



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

TOMOGRAFÍA DE LA TIERRA CON NEUTRINOS ATMOSFÉRICOS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JOSÉ ARNULFO HERRERA LARA

TUTOR PRINCIPAL

DR. JUAN CARLOS D'OLIVO SAEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORIAL

DR. ALEXIS ARMANDO AGUILAR ARÉVALO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. MANUEL TORRES LABANSAT
INSTITUTO DE FÍSICA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., AGOSTO 2019.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Este trabajo de tesis fue realizado gracias a los apoyos de CONACYT a través de la beca de maestría 464373 y del proyecto CB-240666. También se agradece el soporte de la DGAPA-UNAM a través del proyecto PAPIIT-IN108917.

Resumen

En este trabajo se propone el uso del fenómeno de oscilaciones de neutrinos como herramienta auxiliar para el estudio de la composición del interior de la Tierra. Primeramente se detalla la importancia del conocimiento de las capas internas, en especial del núcleo externo. El primer capítulo está dedicado a la historia de los neutrinos y contiene una breve descripción cualitativa del modelo estándar de partículas elementales. En el segundo capítulo se aborda de manera formal el fenómeno de oscilaciones de neutrinos. En esta parte se desarrolla de la forma más explícita posible la teoría de oscilaciones, tanto en el vacío como en el medio, y se plasman todos los elementos requeridos para realizar esta investigación. El tercer capítulo habla del interior de la Tierra, sus principales regiones y sus propiedades mecánicas y químicas. En este capítulo también se expone la conexión de la teoría con el modelo terrestre usado en este trabajo. El cuarto capítulo contiene una recopilación de gráficos donde se muestran los cambios en las probabilidades de oscilación variando la composición química del núcleo externo y considerando también diferentes combinaciones de parámetros aún desconocidos como la jerarquía de masas Δm_{31}^2 y el octante del ángulo de mezcla θ_{23} . Posteriormente, se hace un análisis de la desviación del número de eventos para diferentes modelos composicionales de la Tierra. Además, se realiza una descripción semicuantitativa para el número de eventos que se pudiesen obtener a futuro en un experimento como Hyper-Kamiokande. En el capítulo final se elabora una síntesis de los resultados obtenidos y se exponen algunas ideas donde también sería posible aplicar este método de espectroscopía.

Índice general

Resumen	v
Introducción	1
1 Neutrinos	5
1.1 Breve historia del neutrino	5
1.1.1 Descubrimiento del neutrino	6
1.1.2 Descubrimiento del neutrino del muón	7
1.1.3 El neutrino del tau	8
1.2 Fuentes de Neutrinos	9
1.2.1 Neutrinos atmosféricos	9
1.3 Modelo estándar	12
1.3.1 Leptones	14
1.3.2 Quarks	15
1.3.3 Teoría electrodébil	15
2 Oscilaciones de neutrinos	19
2.1 Oscilaciones en el vacío	19
2.1.1 Antineutrinos	24
2.1.2 Mezcla de dos neutrinos	25
2.1.3 Tres neutrinos	27
2.1.4 Resumen fenomenológico de oscilaciones	31
2.2 Oscilaciones en materia	32
2.2.1 Caso general	32
2.2.2 Oscilaciones en materia para dos neutrinos	42
3 El interior de la Tierra	47
3.1 Determinación de la estructura interna de la Tierra	48
3.2 Modelos sobre la composición y estructura terrestre	51
3.3 Descripción de las capas interiores	52
3.3.1 Corteza terrestre	53
3.3.2 Manto superior	53
3.3.3 Manto inferior	53

3.3.4	Núcleo	54
3.4	Composición y restricciones del núcleo externo	56
3.4.1	Conexión del potencial con la densidad terrestre	57
3.5	Modelo propuesto	58
3.5.1	La trayectoria en la Tierra	61
4	Resultados	65
4.1	Probabilidades	67
4.1.1	Jerarquía normal	67
4.1.2	Jerarquía invertida	77
4.2	Eventos	83
4.2.1	Jerarquía normal	85
4.2.2	Jerarquía invertida	88
4.2.3	Estimación del número de eventos para Hyper-K	91
5	Conclusiones	95
	Bibliografía	97

Introducción

El conocimiento de la composición y estructura interna de la Tierra es esencial para la comprensión de los fenómenos geológicos básicos como el vulcanismo, los terremotos y la formación de montañas [1]. Otras aplicaciones del conocimiento del interior de la Tierra consisten en la determinación de yacimientos de petróleo y minerales para que sean aprovechados por el ser humano. Con los años se han ido desarrollando métodos y modelos que tratan de describir el interior de la Tierra basados en la información que se tiene disponible. Dicha información proviene de diversas fuentes, como pueden ser la observación de la propagación de las ondas sísmicas y la extracción directa de rocas y minerales de la superficie. De hecho, el análisis de las ondas sísmicas ha resultado en el entendimiento de la estructura de capas de la Tierra, las cuales son principalmente la corteza terrestre, el manto superior, el manto inferior, el núcleo externo y el núcleo interno. La composición de la corteza se puede medir directamente con el análisis del material que se encuentra en la superficie. Además, se han encontrado muestras en la superficie que contienen diamantes y que, según los estudios de laboratorio, sólo pudieron haberse formado a presiones y temperaturas muy elevadas. El análisis de estas muestras ha ayudado establecer las composiciones del manto superior e inferior. Sin embargo, debido a su gran profundidad, no existen muestras que proporcionen evidencia directa del estado y composición del núcleo terrestre. La información que se tiene de la composición del núcleo proviene del estudio de las ondas sísmicas y del estudio de meteoritos.

Parte importante en el estudio del interior de la Tierra es el conocimiento del núcleo. Éste tiene un rol fundamental en las corrientes de convección que se originan en el manto y en la tectónica de placas. Esto es debido a que se cree que el veinte por ciento de la pérdida de calor de la superficie de la Tierra se origina en el núcleo [2]. Parte del problema en el estudio del núcleo consiste en determinar la existencia de otros elementos, además del hierro, en el núcleo externo. La determinación de estas impurezas junto con el conocimiento del diagrama de fases del hierro es esencial, debido a que controlan la geoquímica y geofísica del núcleo, así como la evolución de la Tierra como un todo [2].

Para tratar de modelar el flujo de calor que existe hacia el manto desde el núcleo es necesario calcular la temperatura de este último. La temperatura del núcleo se determina a partir de los puntos de fusión del hierro en su diagrama de fases. Sin embargo, el desconocimiento de las propiedades físicas a muy altas temperaturas y presiones del hierro, junto con las diferentes aleaciones de hierro con otros elementos, dificultan el poder hacer una estimación precisa de la temperatura del núcleo.

Experimentos a altas presiones para distintas aleaciones de hierro muestran que la presencia

de sulfuros bajan la temperatura de fusión, mientras que la presencia de oxígeno la levanta. La presencia de níquel también contribuye a disminuir el punto de fusión. Por lo tanto, los detalles de los elementos que constituyen el núcleo también afectan el poder determinar su temperatura [2].

Otra de las razones para estudiar el interior de la Tierra, en especial el núcleo externo, es la explicación del campo magnético terrestre. La idea de que el núcleo y el manto están permanentemente magnetizados queda descartada debido a que las temperaturas del interior exceden a las de Curie¹ para materiales y minerales magnéticos [2]. Todavía no se conocen bien los detalles de cómo se produce el campo magnético de la Tierra. Sin embargo, la mayoría de los investigadores están de acuerdo en que el flujo gradual del hierro fundido en el núcleo externo es una parte importante del proceso. Actualmente, la idea más aceptada es que el núcleo se comporta como un dinamo que se autoalimenta [1]. Conforme el hierro se va moviendo en el núcleo externo, va interactuando con el campo magnético de la Tierra. Esta interacción genera una corriente eléctrica, la cual produce un campo magnético que refuerza el campo magnético terrestre. Mientras continúe el flujo en el interior del núcleo externo de hierro fundido, se producirán corrientes eléctricas y se mantendrá el campo magnético de la Tierra. La determinación de los elementos ligeros presentes en el núcleo externo también es fundamental para explicar las teorías del campo magnético terrestre, puesto que también se dan otros fenómenos como la inversión y disminución de la intensidad del campo magnético [1] y [2].

Como se ha descrito anteriormente, la mayor parte de la información sobre la composición y estructura interna de la Tierra proviene del estudio de las ondas sísmicas y el análisis directo de algunas muestras de rocas y meteoritos. Sin embargo, el estado y composición del núcleo, el cual constituye el 32 por ciento de la masa total de la Tierra y un 16 por ciento de su volumen, permanecen todavía inciertos [4]. El núcleo consiste de una mezcla de hierro y níquel y se divide en una región interna y otra externa. Estas regiones se pueden distinguir debido a que existe una diferencia considerable en las densidades que constituyen ambas zonas. El núcleo interno es sólido y se intuye que el núcleo exterior es líquido debido a la falta de propagación de las ondas secundarias (ondas S) y por el hecho de poseer una densidad menor a la del núcleo interno. Sin embargo, el déficit en la densidad del núcleo externo no puede ser simplemente descrito por una diferencia de estado entre ambas regiones, sino que además requiere la presencia de otros elementos ligeros como hidrógeno, oxígeno, azufre, entre otros más. Existe un gran interés en las ciencias de la Tierra para determinar cuáles son estos elementos ligeros con el fin comprender la evolución de nuestro planeta y para determinar el origen del campo geomagnético, los cuales son dos de los mayores problemas en las ciencias de la Tierra [4].

Una manera de determinar la presencia de los elementos que constituyen el interior de la

¹La temperatura de Curie para el hierro es aproximadamente 1044 K a presión atmosférica. Aleaciones de hierro con níquel, donde la concentración porcentual en peso del hierro es mayor a la de níquel, tienden a bajar la temperatura de Curie. También se sabe que el aumento de presión tiende a disminuir el punto de Curie para el hierro. Más información al respecto se puede encontrar en Leger, J. M. et al. *Pressure effect on the Curie temperatures of transition metals and alloys*, Phys. Rev. B **6**, 4250-4261 (1972) [3].

Tierra es utilizar el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos. Los neutrinos son partículas sorprendentes que han jugado un rol muy importante en la física de partículas de las últimas décadas. Existen tres tipos de neutrinos (sabores) ν_e , ν_μ y ν_τ asociados con los tres leptones cargados (electrón, muón y tau) y que acompañan a éstos en los procesos debidos a la interacción débil. Sin embargo, el sabor de un neutrino puede cambiar, de tal forma que, por ejemplo, un neutrino producido como un ν_μ puede ser detectado como un ν_e . Este fenómeno es conocido como oscilaciones de neutrinos y es una consecuencia de la mecánica cuántica debida al hecho de que las masas de los neutrinos son no nulas y entre ellos existe una mezcla similar a la de los quarks. Una característica interesante de las oscilaciones de neutrinos es que la conversión de un sabor a otro es afectada por la densidad de electrones que existen en el medio donde se propagan [5]. Lo que se busca con este trabajo es tratar de mostrar que el fenómeno de oscilaciones de neutrinos en materia puede auxiliar a determinar la composición estructural de la Tierra, en particular aquella del núcleo exterior.

La forma de emplear las oscilaciones de neutrinos para el estudio de la composición de la materia terrestre consiste en examinar con detalle la evolución de las amplitudes de los neutrinos producidos en la atmósfera a lo largo del interior de la Tierra. El desarrollo de la teoría de oscilaciones se hará de manera explícita con la finalidad de hacer un análisis detallado de los resultados obtenidos. Además, dado que aún hay elementos de la teoría que hasta ahora no se conocen de forma exacta, se explorará la influencia que pudiesen tener estos sobre el fenómeno de oscilaciones. De igual modo, se harán simulaciones con experimentos que actualmente se están desarrollando y que podrían servir en un futuro para poner a prueba esta tesis.

Capítulo 1

Neutrinos

1.1 Breve historia del neutrino

Los neutrinos son los únicos fermiones elementales que no poseen carga eléctrica [6]. Debido a esto, los neutrinos no experimentan una interacción electromagnética directa y sólo pueden participar en procesos débiles con los bosones virtuales W^\pm y Z^0 (p. ej. decaimiento beta). Las masas de los neutrinos son muchos órdenes de magnitud más pequeñas que las masas de los leptones cargados y quarks. Estas circunstancias hacen a los neutrinos partículas únicas y extraordinarias. La historia de los neutrinos es bastante interesante e instructiva. A saber, han pasado más de 88 años¹ desde que Wolfgang Ernst Pauli escribió su famosa carta a los participantes de la conferencia de física en Tübingen con la propuesta de que pudiese existir en el núcleo una partícula eléctricamente neutra. La idea de esta carta, que termina diciendo el porqué de la ausencia de Pauli a la conferencia, es proponer un remedio “desesperado” al teorema de la estadística del espín y a la conservación de la energía. Lo que Pauli menciona es que debiese existir una partícula de carga neutra en el núcleo, con espín 1/2 y que, por lo tanto, obedezca el principio de exclusión. Dicha partícula fue nombrada por el mismo Pauli como *neutrón*. Este neutrón de Pauli debiese tener una masa distinta de cero, del mismo orden de magnitud de la masa del electrón, pero no más grande que el uno por ciento de la masa del protón.

En 1932, James Chadwick descubrió una partícula con una masa aproximadamente igual a la del protón, el neutrón. Esta partícula ayudó a resolver varias incógnitas que había en la época sobre la composición del núcleo atómico y también puso en evidencia la necesidad de explicar el fenómeno de la radiación beta.

La siguiente contribución importante en el desarrollo de la idea del neutrino fue hecha por Enrico Fermi en 1934. Fermi construyó la primera teoría del decaimiento beta del núcleo. La teoría de Fermi fue hecha bajo las hipótesis de la partícula que propuso Pauli. Fermi llamó a esta partícula *neutrino* y propuso que era una partícula sin masa [7].

El siguiente paso en la historia de los neutrinos fue el de tratar de confirmar su existencia experimentalmente. Los primeros en dar una estimación de la sección eficaz para un proceso

¹La carta de Pauli fue escrita el 4 de diciembre de 1930.

de la forma

$$\bar{\nu} + (A, Z) \rightarrow e^+ + (A, Z - 1) \quad (1.1)$$

fueron Hans Bethe y Rudolf Peierls en 1934, justo después de que la teoría de Fermi había sido propuesta [8]. Lo que Bethe y Peierls encontraron fue una cota para esta interacción,

$$\sigma < 10^{-44} \text{cm}^2. \quad (1.2)$$

Esta cota corresponde a una longitud de absorción en materia sólida de más de 10^{14} km. Lo que Bethe y Peierls concluyen en su artículo es que no existe manera práctica de observar al neutrino. Sin embargo, el primer físico en desafiar esta conclusión fue Bruno Pontecorvo [9]. En 1946, propuso un método radioquímico para la detección de neutrinos. En particular, la reacción que él consideró más prometedora fue²

$$\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}, \quad (1.3)$$

la cual posteriormente se conocería como reacción de Davis-Pontecorvo [9]. Lo que Pontecorvo propuso era irradiar con neutrinos una gran cantidad de cloruro de carbono por aproximadamente un mes y posteriormente extraer el ${}^{37}\text{Ar}$ radioactivo del volumen. Dicha idea de Pontecorvo fue llevada a cabo por Raymond Davis en su experimento para la detección de neutrinos solares.

1.1.1 Descubrimiento del neutrino

La primera evidencia de la existencia de los neutrinos fue obtenida en los experimentos de los físicos Frederick Reines y Clyde Cowan en los años 1953-59 [6]. En estos experimentos, antineutrinos del reactor de Savannah River fueron detectados a través de la observación del proceso

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n. \quad (1.4)$$

Los antineutrinos son producidos como uno de los productos de la fisión de uranio y plutonio. Las energías de los antineutrinos de un reactor son $\lesssim 10$ MeV. Alrededor de 2.3×10^{20} antineutrinos por segundo eran producidos en el reactor de Savannah River [6]. El flujo de antineutrinos del electrón en los experimentos de Cowan y Reines era del orden de $10^{13} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ [10].

Básicamente, este experimento consistió en utilizar como blanco un centelleador líquido de un volumen aproximado de 1.4 metros cúbicos dopado con cloruro de cadmio (CdCl_2). El positrón producido en el proceso (1.4) era detenido en el centelleador y se aniquilaba con un electrón, produciendo dos fotones γ con energías de alrededor de 0.51 MeV y momentos opuestos. El neutrón producido en (1.4) era ralentizado en el blanco y capturado por un núcleo de cadmio entre 3-10 microsegundos después de sucedida la aniquilación entre el positrón y el electrón, lo que producía un fotón gamma en el proceso [10]. Estos fotones energéticos eran detectados por 110 fotomultiplicadores (ver figura 1.1). Así, se tuvieron una serie de eventos característicos

²Cabe aclarar que en esa época no se conocían los tres tipos de sabores de neutrinos, por lo que la reacción dada (1.3) contiene más información de la que se tenía en ese entonces.

cuantificables que dieron pie al descubrimiento del (anti) neutrino. En junio de 1956, Cowan y Reines enviaron un telegrama a Pauli anunciándole que el neutrino había sido descubierto.

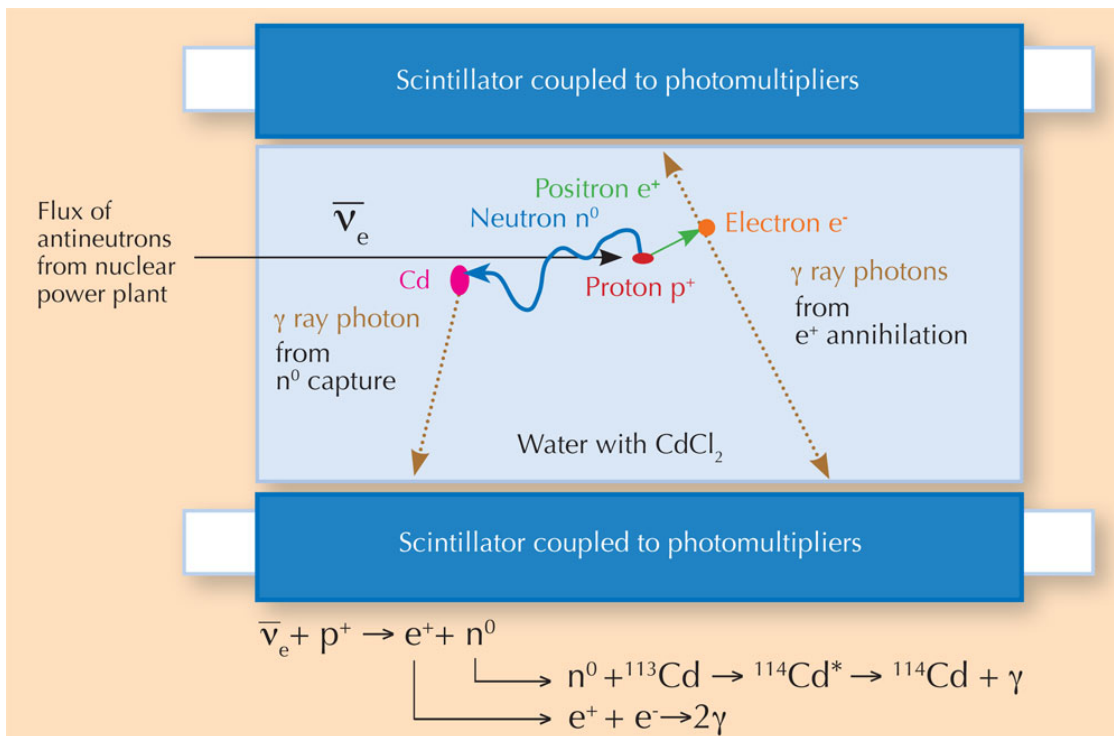


Figura 1.1: Representación esquemática del experimento de Cowan y Reines. La captura del neutrón n por un núcleo era identificada en un intervalo de tiempo entre 3 y 10 microsegundos después de que era detectada la aniquilación positrón-electrón. (Imagen tomada de <http://www.scienceinschool.org/2011/issue19/neutrinos>)

1.1.2 Descubrimiento del neutrino del muón

El descubrimiento del neutrino del muón fue un gran acontecimiento en la historia de la física moderna. Dicho evento probó que dos diferentes tipos de neutrinos ν_e y ν_μ corresponden a distintos leptones: el electrón e y el muón μ [6].

Cuando un neutrino del muón ν_μ interactúa con un núcleo, se puede producir un muón que recorre una distancia muy pequeña emitiendo un cono pronunciado de radiación Cherenkov, la cual puede ser detectada por fotomultiplicadores. De la misma manera, al interactuar con un núcleo, un neutrino del electrón ν_e puede producir un electrón energético, pero cuyo cono de radiación Cherenkov difiere de manera significativa de aquel que se produce por un neutrino del muón ν_μ .

La primera prueba experimental de la hipótesis de dos diferentes tipos de neutrinos fue obtenida en Brookhaven en 1962 por Lederman, Schwartz y Steinberger. La idea básica del experimento fue utilizar un haz de protones con energías de alrededor de 15 GeV y hacerlos chocar con un blanco de berilio [11]. El flujo resultante de partículas moviéndose en la dirección del detector golpea un escudo de hierro cuyo espesor era de 13.5 metros. El objetivo de dicho

escudo era filtrar a los muones y kaones de tal manera que se obtuviese un haz casi puro de neutrinos. Posteriormente, las interacciones de los neutrinos fueron observadas en una cámara de chispas de diez toneladas de aluminio colocada detrás del escudo de acero.

El resultado de dicho experimento fue que se identificaron 29 casos para la reacción



y ningún evento para la reacción (prohibida)



Si sólo existiese un tipo de neutrino, la reacción dada en (1.6) debiese haber sido igual de probable que la primera. Por ende, se concluye que el neutrino del electrón ν_e y el neutrino del muón ν_{μ} son partículas diferentes. La configuración experimental se puede apreciar en la figura 1.2.

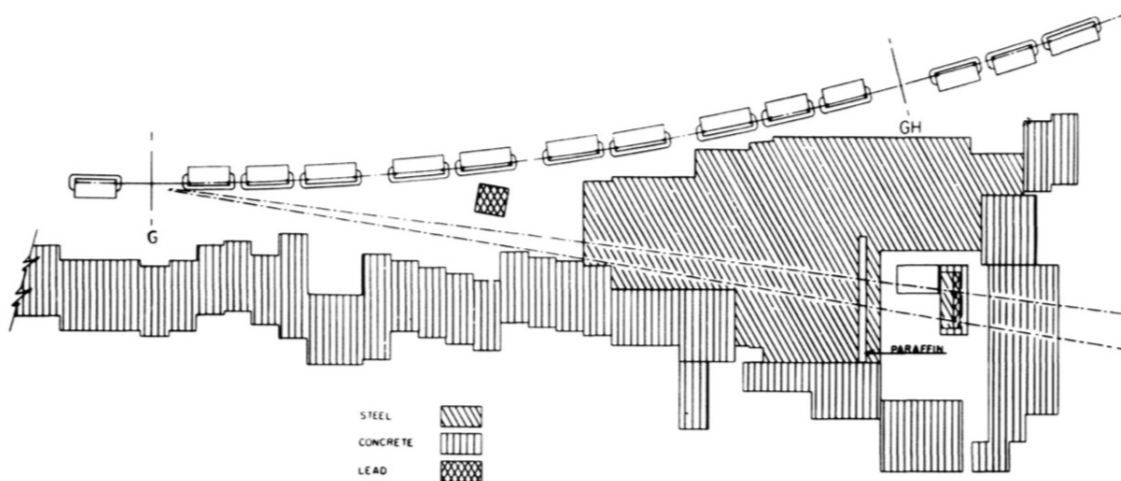


Figura 1.2: Forma del experimento de Lederman y colaboradores para la identificación del neutrino del muón ν_{μ} . La línea de vuelo del haz desde el objetivo hacia el detector forma un ángulo de 7.5 grados con respecto al punto G . Se eligió una energía operativa de 15 GeV para mantener a los muones penetrando el escudo de acero a un nivel tolerable. (Imagen tomada de Danby G. et al. *Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos*, vol. 9, ejemplar 1, pág. 37, 1962.)

1.1.3 El neutrino del tau

El tau τ es una partícula elemental, que al igual que electrón y el muón, posee una carga eléctrica igual a -1 y espín $1/2$. Este leptón fue detectado por primera vez en una serie de experimentos realizados en los años 1974 y 1977 por Martin Lewis Perl y colaboradores en el Laboratorio Nacional de Aceleradores SLAC³ [6]. El descubrimiento de este leptón dio la pauta para predecir la existencia de un tercer tipo de neutrino: el neutrino del tau ν_{τ} .

³Originalmente, este complejo experimental fue llamado *Stanford Linear Accelerator Center* y posteriormente adoptó el nombre que tiene hoy en día *SLAC National Accelerator Laboratory*.

El experimento para la búsqueda del neutrino del tau ν_τ se llevó a cabo en Fermilab bajo el nombre de *Direct Observation of the Nu Tau* (DONUT). Fue hasta julio del año 2000 que la colaboración del experimento DONUT anunció la existencia de este neutrino.

1.2 Fuentes de Neutrinos

La mayoría de los neutrinos presentes en el universo actual fueron originados alrededor de 14 mil millones de años atrás, poco después de la Gran Explosión (“Big Bang”). Desde entonces, el universo se está expandiendo y enfriando y la enorme cantidad de neutrinos que surgieron después de esa explosión forman parte del fondo de radiación cósmica [7]. El Sol es la fuente más importante de producción de neutrinos cercana a la Tierra. Los neutrinos solares se originan en el interior del Sol por fusión nuclear y les toma cerca de dos segundos para emerger de él. Además del Sol, existen otras fuentes importantes de neutrinos como son los reactores nucleares, los aceleradores de partículas, el decaimiento de elementos radioactivos en el interior de la Tierra y el choque de los rayos cósmicos con la atmósfera terrestre. Esta última forma de producción da lugar a los que se conocen como los neutrinos atmosféricos, de los cuales se hará un estudio detallado de su producción y sus principales características.

1.2.1 Neutrinos atmosféricos

Los rayos cósmicos son partículas de muy alta energía que llegan a la Tierra desde el universo. En la región de energía del orden de los GeV por nucleón las partículas que forman los rayos cósmicos son, en su mayoría, protones ($\approx 87\%$), núcleos de helio ($\approx 11\%$) y, en menor proporción, otros núcleos pesados ($\approx 2\%$) [12]. Los electrones y los fotones también son parte de los rayos cósmicos, pero no contribuyen a la producción de neutrinos [13].

Cuando los rayos cósmicos entran a la Tierra chocan con los núcleos que se encuentran en la parte superior de la atmósfera. El resultado de estas colisiones da, principalmente, la producción de piones π^\pm y kaones K^\pm . Como estas partículas son inestables, decaen para eventualmente producir neutrinos del muón ν_μ y neutrinos del electrón ν_e , así como sus respectivos antineutrinos. Las principales fuentes de neutrinos (antineutrinos) son las reacciones [14]:

$$\begin{aligned}
 \mu^\pm &\rightarrow \mu^\pm \nu_\mu \bar{\nu}_\mu \\
 K^\pm &\rightarrow \mu^\pm \nu_\mu \bar{\nu}_\mu \\
 K_L^0 &\rightarrow \pi^\pm e^\mp \bar{\nu}_e \nu_e \\
 K_L^0 &\rightarrow \pi^\pm \mu^\mp \bar{\nu}_\mu \nu_\mu \\
 \mu^\pm &\rightarrow e^\pm \bar{\nu}_\mu \nu_e \bar{\nu}_e \nu_\mu.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

En promedio se producen el doble de neutrinos del muón que del electrón en un rango de energías de 0.2 a 2 GeV [15]. Haciendo un conteo simple, esta relación, expresada como el cociente de los flujos de los neutrinos y antineutrinos atmosféricos de muones y electrones, nos da

$$r = \frac{\Phi^{\nu_e + \bar{\nu}_e}}{\Phi^{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}} \equiv \left(\frac{e}{\mu} \right) = \frac{1}{2}. \tag{1.8}$$

En realidad, haciendo una evaluación más detallada, para dicho intervalo de energías, se tiene que $r \approx 0.44$ [14]. A energías mayores a los 3 GeV, el flujo de neutrinos comienza a decaer muy rápidamente [16], debido a que la fracción de muones que pueden llegar a la Tierra se incrementa.

Los neutrinos atmosféricos observados a diferentes ángulos con respecto al zenit recorren trayectorias que van entre los 10 y 30 kilómetros hasta llegar a trayectorias del orden de 10^4 kilómetros [15], ver figura 1.3.

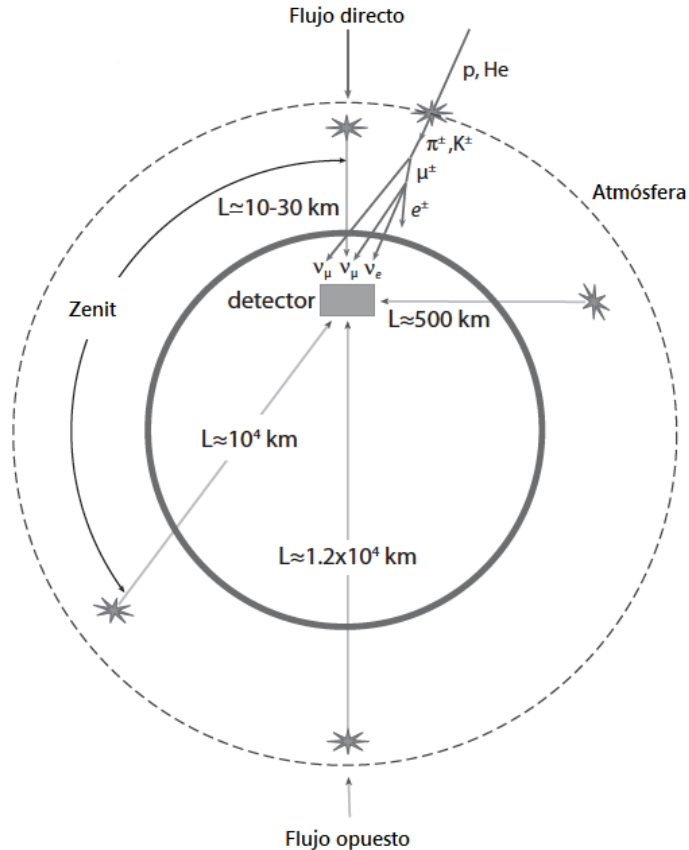


Figura 1.3: Representación esquemática de los diferentes ángulos con respecto al zenit de los neutrinos atmosféricos y la distancias que recorren para llegar al detector. (Imagen tomada de Barger, V. et al, *The Physics of Neutrinos*, Princeton University Press, New Jersey, pág. 60, 2012.)

Las primeras investigaciones sobre los neutrinos atmosféricos se realizaron en las minas de oro de East Rend, en Johannesburgo, y Kolar Gold Fields, en la India. Inicialmente, dichos experimentos se enfocaron en la búsqueda de la desintegración del protón. Sin embargo, el principal trasfondo de esta reacción eran los neutrinos atmosféricos y de esta manera surgió su estudio.

Básicamente, la detección de neutrinos se realiza por medio de interacciones débiles de corriente cargada

$$\nu_e (\nu_\mu) + N \rightarrow e^- (\mu^-) + \dots$$

donde N es el núcleo usado como blanco. Para definir la sensibilidad del experimento es

importante conocer la respuesta del detector al impacto de muones y electrones. Como regla general, sólo se usan los eventos que ocurren en un volumen aislado dentro del detector. En los detectores de radiación Cherenkov en agua, la diferencia entre un neutrino del electrón y uno del muón se despliega en forma de anillos de radiación Cherenkov con ciertas características particulares, las cuales permiten identificar a la partícula que ocasionó la interacción.

Para excluir la dependencia de los errores en la determinación de los flujos absolutos de neutrinos, se introduce el cociente de los eventos observados con los eventos esperados teóricamente como

$$R = \frac{r_{\text{obs}}}{r_{\text{teo}}}. \quad (1.9)$$

En ausencia de cualquier mecanismo de conversión de neutrinos, se tiene que $R = 1$. Además de las cantidades anteriores, la asimetría entre los eventos detectados para muones y electrones es de gran interés para los físicos experimentales. Consideremos que se tiene un flujo de neutrinos, el cual es producido entre los 10 y 30 kilómetros sobre el nivel del mar. Si uno ignora la influencia del campo magnético terrestre, se tiene entonces que el flujo de rayos cósmicos es isotrópico. De esta manera, se tiene que la intensidad de la producción en el flujo de los neutrinos atmosféricos es la misma para todos los puntos en la atmósfera. Las incertidumbres en el cálculo de los flujos atmosféricos alcanzan el 20 por ciento, mientras que las incertidumbres del cociente $\Phi^{\nu_\mu}/\Phi^{\nu_e}$ son del orden del 5 por ciento. Sin embargo, si uno compara dos flujos de neutrinos provenientes de lugares diametralmente opuestos en la atmósfera terrestre, uno puede proceder sin el conocimiento de estas cantidades. Supongamos entonces que tenemos dos flujos de neutrinos del muón, los cuales provienen de puntos opuestos en la Tierra y llegan hasta un detector, como en la figura 1.3. Denotemos al flujo de neutrinos producido justo por encima del detector como $\Phi_u^{\nu_\mu}$, mientras que al flujo opuesto lo etiquetaremos como $\Phi_d^{\nu_\mu}$. Notemos que en esta situación, los neutrinos producidos a una altura h de la superficie terrestre, recorrerán esa distancia (aproximadamente) para llegar al detector, mientras que los neutrinos producidos del otro lado de la Tierra recorrerán una distancia de $2R_E + h$, con R_E el radio de la Tierra, para ser detectados. Si uno supone que no existe un mecanismo que cambie el flujo de neutrinos en su camino hacia el detector, entonces $\Phi_u^{\nu_\mu} = \Phi_d^{\nu_\mu}$.

En el cuadro 1.1 se muestran los valores de R en los primeros experimentos con neutrinos atmosféricos. De los resultados de las colaboraciones de NUSEX y Frejus se observa que los cocientes de los eventos esperados y teóricos coinciden con los límites de los errores experimentales. Sin embargo, los datos obtenidos por Kamiokande, IMB y soudan-2 mostraron que el valor de μ/e era mucho menor que el teórico. Además, los resultados de Kamiokande mostraron que el déficit en los eventos del muón tiene dependencia en el ángulo zenit y que el número de eventos para esta partícula provenientes de lugares diametralmente opuestos en la atmósfera no coincidían, es decir $\Phi_u^{\nu_\mu} \neq \Phi_d^{\nu_\mu}$. Todas las anomalías antes mencionadas son referidas como el problema de los neutrinos atmosféricos.

Después de que entró en operación el experimento de Super-Kamiokande (Super-K) en 1996, se consiguieron resultados más confiables en la detección de los flujos de los neutrinos atmosféricos. El diseño de Super-K hace posible la detección con energías de los 100 MeV

Primeros experimentos con neutrinos atmosféricos			
Experimento	Tipo de detector	Exposición (kt-año)	$R = (\mu/e)_{\text{obs}} : (\mu/e)_{\text{teo}}$
NUSEX	Calorímetro de hierro	0.74	$0.96^{+0.32}_{-0.28}$
Frejus	Calorímetro de hierro	1.56	$1.00 \pm 0.15 \pm 0.08$
Kamiokande	Agua	7.7	$0.60^{+0.06}_{-0.05} \pm 0.05$
Kamiokande	Agua	8.2	$0.57^{+0.08}_{-0.07} \pm 0.07$
IMB-3	Agua	7.7	$0.54 \pm 0.05 \pm 0.012$
IMB-3	Agua	2.1	$1.4^{+0.4}_{-0.3} \pm 0.3$
Soudan-2	Calorímetro de hierro	5.1	$0.68 \pm 0.11 \pm 0.06$

Tabla 1.1: Información de Boyarkin, O. *Advanced Particle Physics: The Standard Model and Beyond*, vol. 2, Taylor & Francis, pág. 520, 2011.

hasta los 1000 GeV. El análisis de datos de Super-K dio los siguientes valores para R [14]:

$$R = 0.651^{+0.019}_{-0.018} \pm 0.050$$

$$R = 0.711 \pm 0.060 \pm 0.085.$$

Las mediciones también mostraron que la distribución del flujo de neutrinos del muón con el ángulo zenit difieren significativamente de los cálculos teóricos, mientras que el flujo de los neutrinos del electrón no presentan esta anomalía. El cociente en los flujos de neutrinos $\Phi_u^{\nu\mu}$ y $\Phi_d^{\nu\mu}$ fue

$$\left[\frac{\Phi_u^{\nu\mu}(-1.0 < \cos \theta_z < -0.2)}{\Phi_d^{\nu\mu}(+0.2 < \cos \theta_z < 1.0)} \right]_{\text{obs}} = 0.52 \pm 0.05.$$

La ausencia de una simetría similar para el flujo de los neutrinos del electrón demostró que existía un mecanismo que modificase al flujo en su camino hacia el detector. Esta serie de detalles son evidencia del fenómeno de oscilación de neutrinos.

1.3 Modelo estándar

El modelo estándar de partículas elementales es una teoría cuántica de campos que describe las interacciones débiles, electromagnéticas y fuertes junto con las partículas que constituyen este modelo. El modelo estándar propone que la materia en el universo está constituida por fermiones elementales que interactúan con los campos a través de partículas mediadoras llamadas bosones de norma [17].

Para comprender las propiedades de las partículas elementales es necesario poder describir las fuerzas entre ellas. Las partículas en la naturaleza están sometidas a cuatro fuerzas fundamentales; en orden de intensidad decreciente, son: la fuerza fuerte, la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza gravitacional. En la escala de la física de partículas las fuerzas gravitacionales son insignificantes. El modelo estándar excluye de consideración al campo gravitacional.

La fuerza fuerte es responsable de unir a los quarks estrechamente entre sí para formar protones, neutrones y otras partículas pesadas. Su alcance es extremadamente corto y es despreciable para separaciones mayores que aproximadamente 10^{-15} m. La fuerza nuclear que une a los neutrones y protones en los núcleos suele considerarse como un efecto residual de la más básica fuerza fuerte entre los quarks.

La fuerza electromagnética, que une a los electrones y a los protones en el interior de los átomos y moléculas para formar materia normal, es aproximadamente dos órdenes de magnitud más débil que la fuerza fuerte. Es una fuerza de largo alcance que decrece en intensidad como el inverso del cuadrado de la separación entre las partículas interactuantes.

La fuerza débil es una fuerza de corto alcance que explica el decaimiento beta de los núcleos y el decaimiento de los quarks y leptones más pesados. Su intensidad es de sólo aproximadamente 10^{-6} veces la de la fuerza fuerte.

Por último, la fuerza gravitacional es una fuerza de largo alcance cuya intensidad es sólo 10^{-43} veces la de la fuerza fuerte. A pesar de que esta fuerza es la responsable de mantener unidos a los planetas, las estrellas y las galaxias, su efecto sobre las partículas elementales es despreciable.

Interacciones de partículas					
Interacción (Fuerza)	Partículas sobre las que actúa	Intensidad relativa	Duraciones típicas para desintegraciones vía una interacción dada	Alcance de fuerza	Partícula intercambiada portadora de fuerza
Fuerte	Quarks y hadrones	1	$\leq 10^{-20}$ s	Corto (≈ 1 fm)	Gluón
Electromagnética	Partículas cargadas	$\approx 10^{-2}$	$\approx 10^{-16}$ s	Largo (∞)	Fotón
Débil	Quarks y leptones	$\approx 10^{-6}$	$\geq 10^{-10}$ s	Corto ($\approx 10^{-3}$ fm)	Bosones W^\pm y Z^0
Gravitacional	Todas las partículas	$\approx 10^{-43}$?	Largo (∞)	Gravitón

Tabla 1.2: Resumen de las principales características de las interacciones fundamentales. El apartado de intensidad relativa tiene como referencia a dos quarks u a 3×10^{-17} m. (Información de Serway R. et al. *Física moderna*, Cengage Learning, tercera edición, Cengage Learning, México, pág. 549, 2005.)

Desde un punto de vista clásico, la entidad responsable de transmitir una fuerza de una partícula a otra es el campo. El campo puede transportar energía y cantidad de movimiento de una partícula a otra. Según las teorías de campo cuánticas, la energía y la cantidad de movimiento de todos los campos están cuantizadas, y el cuanto que transporta un “gránulo” de cantidad de movimiento y energía de un tipo de partícula a otra se denomina partícula de campo. En física de partículas, las interacciones entre éstas se describen en términos del intercambio de campo, o cuantos, todos ellos bosones. En el caso de la interacción electromagnética, por ejemplo, puede decirse que la fuerza electromagnética es mediada, o transportada, por fotones y que éstos son los cuantos del campo electromagnético. De manera semejante, la fuerza fuerte es mediada por partículas de campo denominadas gluones. La fuerza débil es mediada por partículas conocidas como bosones W^\pm y Z^0 . Finalmente, la fuerza gravitacional es transportada por cuantos llamados gravitones [18]. Todas estas interacciones, las partículas sobre las que actúan, sus alcances, sus intensidades relativas y las partículas de campo correspondientes se resumen en el cuadro 1.2.

La cuarta columna de este cuadro presenta otra forma de clasificar las interacciones: por medio del tiempo de vida observado de una partícula que decae. En realidad, con sólo unas

cuantas excepciones, el tiempo de vida de las partículas en desintegración constituye un excelente indicador sobre cuál interacción ha provocado el decaimiento; tiempos de vida más breves están asociados a fuerzas más intensas. Como se muestra en la tabla 1.2, las partículas que decaen vía esta fuerza fuerte suelen ser las de tiempo de vida más corto, luego vienen las que decaen por las fuerzas electromagnéticas; y por último, las partículas que decaen debido a la interacción débil, las cuales tienen los tiempos de vida más largos observados [18].

1.3.1 Leptones

Los leptones (del griego *leptos*, que significa “pequeño” o “ligero”) son un grupo de partículas que participan en las interacciones débil y electromagnética. Todos los leptones poseen un espín de $1/2$, en unidades de \hbar . Existen seis leptones, clasificados de acuerdo a su carga eléctrica Q , su número electrónico L_e , su número muónico L_μ y su número tauónico L_τ . Estos leptones se acomodan en tres familias o generaciones:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}.$$

El cuadro 1.3 muestra que el leptón tau en realidad es bastante masivo y que su masa es alrededor del doble de la masa del protón. También es de apreciarse que cada leptón tiene una antipartícula. Es bastante inesperado e interesante que los neutrinos y los antineutrinos tengan, cada uno, una helicidad distinta, o relación entre la cantidad de movimiento lineal y las direcciones del espín. El espín de un neutrino es opuesto a su dirección de desplazamiento, en tanto que el espín de un antineutrino es paralelo a su dirección de desplazamiento. Como se verá, conocer bien la masa del neutrino posee gran importancia en los modelos físicos para consolidar las teorías de unificación de partículas elementales.

Leptones							
Nombre de la partícula	Símbolo	Antipartícula	Masa (MeV/c ²)	Q	L_{e^\mp}	L_{μ^\mp}	L_{τ^\mp}
Electrón	e^-	e^+	0.511	-1	± 1	0	0
Neutrino del electrón	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$< 2.8 \times 10^{-6}$	0	± 1	0	0
Muón	μ^-	μ^+	105.7	-1	0	± 1	0
Neutrino del muón	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	$< 3.5 \times 10^{-6}$	0	0	± 1	0
Tau	τ^-	τ^+	1784	-1	0	0	± 1
Neutrino del tau	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	$< 8.4 \times 10^{-6}$	0	0	0	± 1

Tabla 1.3: Incluyendo a los antileptones, la familia de los leptones está constituida de 12 elementos en total.

1.3.2 Quarks

En 1963, Murray Gell-Mann y George Zweig propusieron cada uno por separado que los hadrones⁴ poseen una subestructura más elemental. Según su modelo todos los hadrones son sistemas compuestos por dos o tres constituyentes fundamentales denominados quarks⁵. En el modelo original había tres tipos de quarks designados por los símbolos u , d y s , derivados de los nombres arbitrarios arriba (up), abajo (down) y laterales (sideways) o, ahora más comúnmente, extraño (strange) [18]. Con el paso de los años, principalmente en la década de los años 70, se fueron encontrando los quarks (charm, c), (top, t) y (bottom, b).

Una propiedad poco común de los quarks es que fue necesario asignarles cargas electrónicas fraccionarias. Las cargas de los quarks u , d y s son $+2/3$, $-1/3$ y $-1/3$, respectivamente. Cada quark tiene un número bariónico de $1/3$ y un espín de $1/2$. La extrañeza de los quarks u y d es 0, mientras que la del quark s es -1. Con cada quark está asociado un antiquark de carga, número bariónico y extrañeza opuestas. En el cuadro 1.4 se proporcionan otras propiedades de los quarks.

Quarks								
Nombre	Símbolo	Espín	Carga	Número bariónico	Extrañeza	Encanto	Bottomness	Topness
<i>Up</i>	u	1/2	+2/3	+1/3	0	0	0	0
<i>Down</i>	d	1/2	-1/3	+1/3	0	0	0	0
<i>Strange</i>	s	1/2	-1/3	+1/3	-1	0	0	0
<i>Charm</i>	c	1/2	+1/3	+1/3	0	+1	0	0
<i>Bottom</i>	b	1/2	-1/3	+1/3	0	0	-1	0
<i>Top</i>	t	1/2	+1/3	+1/3	0	0	0	+1

Tabla 1.4: Para obtener las propiedades de los antiquarks basta con intercambiar los signos en cada una de las propiedades correspondientes.

1.3.3 Teoría electrodébil

Del cuadro 1.2 se aprecia que la interacción débil es una fuerza de alcance extremadamente corto, puesto que su distancia de interacción es aproximadamente igual a 10^{-18} m. Esta interacción de corto alcance implica que las partículas cuantizadas que transportan el campo débil (los bosones W^+ , W^- y Z^0) son bastante masivas. Las particularidades de estos bosones de norma es que carecen de estructura interna, semejan ser puntuales y son tan masivos como un átomo de kriptón⁶. Como ya se ha mencionado, la interacción débil es la responsable del decaimiento del neutrón y del decaimiento beta de otros bariones más pesados. Más importante que lo anterior, la interacción débil es responsable de la desintegración de los quarks c , s , b y t en los más ligeros y estables quarks u y d , así como de la desintegración de los leptones

⁴A las partículas que interactúan a través de la fuerza se les denomina hadrones. Las dos clases de hadrones, los mesones y los bariones, se distinguen por sus masas y espines.

⁵Zweig los denominó “ases”. Gell-Mann tomó prestado el término *quarks* del pasaje “Three quarks for Muster Mark” en la obra *Finnegan’s Wake* de James Joyce.

⁶La masa de un átomo de Kr es aproximadamente $78 \text{ GeV}/c^2$.

masivos μ y τ en electrones (más ligeros). Por todas estas razones, la interacción de campo débil es muy importante debido a que rige la estabilidad de las partículas básicas de la materia [18].

Otro rasgo interesante de la interacción débil es su falta de simetría, en especial cuando se le compara con el elevado grado de simetría mostrado por las otras tres interacciones fundamentales. Por ejemplo, la interacción débil, a diferencia de la interacción fuerte no es simétrica bajo reflexión especular⁷ o intercambio de carga⁸. Cuando se habla de que la interacción débil no es simétrica significa que la reacción con todos los cambios de cantidades ocurre con menos frecuencia que la reacción directa.

En el año de 1979, los físicos Sheldon Glashow, Steven Weinberg y Abdus Salam ganaron el premio Nobel de física por haber desarrollado una teoría que unifica las interacciones electromagnética y débil. Esta teoría electrodébil postula que las interacciones débil y electromagnética tienen la misma intensidad para partículas de energías muy elevadas. Así, las dos interacciones son consideradas como dos manifestaciones diferentes de una sola interacción electrodébil unificadora. El fotón y los tres bosones masivos (W^\pm y Z^0) juegan un rol fundamental en la teoría electrodébil. Uno de los grandes éxitos de esta teoría fue el concerniente a las masas de las partículas W y Z de alrededor de $80 \text{ GeV}/c^2$ y $91 \text{ GeV}/c^2$, respectivamente. El premio Nobel de 1984 fue otorgado a Carlo Rubia y Simon van der Meer por su trabajo que condujo al descubrimiento de estas partículas justo con esas masas en la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN).

En física de altas energías, la combinación de la teoría electrodébil y la electrodinámica cuántica para la interacción de campo fuerte se denomina modelo estándar [18]. El modelo estándar no contesta todas las preguntas. Requiere como parámetros de entrada más de una docena de números medidos, como las masas de los leptones y los quarks. Además, no explica el porqué de la existencia de seis tipos de leptones como también de quarks. Una cuestión específica concerniente a las partículas de campo es por qué el fotón carece de una masa mientras que los bosones W y Z sí cuentan con ella. Debido a esta diferencia, las fuerzas electromagnética y débil son tan distintas a bajas energías, pero se hacen semejantes, o simétricas, a energías muy elevadas. Este comportamiento en la transición de energías altas a bajas se denomina ruptura de simetría. En 1964, el físico escocés Peter Higgs introdujo un mecanismo para el rompimiento de simetría electrodébil al proponer un nuevo campo, denominado campo de Higgs, que permea todo el espacio y proporciona masa a las partículas. Así como todos los campos clásicos, la cuantización del campo de Higgs conduce a una partícula que transporta fuerza denominada bosón de Higgs. El modelo estándar, incluyendo el mecanismo de Higgs, proporciona una explicación lógica y consistente de la naturaleza masiva de los bosones W y Z . En la figura 1.4 se hace un resumen de todas las partículas básicas del modelo estándar, la cual, además, contiene la información principal de cada una de éstas.

⁷La reflexión especular significa que todas las cantidades en una reacción de una partícula dada se intercambian como en una reflexión especular: izquierda por derecha, un movimiento en dirección al espejo por un movimiento hacia fuera.

⁸El intercambio de carga es intercambiar los signos de las cargas eléctricas en una reacción de partículas por sus opuestas.

Standard Model of Elementary Particles

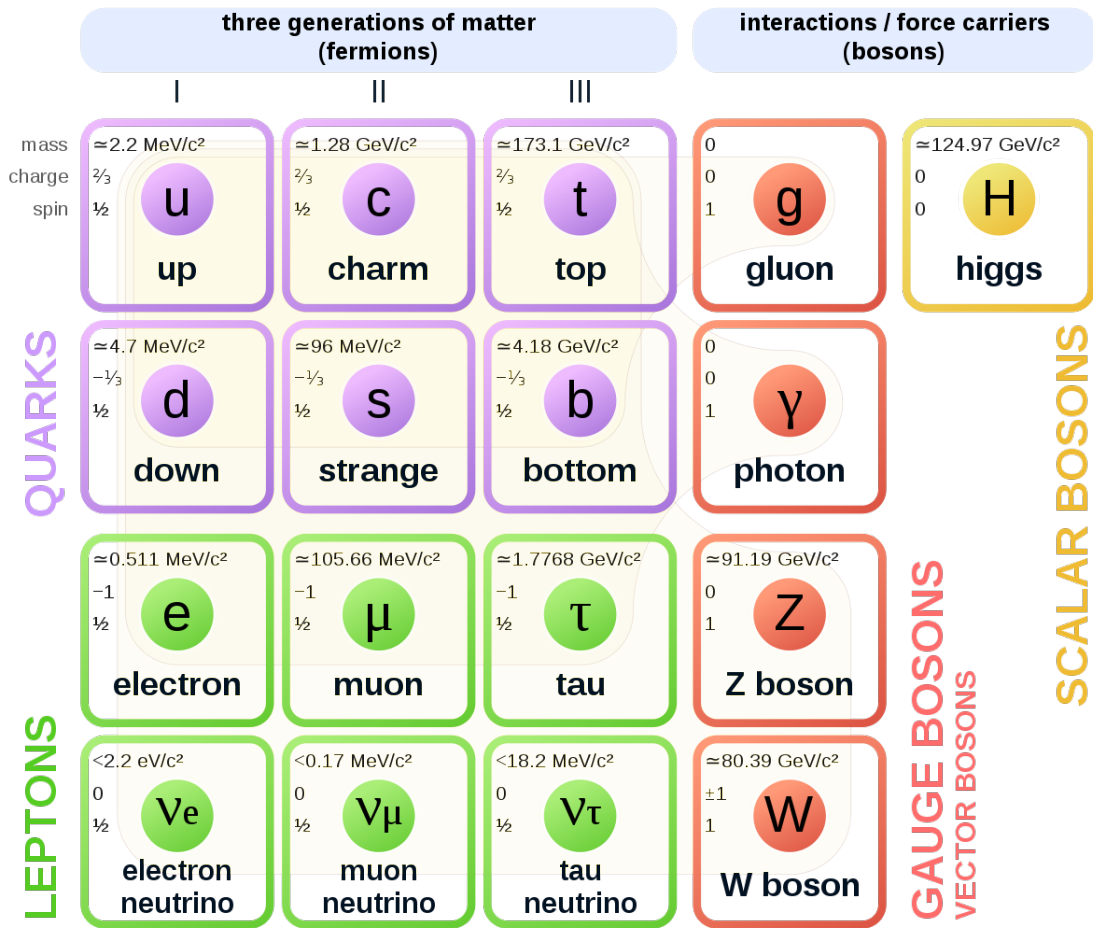


Figura 1.4: Modelo estándar de partículas elementales. En color violeta se muestran los seis tipos de quarks con sus respectivas masas, cargas eléctricas y espines. De igual manera, se tienen a los seis leptones conocidos en color verde y los bosones de norma en rojo claro. El bosón de Higgs aparece en color amarillo y es el bosón de norma que compone el fenómeno del rompimiento de simetría. (Imagen tomada de https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model)

Capítulo 2

Oscilaciones de neutrinos

Entre los años de 1957 y 1958 Bruno Pontecorvo formuló la primera idea de que los neutrinos podrían transformarse entre uno y otro. En ese tiempo, la teoría de Murray Gell-Mann y Abraham Pais de oscilaciones para los mesones $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$ había sido ya comprobada por los experimentos. Pontecorvo estaba fascinado con la idea de las oscilaciones entre partículas y pensó en aplicar estos resultados para los leptones [9]. La idea inicial era que un neutrino podría transformarse en un antineutrino y viceversa. Después del descubrimiento del neutrino del muón, Pontecorvo aplicó su idea de oscilaciones de neutrinos al caso de los dos diferentes tipos de neutrinos ν_e y ν_μ . En los años siguientes se fueron desarrollando teorías y experimentos para tratar de pulir las ideas de Pontecorvo y encontrar la manera de corroborar sus hipótesis. Sin embargo, a pesar de ciertos indicios en experimentos con neutrinos solares, no fue hasta 1998 (casi 40 años después) que el experimento de Super-Kamiokande en Japón dio la primer muestra de evidencia contundente del fenómeno de oscilaciones. Posteriormente, en el año 2002, el observatorio de neutrinos de Sudbury, SNO¹ por sus siglas en inglés, en Ontario Canadá publicó los resultados de sus experimentos, los cuales terminaron de probar la existencia del fenómeno de oscilaciones al resolver el problema del rompecabezas de los neutrinos solares².

Una característica importante en la derivación de una expresión general para las probabilidades de oscilación es el hecho de que los neutrinos en los experimentos son ultrarrelativistas, debido al hecho de que sus masas son menores que un electronvolt y sólo neutrinos con energías mayores a 100 keV pueden ser detectados [19].

2.1 Oscilaciones en el vacío

Neutrinos ν_α con sabor definido $\alpha = e, \mu, \tau$ son producidos en procesos de interacción débil de corriente cargada (CC) de un leptón cargado ℓ_α^- (es decir, transiciones $\ell_\alpha^- \rightarrow \nu_\alpha$) o en conjunto con un antileptón cargado ℓ_α^+ (creación de pares $\ell_\alpha^+ \nu_\alpha$). En la teoría estándar de oscilaciones de neutrinos, un neutrino de sabor α y momento \mathbf{p} creado en una interacción débil de corriente

¹Sudbury Neutrino Observatory.

²El problema de los neutrinos solares surgió de la discrepancia entre el número de neutrinos que llegaban a la Tierra y los modelos teóricos del interior del Sol. Este problema persistió desde mediados de la década de los 60 hasta el año 2002. Fue gracias al experimento del SNO que se pudo resolver esta incógnita.

cargada a un tiempo t_0 es descrito por el estado de sabor

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) |\nu(t_0)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) |\nu_\alpha\rangle, \quad (2.1)$$

donde $\hat{\mathcal{U}}(t, t_0)$ es el operador de evolución, el cual satisface las condiciones

$$\hat{\mathcal{U}}(t_0, t_0) = \mathbb{I} \quad \text{y} \quad \hat{\mathcal{U}}(t, t_0)^\dagger = \hat{\mathcal{U}}(t, t_0)^{-1}, \quad (2.2)$$

con \mathbb{I} la matriz identidad. Empleando la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

es posible hallar una relación para poder determinar al operador de evolución $\hat{\mathcal{U}}(t, t_0)$ en forma explícita. Sustituyendo la expresión (2.1) en (2.3) se obtiene

$$i \frac{d\hat{\mathcal{U}}(t, t_0)}{dt} = \hat{H}(t) \hat{\mathcal{U}}(t, t_0). \quad (2.4)$$

Por tanto, del resultado anterior, es claro que el operador de evolución está determinado cuando el hamiltoniano $\hat{H}(t)$ del sistema es dado. En particular, si \hat{H} no depende explícitamente del tiempo, es posible resolver fácilmente la ecuación (2.4) para obtener

$$\hat{\mathcal{U}}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}, \quad (2.5)$$

en donde se observa que el operador de evolución $\hat{\mathcal{U}}(t, t_0)$ cumple con las condiciones requeridas en (2.2).

El siguiente paso en el desarrollo consiste en calcular la amplitud de probabilidad de que al tiempo t el sistema se encuentre en un estado $|\nu_\beta\rangle$. Por lo tanto, es necesario calcular

$$\mathcal{U}_{\beta\alpha}(t, t_0) = \langle \nu_\beta | \psi(t) \rangle = \langle \nu_\beta | \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle. \quad (2.6)$$

Para calcular (2.6) de manera expresa, es conveniente trabajar en una base donde el operador hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_0$ sea diagonal. En particular, dicha base es conocida como la base de los eigenestados de masa $\{|\nu_l\rangle\}$. Para hacer el cambio de base, se reescribe la ecuación (2.6) como

$$\mathcal{U}_{\beta\alpha}(t, t_0) = \sum_{k,j} \langle \nu_\beta | \nu_k \rangle \langle \nu_k | \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) | \nu_j \rangle \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle, \quad (2.7)$$

con

$$\sum_l |\nu_l\rangle \langle \nu_l| = \mathbb{I}.$$

Los eigenestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ se relacionan con los eigenestados de masa $|\nu_j\rangle$ mediante una matriz unitaria $U_{\alpha j}^*$, mejor conocida como matriz de mezcla³, de la siguiente manera

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_j U_{\alpha j}^* |\nu_j\rangle. \quad (2.8)$$

³En la literatura también se le puede encontrar como matriz PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata).

De igual forma, los eigenestados de masa se pueden escribir en términos de los eigenestados de sabor como

$$|\nu_j\rangle = \sum_{\alpha} U_{\alpha j} |\nu_{\alpha}\rangle, \quad (2.9)$$

donde $U_{j\alpha}^{\dagger} = U_{\alpha j}^*$.

De las ecuaciones (2.8) y (2.9) se obtienen las relaciones

$$\langle \nu_j | \nu_{\alpha} \rangle = U_{\alpha j}^* \quad \text{y} \quad \langle \nu_{\beta} | \nu_k \rangle = U_{\beta k}, \quad (2.10)$$

donde se han empleado las propiedades de unitariedad de la matriz de mezcla, las cuales son

$$\sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{y} \quad \sum_{\alpha} U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} = \delta_{jk}. \quad (2.11)$$

Sustituyendo las expresiones dadas por (2.11) en la ecuación (2.7) se tiene

$$\mathcal{U}_{\beta\alpha}(t, t_0) = \sum_{k,j} U_{\beta k} \langle \nu_k | \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) | \nu_j \rangle U_{\alpha j}^*. \quad (2.12)$$

Por otro lado, usando la ecuación de Schrödinger (2.3), se observa que

$$\hat{\mathcal{U}}(t, t_0) | \nu_j \rangle = e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} | \nu_j \rangle = e^{-iE_j(t-t_0)} | \nu_j \rangle. \quad (2.13)$$

Para escribir el último resultado se interpretó al operador $\hat{\mathcal{U}}(t, t_0)$ en términos de su serie de potencias [20]:

$$\begin{aligned} e^{-i\hat{H}_0(t-t_0)} | \nu_j \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-i(t-t_0))^m \hat{H}_0^m | \nu_j \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-i(t-t_0))^m E_j^m | \nu_j \rangle \\ &= e^{-iE_j(t-t_0)} | \nu_j \rangle. \end{aligned}$$

Usando el resultado anterior, la expresión (2.12) quedaría como

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\beta\alpha}(t, t_0) &= \sum_{k,j} U_{\beta k} \langle \nu_k | e^{-iE_j(t-t_0)} | \nu_j \rangle U_{\alpha j}^* = \sum_{k,j} U_{\alpha j}^* U_{\beta k} e^{-iE_j(t-t_0)} \langle \nu_k | \nu_j \rangle \\ &= \sum_{k,j} U_{\alpha j}^* U_{\beta k} e^{-iE_j(t-t_0)} \delta_{kj} = \sum_j U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-iE_j(t-t_0)}. \end{aligned}$$

De esta manera, la amplitud de probabilidad de que el estado $|\nu_{\alpha}\rangle$ decaiga al estado $|\nu_{\beta}\rangle$ al tiempo t es:

$$\boxed{\mathcal{U}_{\beta\alpha}(t, t_0) = \sum_j U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-iE_j(t-t_0)}} \quad (2.14)$$

Ahora que se conoce la amplitud de probabilidad de manera explícita, es posible calcular la probabilidad de que al tiempo t un estado $|\nu_{\alpha}\rangle$ vaya al estado $|\nu_{\beta}\rangle$ como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}}(t) &= |\mathcal{U}_{\beta\alpha}(t, t_0)|^2 \\ &= \left(\sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-iE_k(t-t_0)} \right) \left(\sum_j U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{iE_j(t-t_0)} \right) \\ &= \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)(t-t_0)} \\ &= \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde se han introducido los términos $\Delta t = t - t_0$ y $E_{kj} = E_k - E_j$ para simplificar las expresiones.

La ecuación dada por (2.15) todavía se puede desarrollar un poco más con la finalidad de conseguir una relación más sencilla de trabajar, y que, además, revele su significado físico de forma clara. La manera de hacer este cálculo es desarrollar la suma sobre los índices j y k en tres casos posibles: una primera suma que corresponda al caso $j = k$; una segunda, a $j < k$; y una tercera, a $j > k$. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) &= \sum_j U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* + \sum_{j < k} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t} + \sum_{j > k} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t} \\ &= \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 + \sum_{j < k} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t} + \sum_{j > k} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t}. \end{aligned}$$

De la expresión anterior, tómesese el tercer sumando y hágase el cambio k por j :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) &= \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 + \sum_{j < k} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t} + \sum_{j < k} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k}^* e^{-iE_{jk}\Delta t} \\ &= \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 + \sum_{j < k} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t} + U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k}^* e^{-iE_{jk}\Delta t}), \end{aligned}$$

pero $E_{jk} = E_j - E_k = -(E_k - E_j) = -E_{kj}$, por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) &= \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 + \sum_{j < k} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t} + U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k}^* e^{iE_{kj}\Delta t}) \\ &= \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 + 2 \sum_{j < k} \text{Re}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un estado $|\nu_\alpha\rangle$ decaiga a $|\nu_\beta\rangle$ viene dada por,

$$\boxed{\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 + 2 \sum_{j < k} \text{Re}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-iE_{kj}\Delta t})} \quad (2.16)$$

La fórmula anterior muestra a la probabilidad como la suma de un término constante y otro oscilatorio. En la literatura se suele modelar a los neutrinos como partículas ultrarrelativistas, lo cual significa que la magnitud de su momento lineal $|\mathbf{p}|$ es muchísimo más grande que la masa del neutrino. En particular, recordemos que nosotros tenemos dos neutrinos de energías E_k y E_j respectivamente. Suponiendo que ambos neutrinos tienen el mismo momento lineal, podemos hacer uso de la aproximación ultrarrelativista de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_{kj} = E_k - E_j &= \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_k^2} - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_j^2} = |\mathbf{p}| \left(\sqrt{1 + \frac{m_k^2}{|\mathbf{p}|^2}} - \sqrt{1 + \frac{m_j^2}{|\mathbf{p}|^2}} \right) \\ &\approx |\mathbf{p}| \left[\left(1 + \frac{m_k^2}{2|\mathbf{p}|^2} \right) - \left(1 + \frac{m_j^2}{2|\mathbf{p}|^2} \right) \right] = \frac{(m_k^2 - m_j^2)}{2|\mathbf{p}|} \approx \frac{(m_k^2 - m_j^2)}{2E} \equiv \Delta_{kj}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Luego, la probabilidad puede ser expresado como

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 + 2 \sum_{j < k} \text{Re}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(t-t_0)\Delta_{kj}}). \quad (2.18)$$

El último paso en la derivación estándar de la probabilidad de oscilaciones de neutrinos está basado en el hecho de que los experimentos no miden el tiempo de propagación. Lo que realmente se conoce es la distancia L entre la fuente y el detector. Como los neutrinos se propagan con velocidades cercanas a la de la luz, se puede hacer la aproximación $t \approx L$ y se tiene entonces que

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 + 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re} \left(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i \Delta m_{kj}^2 L / 2E} \right). \quad (2.19)$$

Esta última expresión muestra que la distancia entre el detector y la fuente L y la energía E son las cantidades que dependen del experimento en cuestión, el cual, a su vez, determina las fases de oscilación mediante el término

$$\Phi_{kj} = -\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E}. \quad (2.20)$$

Como se puede apreciar de la relación anterior, las fases también están determinadas por la diferencia del cuadrado de las masas Δm_{kj}^2 , las cuales son constantes físicas. La amplitud de las oscilaciones está especificada únicamente por las componentes de la matriz de mezcla U , que son constantes de la naturaleza. Por lo anterior, las mediciones en los experimentos de oscilaciones de neutrinos permiten conseguir información del valor de la diferencia del cuadrado de las masas y de las componentes de la matriz mezcla.

Como se ha visto, existen varias formas de escribir a la probabilidad de oscilación⁴. Sin embargo, existe una forma particular de escribir a las probabilidades, la cual tiene la ventaja de mostrar explícitamente la diferencia entre las fórmulas de oscilación para neutrinos y antineutrinos. Dicha expresión se obtiene partiendo de la ecuación (2.19) y usando la siguiente relación

$$\sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 = \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*), \quad (2.21)$$

la cual se obtiene de las relaciones de unitariedad de la matriz de mezcla (2.11) siguiendo un desarrollo análogo al que se hizo para obtener (2.16). Si se sustituye este resultado en (2.19), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(\Phi_{kj}) &= \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) + 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{i\Phi_{kj}}) \\ &= \delta_{\alpha\beta} + 2 \sum_{j < k} [\operatorname{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{i\Phi_{kj}}) - \operatorname{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*)] \\ &= \delta_{\alpha\beta} + 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re} [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* (e^{i\Phi_{kj}} - 1)] \\ &= \delta_{\alpha\beta} + 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re} [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* (i \operatorname{sen} \Phi_{kj} - 2 \operatorname{sen}^2 \Phi_{kj} / 2)] \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \operatorname{Re} (U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \operatorname{sen}^2 \Phi_{kj} / 2 + 2 \sum_{j < k} \operatorname{Re} (i U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \operatorname{sen} \Phi_{kj}. \end{aligned}$$

⁴Por ejemplo, las ecuaciones (2.15) y (2.19).

Nótese que $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$, por lo que

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(\Phi_{kj}) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \text{Re}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \text{sen}^2 \Phi_{kj} / 2 - 2 \sum_{j < k} \text{Im}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \text{sen} \Phi_{kj}.$$

Finalmente, sustituyendo el valor de Φ_{kj} dado por (2.20), se tiene la expresión para la probabilidad

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \text{Re}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{j < k} \text{Im}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \text{sen} \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

La probabilidad de oscilación de los canales para los cuales $\alpha \neq \beta$ se conoce como *probabilidad de transición*, mientras que las probabilidad de oscilación de los canales en los que $\alpha = \beta$ se denomina *probabilidad de supervivencia*. En el caso de las probabilidades de supervivencia, la expresión (2.22) se reduce simplemente a

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = 1 - 4 \sum_{j < k} |U_{\alpha k}|^2 |U_{\alpha j}|^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right). \quad (2.23)$$

El tratamiento realizado hasta el momento asume que los diferentes eigenestados de masa tienen el mismo momento lineal, lo cual es técnicamente incorrecto. Un tratamiento más adecuado para considerar neutrinos con diferentes momentos lineales es usar el formalismo de paquetes de onda. Sin embargo, para fines prácticos, ambos procedimientos conducen a las mismas fórmulas para oscilaciones de neutrinos.

Otro aspecto importante a notar es que la suma sobre todas las probabilidades es igual a uno. Esto se puede observar desde la ecuación (2.6). Nótese que

$$|\mathcal{U}_{\beta\alpha}(t, t_0)|^2 = \mathcal{U}_{\beta\alpha}^*(t, t_0) \mathcal{U}_{\beta\alpha}(t, t_0) = \langle \nu_\alpha | \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) | \nu_\beta \rangle \langle \nu_\beta | \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle,$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} |\mathcal{A}_{\beta\alpha}(t, t_0)|^2 &= \sum_{\beta} \langle \nu_\alpha | \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) | \nu_\beta \rangle \langle \nu_\beta | \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle \\ &= \langle \nu_\alpha | \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \left(\sum_{\beta} | \nu_\beta \rangle \langle \nu_\beta | \right) \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle \\ &= \langle \nu_\alpha | \hat{\mathcal{U}}^\dagger(t, t_0) \hat{\mathcal{U}}(t, t_0) | \nu_\alpha \rangle = \langle \nu_\alpha | \nu_\alpha \rangle = 1. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la probabilidad total es igual a la unidad.

2.1.1 Antineutrinos

Como se discutió anteriormente, los neutrinos de sabor definido son producidos mediante procesos mediados por interacciones electrodébiles. Los antineutrinos $\bar{\nu}_\alpha$ con sabor definido

$\alpha = e, \mu, \tau$ son producidos de manera semejante en procesos de interacción débil de corriente cargada (CC) de un antileptón cargado ℓ_α^+ (es decir, transiciones $\ell_\alpha^+ \rightarrow \bar{\nu}_\alpha$) o en conjunto con un leptón cargado ℓ_α^- (creación de pares $\ell_\alpha^- \bar{\nu}_\alpha$). Estos antineutrinos son descritos mediante los estados

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_j U_{\alpha j} |\bar{\nu}_j\rangle \quad (\alpha = e, \mu, \tau). \quad (2.24)$$

Nótese que la ecuación (2.24) es similar a la que describe la relación entre los eigenestados de sabor con los eigenestados de masa (2.8), pero con la diferencia de que se trabaja con el complejo conjugado de la matriz de mezcla $U_{\alpha j}^*$.

Considérese ahora la probabilidad de oscilación de que un estado $|\bar{\nu}_\alpha\rangle$ decaiga un a $|\bar{\nu}_\beta\rangle$. Dado que las propiedades cinemáticas de los antineutrinos masivos son idénticas a las que poseen los neutrinos, el procedimiento para obtener una fórmula para la probabilidad de oscilación es análogo al desarrollado en la sección anterior. La única diferencia es que ahora los eigenestados de sabor están relacionados con los eigenestados de masa con el complejo conjugado de las componentes de la matriz de mezcla, es decir. El resultado que se obtiene en este caso es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(L, E) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j < k} \text{Re}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{j < k} \text{Im}(U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \text{sen} \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Obsérvese que la expresión anterior difiere de (2.22) solamente por un signo en los términos que dependen de la parte imaginaria de los productos cuárticos de los elementos de la matriz mezcla para los neutrinos. En el caso de las probabilidades de supervivencia, no existe diferencia alguna entre las fórmulas de oscilación para antineutrinos y neutrinos.

2.1.2 Mezcla de dos neutrinos

El estudio del caso donde sólo se consideran dos neutrinos masivos es importante porque las fórmulas de oscilación se simplifican considerablemente y dependen de menos parámetros. Además, muchos experimentos no son sensibles a las características de la mezcla de tres neutrinos, por lo que los datos obtenidos se analizan utilizando un modelo efectivo de una mezcla de solamente dos de estos.

Supóngase que sólo existen dos tipos de neutrinos de sabores ν_α y ν_β . En este caso, las matrices de mezcla tienen la forma

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} U_{\alpha 1}^* & U_{\alpha 2}^* \\ U_{\beta 1}^* & U_{\beta 2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} U_{\alpha 1} & U_{\alpha 2} \\ U_{\beta 1} & U_{\beta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

En este caso particular, la fórmula para la probabilidad de supervivencia (2.23) toma la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) &= 1 - 4|U_{\alpha 2}|^2|U_{\alpha 1}|^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \\ &= 1 - 4 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) \\ &= 1 - \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right).\end{aligned}\quad (2.27)$$

Por otro lado, la probabilidad de transición entre dos estados de sabor diferente se puede obtener directamente de la ecuación (2.27) empleando el hecho de que la probabilidad total es igual a la unidad. Es decir,

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1 - \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right).\quad (2.28)$$

Para el análisis de los datos de experimentos de oscilaciones con reactores y aceleradores, en los cuales se manejan energías del orden de MeV y GeV [19], respectivamente, es conveniente escribir a la probabilidad de transición (2.28) como

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) &= \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2\left(1.27 \frac{\Delta m^2[\text{eV}^2] L[\text{m}]}{E[\text{MeV}]}\right) \\ &= \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2\left(1.27 \frac{\Delta m^2[\text{eV}^2] L[\text{km}]}{E[\text{GeV}]}\right).\end{aligned}\quad (2.29)$$

En la figura 2.1 se muestra un ejemplo de estas fórmulas para un modelo de neutrinos con una energía de aproximadamente 0.5 GeV y una diferencia de masas de $2.56 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$.

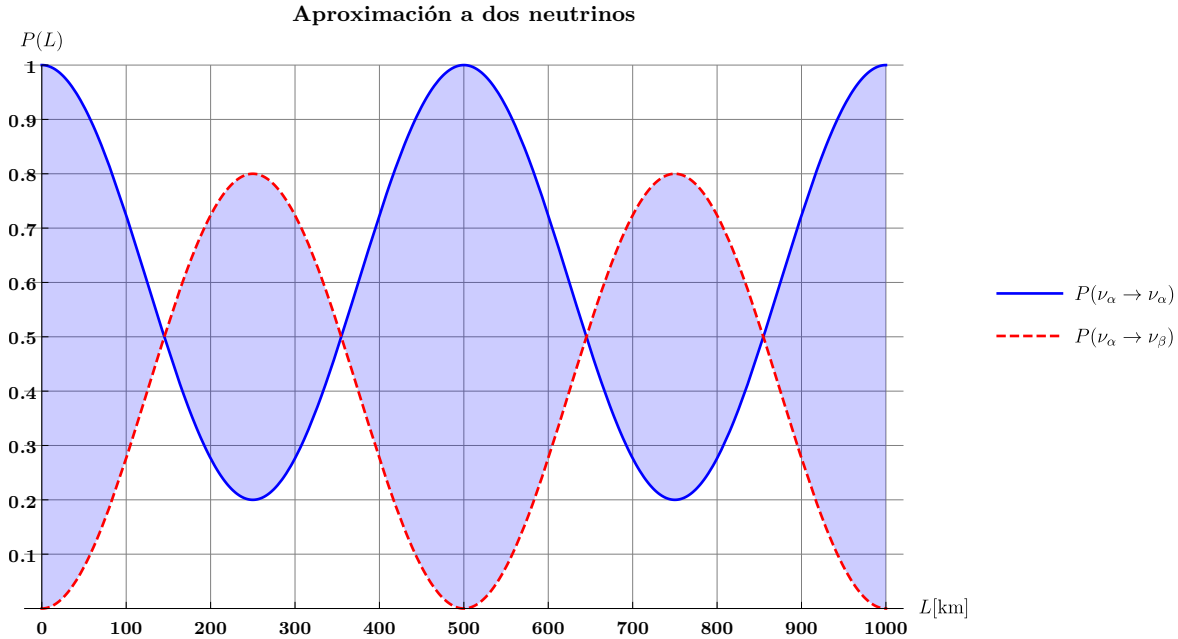


Figura 2.1: Aproximación de dos neutrinos. La curva azul muestra la probabilidad de supervivencia, mientras que la curva roja punteada exhibe a la probabilidad de conversión. La amplitud de oscilación está dada por el término $\text{sen}^2 2\theta$. En este caso, el periodo de oscilación es de unos 500 km.

Dada la ausencia de alguna fase (compleja) en la matriz de mezcla (2.26), es claro que las probabilidades de transición para los neutrinos y los antineutrinos son exactamente iguales en este caso. Es decir

$$\mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \mathcal{P}_{\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) = \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}(L, E) = \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha}(L, E).$$

En la siguiente sección se tratará el caso de la mezcla de tres neutrinos y se verá que las probabilidades de transición ya no cumplen con esta última relación. En el caso particular de neutrinos atmosféricos, las expresiones resultantes se pueden simplificar para obtener expresiones cuya estructura es muy similar a las dadas por (2.27) y (2.28).

2.1.3 Tres neutrinos

Ahora se considera la mezcla de tres neutrinos masivos. La matriz de mezcla U puede ser expresada en términos de tres ángulos de mezcla, θ_{12} , θ_{23} y θ_{13} , y una fase δ de acuerdo con

$$U = \mathcal{O}_{23}(\theta_{23}) \Gamma(\delta) \mathcal{O}_{13}(\theta_{13}) \Gamma^\dagger(\delta) \mathcal{O}_{12}(\theta_{12}), \quad (2.30)$$

donde $\mathcal{O}_{jk}(\theta_{jk})$ representa una rotación de Euler por θ_{jk} en el plano jk y

$$\Gamma(\delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

es la matriz que representa la fase de violación de carga-paridad (CP). En componentes, la matriz de mezcla se expresa como

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde se acostumbra abreviar $c_{jk} = \cos \theta_{jk}$ y $s_{jk} = \sin \theta_{jk}$ para simplificar la notación. En este caso, la probabilidad de supervivencia (2.23) toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}(L, E) &= 1 - 4|U_{\alpha 1}|^2 |U_{\alpha 2}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) - 4|U_{\alpha 1}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad - 4|U_{\alpha 2}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

con $\alpha = e, \mu, \tau$. Por ejemplo, usando el resultado anterior, la probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón sería

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(L, E) &= 1 - 4|U_{e1}|^2|U_{e2}|^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) - 4|U_{e1}|^2|U_{e3}|^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \\
&\quad - 4|U_{e2}|^2|U_{e3}|^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \\
&= 1 - c_{13}^4 (2c_{12}s_{12})^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) - c_{12}^2 (2c_{13}s_{13})^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \\
&\quad - s_{12}^2 (2c_{13}s_{13})^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right) \\
&= 1 - c_{13}^4 \text{sen}^2 2\theta_{12} \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}\right) - \text{sen}^2 2\theta_{13} c_{12}^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E}\right) \\
&\quad + \text{sen}^2 2\theta_{13} s_{12}^2 \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E}\right).
\end{aligned}$$

Definiendo los argumentos de oscilación para los fenómenos atmosféricos y solares como

$$\phi_{31} = \frac{\Delta m_{31}^2 L}{4E} \quad \text{y} \quad \phi_{21} = \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \quad (2.34)$$

respectivamente, y, usando el hecho de que $\Delta m_{32}^2 \simeq \Delta m_{31}^2$, se obtiene entonces que la probabilidad de supervivencia para el neutrino del electrón es

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(L, E) = 1 - \text{sen}^2 2\theta_{13} \text{sen}^2 \phi_{31} - c_{13}^4 \text{sen}^2 2\theta_{12} + \text{sen}^2 \phi_{21}. \quad (2.35)$$

Bajo las consideraciones anteriores, la probabilidad de supervivencia del neutrino del muón es [?]

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) &= 1 - \text{sen}^2 \phi_{31} (c_{13}^4 \text{sen}^2 2\theta_{23} + s_{23}^2 \text{sen}^2 2\theta_{13}) \\
&\quad + K' [c_{13}^2 (c_{12}^2 - s_{13}^2 s_{12}^2) \text{sen}^2 2\theta_{23} + s_{12}^2 s_{23}^2 \text{sen}^2 2\theta_{13} - 8K s_{23}^2] \\
&\quad - [\text{sen}^2 2\theta_{12} (c_{23}^2 - s_{13}^2 s_{23}^2)^2 + s_{13}^2 \text{sen}^2 2\theta_{23} (1 - c_\delta^2 \text{sen}^2 2\theta_{12}) \\
&\quad + \frac{1}{2} s_{13} c_\delta \text{sen} 4\theta_{12} \text{sen} 4\theta_{23} + s_{12}^2 s_{23}^2 (\text{sen}^2 2\theta_{13} - 16K) \\
&\quad + \text{sen}^2 2\theta_{23} c_{13}^2 (c_{12}^2 - s_{13}^2 s_{12}^2)] \text{sen}^2 \phi_{21},
\end{aligned} \quad (2.36)$$

donde se han definido, por simplicidad, los parámetros K y K' como

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{8} c_{13} \text{sen} 2\theta_{13} \text{sen} 2\theta_{23} \text{sen} 2\theta_{12} c_\delta \\
K' &= \frac{1}{2} \text{sen} 2\phi_{21} \text{sen} 2\phi_{31} + 2 \text{sen}^2 \phi_{31} \text{sen}^2 \phi_{21}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, las probabilidades de transición relevantes son:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(L, E) &= s_{23}^2 \text{sen}^2 2\theta_{13} \text{sen}^2 \phi_{31} + 4JB - K' (s_{23}^2 s_{12}^2 \text{sen}^2 2\theta_{13}) \\
&\quad + \text{sen}^2 \phi_{21} [c_{13}^2 (c_{23}^2 - s_{13}^2 s_{23}^2) \text{sen}^2 2\theta_{12} + s_{23}^2 s_{12}^2 \text{sen}^2 2\theta_{13} - 8K s_{12}^2]
\end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau}(L, E) = & c_{13}^4 \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \phi_{31} + 4JB - K' [c_{13}^2 \sin^2 2\theta_{23} (c_{12}^2 - s_{13}^2 s_{12}^2) \\
& + 4K \cos 2\theta_{23}] + \sin^2 \phi_{21} [\sin^2 2\theta_{13} (c_{12}^2 - s_{13}^2 s_{23}^2)^2 + 4K \cos 2\theta_{23} \\
& + s_{13}^2 \sin^2 2\theta_{12} (1 - \sin^2 2\theta_{23} c_\delta^2) + \frac{1}{4} s_{13} \sin 4\theta_{12} \sin 4\theta_{23} (1 + s_{13}^2) c_\delta],
\end{aligned} \tag{2.38}$$

donde el invariante de Jarlskog J , el cual viola CP^5 , es

$$J = \frac{1}{8} c_{13} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{12} s_\delta, \tag{2.39}$$

mientras que se ha incorporado un término común B para simplificar un poco las expresiones anteriores. A saber,

$$B = \sin 2\phi_{21} \sin^2 \phi_{31} - \sin 2\phi_{31} \sin^2 \phi_{21}.$$

Para oscilaciones cuya línea base sea muy grande, como lo es en el caso de los neutrinos atmosféricos, el argumento dominante es ϕ_{31} , y en tal caso las probabilidades de oscilación en el vacío (donde sólo son apreciables las oscilaciones con el término $m_3^2 - m_1^2$) son:

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(L, E) \simeq 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \phi_{31} \tag{2.40}$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(L, E) \simeq 1 - (c_{13}^4 \sin^2 2\theta_{23} + s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13}) \sin^2 \phi_{31} \tag{2.41}$$

$$\mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(L, E) \simeq s_{23}^2 \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \phi_{31} \tag{2.42}$$

$$\mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau}(L, E) \simeq c_{13}^4 \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \phi_{31} \tag{2.43}$$

Nótese que las expresiones (2.40) - (2.43) son similares en cuanto a estructura a aquellas desarrolladas en el caso de dos neutrinos. Además, ya que las cuatro ecuaciones anteriores solamente dependen del parámetro de oscilación ϕ_{31} y el periodo de la función seno cuadrado es π , es posible definir la longitud de oscilación para los neutrinos atmosféricos con ayuda de las ecuaciones dadas en (2.34) como

$$|l_{31}| = \frac{4\pi E}{|m_3^2 - m_1^2|}. \tag{2.44}$$

La longitud de oscilación característica dada por (2.44) es de vital importancia para el desarrollo de los experimentos de detección de neutrinos. Por ejemplo, si trabaja con una fuente que produce neutrinos de determinado sabor en un intervalo de energías bien definido, con ayuda de la ecuación (2.44) se puede hacer una estimación de la distancia a la que debiese ser colocado el detector de la fuente para observar el fenómeno que se esté investigando, ya sea un experimento de aparición o desaparición⁶. En el caso de los neutrinos atmosféricos, las energías que se

⁵Salvo en los casos donde $\delta = 0$ ó $\delta = \pi$.

⁶En la práctica es imposible medir la probabilidad de oscilación para valores precisos de la distancia y la energía de los neutrinos. En cualquier experimento, tanto la fuente como el proceso de detección tienen una incertidumbre espacial. Por esta razón, lo que se suele hacer es promediar las expresiones de las probabilidades de transición para distribuciones apropiadas de la distancia y la energía.

utilizan son del orden de GeV. Usando esta escala de energías y el valor de la diferencia de los cuadrados de las masas, se tiene que la longitud de oscilación característica por unidad de energía para los neutrinos atmosféricos es

$$\frac{l_{31}}{E} \approx 967.87 \frac{\text{km}}{\text{GeV}} \quad (2.45)$$

En otras palabras, lo que el número dado por (2.45) significa es que los neutrinos con una energía del orden de 1 GeV requieren aproximadamente una distancia de 968 kilómetros para completar una oscilación desde el punto en el que sean producidos. La figura 2.2 muestra las probabilidades de oscilación producidas por las ecuaciones (2.40) - (2.43) como funciones del cociente de la distancia y la energía.

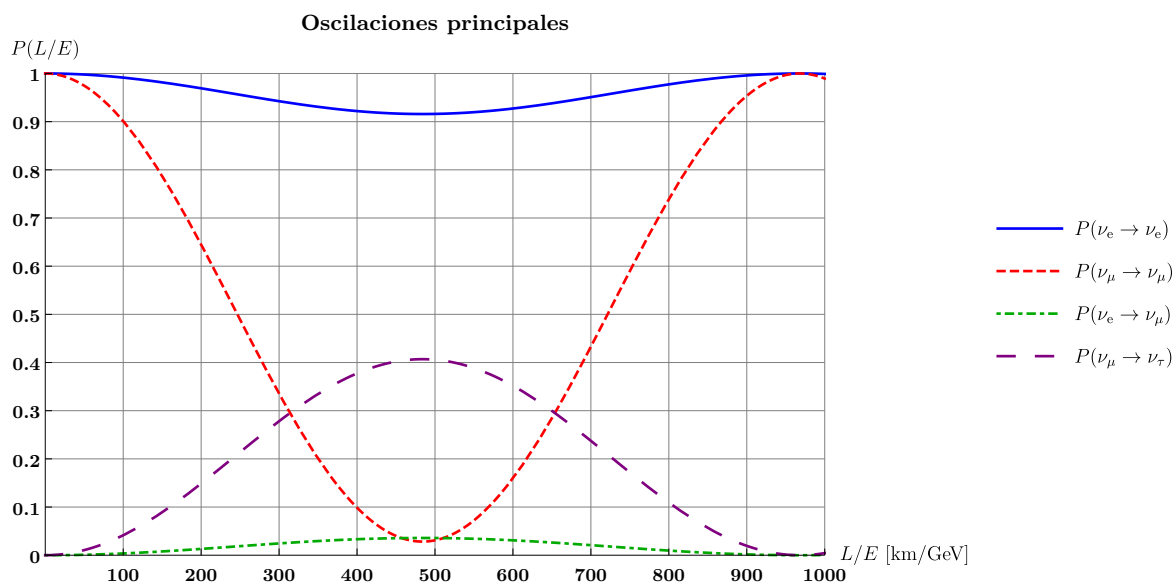


Figura 2.2: Probabilidades principales de transición para los neutrinos atmosféricos que dependen del cociente L/E . La probabilidad de supervivencia del neutrino del muón ν_μ junto con la probabilidad de conversión del neutrino del muón ν_μ al neutrino del tau ν_τ son las dos oscilaciones que presentan los cambios más apreciables en sus distancias de oscilación características.

Los neutrinos atmosféricos son producidos entre 10 y 30 kilómetros de altura con respecto a la superficie terrestre [13], [19]. Suponiendo que la distancia de producción sea el promedio, 20 kilómetros, se puede entonces apreciar cómo varían las probabilidades de conversión como funciones de la energía únicamente. La figura 2.3 muestra la situación descrita anteriormente. Debido a que los neutrinos atmosféricos tienen energías superiores a 1 GeV, las probabilidades de supervivencia son prácticamente iguales a la unidad, mientras que las conversiones entre un sabor y otro son nulas. El suponer que los neutrinos atmosféricos no oscilan desde su punto de producción hasta que llegan a la superficie constituye una muy buena aproximación para el estudio de la propagación de éstos a través del interior de la Tierra.

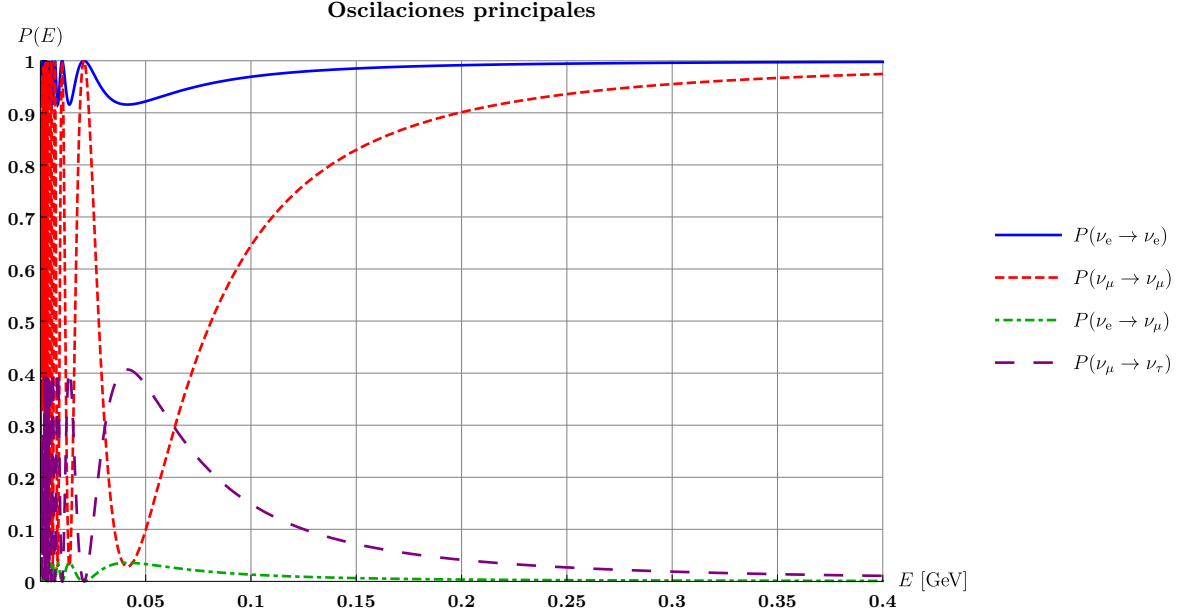


Figura 2.3: Probabilidades de transición como funciones de la energía para una distancia fija de producción a 20 kilómetros de la superficie terrestre. Es prácticamente improbable observar un fenómeno de oscilación de los neutrinos atmosféricos desde el punto en donde sean producidos hasta su llegada a la superficie de la Tierra.

2.1.4 Resumen fenomenológico de oscilaciones

Las masas de los neutrinos y las matrices de mezcla poseen las siguientes características:

1. Las diferencias de los cuadrados de las masas de los neutrinos tienen un carácter jerárquico. La diferencia de masas Δm_{21}^2 , responsable de las oscilaciones de los neutrinos solares, es al menos un orden de magnitud más pequeña que la diferencia de masas Δm_{31}^2 .
2. La diferencia del cuadrado de masas Δm_{31}^2 se mide con los neutrinos atmosféricos y tiene un valor [21]:

$$\Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{31(23)}^2 \simeq 2.56_{-0.11}^{+0.13} (2.54 \pm 0.12) \times 10^{-3} \text{ eV}^2.$$

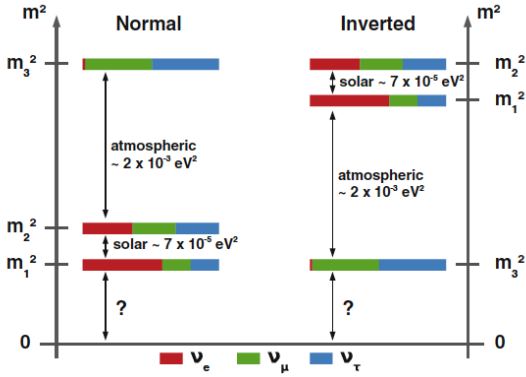
La ambigüedad en el signo de Δm_{atm}^2 no permite saber si el neutrino ν_3 es el más pesado o el más ligero de los tres (ver figura 2.4a) [22].

3. Los valores de Δm_{21}^2 y del ángulo de mezcla θ_{12} son determinados con los experimentos de los neutrinos solares [21]:

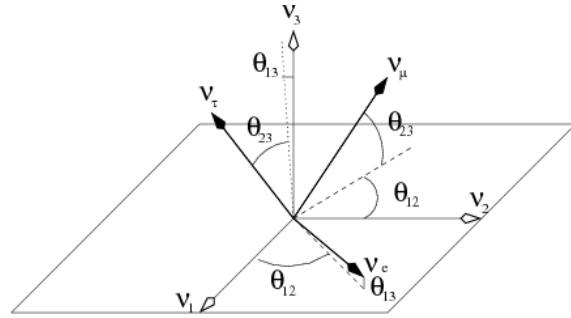
$$\begin{aligned} \Delta m_{\odot}^2 &\equiv \Delta m_{21}^2 = 7.37_{-0.44}^{+0.59} \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \\ \text{sen}^2 \theta_{12} &= 0.297_{-0.047}^{+0.057}. \end{aligned}$$

4. En la actualidad no se sabe cuál es el octante del ángulo θ_{23} , es decir, si es mayor o menor a $\pi/4$ [23].

5. El valor de la fase de violación de carga-paridad δ aún es una interrogante y por el momento no hay información experimental adicional. Los valores mejor ajustados a 2σ son $\delta/\pi \sim 1.38_{-0.38}^{+0.52}$ para jerarquía normal (NO) y $\delta/\pi \sim 1.31_{-0.39}^{+0.57}$ para jerarquía invertida (IO) [21].
6. Falta determinar si los neutrinos son partículas de Dirac o de Majorana. La respuesta a esta pregunta es de vital importancia para entender el origen de las masas de los neutrinos y las simetrías que hay en el sector leptónico.



(a) Representaciones de los modelos sobre las jerarquías de masas, los cuales son consistentes con los datos de los fenómenos solares y atmosféricos. El modelo de la izquierda se le conoce como jerarquía normal, mientras que el derecho es jerarquía invertida. Las bandas de colores representan la probabilidad de encontrar un eigenestado particular en la base de sabor dado un estado particular de la base de los eigenestados de masa.



(b) Relaciones entre los eigenestados de sabor ν_e, ν_μ y ν_τ y los eigenestados de masa ν_1, ν_2 y ν_3 en términos de los ángulos de mezcla θ_{12}, θ_{13} y θ_{23} . Ignorando las fases, estos son los ángulos de Euler representando la rotación entre una base ortogonal a otra.

Figura 2.4: Jerarquías de masas y ángulos de mezcla. (Imágenes tomadas de King, Stephen F., *Neutrino Mass Models: Impact of Non-Zero Reactor Angle*, Proceedings, 14th International Workshop, Venice, Italy, 2011 [24])

2.2 Oscilaciones en materia

En la sección anterior se calcularon las probabilidades de oscilación para neutrinos que se propagaban en el vacío. Sin embargo, es necesario realizar el estudio del caso donde los neutrinos viajan en un medio material, puesto que se requiere conocer su comportamiento cuando pasan a través de la Tierra.

2.2.1 Caso general

La presencia de materia en la trayectoria de los neutrinos puede afectar las probabilidades de las oscilaciones. Los neutrinos sufren de dispersión elástica cuando interactúan con las

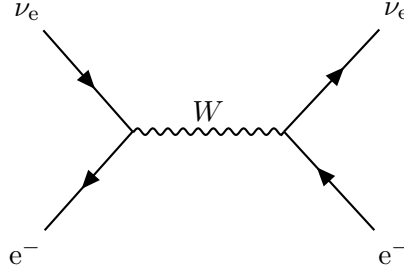


Figura 2.5: Interacción del bosón W con un electrón e^- . El electrón es el único leptón cargado presente en la materia terrestre.

partículas del medio en el cual se propagan. El resultado de esta interacción es la adición de un potencial al hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger. De acuerdo al modelo estándar, este fenómeno puede ocurrir de dos diferentes maneras:

1. Un neutrino ν_α puede intercambiar un bosón W con el leptón cargado ℓ_α correspondiente. El único leptón cargado que se encuentra en la materia terrestre es el electrón. Por consiguiente, este efecto sólo será observado en el neutrino del electrón ν_e ($\bar{\nu}_e$), figura 2.5. Esta interacción es proporcional a la densidad de electrones N_e en el medio. Además, el potencial resultante también será proporcional a la constante de acoplamiento de Fermi G_F . Esto es

$$V_W(r) = \begin{cases} +\sqrt{2}G_F N_e(r) & \text{para } \nu_e \\ -\sqrt{2}G_F N_e(r) & \text{para } \bar{\nu}_e \end{cases} \quad (2.46)$$

2. Un neutrino de cualquier sabor ν_α puede intercambiar un bosón Z con un electrón, un protón o un neutrón del medio. Además, los acoplamientos del bosón Z con los electrones y los protones son iguales y opuestos. Como la materia terrestre es eléctricamente neutra, las contribuciones de los electrones y los protones mediante el intercambio de un bosón Z son canceladas unas con otras. Finalmente, un potencial independiente de sabor V_Z aparecerá y es proporcional al número de neutrones por unidad de volumen, N_n , ver figura 2.6. El resultado es

$$V_Z(r) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}G_F N_n(r) & \text{para } \nu \\ +\frac{1}{\sqrt{2}}G_F N_n(r) & \text{para } \bar{\nu} \end{cases} \quad (2.47)$$

Incluyendo las interacciones de corriente cargada y de corriente neutra, el hamiltoniano efectivo para neutrinos que se propagan en un medio material es

$$H_{\text{eff}}(r) = UH_{\text{vac}}U^\dagger + V_m(r), \quad (2.48)$$

donde U está por (2.30) y el término del potencial $V_m(r)$ es de la forma

$$V_m(r) = \begin{pmatrix} V_e(r) & 0 & 0 \\ 0 & V_\mu(r) & 0 \\ 0 & 0 & V_\tau(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\text{CC}}(r) + V_{\text{CN}}(r) & 0 & 0 \\ 0 & V_{\text{CN}}(r) & 0 \\ 0 & 0 & V_{\text{CN}}(r) \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

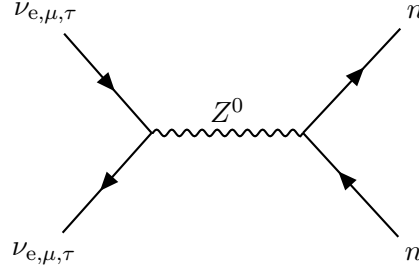


Figura 2.6: Interacción del bosón Z^0 con un neutrón n . Debido a la interacción de los neutrinos de cualquier sabor con los neutrones en la materia terrestre, surgirá un potencial de interacción proporcional al número de éstos en el medio.

con $V_{CC} = V_W$ y $V_{CN} = V_Z$. Nótese que este potencial V_m , surgido de la interacción en materia, puede ser escrito como

$$\begin{pmatrix} V_{CC} + V_{CN} & 0 & 0 \\ 0 & V_{CN} & 0 \\ 0 & 0 & V_{CN} \end{pmatrix} = V_{CC} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + V_{CN} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = V_{CC}\mathbb{Y} + V_{CN}\mathbb{I}, \quad (2.50)$$

donde \mathbb{Y} es la matriz que acompaña al potencial V_{CC} de corriente cargada e \mathbb{I} denota a la matriz identidad. Con esta nueva notación, es posible reescribir la ecuación (2.48) de una manera más conveniente

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(r) &= UH_{\text{vac}}U^\dagger + V_{CC}(r)\mathbb{Y} + V_{CN}(r)\mathbb{I} \\ &= H(r) + V_{CN}(r)\mathbb{I}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde se ha escrito

$$H(r) = UH_{\text{vac}}U^\dagger + V_{CC}(r)\mathbb{Y}. \quad (2.52)$$

Las manipulaciones algebraicas realizadas hasta el momento del potencial V_m junto con el hamiltoniano efectivo H_{eff} permitirán deshacerse del término $V_{CN}\mathbb{I}$ en la ecuación (2.51) mediante una transformación de fase. Para hacer este cambio primero se define una función $\varphi(r, r_0)$ como

$$\varphi(r, r_0) \equiv \left(-i \int_{r_0}^r V_{CN}(r') dr' \right) \mathbb{I}. \quad (2.53)$$

Con la función dada en (2.53), proponemos una función de onda de la siguiente forma

$$\tilde{\Psi}(r) = e^{\varphi(r, r_0)} \Psi(r). \quad (2.54)$$

Por un lado, sustituyendo (2.54) en la ecuación de Schrödinger se tiene que

$$i \frac{d\tilde{\Psi}}{dr} = i \frac{d\varphi}{dr} \tilde{\Psi} + i e^\varphi \frac{d\Psi}{dr} = V_{CN}\mathbb{I} \tilde{\Psi} + e^\varphi \left(i \frac{d\Psi}{dr} \right), \quad (2.55)$$

mientras que por el otro,

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}\tilde{\Psi} &= (H + V_{CN}\mathbb{I})\tilde{\Psi} = H\tilde{\Psi} + V_{CN}\mathbb{I}\tilde{\Psi} \\ &= H e^\varphi \Psi + V_{CN}\mathbb{I}\tilde{\Psi} = e^\varphi H \Psi + V_{CN}\mathbb{I}\tilde{\Psi}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

En el último paso de (2.56) se ha utilizado el hecho de que e^φ conmuta con H . Comparando (2.55) con (2.56) se obtiene

$$i \frac{d\Psi(r)}{dr} = H(r) \Psi(r), \quad (2.57)$$

que es la ecuación de evolución en la base de sabor que se debe resolver para obtener la dinámica de un neutrino que se propaga en un medio material neutro como lo es el interior de la Tierra.

La idea entonces es tratar de resolver la ecuación (2.57) para obtener las probabilidades de oscilación en materia. Infortunadamente, en el caso de una mezcla de tres neutrinos que se propagan en un medio, no existen expresiones analíticas cerradas para las fórmulas de oscilación. Lo que usualmente se hace en la literatura es considerar modelos efectivos de una mezcla de dos neutrinos en materia, véase por ejemplo [19]. La ventaja que tiene la aproximación a dos neutrinos es que exhibe de manera explícita las características particulares del comportamiento de éstos en la medio. Del mismo modo existen programas, algunos de acceso libre, que resuelven numéricamente la ecuación de Schrödinger para obtener las probabilidades de oscilación. Un ejemplo de este tipo de software es NuCraft. Este código de acceso libre se usa para evaluar las probabilidades de oscilación de neutrinos producidos en la atmósfera y que se propagan a través de la Tierra [25]. Desde un punto de vista práctico, este tipo de programas resultan muy útiles en simulaciones donde se incorporan varios parámetros variables. Sin embargo, desde un enfoque teórico, estas implementaciones numéricas no resultan de mucha utilidad, puesto que en muchas ocasiones enmascaran elementos importantes como simetrías y cantidades conservadas. En los siguientes párrafos se presentará un desarrollo teórico (explícito) del cálculo de los elementos de matriz del operador de evolución para neutrinos en un medio. La ventaja de este método es que, además de revelar la física contenida en el fenómeno de oscilaciones, puede ser utilizado para acortar el tiempo en cálculos computacionales. Más adelante se mostrará que el uso de este tratamiento con perfiles de densidad constante arroja resultados bastante similares a los que se obtendrían mediante un cómputo numérico donde se tomen en cuenta densidades variables.

Recuérdese que el vector de estado en (2.57) es de la forma

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_e(r) \\ \psi_\mu(r) \\ \psi_\tau(r) \end{pmatrix},$$

con $\psi_\alpha(t)$ ($\alpha = e, \mu$ y τ) las amplitudes de los eigenestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$, y, de (2.52),

$$H(r) = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_{CC}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

con Δ_{jk} y V_{CC} dados por (2.17) y (2.46) respectivamente. Esta última expresión se escribe de forma explícita como

$$H(r) = \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}_{13} \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{12} H_{\text{vac}} \mathcal{O}_{12}^T \Gamma \mathcal{O}_{13}^T \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T + V_{CC}(r) \mathbb{Y}. \quad (2.59)$$

Dado que Γ y H_{vac} son matrices diagonales, se puede sustituir $H_{\text{vac}} = \Gamma H_{\text{vac}} \Gamma^\dagger$ en (2.59) para tener

$$\begin{aligned}
H(r) &= \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}_{13} \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{12} H_{\text{vac}} \mathcal{O}_{12}^T \Gamma \mathcal{O}_{13}^T \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T + V_{\text{CC}}(r) \mathbb{Y} \\
&= \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}_{13} (\Gamma^\dagger \mathcal{O}_{12} \Gamma) H_{\text{vac}} (\Gamma^\dagger \mathcal{O}_{12}^T \Gamma) \mathcal{O}_{13}^T \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T + V_{\text{CC}}(r) \mathbb{Y} \\
&= \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}_{13} \mathcal{O}_{12} H_{\text{vac}} \mathcal{O}_{12}^T \mathcal{O}_{13}^T \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T + V_{\text{CC}}(r) \mathbb{Y} \\
&= \mathcal{O}_{23} O H_{\text{vac}} O^T \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T + V_{\text{CC}}(r) \mathbb{Y},
\end{aligned} \tag{2.60}$$

donde se ha definido $O \equiv \mathcal{O}_{13} \mathcal{O}_{12}$ y se han empleado los resultados $\Gamma^\dagger \mathcal{O}_{12} \Gamma = \mathcal{O}_{12}$ y $\Gamma^\dagger \mathcal{O}_{12}^T \Gamma = \mathcal{O}_{12}^T$. Usando el hecho de que $V_{\text{CC}}(r) \mathbb{Y} \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T = V_{\text{CC}}(r) \mathbb{Y}$ en (2.60), se obtiene que

$$H(r) = \mathcal{O}_{23} \Gamma \tilde{H}(r) \Gamma^* \mathcal{O}_{23}^T, \tag{2.61}$$

con

$$\boxed{\tilde{H}(r) = O H_0 O^T + V_{\text{CC}}(r) \mathbb{Y}.} \tag{2.62}$$

De esta manera, la ecuación de evolución de evolución en materia (2.57) queda como

$$i \frac{d\Psi(r)}{dr} = \left(\mathcal{O}_{23} \Gamma \tilde{H}(r) \Gamma^* \mathcal{O}_{23}^T \right) \Psi(r). \tag{2.63}$$

Definiendo

$$\tilde{\Psi}(r) = \Gamma^* \mathcal{O}_{23}^T \Psi(r), \tag{2.64}$$

se puede expresar a (2.63) de la siguiente forma

$$i \frac{d\tilde{\Psi}(r)}{dr} = \tilde{H}(r) \tilde{\Psi}(r). \tag{2.65}$$

Si

$$\tilde{\Psi}(r) = \tilde{U}(r, r_0) \tilde{\Psi}(r_0), \tag{2.66}$$

entonces se tiene que el operador de evolución $\tilde{U}(r, r_0)$ debe satisfacer la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d\tilde{U}(r, r_0)}{dr} = \tilde{H}(r) \tilde{U}(r, r_0). \tag{2.67}$$

De la relación (2.54) es claro que

$$\Psi(r) = \mathcal{O}_{23} \Gamma \tilde{\Psi}(r),$$

por lo que, si se tiene

$$\tilde{\Psi}(r) = \begin{pmatrix} \psi_e(r) \\ \psi_a(r) \\ \psi_b(r) \end{pmatrix}, \tag{2.68}$$

entonces

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} e^{i\delta} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_e(r) \\ \psi_a(r) \\ \psi_b(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_e(r) \\ c_{23} \psi_a(r) + s_{23} e^{i\delta} \psi_b(r) \\ -s_{23} \psi_a(r) + c_{23} e^{i\delta} \psi_b(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_e(r) \\ \psi_\mu(r) \\ \psi_\tau(r) \end{pmatrix}. \tag{2.69}$$

Lo anterior significa que las amplitudes de Ψ con $\tilde{\Psi}$ están relacionadas mediante

$$\begin{aligned}\psi_e(r) &= \psi_e(r) \\ \psi_\mu(r) &= c_{23}\psi_a(r) + s_{23}e^{i\delta}\psi_b(r) \\ \psi_\tau(r) &= -s_{23}\psi_a(r) + c_{23}e^{i\delta}\psi_b(r).\end{aligned}\tag{2.70}$$

Por otro lado, de las expresiones (2.64) y (2.65) se obtiene

$$\Psi(r) = \mathcal{O}_{23}\Gamma\tilde{\mathcal{U}}(r, r_0)\Gamma^*\mathcal{O}_{23}^T\Psi(r_0) = \mathcal{U}(r, r_0)\Psi(r_0),\tag{2.71}$$

donde

$$\boxed{\mathcal{U}(r, r_0) = \mathcal{O}_{23}\Gamma\tilde{\mathcal{U}}(r, r_0)\Gamma^*\mathcal{O}_{23}^T}.\tag{2.72}$$

El operador $\tilde{\mathcal{U}}(r, r_0)$ se obtiene resolviendo la ecuación (2.67). Por el momento, supóngase que se conoce a $\tilde{\mathcal{U}}$ explícitamente. Sean entonces

$$\tilde{\mathcal{U}}(r, r_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{ee} & \mathcal{U}_{ea} & \mathcal{U}_{eb} \\ \mathcal{U}_{ae} & \mathcal{U}_{aa} & \mathcal{U}_{ab} \\ \mathcal{U}_{be} & \mathcal{U}_{ba} & \mathcal{U}_{bb} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}(r, r_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{ee} & \mathcal{U}_{e\mu} & \mathcal{U}_{e\tau} \\ \mathcal{U}_{\mu e} & \mathcal{U}_{\mu\mu} & \mathcal{U}_{\mu\tau} \\ \mathcal{U}_{\tau e} & \mathcal{U}_{\tau\mu} & \mathcal{U}_{\tau\tau} \end{pmatrix}.\tag{2.73}$$

Usando las definiciones anteriores en la relación (2.72), se tiene el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23}e^{i\delta} \\ 0 & -s_{23} & c_{23}e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{ee} & \mathcal{U}_{ea} & \mathcal{U}_{eb} \\ \mathcal{U}_{ae} & \mathcal{U}_{aa} & \mathcal{U}_{ab} \\ \mathcal{U}_{be} & \mathcal{U}_{ba} & \mathcal{U}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & -s_{23} \\ 0 & s_{23}e^{-i\delta} & c_{23}e^{-i\delta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23}e^{i\delta} \\ 0 & -s_{23} & c_{23}e^{i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{ee} & c_{23}\mathcal{U}_{ee} + s_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{eb} & -s_{23}\mathcal{U}_{ea} + c_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{eb} \\ \mathcal{U}_{ae} & c_{23}\mathcal{U}_{aa} + s_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} & -s_{23}\mathcal{U}_{aa} + c_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} \\ \mathcal{U}_{be} & c_{23}\mathcal{U}_{ba} + s_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{bb} & -s_{23}\mathcal{U}_{ba} + c_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{bb} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{ee} & c_{23}\mathcal{U}_{ea} + s_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{eb} & -s_{23}\mathcal{U}_{ea} + c_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{eb} \\ c_{23}\mathcal{U}_{ae} + s_{23}e^{i\delta}\mathcal{U}_{be} & c_{23}^2\mathcal{U}_{aa} + s_{23}^2\mathcal{U}_{bb} & s_{23}c_{23}(\mathcal{U}_{bb} - \mathcal{U}_{aa}) \\ -s_{23}\mathcal{U}_{ae} + c_{23}e^{i\delta}\mathcal{U}_{be} & + s_{23}c_{23}(e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} + e^{i\delta}\mathcal{U}_{ba}) & + c_{23}^2e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} - s_{23}^2e^{i\delta}\mathcal{U}_{ba} \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} s_{23}c_{23}(\mathcal{U}_{bb} - \mathcal{U}_{aa}) & s_{23}^2\mathcal{U}_{aa} + c_{23}^2\mathcal{U}_{bb} \\ + c_{23}^2e^{i\delta}\mathcal{U}_{ba} - s_{23}^2e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} & - s_{23}c_{23}(e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} + e^{i\delta}\mathcal{U}_{ba}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

El cálculo anterior permite identificar de forma explícita a las componentes de \mathcal{U} con las componentes de $\tilde{\mathcal{U}}$. Estas son

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{ee} &= \mathcal{U}_{ee} \\ \mathcal{U}_{e\mu} &= c_{23}\mathcal{U}_{ea} + s_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{eb} \\ \mathcal{U}_{e\tau} &= -s_{23}\mathcal{U}_{ea} + c_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{eb} \\ \mathcal{U}_{\mu e} &= c_{23}\mathcal{U}_{ae} + s_{23}e^{i\delta}\mathcal{U}_{be} \\ \mathcal{U}_{\mu\mu} &= c_{23}^2\mathcal{U}_{aa} + s_{23}^2\mathcal{U}_{bb} + s_{23}c_{23}(e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} + e^{i\delta}\mathcal{U}_{ba}) \\ \mathcal{U}_{\mu\tau} &= s_{23}c_{23}(\mathcal{U}_{bb} - \mathcal{U}_{aa})c_{23}e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} - s_{23}^2e^{i\delta}\mathcal{U}_{ba} \\ \mathcal{U}_{\tau e} &= -s_{23}\mathcal{U}_{ae} + c_{23}e^{i\delta}\mathcal{U}_{be} \\ \mathcal{U}_{\tau\mu} &= s_{23}c_{23}(\mathcal{U}_{bb} - \mathcal{U}_{aa}) + c_{23}^2e^{i\delta}\mathcal{U}_{ba} - s_{23}^2e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} \\ \mathcal{U}_{\tau\tau} &= s_{23}^2\mathcal{U}_{aa} + c_{23}^2\mathcal{U}_{bb} - s_{23}c_{23}(e^{-i\delta}\mathcal{U}_{ab} + e^{i\delta}\mathcal{U}_{ba}).\end{aligned}\tag{2.74}$$

La evolución del estado $|\psi(r)\rangle$ está dada por (2.1),

$$|\psi(r)\rangle = \hat{\mathcal{U}}(r, r_0) |\psi(r_0)\rangle, \quad (2.75)$$

cuya amplitud ahora se denotará mediante

$$\psi_\beta(r) = \langle \nu_\beta | \psi(r) \rangle = \sum_\lambda \langle \nu_\beta | \hat{\mathcal{U}} | \nu_\lambda \rangle \langle \nu_\lambda | \psi(r_0) \rangle = \sum_\lambda \mathcal{U}_{\beta\lambda}(r, r_0) \psi_\lambda(r_0). \quad (2.76)$$

Si el estado inicial es un estado de sabor, por ejemplo $|\nu_\alpha\rangle$, entonces

$$\psi_\beta^{(\alpha)}(r_0) = \delta_{\beta\alpha}, \quad (2.77)$$

donde el superíndice α indica el sabor del neutrino producido en el punto r_0 . De esta forma

$$\boxed{\psi_\beta^{(\alpha)}(t) = \mathcal{U}_{\beta\alpha}(r, r_0)} \quad (2.78)$$

y por ende

$$\mathcal{P}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \left| \psi_\beta^{(\alpha)}(t) \right|^2 = |\mathcal{U}_{\beta\alpha}(t, t_0)|^2 = R_{\beta\alpha}^2 + I_{\beta\alpha}^2, \quad (2.79)$$

con $R_{\beta\alpha} \equiv \text{Re}[\mathcal{U}_{\beta\alpha}]$ e $I_{\beta\alpha} \equiv \text{Im}[\mathcal{U}_{\beta\alpha}]$.

Lo que sigue ahora es escribir a los elementos de matriz $\mathcal{U}_{\beta\alpha}$ dados en (2.74) como un número complejo en su forma estándar. Es decir, si $z \in \mathbb{C}$, entonces $z = a + ib$, con a y b números reales. Por simplicidad, sean $c = c_{23}$, $s = s_{23}$, $\cos \delta = c_\delta$, $\sin \delta = s_\delta$, $R_{\alpha\beta} = \text{Re}[\mathcal{U}_{\beta\alpha}]$ e $I_{\beta\alpha} = \text{Im}[\mathcal{U}_{\beta\alpha}]$.

La amplitud que da lugar a la probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón (ν_e) es

$$\mathcal{U}_{ee} = R_{ee} + iI_{ee}, \quad (2.80)$$

mientras que las amplitudes de transición a neutrinos del muón y del tau son

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{e\mu} &= c(R_{ea} + iI_{ea}) + s(c_\delta - is_\delta)(R_{eb} + iI_{eb}) \\ &= cR_{ea} + s(c_\delta R_{eb} + s_\delta I_{eb}) + i[cI_{ea} + s(-s_\delta R_{eb} + c_\delta I_{eb})] \\ &= R_{e\mu} + iI_{e\mu} \\ \implies R_{e\mu} &= cR_{ea} + s(c_\delta R_{eb} + s_\delta I_{eb}) \\ \implies I_{e\mu} &= cI_{ea} + s(-s_\delta R_{eb} + c_\delta I_{eb}) \end{aligned} \quad (2.81)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{e\tau} &= -s(R_{ea} + iI_{ea}) + c(c_\delta - is_\delta)(R_{eb} + iI_{eb}) \\ \implies R_{e\tau} &= -sR_{ea} + c(c_\delta R_{eb} + s_\delta I_{eb}) \\ \implies I_{e\tau} &= -sI_{ea} + c(-s_\delta R_{eb} + c_\delta I_{eb}) \end{aligned} \quad (2.82)$$

respectivamente.

Para el neutrino del muón (ν_μ), la amplitud que da origen a la probabilidad de supervivencia es

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mu\mu} &= c^2 (R_{aa} + iI_{aa}) + s^2 (R_{bb} + iI_{bb}) + sc (c_\delta - is_\delta) (R_{ab} + I_{ab}) + sc (c_\delta + is_\delta) (R_{ba} + iI_{ba}) \\
&= c^2 R_{aa} + s^2 R_{bb} + sc [c_\delta (R_{ab} + R_{ba}) + s_\delta (I_{ab} - I_{ba})] + \\
&\quad i\{c^2 I_{aa} + s^2 I_{bb} + sc [c (I_{ab} + I_{ba}) - s_\delta (R_{ab} - R_{ba})]\} \\
\implies R_{\mu\mu} &= c^2 R_{aa} + s^2 R_{bb} + sc [c_\delta (R_{ab} + R_{ba}) + s_\delta (I_{ab} - I_{ba})] \\
\implies I_{\mu\mu} &= c^2 I_{aa} + s^2 I_{bb} + sc [c_\delta (I_{ab} + I_{ba}) - s_\delta (R_{ab} - R_{ba})].
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Las amplitudes de transición a neutrinos del electrón y neutrinos del tau son

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mu e} &= c (R_{ae} + iI_{ae}) + s (c_\delta + is_\delta) (R_{be} + iI_{be}) \\
\implies R_{\mu e} &= cR_{ae} + s (c_\delta R_{be} - s_\delta I_{be}) \\
\implies I_{\mu e} &= cI_{ae} + s (s_\delta R_{be} + c_\delta I_{be})
\end{aligned} \tag{2.84}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\mu\tau} &= sc (R_{bb} - R_{aa}) + c_\delta (c^2 R_{ab} - s^2 R_{ba}) + s_\delta (c^2 I_{ab} + s^2 I_{ba}) + \\
&\quad i [sc (I_{bb} - I_{aa}) - s_\delta (c^2 R_{ab} + s^2 R_{ba}) + c_\delta (c^2 I_{ab} - s^2 I_{ba})] \\
\implies R_{\mu\tau} &= sc (R_{bb} - R_{aa}) + c_\delta (c^2 R_{ab} - s^2 R_{ba}) + s_\delta (c^2 I_{ab} + s^2 I_{ba}) \\
\implies I_{\mu\tau} &= sc (I_{bb} - I_{aa}) - s_\delta (c^2 R_{ab} + s^2 R_{ba}) + c_\delta (c^2 I_{ab} - s^2 I_{ba})
\end{aligned} \tag{2.85}$$

respectivamente.

Finalmente, la amplitud relevante para la probabilidad de supervivencia para el neutrino del tau (ν_τ) es

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\tau\tau} &= s^2 R_{aa} + c^2 R_{bb} - sc [c_\delta (R_{ab} + R_{ba}) + s_\delta (I_{ab} - I_{ba})] + \\
&\quad i\{s^2 I_{aa} + c^2 I_{bb} - sc [c_\delta (I_{ab} + I_{ba}) - s_\delta (R_{ab} - R_{ba})]\} \\
\implies R_{\tau\tau} &= s^2 R_{aa} + c^2 R_{bb} - sc [c_\delta (R_{ab} + R_{ba}) + s_\delta (I_{ab} - I_{ba})] \\
\implies I_{\tau\tau} &= s^2 I_{aa} + c^2 I_{bb} - sc [c_\delta (I_{ab} + I_{ba}) - s_\delta (R_{ab} - R_{ba})].
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Las amplitudes de transición son

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\tau e} &= -s (R_{ae} + iI_{ae}) + c (c_\delta + is_\delta) (R_{be} + iI_{be}) \\
\implies R_{\tau e} &= -sR_{ae} + c (c_\delta R_{be} - s_\delta I_{be}) \\
\implies I_{\tau e} &= -sI_{ae} + c (s_\delta R_{be} + c_\delta I_{be})
\end{aligned} \tag{2.87}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\tau\mu} &= sc (R_{bb} + iI_{bb} - R_{aa} - iI_{aa}) + c^2 (c_\delta + is_\delta) (R_{ba} + iI_{ba}) - s^2 (c_\delta - is_\delta) (R_{ab} + iI_{ab}) \\
&= sc (R_{bb} - R_{aa}) + c_\delta (c^2 R_{ba} - s^2 R_{ab}) - s_\delta (c^2 I_{ba} + s^2 I_{ab}) + \\
&\quad i [sc (I_{bb} - I_{aa}) + s_\delta (c^2 R_{ba} + s^2 R_{ab}) + c_\delta (c^2 I_{ba} - s^2 I_{ab})] \\
\implies R_{\tau\mu} &= sc (R_{bb} - R_{aa}) + c_\delta (c^2 R_{ba} - s^2 R_{ab}) - s_\delta (c^2 I_{ba} + s^2 I_{ab}) \\
\implies I_{\tau\mu} &= sc (I_{bb} - I_{aa}) + s_\delta (c^2 R_{ba} + s^2 R_{ab}) + c_\delta (c^2 I_{ba} - s^2 I_{ab}).
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Las nueve fórmulas anteriores dan las componentes explícitas el operador de evolución y son exactas. La ventaja de escribirlas de forma explícita es que exhiben ciertas características importantes en el fenómeno de oscilaciones. Por ejemplo, la probabilidad de supervivencia del neutrino (2.80) del electrón no se verá afectada en lo absoluto por el ángulo de mezcla θ_{23} . Sin embargo, las probabilidades de transición de neutrinos del electrón a neutrinos del muón y del tau sí son afectadas por el valor de este parámetro. Otro aspecto interesante a notar es cómo afecta el valor de la fase de violación de CP a las oscilaciones. Si el valor de la delta fuese cero, sólo se tendrían seis componentes independientes en el operador de evolución, y por supuesto, tampoco habría diferencia alguna⁷ entre las probabilidades de los neutrinos y los antineutrinos. No obstante, se tienen indicios de que $\delta \sim 1.38\pi$ [21]. Si la fase tuviese este valor, o algún valor cercano a $3/2\pi$, entonces habría diferencias apreciables en las probabilidades de transición y de supervivencia para los neutrinos del muón y del tau. Esto se debe a que los términos de las amplitudes de transición que involucran al seno de δ difieren por un signo. Este cambio tiene un efecto apreciable en las oscilaciones, lo cual se mostrará más adelante cuando se presenten los resultados de este estudio.

Por el momento ya se conocen las expresiones cuyo módulo al cuadrado dan las probabilidades de oscilación. Lo que ahora es necesario calcular son las componentes del operador de evolución $\tilde{U}(r, r_0)$ definido en la ecuación (2.67). Existen varias maneras de hacer esto. Para perfiles de densidad constante, la solución es de la forma

$$\tilde{U}(r, r_0) = e^{-i(r-r_0)\tilde{H}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} [-i(r-r_0)]^m \tilde{H}^m, \quad (2.89)$$

con \tilde{H} definido por (2.62). La expresión para el operador de evolución es [26]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(r, r_0) = & \frac{1}{T} \left\{ \left[e^{-i(r-r_0)\varepsilon_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \varepsilon_2 \varepsilon_3 + e^{-i(r-r_0)\varepsilon_2} (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \varepsilon_1 \varepsilon_3 + e^{-i(r-r_0)\varepsilon_3} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right] \mathbb{I} \right. \\ & + \frac{i}{(r-r_0)} \left[e^{-i(r-r_0)\varepsilon_1} (\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2^2) + e^{-i(r-r_0)\varepsilon_2} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2) + e^{-i(r-r_0)\varepsilon_3} (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) \right] \tilde{H} \\ & \left. + \frac{1}{(r-r_0)^2} \left[e^{-i(r-r_0)\varepsilon_1} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) + e^{-i(r-r_0)\varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + e^{-i(r-r_0)\varepsilon_3} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] \tilde{H}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

donde ε_1 , ε_2 y ε_3 son los eigenvalores de \tilde{H} y se ha definido

$$T = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \quad (2.91)$$

para simplificar (2.90). Los eigenvalores se obtienen encontrando las raíces del polinomio característico de \tilde{H} . Es decir, se debe resolver

$$p(\varepsilon) = \varepsilon^3 - \text{Tr}(\tilde{H}) \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \left[\text{Tr}^2(\tilde{H}) - \text{Tr}(\tilde{H}^2) \right] \varepsilon - \det(\tilde{H}) = 0. \quad (2.92)$$

Como el hamiltoniano (2.62) es real y simétrico, sus correspondientes eigenvalores deben ser reales. Para dar las raíces del polinomio anterior, primero redefinanse a los coeficientes de

⁷En el caso de las probabilidades de oscilación en el vacío. Más adelante se verá que los efectos de la materia afectan de manera diferente a los neutrinos y a los antineutrinos.

(2.92) como

$$\begin{aligned}
 b &\equiv -\text{Tr}(\tilde{H}) = -(V_{\text{CC}} + \Delta_{21} + \Delta_{31}) \\
 c &\equiv \frac{1}{2} \left[\text{Tr}^2(\tilde{H}) - \text{Tr}(\tilde{H}^2) \right] = V_{\text{CC}} \left[\Delta_{31} c_{13}^2 + \Delta_{21} (1 - c_{13}^2 s_{12}^2) \right] + \Delta_{21} \Delta_{31} \\
 d &\equiv -\det(\tilde{H}) = -V_{\text{CC}} \Delta_{31} \Delta_{21} c_{12}^2 c_{13}^2.
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

El propósito de hacer esto es llevar a la expresión (2.92) a su forma (cúbica) estándar

$$\varepsilon^3 + b\varepsilon^2 + c\varepsilon + d = 0,$$

para luego realizar la sustitución $\varepsilon = x - b/3$ que dará la ecuación cúbica reducida

$$x^3 + 3px + q = 0, \tag{2.94}$$

donde se han definido

$$p = \frac{3c - b^2}{9} \quad y \quad q = \frac{2b^3 - 9bc + 27d}{27}. \tag{2.95}$$

Para que todas las soluciones sean reales, el discriminante $q^2 + 4p^3$ de la ecuación (2.94) debe ser menor o igual que cero. En este caso, las soluciones a (2.92) se pueden expresar en términos de funciones trigonométricas y son [27]:

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{2}{3} \sqrt{b^2 - 3c} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left[\frac{9(bc - 3d) - 2b^3}{2(b^2 - 3c)^{3/2}} \right] - \frac{2\pi k}{3} \right] - \frac{b}{3}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{2.96}$$

En la fórmula anterior, se tiene el orden $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ (ver figura 2.7).

Eigenvalores de \tilde{H}

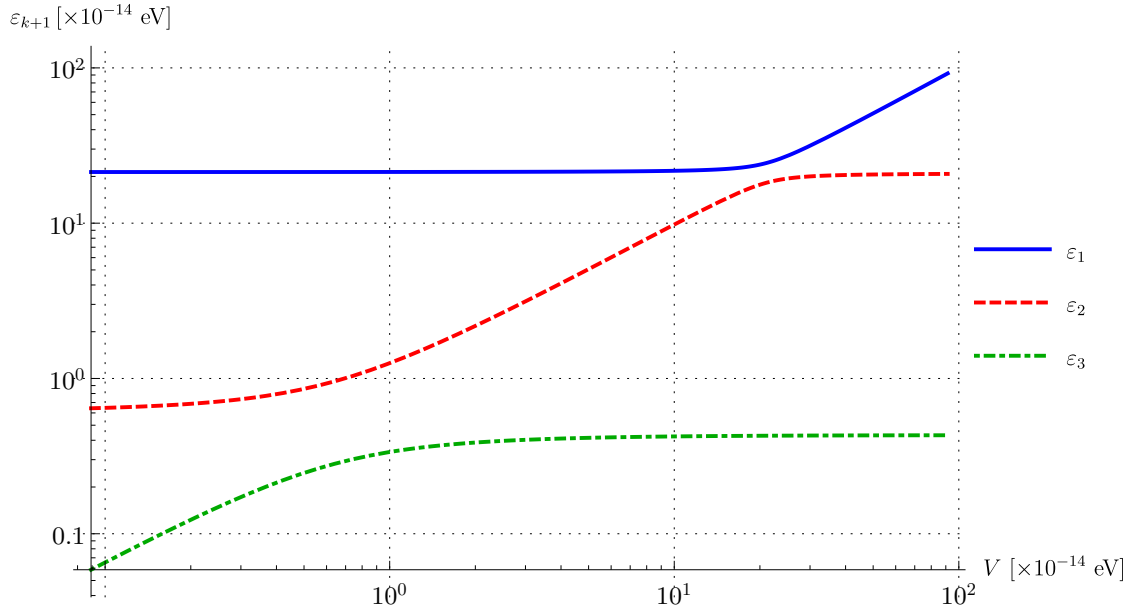


Figura 2.7: Eigenvalores del hamiltoniano \tilde{H} definido en (2.62) como funciones del potencial V .

Obsérvese en la figura 2.7 que los eigenvalores son funciones diferenciables en el intervalo $0 < E < \infty$ y que tampoco existen cruces entre ellos. Por esta razón, el operador de evolución dado por (2.90) siempre estará bien definido.

En este momento se tienen ya todos los elementos necesarios para realizar el estudio de la propagación de neutrinos en un potencial constante. En los siguientes capítulos se presentarán las herramientas complementarias para simplificar el problema si se tiene un potencial simétrico y también se mostrará la conexión explícita entre la densidad del medio con el potencial definido por (2.46). Lo que resta en este capítulo es hacer un breve desarrollo del estudio de oscilaciones en materia para dos neutrinos. Al igual que en el caso de vacío, el tratamiento con dos neutrinos sirve para exhibir las características más importantes de la física contenida en este fenómeno.

2.2.2 Oscilaciones en materia para dos neutrinos

Al igual que para las oscilaciones en el vacío, a fin de tener un mejor entendimiento del fenómeno, es ilustrativo hacer el estudio de las oscilaciones en materia entre sólo dos neutrinos. Aunque el tratamiento realizado anteriormente es más completo, el caso particular de dos neutrinos permitirá describir de manera sencilla y pedagógica el efecto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW), el cual es el mecanismo responsable de que se puedan observar los efectos de la materia sobre las transiciones de sabor. Para el estudio de oscilaciones en materia en el caso de dos neutrinos, lo primero que se hace es encontrar el hamiltoniano de interacción que gobierna la evolución de las amplitudes de sabor en materia y que ahora tiene la forma

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{vac}} + V_{\text{CC}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

el cual puede ser reescrito mediante una transformación de fase como⁸

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{vac}} + \frac{V_{\text{CC}}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

Al hamiltoniano del vacío se le puede encontrar de manera sencilla con la expresión

$$\begin{aligned} H_{\text{vac}} &= U^\dagger \begin{pmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_j & 0 \\ 0 & E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_j \cos^2 \theta + E_k \text{sen}^2 \theta & (E_k - E_j) \cos \theta \text{sen } \theta \\ (E_k - E_j) \cos \theta \text{sen } \theta & E_k \cos^2 \theta + E_j \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{(E_k - E_j)}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{(E_k + E_j)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

De igual forma, es posible realizar una transformación de fase para que (2.99) se reduzca a una expresión más simple. Haciendo dicha transformación y usando la aproximación ultrarrelativista,

⁸Para conseguir que la ecuación (2.97) se transforme en (2.98) se emplea el mismo procedimiento que se usó para obtener la ecuación de evolución (2.57).

se tiene que el hamiltoniano para el vacío es

$$H_{\text{vac}} = \frac{\Delta m_{kj}^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Insertando la ecuación (2.100) en (2.98) se tiene que el hamiltoniano en materia está dado por

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{\Delta m_{kj}^2}{4E} \begin{pmatrix} -\left[\cos 2\theta - \frac{V_{\text{CC}}/2}{\Delta m^2/4E}\right] & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & \left[\cos 2\theta - \frac{V_{\text{CC}}/2}{\Delta m^2/4E}\right] \end{pmatrix} \\ &= \frac{\Delta m_{kj}^2}{4E} \begin{pmatrix} -(\cos 2\theta - A) & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & (\cos 2\theta - A) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.101)$$

donde se ha definido

$$A = \frac{V_{\text{CC}}/2}{\Delta m^2/4E} = \frac{2\sqrt{2}G_{\text{F}}N_e E}{\Delta m_{kj}^2}. \quad (2.102)$$

Por simplicidad, se busca reescribir a la expresión (2.101) de tal forma que tenga una estructura similar a (2.100). Esto se puede hacer si se encuentra alguna x para la cual se cumplan las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_m &= x(\cos 2\theta - A) \\ \text{sen } 2\theta_m &= x \text{sen } 2\theta \\ \Delta m_m^2 &= \frac{\Delta m_{kj}^2}{x}. \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} \cos^2 2\theta_m &= \frac{(\cos 2\theta - A)^2}{\text{sen}^2 2\theta + (\cos 2\theta - A)^2} \\ \text{sen}^2 2\theta_m &= \frac{\text{sen}^2 2\theta}{\text{sen}^2 2\theta + (\cos 2\theta - A)^2} \\ \Delta m_m^2 &= \Delta m_{kj}^2 \sqrt{\text{sen}^2 2\theta + (\cos 2\theta - A)^2}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Por tanto, el hamiltoniano en materia queda como

$$H_m = \frac{\Delta m_m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta_m & \text{sen } 2\theta_m \\ \text{sen } 2\theta_m & \cos 2\theta_m \end{pmatrix}. \quad (2.104)$$

El hecho de que el hamiltoniano en materia dado por la ecuación (2.104) tenga prácticamente la misma forma que el hamiltoniano en el caso del vacío (2.100) permite apreciar que si V_{CC} es constante, entonces las fórmulas de oscilación obtenidas en el caso para dos neutrinos en el vacío, ecuaciones (2.27) y (2.28), serán iguales al caso en materia, pero realizando los cambios Δm_{kj}^2 por Δm_m^2 y θ por θ_m :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha}^m(L, E) &= 1 - \text{sen}^2 2\theta_m \text{sen}^2 \left[\frac{\Delta m_m^2 L}{4E} \right] \\ \mathcal{P}_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}^m(L, E) &= \text{sen}^2 2\theta_m \text{sen}^2 \left[\frac{\Delta m_m^2 L}{4E} \right]. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Es fácil notar que las probabilidades en materia (2.105) se acercan a las probabilidades en vacío conforme $A \rightarrow 0$. Por otro lado, se observa que la correspondiente amplitud en materia tiene un carácter resonante [28] cuando se satisface la condición

$$A = \cos 2\theta \quad \Longrightarrow \quad \sin^2 2\theta_m = 1 \quad \text{y} \quad \Delta m_m^2 = \Delta m_{kj}^2 \sin 2\theta. \quad (2.106)$$

Por tanto, la amplitud de oscilación es máxima independientemente del valor del ángulo de mezcla en el vacío. Además, es importante hacer las siguientes observaciones:

1. Al igual que en el caso del vacío, se define la longitud de oscilación en materia como

$$l_m = \frac{4\pi E}{\Delta m_m^2}, \quad (2.107)$$

donde se puede observar que en el límite cuando $A \rightarrow 0$ se recupera la longitud de oscilación característica del vacío (2.44). Además, la longitud de oscilación en materia es menor a la del vacío. En otras palabras, la presencia de materia ocasiona que el fenómeno de oscilaciones de neutrinos se vuelva aún más notorio.

2. Bajo la condición de resonancia, las oscilaciones se desvanecen cuando $\theta = 0$ debido a que la longitud de oscilación en materia l_m se vuelve infinita.
3. Recordando que el potencial V_{CC} es negativo para el caso de los antineutrinos, se tiene entonces que la condición de resonancia sólo puede ocurrir para alguno de los dos casos, pero no ambos.
4. La condición de resonancia depende del signo de $\Delta m_{kj}^2 \cos 2\theta$. Luego, uno de los requisitos necesarios para que los neutrinos pasen por la condición de resonancia es que satisfaga $\Delta m_{kj}^2 \cos 2\theta > 0$; mientras que para los antineutrinos esto ocurre si $\Delta m_{kj}^2 \cos 2\theta < 0$.
5. El valor de la energía que deben poseer los neutrinos para pasar por condición la resonancia se obtiene directamente de las relaciones (2.102) y (2.106) y esta es

$$E_{\text{res}} = \frac{\Delta m_{kj}^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}G_F N_e}. \quad (2.108)$$

De la expresión (2.108) se observa que la energía en la resonancia depende de la fracción de electrones en el medio N_e . Asimismo, el número de electrones es proporcional a la densidad de materia, por lo que a densidades más altas se necesitarán menores energías para tener el carácter resonante. En la gráfica 2.8 se muestra la variación de la energía en la condición de resonancia como función de la densidad en gramos sobre centímetro cúbico. En el caso de la Tierra se tienen densidades que van desde 2 a 13 g/cm³, por lo que los neutrinos atmosféricos con energías mayores 2.5 GeV, aproximadamente, tendrán un carácter resonante al propagarse por su interior.

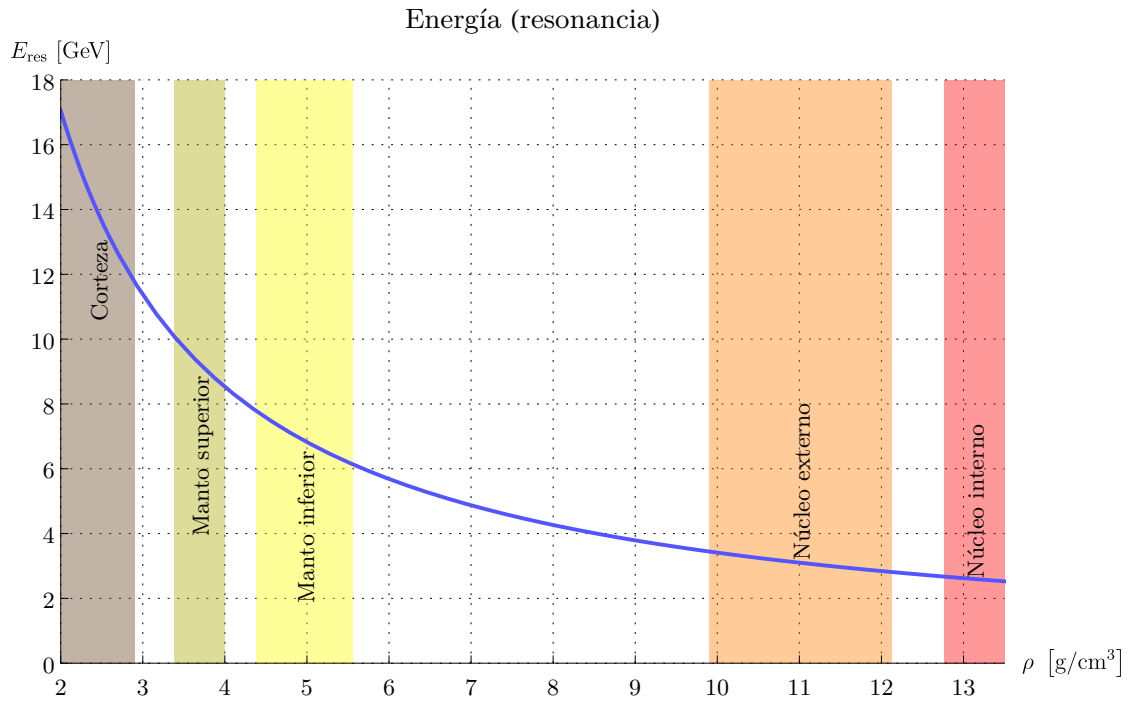


Figura 2.8: Variación de la energía en la condición de resonancia como función de la densidad del medio. Las bandas de colores muestran el intervalo típico de densidades que hay en cada una de las cinco capas principales de la Tierra.

Capítulo 3

El interior de la Tierra

Entender a la Tierra constituye un reto puesto que es un sistema muy complejo con muchas partes que interaccionan entre sí. La Geología es la ciencia encargada del estudio del planeta Tierra y se le suele subdividir en dos ramas principales: la Geología física y la Geología histórica. El objetivo de la Geología física consiste en estudiar los materiales que componen la Tierra y analizar los diferentes procesos que ocurren por debajo y por encima de la superficie terrestre. Por otro lado, la Geología histórica trata de comprender el origen de la Tierra y su dinámica a lo largo del tiempo. A pesar de que ambas ramas están íntimamente relacionadas, el estudio de los diferentes procesos dinámicos precede al de Geología histórica debido a que antes de tratar de revelar el pasado de Tierra, se debe primero conocer cómo es que funciona. Por lo anterior, es necesario tener la mayor cantidad información posible para construir teorías que expliquen de forma lógica la cronología de los eventos característicos en la historia de la Tierra. Sin embargo, obtener dicha información no es tarea fácil. Una de las regiones donde actualmente se tiene muy poco conocimiento es el interior de la Tierra. Esto se debe a que la única forma de analizar el interior del planeta es por medio de métodos indirectos como el estudio de la propagación de las ondas sísmicas. A continuación se hace un breve resumen de lo que actualmente se conoce del interior.

La separación en capas de distinta composición se produjo probablemente por la estratificación por densidades que tuvo lugar durante el periodo de fusión parcial de las primeras etapas de la historia de la Tierra. Durante este periodo los elementos más pesados, principalmente el hierro y el níquel, se fueron hundiendo a medida que los componentes rocosos más ligeros flotaban hacia la superficie. Esta segregación de material sigue ocurriendo todavía, pero a un ritmo muchísimo más reducido. Debido a esta diferenciación química, el interior de la Tierra no es homogéneo. De manera general, el interior de la Tierra consiste en tres regiones principales que tienen composiciones químicas notablemente diferentes. Las principales capas que componen la Tierra son:

- La corteza terrestre. Es la capa externa comparativamente fina cuyo grosor oscila entre 3 kilómetros, en las cordilleras oceánicas, y 70 kilómetros en algunos cinturones montañosos como los andes y el Himalaya.

- El manto. Una capa de roca sólida (rica en sílice¹) que se extiende hasta una profundidad de unos 2900 kilómetros.
- El núcleo. Es una esfera compuesta principalmente por hierro y níquel y que tiene un radio de unos 3480 kilómetros aproximadamente.

3.1 Determinación de la estructura interna de la Tierra

Se puede suponer que se han extraído muestras del interior de la Tierra. Sin embargo, la mina más profunda del mundo (la mina de oro Mponeng, al oeste de Johannesburgo en Sudáfrica) tiene una profundidad de tan sólo cuatro kilómetros, y la perforación más profunda del mundo (terminada en la península de Kola, en Rusia, en 1992) sólo penetra aproximadamente doce kilómetros hacia el interior de la Tierra². Esto significa, en esencia, que los seres humanos nunca han perforado un agujero en el manto (y jamás lo harán en el núcleo) con el fin de obtener evidencia directa de los materiales que abundan en esas regiones. Por ende, el conocimiento del interior de la Tierra está restringido a modelos de propagación de ondas sísmicas y de densidades. Como se ha visto, la restricción principal es la falta de evidencia directa que se tiene sobre esas regiones. Sin embargo, la geoquímica ha desarrollado algunas técnicas que consisten en usar la composición de algunas rocas en la superficie para modelar el interior de la Tierra [2]. Además, experimentos donde se usan altas presiones y temperaturas han ayudado a establecer el comportamiento de los minerales en el interior del planeta.

Las pruebas para estudiar los modelos del interior de la Tierra son muy variadas. Por ejemplo, se han recogido rocas en la superficie terrestre que se originaron en el manto. Dichas muestras contienen diamantes, que según los estudios de laboratorio, sólo pudieron haberse formado en ambientes con una presión muy elevada. Dado que estas rocas se debieron haber cristalizado a profundidades superiores a los 200 kilómetros, se deduce que son muestras del manto que sufrieron muy pocas alteraciones durante su ascenso a la superficie. Además se han podido examinar láminas del manto superior y de la corteza oceánica que lo recubre que han sido empujadas por encima del nivel del mar en lugares como Chipre, Terranova y Omán [1].

Por otro lado, establecer la composición del núcleo es una cuestión totalmente distinta. Debido a su gran profundidad y a su densidad elevada, ninguna muestra del núcleo ha llegado a la superficie. Sin embargo, se dispone de pruebas significativas para suponer que esta capa consta principalmente de hierro. Estas pruebas son los meteoritos. La mayoría de los meteoritos son fragmentos derivados de colisiones de cuerpos más grandes y son importantes porque representan muestras del material del que se formaron los planetas interiores, incluida la Tierra. Los meteoritos están compuestos principalmente de una aleación de hierro y níquel (metálicos), minerales silicatados (rocosos) o una composición de ambos materiales (mixtos). La composición media de los meteoritos rocosos es muy parecida a la que se supone que tiene el manto. Por otro lado, los meteoritos metálicos poseen un porcentaje mucho más elevado

¹El sílice es un mineral formado por silicio y oxígeno.

²El nombre de esta perforación se conoce como Pozo Superprofundo de Kola (KSDB) o SG-3. Su profundidad es de 12, 262 metros y la finalidad de esta excavación fue la investigación, principalmente, de la corteza terrestre.

de este material metálico del que se encuentra en la corteza terrestre o en el manto. Como la Tierra se formó a partir del mismo material en la nebulosa solar que generó los meteoritos y los demás planetas interiores, debe contener un porcentaje mucho más elevado de hierro del que se encuentra en las rocas de la corteza. Por consiguiente, es posible concluir que el núcleo debe ser enormemente rico en dicho elemento pesado [1].

Este punto de vista también está respaldado por los estudios de la composición del Sol, que indican que el hierro es la sustancia más abundante hallada en el sistema solar que posee la densidad calculada para el núcleo. Además, el campo magnético de la Tierra requiere que el núcleo esté compuesto de un material conductor de la electricidad como lo es el hierro.

Se han obtenido muchas pistas de las condiciones físicas reinantes de la Tierra a través del estudio de las ondas sísmicas generadas por terremotos y explosiones nucleares. Cuando dichas ondas atraviesan la Tierra, llevan información a la superficie sobre los materiales que atraviesan. Por ende, los registros sísmicos proporcionan información del interior de la Tierra.

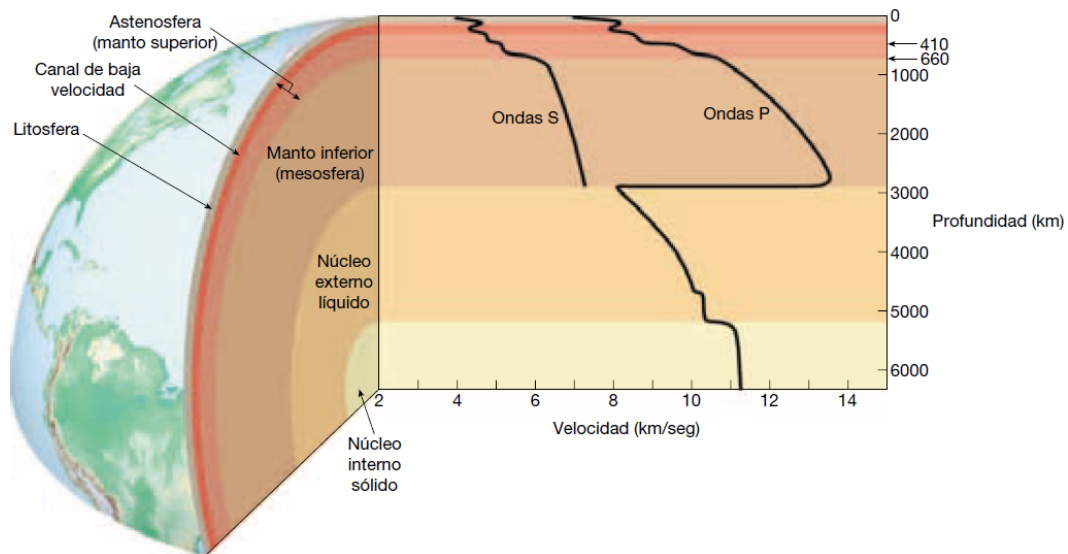


Figura 3.1: La figura muestra las variaciones en la velocidad para las ondas P y las ondas S con la profundidad. Las variaciones abruptas en la velocidad de propagación de las ondas sísmicas delimitan las principales capas de la Tierra. La velocidad de propagación es función de las características del medio que atraviesan. El cambio más abrupto se da en el límite del manto inferior con el núcleo externo debido, principalmente, al cambio de fase sólido-líquido. Porque los líquidos no se oponen a las fuerzas de cizalla, las ondas S no son capaces de propagarse a través del núcleo externo. (Imagen tomada de Tarbuck, Edward J. y Lutgens, Frederick K. *Ciencias de la Tierra*, octava edición, Pearson, Madrid, pág. 352, 2005)

De manera muy general, la técnica del uso de ondas sísmicas para estudiar el interior consiste en la determinación precisa del tiempo que las ondas P (compresivas) y ondas S (cizalla) necesitan para desplazarse desde un terremoto, erupción volcánica o explosión nuclear hasta una estación sismográfica, figura 3.1. Debido a que el tiempo necesario para que las ondas P y S viajen a través de la Tierra depende de los materiales que cruzan, los sismólogos buscan variaciones relacionadas con el tiempo de desplazamiento que no puedan explicarse únicamente

por diferencias en las distancias recorridas. Esas variaciones corresponden a cambios en las propiedades de los materiales atravesados (ver figura 3.2) [1].

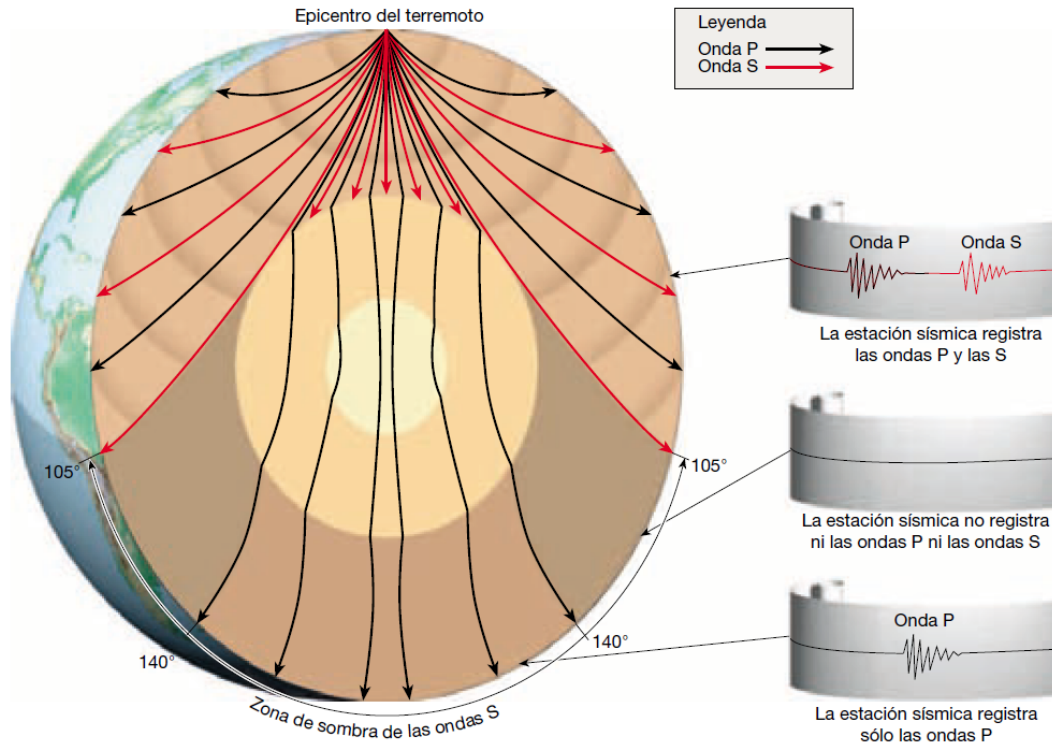


Figura 3.2: Vista del interior de la Tierra donde se pueden apreciar las trayectorias de las ondas P y S. De manera muy general, el estudio sobre la propagación de las ondas sísmicas es el que ha dado la mayor información de cómo es la Tierra por dentro. (op. cit., pág. 349.)

La velocidad de las ondas sísmicas depende de la densidad y elasticidad del medio en el cual se propaguen [29]. Por ejemplo, las ondas sísmicas viajan más rápidamente en un material rígido, que retorna elásticamente a su forma original cuando cesa el esfuerzo causado por la onda sísmica, a diferencia de un medio líquido, donde las distancias intermoleculares son mayores que en un material sólido. Las ondas compresivas P (ondas longitudinales) son capaces de propagarse a través de los líquidos, así como de sólidos porque, cuando están comprimidos, estos materiales se comportan elásticamente. Las ondas de cizalla S (ondas transversales) no pueden propagarse a través de los líquidos, porque a diferencia de los sólidos, los líquidos no se oponen a la cizalla. Es decir, cuando los líquidos son sometidos a fuerzas para cambiar sus formas, simplemente fluyen. Cuando las ondas sísmicas pasan de un material a otro ocurren fenómenos de difracción y reflexión en el límite entre dos materiales diferentes. Todas estas características de las ondas sísmicas, junto con el desarrollo de redes sismográficas alrededor de todo el mundo, han permitido llegar a la conclusión de que la Tierra está compuesta por distintas capas con propiedades mecánicas o composicionales, o ambas cosas, variables [1].

3.2 Modelos sobre la composición y estructura terrestre

Se han desarrollado teorías que describen la naturaleza del interior de la Tierra y que coinciden con la mayoría de los datos procedentes de las observaciones. Así, los modelos del interior de la Tierra representan las mejores deducciones posibles que se pueden hacer según la información disponible.

Uno de los mejores modelos que se tienen para representar las propiedades (promedio) de la Tierra es el Modelo Preliminar de Referencia de la Tierra (ver figura 3.3), PREM³ por sus siglas en inglés. Este modelo es una abstracción matemática de las características principales de la Tierra [30], tales como las propiedades de elasticidad, atenuación, densidad, presión y gravedad, como función del radio planetario. El PREM fue desarrollado por A.M. Dziewonski y D.L. Anderson en 1981 y ha sido utilizado ampliamente como base para tomografías sísmicas y otros modelos geofísicos.

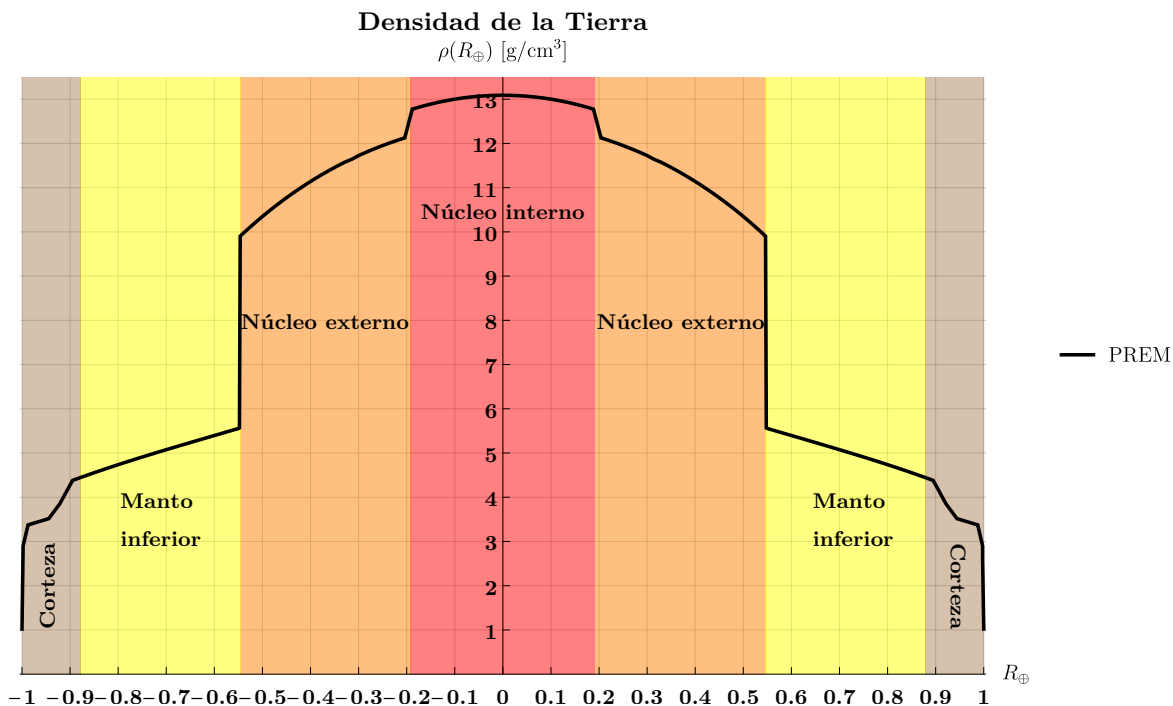


Figura 3.3: La densidad de la Tierra dada por el PREM. Las principales capas de la Tierra que se pueden apreciar en este modelo debido a su tamaño son el núcleo interno, el núcleo externo y el manto inferior. Estas tres capas en conjunto representan el 81.7% de la masa de la Tierra y un 71.7% del volumen total. Una cosa especial a notar en este modelo de la distribución de la densidad terrestre es que el núcleo externo representa el mayor intervalo de variación de la misma, pues va de los 9.90 a los 12.6 g/cm³. (Datos de Dziewonski, A. M. y Anderson, D. L. *Preliminary reference Earth model*, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **25**, 1981)

³Preliminary Reference Earth Model.

3.3 Descripción de las capas interiores

El interior de la Tierra se caracteriza por un aumento gradual de la temperatura, la presión y la densidad con la profundidad. Los cálculos sitúan la temperatura a una profundidad de 100 kilómetros entre los 1200 °C y los 1400 °C, mientras que la temperatura del centro de la Tierra supera los 6700 °C. El interior de la Tierra ha retenido gran parte de la energía adquirida durante los años en que se formó. El aumento de la presión con la profundidad provoca el correspondiente incremento de la densidad de las rocas. El aumento gradual de la temperatura y la presión con la profundidad afecta las propiedades físicas y, por tanto, el comportamiento mecánico de los materiales terrestres.

La Tierra puede dividirse en cinco capas principales según sus propiedades físicas y, por tanto, su resistencia mecánica: la corteza, el manto superior (litósfera y astenósfera), el manto inferior (mesósfera), el núcleo externo y el núcleo interno.

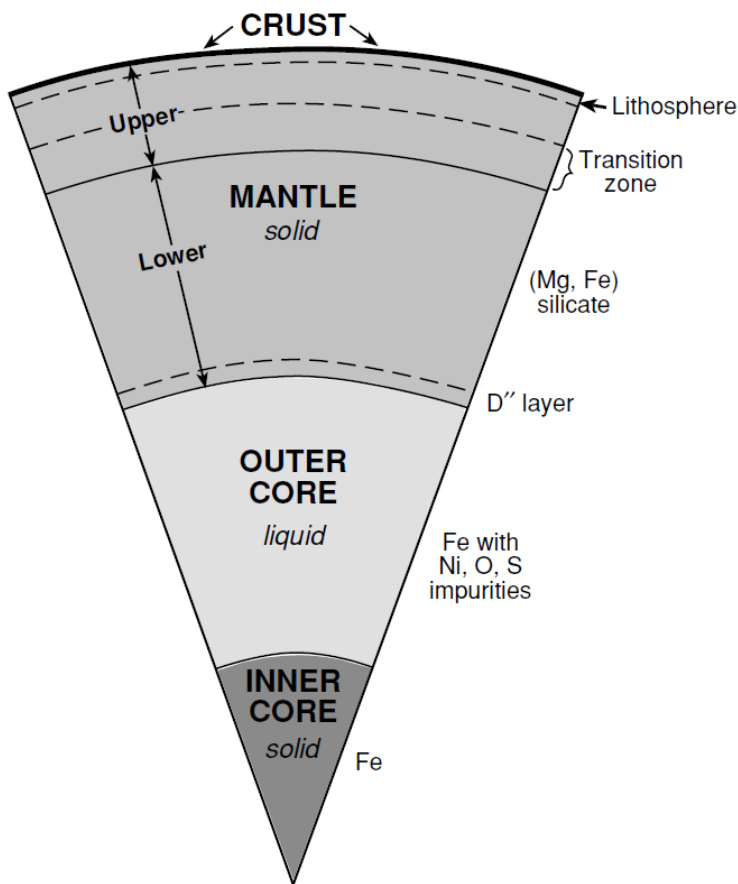


Figura 3.4: Representación gráfica de las principales capas y zonas más características de la Tierra. Los elementos ligeros que podrían estar en el núcleo externo son azufre, silicio, oxígeno, carbono e hidrógeno. (Imagen tomada de Fowler, C.M.R. *The Solid Earth: An Introduction to Global Geophysics*, segunda edición, Cambridge University Press, Reino Unido, pág. 2, 2004.)

3.3.1 Corteza terrestre

La capa más externa de la Tierra está formada por la corteza y el manto superior y forma un caparazón relativamente frío y rígido. La corteza de la Tierra tiene un grosor medio inferior a los veinte kilómetros, lo que la convierte en la capa más fina de las divisiones terrestres y apenas constituye el 1 % del volumen de la Tierra. A lo largo de la corteza existen grandes variaciones de grosor. Las rocas en el interior estable de los continentes tienen un grosor de 35 a 40 kilómetros. Sin embargo, existen regiones montañosas donde la corteza alcanza un espesor de más de 70 kilómetros. La corteza oceánica es mucho más delgada, entre 3 y 15 kilómetros de grosor y posee un grosor medio de 7.5 kilómetros.

Las rocas continentales tienen una densidad media de alrededor de unos 2.7 g/cm^3 . La corteza continental es rica en los elementos sodio, potasio y silicio. Además se cree que la corteza inferior tiene una composición similar al basalto (una roca volcánica de color negro o verdoso) ya que es la roca más abundante en la superficie.

3.3.2 Manto superior

Aproximadamente el 82 % del volumen terrestre está contenido dentro del manto, una capa gruesa de casi 2900 kilómetros de espesor formada por rocas silicatadas que se extienden desde la corteza terrestre hasta el núcleo externo líquido. El conocimiento de la composición del manto proviene de datos experimentales y del análisis de material traído a la superficie por la actividad volcánica. El manto se divide en manto superior, donde se encuentran la litósfera y la astenósfera, y en manto inferior (mesósfera).

Después de la corteza terrestre viene una capa conocida como la litósfera, la cual tiene un grosor medio de 100 kilómetros, pero puede extenderse 250 kilómetros o más debajo de las porciones más antiguas de los continentes. En las cuencas oceánicas, la profundidad de la litósfera es de sólo unos pocos kilómetros y aumenta hasta casi 100 kilómetros en las partes de la corteza oceánica más antiguas y más frías.

Debajo de la litósfera, en la región del manto superior, a una profundidad de unos 660 kilómetros se extiende la astenósfera. En la parte superior de esta capa se dan ciertas condiciones particulares de temperatura y presión que provocan una pequeña cantidad de fusión en la materia. Dentro de esta zona, la litósfera está mecánicamente despegada de la capa inferior. Como resultado, la litósfera puede desplazarse con independencia de la astenósfera.

3.3.3 Manto inferior

Entre las profundidades de los 660 kilómetros y los 2900 kilómetros se encuentra el manto inferior o mesósfera, la cual conforma el 55 % del volumen de la Tierra. La mayoría de las rocas que conforman el manto, son de naturaleza silícea (alto contenido de dióxido de silicio); las más comunes son olivino, piroxeno y granate. Otro tipo de roca con composición mayoritaria es el óxido de magnesio. Adicionalmente se encuentran elementos como hierro, aluminio, calcio, sodio y potasio. Todos estos elementos dan lugar a otro tipo de minerales como, por ejemplo, la perovskita ($\text{Mg, Fe} \text{ SiO}_3$), periclase, CaSiO_3 -perovskita y SiO_2 -stishovita. Se piensa que el

aluminio constituye del 4 al 5 por ciento del manto inferior.

La temperatura de la mesósfera varía de 1000 °C a 3700 °C en la parte cercana al límite con el núcleo externo. El gradiente geotérmico es de 25 °C por cada kilómetro. La viscosidad del manto también presenta una importante variación, esto se asocia a los grandes valores de presión, que comienzan en 24 Gigapascales y alcanzan 136 Gigapascales en el límite entre el núcleo y manto. Debido a estas propiedades, el manto inferior es mucho menos dúctil que el manto superior, la intensa presión se asocia al estado de agregación sólido. El estado de agregación se relaciona con cambios en la velocidad de las ondas sísmicas y se establece que a partir de los 670 km de profundidad la velocidad de las ondas sísmicas aumenta. Entre los 1500 y 2000 km de profundidad, desaparece el patrón heterogéneo en la velocidad de las ondas sísmicas. Al final del manto inferior se encuentra la zona D”, la cual está dominada por una disminución en la velocidad de las ondas sísmicas primarias. Por el momento, la mejor explicación para este fenómeno es que la capa inferior del manto esté parcialmente fundida. Se considera que la capa D” es una región bastante heterogénea. Algunas de estas variaciones pueden ser explicadas por cambios anómalos en la temperatura de unos 200-300 K, mientras que otros requieren acoplamientos locales en la variación de la composición con la temperatura. Los datos arrojados por la difracción de las ondas P y S sugieren que pueden haber variaciones de hasta un 4% [2] en la composición de esta zona. El entendimiento de lo que sucede en la frontera entre el manto inferior y el núcleo externo es muy importante. Si existen estas zonas compuestas por roca fundida, serían capaces de transportar el calor desde el núcleo al manto inferior de manera más eficiente que la roca sólida. Un ritmo elevado de flujo de calor ocasionaría, a su vez, que el manto sólido localizado por encima de esas zonas parcialmente fundidas se calentara lo bastante como para adquirir flotabilidad y ascendería de forma paulatina hacia la superficie. Este material de roca ascendente podría ser el responsable de la actividad volcánica asociada con los puntos calientes⁴, como los encontrados en Hawaii e Islandia.

3.3.4 Núcleo

El núcleo es la esfera central densa de la Tierra con un radio de unos 3480 kilómetros. Extendiéndose desde el borde inferior del manto hasta el centro de la Tierra, el núcleo constituye alrededor de una sexta parte del volumen de la misma y casi una tercera parte de su masa total. La presión en el centro es millones de veces mayor que la presión del aire en la superficie terrestre, y las temperaturas pueden superar los 6700 °C⁵. El núcleo, que está compuesto principalmente por hierro y níquel, se divide en dos regiones que exhiben resistencias mecánicas muy diferentes. El núcleo externo es una capa líquida de aproximadamente 2270 kilómetros de espesor. El flujo convectivo del hierro metálico en el interior de esta zona es el que genera el campo magnético de la Tierra. Por otra parte, el núcleo interno es una esfera

⁴Un punto caliente (hotspot) son emanaciones de magma profundo en un punto fijo de la corteza terrestre.

⁵La temperatura promedio en el centro de la Tierra es de aproximadamente 6000 ± 500 K. La estimación de la temperatura en el centro de la Tierra se calcula con base en los diagramas de fase de aleaciones de hierro con otros elementos.

con un radio de 1221 kilómetros. A pesar de su elevada temperatura, el material del núcleo interno es más denso que el del núcleo externo y se comporta como un sólido.

Volumen, masa y densidad de la Tierra							
	Profundidad	Radio	Volumen		Masa		Densidad
	(km)	(km)	10^{18} m^3	(%)	10^{21} kg	(%)	(g/cm^3)
Corteza	0 - Moho ⁶	Moho - 6371	10	0.9	28	0.5	2.60 - 2.90
Manto superior	Moho - 670	5701 - Moho	297	27.4	1064	17.8	3.38 - 3.99
Manto inferior	670 - 2891	3480 - 5701	600	55.4	2940	49.2	4.38 - 5.56
Núcleo externo	2891 - 5150	1221 - 3480	169	15.6	1841	30.8	9.90 - 12.16
Núcleo interno	5150 - 6371	0 - 1221	8	0.7	102	1.7	12.76 - 13.08
Tierra	0 - 6371	6371 - 0	1083	100	5975	100	

Tabla 3.1: Resumen de los volúmenes, masas y densidades de cada una de las principales capas internas. Obsérvese que la mayor variación en la densidad se da en el núcleo externo (ver figura 3.4).

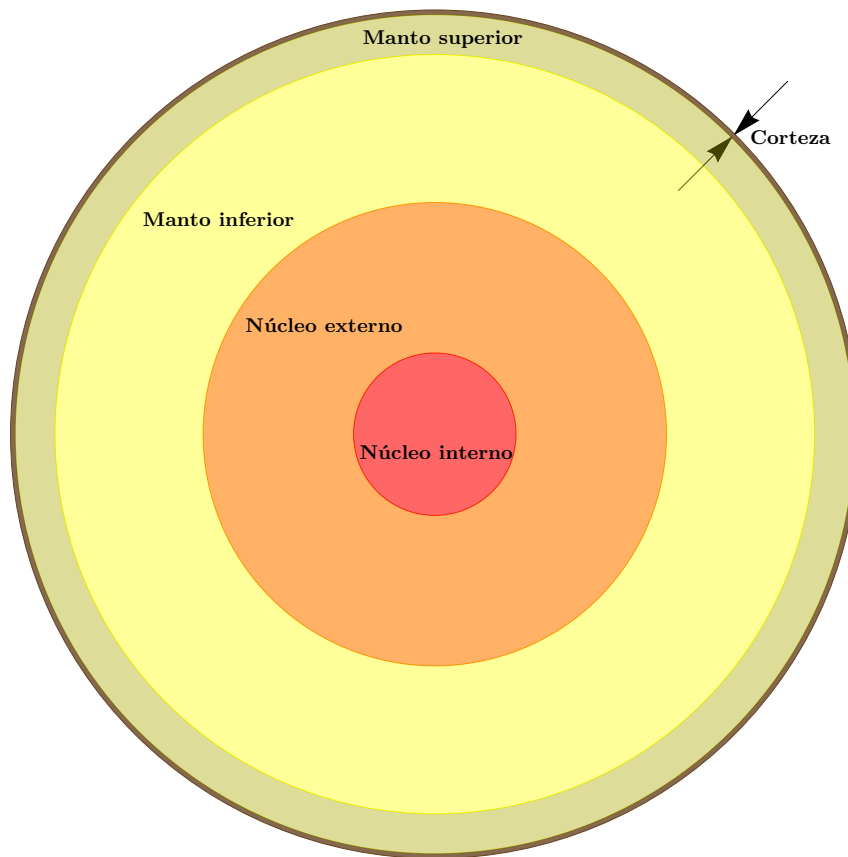


Figura 3.5: Figura a escala de las principales capas interiores.

⁶La discontinuidad de Mohorovicic, abreviada como Moho, es la zona de transición entre la corteza y el manto terrestre. Se sitúa a una profundidad media de unos 35 km, pudiendo encontrarse a 70 km de profundidad bajo los continentes o a tan sólo 10 km bajo los océanos.

En la figura 3.5 se muestra de manera esquemática las cinco capas principales que hay en el interior de la Tierra. Los radios de cada región están hechos a escala con la información dada en 3.1. Nótese que la corteza es una capa muy delgada que apenas representa el 0.5% de la Tierra y cuya densidad varía muy poco si se le compara con las otras regiones. Por lo anterior, y debido a que se trabajará con neutrinos cuyas energías son superiores a un GeV, en este trabajo se considerará al manto superior y la corteza como un solo ente. De la gráfica 2.8 se puede apreciar que solamente los neutrinos con energías superiores a los 2.5 GeV (aprox.) pasarán por la condición de resonancia en la región comprendida por la corteza. Sin embargo, la longitud oscilación en materia (2.107) para esta energía bajo la condición de resonancia es alrededor de unos 2400 kilómetros. Por tanto, el juntar a la corteza junto con el manto superior es una excelente aproximación para este estudio.

3.4 Composición y restricciones del núcleo externo

Una de las características más interesantes del núcleo es su gran densidad. La densidad media es de aproximadamente 11 g/cm^3 , y en el centro de la Tierra se aproxima a casi 14 g/cm^3 . Ni siquiera bajo las presiones extremas dominantes a estas profundidades, los silicatos comunes en la corteza (con densidades superficiales de 2.6 a 3.5 g/cm^3) podrían estar lo suficientemente compactados como para ser responsables de la densidad calculada para esa región. Por consiguiente, se ha intentado determinar qué materiales podrían explicar estas densidades. Cálculos actuales sugieren que el núcleo es fundamentalmente hierro con un 5 a un 10 por ciento de níquel y otras cantidades de elementos más ligeros, los cuales, en conjunto, pueden llegar a representar hasta un 10% de la composición [31]. Estudios de laboratorio han mostrado que aleaciones de hierro con hasta una concentración porcentual máxima del 20 por ciento de níquel son prácticamente indistinguibles de aquellos que no poseen este último elemento [32]. Estas situaciones se traducen en que, por ejemplo, si se tuviese un núcleo externo compuesto de hierro con un 10 por ciento de níquel, la variación en la fracción de electrones apenas sería del 0.23 por ciento. Por este motivo es que este trabajo solamente se enfocará en estudiar los cambios ocasionados por la presencia de elementos ligeros que ocasionen una variación más significativa en la fracción de electrones.

Debido a que a la densidad del núcleo externo es aproximadamente un 20 por ciento menor a la del núcleo interno, se ha propuesto que en él deben estar presentes otros elementos más ligeros. Estudios geoquímicos y cosmológicos sugieren que los candidatos más probables son oxígeno, azufre, carbono, hidrógeno y silicio [2], [32]. Grosso modo, la cantidad máxima de estos elementos ligeros se estima con base en estudios composicionales de la Tierra y del sistema solar, junto con estudios geoquímicos de aleaciones de hierro que sean compatibles con las observaciones sismográficas. En la referencia [4] se presenta una tabla con las abundancias máximas de tales elementos, ver cuadro 3.2.

Concentración porcentual máxima						
Nombre del modelo	Z/A	O (wt %)	C (wt %)	S (wt %)	H (wt %)	Si (wt %)
Modelos de un sólo elemento						
Fe + 11 wt % O	0.4693	11	-	-	-	-
Fe + 12 wt % C	0.4697	-	12	-	-	-
Fe + 13 wt % S	0.4699	-	-	13	-	-
Fe + 1 wt % H	0.4709	-	-	-	1	-
Fe + 18 wt % Si	0.4715	-	-	-	-	18
Modelos multielemento						
Huang2011	0.4678	0.1	-	5.7	-	-
McDonough2003	0.4682	0	0.2	1.9	0.06	6
Allegre2001	0.4699	5	-	1.21	-	7

Tabla 3.2: Abundancia máxima de los elementos ligeros en el núcleo externo. Se muestran los valores del cociente Z/A para mezclas de hierro con un elemento adicional y para algunos modelos multielementos. (Información de Rott, C. et al. *Spectrometry of the Earth using Neutrino Oscillations*, Scientific Reports 5, 2015. [4])

La información presentada en la tabla 3.2 orienta sobre los posibles modelos realistas que se pueden emplear para neutrinos que crucen por el núcleo externo. Lo siguiente es mostrar cómo se incorpora la fracción de electrones al potencial de corriente cargada dado por la ecuación (2.38) junto con la concentración porcentual en peso.

3.4.1 Conexión del potencial con la densidad terrestre

La densidad electrónica $N_e(r)$ está relacionada con la densidad terrestre $\rho(r)$ mediante la expresión [33]

$$N_e(r) = \frac{Y_e}{m_N} \rho(r) = \frac{Z}{A} \frac{\rho(r)}{m_N}, \quad (3.1)$$

donde Y_e se conoce como la fracción de electrones y es igual al cociente del número atómico Z entre el valor de su masa atómica A y m_N es la masa promedio de un nucleón⁷. Sustituyendo $N_e(r)$ en la ecuación (2.46) se obtiene la relación directa entre la densidad del medio y la densidad electrónica

$$V_{CC}(r) = \pm\sqrt{2}G_F \frac{Z}{A} \frac{\rho(r)}{m_N} \approx \pm 7.63246 \times 10^{-14} \frac{Z}{A} \rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right] (r) \text{ eV}, \quad (3.2)$$

donde la densidad debe tener las unidades que se indican entre corchetes para que el potencial tenga dimensiones de electronvolts.

⁷Esto es la doceava parte de la masa de un átomo neutro de carbono-12, es decir 931.494 MeV.

Lo siguiente es reescribir a la fracción de electrones Y_e como

$$Y_e = \frac{Z}{A} = k_1 \frac{Z_1}{A_1} + k_2 \frac{Z_2}{A_2} + \cdots + k_n \frac{Z_n}{A_n} = \sum_{j=1}^n k_j \frac{Z_j}{A_j}, \quad (3.3)$$

donde Z_j/A_j representa al j -ésimo cociente del número atómico entre la masa atómica de un elemento cualquiera. Los coeficientes k_j deben satisfacer la condición

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \sum_{j=1}^n k_j = 1. \quad (3.4)$$

Tómese como ejemplo una mezcla de hierro con diferentes concentraciones porcentuales de hidrógeno. El número atómico del hierro y el hidrógeno son $Z_{\text{Fe}} = 26$ y $Z_{\text{H}} = 1$; mientras que sus respectivas masas atómicas son $A_{\text{Fe}} = 55.845$ y $A_{\text{H}} = 1.00794$. Para un modelo de hierro con una concentración del 1% de hidrógeno se tiene

$$\frac{Z}{A} = 0.99 \frac{Z_{\text{Fe}}}{A_{\text{Fe}}} + 0.01 \frac{Z_{\text{H}}}{A_{\text{H}}} = 0.99 \frac{26}{55.845} + 0.01 \frac{1}{1.00794} \approx 0.4709,$$

lo cual reproduce el valor proporcionado en el cuadro 3.2 para el caso del hidrógeno. De manera similar al ejemplo anterior, se pueden calcular diferentes cocientes para Z/A con otros elementos. El cálculo anterior ilustra cómo se incorporan las diferentes variaciones en la composición terrestre con la teoría de oscilaciones en materia. Más adelante se mostrará que las probabilidades de supervivencia y de conversión de los neutrinos propagándose en el interior de la Tierra son bastante susceptible a estas pequeñas variaciones en la fracción de electrones.

3.5 Modelo propuesto

Para estudiar la composición del núcleo externo usando las oscilaciones de neutrinos se ha realizado un ajuste de la densidad terrestre con base al PREM mediante cuatro funciones escalón. Esta densidad es compatible con la masa y momento de inercia de la Tierra. Se tomaron promedios de los valores para la densidad del núcleo interno (ρ_{IC}) y de la corteza⁸ (ρ_{C}). También se toman como conocidos los radios del núcleo interno (R_{IC}), el núcleo externo (R_{OC}), el manto (R_{M}) y el radio de la Tierra (R_{\oplus}). Dado que no se conoce bien a ciencia cierta lo que pasa en la frontera entre el núcleo externo y el manto, se variará levemente el radio del núcleo externo para incorporar el efecto que pudiese tener la capa D” sobre las oscilaciones de neutrinos. Si se cambia el radio del núcleo externo, entonces también debe haber cambios en las densidades del núcleo externo y del manto. Para que esta modificación no sea arbitraria, se tomarán como constricciones a la masa de la Tierra (M_{\oplus}) y su momento de inercia⁹ (I_{\oplus}),

⁸Recuérdese que se está tomando como “corteza” a la unión del manto superior con la corteza real.

⁹En realidad, el planeta Tierra no es una esfera perfecta. La Tierra es una esfera oblata; ligeramente achatada en los polos. Por este motivo, existen dos valores distintos para el momento de inercia que dependen si se miden con respecto al eje ecuatorial o al eje polar. En esta tesis se tomó el valor promedio entre ambos momentos dados en [34].

cuyos valores son [34], [35]:

$$M_{\oplus} = 5.9724(3) \times 10^{27} \text{ g} \quad \text{e} \quad I_{\oplus} = 8.025 \times 10^{44} \text{ g-cm}^2.$$

Considerando a la Tierra como los casquetes definidos anteriormente, se tienen expresiones analíticas para estas dos cantidades:

$$\begin{aligned} M_{\oplus} &= \frac{4\pi}{3} [\rho_{\text{IC}} R_{\text{IC}}^3 + \rho_{\text{OC}}(R_{\text{OC}}^3 - R_{\text{IC}}^3) + \rho_{\text{M}}(R_{\text{M}}^3 - R_{\text{OC}}^3) + \rho_{\text{C}}(R_{\oplus}^3 - R_{\text{M}}^3)] \\ I_{\oplus} &= \frac{8\pi}{15} [\rho_{\text{IC}} R_{\text{IC}}^5 + \rho_{\text{OC}}(R_{\text{OC}}^5 - R_{\text{IC}}^5) + \rho_{\text{M}}(R_{\text{M}}^5 - R_{\text{OC}}^5) + \rho_{\text{C}}(R_{\oplus}^5 - R_{\text{M}}^5)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ahora, se definen a \tilde{M} e \tilde{I} a la masa y el momento de inercia del núcleo interno más la corteza, respectivamente:

$$\tilde{M} = \frac{4\pi}{3} [\rho_{\text{IC}} R_{\text{IC}}^3 + \rho_{\text{C}}(R_{\oplus}^3 - R_{\text{M}}^3)] \quad \text{y} \quad \tilde{I} = \frac{8\pi}{15} [\rho_{\text{IC}} R_{\text{IC}}^5 + \rho_{\text{C}}(R_{\oplus}^5 - R_{\text{M}}^5)] \quad (3.6)$$

Además, para trabajar con parámetros adimensionales, se definen también las cantidades

$$Y_{\text{IC}} = \frac{R_{\text{IC}}}{R_{\oplus}}, \quad Y_{\text{OC}} = \frac{R_{\text{OC}}}{R_{\oplus}} \quad \text{y} \quad Y_{\text{M}} = \frac{R_{\text{M}}}{R_{\oplus}}. \quad (3.7)$$

Sean $\langle \rho_{M_{\oplus}} \rangle$ y $\langle \rho_{I_{\oplus}} \rangle$ las densidades medias calculadas con la masa y el momento de inercia respectivamente. Esto es

$$\langle \rho_{M_{\oplus}} \rangle = \frac{M_{\oplus}}{\frac{4}{3}\pi R_{\oplus}^3} \quad \text{y} \quad \langle \rho_{I_{\oplus}} \rangle = \frac{I_{\oplus}}{\frac{8}{15}\pi R_{\oplus}^5}. \quad (3.8)$$

Insertando (3.6) en (3.5) y reordenando se tiene

$$\begin{aligned} M_{\oplus} - \tilde{M} &= \frac{4\pi}{3} [\rho_{\text{OC}}(R_{\text{OC}}^3 - R_{\text{IC}}^3) + \rho_{\text{M}}(R_{\text{M}}^3 - R_{\text{OC}}^3)] \\ I_{\oplus} - \tilde{I} &= \frac{8\pi}{15} [\rho_{\text{OC}}(R_{\text{OC}}^5 - R_{\text{IC}}^5) + \rho_{\text{M}}(R_{\text{M}}^5 - R_{\text{OC}}^5)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para incorporar las definiciones dadas por las expresiones (3.7) y (3.8), se hace el siguiente truco algebraico en (3.9):

$$\begin{aligned} \left(\frac{M_{\oplus} - \tilde{M}}{M_{\oplus}} \right) M_{\oplus} &= \frac{4\pi}{3} [\rho_{\text{OC}}(R_{\text{OC}}^3 - R_{\text{IC}}^3) + \rho_{\text{M}}(R_{\text{M}}^3 - R_{\text{OC}}^3)] \\ \left(\frac{I_{\oplus} - \tilde{I}}{I_{\oplus}} \right) I_{\oplus} &= \frac{8\pi}{15} [\rho_{\text{OC}}(R_{\text{OC}}^5 - R_{\text{IC}}^5) + \rho_{\text{M}}(R_{\text{M}}^5 - R_{\text{OC}}^5)]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dividiendo a la primera expresión por $\frac{4\pi}{3} R_{\oplus}^3$ y la segunda por $\frac{8\pi}{15} R_{\oplus}^5$ se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{M_{\oplus} - \tilde{M}}{M_{\oplus}} \right) \frac{M_{\oplus}}{\frac{4\pi}{3} R_{\oplus}^3} &= \rho_{\text{OC}} \left(\frac{R_{\text{OC}}^3}{R_{\oplus}^3} - \frac{R_{\text{IC}}^3}{R_{\oplus}^3} \right) + \rho_{\text{M}} \left(\frac{R_{\text{M}}^3}{R_{\oplus}^3} - \frac{R_{\text{OC}}^3}{R_{\oplus}^3} \right) \\ \left(\frac{I_{\oplus} - \tilde{I}}{I_{\oplus}} \right) \frac{I_{\oplus}}{\frac{8\pi}{15} R_{\oplus}^5} &= \rho_{\text{OC}} \left(\frac{R_{\text{OC}}^5}{R_{\oplus}^5} - \frac{R_{\text{IC}}^5}{R_{\oplus}^5} \right) + \rho_{\text{M}} \left(\frac{R_{\text{M}}^5}{R_{\oplus}^5} - \frac{R_{\text{OC}}^5}{R_{\oplus}^5} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definiendo a las cantidades

$$\delta_M = \frac{\Delta M_{\oplus}}{M_{\oplus}} = \frac{M_{\oplus} - \tilde{M}}{M_{\oplus}} \quad \text{y} \quad \delta_I = \frac{\Delta I_{\oplus}}{I_{\oplus}} = \frac{I_{\oplus} - \tilde{I}}{I_{\oplus}} \quad (3.12)$$

se consigue finalmente el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho_{OC} (Y_{OC}^3 - Y_{IC}^3) + \rho_M (Y_M^3 - Y_{OC}^3) &= \delta_M \langle \rho_{M_{\oplus}} \rangle \\ \rho_{OC} (Y_{OC}^5 - Y_{IC}^5) + \rho_M (Y_M^5 - Y_{OC}^5) &= \delta_I \langle \rho_{I_{\oplus}} \rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

que se debe resolver para encontrar los valores de ρ_{OC} y ρ_M compatibles con los datos de las características de la Tierra. A saber, la solución del sistema (3.13) es

$$\begin{aligned} \rho_{OC} &= \frac{[Y_M^5 - (F Y_{OC})^5] \delta_M \langle \rho_{M_{\oplus}} \rangle - [Y_M^3 - (F Y_{OC})^3] \delta_I \langle \rho_{I_{\oplus}} \rangle}{[(F Y_{OC})^3 - Y_{IC}^3] [Y_M^5 - (F Y_{OC})^5] - [Y_M^3 - (F Y_{OC})^3] [(F Y_{OC})^5 - Y_{IC}^5]} \\ \rho_M &= \frac{[(F Y_{OC})^3 - Y_{IC}^3] \delta_I \langle \rho_{I_{\oplus}} \rangle - [Y_M^3 - (F Y_{OC})^3] \delta_M \langle \rho_{M_{\oplus}} \rangle}{[(F Y_{OC})^3 - Y_{IC}^3] [Y_M^5 - (F Y_{OC})^5] - [Y_M^3 - (F Y_{OC})^3] [(F Y_{OC})^5 - Y_{IC}^5]}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde F es un parámetro que se variará de 0.96 a 1.04 para estudiar el efecto de la frontera entre el núcleo externo y el manto sobre las oscilaciones.

El ajuste a la densidad que se usará para este estudio se puede apreciar en la figura 3.6.

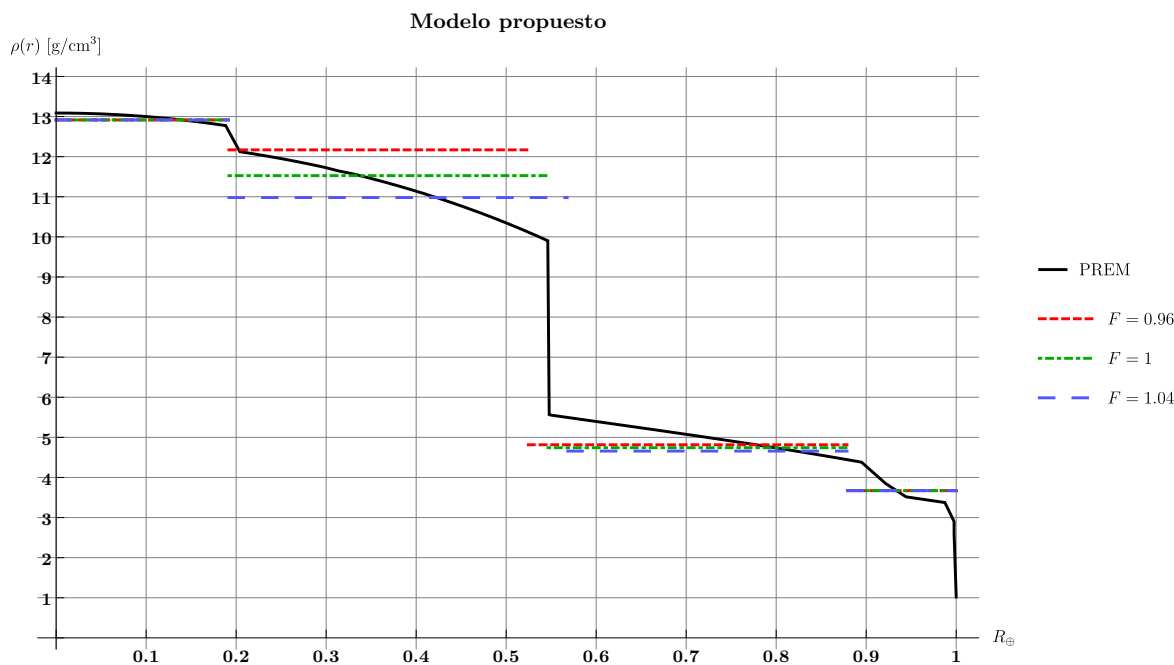


Figura 3.6: Se ajusta una función de cuatro escalones a la densidad dada por el PREM. La modificación del radio del núcleo externo está dada por la variable F . En la referencia [2] se sugiere que la variación en la zona D'' es de alrededor del 4%.

Lo siguiente es calcular la distancia total que recorre un neutrino que se propaga en el interior de la Tierra, tomando en cuenta las cuatro capas anteriores.

3.5.1 La trayectoria en la Tierra

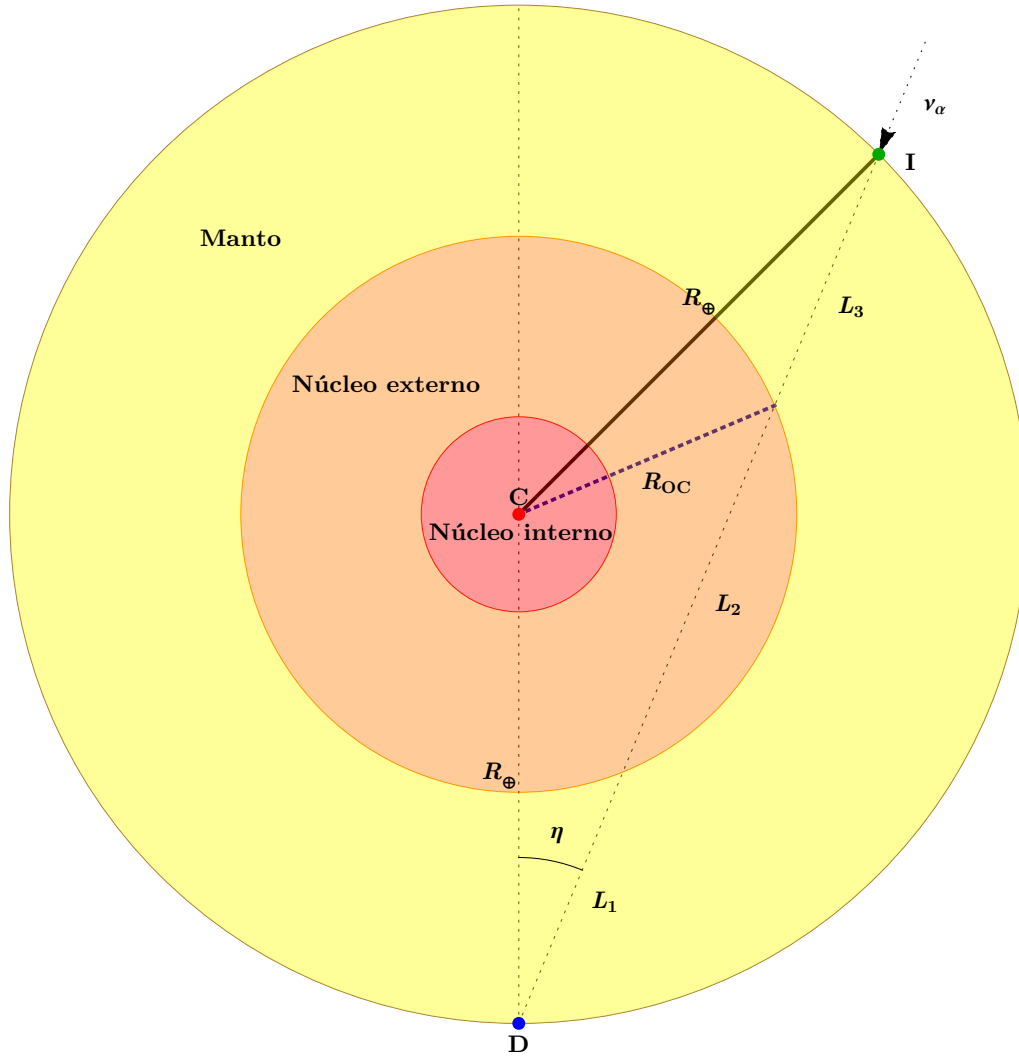


Figura 3.7: Representación esquemática del interior de la Tierra para mostrar el recorrido de los neutrinos en función del ángulo nadir η . Los puntos **C** y **D** denotan el centro de la Tierra y el detector, respectivamente. El vector ν_α indica el punto de incidencia de un neutrino atmosférico. R_\oplus es el radio terrestre; y R_{OC} , el radio del núcleo externo.

Los neutrinos producidos en la atmósfera no necesariamente recorren una distancia igual a dos veces el radio de la Tierra para llegar al detector. En realidad, la longitud de su recorrido puede ser descrita en términos del ángulo nadir. El ángulo nadir es aquel que se forma de la intersección entre la vertical del observador (el punto **D** de la figura 3.7) y la dirección del neutrino incidente. Esta situación (simplificada) se puede visualizar en la figura 3.7.

Lo que se necesita calcular es la distancia que recorren los neutrinos en función del ángulo nadir. A continuación se hace un desarrollo para la situación particular descrita por la figura 3.7, el cual podrá ser extendido al número de capas que se están considerando en este trabajo. De la figura 3.7, despreciando la profundidad a la que se encuentre el detector con respecto

a la superficie, se ve que la distancia total recorrida de los neutrinos en el núcleo externo y manto está dada por

$$L = L_1 + L_2 + L_3. \quad (3.15)$$

Por otro lado, obsérvese que los puntos **C**, **I**, **D** forman un triángulo con dos lados iguales de longitud R_{\oplus} y un lado de longitud L . Usando la ley de cosenos, se tiene la ecuación

$$R_{\oplus}^2 = R_{\oplus}^2 + L^2 - 2R_{\oplus}L \cos \eta, \quad (3.16)$$

la cual puede ser resuelta de manera sencilla para obtener

$$L = 2R_{\oplus} \cos \eta. \quad (3.17)$$

Por otra parte, llámese $L' = L_1 + L_2$ y considérese ahora el triángulo con lados R_{\oplus} , R_{OC} y L' . Aplicando nuevamente ley de cosenos a este triángulo se tiene la expresión

$$R_{\text{OC}}^2 = R_{\oplus}^2 + L'^2 - 2R_{\oplus}L' \cos \eta, \quad (3.18)$$

la cual, al ser resuelta para L' , da

$$L'_{\pm} = R_{\oplus} \cos \eta \pm \sqrt{R_{\text{OC}}^2 - R_{\oplus}^2 \sin^2 \eta} = R_{\oplus} \left(\cos \eta \pm \sqrt{Y_{\text{OC}}^2 - \sin^2 \eta} \right). \quad (3.19)$$

Nótese que la distancia L'_{\pm} en (3.19) tiene dos signos. Estos signos corresponden a las dos intersecciones que puede tener el círculo de radio R_{OC} con L' . De hecho, si se observa detenidamente la figura 3.7, el mismo análisis es totalmente válido si se hubiese elegido $L' = L_2 + L_3$, puesto que se obtendría exactamente el mismo triángulo. Por consiguiente, de esta observación se tiene que cumplir que $L_1 = L_3$. Regresando a la ecuación (3.19), se aprecia que la primera intersección de L' con la circunferencia de radio R_{OC} es justamente L_1 . Por ende,

$$L_1 = L_3 = L'_- = R_{\oplus} \left(\cos \eta - \sqrt{Y_{\text{OC}}^2 - \sin^2 \eta} \right) \quad (3.20)$$

y también que

$$L_2 = L'_+ - L'_- = 2R_{\oplus} \sqrt{Y_{\text{OC}}^2 - \sin^2 \eta}. \quad (3.21)$$

La importancia del desarrollo anterior es que se puede extender para cada una de las distintas capas terrestres siguiendo el mismo procedimiento. Supóngase ahora que se tiene la situación descrita por la figura 3.8. En este caso se está considerando una capa más —la corteza— y, además, que el neutrino incidente atraviesa todas las regiones del interior de la Tierra. En principio, es posible obtener las distancias L_j , con $j = 1, 2, \dots, 7$, aplicando ley de cosenos en los triángulos formados de las intersecciones de L con los diferentes circunferencias que modelan las capas interiores. Sin embargo, este es justo el procedimiento empleado en el caso anterior, por lo que simplemente se darán los resultados. De la simetría del problema, se tiene que $L_1 = L_7$, $L_2 = L_6$, y $L_3 = L_5$. Por tanto, sólo necesario dar las fórmulas explícitas para L_7 , L_6 , L_5 y L_4 . Por el desarrollo previo, L_4 tendrá la misma forma que la ecuación (3.21), pero cambiando Y_{OC} por Y_{IC} . Es decir,

$$L_4 = 2R_{\oplus} \sqrt{Y_{\text{IC}}^2 - \sin^2 \eta}. \quad (3.22)$$

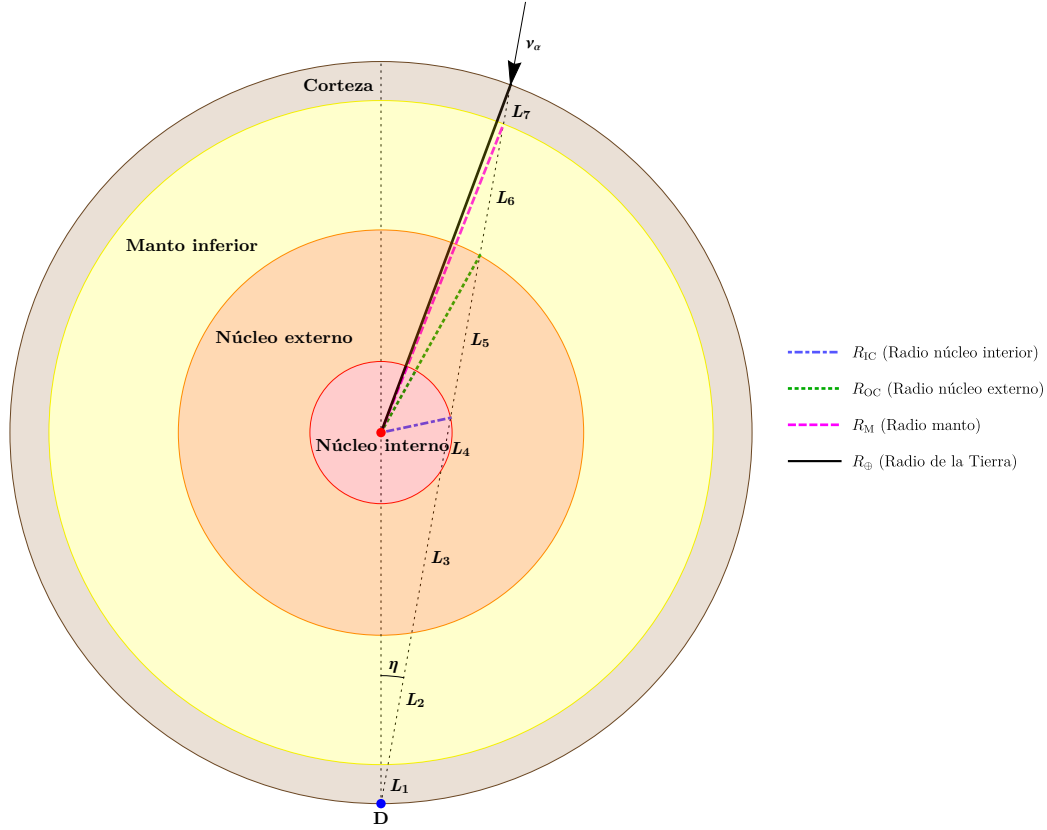


Figura 3.8: Diagrama a escala del interior de la Tierra. El neutrino incidente ν_α atraviesa todas las capas interiores. Observe que en este caso $L_1 = L_7$, $L_2 = L_6$ y $L_3 = L_5$.

En la expresión anterior, obsérvese que si $\eta = 0$, entonces $L_4 = 2R_{IC}$, lo cual es consistente con la intuición geométrica del problema. Las distancias restantes se pueden obtener de la resta de aplicar la fórmula (3.19) con el signo positivo y usando diferentes radios. Verbigracia, para obtener L_5 se aplica (3.19) usando los radios del núcleo externo R_{OC} e interno R_{IC} , cada uno por separado, y se restan las dos expresiones resultantes. Esto es

$$\begin{aligned} L_5 &= R_\oplus \left(\cos \eta + \sqrt{Y_{OC}^2 - \text{sen}^2 \eta} \right) - R_\oplus \left(\cos \eta + \sqrt{Y_{IC}^2 - \text{sen}^2 \eta} \right) \\ &= R_\oplus \left(\sqrt{Y_{OC}^2 - \text{sen}^2 \eta} - \sqrt{Y_{IC}^2 - \text{sen}^2 \eta} \right) = L_3. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Los segmentos restantes se obtienen de manera análoga y estos son:

$$\begin{aligned} L_6 &= R_\oplus \left(\sqrt{Y_M^2 - \text{sen}^2 \eta} - \sqrt{Y_{OC}^2 - \text{sen}^2 \eta} \right) \\ L_7 &= R_\oplus \left(\cos \eta - \sqrt{Y_M^2 - \text{sen}^2 \eta} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por último, la ecuación (3.19) permite calcular el ángulo nadir máximo para después del cual ya no habrán neutrinos viajando por el núcleo de la Tierra. Esta condición se da para la situación en la que $L'_+ = L'_-$, lo cual se traduce en que

$$\eta_{\text{máx}} = \arcsin \frac{R_{OC}}{R_\oplus} \approx 33.11^\circ. \quad (3.25)$$

El valor del ángulo nadir máximo en (3.25) sirve para establecer el intervalo de posibles ángulos para estudiar los efectos del cambio de densidad entre el núcleo interno y externo sobre el fenómeno de oscilaciones.

El desarrollo previo sobre el cálculo de las distancias constituye el elemento final necesario para poder incorporar la teoría a un caso práctico. Usando el modelo propuesto (ver figura 3.6), el operador de evolución dado por (2.73) y este sería, en principio,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{U}}(r, r_0) &= \tilde{\mathcal{U}}(r_7, r_6) \tilde{\mathcal{U}}(r_6, r_5) \tilde{\mathcal{U}}(r_5, r_4) \tilde{\mathcal{U}}(r_4, r_3) \tilde{\mathcal{U}}(r_3, r_2) \tilde{\mathcal{U}}(r_2, r_1) \tilde{\mathcal{U}}(r_1, r_0) \\ &= e^{-iL_7 \tilde{H}_C} e^{-iL_6 \tilde{H}_M} e^{-iL_5 \tilde{H}_{OC}} e^{-iL_4 \tilde{H}_{IC}} e^{-iL_3 \tilde{H}_{OC}} e^{-iL_2 \tilde{H}_M} e^{-iL_1 \tilde{H}_C},\end{aligned}\quad (3.26)$$

donde cada exponencial se calcula de acuerdo con (2.90) y \tilde{H}_C , \tilde{H}_M , \tilde{H}_{OC} y \tilde{H}_{IC} son los hamiltonianos dados por la expresión (2.62) para la corteza, el manto, el núcleo externo y el núcleo interno respectivamente. Sin embargo, el cómputo de este producto de matrices puede ser reducido simplemente a

$$\tilde{\mathcal{U}}(r, r_0) = \tilde{\mathcal{U}}(L_7, \frac{1}{2}L_4) \tilde{\mathcal{U}}^T(L_7, \frac{1}{2}L_4), \quad (3.27)$$

debido a que se tiene un potencial simétrico con respecto al centro de la Tierra que es el punto medio. El argumento anterior está basado en el hecho de que se tiene un potencial simétrico respecto al punto medio y se puede probar, por medio del operador de inversión temporal, que esto es así.

Una vez conocido al operador $\tilde{\mathcal{U}}(r, r_0)$, lo siguiente es aplicar las fórmulas (2.80)-(2.88) para obtener las amplitudes de transición, las cuales, al cuadrarlas, darán las probabilidades de oscilación. En el siguiente capítulo se presentan los resultados de la aplicación de la teoría presentada hasta el momento.

Capítulo 4

Resultados

Debido a que todavía existen varias interrogantes sobre los neutrinos, este trabajo no estuvo solamente limitado a estudiar la variación en la fracción de electrones y el efecto en el cambio del radio en el núcleo externo, sino que también se tomaron en cuenta las modificaciones que pudiesen ocasionar el tener una jerarquía invertida de masas; el cambio de octante para el ángulo de mezcla θ_{23} , y el valor de la fase de violación de CP. Un aspecto importante a mencionar es que únicamente se usó al hidrógeno como elemento modificador de la fracción de electrones. La justificación de hacer esto está basada en el hecho de que este método sólo serviría para determinar el valor del cociente Z/A en el núcleo interno (o cualquier otra región en el interior). De la tabla 3.2 se observa que el segundo mayor cambio en la fracción de electrones es para un modelo de 99 % de hierro y 1 % de hidrógeno. Lo anterior se debe a que el cociente del número de protones y el número másico es máximo para el hidrógeno ^1H , el isótopo más abundante. Nótese también de la tabla 3.2 que el modelo con el mayor cambio corresponde a 82 % hierro y 18 % silicio. Por lo anterior, se tiene que el mejor elemento para hacer las variaciones en la densidad electrónica es el hidrógeno.

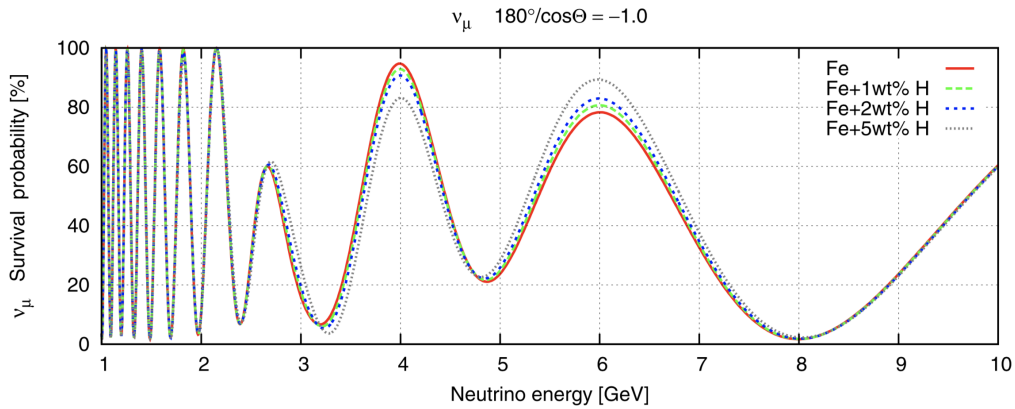
Los datos empleados en este trabajo fueron tomados de *Review of Particle Physics*, Particle Data Group (M. Tanabashi et al.), Phys. Rev. D98, 030001 (2018), pág. 254 [21]. Estos valores se pueden consultar en la tabla 4.1.

Valores		
Parámetro	Jerarquía normal	Jerarquía invertida
Δm_{21}^2 [eV ²]	7.37×10^{-5}	7.37×10^{-5}
Δm_{31}^2 [eV ²]	2.562×10^{-3}	-2.468×10^{-3}
$\text{sen}^2 \theta_{12}$	0.297	0.297
$\text{sen}^2 \theta_{13}$	0.0215	0.0216
$\text{sen}^2 \theta_{23}$	0.425	0.589
δ/π	$1.38^{+0.52}_{-0.38}$	$1.31^{+0.57}_{-0.39}$

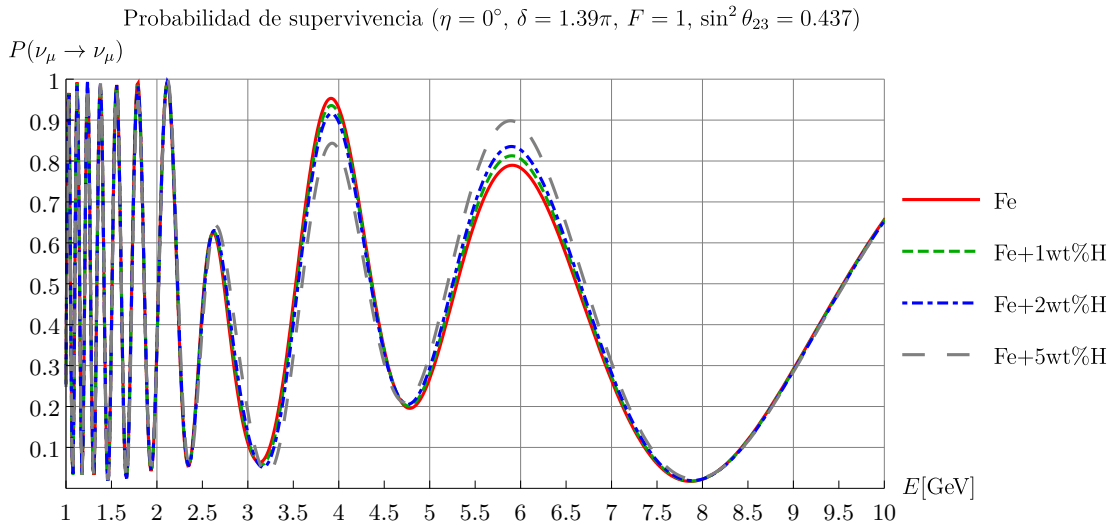
Tabla 4.1: Todos los valores en esta lista corresponden al “best fit”. Para tomar en cuenta el cambio de cuadrante se usan $\text{sen}^2 \theta_{23} = 0.575$ para NO y $\text{sen}^2 \theta_{23} = 0.411$ para IO.

Primeramente se mostrarán las probabilidades de oscilación para ejemplificar los resultados de la teoría. Las probabilidades de supervivencia relevantes son para los neutrinos del muón y del electrón; mientras que la probabilidades de conversión de interés son las transiciones entre neutrinos del muón a neutrinos del electrón y del tau. La idea primordial de estas primeras gráficas es ejemplificar como el cambio en la fracción de electrones dentro del potencial de corriente cargada V_{CC} es suficiente para modificar notablemente las probabilidades de oscilación.

En la sección 2.2.1 se mencionó que el procedimiento desarrollado en esta tesis con perfiles de densidad constantes arroja resultados similares si se le compara con aquellos modelos más complejos donde se emplean densidades variables punto a punto. En la figura 4.1 se cotejan los resultados obtenidos entre NuCraft y el método expuesto en este trabajo.



(a) Probabilidad de supervivencia para el neutrino del muón usando 50 puntos interpolados con líneas rectas para ajustar la densidad dada por el PREM [25]. (Imagen tomada de Rott, C. et al. *Spectrometry of the Earth using Neutrino Oscillations*, Scientific Reports 5, 2015. [4])



(b) Probabilidad de supervivencia del neutrino del muón obtenida mediante la teoría presentada en los capítulos 2 y 3.

Figura 4.1: Comparación entre resolver la ecuación de Schrödinger numéricamente (figura 4.1a) y el método propuesto en este escrito (figura 4.1b).

Los parámetros empleados para la elaboración de las gráficas en la figura 4.1 fueron tomados de la referencia [36]. Lo primero a observar es que ambas gráficas poseen la misma estructura en la forma de las curvas. Nótese que los máximos y mínimos de la figura 4.1b se encuentran levemente desplazados hacia la izquierda. Parte de la discrepancia entre ambas imágenes pudiese ser debida a los valores empleados en [4] para los radios de las capas internas, la fracción de electrones en las demás regiones, el valor numérico de las constantes físicas, etc. No obstante, lo anterior muestra que un modelo extremadamente simple de sólo cuatro escalones tiene un rendimiento casi idéntico a uno muchísimo más complejo y que, además, requiere de mayor poder computacional.

4.1 Probabilidades

4.1.1 Jerarquía normal

Recuérdese de la ecuación (2.80) que la amplitud de probabilidad para el neutrino del electrón no depende del valor del octante del ángulo de mezcla θ_{23} ni tampoco de la fase de violación de CP. La probabilidad de supervivencia en este caso se puede apreciar en la figura 4.2.

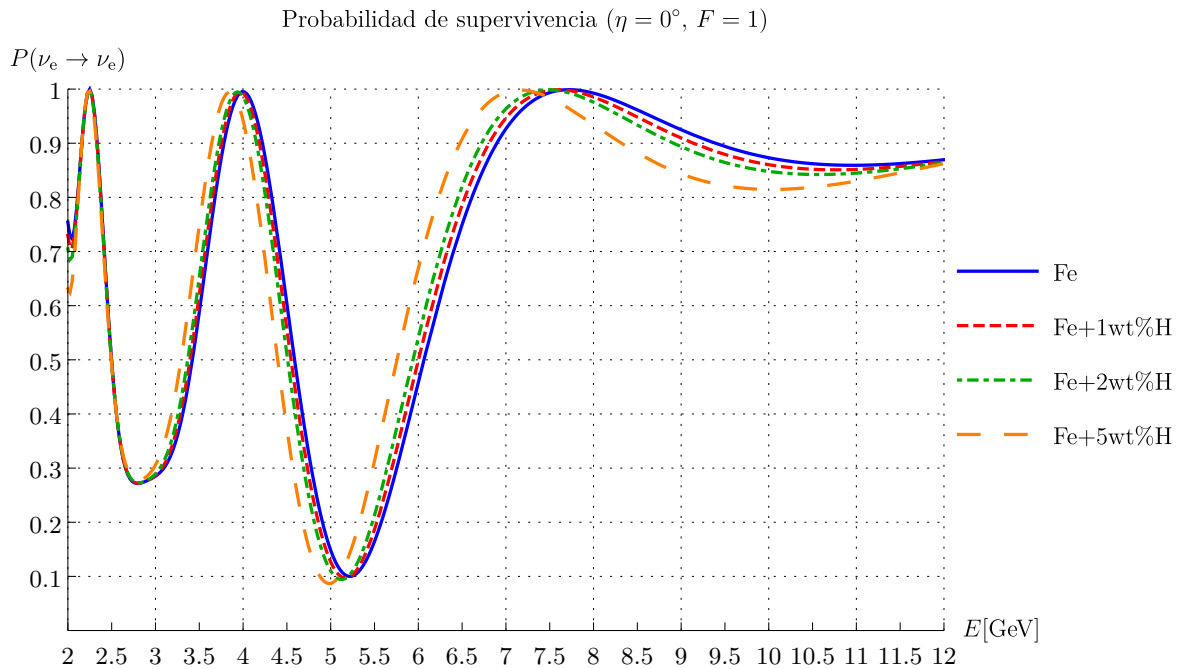


Figura 4.2: Probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón como función de la energía para cuatro composiciones diferentes del núcleo externo.

De esta gráfica, y por supuesto de las anteriores también, se puede apreciar que las probabilidades para diferentes composiciones del núcleo se empiezan a separar, entre 2.5 y 3 GeV. Este hecho comienza a dar pauta para acotar el espectro de energías óptimo para estudiar esta región de la Tierra.

Para la probabilidad de supervivencia del neutrino del muón no se cuenta con la misma suerte que en el caso del electrón. A saber, ésta si depende de los valores de θ_{23} y δ . En la figura 4.3 se compara el efecto de la fase de violación sobre las probabilidades de supervivencia del muón.

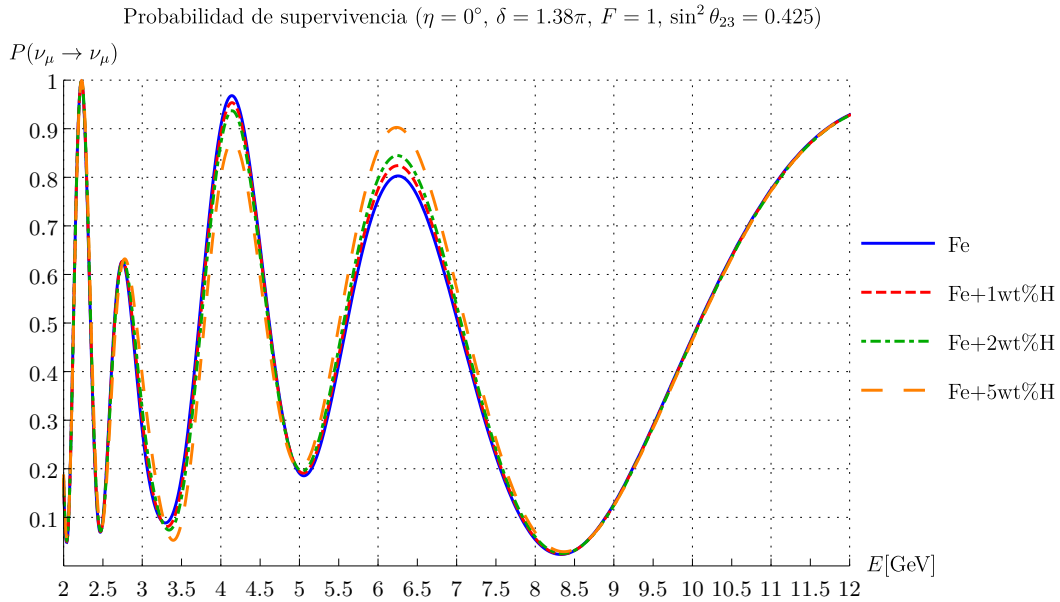
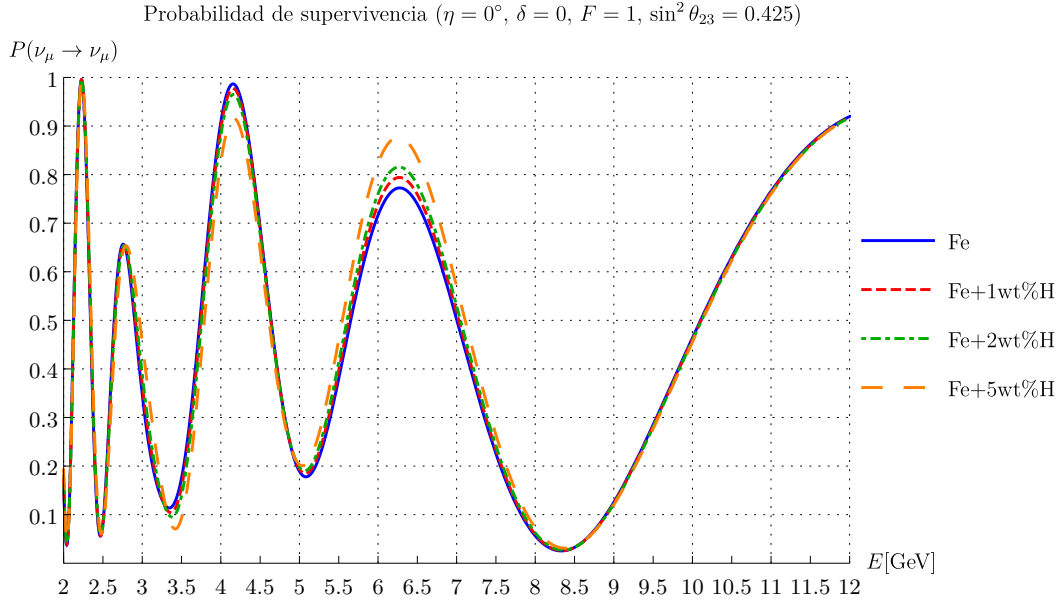
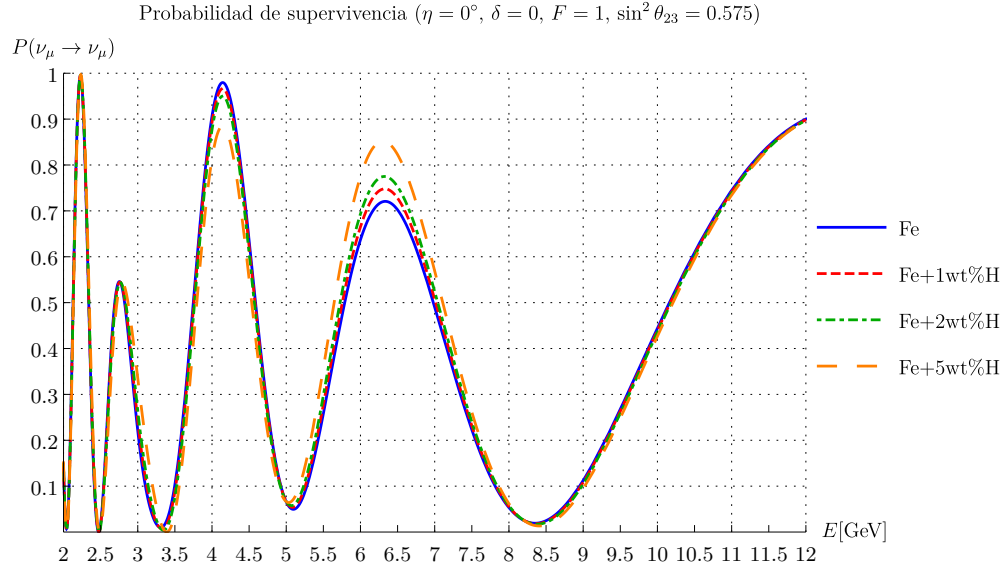
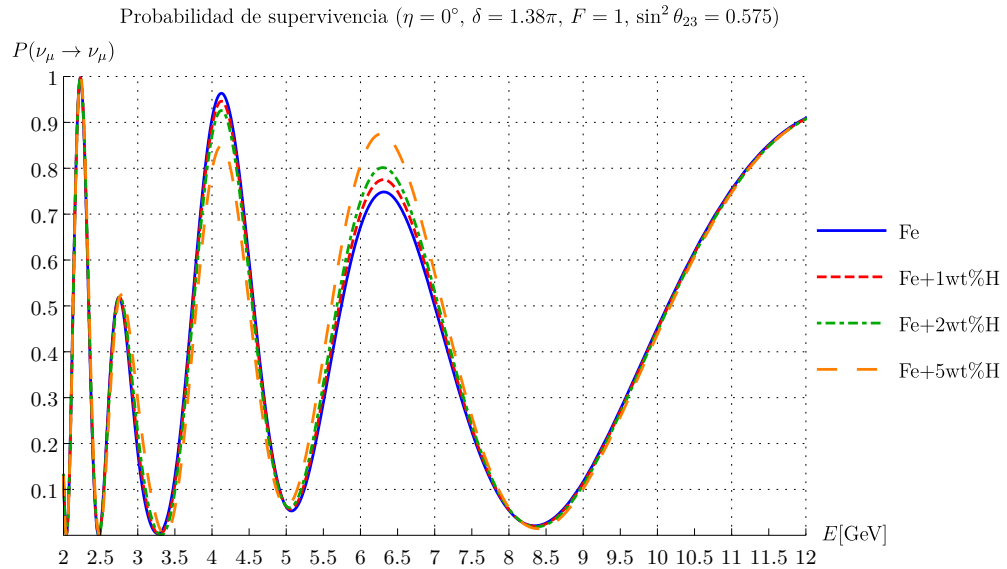


Figura 4.3: Comparación entre $\delta = 0$ y $\delta = 1.38\pi$ tomando $\sin^2 \theta_{23} = 0.425$.

A simple vista, el efecto de incorporar la fase de violación de CP fue desplazar los máximos locales que se encuentran alrededor del punto $E = 4.15$ GeV levemente hacia abajo y aumentar la probabilidad de supervivencia para el máximo local de se encuentra, aproximadamente, en $E = 6.26$ GeV.



(a) Probabilidad de supervivencia del neutrino del muón como función de la energía usando $\delta = 0$ y $\theta_{23} > 45^\circ$. Obsérvese que en comparación con la figura 4.3a, las gráficas se encuentran desplazadas hacia abajo y, además, se tienen valores donde la probabilidad de supervivencia es prácticamente cero.



(b) Probabilidad de supervivencia del neutrino del muón como función de la energía usando $\delta = 1.38\pi$ y $\theta_{23} > 45^\circ$. Nótese que la separación de las probabilidades en los puntos críticos es ligeramente mayor al caso donde $\theta_{23} < 45^\circ$.

Figura 4.4: Comparación entre $\delta = 0$ y $\delta = 1.38\pi$ tomando $\sin^2 \theta_{23} = 0.575$.

Por otro lado, el cambio de octante en el ángulo de mezcla θ_{23} suprime de manera muy leve los valores máximos que alcanzan las probabilidades de supervivencia del neutrino del muón en los puntos críticos. Sin embargo, la separación entre las diferentes composiciones se vuelve más evidente (ver figura 4.4).

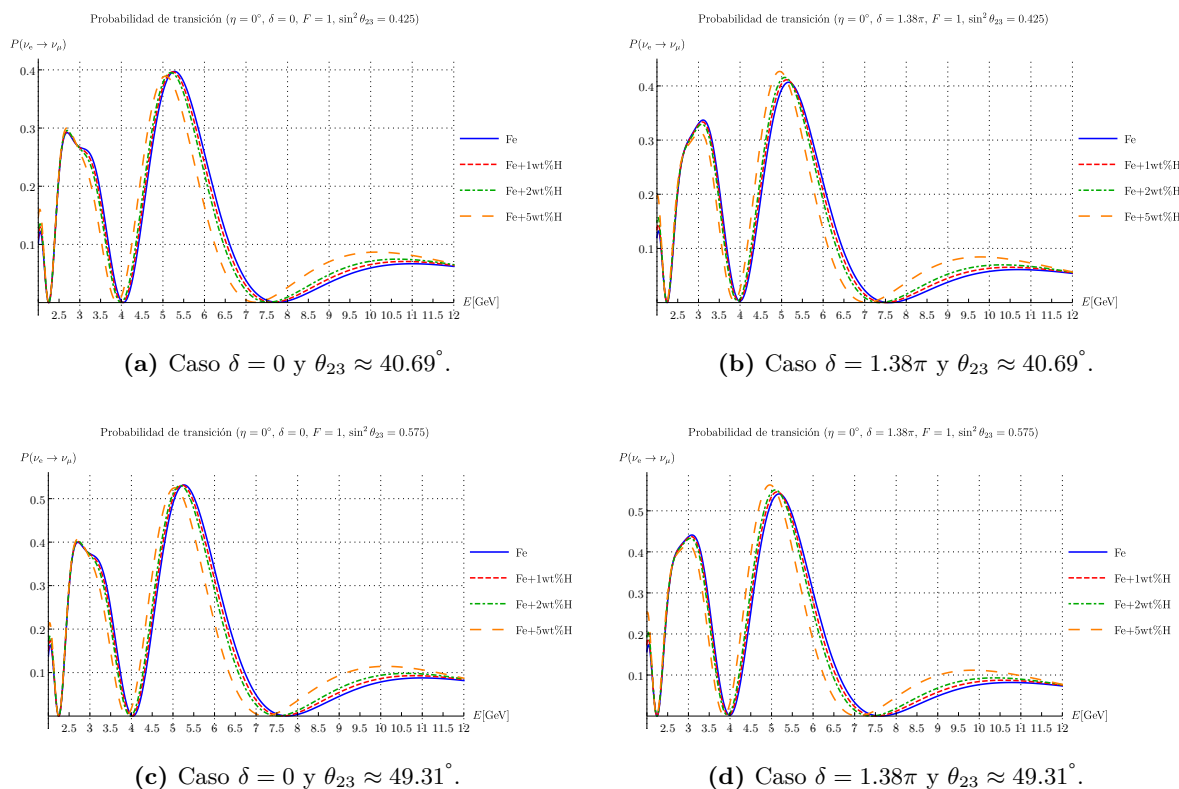
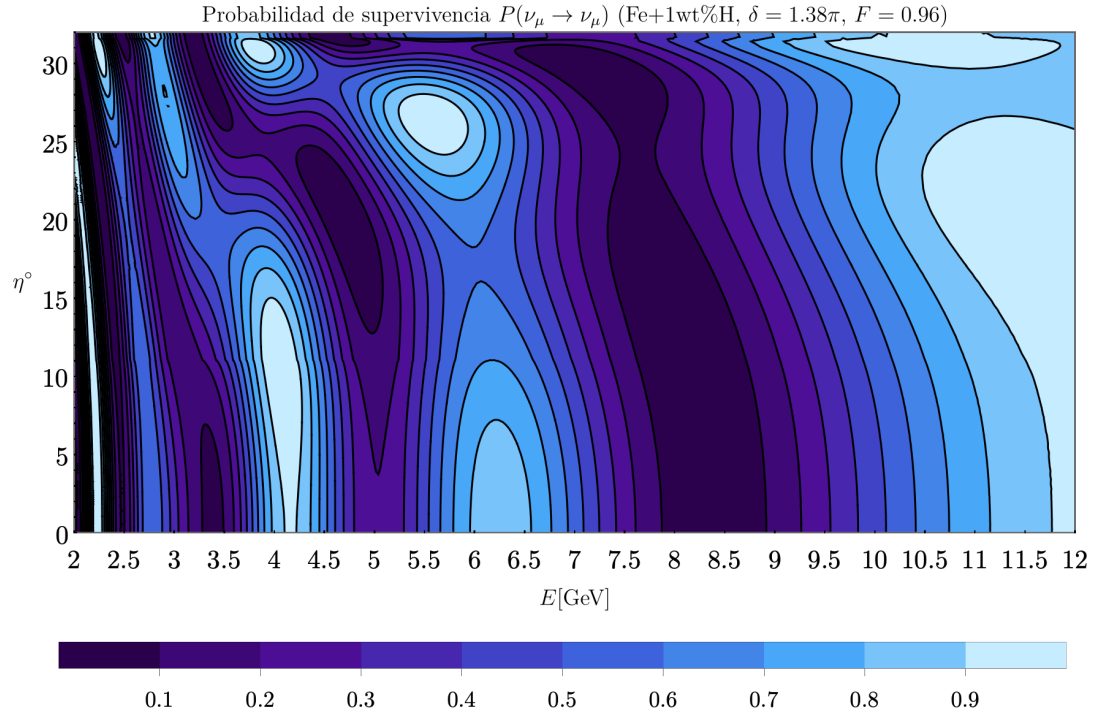


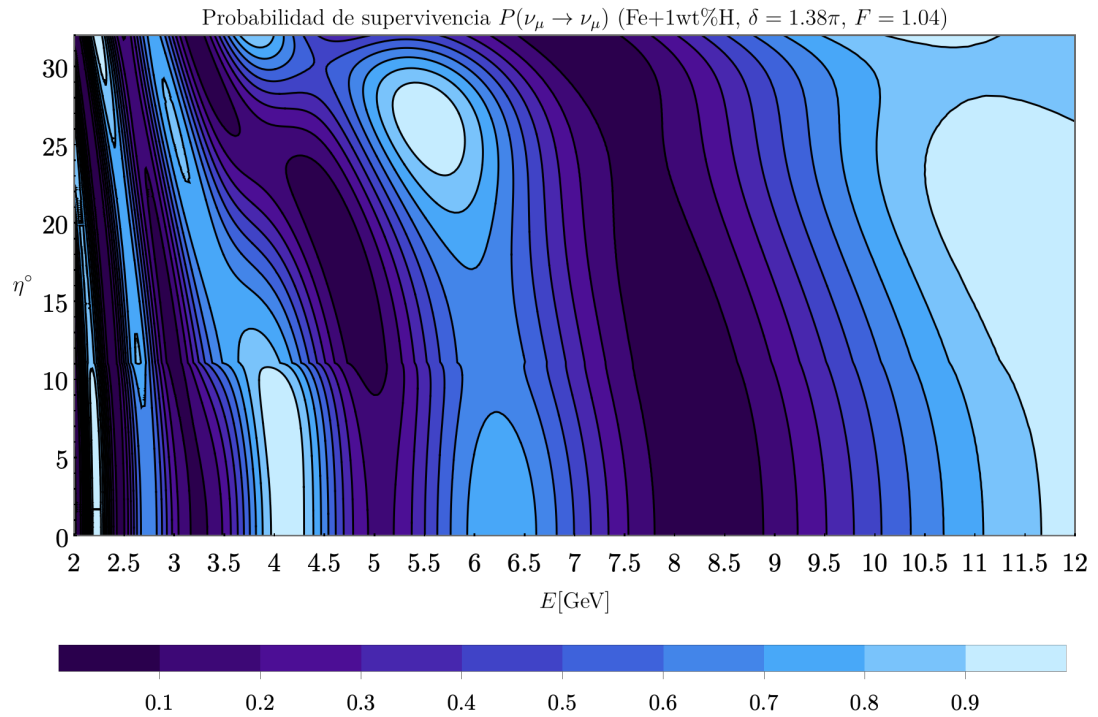
Figura 4.5: Probabilidades del conversión del neutrino del electrón al neutrino del muón variando la fase de violación de CP y el octante del ángulo de mezcla θ_{23} . La diferencia más apreciable surge en el cambio de octante. El incremento en la probabilidad de transición en los máximos correspondientes es alrededor del 10 %.

En la figura 4.5 se presentan las probabilidades de transición de neutrinos del electrón yendo a neutrinos del muón. En los casos donde $\delta = 0$, se tiene que $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$. Para valores de δ distintos de cero, lo anterior ya no es válido y esto es ocasionado por el término $\sin \delta$ en las amplitudes dadas por las expresiones (2.81) y (2.84).

Hasta el momento se han examinado como varían las probabilidades de oscilación al incorporar la fase de violación de violación de CP y al modificar el valor del ángulo θ_{23} para neutrinos que atraviesan la Tierra de extremo a extremo y con un radio fijo para el núcleo externo. Dado que se tienen indicios de que δ es diferente de cero, lo siguiente sería presentar el cambio en las probabilidades para diferentes radios del núcleo externo usando el valor mejor ajustado para δ , el cual corresponde a $\delta = 1.38\pi$. La composición más realista según los estudios geofísicos corresponde a Fe+1wt %H (ver tabla 3.2). En las gráficas que se presentarán a continuación, se usó el valor $\sin^2 \theta_{23} = 0.425$ para elaborarlas.

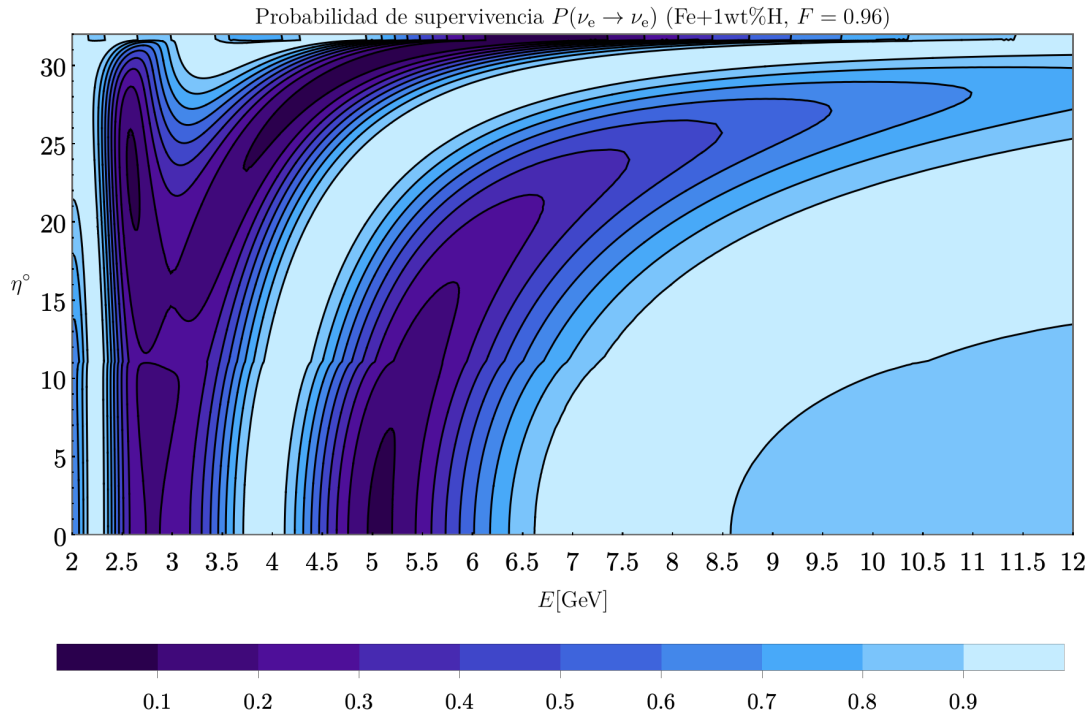


(a) Para $F = 0.96$, se tiene que la densidad del núcleo externo es 12.17 g/cm^3 ; mientras que su radio disminuye a 3340.8 km .

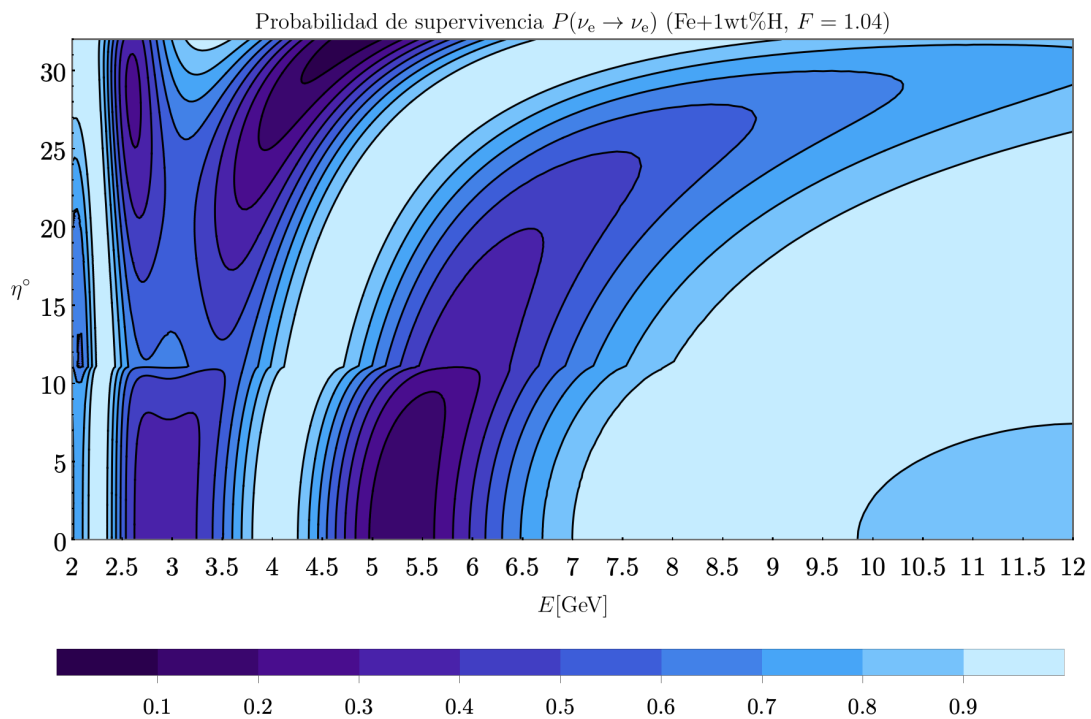


(b) Para $F = 1.04$, se tiene que la densidad del núcleo externo es 10.98 g/cm^3 ; mientras que su radio aumenta a 3619.2 km .

Figura 4.6: Curvas de nivel para la probabilidad de supervivencia del neutrino del muón como función de la energía E y el ángulo nadir η .



(a) Grosso modo, el aumento en la densidad del núcleo externo disminuye la probabilidad de supervivencia.



(b) En comparación con la figura 4.7a, se tienen más regiones donde la probabilidad de supervivencia es mayor.

Figura 4.7: Curvas de nivel para la probabilidad de supervivencia del neutrino del electrón como función de la energía E y el ángulo nadir η .

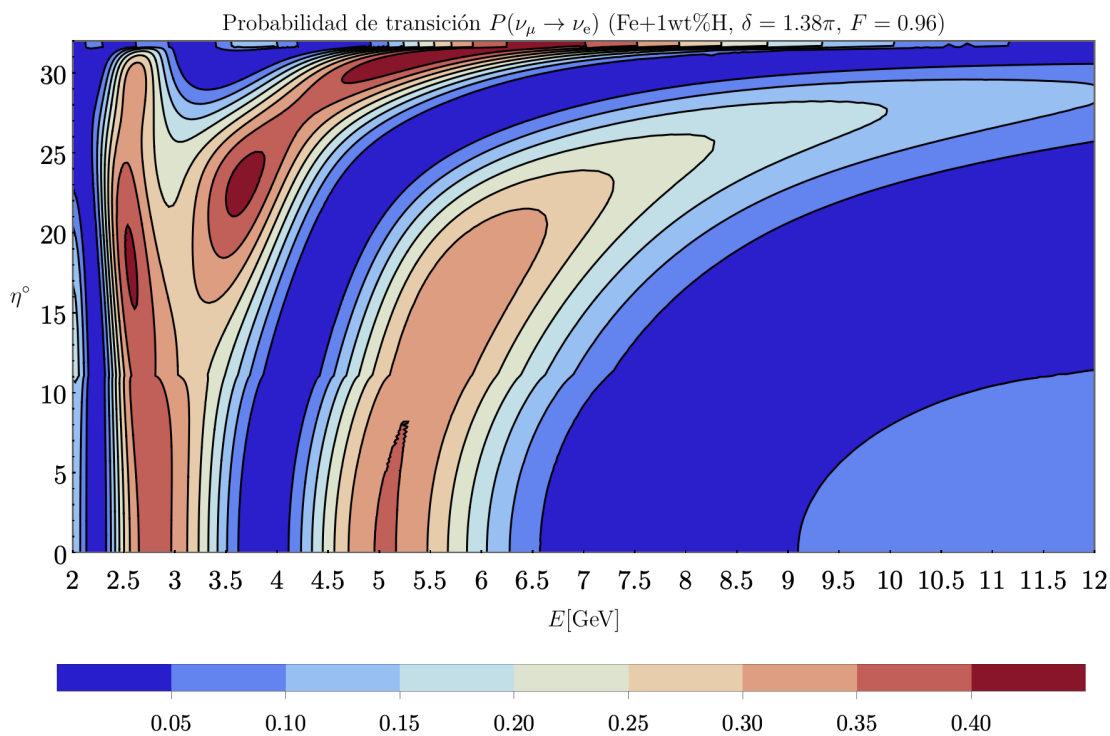
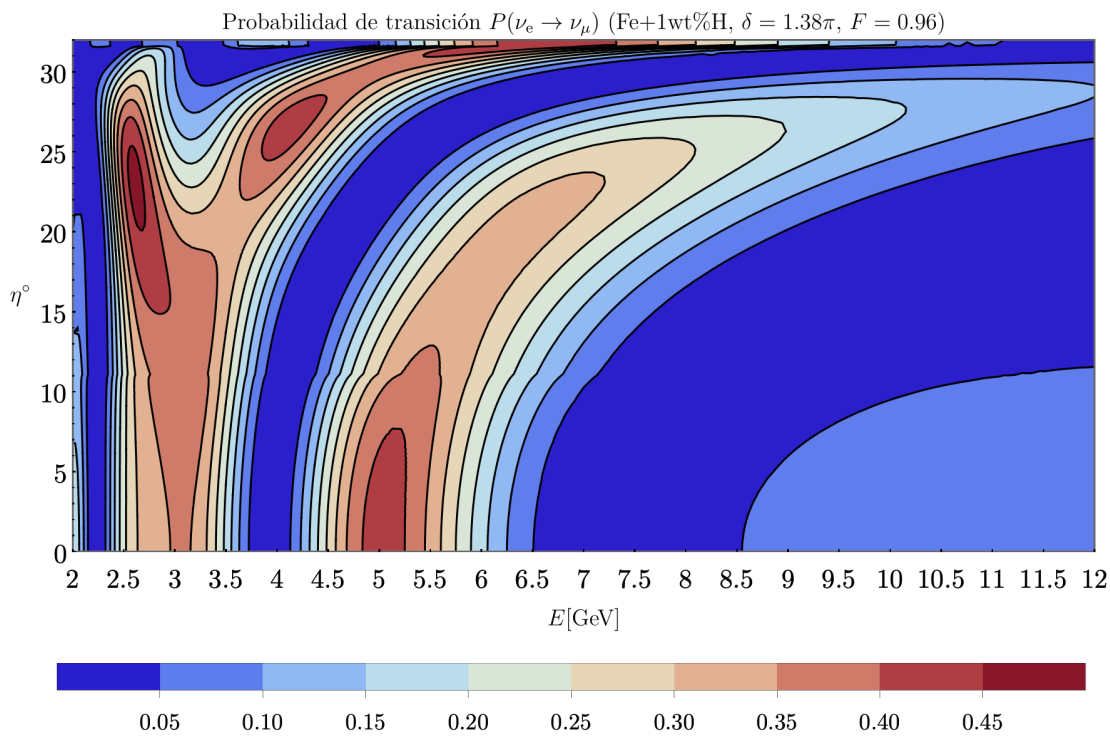


Figura 4.8: Comparativa entre las probabilidades de conversión $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ (figura 4.8a) y $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ (figura 4.8b) para $F = 0.96$.

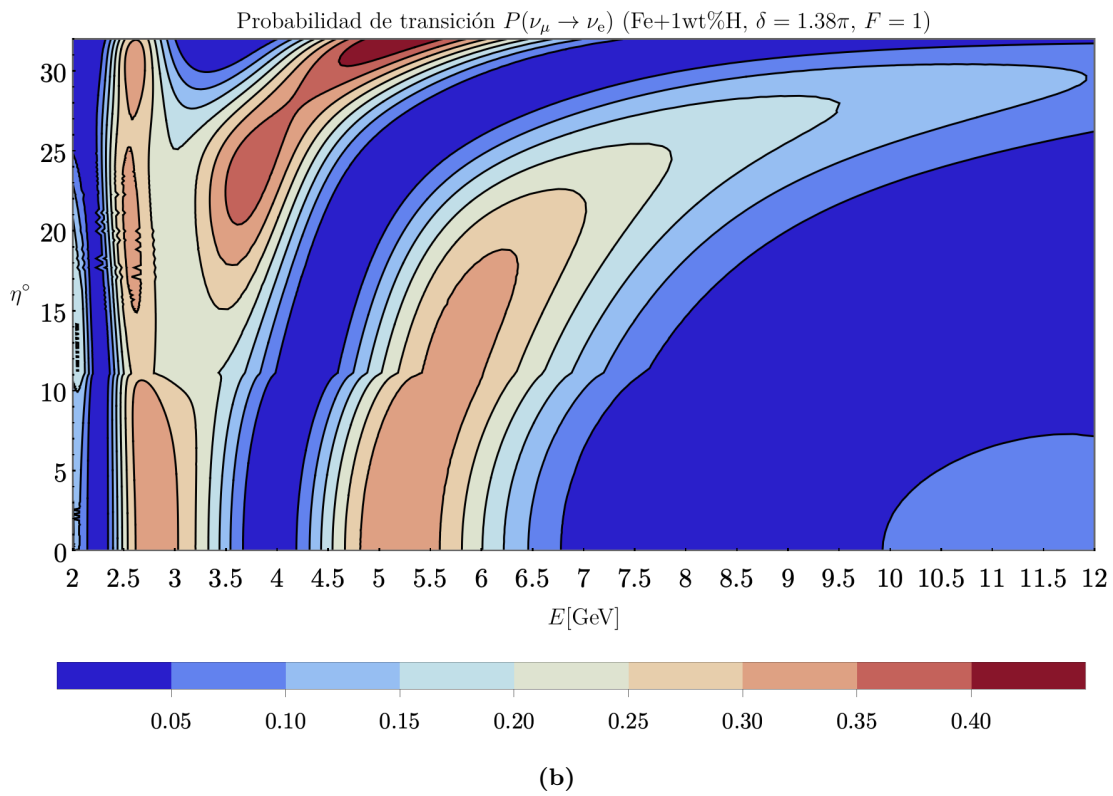
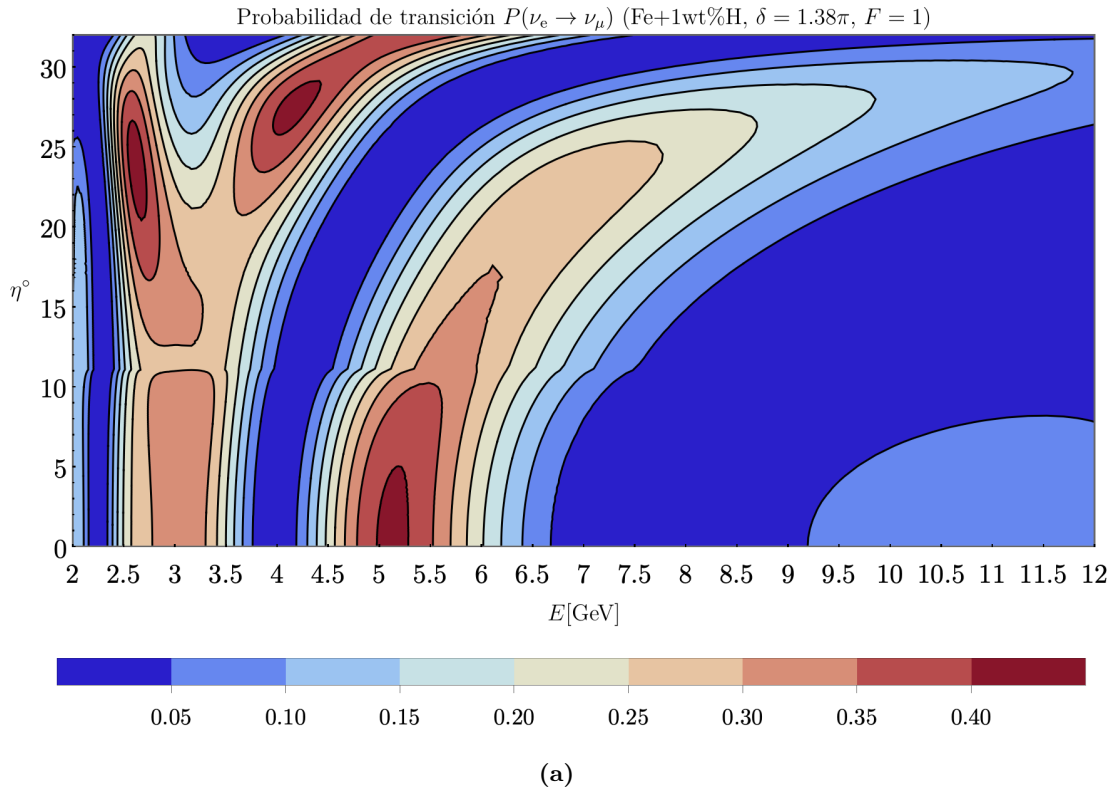


Figura 4.9: Comparativa entre las probabilidades de conversión $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ (figura 4.9a) y $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ (figura 4.9b) para $F = 1$.

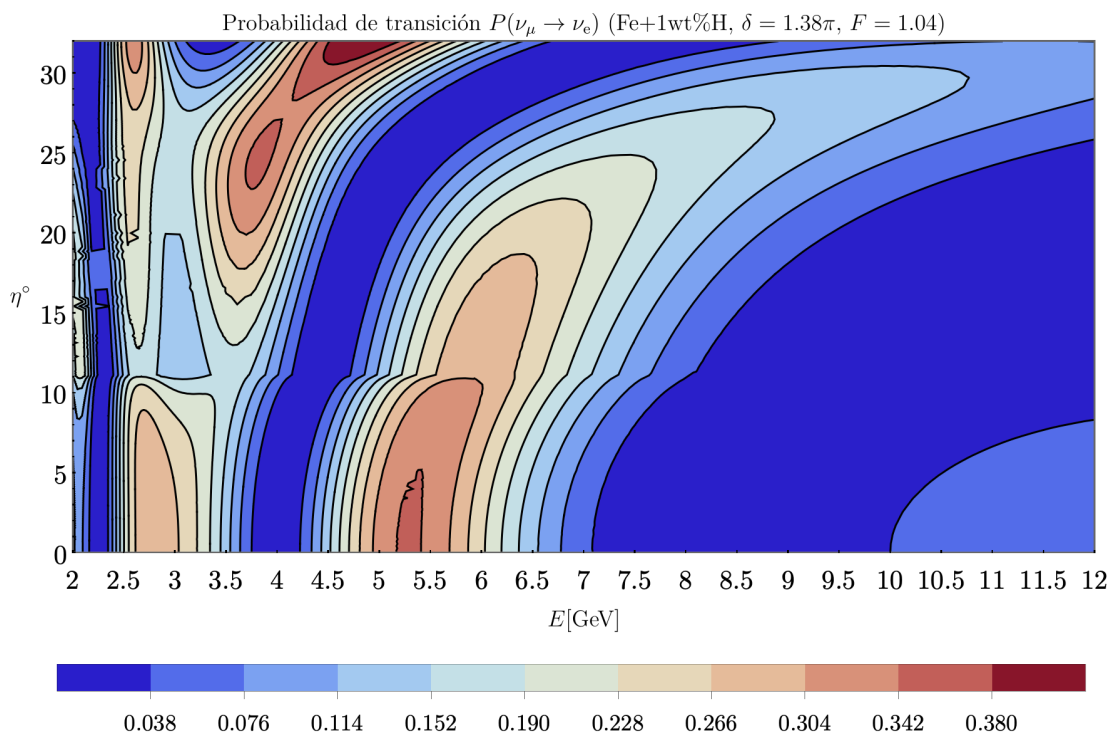
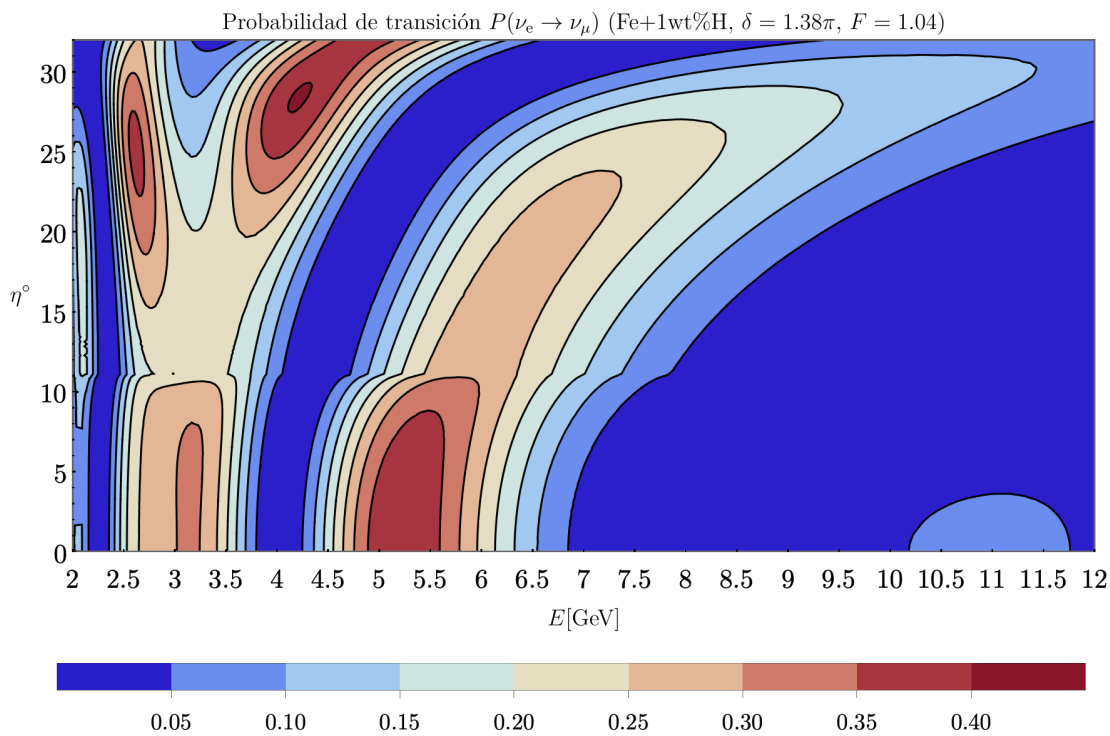


Figura 4.10: Comparativa entre las probabilidades de conversión $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ (figura 4.10a) y $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ (figura 4.10b) para $F = 1.04$.

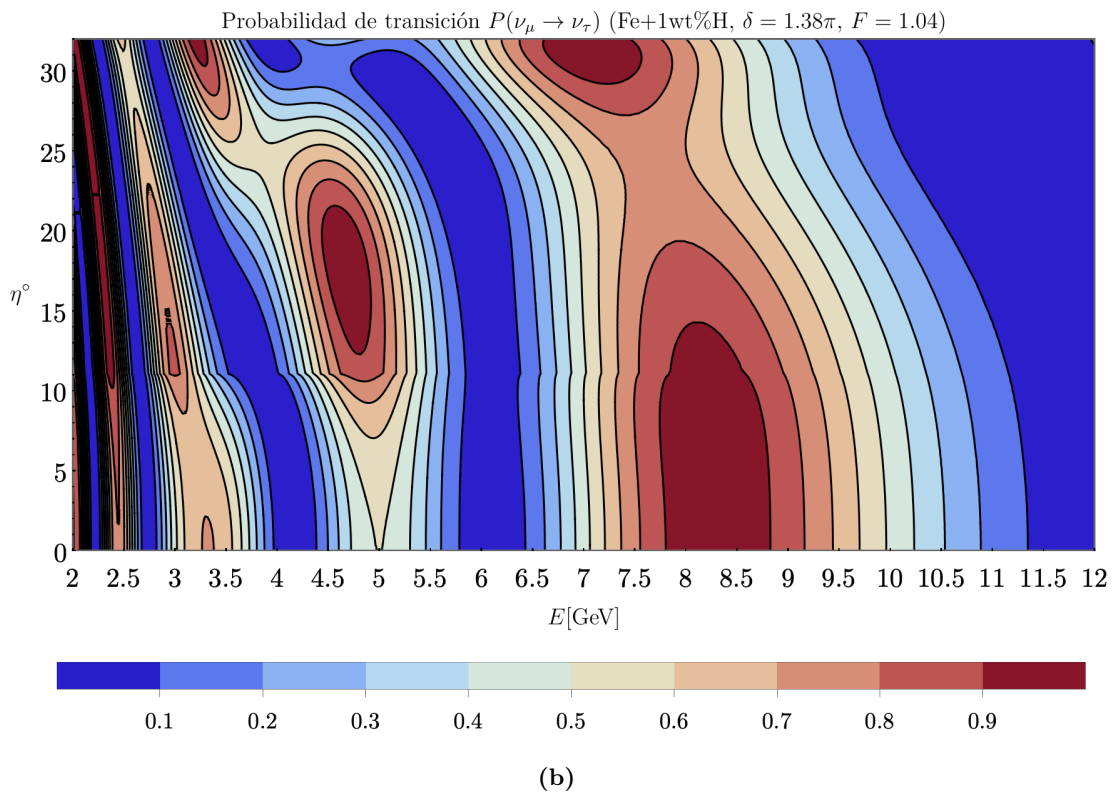
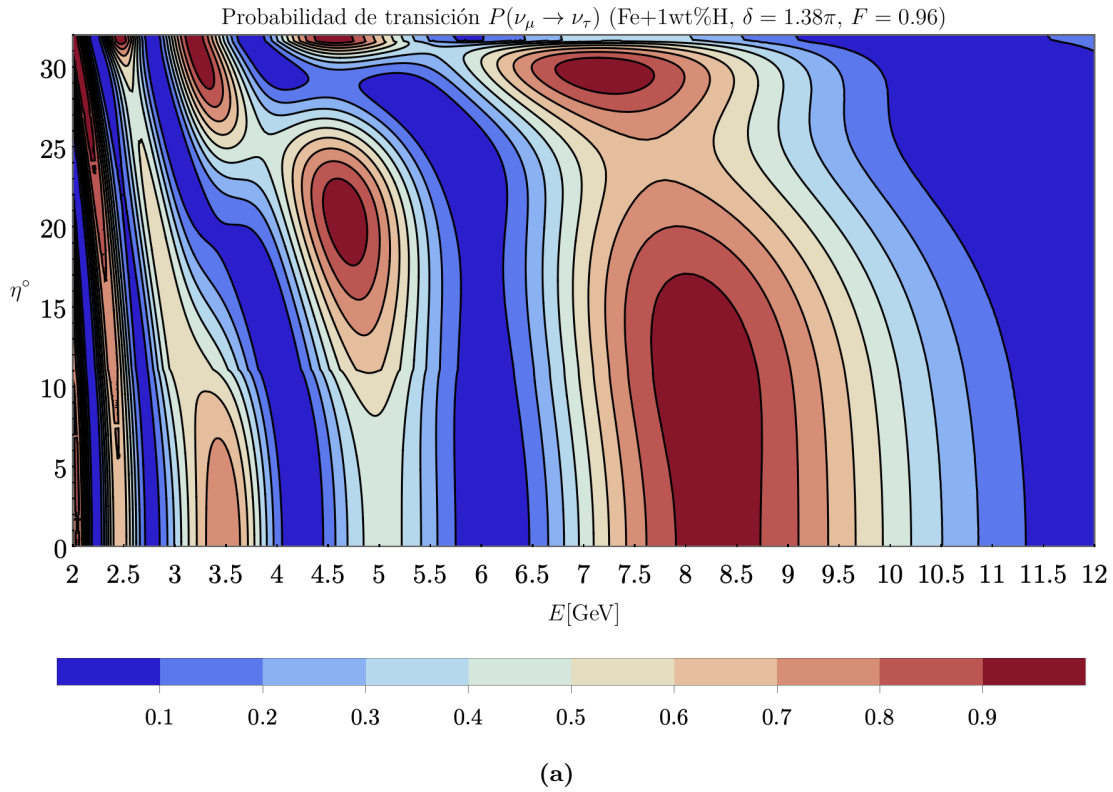


Figura 4.11: Comparativa del efecto que tiene la variación del radio del núcleo externo para la probabilidad de transición $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)$. Nótese que para radios más grandes, la probabilidad de conversión se amplifica alrededor de 5 GeV y para η entre 10 y 25 grados.

4.1.2 Jerarquía invertida

En el caso de que se tuviese la jerarquía de masas $m_3 < m_1 \simeq m_2$, el cambio se vería reflejado en los antineutrinos debido a que ahora son ellos los que tienen el carácter resonante al propagarse dentro del interior de la Tierra. Todas las gráficas presentadas a continuación se hicieron tomando $\sin^2 \theta_{23} = 0.589$.

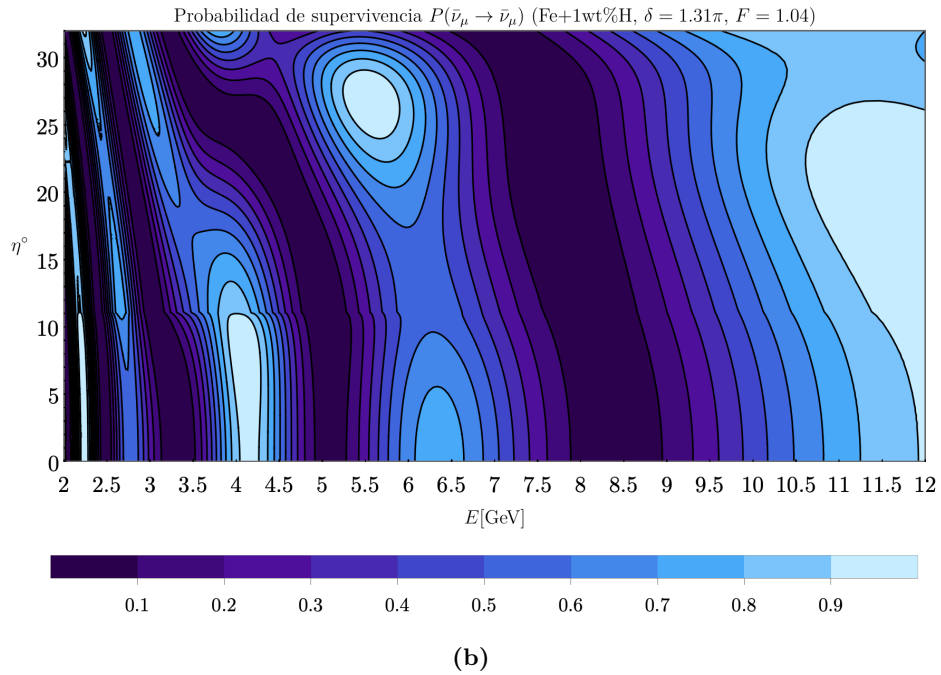
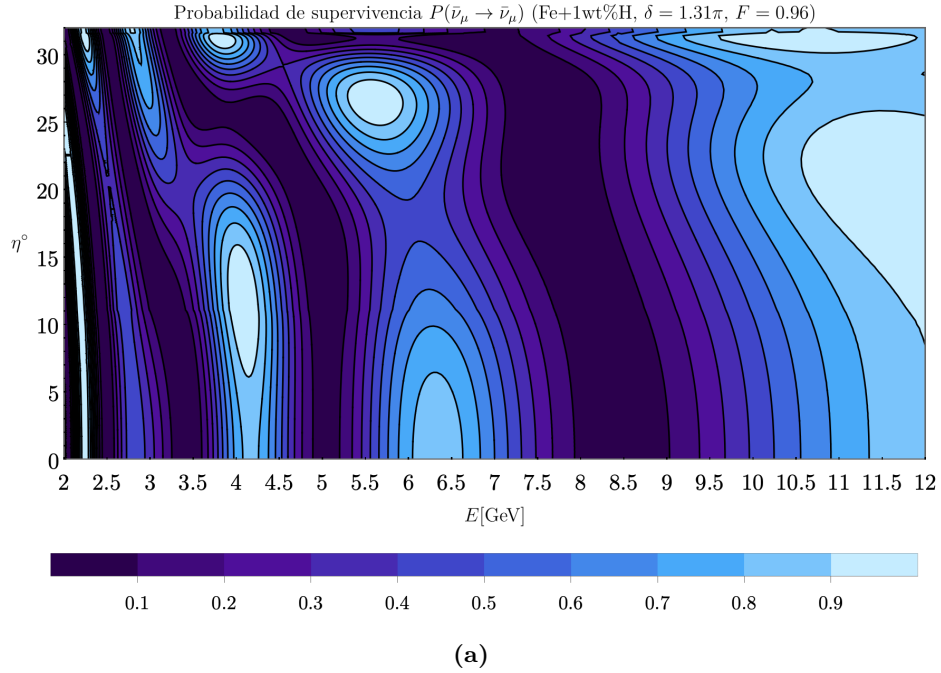
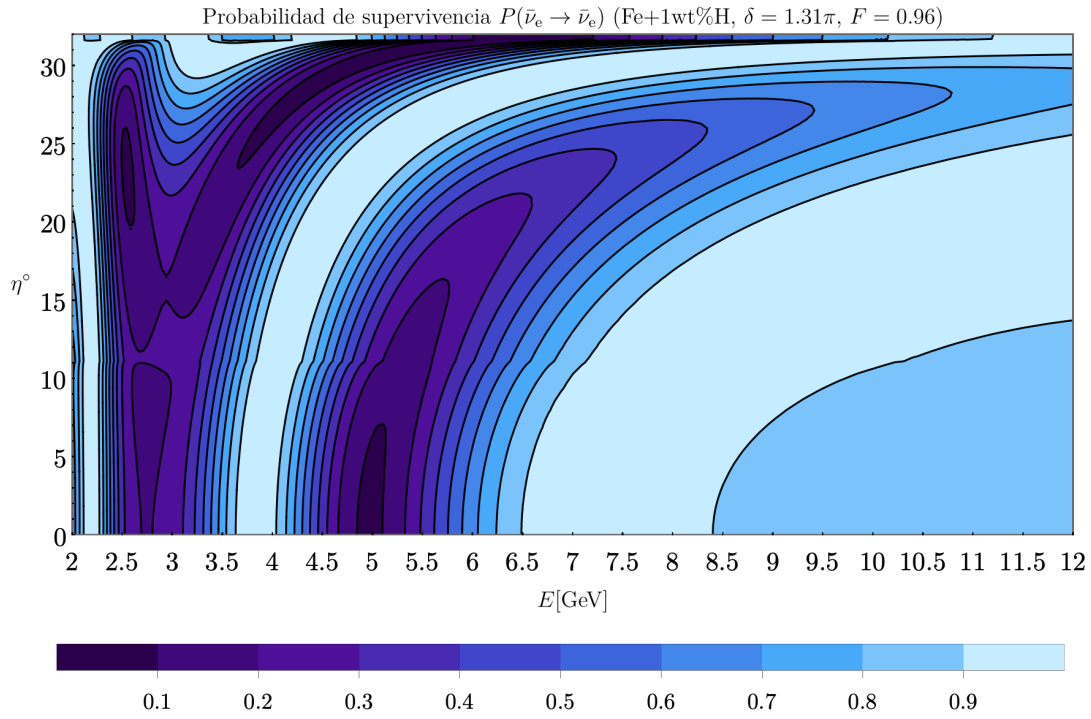
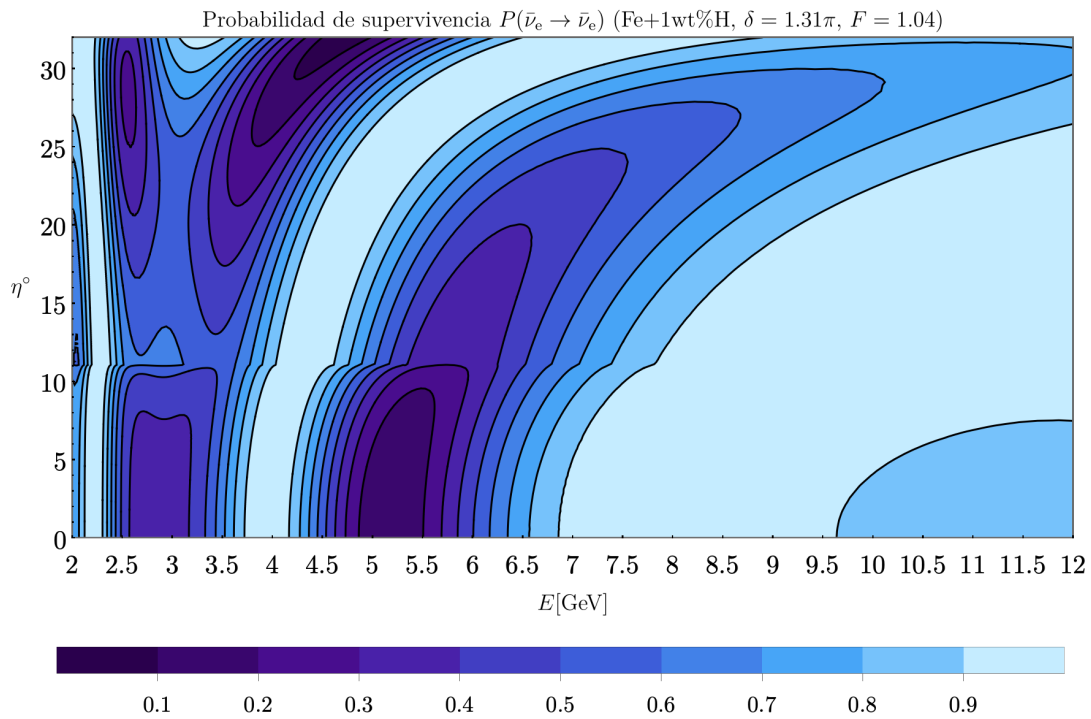


Figura 4.12: Curvas de nivel para la probabilidad de supervivencia del antineutrino del muón como función de la energía E y el ángulo nadir η .



(a) En comparación con 4.7a, los cambios son apenas perceptibles.



(b) Al igual que en el caso anterior, si se comparan las curvas de nivel con las de la figura 4.7b, se tiene que la diferencia entre ambas imágenes es mínima.

Figura 4.13: Curvas de nivel para la probabilidad de supervivencia del antineutrino del electrón como función de la energía E y el ángulo nadir η .

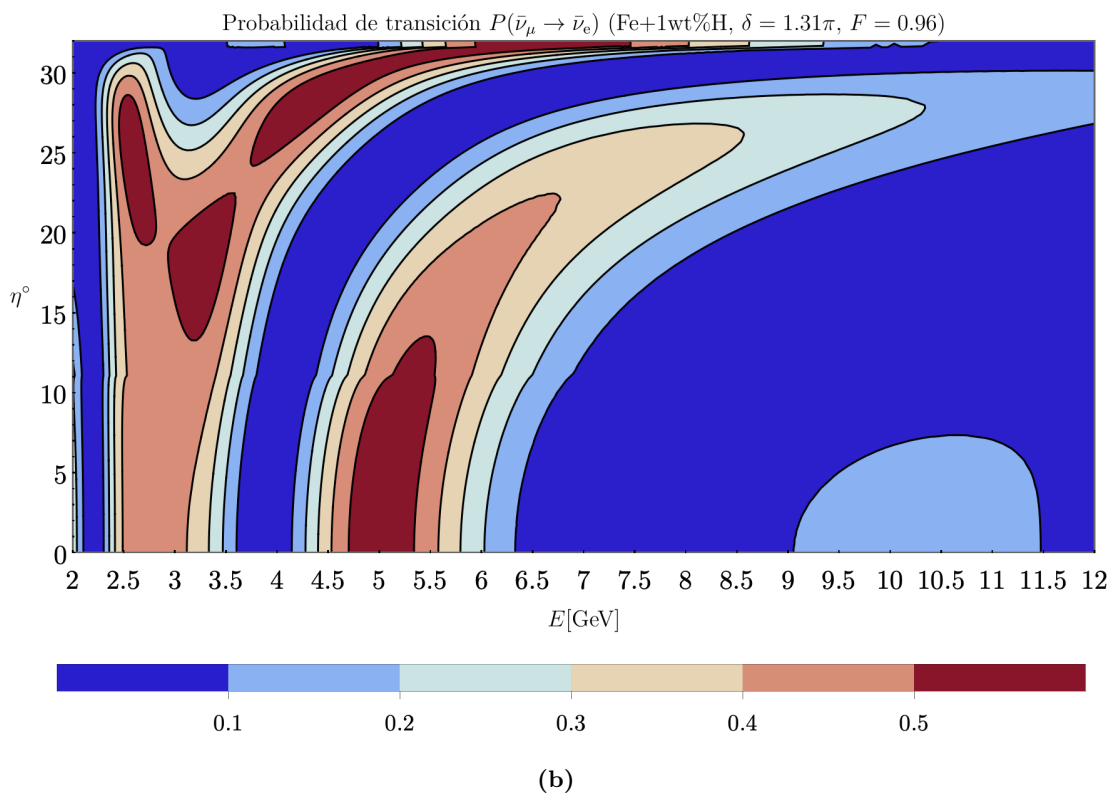
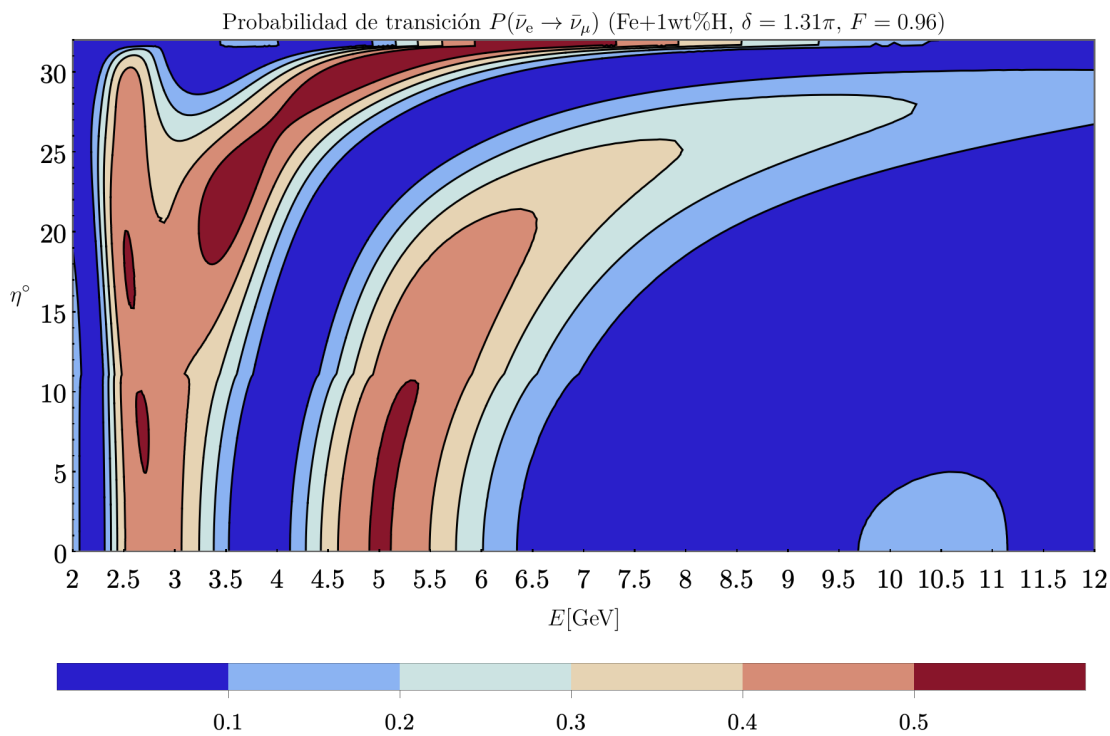


Figura 4.14: Comparativa entre las probabilidades de conversión $P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ (figura 4.14a) y $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ (figura 4.14b) para $F = 0.96$.

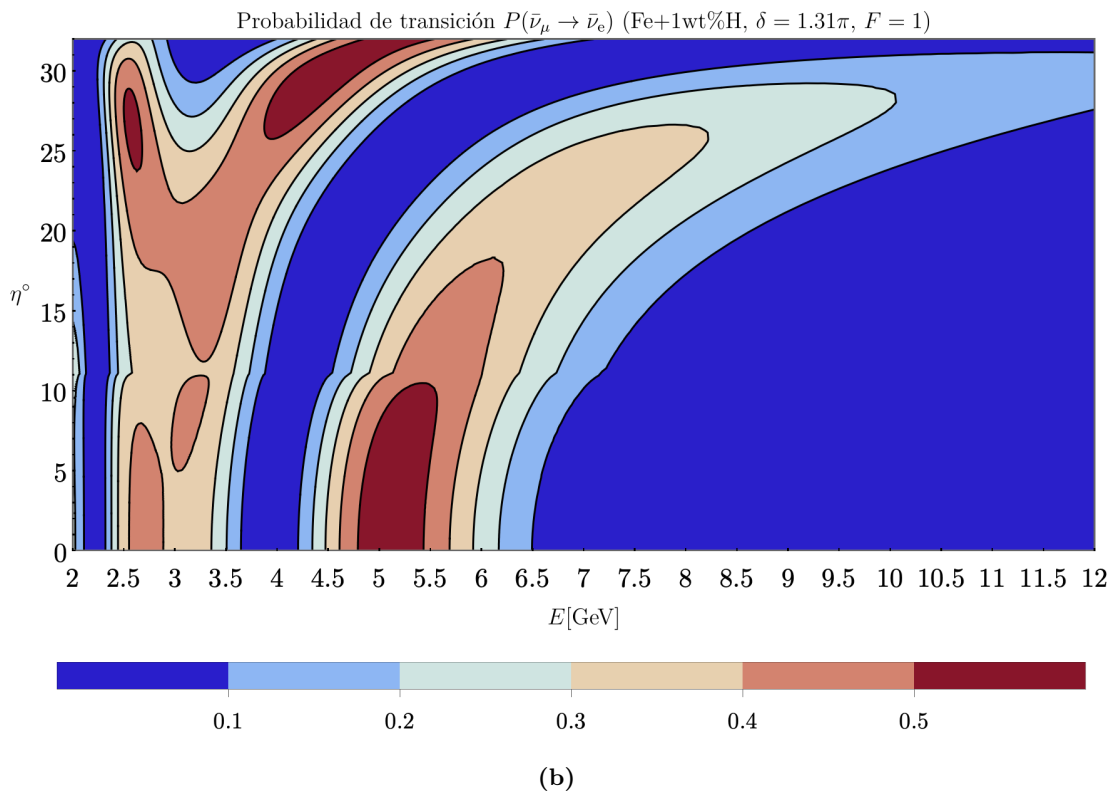
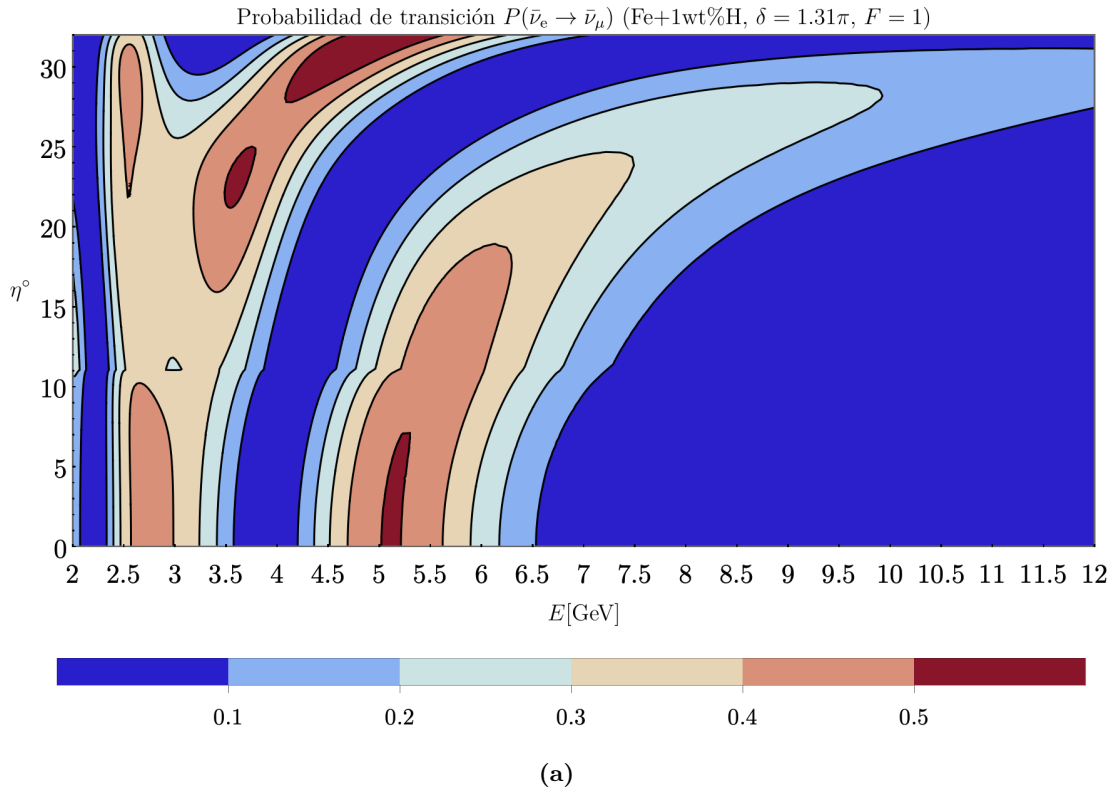


Figura 4.15: Comparativa entre las probabilidades de conversión $P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ (figura 4.15a) y $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ (figura 4.15b) para $F = 1$.

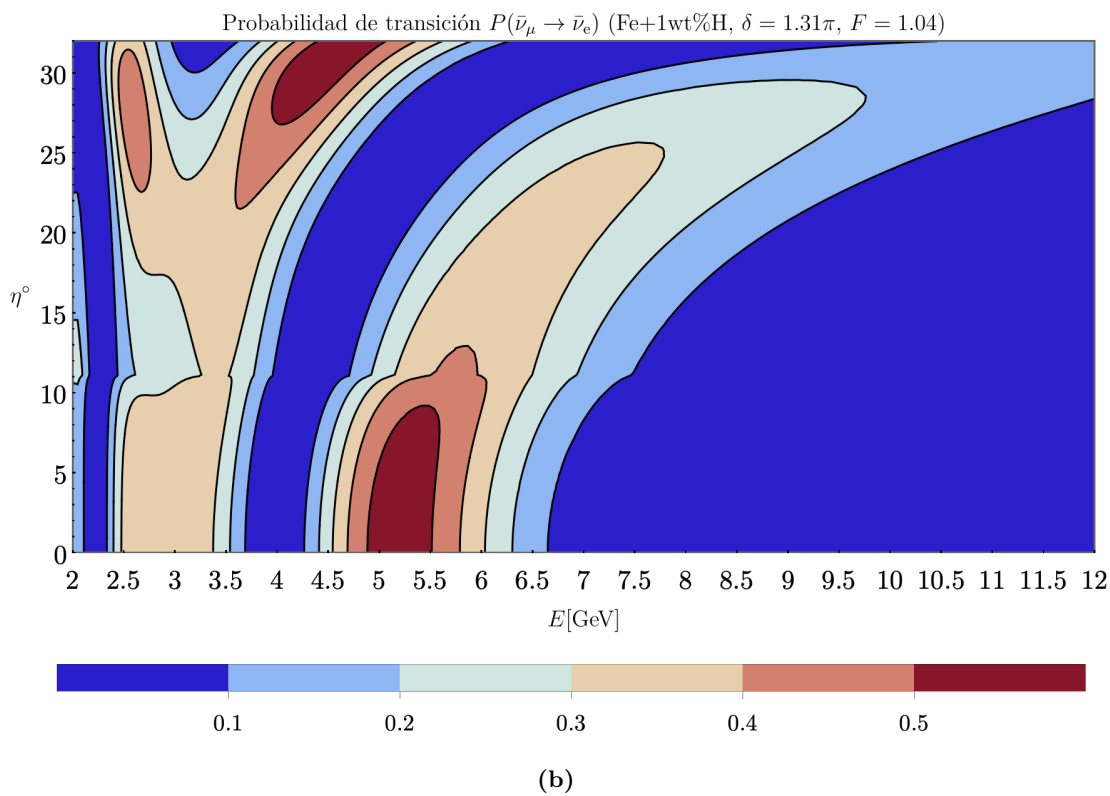
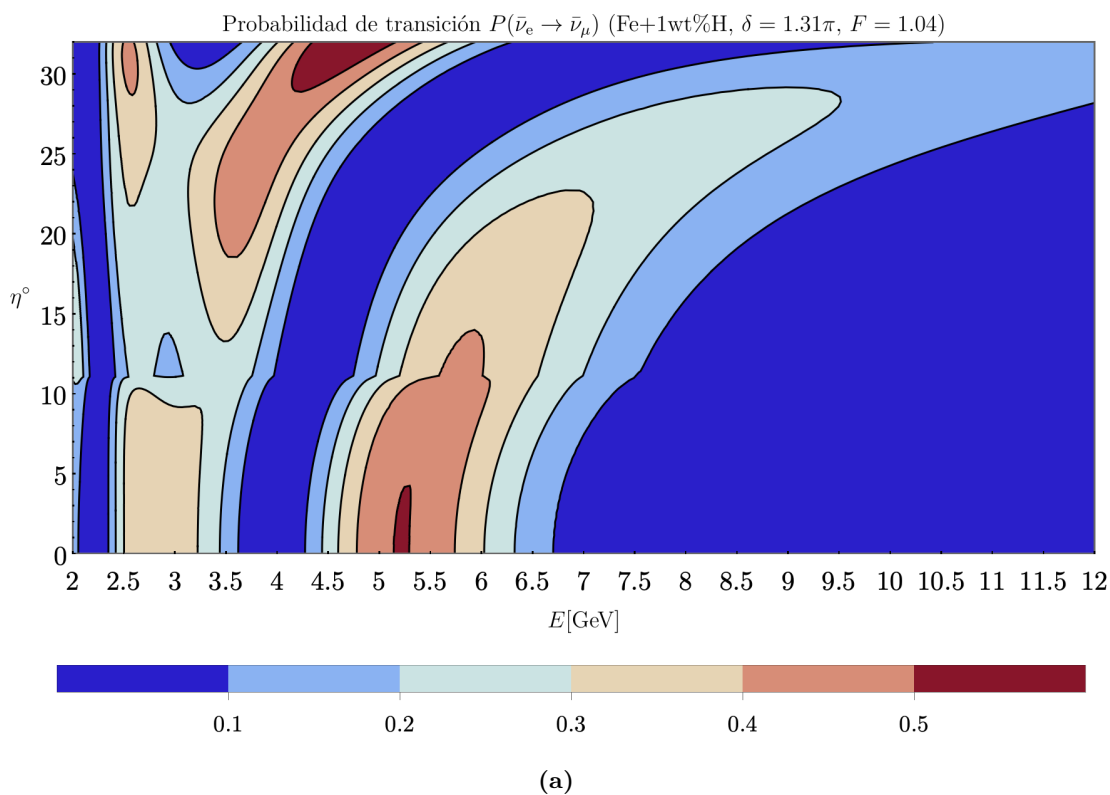


Figura 4.16: Comparativa entre las probabilidades de conversión $P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ (figura 4.16a) y $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ (figura 4.16b) para $F = 1.04$.

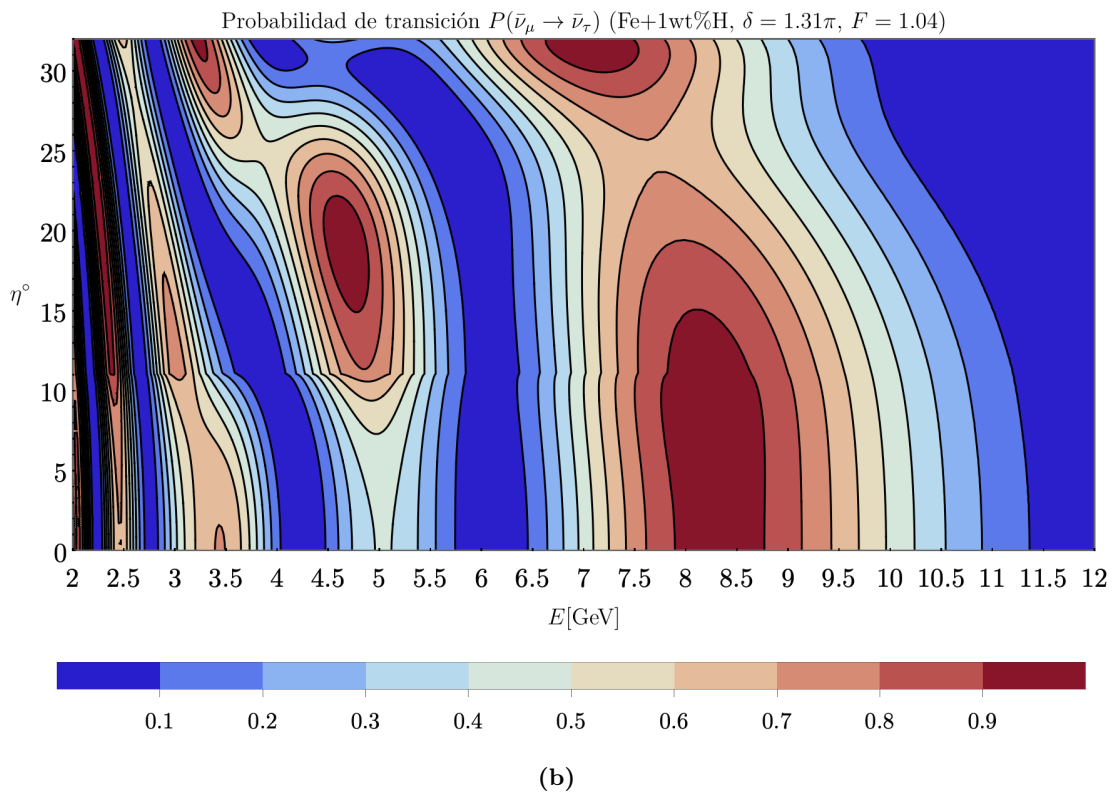
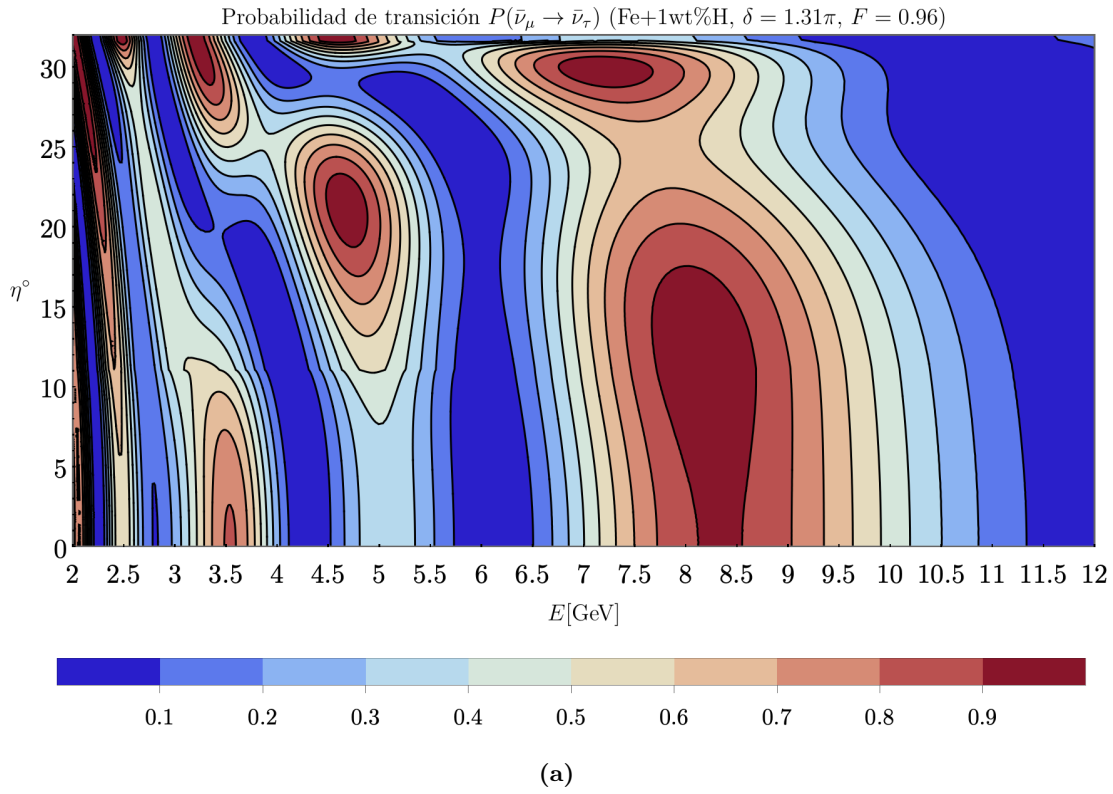


Figura 4.17: Comparativa del efecto que tiene la variación del radio del núcleo externo para la probabilidad de transición $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\tau)$.

4.2 Eventos

Los experimentos de neutrinos no miden probabilidades, sino que cuentan el número de eventos que surgen de la interacción de los neutrinos del muón y del electrón con el material que se use para su detección y a partir de estos pueden inferir las probabilidades de oscilación. En este punto cabe mencionar el porqué no se presentaron las transiciones correspondientes al neutrino del tau. En primer lugar, el flujo de neutrinos atmosféricos está constituido principalmente por neutrinos del muón y del electrón. Por otro lado, las interacciones del neutrino del tau son mucho más difíciles de observar, esencialmente porque la vida media del tau es demasiado corta. Sin embargo, en el caso hipotético de que se tuviesen neutrinos del tau, lo que muestran los cálculos numéricos es que la separación en las probabilidades para diferentes valores de Z/A sería mayor en comparación a las observadas con neutrinos del muón.

Regresando al tema del número de eventos, se hizo un análisis comparativo de lo que sería el cociente entre la diferencia del número de eventos para un modelo composicional de hierro puro con otro de formado de hierro y 1% de hidrógeno. En términos matemáticos, lo anterior se traduce como

$$\left| \frac{\Delta N_\mu}{N_\mu^{\text{Fe}}} \right| = \left| \frac{N_\mu^{\text{Fe}} - N_\mu^{\text{Fe+H}}}{N_\mu^{\text{Fe}}} \right| = \left| 1 - \frac{N_\mu^{\text{Fe+H}}}{N_\mu^{\text{Fe}}} \right|, \quad (4.1)$$

lo cual proporciona de manera indirecta una idea de la resolución global que debiese poseer el detector para poder percibir un cambio en el número de eventos con las variaciones de Z/A . La idea detrás de la ecuación (4.1) es que en el cociente uno se deshace de factores como son el número de blancos en el detector y el tiempo de exposición.

Para el cálculo de la variación en el número de eventos con diferentes composiciones del núcleo externo se parte de la ecuación [37]

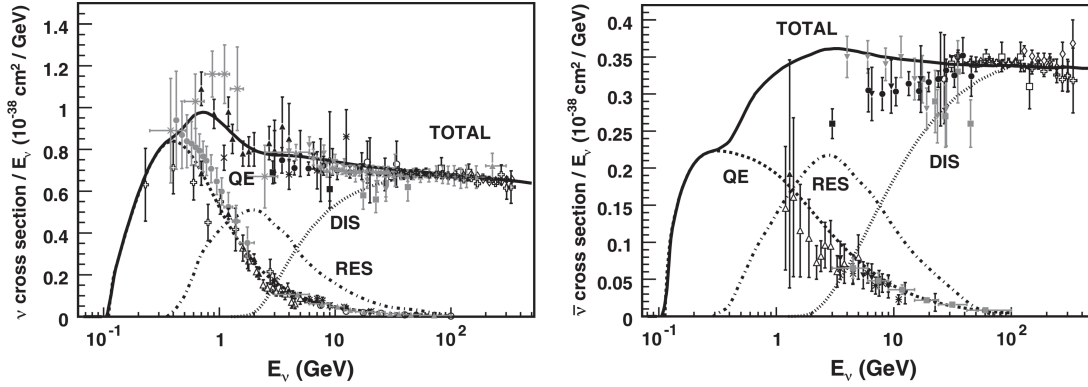
$$N_\mu = 2\pi n_T \mathbb{T} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{E_1}^{E_2} \text{sen } \eta \, d\eta \, E \, dE \left[\sigma_{\nu_\mu}^{\text{CC}}(E) \Phi_{\nu_\mu}(\eta, E) + \sigma_{\bar{\nu}_\mu}^{\text{CC}}(E) \Phi_{\bar{\nu}_\mu}(\eta, E) \right], \quad (4.2)$$

donde n_T es el número de blancos efectivos en el volumen de detección, \mathbb{T} es el tiempo de exposición, $\sigma_{\nu_\mu}^{\text{CC}}(E)$ ($\sigma_{\bar{\nu}_\mu}^{\text{CC}}(E)$) la sección eficaz de corriente cargada y $\Phi_{\nu_\mu}(\eta, E)$ ($\Phi_{\bar{\nu}_\mu}(\eta, E)$) el flujo de neutrinos (antineutrinos). En presencia de las oscilaciones, en el sitio del detector, los flujos son dados por

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu_\mu}(\eta, E) &= \mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(\eta, E) \Phi_{\nu_\mu}^0(\eta, E) + \mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(\eta, E) \Phi_{\nu_e}^0(\eta, E), \\ \Phi_{\bar{\nu}_\mu}(\eta, E) &= \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu}(\eta, E) \Phi_{\bar{\nu}_\mu}^0(\eta, E) + \mathcal{P}_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu}(\eta, E) \Phi_{\bar{\nu}_e}^0(\eta, E), \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\Phi_{\nu_\alpha}^0$ y $\Phi_{\bar{\nu}_\alpha}^0$, con $\alpha = \mu, e$, son los correspondientes flujos a nivel del mar. En esta tesis se usaron los datos de Honda, M. et al. [38] y se ajustaron funciones para modelar cada serie de datos en las regiones de interés.

Por otro lado, las secciones eficaces son funciones dependientes de la energía y su cálculo analítico puede resultar bastante complejo debido a los procesos involucrado en el intervalo de energías de 0.1 a 20 GeV.



(a) Sección eficaz por unidad de energía para el neutrino.

(b) Sección eficaz por unidad de energía para el antineutrino.

Figura 4.18: Secciones eficaces totales de corriente cargada por nucleón para neutrinos y antineutrinos. (Gráficos tomados de Formaggio, J.A. y Zeller G.P., *From eV to EeV: Neutrino cross sections across energy scales*, Review of Modern Physics, Volume 84, 2012 [39]).

Los gráficos en la figura 4.18 resumen algunas de las mediciones existentes para las secciones eficaces de neutrinos y antineutrinos para procesos de la forma [39]

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X \quad \text{y} \quad \bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \mu^+ + X, \quad (4.4)$$

con $N = p, n$ y X denota cualquier conjunto final de hadrones.

Con ayuda del software *WebPlotDigitizer* se extrajeron los datos de los gráficos 4.18a y 4.18b en el intervalo de 2 a 10 GeV, los cuales se pueden apreciar en la figura 4.19.

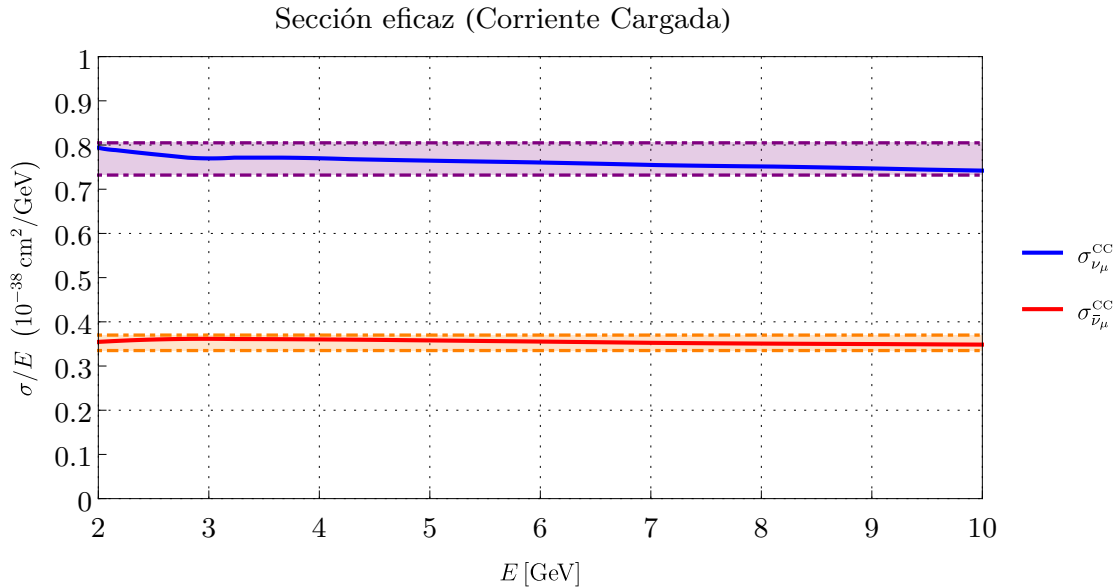


Figura 4.19: Secciones eficaces para neutrinos y antineutrinos del muón en el intervalo de energías de 2 a 10 GeV.

Obsérvese de 4.19 que la variación para la sección eficaz del antineutrino del muón permanece casi constante, mientras sección eficaz del neutrino del muón se le puede acotar entre 0.74 y 0.8 unidades. Por tanto, las secciones eficaces en este intervalo de energías se les puede considerar constantes y sus valores medios están dados por:

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu_\mu}^{\text{CC}} &\cong 0.762 \times 10^{-38} \frac{\text{cm}^2}{\text{GeV}} \\ \sigma_{\bar{\nu}_\mu}^{\text{CC}} &\cong 0.353 \times 10^{-38} \frac{\text{cm}^2}{\text{GeV}}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Usando los valores previos para $\sigma_{\nu_\mu}^{\text{CC}}$ y $\sigma_{\bar{\nu}_\mu}^{\text{CC}}$, se tiene que el cociente de la ecuación (4.1) se calcula explícitamente como

$$\frac{N_\mu^{\text{Fe+H}}}{N_\mu^{\text{Fe}}} = \frac{\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{E_1}^{E_2} \text{sen } \eta \, d\eta \, E \, dE \left[\Phi_{\nu_\mu}^{\text{Fe+H}}(\eta, E) + 0.463 \Phi_{\bar{\nu}_\mu}^{\text{Fe+H}}(\eta, E) \right]}{\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{E_1}^{E_2} \text{sen } \eta \, d\eta \, E \, dE \left[\Phi_{\nu_\mu}^{\text{Fe}}(\eta, E) + 0.463 \Phi_{\bar{\nu}_\mu}^{\text{Fe}}(\eta, E) \right]}.\quad (4.6)$$

Los intervalos de integración para el ángulo nadir y la energía dependen, en principio, de la resolución angular y la resolución energética del detector empleado en el experimento. Para bins angulares y energéticos pequeños, es posible usar el teorema del valor medio para integrales para aproximar el cociente dado en (4.5) por el cociente de los integrandos. Las gráficas presentadas a continuación fueron realizadas bajo esta última aproximación y muestran la desviación porcentual del número de eventos entre los modelos composicionales propuestos.

4.2.1 Jerarquía normal

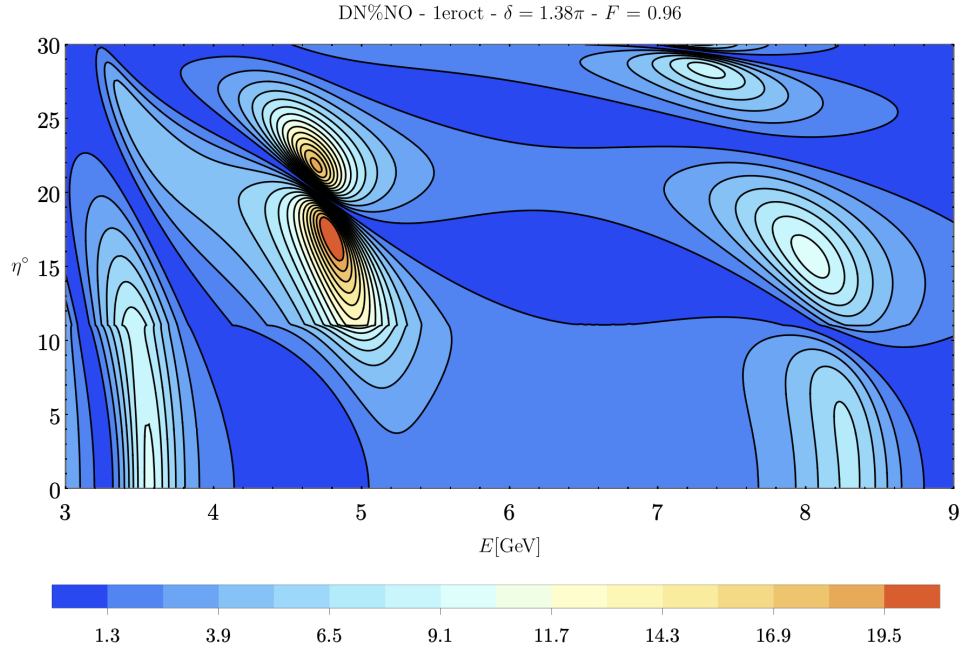


Figura 4.20

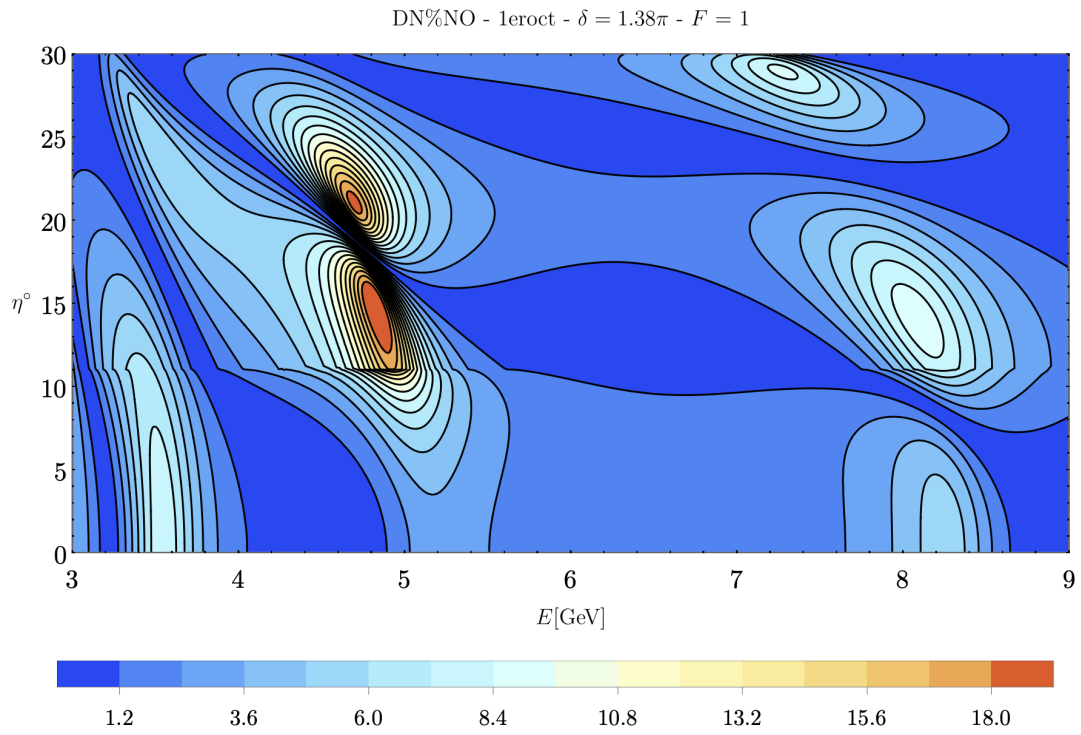


Figura 4.21

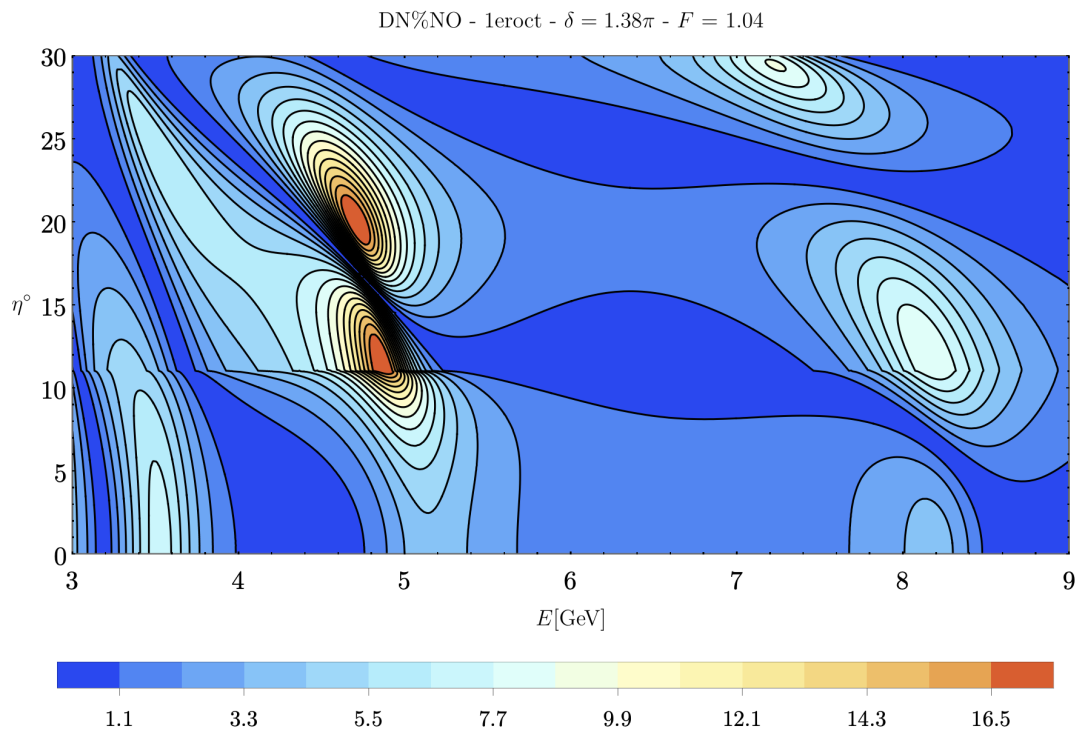


Figura 4.22

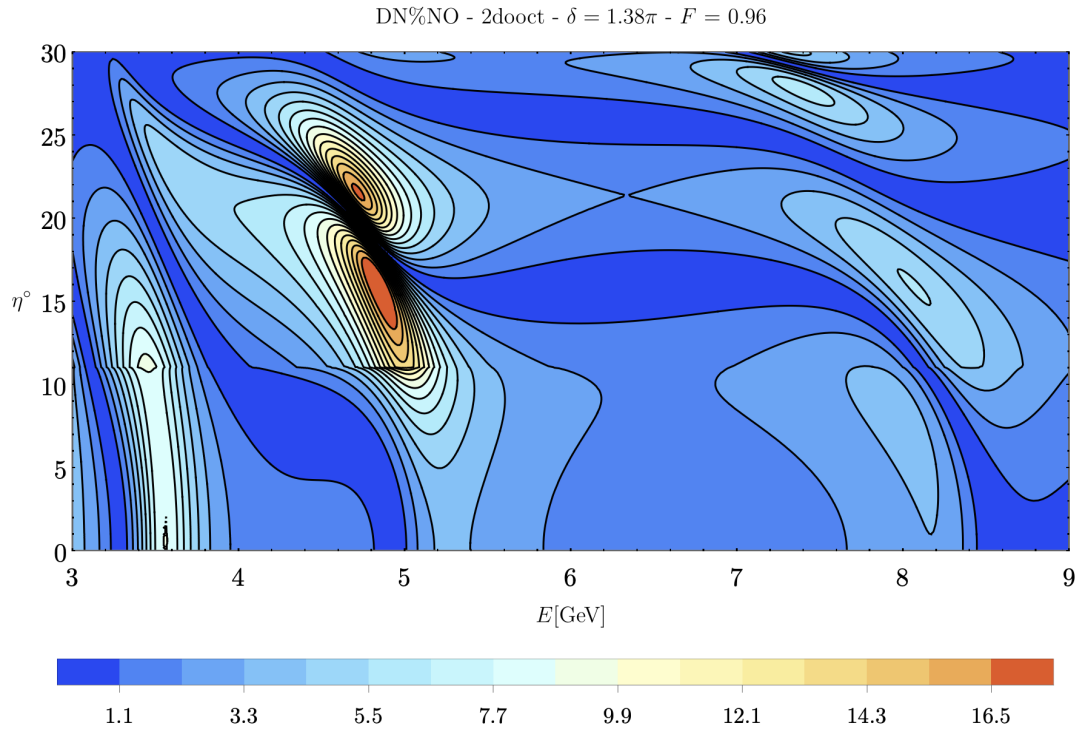


Figura 4.23

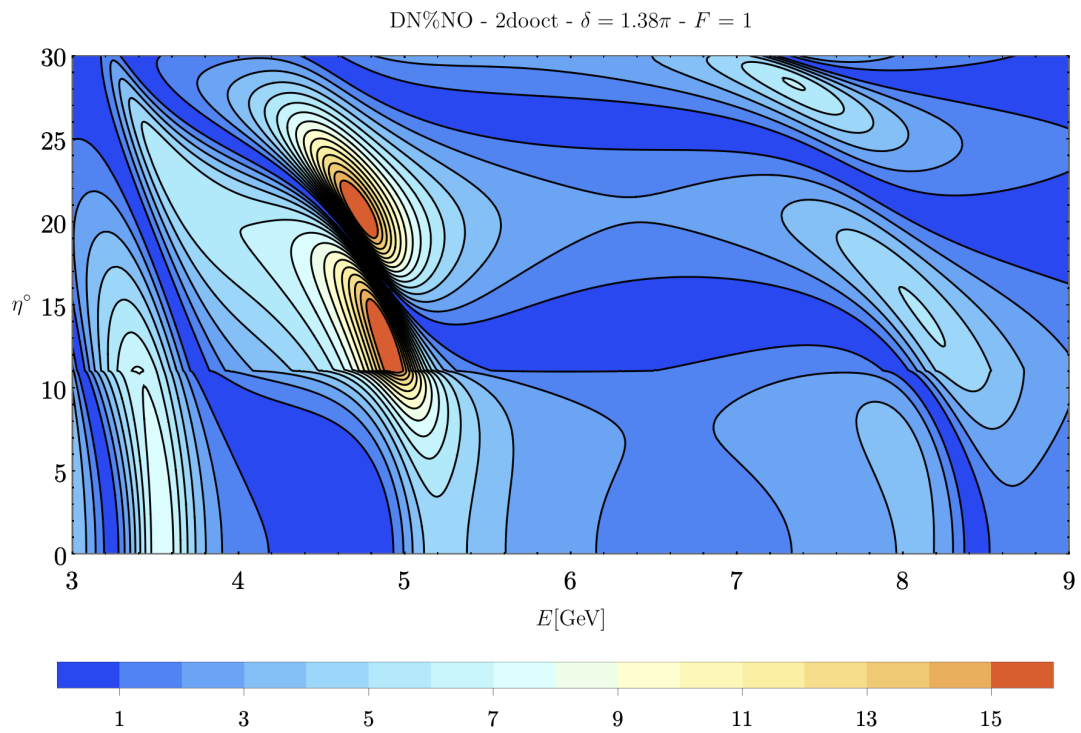


Figura 4.24

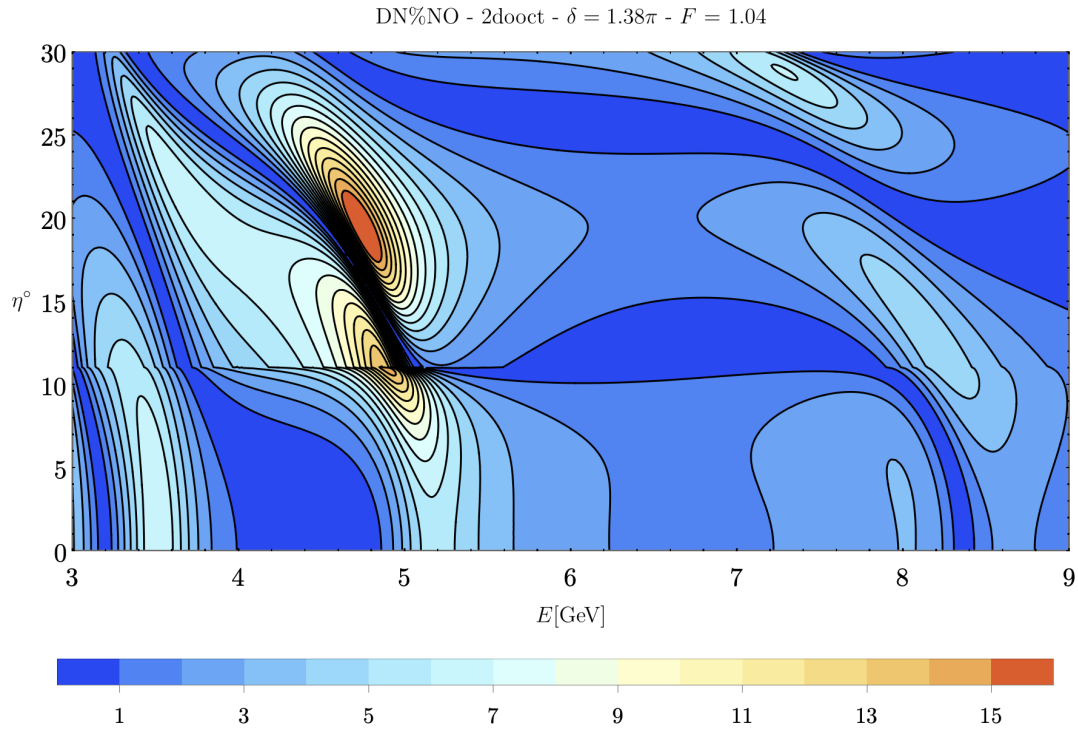


Figura 4.25

4.2.2 Jerarquía invertida

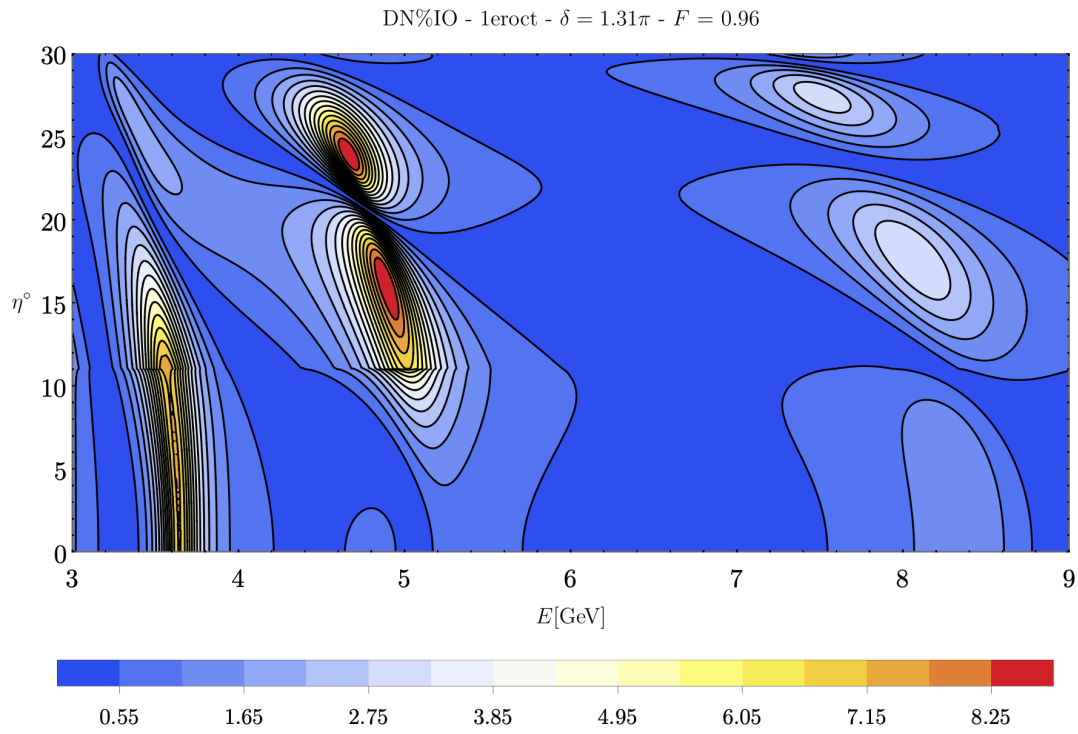


Figura 4.26

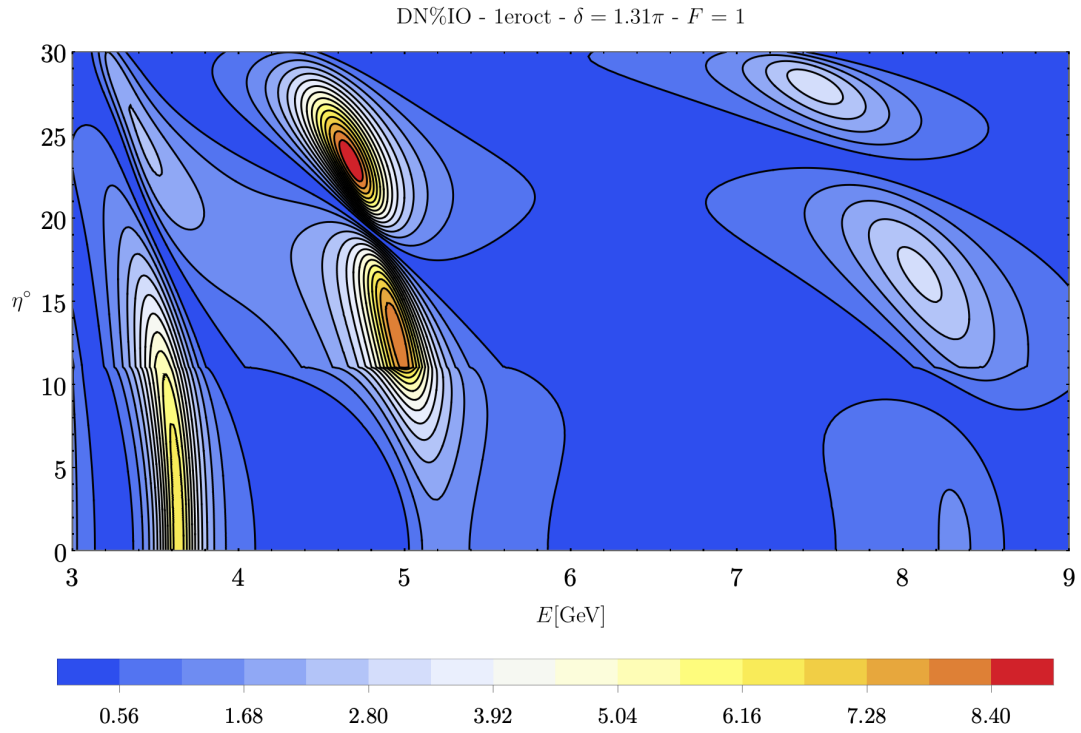


Figura 4.27

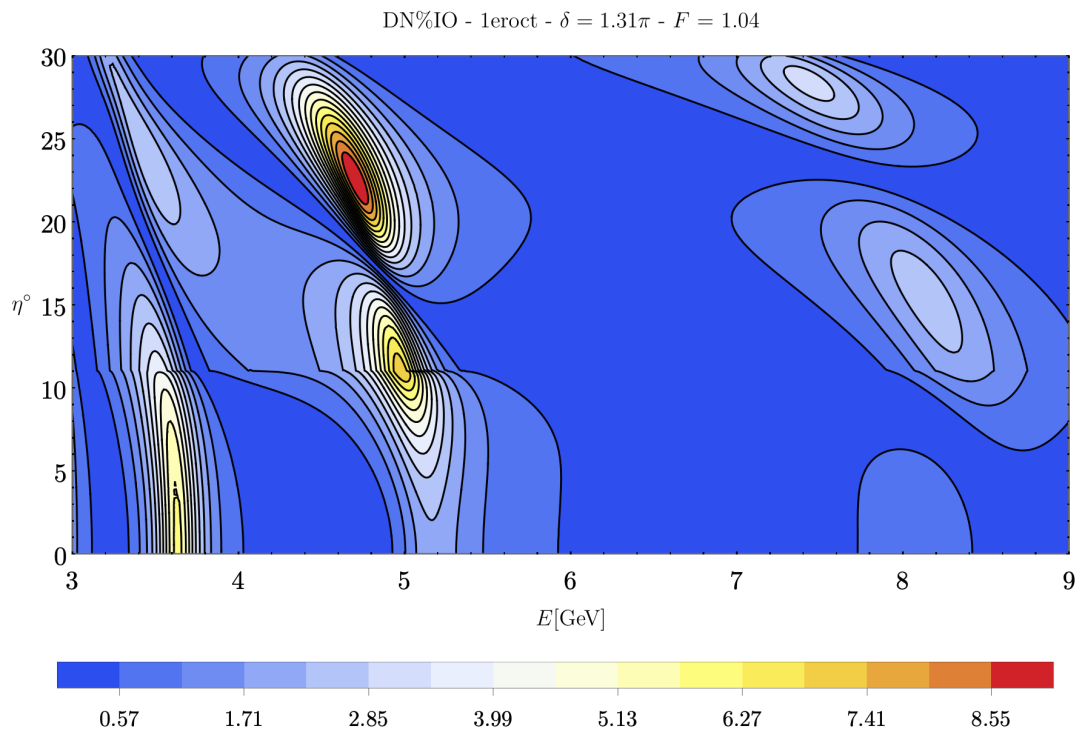


Figura 4.28

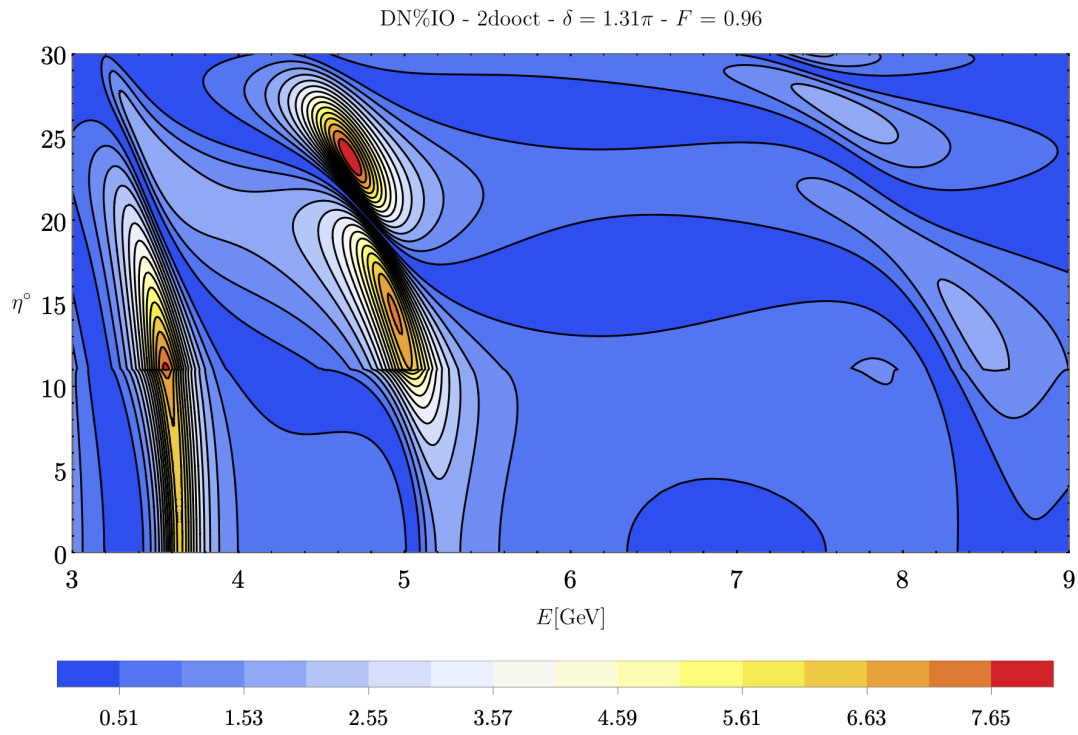


Figura 4.29

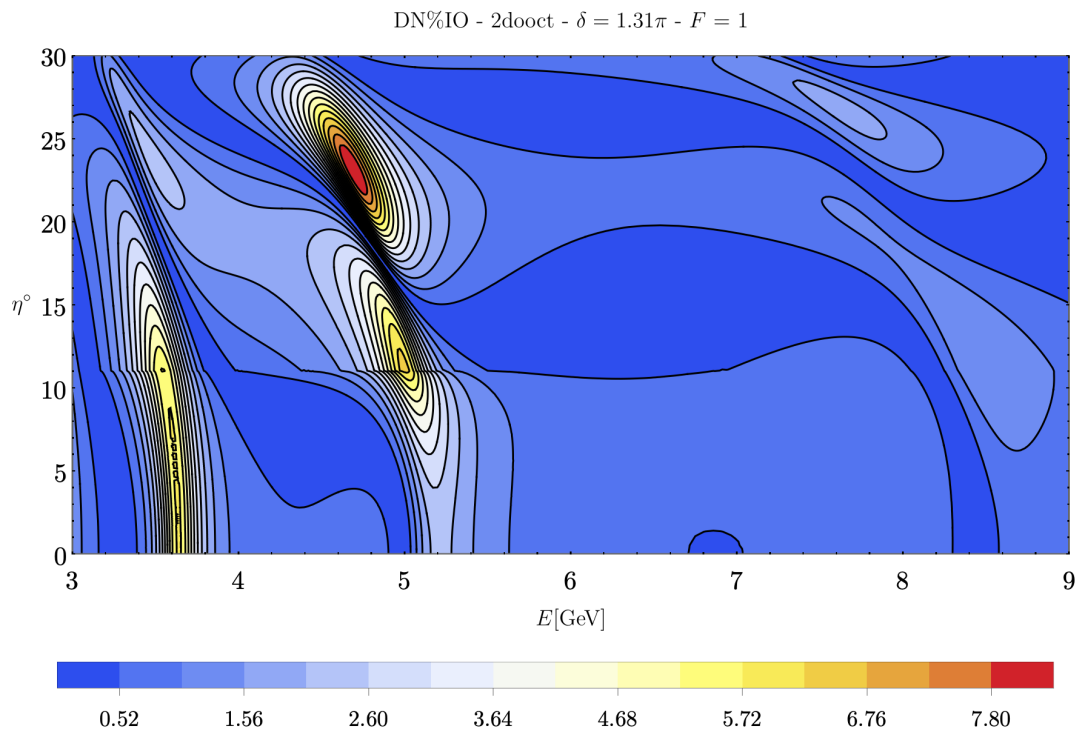


Figura 4.30

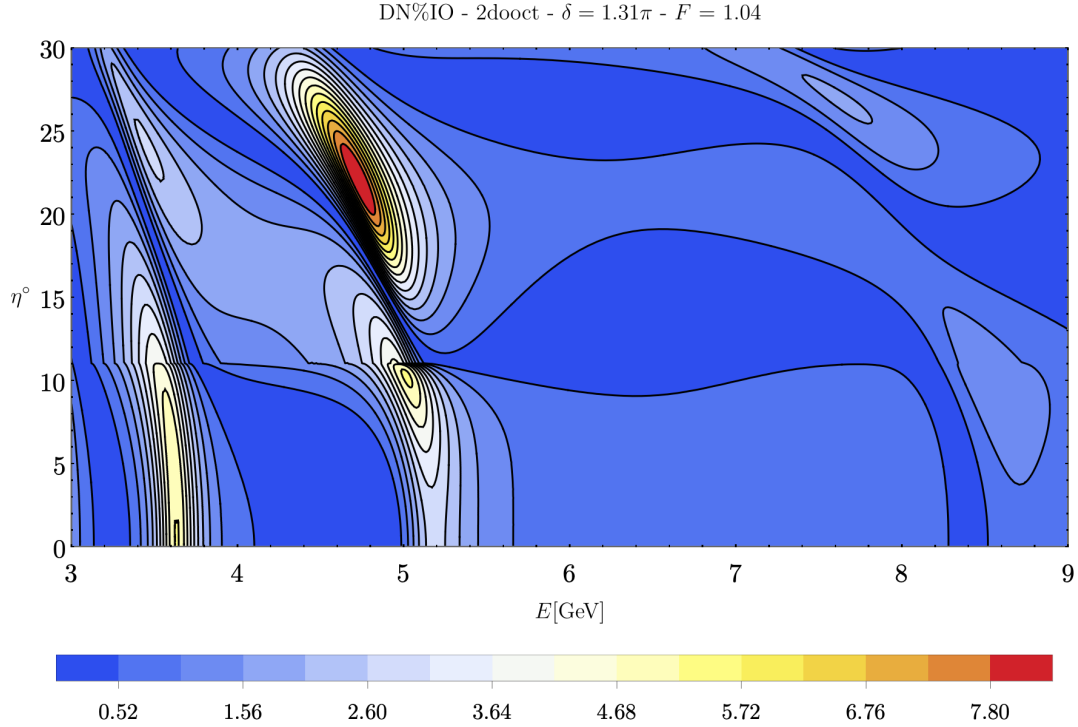


Figura 4.31

Las curvas de nivel presentadas anteriormente (figuras 4.20-4.31), tanto para el caso de jerarquía normal como invertida, revelan los intervalos energéticos y angulares donde se esperaría tener el mayor en el cambio el número de eventos entre un modelo de hierro puro con respecto a otro cuya composición es Fe+1wt%H. De manera general, los cambios más significativos se encuentran para las energías contenidas en el intervalo de 3 a 6 GeV; y para los ángulos comprendidos entre 9 y 30 grados con respecto al nadir. Este comportamiento era de esperarse, puesto que la variación en la probabilidad de supervivencia del muón, junto con su probabilidad de transición al neutrino del electrón, es mayor en estas regiones. Lo siguiente; y finalmente lo último por hacer en este trabajo, es tratar de aterrizar los resultados anteriores en un experimento en concreto.

4.2.3 Estimación del número de eventos para Hyper-K

Hyper-Kamiokande es el nombre del detector Cherenkov de siguiente generación para el estudio de neutrinos, cuyo diseño y funcionamiento estarán basado en su predecesor Super-Kamiokande¹. La construcción de Hyper-Kamiokande (ubicado en la mina de Tachibora, Chubu, Japón) comenzará en abril de 2020 y se espera que pueda empezar a tomar datos en el año 2027 [40].

El volumen efectivo de detección para Hyper-Kamiokande consistirá de dos tanques cilíndricos, cada uno con dimensiones de 74.0 metros de diámetro y 60.0 metros de largo [41]. La cantidad de agua necesaria para llenar ambos tanques es alrededor de 516,101 metros

¹Abreviación de *Super Kamioka Neutrino Detection Experiment*.

cúbicos, lo cual implica que el número de blancos efectivos en el volumen de detección (n_T) es, aproximadamente, 3.1×10^{35} nucleones. Con esta información, es posible construir una función $N_\mu(\alpha, F)$ que dependa del porcentaje de hidrógeno (α) y de la variación del radio del núcleo externo (F), la cual estaría definida a través la ecuación (4.2) mediante

$$N_\mu(\alpha, F) = 2\pi n_T \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{E_1}^{E_2} \sin \eta \, d\eta \, E \, dE \left[\sigma_{\nu_\mu}^{CC}(E) \Phi_{\nu_\mu} + \sigma_{\bar{\nu}_\mu}^{CC}(E) \Phi_{\bar{\nu}_\mu} \right]. \quad (4.7)$$

En este caso, los flujos Φ_{ν_μ} y $\Phi_{\bar{\nu}_\mu}$ serán funciones de los parámetros α y F . Es decir:

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu_\mu} &\equiv \Phi_{\nu_\mu}(\eta, E, \alpha, F) = \mathcal{P}_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}(\eta, E, \alpha, F) \Phi_{\nu_\mu}^0(\eta, E) + \mathcal{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(\eta, E, \alpha, F) \Phi_{\nu_e}^0(\eta, E), \\ \Phi_{\bar{\nu}_\mu} &\equiv \Phi_{\bar{\nu}_\mu}(\eta, E, \alpha, F) = \mathcal{P}_{\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu}(\eta, E, \alpha, F) \Phi_{\bar{\nu}_\mu}^0(\eta, E) + \mathcal{P}_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu}(\eta, E, \alpha, F) \Phi_{\bar{\nu}_e}^0(\eta, E). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Los intervalos de integración para (4.7) se toman entre 2.8 y 6.2 GeV y de 8 a 30 grados, dado que son las regiones donde se esperaría tener la mayor variabilidad en el número de eventos. Suponiendo una jerarquía de masas normal y un valor de $\theta_{23} = 40.69^\circ$, la superficie resultante se puede apreciar en la figura 4.32.

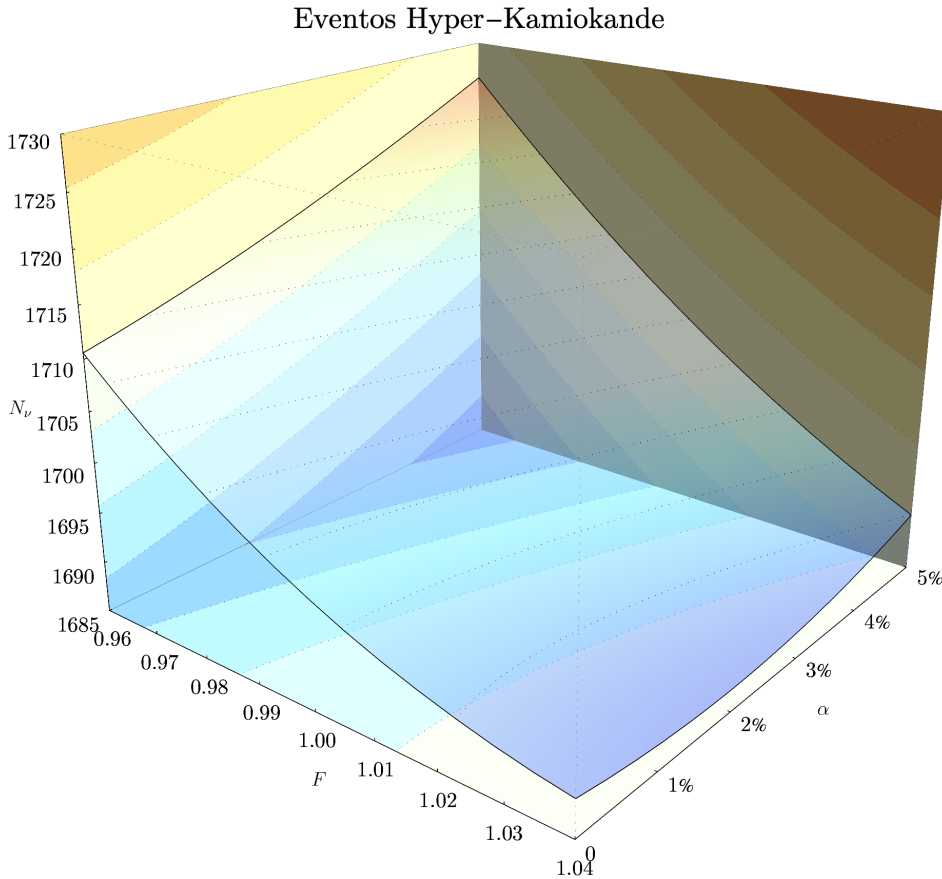


Figura 4.32: Gráfica de la función $N_\mu(\alpha, F)$ para un tiempo de exposición de 10 años. Al igual que un mapa de temperatura, los colores cálidos representan las zonas donde la superficie alcanza sus valores máximos, mientras que los colores fríos representan las regiones de valores menores.

La superficie en 4.32 se construyó tomando $\delta = 1.38\pi$. El cambio en el valor de la fase de violación no tiene un afecto apreciable en el cambio del número de eventos. Para exhibir de

forma más clara el comportamiento de la función $N_\mu(\alpha, F)$, se calculó su gradiente (ver figura 4.33).

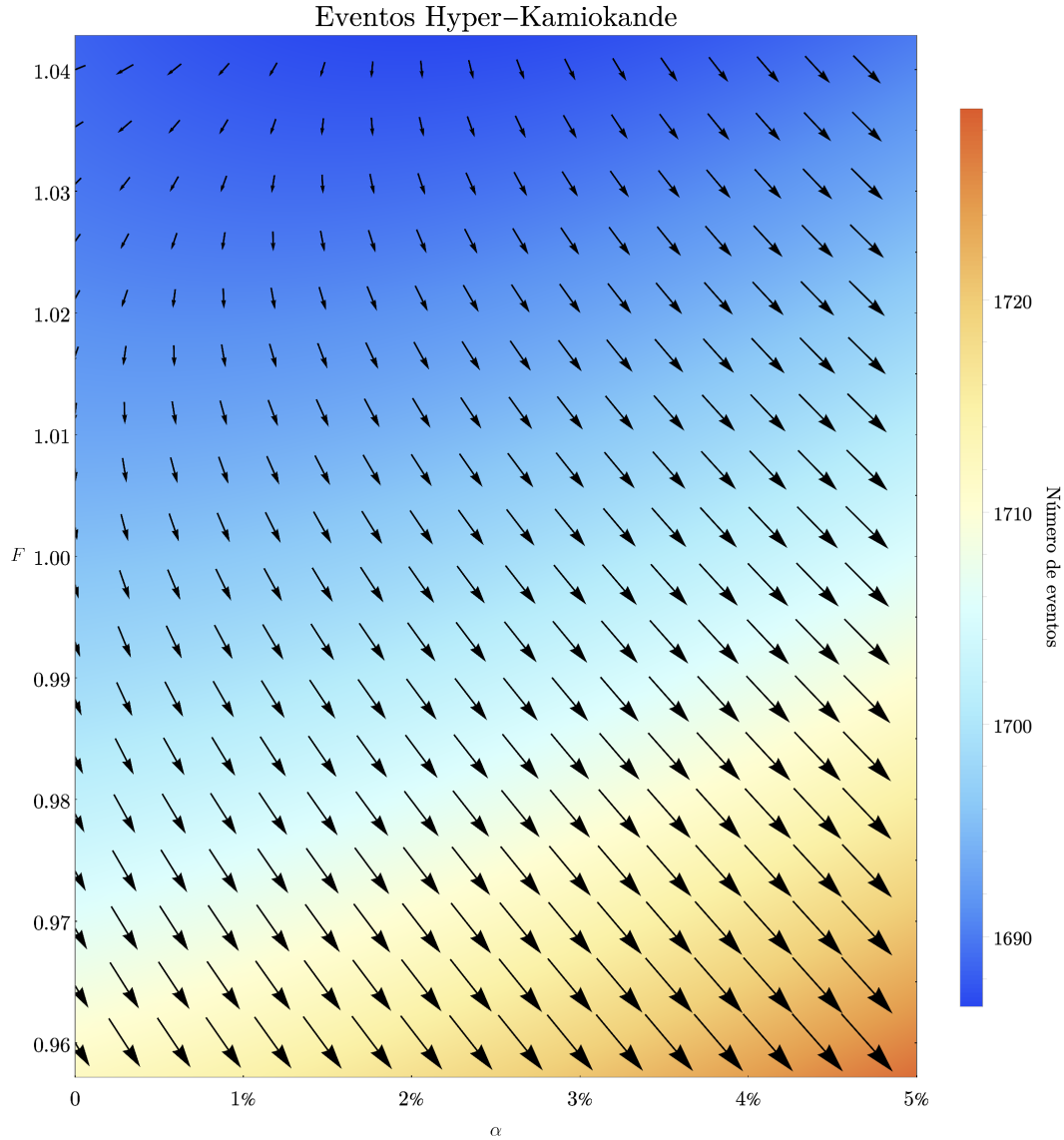


Figura 4.33: Campo vectorial gradiente de la función escalar $N_\mu(\alpha, F)$ representada en la figura 4.32.

De la figura 4.33 es más fácil apreciar la tendencia en el cambio del número de eventos conforme se varían la fracción de electrones y el radio del núcleo externo. El aumento en el porcentaje de hidrógeno se traduce en un mayor número de eventos; mientras que, por otro lado, el incremento en el radio del núcleo disminuye el valor de N_μ . La influencia del parámetro F sobre el número de eventos es mayor a la que pudiese tener α aun para composiciones extremas del núcleo externo. Esto se debe a que los cambios en F se ven traducidos de manera directa en la densidad utilizada en el cálculo del potencial de corriente cargada V_{CC} . Obsérvese que la dirección de máximo crecimiento apunta hacia los valores de $\alpha = 5\%$ y $F = 0.96$. Esto se debe que ambos parámetros amplifican el valor neto del potencial de corriente cargada para

la región del núcleo externo. Por consiguiente, es de esperarse a que mayor abundancia de elementos ligeros en el núcleo se tenga un mayor número de eventos.

Dado que la intención de esta técnica de espectroscopía es acotar los posibles valores de la fracción de electrones, es posible también incorporar el efecto de variar el cociente Z/A para el manto inferior. De la tabla 3.1 se puede apreciar que el manto inferior es la capa principal de mayor volumen y masa de todas. Para incluir esta parte del manto en este estudio, es necesario que la integral para la parte angular en la expresión (4.7) vaya desde de 0 a 60° . De nueva cuenta, suponiendo que el experimento se lleve acabo en Hyper-Kamiokande y tomando sólo los eventos producidos en el volumen fiducial, es factible hacer una pequeña simulación donde se muestre la variación del número del eventos como función de la fracción de electrones en el núcleo externo y el manto inferior. En la figura 4.34 se muestran los resultados de hacer esto tomando $F = 1$.

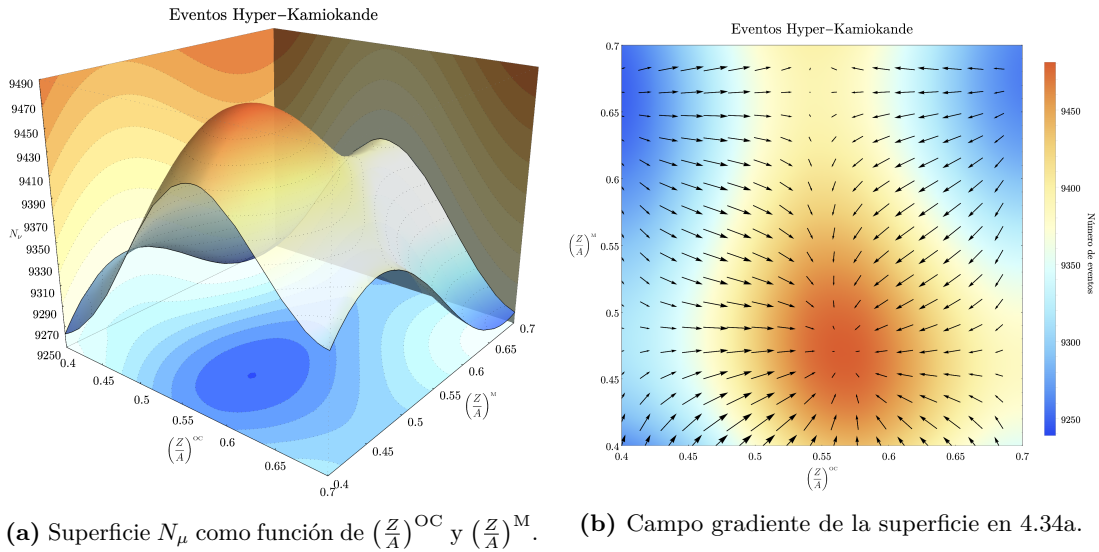


Figura 4.34: Desviación del número de eventos como función de la fracción de electrones en el núcleo externo $(\frac{Z}{A})^{OC}$ y la fracción de electrones en el manto inferior $(\frac{Z}{A})^M$. Se tomó un tiempo de exposición de 10 años.

De la figura anterior, se puede apreciar que el número de eventos se ve favorecido para densidades de electrones mayores a 0.5 en el núcleo externo y menores a este valor para el manto inferior. El estudio del manto es muy importante porque permitiría tener un mejor conocimiento de la tectónica de placas y hacer modelos más precisos de vulcanología.

El problema con el cálculo del número de eventos radica en conocer de manera precisa el flujo de neutrinos atmosféricos. Tan sólo determinar el flujo de los neutrinos a partir de los rayos cósmicos constituye un compendio de información donde se ven involucrados varios factores, entre los cuales están, por ejemplo, la determinación del flujo primario de rayos cósmicos, la gran cantidad de procesos donde se forman las partículas secundarias resultantes, etcétera [14]. Es de esperar que el uso de un flujo atmosférico más preciso permita discernir de mejor manera entre un modelo y otro.

Capítulo 5

Conclusiones

Las oscilaciones de neutrinos proveen una herramienta para poder identificar distintos cocientes para la fracción Z/A . Este método por sí sólo sería capaz de acotar el intervalo de posibles valores de Z/A en el núcleo externo y el manto. Mejores mediciones para la composición del núcleo externo son esenciales para poder explicar fenómenos geológicos que dependen directamente de los elementos químicos involucrados. La temperatura del interior de la Tierra y los flujos convectivos que surgen en el manto podrían ser mejor entendidos si se contase con un rango mucho menor de elementos ligeros que pudiesen ser candidatos a estar presentes en el núcleo externo.

El esclarecimiento de otras interrogantes en las propiedades de los neutrinos puede mejorar esta técnica de espectroscopía. El escenario más favorable se da cuando se tiene una jerarquía de masas normal y $\theta_{23} < 45^\circ$. Lo anterior es debido a que el flujo de neutrinos atmosféricos es mayor que el de los antineutrinos y porque la presencia de θ_{23} en el primer octante permitiría obtener una mejor estadística en las regiones de interés, ver figura 4.20. Aún en la situación menos propicia para realizar este estudio, la cual corresponde a jerarquía invertida y $45^\circ < \theta_{23}$, es posible determinar de manera precisa la fracción de electrones del núcleo y del manto trabajando con los intervalos adecuados para la energía y el ángulo nadir. Probablemente, el mayor inconveniente de esta situación es que se necesiten largos tiempos de exposición en los experimentos.

El número de eventos para Hyper-Kamiokande presentado en el capítulo anterior constituye sólo un cálculo semicuantitativo. En principio, un modelo más realista debe incorporar la resolución espacial y energética del detector en cuestión. Además, en experimentos como Hyper-Kamiokande, se deben tomar en cuenta los muones producidos en las rocas que rodean al detector. Estos muones aumentan considerablemente el número de eventos y pueden mejorar el análisis estadístico. A pesar de que se tomó una resolución del 100 % para el detector y no se consideró ninguna distribución para los muones producidos en el volumen fiducial, el cómputo para Hyper-K muestra que mayores concentraciones de la fracción de electrones en el núcleo externo, para el intervalo de energías y ángulos considerados, tienden a incrementar los eventos esperados. El número de eventos también se ve potenciado conforme se disminuye el radio del núcleo externo y se aumenta la densidad de electrones en el manto inferior.

Este trabajo se concentró en el estudio de neutrinos del muón y del electrón debido a que son los leptones ligeros mejor registrados por la mayoría de los experimentos, además de que el flujo de neutrinos atmosféricos está compuesto exclusivamente de neutrinos (antineutrinos) del muón y del electrón. En el futuro, el uso de otras fuentes de neutrinos y la elaboración de detectores más sofisticados podrían ayudar a realizar un mejor tratamiento del interior de la Tierra, ya no sólo en el núcleo externo y el manto inferior, sino también en otras capas de la Tierra. Las oscilaciones de neutrinos también pudiesen servir para ayudar a construir un modelo PREM tridimensional de la Tierra.

Bibliografía

- [1] Tarbuck, E. J. & Lutgens, F. K. *Ciencias de la Tierra* (Pearson, 2005), 8 edn. (págs. 1, 2, 48, 49, 50)
- [2] Fowler, C. M. R. *The Solid Earth: An Introduction to Global Geophysics* (Cambridge University Press, 2004), 2 edn. (págs. 1, 2, 48, 54, 56, 60)
- [3] Leger, J. M., Loriers-Susse, C. & Vodar, B. Pressure Effect on the Curie Temperatures of Transition Metals and Alloys. *Phys. Rev. B* **6**, 4250–4261 (1972). (págs. 2)
- [4] Rott, C., Taketa, A. & Bose, D. Spectrometry of the Earth using Neutrino Oscillations. *Scientific Reports* **5**, 15225 EP – (2015). (págs. 2, 56, 57, 66, 67)
- [5] Wolfenstein, L. Neutrino oscillations in matter. *Phys. Rev. D* **17**, 2369–2374 (1978). (págs. 3)
- [6] Bilenky, S. M. Neutrino. History of a unique particle. *Eur. Phys. J.* **H38**, 345–404 (2013). 1210.3065. (págs. 5, 6, 7, 8)
- [7] Aguilar-Arevalo, A. & Bietenholz, W. Neutrinos: Mysterious Particles with Fascinating Features, which led to the Physics Nobel Prize 2015 (2016). 1601.04747. (págs. 5, 9)
- [8] Bethe, H. & Peierls, R. The “Neutrino”. *Nature* **133** (1934). (págs. 6)
- [9] Bilenky, S. M. Bruno Pontecorvo: Mister Neutrino. In *Third NO-VE International Workshop on Neutrino Oscillations in Venice: Fifty years after the neutrino experimental discovery: Venezia, February 7-10, 2006, Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Campo Santo Stefano*, 599–609 (2006). physics/0603039. (págs. 6, 19)
- [10] Reines, F. & Cowan, C. L. The Neutrino. *Nature* **178**, 446–449 (1956). (págs. 6)
- [11] Danby, G. *et al.* Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos. *Phys. Rev. Lett.* **9**, 36–44 (1962). (págs. 7)
- [12] Zuber, Kai. *Neutrino Physics* (CRC Press, 2012), 2 edn. (págs. 9)
- [13] Kajita, T. Atmospheric neutrinos and discovery of neutrino oscillations. *Proceedings of the Japan Academy. Series B, Physical and Biological Sciences* **86**, 303–321 (2010). (págs. 9, 30)

- [14] Boyarkin, O. *Advanced Particle Physics: The Standard Model and Beyond*, vol. 2 (Taylor & Francis, 2011). (págs. 9, 10, 12, 94)
- [15] Barger, V., Marfatia, D. & Whisnant, K. *The Physics of Neutrinos* (Princeton University Press, Princeton University Press, 6 Oxford Street, Woodstock, Oxfordshire OX20 1TW, 2012). (págs. 9, 10)
- [16] Agrawal, V., Gaisser, T. K., Lipari, P. & Stanev, T. Atmospheric neutrino flux above 1 GeV. *Phys. Rev. D* **53**, 1314–1323 (1996). (págs. 10)
- [17] Cottingham, W. N. & A., G. D. *An Introduction to The Standard Model of Particle Physics* (Cambridge University Press, 2007), 2 edn. (págs. 12)
- [18] Serway, R. A., Moses, C. J. & Moyer, C. A. *Física moderna* (Cengage Learning, 2005), 3 edn. (págs. 13, 14, 15, 16)
- [19] Giunti, C. & Kim, C. W. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP, 2007). (págs. 19, 26, 30, 35)
- [20] De la Peña, L. *Introducción a la mecánica cuántica* (Fondo de Cultura Económica, 2006), 3 edn. (págs. 21)
- [21] Tanabashi, M. *et al.* Review of Particle Physics. *Phys. Rev.* **D98**, 030001 (2018). (págs. 31, 32, 40, 65)
- [22] Lipari, P. Introduction to neutrino physics. In *2001 CERN-CLAF School of high-energy physics, Itacuruca, Brazil, 6-19 May, 2001: Proceedings*, 115–199 (2001). (págs. 31)
- [23] Agarwalla, S. K., Chatterjee, S. S. & Palazzo, A. Degeneracy between θ_{23} octant and neutrino non-standard interactions at DUNE. *Phys. Lett.* **B762**, 64–71 (2016). 1607.01745. (págs. 31)
- [24] King, Stephen F. Neutrino Mass Models: Impact of Non-Zero Reactor Angle. In *Neutrino telescopes. Proceedings, 14th International Workshop, Venice, Italy, March 15-18, 2011*, 163–172 (2011). 1106.4239. (págs. 32)
- [25] Wallraff, M. & Wiebusch, C. Calculation of oscillation probabilities of atmospheric neutrinos using NuCraft. *Comput. Phys. Commun.* **197**, 185–189 (2015). 1409.1387. (págs. 35, 66)
- [26] Lara, J. A. H. Oscilaciones de neutrinos para el estudio del interior de la tierra (2016). (págs. 40)
- [27] Zwillinger, D. (ed.) *Standard Mathematical Tables and Formulae* (Chapman & Hall/CRC, 2003), 31st edn. (págs. 41)
- [28] Hernandez, P. Neutrino physics. In *High-energy physics. Proceedings, 5th CERN-Latin American School, Recinto Quirama, Colombia, March 15-28, 2009* (2010). 1010.4131. (págs. 44)

-
- [29] Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. *Theory of Elasticity*, vol. 7 (Pergamon Press Oxford, 1986), 3 edn. (págs. 50)
- [30] Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L. Preliminary reference Earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **25**, 297–356 (1981). (págs. 51)
- [31] Cloetingh, S. & Negendank, J. (eds.) *New Frontiers in Integrated Solid Earth Sciences* (Springer, 2010). (págs. 56)
- [32] Li, J., Fei, Y. & Turekian, K. K. *2.14 - Experimental Constraints on Core Composition A2 - Holland, Heinrich D.*, 1–31 (Pergamon, Oxford, 2007). (págs. 56)
- [33] Winter, W. Probing the absolute density of the Earth’s core using a vertical neutrino beam. *Phys. Rev. D* **72**, 037302 (2005). (págs. 57)
- [34] Weisstein, E. W. Moment of Inertia-Earth. Eric Weisstein’s World of Physics. En línea. URL <http://scienceworld.wolfram.com/physics/MomentofInertiaEarth.html>. (págs. 58, 59)
- [35] Group, P. D. Astrophysical constants. <http://pdg.lbl.gov/2018/reviews/rpp2018-rev-astrophysical-constants.pdf> (2018). (págs. 59)
- [36] Capozzi, F. *et al.* Status of three-neutrino oscillation parameters, circa 2013. *Phys. Rev. D* **89**, 093018 (2014). 1312.2878. (págs. 67)
- [37] Romero, I. & Sampayo, O. A. About the earth density and the neutrino interaction. *The European Physical Journal C* **71**, 1696 (2011). (págs. 83)
- [38] Honda, M., Athar, M. S., Kajita, T., Kasahara, K. & Midorikawa, S. Atmospheric neutrino flux calculation using the nrlmsise-00 atmospheric model. *Phys. Rev. D* **92**, 023004 (2015). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.023004>. (págs. 83)
- [39] Formaggio, J. A. & Zeller, G. P. From ev to eev: Neutrino cross sections across energy scales. *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1307–1341 (2012). (págs. 84)
- [40] Hyper-Kamiokande. In *Prospects in Neutrino Physics (NuPhys2018) London, United Kingdom, December 19-21, 2018* (2019). 1904.10206. (págs. 91)
- [41] Abe, K. *et al.* Hyper-Kamiokande Design Report (2018). 1805.04163. (págs. 91)