Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

GRADO DE HOMOGENEIDAD EN PRODUCTOS SIMÉTRICOS DE VARIEDADES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

DANIEL EMBARCADERO RUIZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

Ciudad Universitaria, Cd. Mx, 2019

1. Datos del alumno
Embarcadero
Ruiz
Daniel
5537141732
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
308009219

2. Datos del tutor
Dra.
Verónica
Martínez de la Vega
y Mansilla

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Jorge Marcos
Martínez
Montejano

4. Datos del sinodal 2
Dra.
Isabel Alicia
Hubard
Escalera

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Rodrigo Jesús
Hernández
Gutiérrez

6. Datos del sinodal 4
Dra.
Paula Ivon
Vidal
Escobar

7. Datos del trabajo escrito.
Grado de homogeneidad en productos simétricos de variedades
84
2019

Agradecimientos

Agradecimientos a mi familia, a mis maestros y a mis amigos.

Agradecimiento a los proyectos PAPIIT IN101216 y IN106319 “Teoria de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos II y III”.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo se presenta como tesis de licenciatura y tiene como finalidad desarrollar los resultados escritos en el artículo "Homogeneity degree of some symmetric products" del Dr. Rodrigo Hernández Gutiérrez y la Dra. Verónica Martínez de la Vega. El objetivo es determinar el grado de homogeneidad de los productos simétricos de variedades compactas, conexas y sin frontera y también el grado de homogeneidad de los productos simétricos del intervalo.

El trabajo va dirigido a personas familiarizadas con topología y álgebra a nivel universitario. Nos enfocaremos a probar todo lo referente a los productos simétricos y al grado de homogeneidad, otros resultados conocidos sobre continuos, gráficas y otros hiperespacios no se probarán en este trabajo pues no son el tema central de estudio.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se enunciarán definiciones y resultados conocidos. Las letras m y n representan enteros mayores o iguales a 1 a menos que se especifique lo contrario. Llamaremos τ_X a la topología de X.

Un *continuo* es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío; de forma similar se puede definir un *continuo de Hausdorff* como un espacio Hausdorff, conexo, compacto y no vacío. Un *continuo degenerado* es un espacio consistente en un único punto.

Ejemplos de continuos son el intervalo cerrado $[0,1]$ (Figura 2.1); el triodo simple, el cual es homeomorfo a la letra T (Figura 2.2) y las esferas unitarias de dimensión n definidas como $S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2} = 1\}$ (Figura 2.3).

Definición 2.0.1 (Arco)**.** *Un* arco *es cualquier espacio homeomorfo al intervalo cerrado* $[0,1]$.

Si A es un arco y $\alpha : [0,1] \to A$ es un homeomorfismo, entonces $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ son llamados puntos extremos *del arco A.*

Cuando decimos que A es un arco de p a q *nos referimos a que A es un arco con puntos extremos p y q.*

Dos continuos que resultan importantes en este trabajo se definen a continuación:

Definición 2.0.2 (n celda)**.** *Una* n celda *es cualquier espacio homeomorfo*

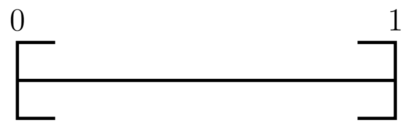

Figura 2.1: El intervalo

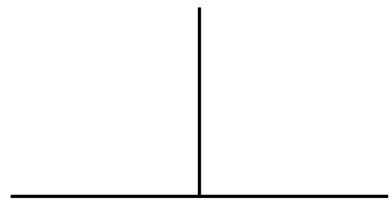

Figura 2.2: Triodo simple

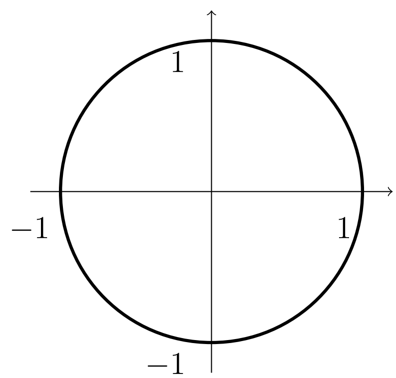

Figura 2.3: $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ es la circunferencia unitaria de dimensión 1

al producto $\prod_{i=1}^{n}[\,0,1]$ *. En la Figura 2.4 vemos un ejemplo de* 2 *celda.*

Un resultado útil es:

Lema 2.0.3. *El producto de n m celdas es una nm celda [5, Capítulo IV Teorema 2.4, pág. 102].*

Definición 2.0.4 (n-sombrilla)**.** *Considerando el arco* $A = \{(0,...,0,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t \leq 1\}$ *que va en línea recta del origen al punto* $(0,...,0,1)$ *y la n celda* $N = [\,-1,1]^{\,n} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$*. Diremos que X es una* n-sombrilla *si X es homeomorfo a $N \cup A$, con la topología de subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

El triodo simple es una 1-sombrilla; además, en la Figura 2.5 ilustramos una 2-sombrilla.

Definición 2.0.5. *Sea X es un espacio topológico, decimos que X es arco conexo si $\forall x, y \in X$ existe un arco en X que va de x a y.*

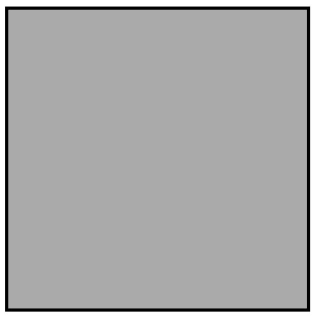

Figura 2.4: 2 celda

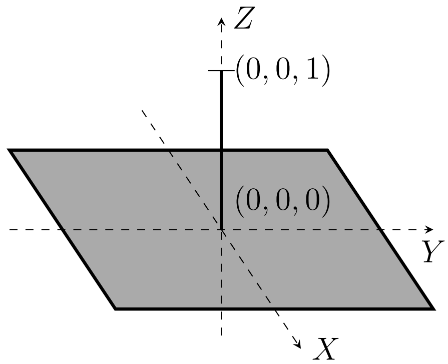

Figura 2.5: 2-sombrilla

Lema 2.0.6. *Todo subconjunto abierto y conexo de un continuo localmente conexo es arco conexo [11, Teorema 8.26, pág. 132].*

Una característica útil de los continuos es que cualquier abierto no vacío tiene una infinidad de puntos.

Lema 2.0.7. *Sea X un continuo no degenerado y U un subconjunto abierto no vacío de X. Entonces U tiene una cantidad infinita de puntos.*

Demostración. Procedemos por contradicción. Supongamos que U tiene una cantidad finita de puntos, digamos $U = \{a_1, ..., a_n\}$.

Por ser X espacio de Hausdorff tenemos que todos los conjuntos finitos son cerrados [5, Capítulo VII 1.4, pág. 139], entonces U es cerrado.

Al ser U cerrado, abierto y no vacío y ser X conexo tenemos que $U = X$ [5, Capítulo V 1.3, pág. 108]. Entonces X tiene solo una cantidad finita de puntos.

Por hipótesis X es no degenerado, por lo que $X = \{a_1, ..., a_n\}$ con $n \geq 2$. Los conjuntos $K = \{a_1\}$ y $H = \{a_2, ..., a_n\}$ son ajenos, no vacíos y su unión es X; además, al ser conjuntos finitos ambos son cerrados y por lo tanto ambos son abiertos. Tenemos que K y H son una separación de X, lo que contradice que X sea conexo. $\square$

Dado un continuo X podemos considerar espacios topológicos donde los elementos son subconjuntos del espacio original X, por ejemplo:

- $2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es compacto y no vacío}\}$
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : |A| \leq n\}$

Estos nuevos espacios reciben el nombre de *hiperespacios* de X. Al espacio $F_n(X)$ se le llama *n-ésimo producto simétrico* de X, en estos hiperespacios enfocaremos nuestro análisis.

Definición 2.0.8 (Métrica de Hausdorff)**.** *Sea X un continuo con métrica d, definimos la* métrica de Hausdorff *en 2^X como:*

$$H(A,B) = máx\{sup\{d(a,B) : a \in A\}, sup\{d(b,A) : b \in B\}\}$$

donde $d(a,B) = m\acute{i}n\{d(a,b) : b \in B\}$.

Dicha definición es en efecto una métrica para 2^X [10, Observación 0.4, pág. 3]. Los espacios $F_n(X)$ se considerarán con la topología inducida como subespacios de 2^X.

Alternativamente a la definición de la métrica de Hausdorff es posible definir esta misma topología haciendo uso únicamente de los abiertos en X, lo cual resulta sumamente útil como herramienta para algunas de nuestras demostraciones.

Definición 2.0.9 (Conjunto Vietórico y topología de Vietoris)**.** *Si $U_1, ..., U_n$ son subconjuntos de X, entonces definimos:*

$$\langle U_1, ..., U_n \rangle = \{A \subseteq X : \forall i \in \{1, ..., n\} A \cap U_i \neq \emptyset \ y \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i\}$$

A $\langle U_1, ..., U_n \rangle$ lo llamaremos el conjunto Vietórico *definido por $U_1, ..., U_n$.*

Con dichos conjuntos podemos definir también:

$$\beta = \{\langle U_1, ..., U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \ y \ U_1, ..., U_n \in \tau_X\}$$

Dicho conjunto es la base de una topología en el espacio 2^X, a la que llamaremos topología de Vietoris *[3, Teorema 1.2, pág. 3].*

Si X es un continuo, entonces la topología de Vietoris y la inducida por la métrica de Hausdorff coinciden [3, Teorema 3.1, pág. 16]. Consideramos la topología de Vietoris para los espacios $F_n(X)$ como la topología que adquieren como subespacios de 2^X.

Lema 2.0.10. *Sean X un continuo, $A = \{a_1, ..., a_m\}$ un subconjunto finito de X y $\mathcal{U}$ un abierto de 2^X tal que $A \in \mathcal{U}$. Sean $U_1, ..., U_n$ abiertos de X ajenos dos a dos tales que $a_i \in U_i$. Entonces existen $V_1, ..., V_m$ abiertos no vacíos ajenos dos a dos de X tales que:*

1. $\forall i \in \{1, ..., m\}$, $a_i \in V_i \subseteq U_i$.
2. $\langle V_1, ..., V_m \rangle \subseteq \mathcal{U}$

Demostración. Construiremos un conjunto que cumpla. Sea $\langle W_1, ..., W_k \rangle$ un básico de la topología de Vietoris tal que $A \in \langle W_1, ..., W_k \rangle \subseteq \mathcal{U}$.

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$, definimos:

$$V_i = U_i \cap \left(\bigcap_{\{j : a_i \in W_j\}} W_j \right)$$

Cada V_i es abierto por ser la intersección finita de abiertos. Por construcción $V_i \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$; como los conjuntos $U_1, ..., U_m$ son ajenos dos a dos concluimos que $V_1, ..., V_m$ son ajenos dos a dos.

Observemos que para cada $i \in \{1, ..., m\}$ se tiene que $a_i \in \bigcap_{\{j : a_i \in W_j\}} W_j$ por lo que $a_i \in V_i$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$.

Ahora mostraremos que $\langle V_1, ..., V_m \rangle \subseteq \langle W_1, ..., W_k \rangle$.

Sea $B \in \langle V_1, ..., V_m \rangle$, sabemos que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$ y que, $\forall i \in \{1, ..., m\}$, $B \cap V_i \neq \emptyset$.

Veamos que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^k W_i$. Supongamos que no es cierto, sea $x \in B$ tal que $x \notin \bigcup_{i=1}^k W_i$. Para cada $i \in \{1, ..., m\}$ ocurre que $x \notin \bigcap_{\{j : a_i \in W_j\}} W_j$ por lo que $x \notin V_i$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$, así que $x \notin \bigcup_{i=1}^m V_i$.

Como supusimos que $x \in B$ y sabemos que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$, tenemos que $x \in \bigcup_{i=1}^m V_i$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $B \subseteq \bigcup_{i=1}^k W_i$.

Veamos que $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $B \cap W_i \neq \emptyset$.

Sea $r \in \{1, ..., k\}$. Como $A \in \langle W_1, ..., W_k \rangle$, existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $a_i \in W_r$. Sabemos que $B \cap V_i \neq \emptyset$ así que en particular $B \cap (\bigcap_{\{j : a_i \in W_j\}} W_j) \neq \emptyset$ y tenemos que $B \cap W_r \neq \emptyset$. Esto demuestra que, $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $B \cap W_i \neq \emptyset$.

Por todo lo anterior $\langle V_1, ..., V_m \rangle \subseteq \langle W_1, ..., W_k \rangle$.

Como $\langle W_1, ..., W_k \rangle \subseteq \mathcal{U}$ tenemos que $\langle V_1, ..., V_m \rangle \subseteq \mathcal{U}$, lo que concluye nuestra prueba. $\square$

Considerando X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $F_n(X)$ su n-ésimo producto simétrico, escribiremos:

$$\langle U_1, ..., U_m \rangle_n = \langle U_1, ..., U_m \rangle \cap F_n(X)$$

Para referirnos a un conjunto Vietórico en el espacio $F_n(X)$.

Definición 2.0.11. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $[A]^n = \{B \subseteq A : |B| = n\}$.*

Lema 2.0.12. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

1. $[X]^n = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$.
2. $F_n(X) = [X]^1 \cup ... \cup [X]^n$.
3. *Los conjuntos $[X]^1, ..., [X]^n$ son ajenos dos a dos.*

Demostración. Observemos que si $A \in [X]^k$, entonces por definición $A \subseteq X$ y $|A| = k$ y tenemos que $A \in 2^X$. De esto obtenemos que $[X]^k = \{A \in 2^X : |A| = k\}$.

Si $A \in [X]^k \cap [X]^{k'}$, entonces $|A| = k$ y $|A| = k'$; por tanto $k = k'$. Lo que nos dice que si $k \neq k'$, entonces $[X]^k$ y $[X]^{k'}$ son conjuntos ajenos; esto demuestra la tercer afirmación.

Por definición $F_n(X) = \{A \in 2^X : |A| \leq n\}$. Observemos que $F_n(X) = \{A \in 2^X : |A| \leq n\} = \{A \in 2^X : |A| = 1\} \cup ... \cup \{A \in 2^X : |A| = n\} = [X]^1 \cup ... \cup [X]^n$; lo cual demuestra la segunda afirmación.

Obtenemos de lo anterior que $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X) = ([\,X\,]^{\,1} \cup ... \cup [\,X\,]^{\,n-1} \cup [\,X\,]^{\,n}) \setminus ([\,X\,]^{\,1} \cup ... \cup [\,X\,]^{\,n-1}) = [\,X\,]^{\,n}$; lo cual muestra la primer afirmación.

$\square$

El siguiente lema nos permite encontrar una base local en $F_n(X)$ a partir de una base local en X:

Lema 2.0.13. *Sean X continuo, $x \in X$ y α una base local de x. Entonces $\beta = \{\langle U \rangle_n : U \in \alpha\}$ es base local de $\{x\}$ en la topología de $F_n(X)$.*

Demostración. Sea d la métrica en X y H su correspondiente métrica de Hausdorff. Para fines de esta demostración si $\delta > 0$, entonces denotaremos $B_X(\delta, x) = \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$ y $B_{F_n}(\delta, \{x\}) = \{A \in F_n(X) : H(\{x\}, A) < \delta\}$.

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en $F_n(X)$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_{F_n}(\delta, \{x\}) \subseteq \mathcal{U}$. Consideremos $B_X(\frac{\delta}{2}, x)$ que es un abierto en X que contiene a x, como α es base local de x, existe $U \in \alpha$ tal que $x \in U \subseteq B_X(\frac{\delta}{2}, x)$.

Vamos a demostrar que $\langle U \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Tomemos $A \in \langle U \rangle_n$, por definición sabemos que $A \subseteq U \subseteq B_X(\frac{\delta}{2}, x)$ y $A \in F_n(X)$; vamos a demostrar que $A \in B_{F_n}(\delta, \{x\})$, es decir $H(\{x\}, A) < \delta$.

Por definición de métrica de Hausdorff tenemos que

$$H(\{x\}, A) = máx\{sup\{d(x, A) : x \in \{x\}\}, sup\{d(y, \{x\}) : y \in A\}\} = máx\{d(x, A), sup\{d(y, x) : y \in A\}\}.$$

Consideremos $y \in A$, tenemos que $y \in B_X(\frac{\delta}{2}, x)$ y sabemos que $d(x, y) < \frac{\delta}{2}$ por lo que podemos concluir que $d(x, A) = m\acute{i}n\{d(x, y) : y \in A\} < \frac{\delta}{2} < \delta$ y también $sup\{d(y, x) : y \in A\} \leq \frac{\delta}{2} < \delta$ y podemos concluir que $H(\{x\}, A) < \delta$ como buscamos. Por lo anterior tenemos que $A \in B_{F_n}(\delta, \{x\}) \subseteq \mathcal{U}$ por lo que $A \in \mathcal{U}$ y demostramos que $\langle U \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$.

Finalmente concluimos que $\beta = \{\langle U \rangle_n : U \in \alpha\}$ es una base local de $\{x\}$ en la topología de $F_n(X)$. $\square$

Finalmente veamos la existencia de un homeomorfismo entre $F_1(X)$ y X

Lema 2.0.14. *Sea X un espacio Hausdorff y definimos $f : X \to F_1(X)$ como $f(x) = \{x\}$, $\forall x \in X$. Entonces:*

a) f es un homeomorfismo.

b) Si $A \subseteq X$, entonces $f \restriction_A : A \to [\,A]^{\,1}$ es un homeomorfismo.

Demostración. a) Mostraremos que f es un homeomorfismo.

f es inyectiva. Tenemos que si $x \neq y$, entonces $f(x) = \{x\} \neq \{y\} = f(y)$.

f es suprayectiva. Tomemos $B \in F_1(X)$. Por el Lema 2.0.12 $F_1(X) = [\,X]^{\,1} = \{B \subseteq X : |B| = 1\} = \{\{x\} : x \in X\}$; entonces $B = \{x\}$ para algún $x \in X$, así que $f(x) = \{x\} = B$ y con esto mostramos que f es suprayectiva.

f es continua. Tomemos un abierto en $F_1(X)$, digamos $\langle U_1, ..., U_k\rangle_1$. Vamos a mostrar que $f^{-1}[\,\langle U_1, ..., U_k\rangle_1]$ es un conjunto abierto en X.

$\{y\} \in \langle U_1, ..., U_k\rangle_1$ es equivalente a $\forall j \in \{1, ..., k\}$, $y \in U_j$ lo que es equivalente a decir $y \in \bigcap_{j=1}^{k} U_j$. Entonces tenemos que $f^{-1}[\,\langle U_1, ..., U_k\rangle_1] = \{x \in X : \{x\} \in \langle U_1, ..., U_k\rangle_1\} = \bigcap_{j=1}^{k} U_j$ el cual es un conjunto abierto en X por ser la intersección de los abiertos $U_1, ..., U_k$. Por lo tanto la función f es continua.

f es abierta. Tomemos $U \in \tau_X$, buscamos ver que $f[\,U]$ es abierto. Veamos que de hecho $f[\,U] = \langle U\rangle_1$.

Por definición $f[\,U] = \{\{x\} : x \in U\}$ y $\langle U\rangle_1 = \{A \in F_1(X) : A \cap U \neq \emptyset$ y $A \subseteq U\} = \{A \in F_1(X) : A \subseteq U\} = \{\{x\} \in F_1(X) : \{x\} \subseteq U\} = \{\{x\} : x \in U\}$ por lo que $f[\,U] = \langle U\rangle_1$.

Como $\langle U\rangle_1$ es un abierto en $F_1(X)$ concluimos que f es abierta.

b) Sea $A \subseteq X$ y queremos ver que $f \restriction_A : A \to [\,A]^{\,1}$ es homeomorfismo.

Como f es homeomorfismo y $f \restriction_A$ es su restricción sabemos que esta última es un homeomorfismo en su imagen. Lo único que resta es mostrar que $[\,A]^{\,1} = f[\,A]$.

Tenemos por definición $[\,A]^{\,1} = \{B \subseteq A : |B| = 1\} = \{\{x\} : x \in A\} = f[\,A]$. Por lo que $f \restriction_A : A \to [\,A]^{\,1}$ es homeomorfismo. $\square$

Para algunos hiperespacios se conocen modelos que nos permiten entenderlos de una forma visual. A continuación se describen los modelos para los primeros productos simétricos del intervalo.

Lema 2.0.15. *Para* $n \in \{1, 2, 3\}$, $F_n([\,0, 1]\,)$ *es homeomorfo a* $[\,0, 1]^{\,n}$ *[6, 8. Teorema 6, pág. 880].*

En la Figura 2.6 se ilustra el modelo de $F_2([\,0, 1]\,)$.

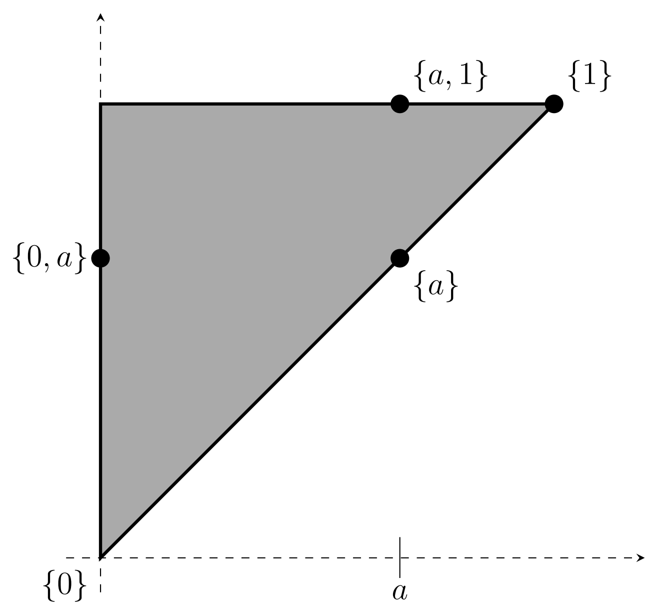

Figura 2.6: Modelo en $\mathbb{R}^2$ de $F_2([\,0, 1]\,)$

Definición 2.0.16 (Función inducida)**.** *Sean* X *y* Y *dos continuos y* $f : X \to Y$ *una función continua entre ellos, definimos la* función inducida $F : 2^X \to 2^Y$ *(respectivamente* $F : F_n(X) \to F_n(Y)$*) como:*

$$F(A) = f[\,A] \text{ cuando } A \in 2^X \text{ (respectivamente } F_n(X))$$

Nos serán de utilidad los siguientes lemas:

Lema 2.0.17. *Sean* X *un compacto,* Y *un espacio de Hausdorff y* $f : X \to Y$ *una función continua. Entonces:*

1. *f es una función cerrada.*
2. *Si f es una función biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

[5, Capítulo XI Teorema 2.1, pág. 226]

En particular si X y Y son continuos y f es una función continua, entonces f es un homeomorfismo.

Lema 2.0.18 (Lema de pegado)**.** *Sean X y Y espacios topológicos, $A_1, ..., A_n$ subconjuntos cerrados de X tales que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$ y para cada $i \in \{1, ..., n\}$ sea $f_i : A_i \to Y$ una función continua de forma que, $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $f_i \restriction_{A_i \cap A_j} = f_j \restriction_{A_i \cap A_j}$. Entonces existe una única función continua $f : X \to Y$ tal que, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $f \restriction_{A_i} = f_i$ [5, Capítulo III Teorema 9.4, pág. 83].*

Lema 2.0.19. *Sean X y Y continuos, $f : X \to Y$ un homeomorfismo y $F : 2^X \to 2^Y$ (respectivamente $F : F_n(X) \to F_n(Y)$) la función inducida. Entonces F es un homeomorfismo [11, Teorema 4.7, pág. 56].*

Definición 2.0.20. *Dado un espacio topológico X, definimos:*

$$\mathcal{H}(X) = \{h : X \to X : h \text{ es un homeomorfismo}\},$$

es decir, $\mathcal{H}(X)$ es el conjunto de homeomorfismos del espacio X en sí mismo.

Definiremos una relación en los elementos de X de la siguiente forma: Dados $x, y \in X$ decimos que $x \sim y$ si y solo si $\exists h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(x) = y$.

Lema 2.0.21. *La relación $\sim$ es de equivalencia.*

Demostración. Mostremos que la relación es reflexiva, transitiva y simétrica.

Reflexiva. Buscamos ver que si $x \in X$, entonces $x \sim x$. Sea $x \in X$; consideramos $Id : X \to X$ la función identidad en X sabemos que $Id \in \mathcal{H}(X)$ y $Id(x) = x$ con lo que obtenemos que $x \sim x$.

Transitiva. Sean $x, y, z \in X$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$; por definición tenemos que existen homeomorfismos $h_1, h_2 : X \to X$ tales que $h_1(x) = y$ y $h_2(y) = z$, sabemos que $h_2 \circ h_1 \in \mathcal{H}(X)$ y $h_2 \circ h_1(x) = h_2(h_1(x)) = h_2(y) = z$ por lo que $x \sim z$.

Simétrica. Sean $x, y \in X$ tales que $x \sim y$, sabemos por definición que existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(x) = y$; tenemos que $h^{-1} \in \mathcal{H}(X)$ y se cumple que $h^{-1}(y) = x$ lo que nos dice que $y \sim x$.

De lo anterior concluimos que la relación es de equivalencia. $\square$

Al ser una relación de equivalencia sabemos que las clases de equivalencia parten el espacio X.

Definición 2.0.22 (Orbitas)**.** *Si $x \in X$, entonces definimos la* órbita *de x como la clase de equivalencia de x bajo la relación $\sim$, es decir:*

$$orb(x) = \{y \in X : \exists h \in \mathcal{H}(X) \text{ tal que } h(x) = y\}$$

Definición 2.0.23 (Grado de homogeneidad)**.** *Definimos $hd(X)$ el* grado de homogeneidad *de X como el número de orbitas en X, es decir:*

$$hd(X) = |\{orb(x) : x \in X\}|$$

Capítulo 3

Resultados previos

En este capítulo trataremos resultados que utilizaremos en las demostraciones de los capítulos 4 y 5; los resultados están agrupados en cuatro secciones:

En la primera sección obtenemos condiciones suficientes para que ciertas funciones en los hiperespacios sean continuas e inyectivas; además, el Lema 3.1.4 nos da un homeomorfismo fundamental para demostraciones más adelante.

En la segunda sección damos dos resultados sobre árboles que son la base para mostrar más adelante la conexidad en el Lema 3.4.1.

En la tercer sección damos una forma canónica de partir el conjunto $[\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m \rangle_n$.

En la cuarta sección describimos las componentes de $[\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m \rangle_n$ dentro de $F_n(X)$ cuando X es un continuo localmente conexo.

3.1. La unión de funciones

Al trabajar en los hiperespacios tendremos funciones cuyos valores son subconjuntos de nuestro continuo, por lo cual resultará natural querer definir una nueva función uniendo cada uno de los valores que tomaban esas funciones. Más aún buscamos que al definir esta nueva función podamos conocer bajo que condiciones resulta continua o bien inyectiva.

Teorema 3.1.1. *Sea Y un espacio compacto y Hausdorff. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, sea X_i un espacio Hausdorff y $f_i : X_i \to 2^Y$ una función continua tal que $Img(f_i) = B_i \subseteq 2^Y$. Definamos $F : \Pi_{i=1}^n X_i \to 2^Y$ como $F((x_1, ..., x_n)) = \bigcup_{i=1}^n f_i(x_i)$. Entonces:*

a) F es una función continua.

b) Si, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, f_i es inyectiva y $\bigcup B_1, ..., \bigcup B_n$ son ajenos dos a dos, entonces la función F es inyectiva.

Demostración. En primer lugar veamos que F está bien definida. Como, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $f_i(x_i) \in 2^Y$ y la unión finita de cerrados es un cerrado tenemos que $F((x_1, ..., x_n)) = \bigcup_{i=1}^n f_i(x_i) \in 2^Y$.

$a)$ F es una función continua.

Sea $(x_1, ..., x_n) \in \Pi_{i=1}^n X_i$ y sea $\mathcal{U} = \langle U_1, ..., U_k \rangle$ un abierto básico en 2^Y tal que $F((x_1, ..., x_n)) \in \langle U_1, ..., U_k \rangle$. Por definición $F((x_1, ..., x_n)) = \bigcup_{i=1}^n f_i(x_i)$, así que $\bigcup_{i=1}^n f_i(x_i) \in \langle U_1, ..., U_k \rangle$, de donde $\bigcup_{i=1}^n f_i(x_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$ y, $\forall j \in \{1, ..., k\}$, $\bigcup_{i=1}^n f_i(x_i) \cap U_j \neq \emptyset$.

Para demostrar la continuidad construiremos un abierto alrededor de $(x_1, ..., x_n)$ tal que su imagen bajo F esté contenida en $\langle U_1, ..., U_k \rangle$.

Para $l \in \{1, ..., n\}$, definimos $J_l = \{j \in \{1, ..., k\} : f_l(x_l) \cap U_j \neq \emptyset\}$.

Sea $l \in \{1, ..., n\}$, veamos que $J_l \neq \emptyset$. Sabemos que $\bigcup_{i=1}^n f_i(x_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$ de donde en particular $f_l(x_l) \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$ y como $f_l(x_l) \neq \emptyset$, pues $f_l(x_l) \in 2^Y$, entonces $\exists j \in \{1, ..., k\}$ tal que $f_l(x_l) \cap U_j \neq \emptyset$; por definición $j \in J_l$ y con esto demostramos que $J_l \neq \emptyset$.

A partir de aquí utilizaremos la notación $\langle U_{j_1}, ..., U_{j_s} \rangle_{j_r \in J_i}$ para referirnos al conjunto Vietrórico definido por los $U_{j_1}, ..., U_{j_s}$ donde los índices j_r son exactamente los elementos de J_i.

Tenemos que $f_l(x_l) \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$ y si $j \notin J_l$, entonces $f_l(x_l) \cap U_j = \emptyset$, por lo que $f_l(x_l) \subseteq \bigcup_{j \in J_l} U_j$; además, $\forall j \in J_l$, $f_l(x_l) \cap U_j \neq \emptyset$ con lo que podemos garantizar que $f_i(x_i) \in \langle U_{j_1}, ..., U_{j_s} \rangle_{j_r \in J_i}$.

Por ser f_i una función continua existe $V_i \in X_i$ abierto tal que $x_i \in V_i$ y $f_i[V_i] \subseteq \langle U_{j_1}, ..., U_{j_s} \rangle_{j_r \in J_i}$. Consideremos el conjunto $\Pi_{i=1}^n V_i \subseteq \Pi_{i=1}^n X_i$, dicho conjunto es una vecindad abierta de $(x_1, ..., x_n)$.

Ahora vamos a mostrar que $F[\Pi_{i=1}^n V_i] \subseteq \langle U_1, ..., U_k \rangle$, para esto tomemos un elemento cualquiera en $F[\Pi_{i=1}^n V_i]$; por definición dicho elemento es de la forma $\bigcup_{i=1}^n f_i(y_i)$ donde $(y_1, ..., y_n) \in \Pi_{i=1}^n V_i$. Veremos que $\bigcup_{i=1}^n f_i(y_i) \in \langle U_1, ..., U_k \rangle$. Necesitamos probar: $\forall j \in \{1, ..., k\}$, $\bigcup_{i=1}^n f_i(y_i) \cap U_j \neq \emptyset$ y $\bigcup_{i=1}^n f_i(y_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$.

Primero mostremos que $\forall j \in \{1, ..., k\}$, $\bigcup_{i=1}^n f_i(y_i) \cap U_j \neq \emptyset$.

Sea $j \in \{1, ..., k\}$. Como $\bigcup_{i=1}^n f_i(x_i) \cap U_j \neq \emptyset$ obtenemos que $f_m(x_m) \cap U_j \neq \emptyset$ para algún $m \in \{1, ..., n\}$; además, $j \in J_m$ por definición. Como $y_m \in V_m$ y por construcción $f_m[V_m] \subseteq \langle U_{j_1}, ..., U_{j_s} \rangle_{j_r \in J_m}$ en particular $f_m(y_m) \in \langle U_{j_1}, ..., U_{j_s} \rangle_{j_r \in J_m}$. Como $j \in J_m$ tenemos que $f_m(y_m) \cap U_j \neq \emptyset$ y por lo tanto $\bigcup_{i=1}^n f_i(y_i) \cap U_j \neq \emptyset$ con lo que concluimos.

Ahora veamos que $\bigcup_{i=1}^n f_i(y_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$.

Elijamos $i \in \{1, ..., n\}$, bastará mostrar que $f_i(y_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$; consideremos J_i y recordemos que por la construcción tenemos que $y_i \in V_i$ y $f_i[V_i] \subseteq \langle U_{j_1}, ..., U_{j_s} \rangle_{j_r \in J_i}$, así tenemos que $f_i(y_i) \in \langle U_{j_1}, ..., U_{j_s} \rangle_{j_r \in J_i}$ por lo cual $f_i(y_i) \subseteq \bigcup_{j \in J_i} U_j \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_j$ que es lo que buscamos.

Por lo anterior concluimos que $\bigcup_{i=1}^n f_i(y_i) \in \langle U_1, ..., U_k \rangle$. Como $(y_1, ..., y_n)$ es un elemento arbitrario en $\Pi_{i=1}^n V_i$ tenemos que $F[\Pi_{i=1}^n V_i] \subseteq \langle U_1, ..., U_k \rangle$ como queríamos.

Así hemos mostrado que $\Pi_{i=1}^n V_i$ es un abierto que contiene a $(x_1, ..., x_n)$ tal que $F[\Pi_{i=1}^n V_i] \subseteq \langle U_1, ..., U_k \rangle$ por lo que la función F es continua en $(x_1, ..., x_n)$. Como $(x_1, ..., x_n)$ es un punto arbitrario concluimos que F es continua.

b) supongamos que, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, f_i es inyectiva y $\bigcup B_1, ..., \bigcup B_n$ son ajenos dos a dos, mostraremos que F es inyectiva.

Tomemos $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n) \in \Pi_{i=1}^n X_i$ dos elementos distintos, veremos que $F(x_1, ..., x_n) \neq F(y_1, ..., y_n)$.

Como $(x_1, ..., x_n) \neq (y_1, ..., y_n)$, $\exists m \in \{1, ..., n\}$ tal que $x_m \neq y_m$. Como f_m es inyectiva tenemos que $f_m(x_m) \neq f_m(y_m)$ así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f_m(x_m) \nsubseteq f_m(y_m)$.

Mostraremos ahora que $f_m(x_m) \cap \bigcup_{i \neq m} f_i(y_i) = \emptyset$. Por hipótesis para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $Img(f_i) = B_i$ por lo que $f_i(x_i) \subseteq \bigcup B_i$, así en particular $f_m(x_m) \subseteq \bigcup B_m$. Como $\bigcup B_1, ..., \bigcup B_n$ son ajenos dos a dos tenemos que $f_m(x_m) \cap \bigcup_{i \neq m} \bigcup B_i = \emptyset$ y en particular $f_m(x_m) \cap \bigcup_{i \neq m} f_i(y_i) = \emptyset$. Además, $f_m(x_m) \nsubseteq f_m(y_m)$ por lo cual $f_m(x_m) \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} f_i(y_i)$ y por tal $\bigcup_{i=1}^{n} f_i(x_i) \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} f_i(y_i)$ con lo que hemos mostrado que $F((x_1, ..., x_n)) \neq F((y_1, ..., y_n))$ por tanto F es inyectiva. $\square$

De forma más particular el siguiente lema nos garantiza la continuidad en caso de considerar la unión de varias funciones continuas que tienen como dominio a un mismo espacio X.

Lema 3.1.2. *Sean Y un espacio compacto y Hausdorff y X un espacio de Hausdorff. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ sea $f_i : X \to 2^Y$ una función continua tal que $Img(f_i) = B_i \subseteq 2^Y$. Definamos $F : X \to 2^Y$ como $F(x) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(x)$, $\forall x \in X$. Entonces:*

a) F es una función continua.

b) Si $\forall i \in \{1, ..., n\}$, f_i es inyectiva y $\bigcup B_1, ..., \bigcup B_n$ son ajenos dos a dos, entonces la función F es inyectiva.

Demostración. a) F es continua.

Por el Teorema 3.1.1 la función $G : X^n \to 2^Y$ definida como $G((x_1, ..., x_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ es una función continua.

Definamos $H : X \to X^n$ como $H(x) = (x, x, ..., x)$, $\forall x \in X$. H es un homeomorfismo de X a la diagonal del espacio X^n.

Tenemos que $G \circ H : X \to 2^Y$ es una función continua por ser composición de dos funciones continuas y que $G \circ H(x) = G(H(x)) = G((x, x, ..., x)) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(x)$, por lo que $F = G \circ H$. Por tal F es continua.

b) supongamos que, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, f_i es inyectiva y $\bigcup B_1, ..., \bigcup B_n$ son ajenos dos a dos. Mostraremos que F es inyectiva.

Sea $G : X^n \to 2^Y$ como en el inciso a), por el Teorema 3.1.1 sabemos que G es inyectiva y como la función H es inyectiva podemos concluir que $F = G \circ H$ es inyectiva. $\square$

A lo largo de nuestras pruebas nos encontraremos con un caso aún más particular de unión de funciones que enunciamos en el siguiente lema:

Lema 3.1.3. *Sean Y un espacio compacto y Hausdorff y X un espacio de Hausdorff y sea $f : X \to 2^Y$ una función continua. Definamos $f_C : X \to 2^Y$ como $f_C(x) = f(x) \cup C$, $\forall x \in X$. Entonces:*

a) *f_C es una función continua.*

b) *Si f es inyectiva y $\bigcup Img(f) \cap C = \emptyset$, entonces la función f_C es inyectiva.*

Demostración. $a)$ f_C es continua.

Definamos $g : X \to 2^Y$ como $g(x) = C$, $\forall x \in X$. Como g es una función constante tenemos que g es continua. Por el Lema 3.1.2 la función $F : X \to 2^Y$ definida como $F(x) = f(x) \cup g(x)$ es también continua. Como F y f_C coinciden en dominio y regla de correspondencia tenemos que $F = f_C$, por lo que f_C es continua.

$b)$ supongamos f es inyectiva y $\bigcup Img(f) \cap C = \emptyset$ veremos que f_C es inyectiva.

Sean $x, y \in X$ dos elementos distintos. Como f es inyectiva sabemos que $f(x) \neq f(y)$ como subconjuntos de Y así que sin pérdida de generalidad podemos suponer $f(x) \nsubseteq f(y)$. Por hipótesis tenemos que $\bigcup Img(f) \cap C = \emptyset$ en particular $f(x) \cap C = \emptyset$ así que $f(x) \nsubseteq C \cup f(y)$ y por lo tanto $f(x) \cup C \nsubseteq f(y) \cup C$. Por tal $f(x) \cup C \neq f(y) \cup C$ y concluimos que f_C es una función inyectiva. □

Finalmente el siguiente resultado nos dice que el conjunto $\langle M_1, ..., M_n \rangle_n$ es homeomorfo al producto $\Pi_{i=1}^n M_i$ cuando los conjuntos $M_1, M_2, ..., M_n$ son ajenos dos a dos; en su momento esto nos ayudará a encontrar de forma canónica n celdas en algunos hiperespacios.

Lema 3.1.4. *Sean X compacto y Hausdorff y $M_1, ..., M_n$ subconjuntos ajenos dos a dos de X. Definimos la función $h : \Pi_{i=1}^n M_i \to \langle M_1, ..., M_n \rangle_n$ como $h((y_1, ..., y_n)) = \{y_1, ..., y_n\}$, $\forall (y_1, ..., y_n) \in \Pi_{i=1}^n M_i$. Entonces h es un homeomorfismo.*

Demostración. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, consideremos la función $f_i : M_i \to [\,M_i]^{\,1}$ definida como $f_i(y) = \{y\}$, $\forall y \in M_i$. Por el Lema 2.0.14, sabemos que f_i es un homeomorfismo entre M_i y $[\,M_1]^{\,1}$.

Observemos que dado $i \in \{1, ..., n\}$, tenemos que $[\,M_i]^{\,1} = \{B \subseteq M_i : |B| = 1\} = \{\{x\} : x \in M_i\}$, entonces por definición $\bigcup [\,M_i]^{\,1} = \{x : \{x\} \in [\,M_i]^{\,1}\} = M_i$.

Como $M_1, ..., M_n$ son ajenos dos a dos por el Teorema 3.1.1 tenemos que la función $h : \Pi_{i=1}^{n} M_i \to 2^X$ definida como $h((x_1, ..., x_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} = \{x_1, ..., x_n\}$ es continua e inyectiva.

Vamos a mostrar la siguiente afirmación:

[Af1] Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ sea $V_i \subseteq M_i$. Entonces se cumple que $h[\,\Pi_{i=1}^{n} V_i] = \langle V_1, ..., V_n \rangle_n$.

Primero veamos que $h[\,\Pi_{i=1}^{n} V_i] \subseteq \langle V_1, ..., V_n \rangle_n$.

Si $(y_1, ..., y_n) \in \Pi_{i=1}^{n} V_i$, entonces, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $y_i \in V_i$ por lo cual $\{y_1, ..., y_n\} \in \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ y también para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\{y_1, ..., y_n\} \cap V_i = \{y_i\}$ por lo cual $h((y_1, ..., y_n)) = \{y_1, ..., y_n\} \in \langle V_1, ..., V_n \rangle_n$ lo cual demuestra que $h[\,\Pi_{i=1}^{n} V_i] \subseteq \langle V_1, ..., V_n \rangle_n$.

Ahora mostremos que $\langle V_1, ..., V_n \rangle_n \subseteq h[\,\Pi_{i=1}^{n} V_i]\,$.

Antes que nada observemos que los conjuntos $V_1, ..., V_n$ son ajenos dos a dos pues $M_1, ..., M_n$ son ajenos dos a dos.

Consideramos $B \in \langle V_1, ..., V_n \rangle_n$, en particular $B \in F_n(X)$ digamos $B = \{y_1, ..., y_r\}$ donde $1 \leq r \leq n$; la definición nos indica que, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\exists y_i \in B \cap V_i$, como los conjuntos $V_1, ..., V_n$ son ajenos dos a dos si $i \neq j$, entonces $y_i \neq y_j$ por lo cual B es un conjunto con exactamente n elementos. Escribimos $B = \{y_1, ..., y_n\}$ y sin pérdida de generalidad, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $y_i \in V_i$. Ahora bien como $(y_1, ..., y_n) \in \Pi_{i=1}^{n} V_i$ por definición tenemos que $h((y_1, ..., y_n)) = \{y_1, ..., y_n\}$. En conclusión $\langle V_1, ..., V_n \rangle_n \subseteq h[\,\Pi_{i=1}^{n} V_i]\,$.

Hasta aquí concluimos la prueba de [Af1].

Vamos a mostrar ahora que h es suprayectiva.

Por [Af1] tenemos que $h[\,\Pi_{i=1}^{n} M_i] = \langle M_1, ..., M_n \rangle_n$ lo que justamente nos garantiza que h es suprayectiva.

Veamos que h es una función abierta.

Tomemos un abierto en el dominio, al ser $\Pi_{i=1}^{n} M_i$ un producto finito sabemos que una base para su topología son los conjuntos de la forma $\Pi_{i=1}^{n} V_i$ donde, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, V_i es abierto en M_i, así que justamente podemos suponer que el abierto que tomamos es de esta forma.

Por la [Af1] tenemos que $h[\,\Pi_{i=1}^{n} V_i] = \langle V_1, ..., V_n \rangle_n$ y este es un conjunto abierto pues todos los $V_1, ..., V_n$ son abiertos. Por lo tanto h es una función abierta.

En conclusión h es un homeomorfismo entre $\Pi_{i=1}^{n} M_i$ y $\langle M_1, ..., M_n \rangle_n$. $\square$

3.2. Un resultado para árboles

Los resultados de esta sección serán utilizados para mostrar la conexidad en el Lema 3.4.1.

Recordemos que si A es un arco y $\alpha : [\,0, 1] \to A$ es un homeomorfismo, entonces $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ son los puntos extremos de A.

Definición 3.2.1 (Gráfica)**.** *Una* gráfica *es un continuo que se puede escribir como la unión de una cantidad finita de arcos tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o se intersecan solamente en uno o en sus dos puntos extremos.*

Definición 3.2.2 (Árbol)**.** *Un* árbol *es una gráfica en la cual no existe una curva cerrada simple.*

Para fines de nuestro trabajo consideraremos a un punto como un árbol degenerado*.*

En las Figuras 3.1 y 3.2 se pueden ver ejemplos de una gráfica y un árbol respectivamente.

Las gráficas son continuos localmente conexos [11, Proposición 9.4, pág. 142] por lo que por el Lema 2.0.6 son arco conexos.

Definición 3.2.3 (Puntos extremos en gráficas)**.** *En una gráfica X un punto p es* extremo *si para cualquier arco que tenga a p, p es un extremo de dicho arco.*

Al conjunto de todos los puntos extremos de X lo llamaremos $E(X)$.

Es un hecho conocido que cualquier árbol tiene al menos un punto extremo.

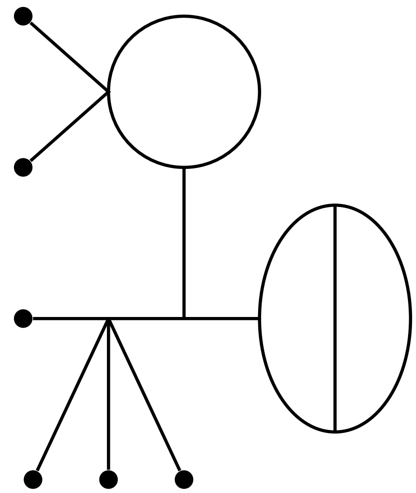

Figura 3.1: Una gráfica con sus puntos extremos circulados

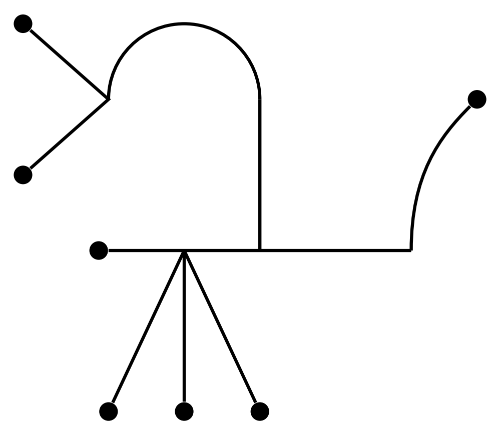

Figura 3.2: Un árbol con sus puntos extremos circulados

El siguiente lema nos da un resultado que se utiliza durante las pruebas de este capítulo:

Lema 3.2.4. *Sean X un espacio de Hausdorff arco conexo, C un subconjunto compacto no vacío de X y e un punto fuera de C. Entonces existe un arco $\alpha : [\,0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = e$, $\alpha(1) \in C$ y $\forall t \in [\,0,1)$, $\alpha(t) \notin C$.*

Demostración. Elijamos un elemento $c \in C$, por ser X arco conexo sea $\alpha' : [\,0,1] \to X$ un arco tal que $\alpha'(0) = e$ y $\alpha'(1) = c$.

Como α' es un homeomorfismo entre $[\,0,1]$ y su imagen y C es un conjunto cerrado el conjunto $\{t \in [\,0,1] : \alpha'(t) \in C\}$ alcanza su mínimo. Consideremos $t_0 = m\acute{i}n\{t \in [\,0,1] : \alpha'(t) \in C\}$

Observemos que como $\alpha'(0) = e \notin C$, entonces $0 < t_0$ y por nuestra construcción si $t \in [\,0,t_0)$, entonces $\alpha'(t) \notin C$.

Vamos a definir $\alpha : [\,0,1] \to X$ como $\alpha(t) = \alpha'(t_0 \cdot t)$, observemos que α es solo una parametrización del subarco de α' que va desde e hasta $\alpha'(t_0)$; se cumple que $\alpha(0) = e$ y $\alpha(1) = \alpha'(t_0) \in C$. Finalmente si $t \in [\,0,1)$, entonces $t_0 \cdot t < t_0$, por la observación del párrafo anterior $\alpha'(t_0 \cdot t) \notin C$ y como por definición $\alpha(t) = \alpha'(t_0 \cdot t)$ tenemos $\alpha(t) \notin C$ como buscábamos. □

Un hecho importante es que si tomamos una cantidad finita de puntos dentro de un espacio topológico que sea arco conexo, entonces siempre podemos encontrar un árbol que los contenga y cumpla que todos sus puntos extremos sean de los puntos que tomamos en principio; dicho resultado se muestra a continuación:

Lema 3.2.5. *Sean X un espacio Hausdorff, U un subconjunto arco conexo de X, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $x_1, ..., x_n$ puntos distintos en U. Entonces existe un árbol A que cumple que $x_1, ..., x_n \in A$ y $E(A) \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$.*

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción sobre n el número de puntos en U.

Para nuestra base de inducción supongamos que $x_1, x_2 \in U$ son dos puntos distintos; como U es arco conexo podemos tomar α un arco tal que $\alpha(0) = x_1$ y $\alpha(1) = x_2$, α es un árbol y sus puntos extremos son x_1 y x_2.

Supongamos ahora que nuestro resultado es cierto para $k \in \mathbb{N}$.

Tomemos $x_1, ..., x_{k+1}$ puntos distintos en U y consideremos por nuestra hipótesis inductiva A' el árbol que cumple $x_1, ..., x_k \in A'$ y que $E(A') \subseteq$

$\{x_1, ..., x_k\}$. En caso de que x_{k+1} pertenezca también a A' tendríamos que dicho árbol cumpliría con lo buscado para los $k + 1$ puntos, por lo cual supondremos que $x_{k+1} \notin A'$.

Como el conjunto U es arco conexo y A' es compacto, usando el Lema 3.2.4 podemos encontrar un arco $\alpha : [\,0, 1] \to U$ tal que $\alpha(0) = x_{k+1}$, $\alpha(1) \in A'$ y $\forall t \in [\,0, 1)$, $\alpha(t) \notin A'$. Vamos a pensar en el arco $Img(\alpha)$ unido al árbol A', dichos conjuntos solo se intersecan en el punto $\alpha(1)$, por lo que si definimos $A = Img(\alpha) \cup A'$, entonces A es un árbol; además, como $x_{k+1} \in Img(\alpha)$ y $x_1, ..., x_k \in A'$ tenemos que $x_1, ..., x_{k+1} \in A$.

Veamos que $E(A) \subseteq E(A') \cup \{x_{k+1}\}$.

Primero veamos que si $p \in A' \setminus E(A')$, entonces $p \notin E(A)$. Sea $p \in A' \setminus E(A')$, sabemos existe un arco β en A' tal que $p \in \beta$ pero p no es uno de sus puntos extremos, dicho arco β también es un arco en A así que $p \notin E(A)$.

Sea $p \in E(A)$ y supongamos $p \notin E(A')$, por lo anterior $p \notin A'$ y concluimos que $p \in \alpha[\,[\,0, 1)]$; si $p \neq x_{k+1} = \alpha(0)$, entonces $Img(\alpha)$ es un arco de A en el que p no es uno de sus puntos extremos y por eso $p \notin E(A)$.

Concluimos que $E(A) \subseteq E(A') \cup \{x_{k+1}\}$.

Finalmente como $E(A') \subseteq \{x_1, ..., x_k\}$ tenemos que $E(A) \subseteq \{x_1, ..., x_{k+1}\}$, lo que concluye nuestra inducción. $\square$

El siguiente resultado nos dice que dentro de un árbol es posible movernos continuamente desde un conjunto de n elementos hasta cualquier otro conjunto con n elementos siempre eligiendo conjuntos con esa misma cantidad de elementos. La importancia de este resultado está en que al aplicarlo junto con el lema anterior nos va a permitir mostrar que ciertos conjuntos son conexos por trayectorias dentro de $[\,X]^n$.

Lema 3.2.6. *Sean A un árbol, $n \in \mathbb{Z}^+$ y B y C dos subconjuntos de A con exactamente n puntos cada uno de forma que $E(A) \subseteq B \cup C$. Entonces existe una función $F : [\,0, n] \to [\,A]^n$ continua tal que:*

1. $F(0) = B$
2. $F(n) = C$

Demostración. Realizaremos nuestra prueba por inducción.

Para la base de inducción tomamos $n = 1$. Tenemos que $B = \{b_1\}$ y $C = \{c_1\}$.

Si $b_1 = c_1$, entonces podemos pensar en la función constante $F : [0, 1] \to [A]^1$ definida como $F(t) = \{b_1\}$ y dicha función cumple lo que buscamos.

Si b_1 y c_1, entonces son dos puntos distintos por ser A arco conexo podemos tomar $\alpha : [0, 1] \to A$ un arco de b_1 a c_1; definamos $F : [0, 1] \to F_1(A)$ como $F(t) = \{\alpha(t)\}$, $\forall t \in [0, 1]$, la función inducida por α, dicha función cumple lo que buscamos.

Ahora supongamos que el enunciado es cierto para $k \in \mathbb{N}$, bajo este supuesto mostraremos la existencia de la función para el caso $k + 1$. Sean $B = \{b_1, ..., b_{k+1}\}$ y $C = \{c_1, ..., c_{k+1}\}$ dos conjuntos con $k + 1$ elementos en un árbol A de forma que $E(A) \subseteq B \cup C$, buscamos construir la función que cumpla las condiciones del lema.

Tomemos un punto extremo de A, de nuestra hipótesis sabemos que este punto está en $B \cup C$ y sin pérdida de generalidad c_{k+1} es el punto extremo. A partir de aquí podemos distinguir dos casos: $c_{k+1} \in B$ o $c_{k+1} \notin B$; ambos casos en realidad se pueden atacar de la misma manera aunque se mencionan para tenerlos en perspectiva durante la prueba.

Vamos a definir $b \in B$ y α una trayectoria de b a c_{k+1} de la siguiente forma:

Si $c_{k+1} \in B$, entonces $b = c_{k+1}$ y $\alpha : [0, 1] \to A$ es la constante c_{k+1}.

Si $c_{k+1} \notin B$, entonces por el Lema 3.2.4 podemos encontrar un arco $\alpha : [0, 1] \to A$ tal que $\alpha(0) = c_{k+1}$, $\alpha(1) \in B$ y $\forall t \in [0, 1)$, $\alpha(t) \notin B$, definiremos en este caso $b = \alpha(1)$.

Al ser b un punto en B podemos reindexar dicho conjunto para que $b = b_{k+1}$, así que de aquí en adelante nos referiremos a este punto como b_{k+1}.

Como $\{b_1, ..., b_k\}$ y $\{c_1, ..., c_k\}$ son conjuntos con exactamente k elementos, por el Lema 3.2.5, existe un árbol A' dentro de A que contenga a todos los puntos en $\{b_1, ..., b_k\} \cup \{c_1, ..., c_k\}$ y que cumpla $E(A') \subseteq \{b_1, ..., b_k\} \cup \{c_1, ..., c_k\}$.

Usando la hipótesis de inducción para k tenemos que existe una función

$F' : [\,0, k] \,\to [\,A']^{\,k}$ continua que cumple:

1. $F'(0) = \{b_1, ..., b_k\}$
2. $F'(k) = \{c_1, ..., c_k\}$

Afirmación: $c_{k+1} \notin A'$.

Supongamos por el contrario que $c_{k+1} \in A'$, sabemos que $c_{k+1} \notin \{b_1, ..., b_k, c_1, ..., c_k\}$ por lo que $c_{k+1} \notin E(A')$; como $c_{k+1} \in A' \setminus E(A')$ podemos encontrar un arco β en A' tal que c_{k+1} no sea extremo de β, como el arco β también es un arco en A concluimos que $c_{k+1} \notin E(A)$ lo cual es una contradicción; por lo tanto $c_{k+1} \notin A'$.

Para construir la función buscada que cumpla en el caso $k+1$ comenzaremos en el conjunto B, dejando fijos a todos los elementos en $\{b_1, ..., b_k\}$ utilizando α llevaremos continuamente el punto b_{k+1} hasta el punto c_{k+1}, luego dejaremos fijo el punto c_{k+1} y aplicaremos la función $F' : [\,0, k] \,\to [\,A']^{\,k}$ para llevar continuamente los puntos $\{b_1, ..., b_k\}$ hasta los puntos en $\{c_1, ..., c_k\}$. Se mostrará que a lo largo de esta trayectoria los valores de la función siempre son un conjunto con $k+1$ puntos distintos.

Definamos la función $F : [\,0, k+1] \,\to [\,A]^{\,k+1}$ como:

$$F(t) = \begin{cases} \{\alpha(1-t)\} \cup \{b_1, ..., b_k\} & \text{si } \ 0 \le t \le 1, \\ \{c_{k+1}\} \cup F'(t-1) & \text{si } \ 1 \le t \le k+1. \end{cases}$$

La función F está bien definida pues $F(1) = \{\alpha(0)\} \cup \{b_1, ..., b_k\} = \{c_{k+1}\} \cup \{b_1, ..., b_k\} = \{c_{k+1}\} \cup F'(0)$.

Veamos que, $\forall t \in [\,0, k+1]\,, |F(t)| = k+1$.

Si $t \in [\,0, 1]\,$, entonces $F(t) = \{\alpha(1-t)\} \cup \{b_1, ..., b_k\}$ y sabemos por construcción que $\forall t \in [\,0, 1]\,, \{\alpha(1-t)\} \cap \{b_1, ..., b_k\} = \{\alpha(1-t)\} \cap (B \setminus \{b_{k+1}\}) = \emptyset$ por lo que $\forall t \in [\,0, 1]\,, |F(t)| = k+1$.

Si $t \in [\,1, k+1]\,$, entonces $F(t) = \{c_{k+1}\} \cup F'(t-1)$, como $F'(t-1) \subseteq A'$, $|F'(t-1)| = k$ y $A' \cap \{c_{k+1}\} = \emptyset$ tenemos que $\forall t \in [\,1, k+1]\,, |F(t)| = k+1$.

Al evaluar tenemos $F(0) = \{\alpha(1)\} \cup \{b_1, ..., b_k\} = \{b_{k+1}\} \cup \{b_1, ..., b_k\} = B$ y $F(k+1) = \{c_{k+1}\} \cup F'(k) = \{c_{k+1}\} \cup \{c_1, ..., c_k\} = C$.

Resta mostrar la continuidad de F.

Primero veamos que cada parte definida es una función continua.

Sabemos que $\alpha : [0,1] \to A$ es continua por lo que $\alpha' : [0,1] \to F_1(A)$ definida como $\alpha'(t) = \{\alpha(1-t)\}$ también es una función continua; por otro lado por el Lema 3.1.3 la función $\alpha'' : [0,1] \to F_{k+1}(A)$ definida como $\alpha''(t) = \alpha'(t) \cup \{b_1, ..., b_k\}$ también es continua. Observemos que esta última función es justamente la definición de nuestra función F en el intervalo $[0,1]$.

Por otro lado tenemos que $F' : [0,k] \to F_k(A')$ es una función continua, nuevamente por el Lema 3.1.3 tenemos que la función $H : [0,k] \to F_{k+1}(A')$ definida como $H(t) = \{c_{k+1}\} \cup F'(t)$ es también continua; justamente esta función H es, salvo un cambio en el intervalo de su dominio, la definición de la segunda parte de la función F.

Tenemos que cada parte de la definición de F es continua y como coinciden en el cerrado $\{1\}$ del dominio por el Lema del pegado 2.0.18 tenemos que la función F es continua, como se buscaba demostrar.

Hasta aquí queda demostrada la existencia de la función para $k+1$, con lo que se demuestra el paso inductivo y queda demostrado el enunciado para cualquier $n \in \mathbb{N}$. □

Corolario 3.2.7. *Sean A un árbol, $n \in \mathbb{Z}^+$ y B y C dos subconjuntos de A con exactamente n puntos cada uno de forma que $E(A) \subseteq B \cup C$, entonces existe una función $F : [0,1] \to [A]^n$ continua tal que:*

1. $F(0) = B$
2. $F(1) = C$

3.3. Una partición de $[X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m \rangle_n$

En esta sección nuestro objetivo es encontrar condiciones bajo las cuales un subconjunto de $[X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m \rangle_n$ resulta disconexo.

Antes que nada recordemos que $F_{n-1}(X)$ es un compacto dentro de $F_n(X)$ por lo que resulta ser un conjunto cerrado y por lo tanto $[X]^n = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ es un abierto en $F_n(X)$. Todo esto lo observamos para notar que si

$U_1, .., U_m$ son subconjuntos abiertos de X, entonces $[\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.

Vamos a dar una partición de dicho conjunto en conjuntos abiertos no vacíos.

Definición 3.3.1. *(Composiciones) Dados $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m \leq n$ una* composición de n en m *es una función $f : \{1, ..., m\} \to \mathbb{Z}^+$ tal que $\sum_{j=1}^{m} f(j) = n$, definimos:*

$$\mathcal{F}_n^m = \{f : f \text{ es una composición de } n \text{ en } m\}$$

Sea X un espacio, $U_1, ..., U_m$ subconjuntos no vacíos ajenos dos a dos y $f \in \mathcal{F}_n^m$, definimos:

$$\mathcal{U}_f = \{C \in F_n(X) : \forall j \in \{1, ..., m\}\ |C \cap U_j| = f(j)\}$$

Un conjunto $C \in \mathcal{U}_f$ tiene exactamente $f(j)$ elementos en el conjunto U_j para cada $j \in \{1, ..., m\}$; a continuación mostraremos que un conjunto en $\mathcal{U}_f$ tiene exactamente n elementos, por lo que la interpretación es que justamente dichos n elementos quedaron posicionados en los conjuntos U_i de acuerdo a f.

Teorema 3.3.2. *Sean X un continuo de Hausdorff, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m \leq n$ y $U_1, ..., U_m$ subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos dos a dos de X. Entonces se cumplen:*

a) $\bigcup_{f \in \mathcal{F}_n^m} \mathcal{U}_f = [\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$.

b) *Si $f, g \in \mathcal{F}_n^m$ y $f \neq g$, entonces $\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g = \emptyset$.*

c) *$\forall f \in \mathcal{F}_n^m$, $\mathcal{U}_f$ es un subconjunto abierto y no vacío en $F_n(X)$.*

Demostración. $a)$. Veamos que $\bigcup_{f \in \mathcal{F}_n^m} \mathcal{U}_f = [\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$.

$\subseteq$). Sea $C \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}_n^m} \mathcal{U}_f$, es decir existe $f \in \mathcal{F}_n^m$ tal que $C \in \mathcal{U}_f$; por definición tenemos que, $\forall j \in \{1, ..., m\}$, $|C \cap U_j| = f(j)$ y como los conjuntos $U_1, ..., U_m$ son ajenos dos a dos tenemos

$$|C \cap \bigcup_{j=1}^{m} U_j| = \sum_{j=1}^{m} |(C \cap U_j)| = \sum_{j=1}^{m} |f(j)| = n$$

de donde $|C| \geq n$, como $C \in F_n(X)$ tenemos $|C| \leq n$ por lo que $C \in [X]^n$.

Mostraremos ahora que $C \in \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$. Como $|C \cap \bigcup_{j=1}^m U_j| = n$ y $C \in [X]^n$ podemos concluir que $C \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_j$.

$\forall j \in \{1, ..., m\}$, $|C \cap U_j| = f(j)$ donde $f(j) \geq 1$, por lo que, $\forall j \in \{1, ..., m\}$, $|C \cap U_j| \geq 1$. Por tal $C \in \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$.

Por todo lo anterior $\bigcup_{f\in\mathcal{F}_n^m} \mathcal{U}_f \subseteq [X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$.

$\supseteq$). Sea $C \in [X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$, entonces C es un conjunto con n elementos; definimos $f : \{1, ..., m\} \to \mathbb{Z}^+$ como $f(j) = |C \cap U_j|$ para cada $j \in \{1, ..., m\}$. Veamos que $f \in \mathcal{F}_n^m$.

Sabemos que $C \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_j$ y por ser los conjuntos $U_1, ..., U_m$ ajenos dos a dos y $C \in [X]^n$ se cumple $\sum_{j=1}^m |f(j)| = \sum_{j=1}^m |(C \cap U_j)| = |C \cap \bigcup_{j=1}^m U_j| = |C| = n$; además, $C \in \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ así que $f(j) = |C \cap U_j| \geq 1$. Por tal $f \in \mathcal{F}_n^m$.

Mostramos que $C \in \mathcal{U}_f$, por lo que $C \in \bigcup_{f\in\mathcal{F}_n^m} \mathcal{U}_f$.

Hasta aquí hemos demostrado que $[X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n = \bigcup_{f\in\mathcal{F}_n^m} \mathcal{U}_f$.

b). Supongamos $f, g \in \mathcal{F}_n^m$ y $f \neq g$, por lo cual $f(j) \neq g(j)$ para algún $j \in \{1, ...m\}$. Si $C \in \mathcal{U}_f$, entonces por definición $|C \cap U_j| = f(j) \neq g(j)$ por lo que $C \notin \mathcal{U}_g$; de manera análoga si $D \in \mathcal{U}_g$, entonces $D \notin \mathcal{U}_f$. Por lo tanto $\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g = \emptyset$.

c). Sea $f \in \mathcal{F}_n^m$, veamos que $\mathcal{U}_f \neq \emptyset$.

Tenemos que los conjuntos $U_1, ..., U_m$ son subconjuntos abiertos no vacíos de X por lo que por el Lema 2.0.7 cada uno tiene una cantidad infinita de elementos. Para $j \in \{1, ...m\}$ sean $a_{j_1}, ..., a_{j_{f(j)}} \in U_j$ elementos distintos y sea $A = \{a_{j_i} : j \in \{1, ...m\}$ y $i \leq f(j)\}$. Tenemos que $A \in \mathcal{U}_f$ por definición, por lo que $\mathcal{U}_f \neq \emptyset$.

Veamos que $\mathcal{U}_f$ es abierto en $F_n(X)$. Sea $C \in \mathcal{U}_f$, vamos a encontrar una vecindad abierta alrededor de C que esté contenida en $\mathcal{U}_f$.

Supongamos que $C = \{c_1, ..., c_n\}$ y, para cada $j \in \{1, ..., m\}$, $C \cap U_j = \{c_{j_1}, ..., c_{j_{f(j)}}\}$. Para cada $c_i \in C \cap U_j$ podemos encontrar un abierto W_i tal que $c_i \in W_i \subseteq U_j$; además, como X es de Hausdorff podemos suponer que

$W_{j_1}, ..., W_{j_{f(j)}}$ son ajenos dos a dos.

De lo anterior existe una familia de abiertos $\{W_1, ..., W_n\}$ que satisfacen que, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $c_i \in W_i$.

Veamos que los conjuntos $W_1, ..., W_n$ son ajenos dos a dos. Si $k \neq s$ y $W_k, W_s \subseteq U_j$, entonces por construcción W_k y W_s son ajenos. Si $W_k \subseteq U_{j_k}$ y $W_s \subseteq U_{j_s}$ con $j_k \neq j_s$, entonces como U_{j_k} y U_{j_s} son ajenos tenemos que W_k y W_s son ajenos.

Consideremos el Vietórico $W = \langle W_1, ..., W_n \rangle_n$ que es un abierto en $F_n(X)$, veremos que W es una vecindad abierta de C contenida en $\mathcal{U}_f$. Primero notemos que $C \in \langle W_1, ..., W_n \rangle_n$, pues $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $c_i \in W_i$.

Ahora mostraremos que $\langle W_1, ..., W_n \rangle_n \subseteq \mathcal{U}_f$. Consideremos un conjunto $D \in \langle W_1, ..., W_n \rangle_n$, tenemos por definición que, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $D \cap W_i \neq \emptyset$ y $D \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_i$; como todos los conjuntos W_i son ajenos dos a dos y son n en total podemos concluir que $|D| \geq n$, como $D \in F_n(X)$, tenemos que $|D| = n$ y por lo tanto $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $|D \cap W_i| = 1$.

Por construcción sabemos que para cada $j \in \{1, ..., m\}$, $W_{j_1}, ..., W_{j_{f(j)}} \subseteq U_j$ y $\forall k \in \{j_1, ..., j_{f(j)}\}$, $W_k \cap U_j \neq \emptyset$. Tenemos $|D \cap U_j| = |D \cap \bigcup_{k=1}^{f(j)} W_{j_k}| = \sum_{k=1}^{f(j)} |D \cap W_{j_k}| = \sum_{k=1}^{f(j)} 1 = f(j)$; por lo tanto $\forall j \in \{1, ...m\}$ se cumple $|D \cap U_j| = f(j)$ y así $D \in \mathcal{U}_f$.

Por lo anterior tenemos que $C \in \langle W_1, ..., W_n \rangle_n \subseteq \mathcal{U}_f$. Concluimos que $\mathcal{U}_f$ es abierto como buscábamos probar. □

Corolario 3.3.3. *Sean X un continuo de Hausdorff, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m \leq n$ y $U_1, ..., U_m$ subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos dos a dos de X.*

1. *Si $1 < m < n$, entonces la familia $\{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}_n^m\}$ es una partición de $[X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m \rangle_n$ en al menos dos conjuntos.*

2. *Si $m = 1$ o $m = n$, entonces la familia $\{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}_n^m\}$ tiene un único elemento.*

Demostración. Por el Lema 3.3.2, la familia $\{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}_n^m\}$ se compone de conjuntos abiertos no vacíos ajenos dos a dos tales que su unión es el conjunto $[X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m \rangle_n$; por lo que parten dicho conjunto.

Si $1 < m < n$, entonces en la familia $\{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}_n^m\}$ existen al menos dos conjuntos distintos, a saber el conjunto $\mathcal{U}_f$ donde $f(1) = n - m + 1$, $f(2) = 1$, ... , $f(m) = 1$ y el conjunto $\mathcal{U}_g$ donde $g(1) = 1$, $g(2) = n - m + 1$, ... , $g(m) = 1$ lo que demuestra el primer inciso.

Si $m = 1$, entonces tenemos solamente un subconjunto en X, a saber U_1 y la única composición que existe es $f : \{1\} \to \mathbb{Z}^+$ definida como $f(1) = n$ por lo que $\mathcal{U}_f = \{C \in F_n(X) : |C \cap U_1| = n\} = [X]^n \cap \langle U_1\rangle_n$ es el único elemento de la partición.

Si $m = n$, entonces tenemos n subconjuntos $U_1, ..., U_n$ en X y la única composición que existe es $f : \{1, ..., n\} \to \mathbb{Z}^+$ definida como $f(j) = 1$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$; así $\mathcal{U}_f = \{C \in F_n(X) : \forall j \in \{1, ..., n\}\ |C \cap U_j| = 1\} = [X]^n \cap \langle U_1, ..., U_n\rangle_n$ es el único conjunto en la partición. $\square$

Finalmente el siguiente corolario nos ayuda a mostrar que ciertos conjuntos son disconexos.

Lema 3.3.4. *Sean X un continuo de Hausdorff, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $m \leq n$, $U_1, ..., U_m$ subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos dos a dos de X y $\mathcal{V} \subseteq \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ tal que $Int_{F_n(X)}(\mathcal{V}) \cap [X]^m \neq \emptyset$:*

a) Si $f \in \mathcal{F}_n^m$, entonces $\mathcal{U}_f \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.

b) Si $1 < m < n$, entonces $[X]^n \cap \mathcal{V}$ es disconexo.

Demostración. *a*). Sea $f \in \mathcal{F}_n^m$, buscamos ver que $\mathcal{U}_f \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.

Consideremos $A = \{a_1, ..., a_m\} \in Int_{F_n(X)}(\mathcal{V}) \cap [X]^m$, observemos que como $\mathcal{V} \subseteq \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ tenemos que $A \in \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ y por ser los conjuntos $U_1, ..., U_m$ ajenos dos a dos cada uno de estos conjuntos contiene exactamente un elemento de A. Sin pérdida de generalidad supongamos que, $\forall i \in \{1, ..., m\}$, $a_i \in U_i$.

Por el Lema 2.0.10 sean $V_1, ..., V_m$ subconjuntos abiertos no vacíos ajenos dos a dos de X tales que, $\forall i \in \{1, ..., m\}$, $a_i \in V_i \subseteq U_i$ y $\langle V_1, ..., V_m\rangle_n \subseteq Int_{F_n(X)}(\mathcal{V})$.

Por el Lema 2.0.7 para cada $i \in \{1, ..., m\}$ el conjunto V_i es infinito; si $f(i) > 1$, entonces tomemos $a_{i_2}, a_{i_3}, ..., a_{i_{f(i)}} \in V_i \setminus \{a_i\}$ elementos distintos entre sí y consideremos al conjunto

$$A' = \{a_1, a_{1_2}, a_{1_3}, ..., a_{1_{f(1)}}, a_2, a_{2_2}, ..., a_{2_{f(2)}}, \ . \ . \ . \ , a_m, a_{m_2}, ..., a_{m_{f(m)}}\}$$

Para cada $i \in \{1, ..., m\}$, $|A' \cap V_i| = f(i)$. Como $V_i \subseteq U_i$ obtenemos que $A' \in \mathcal{U}_f$; además, $A' \in \langle V_1, ..., V_m\rangle_n$ por lo que $A' \in Int_{F_n(X)}(\mathcal{V})$. En conclusión $A' \in \mathcal{U}_f \cap \mathcal{V}$, por lo que $\mathcal{U}_f \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.

b). Supongamos $1 < m < n$.

Por el Corolario 3.3.3 sabemos que $\{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}_n^m\}$ es una partición de $[\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ en al menos dos conjuntos abiertos no vacíos. Sean $\mathcal{U}_h, \mathcal{U}_g \in \{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}_n^m\}$ distintos, definamos el conjunto $\mathcal{L} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_n^m \setminus \{h\}} \mathcal{U}_f$.

Afirmamos que $\mathcal{U}_h$ y $\mathcal{L}$ son una separación en el conjunto $\mathcal{V} \cap [\,X]^{\,n}$.

Primero notemos que $\mathcal{U}_h$ y $\mathcal{L}$ son no vacíos y por el Lema 3.3.2 $\mathcal{U}_h$ y $\mathcal{L}$ son conjuntos abiertos y ajenos.

Tenemos por el Lema 3.3.2 que $\mathcal{U}_h \cup \mathcal{L} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_n^m} \mathcal{U}_f = [\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$. Por hipótesis $\mathcal{V} \subseteq \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ por lo que $[\,X]^{\,n} \cap \mathcal{V} \subseteq [\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ y por lo tanto $[\,X]^{\,n} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_h \cup \mathcal{L}$.

Por el inciso a) de este lema sabemos que $\mathcal{U}_h \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y por el Lema 3.3.2 sabemos que $\mathcal{U}_h \subseteq [\,X]^{\,n}$; tenemos por lo tanto que $\mathcal{U}_h \cap ([\,X]^{\,n} \cap \mathcal{V}) \neq \emptyset$. Análogamente $\mathcal{U}_g \cap ([\,X]^{\,n} \cap \mathcal{V}) \neq \emptyset$ y como $\mathcal{U}_g \subseteq \mathcal{L}$ tenemos $\mathcal{L} \cap ([\,X]^{\,n} \cap \mathcal{V}) \neq \emptyset$.

Con esto tenemos que $\mathcal{U}_f$ y $\mathcal{L}$ son una separación en el conjunto $\mathcal{V} \cap [\,X]^{\,n}$. □

3.4. Componentes en $[\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$

Para entender la notación y definiciones utilizadas en esta sección es recomendable haber leído el inicio de la Sección 3.3. Además, utilizaremos los resultados de la Sección 3.2.

Hasta aquí sabemos por el Corolario 3.3.3 que los conjuntos en $\{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}_n^m\}$ forman una partición del conjunto $[\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ en subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de $F_n(X)$. Ahora mostraremos que si los conjuntos $U_1, ..., U_m$ son arcoconexos, entonces los conjuntos $\mathcal{U}_f$ son las componentes de $[\,X]^{\,n} \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$.

Pensando en dos elementos A y B en $\mathcal{U}_f$ lo que buscamos es definir una trayectoria que nos lleve de A en B moviéndonos solamente por conjuntos en $\mathcal{U}_f$, lo que equivaldrá a movernos continuamente de A a B sin variar la cantidad de elementos que intersecan a cada conjunto U_i.

Lema 3.4.1. *Sean X un espacio de Hausdorff, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m \leq n$, $U_1, ..., U_m$ subconjuntos arco conexos, ajenos dos a dos y no vacíos en X y $f \in \mathcal{F}_n^m$. Entonces el conjunto $\mathcal{U}_f$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $B, C \in \mathcal{U}_f$. Para cada $j \in \{1, ..., m\}$, sabemos por definición que $|B \cap U_j| = f(j) = |C \cap U_j|$. Aplicando lo mostrado en el Lema 3.2.5 podemos encontrar un árbol A_j dentro de U_j que cumpla que los elementos en $(B \cap U_j) \cup (C \cap U_j)$ estén en A_j y $E(A_j) \subseteq (B \cap U_j) \cup (C \cap U_j)$.

Aplicando el Corolario 3.2.7 a dicho árbol y dichos puntos podemos encontrar una función $G_j : [0,1] \to [A_j]^{f(j)}$ continua que cumpla:

1. $G_j(0) = B \cap U_j$
2. $G_j(1) = C \cap U_j$

Definamos $T : [0,1] \to \mathcal{U}_f$ como:

$$T(t) = \bigcup_{j=1}^{m} G_j(t) \forall t \in [0,1]$$

Primero mostremos que $\forall t \in [0,1]$, $T(t) \in \mathcal{U}_f$. Sea $t \in [0,1]$, por definición $T(t) = \bigcup_{j=1}^m G_j(t)$, así bastará mostrar que si $k \in \{1, ..., m\}$, entonces $|(\bigcup_{j=1}^m G_j(t)) \cap U_k| = f(k)$. Por construcción, al ser los conjuntos $U_1, ..., U_m$ ajenos dos a dos $(\bigcup_{j=1}^m G_j(t)) \cap U_k = G_k(t)$ y así $|G_k(t)| = f(k)$.

Por el resultado del Lema 3.1.2 al ser cada una de las funciones G_j continuas tenemos que T es una función continua también.

Evaluando tenemos que $T(0) = \bigcup_{j=1}^m G_j(0) = \bigcup_{j=1}^m B \cap U_j = B \cap (\bigcup_{j=1}^m U_j) = B$ esto último pues $B \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_j$ ya que $B \in \mathcal{U}_f$. De forma análoga $T(1) = \bigcup_{j=1}^m G_j(1) = \bigcup_{j=1}^m C \cap U_j = C \cap (\bigcup_{j=1}^m U_j) = C$.

Concluimos que la función T es una trayectoria de B a C en el conjunto $\mathcal{U}_f$. Habiendo elegido arbitrariamente a B y C hemos mostrado que $\mathcal{U}_f$ es de hecho conexo por trayectorias. $\square$

Finalmente el siguiente lema se enuncia con la idea de poder caracterizar las componentes conexas de $[X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$.

Lema 3.4.2. *Sea X un continuo localmente conexo, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m \leq n$ y $U_1, ..., U_m$ subconjuntos abiertos no vacíos, conexos y ajenos dos a dos en X. Entonces las componentes conexas de $[X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ son los conjuntos $\mathcal{U}_f$ donde $f \in \mathcal{F}_n^m$.*

Demostración. Veamos que $\forall\, C \subseteq [X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ conexo $\exists f \in \mathcal{F}_n^m$ tal que $C \subseteq \mathcal{U}_f$.

Sea $C \subseteq [X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ conexo y supongamos que $\nexists f \in \mathcal{F}_n^m$ tal que $C \subseteq \mathcal{U}_f$. Por el Lema 3.3.2 $\bigcup_{f\in\mathcal{F}_n^m} \mathcal{U}_f = [X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ podemos encontrar $h, g \in \mathcal{F}_n^m$ con $h \neq g$ tales que $C \cap \mathcal{U}_h \neq \emptyset$ y $C \cap \mathcal{U}_g \neq \emptyset$. Definimos el conjunto $\mathcal{L} = \bigcup_{f\in\mathcal{F}_n^m\setminus\{h\}} \mathcal{U}_f$.

Afirmamos que $\mathcal{U}_h$ y $\mathcal{L}$ son una separación en el conjunto C.

Por el Lema 3.3.2 $\mathcal{U}_h$ y $\mathcal{L}$ son conjuntos abiertos y ajenos. Tenemos también que $\mathcal{U}_h \cup \mathcal{L} = \bigcup_{f\in\mathcal{F}_n^m} \mathcal{U}_f = [X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ así que $C \subseteq \mathcal{U}_h \cup \mathcal{L}$ y como $C \cap \mathcal{U}_g \neq \emptyset$ tenemos que $C \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. Por lo que $\mathcal{U}_h$ y $\mathcal{L}$ son una separación de C.

Hasta aquí hemos visto que cualquier subconjunto conexo de $[X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$ se queda contenido en $\mathcal{U}_f$ para algún $f \in \mathcal{F}_n^m$.

Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ al ser X un continuo localmente conexo y U_j un abierto conexo en X, por el Lema 2.0.6 tenemos que U_j es arco conexo. Por el Lema 3.4.1, $\forall f \in \mathcal{F}_n^m$, $\mathcal{U}_f$ es conexo por trayectorias.

Podemos concluir que los conjuntos $\mathcal{U}_f$ con $f \in \mathcal{F}_n^m$ son las componentes conexas de $[X]^n \cap \langle U_1, ..., U_m\rangle_n$. □

Corolario 3.4.3. *Sean X un continuo localmente conexo, $n \in \mathbb{N}$ y U un subconjunto abierto conexo no vacío de X. Entonces $[X]^n \cap \langle U\rangle_n$ es conexo.*

Demostración. Por el Lema 3.4.2 tenemos que las componentes de $[X]^n \cap \langle U\rangle_n$ son los conjuntos $\{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}_n^1\}$, por el segundo inciso del Lema 3.3.3 sabemos que en este caso solamente existe una componente por lo que $[X]^n \cap \langle U\rangle_n$ resulta conexo. □

Capítulo 4

Grado de homogeneidad en m variedades

El objetivo de este capítulo es encontrar el grado de homogeneidad del producto simétrico $F_n(X)$ cuando X es una m variedad compacta, conexa y sin frontera. Primero daremos una definición de variedad y enunciaremos algunas propiedades que se cumplen en general, después trabajaremos cuatro secciones: la primera nos da lemas generales sobre homogeneidad en variedades y sus productos simétricos, la segunda corresponde al caso $m \geq 2$ y $n \geq 3$, la tercera corresponde al caso $m = 1$ y $n \geq 4$, la cuarta al caso $m \geq 3$ y $n = 2$ y en la quinta sección se hace una síntesis de los resultados obtenidos.

Se utilizarán todos los resultados del capítulo 3 durante las pruebas de este capítulo.

Una variedad topológica es un espacio que localmente se comporta similar al espacio $\mathbb{R}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ fijo.

Definiremos *variedad sin frontera* y *variedad con frontera* por separado. Primero necesitamos definir el espacio $\mathbb{R}^m_+ = \{(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq 0\}$ con la topología de subconjunto de $\mathbb{R}^m$ (Ver Figura 4.3). Este espacio nos esta permitiendo tener un 'borde' en una de las dimensiones.

Definición 4.0.1 (m variedad sin frontera)**.** *Un espacio topológico M es una m variedad sin frontera si:*

1. *Es Hausdorff y segundo numerable.*

2. *Para todo $p \in M$ existen U una vecindad abierta de p en M, V un abierto en $\mathbb{R}^m$ y $h : U \to V$ un homeomorfismo entre los abiertos. Es decir que todos sus puntos tienen una vecindad abierta homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.*

Ejemplos de una m variedad sin frontera son el intervalo abierto $(0, 1)$, $\mathbb{R}^m$, S^1, S^2 (Figura 4.1) y la superficie del toro.

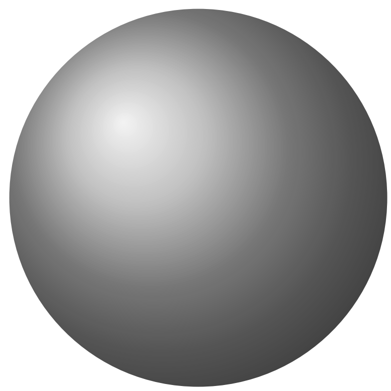

Figura 4.1: $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ (Superficie de la esfera) es variedad sin frontera

Definición 4.0.2 (m variedad con frontera)**.** *Un espacio topológico M es una m variedad con frontera si:*

1. *Es Hausdorff y segundo numerable.*
2. *Para todo $p \in M$ existen U una vecindad abierta de p en M, V un abierto en $\mathbb{R}^m_+$ y $h : U \to V$ un homeomorfismo entre los abiertos. Adicionalmente existe un punto $p \in M$ tal que el homeomorfismo $h : U \to V$ cumple que $h(p) = (0, x_2, ..., x_m)$.*

Ejemplos de una m variedad con frontera son las m celdas (Figura 4.2), el intervalo $[0, 1]$ y el mismo espacio $\mathbb{R}^m_+$ (Figura 4.3).

Las variedades compactas y conexas son continuos por lo que a menos que se indique lo contrario al decir *variedad* nos estaremos refiriendo justamente a una variedad compacta y conexa con o sin frontera.

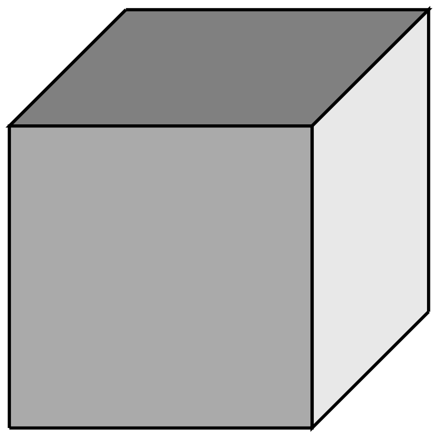

Figura 4.2: La 3 celda es variedad con frontera

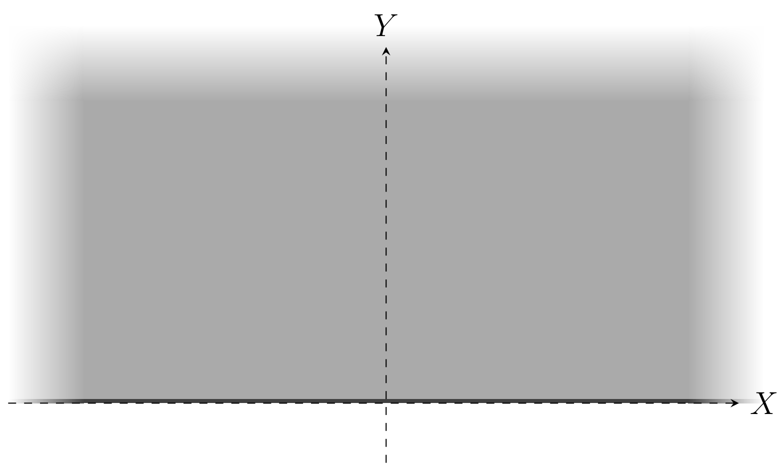

Figura 4.3: $\mathbb{R}^+$ es variedad con frontera

Definición 4.0.3 (Punto regular y punto frontera)**.** *Sea M una variedad con o sin frontera, un punto $p \in M$ es regular si existe U una vecindad abierta de p en M y existe V un abierto en $\mathbb{R}^m$ tales que U y V son homeomorfos, es decir si p tiene una vecindad homeomorfa al espacio $\mathbb{R}^m$. Un punto $p \in M$ es llamado punto frontera si no es regular.*

El siguiente lema nos será útil para encontrar vecindades adecuadas a lo largo de nuestras pruebas:

Lema 4.0.4. *Sea X una m variedad (con o sin frontera), entonces el conjunto $\{Int(M) : M$ es una m celda$\}$ es una base del espacio y cada uno de sus elementos es conexo.*

Demostración. Sea X una m variedad y $\beta = \{Int(M) : M$ es una m celda$\}$. Para mostrar que β es una base tomemos $x \in X$ y W un abierto con $x \in W$.

Si X es una m variedad sin frontera tenemos que existen U abierto con $x \in U$, V abierto en $\mathbb{R}^m$ y $h : U \to V$ homeomorfismo tal que $h(x) = \{x_1, ..., x_m\}$. Notemos que $W \cap U$ es un abierto con $x \in (W \cap U) \subseteq U$ así que $h[\,W \cap U]$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$ con $h(x) \in h[\,W \cap U]$; sea $\delta > 0$ tal que $\Pi_{i=1}^m[\,x_i - \delta, x_i + \delta] \subseteq h[\,W \cap U]$ y definamos $M = h^{-1}[\,\Pi_{i=1}^m[\,x_i - \delta, x_i + \delta]\,]$, tenemos que $Int(M) \subseteq M \subseteq W$. Como $h(x) \in \Pi_{i=1}^m(x_i - \delta, x_i + \delta)$ y este es el interior de $\Pi_{i=1}^m[\,x_i - \delta, x_i + \delta]$ tenemos que $x \in Int(M)$.

Al poder encontrar para cada $x \in X$ y W abierto una m celda M tal que $x \in int(M) \subseteq M \subseteq W$ hemos mostrado que β es una base de X.

También veamos que al ser h homeomorfismo podemos mandar continuamente el conjunto $\Pi_{i=1}^m(x_i - \delta, x_i + \delta)$ en $Int(M)$ por lo que en particular $Int(M)$ es conexo.

Si X es una m variedad con frontera y x es un punto regular, entonces podemos hacer exactamente lo mismo que en el párrafo anterior, en caso de que x sea un punto frontera podemos hacer un procedimiento similar.

Existen U abierto con $x \in U$, V abierto en $\mathbb{R}_+^m$ y $h : U \to V$ un homeomorfismo tal que $h(x) = \{0, x_2, ..., x_m\}$. Notemos que $W \cap U$ es un abierto con $x \in (W \cap U) \subseteq U$ así que $h[\,W \cap U]$ es un abierto de $\mathbb{R}_+^m$ con $h(x) \in h[\,W \cap U]$; sea $\delta > 0$ tal que $[\,0, \delta] \times \Pi_{i=2}^m[\,x_i - \delta, x_i + \delta] \subseteq h[\,W \cap U]$ y definamos $M = h^{-1}[\,[\,0, \delta] \times \Pi_{i=2}^m[\,x_i - \delta, x_i + \delta]\,]$, tenemos que $Int(M) \subseteq M \subseteq W$. Como $h(x) \in [\,0, \delta) \times \Pi_{i=2}^m(x_i - \delta, x_i + \delta)$ y este es el interior de $[\,0, \delta] \times \Pi_{i=2}^m[\,x_i - \delta, x_i + \delta]$ en $\mathbb{R}_+^m$ tenemos que $x \in Int(M)$.

Con esto hemos mostrado que en este caso β también es una base de X.

Finalmente veamos que como h es homeomorfismo podemos mandar continuamente el conjunto $[\,0, \delta) \times \Pi_{i=2}^m(x_i - \delta, x_i + \delta)$ en $Int(M)$ por lo que también $Int(M)$ es conexo. $\square$

4.1. Primeros resultados sobre órbitas

Un resultado conocido respecto la homogeneidad de las variedades sin frontera es el siguiente, el cual no se probará en este trabajo pues por sí mismo un resultado fuerte.

Lema 4.1.1. *Sea X una variedad sin frontera $k \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $A, B \in [\,X]^k$ existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h[\,A] = B$.*

Con esto estamos ya en posibilidad de decir algo sobre el grado de homogeneidad del producto simétrico de una m variedad sin frontera.

Lema 4.1.2. *Sea X una variedad sin frontera y conexa. Entonces tenemos que el número de órbitas de $F_n(X)$ es a lo más n, es decir, $hd(F_n(X)) \leq n$.*

Demostración. Veamos que si $k \leq n$ y $A \in [\,X]^k$, entonces la órbita de A contiene a $[\,X]^k$. Si $B \in [\,X]^k$, entonces por el Lema 4.1.1 podemos encontrar $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h[\,A] = B$; consideremos la función inducida $H : F_n(X) \to F_n(X)$ definida como $H(C) = h[\,C]$. Por el lemma 2.0.19 tenemos que H es un homeomorfismo del espacio $F_n(X)$ en él mismo y $H(A) = B$. Podemos concluir que B está en la órbita de A. Al ser válido esto para cada elemento en $[\,X]^k$ tenemos $[\,X]^k \subseteq orb(A)$.

Por el Lema 2.0.12 sabemos que $F_n(X) = [\,X]^1 \cup ... \cup [\,X]^n$ donde los conjuntos $[\,X]^1, ..., [\,X]^n$ son ajenos dos a dos; por lo anterior existe a lo más una órbita distinta por cada conjunto $[\,X]^k$ así que pueden haber a lo más n órbitas distintas y por tanto $hd(F_n(X)) \leq n$. □

Los siguientes resultados nos ayudaran a encontrar la cota inferior que nos falta para el número de órbitas en $F_n(X)$.

Definición 4.1.3. *Sea X una m variedad con o sin frontera y $F_n(X)$ su n-ésimo producto. Definimos:*

$$D_n(X) = \{A \in F_n(X) : \\ A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ que es una } nm \text{ celda}\}$$

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) \setminus D_n(X) : \\ A \text{ tiene una base local } \beta \text{ tal que } \forall\, U \in \beta,\ U \cap D_n(X) \text{ es conexo}\}$$

$D_n(X)$ y $\mathcal{E}_n(X)$ al estar definidos en términos topológicos permanecen invariantes bajo homeomorfismos de $F_n(X)$. A continuación mostraremos que si X es una m variedad con o sin frontera, entonces cualquier conjunto de exactamente n elementos tiene una vecindad en $F_n(X)$ que es una nm celda, es decir siempre ocurre $[\,X\,]^n \subseteq D_n(X)$; es importante notar que esta afirmación se demuestra sin restricción en m o en n.

Lema 4.1.4. *Sea X una m variedad con o sin frontera y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m, n \geq 1$. Entonces $[\,X\,]^n \subseteq D_n(X)$.*

Demostración. Sea $A = \{x_1, ..., x_n\} \in [\,X\,]^n$, para mostrar que pertenece al conjunto $D_n(X)$ construiremos una vecindad de A en $F_n(X)$ y mostraremos que es homeomorfa a una nm celda.

Como X es una m variedad por el Lema 4.0.4 para cada $i \in \{1, ..., n\}$ podemos tomar $M_i \subseteq X$ una vecindad de x_i que sea una m celda. Por ser X métrico podemos pedir que los conjuntos $M_1, ..., M_n$ sean ajenos dos a dos. El conjunto $\langle M_1, ..., M_n \rangle_n$ es una vecindad de A pues por construcción, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, M_i es una vecindad de x_i.

Por el Lema 3.1.4 el conjunto $\langle M_1, ..., M_n \rangle_n$ es homeomorfo a $\Pi_{i=1}^n M_i$; a su vez, el espacio producto $\Pi_{i=1}^n M_i$ es homeomorfo a una nm celda por el Lema 2.0.3. Esto nos muestra que $\langle M_1, ..., M_n \rangle_n$ es homeomorfa a una nm celda y por definición $A \in D_n(X)$, así $[\,X\,]^n \subseteq D_n(X)$. $\square$

Ahora veremos que si tenemos una m variedad que cumple $[\,X\,]^n = D_n(X)$, entonces vamos a poder demostrar que $\mathcal{E}_n(X) = F_1(X)$ con lo que estaríamos logrando que $F_1(X)$ sea un conjunto invariante bajo homeomorfismos.

Lema 4.1.5. *Sea X una m variedad con o sin frontera tal que $[\,X\,]^n = D_n(X)$, $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ y $n \geq 3$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = F_1(X)$.*

Demostración. Mostraremos $\mathcal{E}_n(X) = F_1(X)$ por doble contención.

$\supseteq$) Si $\{x\} \in F_1(X)$, entonces consideremos el conjunto:

$$\hat{\beta}_{\{x\}} = \{\langle Int(M) \rangle_n : M \text{ es una } m \text{ celda y } M \text{ es una vecindad de } x\}$$

Basta mostrar que $\hat{\beta}_{\{x\}}$ es una base local de $\{x\}$ en $F_1(X)$ que cumple, $\forall\, U \in \hat{\beta}_{\{x\}},\ U \cap D_n(X)$ es conexo.

Primero observemos que al ser X una m variedad por el Lema 4.0.4 el conjunto $\{Int(M) : M$ es una m celda y M es una vecindad de $x\}$ es una base local de x en X. Por el Lema 2.0.13 sabemos que $\hat{\beta}_{\{x\}} = \{\langle Int(M)\rangle :$ M es una m celda y M es una vecindad de $x\}$ es una base de $\{x\}$ en $F_n(X)$.

Tomemos M una vecindad de x que sea una m celda. Probemos ahora que $\langle Int(M)\rangle_n \cap D_n(X)$ es conexo.

Por hipótesis $D_n(X) = [\,X]^n$ así que $\langle Int(M)\rangle_n \cap D_n(X) = \langle Int(M)\rangle_n \cap [\,X]^n$. Por el Lema 4.0.4 sabemos que $Int(M)$ es conexo, así que por el Corolario 3.4.3 podemos concluir que $\langle Int(M)\rangle_n \cap [\,X]^n$ es conexo también.

De lo anterior tenemos que $\{x\} \in \mathcal{E}_n(X)$ por lo que podemos afirmar que $F_1(X) \subseteq \mathcal{E}_n(X)$.

$\subseteq$) Por definición tenemos que $\mathcal{E}_n(X) \subseteq F_n(X)$ bastará que probemos que $\mathcal{E}_n(X) \cap (F_n(X) \setminus F_1(X)) = \emptyset$. Supongamos que $A \in \mathcal{E}_n(X) \cap (F_n(X) \setminus F_1(X))$, por definición de $\mathcal{E}_n(X)$ sabemos $A \notin D_n(X)$ y como por hipótesis $D_n(X) = [\,X]^n$ tenemos que $A \notin [\,X]^n$. Entonces $A = \{a_1, ..., a_r\}$ con $1 < r < n$.

Sean $U_1, ..., U_r$ abiertos ajenos dos a dos y no vacíos tales que, $\forall i \in \{1, ..., r\}$, $a_i \in U_i$, tenemos que $A \in \langle U_1, ..., U_r\rangle_n$; si β es una base local en A, entonces existe un elemento $\mathcal{U} \in \beta$ con $A \in \mathcal{U} \subseteq \langle U_1, ..., U_r\rangle_n$, por el inciso b) del Lema 3.3.4 sabemos que $\mathcal{U} \cap [\,X]^n$ es disconexo. Como $D_n(X) = [\,X]^n$ tenemos que $\mathcal{U} \cap D_n(X)$ es disconexo. Hasta aquí tenemos que para cualquier base β podemos encontrar un elemento $\mathcal{U} \in \beta$ tal que $\mathcal{U} \cap D_n(X)$ es disconexo, lo cual es una contradicción al supuesto de que $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Por tal $A \in F_1(X)$.

Entonces tenemos que $\mathcal{E}_n(X) \subseteq F_1(X)$ y finalmente podemos concluir que $\mathcal{E}_n(X) = F_1(X)$. $\square$

4.2. El caso $m \geq 2$ y $n \geq 3$

El objetivo de esta sección es demostrar que los n-productos simétricos de las m variedades sin frontera tienen grado de homogeneidad n cuando

$m \geq 2$ y $n \geq 3$.

Por el Lema 4.1.2 sabemos que los n-productos simétricos de las m variedades sin frontera tienen grado de homogeneidad menor o igual que n, por lo que bastará mostrar la otra desigualdad.

La estrategia es garantizar que si X es una m variedad sin frontera y $h \in \mathcal{H}(F_n(X))$, entonces dado un $k \in \{1, ..., n\}$ el conjunto $[\,X]^k$ permanece invariante bajo el homeomorfismo h.

Utilizaremos los siguientes resultados en nuestras pruebas:

Lema 4.2.1. *Todo subespacio de un espacio de dimensión menor o igual que n tiene dimensión menor o igual que n [12, Teorema III.1, pág. 26].*

Lema 4.2.2. $[\,0,1]^n$ *no puede ser desconectado por un subconjunto de dimensión menor o igual a $n-2$ [12, Corolario 2 del Teorema IV 4, pág. 48].*

Por el Lema 4.1.4 sabemos que $[\,X]^n \subseteq D_n(X)$, ahora nos gustaría mostrar que también ocurre $D_n(X) \subseteq [\,X]^n$.

Lema 4.2.3. *Sean X una m variedad con o sin frontera, $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ y $n \geq 3$. Entonces $D_n(X) \subseteq [\,X]^n$.*

Demostración. Sea $A = \{a_1, ..., a_r\} \in D_n(X)$. Supongamos $r \leq n-1$, a partir de esta suposición llegaremos a una contradicción.

Sea $\mathcal{M}$ una vecindad de A en $F_n(X)$ que sea una nm celda; podemos encontrar m celdas ajenas $M_1, ..., M_{r-1}$ y M'_r tales que, $\forall i \in \{1, ..., r-1\}$, M_i sea vecindad de a_i, M'_r sea vecindad de a_r y $\langle M_1, ..., M_{r-1}, M'_r\rangle_n \subseteq \mathcal{M}$, vamos ahora a tomar elementos distintos $a_{r+1}, ..., a_{n-1} \in M'_r \setminus \{a_r\}$ y también tomemos m celdas ajenas $M_r, ..., M_{n-1} \subseteq M'_r$ tales que, $\forall i \in \{r, ..., n-1\}$, M_i sea vecindad de a_i. Si consideramos $A' = \{a_1, ..., a_{n-1}\}$, entonces $\langle M_1, ..., M_{n-1}\rangle_n$ es una vecindad de A' pues, $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$, M_i es vecindad de a_i y por construcción $\langle M_1, ..., M_{n-1}\rangle_n \subseteq \mathcal{M}$ donde $M_1, ..., M_{n-1}$ son m celdas ajenas dos a dos.

Al ser $\mathcal{M}$ una nm celda en torno a A' podemos encontrar otra nm celda R que cumpla $A' \in int_{F_n(X)}(R) \subseteq R \subseteq \langle Int(M_1), ..., Int(M_{n-1})\rangle_n$.

Pensemos en el conjunto $S = R \cap \langle M_1, ..., M_{n-1}\rangle_{n-1}$, notando que el segundo conjunto intersecado se encuentra en $F_{n-1}(X)$.

Veamos que S tiene una dimensión menor o igual a $nm - 2$.

Sabemos por el Lema 3.1.4 que $\langle M_1, ..., M_{n-1}\rangle_{n-1}$ es homeomorfo a $\Pi_{i=1}^{n-1} M_i$ que es una $(n-1)m$ celda, así que aplicando el Lema 4.2.1 tenemos que $\langle M_1, ..., M_{n-1}\rangle_{n-1} \cap R$ tiene dimensión menor o igual a $(n-1)m$, pues es subespacio de una $(n-1)m$ celda; como por hipótesis $m \geq 2$ tenemos que $(n-1)m \leq nm - 2$. En conclusión tenemos que el conjunto S tiene una dimensión menor o igual a $nm - 2$.

Veamos ahora que $R \setminus S$ es un conjunto disconexo.

Notemos que $R \setminus S = R \setminus (R \cap \langle M_1, ..., M_{n-1}\rangle_{n-1}) = (R \cap \langle M_1, ..., M_{n-1}\rangle_n) \setminus (R \cap \langle M_1, ..., M_{n-1}\rangle_{n-1}) = R \cap [\,X\,]^n$ pues $R \subseteq \langle M_1, ..., M_{n-1}\rangle_n$ por construcción. Tenemos que $A' \in int_{F_n(X)}(R) \subseteq R \subseteq \langle Int(M_1), ..., Int(M_{n-1})\rangle_n$ así que por el Lema 3.3.4 $R \cap [\,X\,]^n$ es disconexo, por lo que que $R \setminus S$ es disconexo.

Hasta aquí tenemos que R es un conjunto conexo de dimensión nm por ser una nm celda, que S es un subconjunto de R con dimensión a lo más $nm-2$ y que $R \setminus S$ resulta disconexo; estos hechos nos llevan a la contradicción pues el Lema 4.2.2 nos dice que una k celda no puede ser desconectada por un subconjunto que sea de dimensión menor o igual a $k-2$.

La contradicción viene de suponer que $A \in D_n(X)$ y A tiene menos de n elementos por lo que $D_n(X) \subseteq [\,X\,]^n$. □

Notemos que en el Lema 4.2.3 utiliza fuertemente que $m \geq 2$ y $n \geq 3$; el hecho de que $m \geq 2$ se utilizó para garantizar $(n-1)m \leq nm - 2$ con lo que obtenemos que S tiene una dimensión menor o igual a $nm-2$ y la suposición de $n \geq 3$ se usa para mostrar que $R \setminus S$ es disconexo; estos dos hechos son necesarios para llegar a nuestra contradicción.

Lema 4.2.4. *Sean X una m variedad con o sin frontera y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ y $n \geq 3$. Tenemos que $[\,X\,]^n = D_n(X)$.*

Demostración. Por el Lema 4.1.4 tenemos que $[\,X\,]^n \subseteq D_n(X)$ y por el Lema 4.2.3 $D_n(X) \subseteq [\,X\,]^n$ así que $[\,X\,]^n = D_n(X)$. □

Habiendo mostrado el lema anterior, podemos aplicar el Lema 4.1.5 y concluir que $F_1(X)$ es invariante bajo homeomorfismos; más aún podemos concluir el siguiente resultado.

Lema 4.2.5. *Sean X una m variedad con o sin frontera, $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$, $n \geq 3$ y $h \in \mathcal{H}(F_n(X))$, entonces para cualquier k con $1 \leq k \leq n$ tenemos que $h[\,[X]^k] = [X]^k$.*

Demostración. Sea X una m variedad con o sin frontera, $m \geq 2$, $n \geq 3$ y $h \in \mathcal{H}(F_n(X))$. Primero haremos con un argumento inductivo para los conjuntos $[X]^n$, $[X]^{n-1}$, ... , $[X]^3$ de la siguiente manera:

Por el Lema 4.2.4 tenemos que $[X]^n = D_n(X)$, por estar definido $D_n(X)$ en función de propiedades topológicas sabemos que dicho conjunto es invariante bajo homeomorfismos por lo cual $h[D_n(X)] = D_n(X)$, es decir $h[\,[X]^n] = [X]^n$. Más aún, veamos también que $h[F_{n-1}(X)] = F_{n-1}(X)$, sabemos por el Lema 2.0.12 que $F_n(X) = [X]^1 \cup ... \cup [X]^n$ donde los uniendos son ajenos dos a dos, usando que $h[\,[X]^n] = [X]^n$ podemos afirmar $h[\,[X]^1 \cup ... \cup [X]^{n-1}] = [X]^1 \cup ... \cup [X]^{n-1}$ o dicho de otra manera $h[F_{n-1}(X)] = F_{n-1}(X)$ como buscábamos.

Por lo anterior tenemos que la restricción de h en $F_{n-1}(X)$ es un homeomorfismo y podemos repetir el argumento en el conjunto $[X]^{n-1}$, así obtenemos sucesivamente

$$\begin{aligned} &h[\,[X]^n] = [X]^n && \text{y} \quad h[F_{n-1}(X)] = F_{n-1}(X), \\ &h[\,[X]^{n-1}] = [X]^{n-1} && \text{y} \quad h[F_{n-2}(X)] = F_{n-2}(X), \\ &... \\ &h[\,[X]^3] = [X]^3 && \text{y} \quad h[F_2(X)] = F_2(X). \end{aligned}$$

el último paso que podemos hacer así es en $F_3(X)$ pues necesitamos que $k \geq 3$ para aplicar el Lema 4.2.4.

Por otro lado, el Lema 4.1.5 nos dice que $\mathcal{E}_n(X) = F_1(X)$ y al ser $\mathcal{E}_n(X)$ también un conjunto definido en término de propiedades topológicas tenemos que $h[\mathcal{E}_n(X)] = \mathcal{E}_n(X)$ por lo cual $h[F_1(X)] = F_1(X)$ o dicho de otra manera $h[\,[X]^1] = [X]^1$. Haciendo uso de todo lo anterior y el Lema 2.0.12 también obtenemos que $h[\,[X]^2] = h[F_2(X) \setminus F_1(X)] = F_2(X) \setminus F_1(X) = [X]^2$.

En resumen tenemos que para cualquier k con $1 \leq k \leq n$, $h[\,[X]^k] = [X]^k$ como buscábamos probar. $\square$

Finalmente podemos concluir cuál es el número de órbitas en el caso en que $m \geq 2$ y $n \geq 3$.

Teorema 4.2.6. *Sean X una m variedad sin frontera y $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ y $n \geq 3$, entonces $hd(F_n(X)) = n$. Además, dichas órbitas son los conjuntos $[\,X]^k$ con $1 \leq k \leq n$.*

Demostración. Por el Lema 4.2.5 si $h \in \mathcal{H}(F_n(X))$, entonces $h[\,[\,X]^k] = [\,X]^k$ para $1 \leq k \leq n$, esto nos dice que en $F_n(X)$ existen al menos n distintas órbitas a saber una por cada uno de los conjuntos $[\,X]^k$.

Por otro lado del Lema 4.1.2 tenemos que $hd(F_n(X)) \leq n$ por lo que podemos concluir $hd(F_n(X)) = n$.

Como $h[\,[\,X]^k] = [\,X]^k$ para $1 \leq k \leq n$, dichos conjuntos deben de ser exactamente las n órbitas en el espacio $F_n(X)$. □

4.3. Dos resultados previos

En esta sección mostramos dos resultados que se utilizarán en las pruebas de la sección inmediata siguiente.

La Definición 2.0.4 nos dice que es una n-sombrilla. A continuación veremos que una n-sombrilla no puede encajarse en el espacio $\mathbb{R}^n$, este resultado depende del teorema de invarianza de dominio que enunciamos a continuación:

Teorema 4.3.1 (De invarianza de dominio)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y h un homeomorfismo de A en $h[\,A] \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $x \in Int(A)$, entonces $h(x) \in Int(h[\,A]\,)$ [12, Teorema VI 9, pág. 96].*

Lema 4.3.2. *Sea X una n-sombrilla, entonces X no puede encajarse en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Vamos a considerar dos casos:

$n = 1$). Buscamos ver que una 1-sombrilla no se puede encajar en $\mathbb{R}$. Observemos que por definición una 1-sombrilla es un triodo simple.

Procederemos por contradicción. Supongamos que T es un triodo simple con vértice p y $f : T \to \mathbb{R}$ es un encaje.

La imagen $f[T]$ es un subcontinuo no degenerado de $\mathbb{R}$ y así un intervalo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $f[T] = [0,1]$. Sabemos que $T \setminus \{p\}$ tiene exactamente 3 componentes por lo que $f[T] \setminus \{f(p)\}$ también tiene 3 componentes; sin embargo esto es imposible pues si al intervalo le sustraemos un solo punto, entonces podemos desconectarlo en a lo más dos componentes.

Obtenemos de dicha contradicción que si $n = 1$, entonces una n-sombrilla no puede encajarse en $\mathbb{R}$.

$n \geq 2$). Consideremos $\alpha = \{(0, ..., 0, t) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $N = [-1,1]^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y llamemos $\hat{0} = (0, ..., 0, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ que es justamente la intersección de N con α. Sea $Y = N \cup \alpha$ y supongamos que $f : Y \to \mathbb{R}^n$ es un encaje, a partir de esto llegaremos a una contradicción.

Sea $U = (-1,1)^n \times \{0\} \subseteq N$, sabemos que este conjunto es homeomorfo a $B = (-1,1)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ bajo la función $g : B \to U$ dada por $g((x_1, ..., x_n)) = (x_1, ..., x_n, 0)$, y que B es abierto en $\mathbb{R}^n$. Como $f[U] \subseteq \mathbb{R}^n$ tenemos que $f \circ g : B \to f[U]$ es un homeomorfismo entre B y $f[U]$.

Por el Teorema de invarianza de dominio 4.3.1 tenemos que como el punto $(0, ..., 0) \in Int(B)$, entonces $f \circ g((0, ..., 0)) = f(\hat{0}) \in Int(f[U])$.

Tenemos que $f(\hat{0}) \in Int(f[U]) \subseteq Int(f[Y])$ por lo que podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(\hat{0})) \subseteq f[Y]$. Observemos que $B_\varepsilon(f(\hat{0}))$ es homeomorfo al espacio $\mathbb{R}^n$ así que por el Lema 4.2.2 tenemos que $B_\varepsilon(f(\hat{0})) \setminus \{f(\hat{0})\}$ es conexo.

Observemos que $Y \setminus \{\hat{0}\}$ es disconexo, por lo que $f[Y] \setminus \{f(\hat{0})\}$ es disconexo.

Veamos que $f[Y]$ es disconexo, lo que nos llevará a una contradicción.

Tomemos dos conjuntos K, H que separan a $f[Y] \setminus \{f(\hat{0})\}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B_\varepsilon(f(\hat{0})) \setminus \{f(\hat{0})\} \subseteq K$ pues es un conjunto conexo. Definamos $K' = K \cup \{f(\hat{0})\}$ y $H' = H \setminus \{f(\hat{0})\}$. Probaremos que K', H' son una separación de $f[Y]$. Por la definición es claro que $f[Y] \subseteq K' \cup H'$ así que nos basta ver que dichos conjuntos son separados.

Primero observemos que como $H' = H \setminus \{f(\hat{0})\}$ y $B_\varepsilon(f(\hat{0})) \setminus \{f(\hat{0})\} \subseteq K$, entonces $H' \cap B_\varepsilon(f(\hat{0})) = \emptyset$; por lo que $f(\hat{0}) \notin \overline{H'}$. De donde podemos concluir que $K' \cap \overline{H'} = (K \cup \{f(\hat{0})\}) \cap \overline{H'} = K \cap \overline{H'} = \emptyset$.

Veamos también que $\overline{K'} \cap H' = \overline{K \cup \{f(\hat{0})\}} \cap H' = (\overline{K} \cup \{f(\hat{0})\}) \cap H' = \overline{K} \cap H' = \emptyset$. Con esto podemos concluir que K', H' son una separación de $f[Y]$ y por lo tanto $f[Y]$ es disconexo

Como $f[Y]$ es una n-sombrilla Y lo anterior es una contradicción.

La contradicción vino de suponer que existía un encaje por lo que podemos afirmar que si $n \geq 2$, entonces una n-sombrilla no puede encajarse en $\mathbb{R}^n$. □

A continuación escribiremos un lema que nos asegura la existencia de un homeomorfismo entre el espacio $[0,1]^2$ y el producto simétrico de un arco en las condiciones que necesitamos. Dicho resultado se utilizará en el Lema 4.4.3.

Lema 4.3.3. *Sea I un intervalo cerrado y $p \in Int(I)$, entonces existe $f : [0,1]^2 \to F_2(I)$ homeomorfismo tal que $f[[0,1] \times \{0\}] = F_1(I)$ y $f((\frac{1}{2}, 0)) = \{p\}$.*

Demostración. Sea I un intervalo cerrado y p un punto en su interior. Podemos considerar $h : [0,1] \to I$ un homeomorfismo que cumpla $h(\frac{1}{2}) = p$.

Usando el Lema 2.0.19 construyamos $H : F_2([0,1]) \to F_2(I)$ definido $H(A) = h[A]$ el cual es un homeomorfismo.

Consideremos ahora $\Delta = \{(a,b) : 0 \leq a \leq 1,\ a \leq b \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$; la función $F : \Delta \to F_2([0,1])$ definida como $f((a,b)) = \{a,b\}$ es un homeomorfismo entre dichos espacios [6, 8. Teorema 6, pág. 880].

A continuación escribiremos un homeomorfismo que manda $[0,1]^2$ en la región triangular Δ de forma que el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ se evalúa en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Sea $g : [0,1]^2 \to \Delta$ definida como (Ver Figura 4.4):

$$g(x,y) = \begin{cases} (x, x+y) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1-y}{2}, \\ (\frac{2x-y+1}{4}, \frac{y+1}{2}) & \text{si } \frac{1-y}{2} \leq x \leq \frac{1+y}{2}, \\ (x - \frac{y}{2}, x) & \text{si } \frac{1+y}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

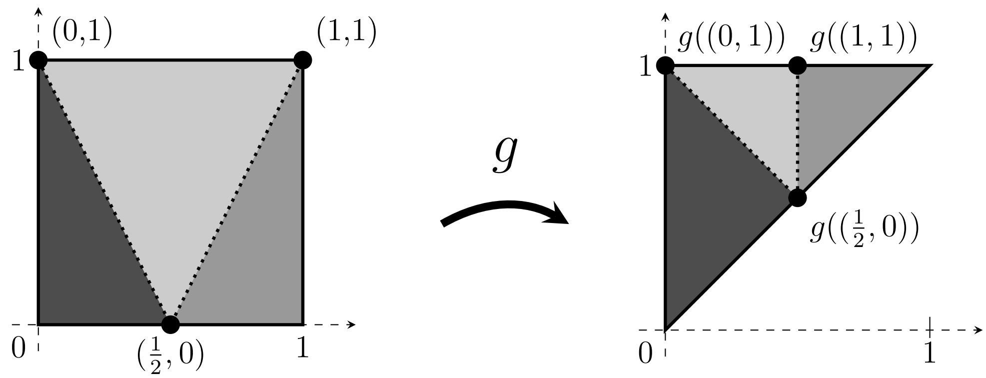

Figura 4.4: Ilustración de g

Observemos que cada parte de esta función es una transformación lineal seguida de una traslación por lo que en particular resulta continua, las intersecciones de las regiones donde se define la función son dos líneas rectas cerradas por lo que por el Lema de pegado 2.0.18 tenemos que la función es continua. Por la misma observación cada parte definida de la función es biyectiva y como las regiones se mapean a regiones triangulares ajenas salvo su borde la función completa es biyectiva.

Finalmente por el Lema 2.0.17 por ser g una función continua y biyectiva entre continuos g es un homeomorfismo.

Con las funciones que tenemos estamos en posición de definir la función que estamos buscando, definamos $f : [0,1]^2 \to F_2(I)$ como $f = H \circ F \circ g$, la cual es un homeomorfismo pues cada una de las funciones que compusimos es un homeomorfismo.

Sea $(t,0) \in [0,1] \times \{0\}$, si $t \leq \frac{1}{2}$, entonces $g((t,0)) = (t, t+0)$ y si $t \geq \frac{1}{2}$, entonces $g((t,0)) = (t-0, t)$; por lo anterior si $(t,0) \in [0,1] \times \{0\}$, entonces $f((t,0)) = H(F(g((t,0)))) = H(F((t,t))) = H(\{t\}) = h[\{t\}] = \{r\}$ donde $r \in I$ por lo que justamente $f((t,0)) \in F_1(I)$.

En particular $f((\frac{1}{2},0)) = H(F(g((\frac{1}{2},0)))) = H(F((\frac{1}{2},\frac{1}{2}))) = H(\{\frac{1}{2}\}) = h[\{\frac{1}{2}\}] = \{p\}$ como buscábamos. $\square$

4.4. El caso $m = 1$ y $n \geq 4$

De forma similar a lo realizado en la sección anterior buscamos concluir que en el caso de las variedades de dimensión 1 el producto simétrico $F_n(X)$ tiene exactamente n órbitas cuando $n \geq 4$. El camino que seguiremos será similar pues vamos a probar que un homeomorfismo en $F_n(X)$ actúa siempre de forma que los conjuntos $[X]^k$ son invariantes.

Las 1 variedades están bien categorizadas:

Lema 4.4.1. *Cualquier* 1 *variedad compacta y conexa es un arco o una curva cerrada simple [4, 17, pág. 140].*

Dado que por definición un arco es una variedad con frontera, podemos concluir el siguiente resultado:

Lema 4.4.2. *Cualquier* 1 *variedad sin frontera compacta y conexa es una curva cerrada simple.*

Del Lema 4.1.4 tenemos que si X es una 1 variedad y $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que $[X]^n \subseteq D_n(X)$. Para concluir la igualdad probaremos el Lema 4.4.3 de esta sección utilizando el mismo mecanismo que se empleó en [2, Secciones 3, 4 y 5, págs. 1578-1582] para mostrar un resultado similar para las gráficas finitas.

Lema 4.4.3. *Sean X una 1 variedad con o sin frontera, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$ y $A \in F_{n-1}(X)$, entonces ninguna vecindad de A en $F_n(X)$ puede encajarse en $\mathbb{R}^n$. En particular $F_{n-1}(X) \cap D_n(X) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una vecindad de A en $F_n(X)$, vamos a mostrar que dentro de $\mathcal{U}$ siempre podemos encontrar una n-sombrilla y así por el Lema 4.3.2 podemos concluir que $\mathcal{U}$ no se puede encajar en $\mathbb{R}^n$

Escribamos $A = \{a_1, ..., a_r\}$ donde $r \leq n - 1$; podemos encontrar conjuntos abiertos, ajenos dos a dos y conexos $U_1, ..., U_r$ que cumplan que, $\forall i \in \{1, ..., r\}$, $a_i \in U_i$ y $\langle U_1, ..., U_r \rangle_n \subseteq \mathcal{U}$. Por ser X una *1* variedad compacta y conexa sabemos por el Lema 4.4.1 que es un arco o una curva cerrada simple así que en cualquiera de los casos tenemos que cada U_i es homeomorfo a $(0, 1)$ o a $[0, 1)$.

Para cada $i \in \{1, ..., r\}$ elijamos un intervalo cerrado J_i contenido en U_i, para cada $i \in \{1, ..., r-1\}$ elijamos un punto $p_i \in int(J_i)$ y en el intervalo J_r elijamos primero intervalos cerrados ajenos dos a dos $I_r, ..., I_{n-1}$ y luego puntos $p_i \in int(I_i)$. Vamos a renombrar los intervalos J_i como I_i cuando $i \in \{1, ..., r-1\}$.

Entonces tenemos intervalos $I_1, ..., I_{n-1}$ todos homeomorfos a $[\,0, 1]$, ajenos dos a dos, tales que $\forall i \in \{1, ..., r-1\}$, $I_i \subseteq U_i$ y $\forall i \in \{r, ..., n-1\}$, $I_i \subseteq U_n$ y que cumplen $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$, $p_i \in Int(I_i)$.

De la construcción podemos concluir que $\{p_1, ..., p_{n-1}\} \in \langle I_1, ..., I_{n-1}\rangle_n \subseteq \mathcal{U}$.

Por el resultado de 4.3.3 para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$ sea $f_i : [\,0, 1]^2 \to F_2(I_i)$ homeomorfismo tal que $f_i[\,[\,0, 1] \times \{0\}] = F_1(I_i)$ y $f_i((\frac{1}{2}, 0)) = \{p_i\}$. Definamos también para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$, $\alpha_i : [\,0, 1] \to F_1(I_i)$ de forma que $\alpha_i(t) = f_i(t, 0)$ y observemos que cada α_i es un homeomorfismo entre el espacio $[\,0, 1]$ y $F_1(X_i)$ y que $\alpha_i(\frac{1}{2}) = \{p_i\}$.

Vamos a definir ahora una función que nos permitirá encontrar una n celda dentro de $\mathcal{U}$. Sea $\varphi : [\,0, 1]^{n-1} \times [\,-1, 1] \to \mathcal{U}$ definida como:

$$\varphi(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} f_1(t_1, t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup ... \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) & \text{si } \; 0 \leq t_n \leq 1, \\ \alpha_1(t_1) \cup f_2(t_2, -t_n) \cup ... \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) & \text{si } \; -1 \leq t_n \leq 0. \end{cases}$$

Primero notemos que para $0 \leq t_n \leq 1$ nuestra función manda el elemento $(t_1, ..., t_n)$ en un conjunto con uno o dos elementos en I_1 y exactamente un elemento en $I_2, I_3, ..., I_{n-1}$ y en caso de que $-1 \leq t_n \leq 0$ lo manda a un conjunto con uno o dos elementos en I_2 y exactamente un elemento en $I_1, I_3, ..., I_{n-1}$. Por ser los conjuntos $I_1, ..., I_{n-1}$ ajenos dos a dos la valuación de cualquier elemento de nuestro dominio es un conjunto con $n-1$ o n elementos y de hecho $\varphi((t_1, ..., t_n)) \in \langle I_1, ..., I_{n-1}\rangle_n \subseteq \mathcal{U}$.

En el caso de que $t_n = 0$ la función toma como valor $f_1(t_1, 0) \cup \alpha_2(t_2) \cup ... \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup ... \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1})$ por un lado y $\alpha_1(t_1) \cup f_2(t_2, 0) \cup ... \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2) \cup ... \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1})$ por el otro, por lo que la función está bien definida.

Por el Teorema 3.1.1 inciso *a)* tenemos que cada una de las partes de nuestra función es continua, como dichas partes coinciden en el conjunto cerrado $[0,1]^{n-1} \times \{0\}$ por el Lema de pegado 2.0.18 la función φ es continua.

Observemos que si $i \in \{1, ..., n-1\}$, entonces $\bigcup F_2(I_i) = \bigcup([I_i]^1 \cup [I_i]^2) = I_i$.

Como cada función f_i es un homeomorfismo en particular todas son funciones inyectivas; además, los conjuntos $I_1, ..., I_{n-1}$ son ajenos dos a dos así que por el Teorema 3.1.1 inciso *b)* tenemos que φ es una función inyectiva.

Podemos afirmar que φ es una función continua y biyectiva en su imagen por lo que por el Lema 2.0.17 φ es un encaje; su imagen es una n celda en $\mathcal{U} \subseteq F_n(X)$, llamemos $\mathcal{C} = Img(\varphi)$ a esta n celda.

Podemos pensar en la función $\alpha : [0,1] \to F_n(X)$ definida como:

$$\alpha(t) = f_3(\tfrac{1}{2}, t) \cup \{p_1, p_2, p_4, ..., p_{n-1}\}$$

Dicha función define un arco en el espacio $F_n(X)$.

Si consideramos $\alpha' : \{\frac{1}{2}\} \times [0,1] \to F_n(X)$ definida como $\alpha'(\frac{1}{2}, t) = f_3(\frac{1}{2}, t) \cup \{p_1, p_2, p_4, ..., p_{n-1}\}$, entonces por el Lema 3.1.3 aplicado a $f_3 \restriction_{\{\frac{1}{2}\} \times [0,1]}$ y el conjunto $\{p_1, p_2, p_4, ..., p_{n-1}\}$ sabemos que α' es una función continua e inyectiva. Para ajustar el dominio al conjunto $[0,1]$ podemos componer con el homeomorfismo $g : [0,1] \to \{\frac{1}{2}\} \times [0,1]$ definido como $g(t) = (\frac{1}{2}, t)$. Tenemos que $\alpha = \alpha' \circ g$ y por lo tanto α es una función continua e inyectiva desde el continuo $[0,1]$ al espacio $F_n(X)$ que es Hausdorff; por el Lema 2.0.17 α es un homeomorfismo en su imagen.

En conclusión podemos afirmar que α define un arco en el espacio $F_n(X)$ y más aún que si $\mathcal{A} = Img(\alpha)$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$.

Veamos que $\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \{\{p_1, ..., p_{n-1}\}\}$.

Tenemos que

$$\alpha(0) = f_3(\tfrac{1}{2}, 0) \cup \{p_1, p_2, p_4, ..., p_{n-1}\} = \{p_3\} \cup \{p_1, p_2, p_4, ..., p_{n-1}\} = \{p_1, ..., p_{n-1}\}$$

ahora bien si $t > 0$, entonces

$$\alpha(t) = f_3(\tfrac{1}{2}, t) \cup \{p_1, p_2, p_4, ..., p_{n-1}\} \subseteq [I_3]^2 \cup \{p_1, p_2, p_4, ..., p_{n-1}\}$$

pues por construcción $f_3[\,[0,1] \times \{0\}] = F_1(I_3)$, es decir $\alpha(t)$ tiene exactamente 2 elementos en I_3.

Observando ahora que cualquier elemento en $\mathcal{C}$ tiene solo un elemento en I_3 tenemos que $\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \{\{p_1, ..., p_{n-1}\}\}$.

Hasta aquí encontramos dentro de $\mathcal{U}$ una n celda $\mathcal{C}$ unida a un arco $\mathcal{A}$ solo por uno de sus puntos extremos que en este caso sabemos es $\{p_1, p_2, ..., p_{n-1}\}$ el cual es un punto interior de la n celda. Por el Lema 4.3.2 éste espacio no puede encajarse en $\mathbb{R}^n$ por lo que el conjunto $\mathcal{U}$ no puede ser encajado en $\mathbb{R}^n$.

Recordemos que por la Definición 4.1.3 si $m = 1$, entonces:

$$D_n(X) = \{A \in F_n(X) : \\ A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ que es una } n \text{ celda}\}$$

Observemos que si $A \in F_{n-1}(X)$, entonces en particular ninguna vecindad de A en $F_n(X)$ es una n celda, pues si dicha vecindad existiera, entonces esta misma se podría encajar en el espacio $\mathbb{R}^n$. Por la definición de $D_n(X)$ tenemos que $A \notin D_n(X)$, es decir $F_{n-1}(X) \cap D_n(X) = \emptyset$. □

Utilizando el lema anterior y el resultado en el Lema 4.1.4 podemos concluir que:

Lema 4.4.4. *Sean X una 1 variedad con o sin frontera y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces $D_n(X) = [\,X]^n$.*

Demostración. Por el Lema 4.4.3 tenemos que $F_{n-1}(X) \cap D_n(X) = \emptyset$; como $F_{n-1}(X)$ y $[\,X]^n$ son por definición conjuntos ajenos tales que $F_{n-1}(X) \cup [\,X]^n = F_n(X)$ y $D_n(X) \subseteq F_n(X)$ podemos concluir que $D_n(X) \subseteq [\,X]^n$.

Por el Lema 4.1.4 tenemos que $[\,X]^n \subseteq D_n(X)$, por lo que $D_n(X) = [\,X]^n$. □

Siguiendo con la línea de nuestra demostración necesitamos que para cualquier homeomorfismo en $F_n(X)$ el subespacio $F_1(X)$ permanezca invariante. Dicho resultado es consecuencia del Lema 4.1.5 y el lema anterior.

Lema 4.4.5. *Sean X una 1 variedad con o sin frontera, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$ y $h \in \mathcal{H}(F_n(X))$. Entonces $h[\,F_1(X)] = F_1(X)$.*

Demostración. Por el Lema 4.4.4 tenemos que $D_n(X) = [\,X]^{\,n}$. Por otro lado por hipótesis X es una *1* variedad y $n \geq 4$, del Lema 4.1.5 podemos concluir que $\mathcal{E}_n(X) = F_1(X)$. Recordamos la Definición 4.1.3

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) \setminus D_n(X) :\\ A \text{ tiene una base local } \beta \text{ tal que } \forall\, U \in \beta\ U \cap D_n(X) \text{ es conexo}\}$$

Como el conjunto $\mathcal{E}_n(X)$ esta definido en términos de propiedades topológicas es invariante bajo homeomorfismos, así que $h[\,F_1(X)] = h[\,\mathcal{E}_n(X)] = \mathcal{E}_n(X) = F_1(X)$ como buscamos. □

Para terminar necesitaremos un resultado que nos garantice que los homeomorfismos en el espacio $F_n(X)$ mantienen los espacios $[\,X]^{\,2}$ y $[\,X]^{\,3}$ invariantes. El siguiente lema nos da justamente ese resultado:

Lema 4.4.6. *Sean X un continuo localmente conexo y $h \in \mathcal{H}(F_4(X))$ tal que $h[\,[\,X]^{\,4}] = [\,X]^{\,4}$. Entonces $h[\,[\,X]^{\,2}] \cap [\,X]^{\,3} = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $h[\,[\,X]^{\,2}] \cap [\,X]^{\,3} \neq \emptyset$, es decir sea $A = \{a_1, a_2\} \in [\,X]^{\,2}$ tal que $h(A) = \{b_1, b_2, b_3\} \in [\,X]^{\,3}$, a partir de esto llegaremos a una contradicción.

Al ser X localmente conexo podemos encontrar conjuntos V_1, V_2 y V_3 abiertos conexos ajenos dos a dos tales que, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $b_i \in V_i$, pensando en que $h(A) \in \langle V_1, V_2, V_3\rangle_4$ podemos encontrar un abierto $\mathcal{U}'$ en torno a A tal que $h[\mathcal{U}'] \subseteq \langle V_1, V_2, V_3\rangle_4$. Al ser $A = \{a_1, a_2\}$ encontremos abiertos conexos ajenos U_1, U_2 tales que $a_1 \in U_1$, $a_2 \in U_2$ y $\langle U_1, U_2\rangle_4 \subseteq \mathcal{U}'$.

Definamos de aquí en adelante $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2\rangle_4$, veamos que las siguientes relaciones son verdaderas:

$$h[\,[\,X]^{\,4} \cap \mathcal{U}] = [\,X]^{\,4} \cap h[\mathcal{U}] \subseteq h[\mathcal{U}] \subseteq \langle V_1, V_2, V_3\rangle_4$$

Por hipótesis $h[\,[\,X]^{\,4}] = [\,X]^{\,4}$ por lo que $h[\,[\,X]^{\,4} \cap \mathcal{U}] = h[\,[\,X]^{\,4}] \cap h[\mathcal{U}] = [\,X]^{\,4} \cap h[\mathcal{U}]$. También por construcción $h[\mathcal{U}] \subseteq h[\mathcal{U}'] \subseteq \langle V_1, V_2, V_3\rangle_4$.

Ahora veamos como son las componentes de los conjuntos $[\,X]^{\,4} \cap \mathcal{U}$ y $[\,X]^{\,4} \cap h[\mathcal{U}]$ y la relación que existe entre ellas.

Para $i \in \{1, 2, 3\}$ definamos los conjuntos:

$$\mathcal{U}_i = \{C \in [\,X]^{\,4} \cap \langle U_1, U_2\rangle_4 : |C \cap U_1| = i, |C \cap U_2| = 4 - i\}$$

Por el Lema 3.4.2 sabemos que dichos conjuntos son las componentes de $[\,X]^{\,4} \cap \langle U_1, U_2\rangle_4 = [\,X]^{\,4} \cap \mathcal{U}$.

Definamos también para $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\mathcal{V}_i = \{C \in [\,X]^{\,4} \cap \langle V_1, V_2, V_3\rangle_4 : |A \cap V_i| = 2\}$$

Observemos que $\mathcal{V}_i$ tiene a los conjuntos de 4 elementos que intersecan a V_i en 2 elementos y tiene 1 elemento en cada uno de los otros dos conjuntos V_j. Por el Lema 3.4.2 sabemos que estas son las componentes de $[\,X]^{\,4} \cap \langle V_1, V_2, V_3\rangle_4$.

Tomemos un conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ tal que $e_1, e_2 \in U_1$ y $e_3 \in U_2$.

Como $E \in \mathcal{U} \setminus [\,X]^{\,4}$ tenemos que $h(E) \in h[\mathcal{U}]\, \setminus [\,X]^{\,4} \subseteq \langle V_1, V_2, V_3\rangle_4$; al ser los conjuntos V_1, V_2 y V_3 ajenos dos a dos tenemos que $|h(E)| \geq 3$ pero dado que $h(E) \notin [\,X]^{\,4}$ concluimos que $|h(E)| = 3$.

Dado que $h[\mathcal{U}]$ es abierto, $h[\mathcal{U}] \subseteq \langle V_1, V_2, V_3\rangle_4$ y $h(E)$ es un conjunto de 3 elementos en $h[\mathcal{U}]$ por el inciso a) del Lema 3.3.4 sabemos que, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{V}_i \cap h[\mathcal{U}] \neq \emptyset$.

Entonces $\mathcal{V}_1 \cap h[\mathcal{U}]$, $\mathcal{V}_2 \cap h[\mathcal{U}]$ y $\mathcal{V}_3 \cap h[\mathcal{U}]$ son las componentes de $[\,X]^{\,4} \cap h[\mathcal{U}]$.

Como el homeomorfismo h cumple $h[\,[\,X]^{\,4} \cap \mathcal{U}] = [\,X]^{\,4} \cap h[\mathcal{U}]$ cada una de las tres componentes de $[\,X]^{\,4} \cap \mathcal{U}$ tiene como imagen alguna de las tres componentes de $[\,X]^{\,4} \cap h[\mathcal{U}]$.

Pensemos en la componente $\mathcal{U}_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h[\mathcal{U}_1] = \mathcal{V}_1 \cap h[\mathcal{U}]$.

Veremos que este hecho nos llevan a una contradicción puesto que las componentes tienen propiedades topológicas distintas. Probemos las siguientes afirmaciones:

Af1 Existe un abierto $\mathcal{F}$ en torno a E en $F_4(X)$ tal que $\mathcal{F} \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$

Af2 Para todo abierto $\mathcal{G}$ en torno a $h(E)$ en $F_4(X)$ se tiene $\mathcal{G} \cap (\mathcal{V}_1 \cap h[\mathcal{U}]\,) \neq \emptyset$

Mostremos primero [Af1].

Sean W_1, W_2, W_3 subconjuntos abiertos ajenos dos a dos de forma que, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $e_i \in W_i$, $W_1, W_2 \subseteq U_1$ y $W_3 \subseteq U_2$, observemos primero que $\langle W_1, W_2, W_3 \rangle_4$ es un abierto en torno a E en $F_4(X)$.

Afirmamos que también $\langle W_1, W_2, W_3 \rangle_4 \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$; recordemos que por definición $\mathcal{U}_1 = \{C \in [\,X]^{\,4} \cap \langle U_1, U_2 \rangle_4 : |C \cap U_1| = 1, |C \cap U_2| = 3\}$. Sea $C \in \langle W_1, W_2, W_3 \rangle_4$, entonces por ser W_1, W_2 y W_3 ajenos dos a dos tenemos que existen $c_1 \in C \cap W_1$ y $c_2 \in C \cap W_2$ donde $c_1 \neq c_2$ así que por nuestra construcción $c_1, c_2 \in U_1$ por lo que por definición $C \notin \mathcal{U}_1$. Por lo tanto $\mathcal{F} = \langle W_1, W_2, W_3 \rangle_4$ es un abierto en torno a E en $F_4(X)$ tal que $\mathcal{F} \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$.

Ahora mostraremos [Af2].

Sea $\mathcal{G}$ un abierto en torno a $h(E)$ en $F_4(X)$, como $h[\mathcal{U}]$ es abierto tenemos que $\mathcal{G} \cap h[\mathcal{U}]$ es abierto. Tenemos que $h(E)$ es un conjunto con 3 elementos en el interior de $\mathcal{G} \cap h[\mathcal{U}]$ y $\mathcal{G} \cap h[\mathcal{U}] \subseteq \langle V_1, V_2, V_3 \rangle_4$ así que por el inciso $a)$ del Lema 3.3.4 sabemos que $\mathcal{G} \cap h[\mathcal{U}]$ interseca a cualquier componente de $[\,X]^{\,4} \cap \langle V_1, V_2, V_3 \rangle_4$, en particular tenemos que $(\mathcal{V}_1 \cap h[\mathcal{U}]\,) \cap (\mathcal{G} \cap h[\mathcal{U}]\,) = \mathcal{G} \cap (\mathcal{V}_1 \cap h[\mathcal{U}]\,) \neq \emptyset$.

Ahora veamos que las afirmaciones [Af1] y [Af2] nos llevan a una contradicción.

Por [Af1] sabemos que existe $\mathcal{F}$ un abierto en torno a E en $F_4(X)$ tal que $\mathcal{F} \cap \mathcal{U}_1 = \emptyset$, aplicando el homemorfismo h tenemos que $h[\,\mathcal{F}]$ es un abierto en torno a $h(E)$ en $F_4(X)$ que cumple $h[\,\mathcal{F} \cap \mathcal{U}_1] = \emptyset$, ahora bien sabemos que $h[\,\mathcal{F} \cap \mathcal{U}_1] = h[\,\mathcal{F}] \cap h[\mathcal{U}_1] = h[\,\mathcal{F}] \cap (\mathcal{V}_1 \cap h[\mathcal{U}]\,)$ por lo que concluimos que $h[\,\mathcal{F}]$ es un abierto en torno a $h(E)$ en $F_4(X)$ tal que $h[\,\mathcal{F}] \cap (\mathcal{V}_1 \cap h[\mathcal{U}]\,) = \emptyset$ lo cual es una contradicción a la afirmación [Af2].

Dicha contradicción viene de suponer $h[\,[\,X]^{\,2}] \cap [\,X]^{\,3} \neq \emptyset$ por lo que esta afirmación es falsa, lo que concluye nuestra demostración. $\square$

Finalmente con los resultados anteriores podemos concluir:

Lema 4.4.7. *Sean X una 1 variedad con o sin frontera, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$*

y $h \in \mathcal{H}(F_n(X))$, *entonces para cualquier* k *con* $1 \leq k \leq n$ *tenemos que* $h[\,[X]^{k}] = [X]^{k}$.

Demostración. Primero comenzaremos con un argumento inductivo para los conjuntos $[X]^{n}$, $[X]^{n-1}$, ... , $[X]^{4}$ de la siguiente manera:

Por el Lema 4.4.4 sabemos que $[X]^{n} = D_n(X)$, observemos que el conjunto $D_n(X)$ por estar definido en función de propiedades topológicas es invariante bajo homeomorfismos por lo cual $h[D_n(X)] = D_n(X)$, es decir $h[\,[X]^{n}] = [X]^{n}$.

Veamos también que $h[F_{n-1}(X)] = F_{n-1}(X)$, sabemos por el Lema 2.0.12 que $F_n(X) = [X]^{1} \cup ... \cup [X]^{n}$ donde los uniendos son ajenos dos a dos, usando que $h[\,[X]^{n}] = [X]^{n}$ podemos afirmar $h[\,[X]^{1} \cup ... \cup [X]^{n-1}] = [X]^{1} \cup ... \cup [X]^{n-1}$ o dicho de otra manera $h[F_{n-1}(X)] = F_{n-1}(X)$ como buscábamos.

Por lo anterior tenemos que la restricción de h en $F_{n-1}(X)$ es un homeomorfismo y podemos repetir el argumento en el conjunto $[X]^{n-1}$, así obtenemos sucesivamente

$$
\begin{array}{lcl}
h[\,[X]^{n}] = [X]^{n} & \text{y} & h[F_{n-1}(X)] = F_{n-1}(X), \\
h[\,[X]^{n-1}] = [X]^{n-1} & \text{y} & h[F_{n-2}(X)] = F_{n-2}(X), \\
... & & \\
h[\,[X]^{4}] = [X]^{4} & \text{y} & h[F_3(X)] = F_3(X).
\end{array}
$$

el último paso que podemos hacer así es en $F_4(X)$ pues necesitamos que $k \geq 4$ para aplicar el Lema 4.4.4 que nos asegura $[X]^{k} = D_k(X)$.

Como en particular sabemos $[X]^{n} = D_n(X)$ por el Lema 4.4.5 aplicado al homeomorfismo h tenemos que $h[F_1(X)] = F_1(X)$, que dicho de otra forma nos garantiza $h[\,[X]^{1}] = [X]^{1}$; dado que $h[F_3(X)] = F_3(X)$ y $F_3(X) = [X]^{1} \cup [X]^{2} \cup [X]^{3}$, de estos dos hechos concluimos que $h[\,[X]^{2} \cup [X]^{3}] = [X]^{2} \cup [X]^{3}$.

También sabemos que $h[F_4(X)] = F_4(X)$ y que $h[\,[X]^{4}] = [X]^{4}$. Podemos pensar en la restricción de h en el espacio $F_4(X)$, el cual es un homeomorfismo en dicho espacio; como X es una 1 variedad (Sin frontera, compacta y conexa) y las variedades son espacios localmente conexos pues cada punto existe tiene una base de vecindades en la que cada abierto de la base es homeomorfo a $\mathbb{R}^m$, en particular podemos afirmar que X es un continuo localmente conexo; aplicando el Lema 4.4.6 podemos concluir que $h[\,[\,X\,]^{\,2}] \cap [\,X\,]^{\,3} = \emptyset$.

Como $h[\,[\,X\,]^{\,2} \cup [\,X\,]^{\,3}] = [\,X\,]^{\,2} \cup [\,X\,]^{\,3}$ por ser ajenos los conjuntos $[\,X\,]^{\,2}$ y $[\,X\,]^{\,3}$ concluimos que $h[\,[\,X\,]^{\,2}] = [\,X\,]^{\,2}$ y $h[\,[\,X\,]^{\,3}] = [\,X\,]^{\,3}$.

En resumen hemos mostrado que si $1 \leq k \leq n$, entonces $h[\,[\,X\,]^{\,k}] = [\,X\,]^{\,k}$. $\square$

Con este resultado podemos dar la conclusión de la presente sección:

Teorema 4.4.8. *Sean X una 1 variedad sin frontera (y por lo tanto es una curva cerrada simple) y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces $hd(F_n(X)) = n$. Además, dichas órbitas son los conjuntos $[\,X\,]^{\,k}$ con $1 \leq k \leq n$.*

Demostración. Por el Lema 4.4.2 X es una curva cerrada simple.

Por el Lema 4.4.7 si $h \in \mathcal{H}(F_n(X))$, entonces $h[\,[\,X\,]^{\,k}] = [\,X\,]^{\,k}$ para $1 \leq k \leq n$, por lo que en $F_n(X)$ existen al menos n distintas órbitas a saber una por cada uno de los conjuntos $[\,X\,]^{\,k}$.

Por el Lema 4.1.2 tenemos que $hd(F_n(X)) \leq n$ por lo que podemos concluir $hd(F_n(X)) = n$.

Como $h[\,[\,X\,]^{\,k}] = [\,X\,]^{\,k}$ para $1 \leq k \leq n$, dichos conjuntos son las n órbitas en el espacio $F_n(X)$. $\square$

4.5. El caso $m \geq 3$ y $n = 2$

En esta sección veremos que en el caso de las variedades de dimensión $m \geq 3$ el producto simétrico $F_2(X)$ tiene exactamente 2 órbitas.

Sabemos del Lema 4.1.2 que hay a lo mas 2 órbitas por lo que solo necesitamos mostrar que el espacio no es homogéneo; para esto veremos que el hiperespacio $F_1(X)$ permanece invariante bajo homeomorfismos en $F_2(X)$.

A continuación vamos a enunciar un resultado que es la base de nuestra prueba.

Teorema 4.5.1. *Sean X una m variedad con o sin frontera y $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 3$, entonces $F_2(X)$ no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^{2m}$ [9, Teorema 3, pág. 169].*

Utilizaremos este resultado para mostrar el siguiente lema.

Lema 4.5.2. *Sean X una m variedad con o sin frontera, $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 3$ y $h \in \mathcal{H}(F_2(X))$. Entonces $h[\,[X]^1] = [X]^1$ y $h[\,[X]^2] = [X]^2$.*

Demostración. Recordemos la Definición 4.1.3

$$D_2(X) = \{A \in F_2(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_2(X) \text{ que es una } 2m \text{ celda}\}$$

Por el Lema 4.1.4 tenemos que $[X]^2 \subseteq D_2(X)$.

Ahora mostraremos que $D_2(X) \subseteq [X]^2$. Sabemos por el Lema 2.0.12 que $F_2(X) = [X]^2 \cup [X]^1$ donde los dos uniendos son ajenos, bastará demostrar que $D_2(X) \cap [X]^1 = \emptyset$.

Sea $\{p\} \in [X]^1$ y sea $\mathcal{M}$ una vecindad de $\{p\}$ en $F_2(X)$, vamos a mostrar que dicha vecindad nunca se puede encajar en una $2m$ celda. Primero encontremos una m celda M de X que cumpla ser vecindad de p y $\langle M\rangle_2 \subseteq \mathcal{M}$.

Observemos que $\langle M\rangle_2 = F_2(M)$ por lo que $F_2(M) \subseteq \mathcal{M}$; ahora bien viendo a M como una m variedad y aplicando el Teorema 4.5.1 sabemos que $F_2(M)$ no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^{2m}$ por lo que podemos concluir que la vecindad $\mathcal{M}$ no se puede encajar en una $2m$ celda.

Al haber mostrado esto para una vecindad $\mathcal{M}$ arbitraria tenemos que el elemento $\{p\}$ no pertenece a $D_2(X)$ por lo que $D_2(X) \cap [X]^1 = \emptyset$.

Con esto podemos concluir que $D_2(X) \subseteq [X]^2$, así hemos mostrado que $D_2(X) = [X]^2$.

Al estar definido el conjunto $D_2(X)$ en términos topológicos tenemos que es invariante bajo homeomorfismos, es decir si $h \in \mathcal{H}(F_2(X))$, entonces $h(D_2(X)) = D_2(X)$ y en consecuencia $h([X]^2) = [X]^2$; nuevamente como $F_2(X) = [X]^2 \cup [X]^1$ podemos concluir que también $h([X]^1) = [X]^1$ que es lo que buscamos. □

Lema 4.5.3. *Sean X una m variedad sin frontera y $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 3$. Entonces $hd(F_2(X)) = 2$.*

Demostración. Por el Lema 4.1.2, tenemos que $hd(F_2(X)) \leq 2$ y por el Lema 4.5.2 tenemos que si $h \in \mathcal{H}(F_2(X))$, entonces $h[\,F_1(X)] = F_1(X)$, lo que nos dice que existen al menos dos órbitas, la de los elementos en $[\,X]^{\,1}$ y la de los elementos en $[\,X]^{\,2}$, por lo que $hd(F_2(X)) \geq 2$.

En conclusión estas dos cotas nos dicen que $hd(F_2(X)) = 2$. □

4.6. Otros casos

En esta sección enunciamos resultados que se conocen para el resto de los casos.

Lema 4.6.1 ($m = 2$ y $n = 2$)**.** *Sea X una 2 variedad sin frontera, entonces $F_2(X)$ es una 4 variedad sin frontera [9, Corolario del teorema 1, pág. 168].*

Lema 4.6.2 ($m = 1$ y $n = 2$)**.** *El espacio $F_2(S^1)$ es homeomorfo a una banda de Möbius [1, pág. 11].*

Lema 4.6.3 ($m = 1$ y $n = 3$)**.** *El espacio $F_3(S^1)$ es homeomorfo a la esfera $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ [7, Teorema único].*

4.7. Sumario

En esta sección resumimos los resultados que se conocen sobre el grado de homogeneidad de productos simétricos de variedades sin frontera, donde recordamos que dichas variedades las pensamos compactas y conexas.

Teorema 4.7.1. *Sean X una m variedad sin frontera y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$, se cumple lo siguiente:*

1. *Si $m \neq 2$ y $n \neq 2$, entonces $hd(F_n(X)) = n$*
2. *Si $m = 2$ y $n = 2$, entonces $hd(F_2(X)) = 1$*

Demostración. Si $n = 1$ y $m \geq 2$, entonces buscamos $hd(F_1(X))$, como $F_1(X)$ es homeomorfo a X y por el Lema 4.1.1 $hd(X) = 1$, podemos concluir que $hd(F_1(X)) = hd(X) = 1$.

Si $n = 2$ y justamente $m = 2$, entonces buscamos $hd(F_2(X))$ donde X es una 2 variedad sin frontera. Por el Lema 4.6.1 $F_2(X)$ es una 4 variedad sin frontera por lo que podemos concluir $hd(F_2(X)) = 1$ en este caso.

Si $n = 2$ y $m \geq 3$, entonces por el Lema 4.5.3 $hd(F_2(X)) = 2$.

Si $n \geq 3$ y $m \geq 2$, entonces por el Teorema 4.2.6 tenemos que $hd(F_n(X)) = n$. □

Si X es una 1 variedad sin frontera, entonces por el Lema 4.4.2 $X = S^1$, a continuación resumimos los resultados de homogeneidad en el producto simétrico que conocemos sobre este espacio:

Teorema 4.7.2. *Sean X es una 1 variedad sin frontera (y por lo tanto es una curva cerrada simple) y $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:*

1. *Si $n \neq 3$, entonces $hd(F_n(X)) = n$*
2. *Si $n = 3$, entonces $hd(F_3(X)) = 1$*

Demostración. Si $n = 1$, entonces buscamos $hd(F_1(S^1))$, como $F_1(S^1)$ es homeomorfo a S^1 y por el Lema 4.1.1 $hd(S^1) = 1$ podemos concluir que $hd(F_1(S^1)) = hd(S^1) = 1$.

Si $n = 2$, entonces buscamos $hd(F_2(S^1))$; por el Lema 4.6.2 el espacio $F_2(S^1)$ es homeomorfo a una banda de Möbius por lo que $hd(F_2(S^1)) = 2$.

Si $n = 3$, entonces buscamos $hd(F_3(S^1))$; por el Lema 4.6.3 el espacio $F_3(S^1)$ es homeomorfo a la esfera S^3 por lo que $hd(F_3(S^1)) = 1$.

Si $n \geq 4$, entonces por el Teorema 4.4.8 tenemos que $hd(F_n(S^1)) = n$. □

La siguiente tabla indica cual es el grado de homogeneidad de $F_n(X)$ cuando X es una m variedad compacta, conexa y sin frontera:

De acuerdo a esta tabla $hd(F_n(X)) = n$ para todos los casos salvo $n = 3$, $m = 1$ (que corresponde a $F_3(S^1)$) y $n = 2$, $m = 2$ (Que corresponde a $F_2(X)$ donde X es una superficie).

n / ***m***	***1***	***2***	***3***	***4 o más***
1	***n*** Lema 4.1.1	***n*** Lema 4.6.2	***1*** Lema 4.6.3	***n*** Teorema 4.4.8
2	***n*** Lema 4.1.1	***1*** Lema 4.6.1	***n*** Teorema 4.2.6	***n*** Teorema 4.2.6
3 o más	***n*** Lema 4.1.1	***n*** Lema 4.5.3	***n*** Teorema 4.2.6	***n*** Teorema 4.2.6

Capítulo 5

Grado de homogeneidad en el intervalo

El objetivo de este capítulo es encontrar el grado de homogeneidad para $F_n([\,0,1]\,)$ el n-ésimo producto simétrico del intervalo unitario. De forma más particular vamos a demostrar que si $n \geq 4$, entonces el grado de homogeneidad de $F_n([\,0,1]\,)$ es $2n$.

5.1. Una cota para el grado de homogeneidad

En esta sección utilizaremos resultados del capítulo anterior para acotar el número de órbitas que pueden existir en $F_n([\,0,1]\,)$ cuando $n \geq 4$.

Definición 5.1.1. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$, definimos:*

$DB_k = \{A \in [\,[\,0,1]\,]^k : A$ *tiene una vecindad* $\mathcal{M}$ *en* $[\,[\,0,1]\,]^k$ *que es una* k *celda y* A *es un punto frontera de* $\mathcal{M}$ *considerándola como variedad*$\}$

$DI_k = \{A \in [\,[\,0,1]\,]^k : A$ *tiene una vecindad* $\mathcal{M}$ *en* $[\,[\,0,1]\,]^k$ *que es una* k *celda y* A *es un punto regular de* $\mathcal{M}$ *considerándola como variedad*$\}$

De acuerdo a la Definición 4.0.3 de punto regular y frontera, A es punto regular de $\mathcal{M}$ si y solo si existe una vecindad abierta de A en $F_k([\,0,1]\,)$ homeomorfa a $(0,1)^k$ contenida en $\mathcal{M}$.

Lema 5.1.2. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$. Entonces:*

a) $[\,[0,1]\,]^k = DB_k \cup DI_k$ *y* $DB_k \cap DI_k = \emptyset$.

b) $\{A \in [\,[0,1]\,]^k; A \cap \{0,1\} \neq \emptyset\} = DB_k$.

c) $\{A \in [\,[0,1]\,]^k; A \cap \{0,1\} = \emptyset\} = DI_k$.

Demostración. Comenzaremos la prueba mostrando las siguientes afirmaciones:

Af1 $\{A \in [\,[0,1]\,]^k; A \cap \{0,1\} \neq \emptyset\} \subseteq DB_k$

Af2 $\{A \in [\,[0,1]\,]^k; A \cap \{0,1\} = \emptyset\} \subseteq DI_k$

Para mostrar Af1 y Af2 tomemos $A \in [\,[0,1]\,]^k$, tal que $A = \{a_1, ..., a_k\}$ donde $a_1 < ... < a_k$.

Sea $\delta = \frac{1}{2}m\acute{i}n\{a_j - a_{j-1} : j \in \{2, ..., k\}\}$ y definamos $U_j = [\,a_j - \delta, a_j + \delta] \cap [\,0,1]$; observemos que los conjuntos $U_1, ..., U_k$ son subintervalos no degenerados ajenos dos a dos de $[\,0,1]$.

Consideremos ahora $\langle U_1, ..., U_k\rangle_n$, el cual es vecindad de A en $F_n([\,0,1]\,)$; por el Lema 3.1.4 sabemos que dicho conjunto es homeomorfo a $\Pi_{i=1}^k U_i$ que es una k celda.

Si $A \cap \{0,1\} \neq \emptyset$, entonces $U_1 = [\,0,\delta]$ o bien $U_k = [\,1-\delta, 1]$ y tenemos que A es un punto frontera de $\langle U_1, ..., U_k\rangle_n$ por lo que $A \in DB_k$.

Si $A \cap \{0,1\} = \emptyset$, entonces para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $a_i \in Int(U_i)$ el cuál es un intervalo; por lo tanto A es un punto regular de $\langle U_1, ..., U_k\rangle_n$ y $A \in DB_k$.

a), primero veamos que $[\,[0,1]\,]^k = DB_k \cup DI_k$.

Por definición $DB_k \cup DI_k \subseteq [\,[0,1]\,]^k$. Sea $A \in [\,[0,1]\,]^k$, tenemos que $A \cap \{0,1\} \neq \emptyset$ o bien $A \cap \{0,1\} = \emptyset$ así que por Af1 y Af2 tenemos que $A \in DB_k \cup DI_k$.

Veamos ahora $DB_k \cap DI_k = \emptyset$.

Tomemos $A \in DI_k$ y sea $\mathcal{M}$ una vecindad de A en $[\,[0,1]\,]^k$ que es una k celda y A es un punto regular de $\mathcal{M}$ considerándola como variedad, entonces existe $\mathcal{N}$ un abierto homeomorfo a $(0,1)^k$ tal que $A \in \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Si pensamos $\mathcal{M}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces A está en el interior de $\mathcal{M}$; sea $\mathcal{M}'$ una vecindad arbitraria de A en $[\,[0,1]\,]^k$ que sea una k celda, tenemos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ son homeomorfos por lo que por el teorema de invarianza de dominio 4.3.1 A está en el interior de $\mathcal{M}'$ pensándola como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto A es un punto regular de $\mathcal{M}'$ considerándola como variedad.

Como para cualquier $\mathcal{M}'$ mostramos que A es un punto regular tenemos que $A \notin DB_k$ por lo que $DB_k \cap DI_k = \emptyset$.

b). Por Af1 hace falta demostrar $DB_k \subseteq \{A \in [\,[0,1]\,]^k; A \cap \{0,1\} \neq \emptyset\}$.

Si $A \in DB_k$, entonces $A \in [\,[0,1]\,]^k$, supongamos por el contrario que $A \cap \{0,1\} = \emptyset$ por Af2 $A \in DI_k$ pero como el inciso a) nos asegura $DB_k \cap DI_k = \emptyset$ tenemos una contradicción; por lo tanto $A \cap \{0,1\} \neq \emptyset$ como buscábamos.

c). Por Af2 hace falta demostrar $DI_k \subseteq \{A \in [\,[0,1]\,]^k; A \cap \{0,1\} = \emptyset\}$.

Si $A \in DI_k$, entonces $A \in [\,[0,1]\,]^k$, supongamos por el contrario que $A \cap \{0,1\} \neq \emptyset$ por Af1 $A \in DB_k$ pero por el inciso a) $DB_k \cap DI_k = \emptyset$ y tenemos una contradicción; entonces $A \cap \{0,1\} = \emptyset$ como buscábamos probar. $\square$

Lema 5.1.3. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, $1 \leq k \leq n$ y $h \in \mathcal{H}(F_n([\,0,1]\,))$. Entonces $h[\,DB_k] = DB_k$ y $h[\,DI_k] = DI_k$.*

Demostración. Por el Lema 4.4.7 sabemos que $h[\,[\,[0,1]\,]^k] = [\,[0,1]\,]^k$.

Usando el inciso a) del Lema 5.1.2 tenemos que $h[\,DB_k] \cup h[\,DI_k] = h[\,DB_k \cup DI_k] = h[\,[\,[0,1]\,]^k] = [\,[0,1]\,]^k = DB_k \cup DI_k$.

Vamos a mostrar ahora que $h[\,DB_k] \cap DI_k = \emptyset$ y $h[\,DI_k] \cap DB_k = \emptyset$.

Primero veamos $h[\,DI_k] \cap DB_k = \emptyset$.

Sea $A \in DI_k$ y sea $\mathcal{M}$ una vecindad de A en $[\,[0,1]\,]^k$ que es una k celda y A es un punto regular de $\mathcal{M}$; sea $\mathcal{N}$ un abierto homeomorfo a $(0,1)^k$ tal que $A \in \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$.

Como $\mathcal{M}$ es una k celda pensemos a $\mathcal{M}$ con la topología de subconjunto de $\mathbb{R}^n$, esto con el fin de aplicar el teorema de invarianza de dominio. Tenemos que $A \in Int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{M})$.

Por el Lema 4.4.7, $h[\,[\,[0,1]\,]^{\,k}] = [\,[0,1]\,]^{\,k}$ y por lo tanto $h[\,\mathcal{M}]$ es una vecindad de $h(A)$ en $[\,[0,1]\,]^{\,k}$ que es una k celda.

Aplicando el teorema de invarianza de dominio 4.3.1 obtenemos que $h(A) \in Int_{\mathbb{R}^n}(h[\,\mathcal{M}]\,)$. Tenemos de esto que $h(A)$ es un punto regular de $h[\,\mathcal{M}]$ y por tal $h(A) \in DI_k$.

Por el inciso $a)$ del Lema 5.1.2 tenemos que $DB_k \cap DI_k = \emptyset$ así que $h(A) \notin DB_k$. Por lo tanto $h[\,DI_k] \cap DB_k = \emptyset$.

Ahora veamos $h[\,DB_k] \cap DI_k = \emptyset$.

Considerando el homeomorfismo h^{-1} sabemos que $h^{-1}[\,DI_k] \cap DB_k = \emptyset$ y aplicando h tenemos $h[\,DB_k] \cap DI_k = \emptyset$ que es lo que buscamos.

Hemos mostrado que $h[\,DB_k] \cap DI_k = \emptyset$ y $h[\,DI_k] \cap DB_k = \emptyset$.

Como $h[\,DB_k] \cup h[\,DI_k] = DB_k \cup DI_k$ tenemos que $h[\,DB_k] = DB_k$ y $h[\,DI_k] = DI_k$ como buscamos. □

Lema 5.1.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces $hd(F_n([\,0,1]\,)) \geq 2n$.*

Demostración. Por el Lema 2.0.12 y el Lema 5.1.2 sabemos que

$$F_n([\,0,1]\,) = [\,[\,0,1]\,]^{\,1} \cup ... \cup [\,[\,0,1]\,]^{\,n} = (DB_1 \cup DI_1) \cup (DB_2 \cup DI_2) \cup ... \cup (DB_n \cup DI_n)$$

donde estos últimos $2n$ conjuntos son ajenos dos a dos.

El Lema 5.1.3 nos asegura que para cualquier $h \in \mathcal{H}(F_n([\,0,1]\,))$ y para cualquier $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$, $h[\,DB_k] = DB_k$ y $h[\,DI_k] = DI_k$ y por lo tanto existe al menos una órbita distinta por cada uno de los conjuntos DB_k y DI_k; habiendo $2n$ de dichos conjuntos podemos concluir $hd(F_n([\,0,1]\,)) \geq 2n$. □

5.2. Homeomorfismos en $F_n([\,0,1]\,)$

En esta sección veremos que cada uno de los conjuntos DB_k y DI_k con $1 \leq k \leq n$ son en realidad una órbita en $F_n([\,0,1]\,)$. Desarrollaremos esto mediante dos lemas que utilizan estrategias distintas en su demostración.

Lema 5.2.1. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$, $A, B \in [\,[\,0,1]\,]^k$ tales que $|A \cap \{0,1\}| = |B \cap \{0,1\}|$. Entonces:*

a) Existe $h \in \mathcal{H}([\,0,1]\,)$ tal que $h[\,A] = B$.

b) Existe $H \in \mathcal{H}(F_n([\,0,1]\,))$ tal que $H(A) = B$.

Demostración. a). Consideraremos los casos:

Caso 1) $|A \cap \{0,1\}| = 0 = |B \cap \{0,1\}|$.

Notemos que $A, B \in DI_k$. En este caso podemos escribir $A = \{a_1, ..., a_k\}$ y $B = \{b_1, ..., b_k\}$ donde $0 < a_1 < ... < a_k < 1$ y $0 < b_1 < ... < b_k < 1$, definimos la función $h : [\,0,1] \to [\,0,1]:$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{b_1}{a_1}x & \text{si } \; 0 \leq x \leq a_1, \\ \dfrac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i}b_{i+1} + \dfrac{a_{i+1} - x}{a_{i+1} - a_i}b_i & \text{si } \; a_i \leq x \leq a_{i+1}, \\ \dfrac{x - a_k}{1 - a_k} + \dfrac{1 - x}{1 - a_k}b_k & \text{si } \; a_k \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dicha función es la que manda de forma lineal el intervalo $[\,0, a_1]$ en $[\,0, b_1]$, cada intervalo $[\,a_i, a_{i+1}]$ en $[\,b_i, b_{i+1}]$ y el intervalo $[\,a_k, 1]$ en $[\,b_k, 1]$ por lo que sabemos que en cada intervalo h es continua y biyectiva. Por el Lema de pegado 2.0.18 h es continua y por su definición biyectiva; aplicando el Lema 2.0.17 h es un homeomorfismo. Además, $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $h(a_i) = b_i$ por lo que $h[\,A] = B$.

Caso 2) $|A \cap \{0,1\}| = 1 = |B \cap \{0,1\}|$.

Supongamos que $A \cap \{0,1\} = \{0\} = B \cap \{0,1\}$ y escribamos $A = \{a_1, ..., a_k\}$ y $B = \{b_1, ..., b_k\}$ donde $0 = a_1 < ... < a_k < 1$ y $0 = b_1 < ... < b_k < 1$; definimos la función $h : [\,0,1] \to [\,0,1]$ como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i}b_{i+1} + \dfrac{a_{i+1} - x}{a_{i+1} - a_i}b_i & \text{si } \; a_i \leq x \leq a_{i+1}, \\ \dfrac{x - a_k}{1 - a_k} + \dfrac{1 - x}{1 - a_k}b_k & \text{si } \; a_k \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dicha función manda de forma lineal el intervalo $[0, a_2]$ en $[0, b_2]$, cada intervalo $[a_i, a_{i+1}]$ en $[b_i, b_{i+1}]$ y el intervalo $[a_k, 1]$ en $[a_k, 1]$ por lo que sabemos que h es un homeomorfismo. Además, tenemos que $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $h(a_i) = b_i$ por lo que $h[A] = B$.

Consideremos el homeomorfismo $g : [0, 1] \to [0, 1]$ definido como $g(x) = 1 - x$; dicho homeomorfismo invierte los puntos en $[0, 1]$ por lo que en particular $g(0) = 1$ y $g(1) = 0$.

Supongamos que $A \cap \{0, 1\} = \{1\} = B \cap \{0, 1\}$, tenemos que $g[A], g[B] \in [[0, 1]]^k$ son tales que $g[A] \cap \{0, 1\} = \{0\} = g[B] \cap \{0, 1\}$ por lo que podemos construir el homeomorfismo h' como antes tal que $h'[g[A]] = g[B]$. Observemos que $g^{-1}[h'[g[A]]] = B$ por lo que $g^{-1} \circ h' \circ g \in \mathcal{H}([0, 1])$ cumple que $g^{-1} \circ h' \circ g[A] = B$.

Supongamos que $A \cap \{0, 1\} = \{0\}$ y $B \cap \{0, 1\} = \{1\}$, tenemos que $A, g[B] \in [[0, 1]]^k$ son tales que $A \cap \{0, 1\} = \{0\} = g[B] \cap \{0, 1\}$ por lo que podemos construir el homeomorfismo h' como antes tal que $h'[A] = g[B]$. Observemos que $g^{-1}[h'[A]] = B$ por lo que $g^{-1} \circ h' \in \mathcal{H}([0, 1])$ cumple que $g^{-1} \circ h'[A] = B$.

Caso 3) $|A \cap \{0, 1\}| = 2 = |B \cap \{0, 1\}|$

Consideremos $A = \{a_1, ..., a_k\}$ y $B = \{b_1, ..., b_k\}$ donde $0 = a_1 < ... < a_k = 1$ y $0 = b_1 < ... < b_k = 1$ y definamos la función $h'' : [0, 1] \to [0, 1]$:

$$h''(x) = \left\{ \frac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i} b_{i+1} + \frac{a_{i+1} - x}{a_{i+1} - a_i} b_i \quad \text{si} \quad a_i \leq x \leq a_{i+1}. \right.$$

Esta función manda de forma lineal cada intervalo $[a_i, a_{i+1}]$ en $[b_i, b_{i+1}]$ por lo que sabemos resulta ser un homeomorfismo. Además, tenemos que $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $h(a_i) = b_i$ por lo que $h[A] = B$.

Al haber considerado todos los casos podemos concluir que el inciso *a*) es cierto.

b) Ahora buscamos $H \in \mathcal{H}(F_n([0, 1]))$ tal que $H(A) = B$.

Por el inciso *a*) consideremos $h \in \mathcal{H}([0, 1])$ tal que $h[A] = B$. Aplicando el Lema 2.0.19 podemos definir la función inducida $H \in \mathcal{H}(F_n([0, 1]))$ tal que $H(A) = B$, que es el homeomorfismo que buscamos. $\square$

Hasta aquí ya podemos concluir que cada conjunto DI_k es invariante bajo homeomorfismos en $F_n([\,0,1]\,)$ pero aún nos falta un detalle para ver esto mismo con los conjuntos DB_k; el resultado que falta lo mostraremos en el siguiente lema:

Lema 5.2.2. *Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, $2 \leq k \leq n$, y $A, B \in [\,[\,0,1]\,]^k$ tales que $|A \cap \{0,1\}| = 1$ y $|B \cap \{0,1\}| = 2$, entonces existe $H \in \mathcal{H}(F_n([\,0,1]\,))$ tal que $h(B) = A$.*

Demostración. Vamos a construir primero $h \in \mathcal{H}(F_n([\,0,1]\,))$ tal que $|h(B) \cap \{0,1\}| = 1$.

PASO 1) Construyamos la función:

Consideremos $m : F_n([\,0,1]\,) \to [\,0,1]$ y $M : F_n([\,0,1]\,) \to [\,0,1]$ definidas como $m(D) = m\acute{\imath}n\{d : d \in D\}$ y $M(D) = m\acute{a}x\{d : d \in D\}$ las cuales son continuas y suprayectivas.

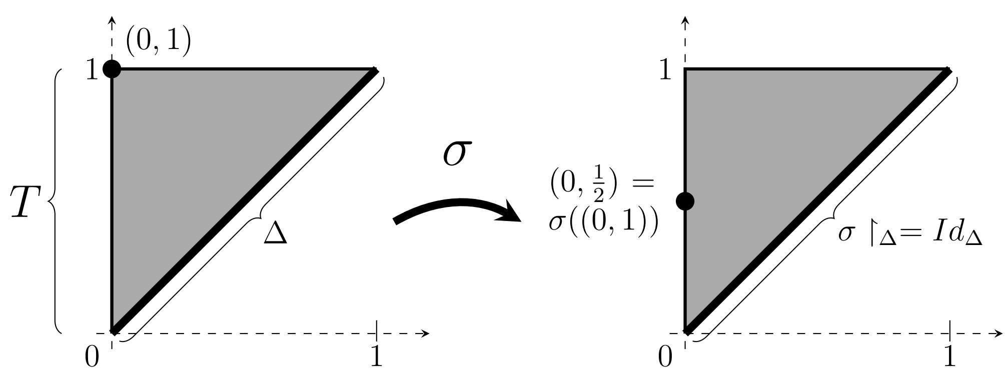

Figura 5.1: Ilustración de σ

Consideremos el conjunto $T = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ y a su subconjunto $\Delta = \{(a,b) \in T : a = b\}$. Definamos ahora la función $\phi : F_n([\,0,1]\,) \to T$ como $\phi(D) = (m(D), M(D))$, $\forall D \in F_n([\,0,1]\,)$, antes que nada como $0 \leq m(D) \leq M(D) \leq 1$ si $D \in F_n([\,0,1]\,)$, entonces la función está bien definida. Dicha función es continua pues cada una de sus coordenadas lo es y suprayectiva pues $n \geq 2$.

Vamos a considerar los puntos $(0,1)$ y $(0,\frac{1}{2})$ que son distintos y ambos se encuentran en la frontera de T. Consideremos un homeomorfismo $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{H}(T)$ tal que $\sigma((0,1)) = (0,\frac{1}{2})$ y que $\sigma \restriction_\Delta = Id_\Delta$ (ver Figura 5.1); aquí σ_1 y σ_2 están representando las funciones coordenadas que describen a σ, observemos que siempre ocurre $\sigma_1((a,b)) \leq \sigma_2((a,b))$.

Dados dos intervalos no degenerados $J, K \subseteq [\,0,1]$ podemos pensar en $\psi(J,K) : J \to K$ la función lineal estrictamente creciente que transforma el intervalo J en el intervalo K (ver Figura 5.2) dada por:

$$\psi(J,K)(t) = \frac{t - m(J)}{M(J) - m(J)} M(K) + \frac{M(J) - t}{M(J) - m(J)} m(K)$$

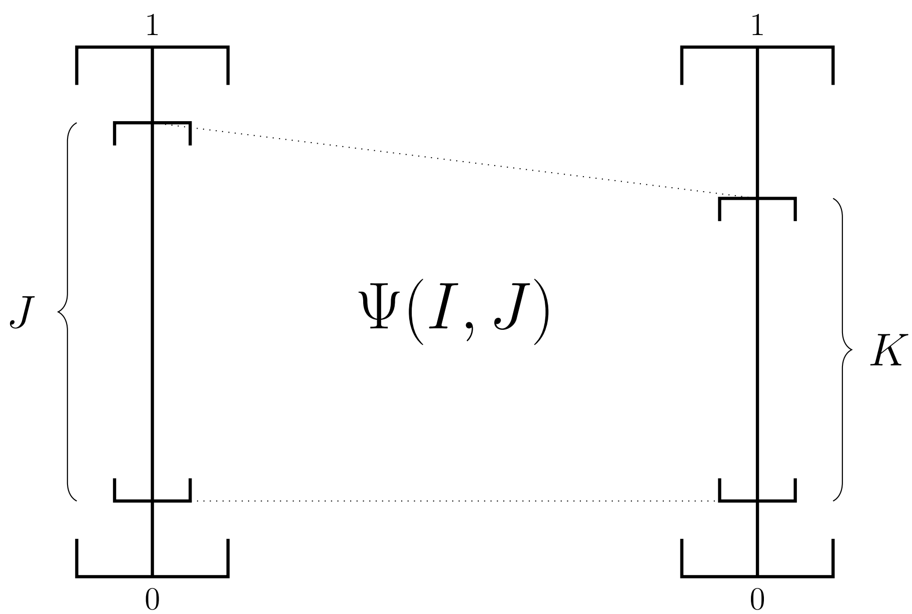

Figura 5.2: Ilustración de $\Psi(J,K)$

Teniendo en cuenta lo anterior vamos a definir $h : F_n([\,0,1]\,) \to F_n([\,0,1]\,)$ (ver Figura 5.3) de la siguiente forma:

$$h(D) = \begin{cases} \psi([\,m(D), M(D)]\,, [\,\sigma_1(\phi(D)), \sigma_2(\phi(D))]\,)[\,D] & \text{si } D \notin F_1([\,0,1]\,), \\ D & \text{si } D \in F_1([\,0,1]\,). \end{cases}$$

[Af1] Sea $D \in F_n([0,1]) \setminus F_1([0,1])$, entonces $m(h(D)) = \sigma_1(\phi(D))$, $M(h(D)) = \sigma_2(\phi(D))$ y $m(h(D)) < M(h(D))$.

Tenemos que $m(D) < M(D)$ por lo que $(m(D), M(D)) = \phi(D) \notin \Delta$ y $\sigma(\phi(D)) \notin \Delta$, entonces sabemos que $\sigma_1(\phi(D)) < \sigma_2(\phi(D))$. Recordemos que $\psi([m(D), M(D)], [\sigma_1(\phi(D)), \sigma_2(\phi(D))])$ es la función que transforma linealmente el intervalo $[m(D), M(D)]$ en el intervalo $[\sigma_1(\phi(D)), \sigma_2(\phi(D))]$ por lo que el valor $m(D)$ va justamente a $\sigma_1(\phi(D))$ y $M(D)$ justamente a $\sigma_2(\phi(D))$ y más aún $\sigma_1(\phi(D))$ es el mínimo de evaluar dicha función en D, es decir $m(h(D)) = \sigma_1(\phi(D))$, análogamente podemos concluir $M(h(D)) = \sigma_2(\phi(D))$.

Tenemos que $m(h(D)) = \sigma_1(\phi(D)) < \sigma_2(\phi(D)) = M(h(D))$, con lo que concluimos la prueba de [Af1].

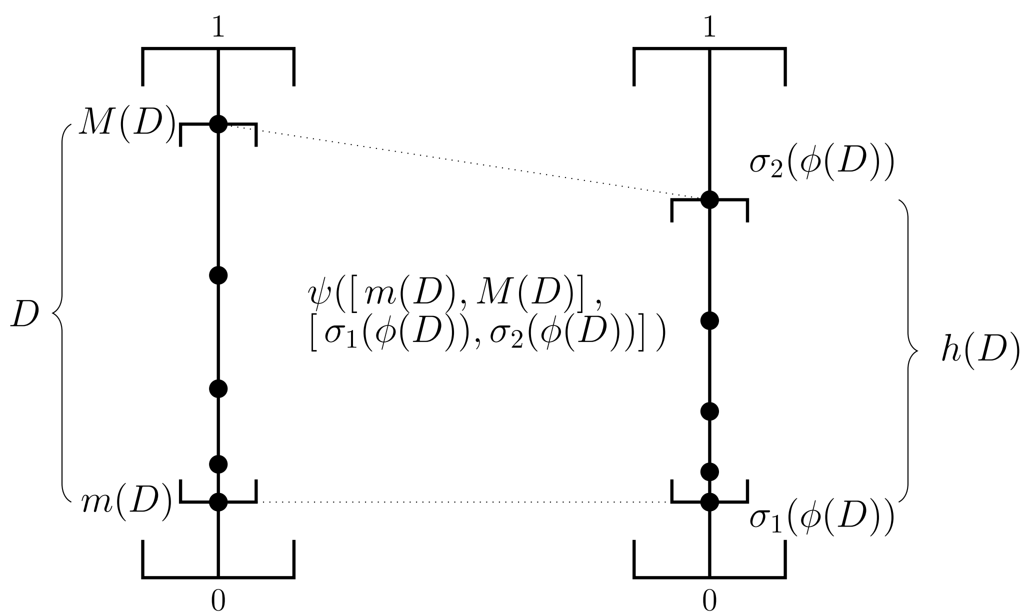

Figura 5.3: Ilustración de h en caso que $D \notin F_1([0,1])$

PASO 2) Veamos que h es un homeomorfismo.

1) h es continua.

Sea $\psi' : (C([0,1]) \setminus [[0,1]]^1) \times (C([0,1]) \setminus [[0,1]]^1) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$\psi'(J,K,t) = \frac{t - m(J)}{M(J) - m(J)}M(K) + \frac{M(J) - t}{M(J) - m(J)}m(K)$$

Como las funciones m y M son continuas y la expresión $M(J) - m(J)$ nunca se anula en el dominio tenemos que la función ψ' es continua. Observemos que si J y K son intervalos no degenerados de $[0,1]$ y $t \in [0,1]$, entonces $\psi(J,K)(t) = \psi'(J,K,t)$; con lo cuál sabemos que la función h es continua en todo el conjunto abierto $F_n([0,1]) \setminus F_1([0,1])$.

Veamos que la función h es continua por sucesiones, consideremos una sucesión convergente $\{D_n\} \to D$ en $F_n([0,1])$ buscamos probar que $\{h(D_n)\} \to h(D)$. Si $\{D_n\} \subseteq F_1([0,1])$, entonces $D \in F_1([0,1])$ y al ser h la identidad en $F_1([0,1])$ es claro que $\{h(D_n)\} \to h(D)$; si $\{D_n\} \subseteq F_n([0,1]) \setminus F_1([0,1])$ y $D \in F_n([0,1]) \setminus F_1([0,1])$, entonces por el párrafo anterior se cumple la continuidad.

Nos hace falta considerar el caso en que $\{D_n\} \subseteq F_n([0,1]) \setminus F_1([0,1])$ y $D \in F_1([0,1])$; tomemos una sucesión de este tipo, digamos $\{D_n\} \to \{p\}$.

Tenemos que

$$lim_{n\to\infty} m(D_n) = p = lim_{n\to\infty} M(D_n)$$

por lo que

$$lim_{n\to\infty} \phi(D_n) = (p,p)$$

aplicando σ tenemos

$$lim_{n\to\infty} \sigma(\phi(D_n)) = (p,p)$$

y en particular

$$lim_{n\to\infty} \sigma_1(\phi(D_n)) = p \text{ y } lim_{n\to\infty} \sigma_2(\phi(D_n)) = p.$$

Por la [Af1] $m(h(D_n)) = \sigma_1(\phi(D_n))$ y $M(h(D_n)) = \sigma_2(\phi(D_n))$ por lo que $lim_{n\to\infty} m(h(D_n)) = p$ y $lim_{n\to\infty} M(h(D_n)) = p$ de donde podemos concluir que $\{h(D_n)\} \to \{p\}$ y como $\{p\} = h(\{p\})$ tenemos $\{h(D_n)\} \to h(\{p\})$ como buscamos y con esto concluimos que h es continua.

2) h es inyectiva.

Sean $D, E \in F_n([0,1])$ tales que $h(D) = h(E)$.

Si $D \notin F_1([0,1])$. Por [Af1] sabemos que $m(h(D)) < M(h(D))$, por lo que $h(D) \notin F_1([0,1])$ y por lo tanto $h(E) \notin F_1([0,1])$; si suponemos

$E \in F_1([\,0,1]\,)$, entonces por definición $h(E) \in F_1([\,0,1]\,)$ lo cual sería una contradicción, por lo que $E \notin F_1([\,0,1]\,)$.

Tenemos por [Af1] que $\sigma_1(\phi(D)) = m(h(D)) = m(h(E)) = \sigma_1(\phi(E))$ y $\sigma_2(\phi(D)) = m(h(D)) = m(h(E)) = \sigma_2(\phi(E))$ por lo que

$$\psi([\,m(D), M(D)]\,, [\,\sigma_1(\phi(D)), \sigma_2(\phi(D))]\,) \text{ y}$$
$$\psi([\,m(E), M(E)]\,, [\,\sigma_1(\phi(E)), \sigma_2(\phi(E))]\,)$$

son la misma función.

Entonces

$$\begin{aligned}&\psi([\,m(D), M(D)]\,, [\,\sigma_1(\phi(D)), \sigma_2(\phi(D))]\,)[\,D] = h(D) = \\ &h(E) = \psi([\,m(E), M(E)]\,, [\,\sigma_1(\phi(E)), \sigma_2(\phi(E))]\,)[\,E] = \\ &\psi([\,m(D), M(D)]\,, [\,\sigma_1(\phi(D)), \sigma_2(\phi(D))]\,)[\,E]\end{aligned}$$

y por ser inyectiva $\psi([\,m(D), M(D)]\,, [\,\sigma_1(\phi(D)), \sigma_2(\phi(D))]\,)$ tenemos que $D = E$.

Ahora pensemos el caso $D \in F_1([\,0,1]\,)$; si suponemos que $E \notin F_1([\,0,1]\,)$, entonces por [Af1] sabemos que $m(h(E)) < M(h(E))$ por lo que $h(D) = h(E) \notin F_1([\,0,1]\,)$, como por definición $h(D) \in F_1([\,0,1]\,)$ llegamos a una contradicción, lo que nos dice que $E \in F_1([\,0,1]\,)$. Por tal tenemos que $D = h(D) = h(E) = E$, como buscamos.

Hasta aquí podemos afirmar que h es inyectiva.

3) h es suprayectiva.

Sea $E \in F_n([\,0,1]\,)$, si $E \in F_1([\,0,1]\,)$, entonces sabemos que $E = h(E)$ y así hemos terminado.

Supongamos $E \notin F_1([\,0,1]\,)$, definamos $(a,b) = \sigma^{-1}((m(E), M(E)))$; como $m(E) < M(E)$ tenemos que $a < b$ así que podemos pensar en la función

$$\psi([\,a,b]\,, [\,m(E), M(E)]\,) : [\,a,b] \to [\,m(E), M(E)]$$

que es suprayectiva, observemos que $E \subseteq [\,m(E), M(E)]$ por lo que podemos definir $D = \psi([\,a,b]\,, [\,m(E), M(E)]\,)^{-1}(E) \in F_n([\,0,1]\,)$; finalmente por definición tenemos que $h(D) = E$ como buscamos.

Al ser h una función biyectiva y continua entre continuos por el Lema 2.0.17 h es un homeomorfismo.

PASO 3) Evaluemos h en el conjunto B; que recordemos cumple $|B \cap \{0,1\}| = 2$.

Observemos que $m(B) = 0$, $M(B) = 1$, $\sigma_1(\phi(B)) = \sigma_1((0,1)) = 0$ y $\sigma_2(\phi(B)) = \sigma_2((0,1)) = \frac{1}{2}$.

Por la [Af1] $m(h(B)) = \sigma_1(\phi(B)) = 0$ y $M(h(B)) = \sigma_2(\phi(B)) = \frac{1}{2}$ de donde $|h(B) \cap \{0,1\}| = 1$.

Finalmente mostremos el resultado de este lema:

Como $|h(A) \cap \{0,1\}| = 1$ por hipótesis, por el Lema 5.2.1 inciso b) sabemos que existe un homeomorfismo $H \in \mathcal{H}(F_n([0,1]))$ tal que $H(h(B)) = A$. Si consideramos $H \circ h \in \mathcal{H}(F_n([0,1]))$, entonces se cumple $H \circ h(B) = A$ por lo que dicho homeomorfismo concluye lo que buscamos demostrar. $\square$

5.3. Grado de homogeneidad de $F_n([0,1])$

Lema 5.3.1. *Sea $k, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$ y $1 \leq k \leq n$, entonces:*

a) DB_k es una órbita de $F_n([0,1])$.

b) DI_k es una órbita de $F_n([0,1])$.

Demostración. Por el Lema 5.1.4 sabemos que si $h \in \mathcal{H}(F_n([0,1]))$, entonces $h[DB_k] = DB_k$ y $h[DI_k] = DI_k$, es decir tanto DB_k como DI_k son conjuntos invariantes bajo homeomorfismos.

Para mostrar el inciso b) consideremos $A, B \in DI_k$, tenemos por el inciso c) del Lema 5.1.2 que $A \cap \{0,1\} = \emptyset = B \cap \{0,1\}$ así que por el inciso b) del Lema 5.2.1 podemos encontrar $H \in \mathcal{H}(F_n([0,1]))$ tal que $H(A) = B$, con lo que sabemos que A y B son conjuntos en la misma órbita; más aún, lo anterior nos demuestra que todo el conjunto DI_k está en una misma órbita. Como DI_k es invariante bajo homeomorfismos podemos concluir que DI_k es una órbita.

Para el inciso a) consideremos $A, B \in DB_k$, tenemos por el inciso b) del Lema 5.1.2 que $A \cap \{0,1\} \neq \emptyset \neq B \cap \{0,1\}$. En el caso en que $|A \cap \{0,1\}| = |B \cap \{0,1\}| = 1$ por el inciso b) del Lema 5.2.1 podemos encontrar $H \in \mathcal{H}(F_n([\,0,1]\,))$ tal que $H(A) = B$; en el caso en que $|A \cap \{0,1\}| = |B \cap \{0,1\}| = 2$ nuevamente por el inciso b) del Lema 5.2.1 podemos encontrar $H \in \mathcal{H}(F_n([\,0,1]\,))$ tal que $H(A) = B$; finalmente en el caso en que $|A \cap \{0,1\}| = 1$ y $|B \cap \{0,1\}| = 2$ o simétricamente $|A \cap \{0,1\}| = 2$ y $|B \cap \{0,1\}| = 1$ por el Lema 5.2.2 podemos encontrar $H \in \mathcal{H}(F_n([\,0,1]\,))$ tal que $H(A) = B$. Con esto sabemos que los conjuntos en DB_k pertenecen a una misma órbita.

Como DB_k es invariante bajo homeomorfismos podemos concluir que DB_k es también una órbita. □

El siguiente lema es el resultado final del trabajo realizado hasta ahora en este capítulo:

Teorema 5.3.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, se cumple:*

1. *Si $n \leq 3$, entonces $hd(F_n([\,0,1]\,)) = 2$.*
2. *Si $n \geq 4$, entonces $hd(F_n([\,0,1]\,)) = 2n$.*

Demostración. Si $n = 1$, entonces por el Lema 2.0.15 sabemos que $F_1([\,0,1]\,)$ es homeomorfo al espacio $[\,0,1]\,$. Este espacio tiene exactamente dos órbitas, a saber $(0,1)$ y $\{0,1\}$, por lo cual podemos afirmar $hd(F_1([\,0,1]\,)) = 2$.

Si $n = 2$, entonces por el Lema 2.0.15 sabemos que $F_2([\,0,1]\,)$ es homeomorfo al espacio $[\,0,1]^{\,2}$; además, sabemos que este espacio tiene exactamente dos órbitas por lo cual $hd(F_2([\,0,1]\,)) = 2$.

Si $n = 3$, entonces por el Lema 2.0.15 sabemos que $F_3([\,0,1]\,)$ es homeomorfo al espacio $[\,0,1]^{\,3}$. Este espacio tiene dos órbitas por lo cual $hd(F_3([\,0,1]\,)) = 2$.

Si $n \geq 4$, entonces por el Lema 5.3.1 tenemos que cada uno de los n conjuntos DB_k y cada uno de los n conjuntos DI_k es una órbita en $F_n([\,0,1]\,)$; además, por el inciso a) del Lema 5.1.2 estos son $2n$ conjuntos distintos, ajenos dos a dos y que unen a $F_n([\,0,1]\,)$ por lo que podemos afirmar $hd(F_n([\,0,1]\,)) = 2n$. □

Bibliografía

[1] A. Illanes, Models of hyperspaces, Topol. Proc. 41 (2013) 1–26.

[2] A. Illanes, E. Castañeda, Finite graphs have unique symmetric products, Topol. Appl. 153 (2006) 1434–1450.

[3] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1998.

[4] D. B. Fuks and V. A. Rokhlin, Beginner's course in topology. Geometric chapters. Translated from the Russian by A. Iacob. Universitext. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[5] James Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Inc., USA, 1996.

[6] K. Borsuk, S. Ulam, On symmetric products of topological spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931) 875–882.

[7] R. Boot, On the third symmetric product of S1, Fundam. Math. 39 (1952) 364–368.

[8] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, Rigidity of symmetric products, Topol. Appl. 160 (2013) 1577–1587.

[9] R. Molski, On symmetric products, Fundam. Math. 44 (1957) 165–170.

[10] S. B. Nadler Jr., Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1978.

[11] S. B. Nadler Jr., Continuum Theory; An Introduction, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[12] W. Hurewicz, H. Wallman, Dimension Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974, ninth printing.