4.1.

## 4.6. Ejemplo

Considere nuevamente el sistema 4.1, donde  $\varphi(x_1, x_2) = \frac{\sin^2(0.5x_1)}{2(1+\cos^2(x_1))} x_2$ , la entrada desconocida es la igual que (4.5), la cual puede ser acotada por  $L_w = 4$ , de igual manera, el termino  $-9.8 \frac{\sin(0.2x_1)}{4(1+\cos^2(x_1))}$  puede ser acotado por una constate  $L_g = 2.6$ . Para este ejemplo, las suposiciones H1 y H2 son satisfechas con  $a = -0.4$ ,  $b = 0.4$  y  $L = 6.6$ .

Las ganancias para (4.7) empleando (4.19), resultan :

$$k_2 = 10, \quad k_1 = 8, \quad k_3 = 8, \quad \mu_1 = 0.8 \quad \text{y} \quad \mu_2 = 0.12.$$

Para las simulaciones, las condiciones iniciales son consideradas como  $(x_1(0), x_2(0)) = (-0.5, 6.3)$ ,  $(\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0)) = (10, 14)$ . Los estados estimados  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  convergen a los estados verdaderos del sistemas  $x_1$  y  $x_2$  a los 0.82 [s] de la simulación, como se muestra en la Fig. 4.6 y 4.7.

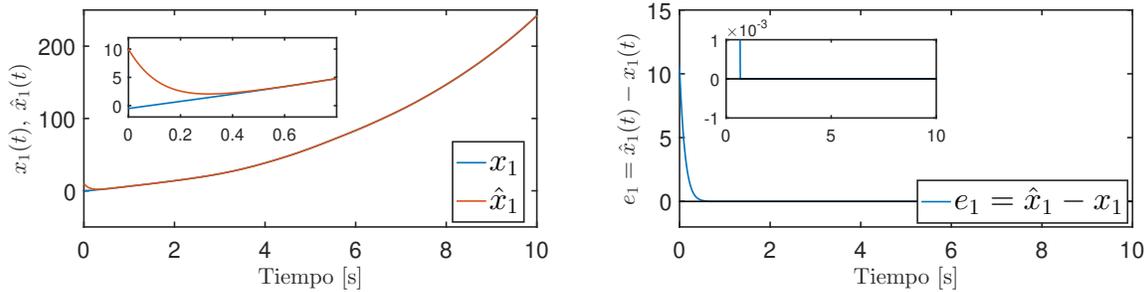


Figura 4.6: Estado  $x_1(t)$  del sistema (4.1), estado  $\hat{x}_1$  del observador (4.7) y error de observación.

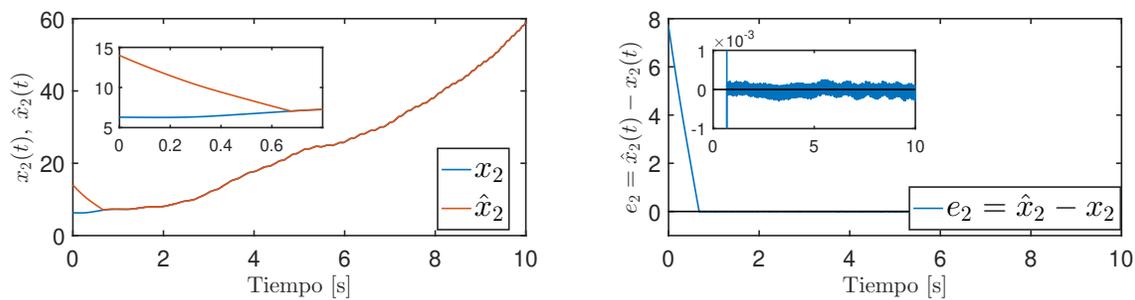


Figura 4.7: Estado  $x_2(t)$  del sistema (4.1), estado  $\hat{x}_2$  del observador (4.7) y error de observación.

## 4.7. Conclusiones

En la presente sección se consideró una clase de sistemas no lineales sin la propiedad BIBS y que se ven afectados por entradas desconocidas. Para este tipo de sistemas se propuso un observador por modos deslizantes basado en modos deslizantes más términos adicionales que tiene propiedades disipativas, el cual provee de convergencia global y en tiempo finito a los estados verdaderos del sistema.

## Conclusiones

---

En este trabajo se consideran entradas desconocidas acotadas y se tratan dos problemas que generalmente surgen cuando se diseñan UIO:

- el primer problema se presenta en el diseño de observadores disipativos, cuando el grado relativo de la entrada desconocida es mayor que uno y debido a ello las trayectorias del observador solo convergen a una vecindad cercana a los estados verdaderos del sistema;
- el segundo problema se presenta en los observadores por modos deslizante, cuando el sistema no posee la propiedad BIBS.

Para superar estas desventajas se propuso dos observadores por modos deslizante, los cuales presentan propiedades disipativas, dichos observadores proporcionan convergencia global y en tiempo finito de los estados estimados a los estados verdaderos del sistema, aún cuando el sistema no presenta la propiedad BIBS y el grado relativo de la salida con respecto a la entrada desconocida es mayor que uno.

El presente trabajo tomó la idea de combinar las propiedades disipativas con los modos deslizantes de [3], la diferencia que existe entre los dos trabajos es principalmente la prueba de estabilidad de la dinámica del error, en este trabajo se propone una prueba basada en propiedades de homogeneidad (funciones de Lyapunov homogéneas y generalización homogénea del problema de Lurie) mientras que en [3], se propone una prueba basada en formas cuadráticas, esta última limita la extensión del resultado a sistemas de orden mayor a dos, mientras que la metodología propuesta podría extenderse a orden arbitrario ya que la función de Lyapunov que se emplea es un caso particular de las funciones homogéneas para diferenciadores de orden arbitrario.

En el primer observador propuesto se propuso añadir términos de corrección los cuales preservan las propiedades del diferenciador de Levant y permiten que la prueba de estabilidad de la dinámica del error sea homogénea, mientras que para el segundo observador propuesto, los términos de corrección amplían la clase de sistemas a los que se les puede construir un observador.



# Bibliografía

---

- [1] V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi. Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(4):1814–1850, 2008. doi: 10.1137/060675861. URL <https://doi.org/10.1137/060675861>. 13
- [2] W. A. Apaza-Perez, L. Fridman, and J. A. Moreno. Higher order sliding-mode observers with scaled dissipative stabilisers. *International Journal of Control*, 91(11):2511–2523, 2018. doi: 10.1080/00207179.2016.1269951. 3
- [3] W. Alejandro Apaza-Perez, Jaime A. Moreno, and Leonid M. Fridman. Dissipative approach to sliding mode observers design for uncertain mechanical systems. *Automatica*, 87:330 – 336, 2018. ISSN 0005-1098. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.10.016>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109817305162>. 3, 25, 33
- [4] A. Bacciotti and L. Rosier. *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media, 2005. 8, 12, 13
- [5] F. J. Bejarano, L. Fridman, and A. Poznyak. Output integral sliding mode control based on algebraic hierarchical observer. *International Journal of Control*, 80(3):443–453, 2007. doi: 10.1080/00207170601080205. URL <https://doi.org/10.1080/00207170601080205>. 2
- [6] G. Besançon. *Nonlinear Observers and Applications*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2007. 1
- [7] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11):1228–1240, Nov 1991. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/9.100932. 1, 7, 9
- [8] E. Cruz-Zavala and J. A. Moreno. Levant’s arbitrary order exact differentiator: A lyapunov approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 1–1, 2018. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.2018.2874721. 15, 16, 25
- [9] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11):1785–1789, Nov 2005. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.2005.858636. 2
- [10] J. Davila, L. Fridman, and A. Poznyak. Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. In *International Workshop on Variable Structure Systems, 2006. VSS’06.*, pages 232–237, June 2006. doi: 10.1109/VSS.2006.1644523. 2

- [11] E. Guzmán-Baltazar and J. A. Moreno. Dissipative design of adaptive observers for systems with multivalued nonlinearities. In *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2625–2630, Dec 2010. doi: 10.1109/CDC.2010.5717230. 2
- [12] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*, volume 18. Springer Science & Business Media, 1988. 15
- [13] L. Fridman, A. Levant, and J. Davila. Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *International Journal of Systems Science*, 38(10):773–791, 2007. doi: 10.1080/00207720701409538. 3
- [14] M.L.J. Hautus. Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50: 353 – 368, 1983. ISSN 0024-3795. doi: [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(83\)90061-7](https://doi.org/10.1016/0024-3795(83)90061-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0024379583900617>. 1
- [15] D. Hill and P. Moylan. The stability of nonlinear dissipative systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(5):708–711, October 1976. ISSN 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.1976.1101352. 7, 9, 14
- [16] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2003. ISBN 9780131227408. URL [https://books.google.com.mx/books?id=v\\_BjPQAACAAJ](https://books.google.com.mx/books?id=v_BjPQAACAAJ). 9, 10, 11, 12
- [17] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique\*\*this paper was recommended for publication in final form by associate editor hassan khalil under the direction of editor tamer basar. *Automatica*, 34(3):379 – 384, 1998. ISSN 0005-1098. doi: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(97\)00209-4](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00209-4). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109897002094>. 2, 3, 9, 15
- [18] J. A. Moreno. Existence of unknown input observers and feedback passivity for linear systems. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*, volume 4, pages 3366–3371 vol.4, Dec 2001. doi: 10.1109/CDC.2001.980353. 1, 2
- [19] J. A. Moreno. Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(21):681 – 686, 2004. ISSN 1474-6670. doi: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)30549-9](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)30549-9). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017305499>. 2nd IFAC Symposium on System Structure and Control, Oaxaca, Mexico, December 8-10, 2004. 1, 9
- [20] J. A. Moreno. *Approximate Observer Error Linearization by Dissipativity Methods*, pages 35–51. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005. ISBN 978-3-540-31573-5. doi: 10.1007/11529798\_3. URL [https://doi.org/10.1007/11529798\\_3](https://doi.org/10.1007/11529798_3). 1
- [21] J. A. Moreno, Edmundo Rocha-Cózatl, and Alain Vande Wouwer. A dynamical interpretation of strong observability and detectability concepts for nonlinear systems with unknown inputs: application to biochemical processes. *Bioprocess and Biosystems Engineering*, 37(1):37–49, Jan 2014. ISSN 1615-7605. doi: 10.1007/s00449-013-0915-5. URL <https://doi.org/10.1007/s00449-013-0915-5>. 2
- [22] M. Osorio and J. A. Moreno. Dissipative design of observers for multivalued nonlinear systems. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5400–5405, Dec 2006. doi: 10.1109/CDC.2006.377335. 2

- [23] E. Rocha, J. A. Moreno, and F. Castaños. Homogeneous generalisation of the luré problem and the circle criterion. *IFAC-PapersOnLine*, 51(13):514 – 519, 2018. ISSN 2405-8963. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.07.331>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896318310863>. 2nd IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON 2018. 14, 25
- [24] E. Rocha-Cozatl and J. A. Moreno. Passification by output injection of nonlinear systems. In *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications (CCA'01) (Cat. No.01CH37204)*, pages 1141–1146, Sep. 2001. doi: 10.1109/CCA.2001.974025. 1
- [25] E. Rocha-Cozatl and J. A. Moreno. Dissipativity and design of unknown input observers for nonlinear systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(13):471 – 476, 2004. ISSN 1474-6670. doi: [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)31268-5](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)31268-5). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017312685>. 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems 2004 (NOLCOS 2004), Stuttgart, Germany, 1-3 September, 2004. 1, 2
- [26] E. Rocha-Cozatl and J. A. Moreno. Dissipative design of unknown input observers for systems with sector nonlinearities. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 21(14): 1623–1644, 2011. doi: 10.1002/rnc.1656. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/rnc.1656>. 1, 6, 18, 27
- [27] T. Sanchez, E. Cruz-Zavala, and J. A. Moreno. An sos method for the design of continuous and discontinuous differentiators. *International Journal of Control*, 91(11):2597–2614, 2018. doi: 10.1080/00207179.2017.1393564. URL <https://doi.org/10.1080/00207179.2017.1393564>. 16
- [28] H. Shim, J.H. Seo, and A.R. Teel. Nonlinear observer design via passivation of error dynamics. *Automatica*, 39(5):885 – 892, 2003. ISSN 0005-1098. doi: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(03\)00023-2](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00023-2). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109803000232>. 1
- [29] B. L. Walcott and S. H. Zak. Observation of dynamical systems in the presence of bounded nonlinearities/uncertainties. In *1986 25th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 961–966, Dec 1986. doi: 10.1109/CDC.1986.267514. 2
- [30] Jan C. Willems. Dissipative dynamical systems part i: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45(5):321–351, Jan 1972. ISSN 1432-0673. doi: 10.1007/BF00276493. URL <https://doi.org/10.1007/BF00276493>. 1, 7, 9
- [31] Jan C. Willems. Dissipative dynamical systems part ii: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45(5):352–393, Jan 1972. ISSN 1432-0673. doi: 10.1007/BF00276494. URL <https://doi.org/10.1007/BF00276494>. 1, 7, 9