



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Flujo en tuberías para fluidos
adelgazantes**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

José Luis Villalobos Piñera

DIRECTOR DE TESIS

Dr. José Roberto Zenit Camacho



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Principalmente quisiera agradecer a mis padres, Magyar y José Luis, por el apoyo que me han brindado en lo que llevo de vida y por todo lo que hoy me hace ser quien soy, jamás podré agradecer todo lo que han hecho por mi. Gracias a mi hermana, Katya, por ser un gran ejemplo para mí, por saber escuchar y aconsejarme en momentos difíciles. A mis primos, Oscar y Jesús, por todo el apoyo, comprensión y momentos increíbles. Además quisiera agradecer a Ed y Carlos, por todo el apoyo, consejos, platicas y momentos divertidos.

Agradezco a la UNAM y a la Facultad de Ingeniería, por la formación que me han dado. A todos los profesores que durante la carrera compartieron su conocimiento conmigo. También agradezco a mis amigos y compañeros que me acompañaron durante estos 5 años. A Ernesto, Antonio, Rodrigo, Carlos y Hugo por su amistad y grandes momentos.

Muchas gracias a mi asesor, el Dr. Roberto Zenit, quien ha sido un gran ejemplo a seguir y me ha brindado su apoyo durante el desarrollo de este trabajo. También quisiera agradecer a CONACYT por el apoyo para ayudante de investigador del SNI que me fue brindado con el fin de llevar a cabo esta tesis.

Resumen

En este trabajo se presenta una discusión analítica sobre fluidos no newtonianos con un enfoque en fluidos de la industria petrolera. Se presentan los antecedentes teóricos sobre el flujo en tuberías, fluidos no newtonianos y se dan a conocer las principales propiedades del petróleo, así como sus condiciones de transporte y producción. Se desarrollan matemáticamente las soluciones exactas a las ecuaciones de Navier-Stokes, para dos tipos de ductos: tubería de sección circular uniforme y tobera (convergente o divergente). Dichas soluciones se normalizaron para poder obtener una representación gráfica del comportamiento que adquiere el flujo, gradiente de presión, coeficiente de fricción y la resistencia hidráulica.

Índice general

Nomenclatura	VII
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XIII
1. Introducción	1
1.1. Flujo en tuberías	1
1.1.1. Régimen de flujo	2
1.1.2. Viscosidad y rapidez de deformación	4
1.1.3. Ley de Poiseuille	5
1.2. Fluidos no-newtonianos	6
1.2.1. Modelo ley de potencia	6
1.3. Propiedades del petróleo	8
1.3.1. Composición	8
1.3.2. Densidad y contenido de azufre	8
1.3.3. Viscosidad	10
1.3.4. Propiedades reológicas	10
1.3.5. Condiciones de transporte y producción	11
1.4. Justificación	12
1.5. Hipótesis	12
2. Desarrollo teórico	13
2.1. Flujo en una tubería uniforme de un fluido no-newtoniano	13
2.1.1. Planteamiento	13
2.1.2. Solución	15
2.1.3. Formas adimensionales	17
2.1.3.1. Lubricación mecánica	20
2.2. Flujo en una tubería de sección convergente o divergente de un fluido newtoniano	22
2.2.1. Planteamiento	22
2.2.2. Solución	23
2.2.3. Formas adimensionales	28

ÍNDICE GENERAL

2.3. Flujo en una tubería de sección convergente o divergente de un fluido no-newtoniano	30
2.3.1. Planteamiento y solución	30
2.3.2. Formas adimensionales	33
3. Resultados	35
3.1. Tubería uniforme para un fluido no-newtoniano	35
3.2. Tubería de sección convergente o divergente para un fluido newtoniano .	39
3.3. Tubería de sección convergente o divergente para un fluido no-newtoniano	41
3.4. Lubricación mecánica	45
4. Discusión	47
4.1. Tubería uniforme	47
4.2. Tubería de sección convergente o divergente	49
4.3. Lubricación mecánica	50
5. Conclusiones	51
Bibliografía	53

Nomenclatura

Símbolo	Significado	Unidades típicas
$^{\circ}API$	Grados API	[1]
C_f	Coefficiente de fricción	[1]
D	Diámetro de la tubería	[m]
D_t^*	Relación de diámetros de la tubería de sección convergente o divergente	[1]
\vec{g}	Vector de aceleración de la gravedad	[m/s ²]
G	Gradiente de presión	[Pa/m]
k	Índice de consistencia	[Pa.s ⁿ]
K''	Parámetro en función de temperatura y el fluido	[(mg/s)/(mmHg)mm ³]
L	Longitud de la tubería	[m]
n	Índice de potencia	[1]
N	Número de tuberías	[1]
P	Función de presión	[Pa]
Q	Flujo, Gasto volumétrico	[m ³ /s]

ÍNDICE GENERAL

R	Radio de la tubería	[m]
R^2	Coefficiente de determinación	[1]
Re	Número de Reynolds	[1]
R_H	Resistencia hidráulica	[Pa.s/m ³]
R_z	Función de radio	[m]
SG	Gravedad específica	[1]
\bar{v}	Velocidad media	[m/s]
\vec{v}	Vector de velocidad	[m/s]
v_z	Perfil de velocidad	[m/s]
V	Orden de magnitud de la velocidad media	[m/s]
X	Factor en función del índice de potencia y los términos de referencia newtonianos	[s ^{1-1/n}]
Y^*	Factor en función del índice de potencia y la relación de diámetros	[1]
Z^*	Factor en función del índice de potencia y la relación de diámetros	[1]

Letras griegas

$\dot{\gamma}$	Rapidez de deformación	[1/s]
Δ	Diferencial	[1]
η	Viscosidad aparente	[Pa.s]
μ	Viscosidad dinámica	[Pa.s]
μ_{lp}	Relación consistencia-viscosidad	[s ^{1/n-1}]

ρ	Densidad	$[kg/m^3]$
τ	Esfuerzo cortante	$[Pa/m^2]$
τ_w	Esfuerzo cortante en la pared de la tubería	$[Pa/m^2]$

Subíndices

0	Entrada de la tubería
G	Gradiente de presión constante (para los casos de resistencia hidráulica adimensional y coeficiente de fricción normalizado)
lm	Lubricación mecánica
lp	Solución tubería de sección circular uniform (fluido no-newtoniano)
L	Salida de la tubería
n	Solución tubería de sección circular uniforme (fluido newtoniano)
Q	Gasto constante (para los casos de resistencia hidráulica adimensional y coeficiente de fricción normalizado)
r, θ, z	Componentes de velocidad en coordenadas cilíndricas
$rz, \theta z, zz$	Componentes simétricas del tensor de esfuerzos en coordenadas cilíndricas
tlp	Solución tubería de sección convergente o divergente (fluido no-newtoniano)
tn	Solución tubería de sección convergente o divergente (fluido newtoniano)

ÍNDICE GENERAL

Superíndices

*	Adimensional
'*	Adimensional (indica la solución para una tubería de sección convergente o divergente; caso no-newtoniano respecto al newtoniano)

Operadores matemáticos

d	Derivada total
∂	Derivada parcial
∇	Gradiente
$\nabla \cdot$	Divergencia
∇^2	Laplaciano
\cdot	Producto punto

Índice de figuras

1.1. Experimento de Reynolds para un flujo laminar	2
1.2. Experimento de Reynolds: (a) flujo transitorio; (b) flujo turbulento . . .	3
1.3. Perfil de velocidad para un flujo cortante simple	4
1.4. Esfuerzo cortante contra rapidez de corte, variando al índice de potencia	7
2.1. Tubería uniforme	14
2.2. Gráfica perfil de velocidad adimensional, tubería uniforme	18
2.3. Tobera convergente	22
3.1. Q_{lp}^* contra n , variando μ_{lp}	36
3.2. R_{HGlp}^* contra n , variando μ_{lp}	37
3.3. G_{lp}^* contra n , variando μ_{lp}	38
3.4. Q_{tn}^* contra D_t^*	40
3.5. G_{tn}^* contra D_t^*	40
3.6. Q_{tlp}^* contra n , variando D_t^*	41
3.7. R_{HGtlp}^* contra n , variando D_t^*	42
3.8. G_{tlp}^* contra n , variando D_t^*	43
3.9. Q_{tlp}^* contra n , variando μ_{lp}	44
3.10. Q_{lm}^* contra n , variando el número de tuberías	45
3.11. G_{lm}^* contra n , variando el número de tuberías	46
4.1. Intervalo de flujo aproximadamente constante	48
4.2. Acercamiento de la curva donde: $\mu_{lp} = 1$, $G_n = 100[Pa/m]$ y $D_n = 0.5[m]$	49

Índice de tablas

1.1. Intervalos de Re para flujo en tuberías	3
1.2. Valores de k y n para distintos fluidos	7
1.3. Clasificación del petróleo crudo	9
1.4. Densidad y niveles de azufre presentes en algunos tipos importantes de petróleo	10
1.5. Parámetros modelo ley de potencia para crudo pesado	11
3.1. Valores de referencia para una tubería uniforme en el caso newtoniano .	35
3.2. Intervalos para la relación de diámetros de la tubería de sección conver- gente o divergente	39

Introducción

En este Capítulo se presentan los antecedentes teóricos sobre el flujo en tuberías, con un enfoque en flujo laminar e incompresible. En la primera Sección se presentan las definiciones para los distintos regímenes de flujo, la relación existente entre viscosidad y rapidez de deformación, el desarrollo y parte del contexto histórico de la solución para el flujo de Pouseuille. En la segunda Sección se presenta el concepto de fluido no-newtoniano, además del modelo reológico de ley de potencia. En la última Sección se dan a conocer de forma general las principales propiedades del petróleo crudo, así como las propiedades asociadas al modelo de ley de potencia para dos tipos de muestras: petróleo crudo pesado y una mezcla de petróleo crudo pesado con petróleo crudo ligero. El Capítulo concluye con la presentación de la justificación del presente trabajo, junto con la hipótesis del mismo.

El objetivo general de esta tesis es estudiar el efecto de la reología no newtoniana en el transporte de fluidos en tuberías.

1.1. Flujo en tuberías

El trasiego de fluidos por medio de tuberías es uno de los problemas prácticos de mayor importancia en la ingeniería de fluidos. En casi cualquier diseño de ingeniería se observan sistemas de tuberías, por lo cual su estudio es de suma importancia para garantizar el correcto funcionamiento de dichos sistemas. En general los estudios realizados para el flujo en tuberías son en su mayoría experimentales, por lo que este campo ha desarrollado poca teoría. El transporte eficiente de fluidos a través de tuberías representa un reto importante, ya que el gradiente de presión requerido para que se mueva el fluido depende de la geometría de la tubería, accesorios adicionales (codos, tes, etc.), un gasto constante y ciertas propiedades del fluido. Esto último se visualiza en el tipo de bomba que se tiene que utilizar para compensar ese gradiente de presión y en los materiales en que debe hacerse la tubería para soportar dichas presiones. Todo lo anterior impacta en los costos asociados al transporte.

1.1.1. Régimen de flujo

Una característica muy importante del flujo en tuberías es la capacidad del mismo para mantenerse estable ante ciertas perturbaciones. En general el análisis de flujo en tuberías suele hacerse mediante la ecuación de la energía. Otra forma es resolver las ecuaciones de Navier-Stokes de forma analítica bajo ciertas suposiciones. Aquí es donde entra el concepto de régimen de flujo, pues, dependiendo del mismo, se podrá optar por un tipo de análisis de flujo u otro.

En primer lugar tenemos al régimen de flujo laminar, el cual se concibe como un patrón de flujo bien ordenado, donde se supone que las capas del fluido se deslizan unas sobre otras. Una manera más sencilla para ilustrar este régimen de flujo es haciendo referencia al experimento de Reynolds para flujos viscosos (1883). En este experimento se visualiza el cambio de régimen mediante un sistema que cuenta con una tubería transparente por la que fluye agua, y además, posee una válvula para regular la velocidad del flujo. Con el fin de observar los cambios en el flujo, Reynolds, añadió a la entrada de la tubería un sistema que inyectaba una tinta al fluido, la cual poseía la misma gravedad específica que el agua. Reynolds observó que al mantener una baja velocidad en el fluido la tinta que fluía con el agua presentaba un patrón uniforme formando una línea recta en el centro de la tubería, debido a la naturaleza ordenada del flujo.

Reynolds descubrió que si abría gradualmente la válvula, el patrón presentado por el flujo laminar tenía un cambio, se notaba una cierta inestabilidad en el filamento de tinta. A esto último se le conoce como el régimen de transición, ya que el flujo comienza a perder su forma ordenada. Una vez que el flujo pierde dicho orden, Reynolds, estableció que se encontraba en un régimen de flujo turbulento, el cual se caracteriza por el desorden de las capas de fluido, bajo el cual pueden formarse vórtices y demás patrones aleatorios en el flujo.(16) El experimento mencionado se presenta de forma gráfica en la figura 1.1, para un flujo laminar, y en la figura 1.3 se muestra lo que se observaría para un régimen transitorio y turbulento.

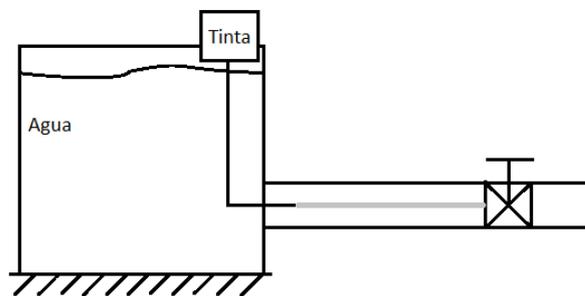


Figura 1.1: Experimento de Reynolds para un flujo laminar

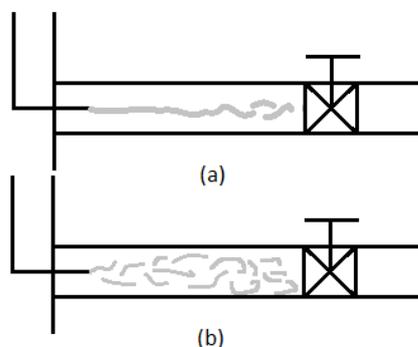


Figura 1.2: Experimento de Reynolds: (a) flujo transitorio; (b) flujo turbulento

Basándose en su investigación, Reynolds, planteó un parámetro adimensional que representa que tan grandes son las fuerzas inerciales con respecto a las viscosas. El valor de este parámetro ahora llamado número de Reynolds, permite establecer distintos regímenes de flujo. La expresión para definir al número de Reynolds se presenta en la siguiente ecuación:

$$Re = \frac{\text{Fuerzas inerciales}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\rho D \bar{v}}{\mu} \quad (1.1)$$

-donde ρ es la densidad del fluido, D es el diámetro de la tubería, \bar{v} es la velocidad media y μ es la viscosidad. Los intervalos del número de Reynolds flujo en tuberías se presentan en la tabla 1.1, donde podemos observar que aunque se definen los intervalos, el régimen de flujo en algunos casos no presenta una alta dependencia con el número de Reynolds.

Tabla 1.1: Intervalos de Re para flujo en tuberías (18)

Régimen	Intervalo
Laminar lento altamente viscoso	$Re < 1$
Laminar con fuerte dependencia del número de Reynolds	$1 < Re < 100$
Laminar (útil en teoría de capa límite)	$100 < Re < 10^3$
Transición a la turbulencia	$10^3 < Re < 10^4$
Turbulento con moderada dependencia del número de Reynolds	$10^4 < Re < 10^6$
Turbulento con baja dependencia del número de Reynolds	$10^6 < Re$

Cabe mencionar que aunque los intervalos mostrados en la tabla son válidos, estos no son absolutos ya que en experimentos en un ambiente controlado se han logrado

obtener flujos laminares con valores altos del número de Reynolds.

1.1.2. Viscosidad y rapidez de deformación

A diferencia de un sólido, un fluido se caracteriza por el comportamiento que presenta al ser sometido a una fuerza aplicada de forma tangencial sobre su superficie, también llamado esfuerzo cortante. Conforme el fluido tiende a deformarse presenta una resistencia a fluir, posteriormente fluye y su velocidad aumenta a la vez que crece el esfuerzo. Dicha resistencia al movimiento es debida al efecto de fricción intermolecular en el fluido, mejor conocido como viscosidad, μ , una de las propiedades más importantes para un fluido. Dependiendo del fluido, la viscosidad puede cambiar hasta 10^3 ordenes de magnitud (2), por lo que es evidente que estos enormes cambios no pueden ser ignorados en los cálculos para el flujo en tuberías.

Si se considera un flujo entre dos placas paralelas, de las cuales una se desliza en una dirección deformando al fluido, y se mantiene una fuerza constante el tiempo suficiente para que el sistema llegue a un estado estacionario, se vería que el perfil de velocidades es parecido a como se ve en la figura 1.3 .

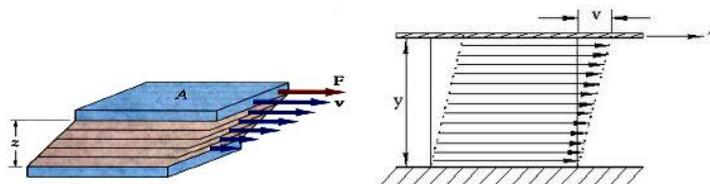


Figura 1.3: Perfil de velocidad para un flujo cortante simple (16)

Con base en la idea anterior se establece que, para un fluido cuya viscosidad es constante, el esfuerzo cortante es proporcional a la rapidez de deformación, donde la constante de proporcionalidad entre ambos es la viscosidad. La relación anteriormente explicada es conocida como la ley de viscosidad de Newton:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1.2)$$

-donde $\dot{\gamma}$ es igual a la derivada de la velocidad en dirección de la fuerza con respecto a la dirección perpendicular a la misma $\frac{dv}{dy}$, para el caso de las placas paralelas, considerando coordenadas cartesianas (16). Para un flujo laminar en una tubería circular, la rapidez de deformación media se puede expresar como una función de la velocidad media y el diámetro de la tubería (1):

$$\dot{\gamma} = \frac{8\bar{v}}{D} \quad (1.3)$$

1.1.3. Ley de Poiseuille

Hacia el año 1847 Jean L. Poiseuille desarrolló diversos experimentos con el fin de elaborar una relación entre el flujo o gasto volumétrico Q , caída de presión ΔP , longitud L y diámetro del tubo D . Es entonces que la ley de Poiseuille, descrita por la ecuación 1.4, nos da un primer acercamiento a la relación entre los parámetros mencionados anteriormente, donde K'' es una función de temperatura que también depende del fluido circundante.

$$Q = K'' \frac{\Delta P D^4}{L} \quad (1.4)$$

Aunque Navier definió la viscosidad en el año 1823, Poiseuille nunca hizo mención de la misma en su trabajo. Para el año 1860, Eduard Hagenbach, logró encontrar una derivación de la ecuación de Poiseuille (17) :

$$Q = \frac{\pi D^4 \Delta P}{128 \mu L} \quad (1.5)$$

Para la obtención de la ecuación anterior el planteamiento más común parte de las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de conservación de masa, para un flujo laminar e incompresible (19).

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.7)$$

-donde \vec{v} es el vector de velocidad, (v_r, v_θ, v_z) para coordenadas cilíndricas.

Suponiendo que el flujo es unidireccional se puede obtener una solución exacta a las ecuaciones de Navier-Stokes. Al resolver para un gradiente de presión constante se encuentra el perfil de velocidad como una función del radio de la tubería.

$$v_z = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (1.8)$$

Una vez que se encuentra el perfil de la velocidad, se integra la ecuación 1.8 en la sección transversal de la tubería, que es la definición de flujo, con lo cual se recupera la ecuación 1.5. Además de lo anterior se puede hacer un cambio de variable donde $\frac{\Delta P}{L} = G$ y despejar a este de la ecuación 1.5 para obtener una expresión que represente al gradiente de presión.

$$G = \frac{128\mu Q}{\pi D^4} \quad (1.9)$$

Un parámetro importante para el análisis del flujo en tuberías es el coeficiente de fricción. Representa la resistencia por fricción que imponen las paredes de la tubería

al fluido circundante. Éste es adimensional y en el caso de la tubería uniforme puede escribirse en función del número de Reynolds.

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2} = \frac{16}{Re} \quad (1.10)$$

La resistencia de un elemento físico (ya sea mecánico, eléctrico, hidráulico o neumático) puede definirse como el cambio en el potencial requerido para producir un cambio unitario en la corriente, razón de flujo o velocidad (14). Entonces, la resistencia de un elemento hidráulico puede definirse como el cociente de la caída de presión entre el gasto. Por lo tanto para una tubería uniforme, la resistencia hidráulica puede ser expresada por:

$$R_H = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{128\mu L}{\pi D^4} \quad (1.11)$$

1.2. Fluidos no-newtonianos

Todo aquel fluido que no cumple con la ley de viscosidad de Newton es conocido como fluido no newtoniano, es decir, no poseen una viscosidad constante. Para estos fluidos el esfuerzo cortante no es directamente proporcional a la rapidez de corte. La parte de la física que se encarga de estudiar la relación entre esfuerzo y deformación de este tipo de fluidos se denomina reología. Esta disciplina estudia las propiedades mecánicas de los fluidos, las cuales pueden ser medidas mediante reómetros. Estos aparatos pueden someter al fluido a distintas rapidezces de deformación y medir el esfuerzo, o viceversa. Debido a la variedad de comportamientos entre los fluidos no newtonianos, su estudio es de suma importancia y más aún su estudio de flujo en tuberías, ya que es muy frecuente encontrar aplicaciones donde se intenta trasegar estos fluidos mediante tuberías, tal es el caso de la extrusión de polimeros, el transporte de petróleo, etc.

1.2.1. Modelo ley de potencia

Propuesta por Ostwald y de Waele (2), la ley de potencia sirve para modelar el comportamiento de los fluidos no newtonianos conocidos como pseudoplásticos y dilatantes. Dicho modelo propone una viscosidad aparente del fluido, η , que es una función de dos parámetros constantes y de la rapidez de deformación.

$$\eta = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (1.12)$$

Esta expresión contiene dos parámetros: k y n , que representan el índice de consistencia y el índice de potencia, respectivamente. Si $n < 1$, el fluido es conocido como pseudoplástico o adelgazante; si $n > 1$, el fluido se conoce como dilatante o espesante; y si $n=1$, se recupera la solución newtoniana, es decir, $\eta = \mu$. Al graficar al esfuerzo

contra la rapidez de corte se obtiene el comportamiento para los distintos fluidos; este gráfico también es conocido como reograma, como se muestra en la figura 1.4.

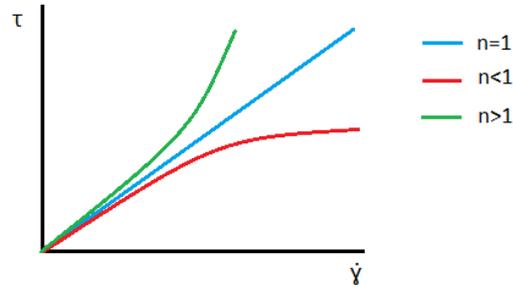


Figura 1.4: Esfuerzo cortante contra rapidez de corte, variando al índice de potencia

Para el caso más común de una tubería de sección circular la rapidez de deformación media puede ser expresada en función de la velocidad media, el diámetro y el índice de potencia (1).

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{1+3n}{4n} \right) \frac{8\bar{v}}{D} \quad (1.13)$$

Para el mismo caso de una tubería de sección circular el número de Reynolds se generaliza en función del índice de consistencia y el índice de potencia (11).

$$Re_{lp} = \frac{D^n \bar{v}^{2-n} \rho}{8^{n-1} k \left(\frac{1+3n}{4n} \right)^n} \quad (1.14)$$

En la tabla 1.2 se muestran valores de los índices de consistencia y de potencia para distintos fluidos.

Tabla 1.2: Valores de k y n para distintos fluidos (2)

Fluido	k [Pa.s ⁿ]	n
Tinta de bolígrafo	10	0.85
Fundición polimerica	10000	0.6
Grasa lubricante	1000	0.1
Suspensión de partículas	-	1.2

El modelo ley de potencia es el más conocido y el más utilizado en problemas de ingeniería. A pesar de esto, este modelo presenta diversos problemas dado que no puede describir viscosidades para valores de rapidez de deformación muy pequeños, además

no se puede construir un tiempo característico, ni una viscosidad característica a partir de los parámetros k y n , y no hay forma de relacionar dichos parámetros con el peso molecular y la concentración (2).

1.3. Propiedades del petróleo

El petróleo es uno de los fluidos de mayor relevancia, puesto que posee un amplio rango de aplicación, por lo cual se genera una alta demanda del mismo. Los crudos son fluidos complejos que pueden causar una variedad de dificultades durante la producción, separación, transporte y refinación del petróleo. Por lo tanto, el estudio del transporte de petróleo a través de tuberías es de suma importancia y es crucial encontrar métodos más eficientes y económicos para su trasiego.

1.3.1. Composición

Como tal el petróleo crudo es una mezcla de un número grande de compuestos hidrocarburos, yendo desde los gases ligeros de estructura química simple, hasta líquidos espesos de aspecto de alquitrán y ceras de estructura química compleja. También contiene varias cantidades de azufre, oxígeno, nitrógeno, arena y agua (13). Aun cuando los componentes o compuestos del petróleo crudo varían ampliamente de depósito en depósito, los constituyentes primordiales son relativamente fijos:

- El contenido de C varía de 83 a 87 %
- El contenido de H_2 de 11 a 14 %

Cuánto más pesado o denso es el crudo, más alta es su proporción de C/H. Debido a los procesos químicos de la refinación, cuánto mayor es la proporción de C/H del crudo, más intenso y costoso es el proceso de refinación que se requiere para producir determinados volúmenes de productos destilados. Por ello, la composición química del petróleo crudo y su presión de vapor influyen en los requisitos de inversión de la refinería(6).

1.3.2. Densidad y contenido de azufre

La densidad de un crudo indica qué tan liviano o pesado es. Los crudos más livianos tienen una mayor proporción de pequeñas moléculas, mientras que los crudos más pesados tienen proporciones más altas de moléculas grandes.

En la ingeniería petrolera una forma de clasificar al petróleo crudo es con la densidad del mismo, lo cual se realiza a partir de los grados API. Por norma los grados API de un fluido pueden ser calculados a partir de la gravedad específica SG , a una temperatura de referencia de $60^\circ F$, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$^{\circ}API = \frac{141.5}{SG} - 131.5 \quad (1.15)$$

El contenido de azufre del crudo se mide generalmente en tanto por ciento en peso (wt %) o en partes por millón por peso (ppmw). En la industria petrolera, el petróleo crudo se denomina con poco azufre (bajo nivel de azufre), si su nivel de azufre es inferior a un cierto valor umbral y sulfurado (alto nivel de azufre), si el nivel de azufre supera el umbral más alto. La mayoría de los crudos sulfurados registran niveles de azufre de entre 1 y 2 %, pero en algunos casos se registran niveles de azufre de $> 4\%$ (6). Debido a la presencia de cantidades elevadas de compuestos de azufre es necesario llevar a cabo la desulfuración ya que en general las refinerías no están habilitadas para trabajar con grandes cantidades de estos compuestos. En un determinado tipo de crudo, la concentración de azufre tiende a incrementar en forma progresiva con un aumento en la cantidad de carbono y por consiguiente un aumento en la densidad del crudo.

La tabla 1.3 muestra, de acuerdo a las propiedades antes mencionadas la clasificación de los diferentes tipos de crudo.

Tabla 1.3: Clasificación del petróleo crudo (6)

Crudo	Densidad [$\frac{kg}{m^3}$]	$^{\circ}API$	Contenido de azufre [wt %]
Ligero dulce	740-850	35-60	0-0.05
Ligero amargo	740-850	35-60	> 0.5
Mediano medio amargo	850-900	26-35	0-1.1
Mediano amargo	850-900	26-35	> 1.1
Pesado dulce	900-1000	10-26	0-1.1
Pesado amargo	900-1000	10-26	> 1.1

Asimismo, en la tabla 1.4 se muestran algunos tipos de crudo que se comercializan en el continente americano.

1. INTRODUCCIÓN

Tabla 1.4: Densidad y niveles de azufre presentes en algunos tipos importantes de petróleo

(6)

Crudo	País	Densidad [$\frac{kg}{m^3}$]	$^{\circ}API$	Contenido de azufre [wt %]
West Texas Intermediate	USA	826	39.8	0.3
Marlim Export	Brasil	933	20.1	0.7
Cano Limon	Colombia	903	25.2	0.9
Oriente Export	Ecuador	904	25	1.4
Maya Heavy Export	México	926	21.3	3.4

1.3.3. Viscosidad

Los crudos, en general, suelen tener viscosidades con diferencias destacables en los órdenes de magnitud dependiendo del crudo del cual se esté hablando (e.g. ligero, pesado, etc.). Los crudos pesados se caracterizan por sus elevadas viscosidades, con una consistencia que va desde una brea pesada a un sólido a temperatura ambiente. La viscosidad de los petróleos ligeros suele oscilar entre 0.001 Pa.s y 0.01 Pa.s. Por su parte, la viscosidad de los crudos pesados y extrapesados suele estar entre 0.02 Pa.s y 1000 Pa.s (10).

Un ejemplo claro de cómo se puede ver alterada la viscosidad bajo distintas condiciones o con el uso de aditivos, puede ser la comparación reológica presentada por Ghannam, et al (8). Ghannam desarrolla una comparación entre distintas muestras petróleo crudo pesado y mezclas de éste. En dicho estudio, realizado con petróleo pesado obtenido de Husky Energy-Lloydminster, Canadá. Se observa que la adición de 10 % de petróleo crudo ligero, obtenido de Shell Canadá-Montreal, al crudo pesado, causa una fuerte reducción en la viscosidad de 10 Pa.s a 1.2 Pa.s (@ 25 °C). Se encuentra que se puede lograr una reducción de la viscosidad aún mayor de 10 Pa.s a 0.375 Pa.s (@ 25 °C) añadiendo 20 % de crudo ligero al crudo pesado.

1.3.4. Propiedades reológicas

Para el caso de estudio nos interesan aquellos crudos que poseen la capacidad de adelgazar al aumentar la rapidez de corte. Esta característica se ha visualizado de forma experimental para el caso del crudo pesado canadiense, mismo que se menciona en la Subsección anterior. El rango de rapidez de deformación utilizado en este caso es entre 0.1 y 750 s^{-1} (8).

Para crudos pesados se han realizado estudios experimentales con el fin de obtener las propiedades reológicas de dichos fluidos. Para este caso en particular nos enfocaremos en las propiedades relacionadas al modelo reológico ley de potencia.

En la tabla 1.5 podemos observar las propiedades obtenidas a partir de dos caracterizaciones recabadas de la literatura. La primera corresponde a petróleo obtenido de Husky Energy – Lloydminster, Canadá. Este posee una densidad de $995 \frac{kg}{m^3}$ ($10.71^\circ API$, @ $15^\circ C$) (9). La segunda pertenece a petróleo obtenido de la refinería PETRONAS, Melaka. En este caso se presentan dos resultados: el primero es para crudo pesado y el segundo para una mezcla de crudo pesado con un 40% de crudo liviano (12).

Tabla 1.5: Parámetros modelo ley de potencia para crudo pesado

	k [Pa.s ⁿ]	n	R ²
Petróleo canadiense	7.438	0.892	0.994
Petróleo melakí	0.42	0.63	0.9975
Mezcla melakí	0.24	0.75	0.9931

Otros estudios se han enfocado en los cambios de viscosidad del crudo con respecto a los cambios de temperatura, puesto que es muy común en la práctica el calentamiento del crudo durante su transporte con el fin de hacer que la viscosidad del crudo se reduzca. En la referencia (1) se realiza un estudio del cambio de las propiedades reológicas del petróleo modelado como un fluido ley de potencia. En éste se encuentra que los cambios en las propiedades reológicas para este modelo, son más significativos para el índice de consistencia; el índice de potencia tiende a mantenerse prácticamente constante ante el aumento de temperatura. Se observa que ante el aumento de temperatura el índice de consistencia disminuye notablemente, mientras que el índice de potencia aumenta un poco.

1.3.5. Condiciones de transporte y producción

El bombeo de crudos pesados y extra pesados a través de las tuberías presenta ciertas dificultades debido a las altas concentraciones de azufre, resinas y asfaltenos. En estudios destinados a la obtención de la caída de presión en oleoductos se han encontrado diversos resultados, los cuales dependen principalmente del diámetro de la tubería, la viscosidad del fluido y la capacidad de producción del mismo expresada en barriles por día. Un caso en particular es el estudio realizado para una línea de transporte de crudo pesado en la cual se calculó una caída de presión de 6 MPa, para tuberías con un diámetro de 0.1 m y un gasto de 5000 bpd, que equivale a $0.009 \frac{m^3}{s}$. El fluido circundante fue caracterizado con una viscosidad de 0.003 Pa.s (4).

1. INTRODUCCIÓN

Un ejemplo de la producción de crudo pesado es Canadá que hacia el año 1995 poseía una producción neta de 502,000 bpd ($0.9 \frac{m^3}{s}$). En dicho caso las líneas de producción tenían diámetros de entre 24 y 48 pulgadas (7).

Los recursos pesados y extrapesados del mundo han empezado a tomar importancia en la revisión de reservas mundial dada la gran cantidad de estos que existe (10). En México la CNH (Comisión Nacional de Hidrocarburos) informa aumentos en la producción de crudos pesados y extrapesados. En 2017 se tuvo una producción nacional para exportación que alcanzo un promedio de 1965 mbd (miles de barriles diarios), en la cual un 54% correspondia a petróleos pesados y extrapesados. Para el 2018, entre los meses de enero y abril, se alcanzo una producción promedio de 1890 mbd, donde la producción de petróleos pesados y extrapesados corresponde al 56% (5).

1.4. Justificación

Debido al incremento de la demanda de petróleo, es necesario encontrar una manera más eficiente de transportar al mismo. En los sistemas de transporte de petróleo la decisión entre realizar un tipo de análisis u otro dependiendo del comportamiento que tenga el fluido puede tener cambios significativos en los resultados, por lo cual al pensar en una mejora para el transporte de petróleo las propiedades que posea el fluido son clave para generar un flujo y la menor resistencia posible. Las propiedades del fluido son muy importantes, ya que se pueden añadir aditivos para controlar a conveniencia dichas propiedades. Por medio de un análisis de flujo en tuberías es posible darse cuenta que tan significantes son los cambios de las propiedades del fluido en la decisión para optar por una solución u otra.

1.5. Hipótesis

Para un fluido no newtoniano, el cambio de las propiedades es determinante para el cálculo de flujo en tuberías. Se argumenta que las propiedades de un crudo modelado afectan al gasto, al gradiente de presión, al coeficiente de fricción y a la resistencia hidráulica. El cambio en estas propiedades afecta el rendimiento de operación en el transporte de fluidos petroleros.

Desarrollo teórico

En este Capítulo se desarrollan de forma teórica las soluciones al flujo en tuberías tomando como punto de partida las ecuaciones de conservación de momentum. Para este propósito se presentan distintas Secciones que desglosan el procedimiento. Se comienza por un planteamiento donde se dan a conocer todas las consideraciones y ecuaciones a utilizar en la resolución del problema. Proseguimos con el desarrollo matemático, donde se aplica una serie de suposiciones en las ecuaciones de conservación de momentum y se presentan las soluciones del sistema en análisis.

2.1. Flujo en una tubería uniforme de un fluido no-newtoniano

El trasiego de fluidos en tuberías de sección circular y de diámetro uniforme es el más común para diversas aplicaciones en la industria, esto debido a su fácil manufactura en una amplia gama de materiales. La sección circular nos da además una menor superficie de contacto entre el fluido y la tubería reduciendo las pérdidas en el flujo.

2.1.1. Planteamiento

Se parte del esquema mostrado en la figura 2.1. Se considera una tubería horizontal de sección transversal circular uniforme, sometida a un gradiente de presión constante.

2. DESARROLLO TEÓRICO

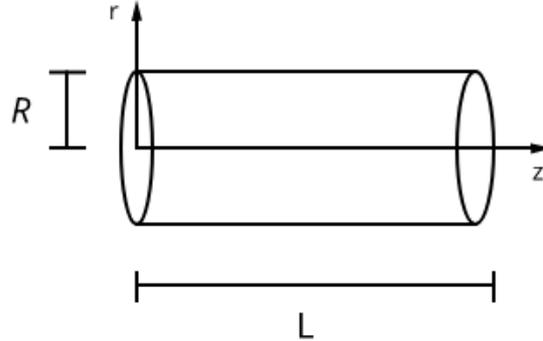


Figura 2.1: Tubería uniforme

Se toman en cuenta las siguientes suposiciones:

1. Coordenadas cilíndricas
2. Fluido incompresible: $\rho = cte$
3. Flujo axisimétrico en dirección θ : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$
4. Flujo estacionario: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
5. Flujo desarrollado en z : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0$
6. Los efectos por fuerzas de cuerpo se excluyen

Se puede suponer que la presión variará de forma lineal con z , por lo tanto la función de presión para la tubería se define como:

$$P = \frac{P_L - P_0}{L}z + P_0 \quad (2.1)$$

La ecuación de conservación de masa para un fluido incompresible es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

Ahora, la ecuación de conservación de momentum en la componente z es:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{\theta z}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) \right) + \rho g_z \quad (2.3)$$

2.1.2. Solución

Al aplicar las suposiciones en la ecuación 2.2 e integrando obtenemos que:

$$v_r = \frac{C}{r} \quad (2.4)$$

Puesto que la velocidad tiene que estar acotada para $r = 0$, $C = 0$. Entonces, el flujo es unidireccional.

Se aplican las respectivas suposiciones a la ecuación 2.3, de donde se obtiene:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) \quad (2.5)$$

Debido a que la variación de la presión a lo largo de la tubería tiene un comportamiento lineal, el gradiente de presión tiene que ser constante e igual a la pendiente de la recta definida en la ecuación 2.1. Entonces, se puede definir al gradiente de presión como:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_0 - P_L}{L} = G \quad (2.6)$$

Sustituyendo esto último en la ecuación 2.5 y, puesto que ahora la ecuación solamente depende de r , se pueden intercambiar las derivadas parciales por derivadas totales, de donde se obtiene una ecuación diferencial de primer orden lineal y ordinaria.

$$\frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) = rG \quad (2.7)$$

Integrando la ecuación anterior se tiene:

$$\tau_{rz} = \frac{rG}{2} + \frac{C_1}{r} \quad (2.8)$$

Para que la solución esté acotada en $r = 0$, $C_1 = 0$, por lo que:

$$\tau_{rz} = \frac{rG}{2} \quad (2.9)$$

A partir de la relación entre esfuerzo cortante y rapidez de corte, dada por la ley de viscosidad de Newton, ecuación 1.2, se sabe que:

$$\tau_{rz} = k \left(-\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^n \quad (2.10)$$

Al sustituir el valor de esfuerzo obtenido en la ecuación anterior en la solución del esfuerzo cortante en la tubería, ecuación 2.9, se obtiene la ecuación a resolver para encontrar el perfil de velocidad.

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = - \left(\frac{Gr}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.11)$$

2. DESARROLLO TEÓRICO

que se puede integrar:

$$v_z = - \left(\frac{G}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C_2 \right) \quad (2.12)$$

Para obtener el valor de C_2 se aplica la condición de frontera que es el no deslizamiento en la superficie de la tubería, es decir, $v_z = 0$ en $r = R$. Entonces:

$$C_2 = \left(\frac{G}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{R^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \quad (2.13)$$

Por lo tanto el perfil de velocidad es:

$$v_z = \frac{n}{1+n} \left(\frac{G}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} \left(R^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1} \right) \quad (2.14)$$

El flujo se encuentra integrando v_z a través de la sección del tubo, obteniéndose:

$$Q = \frac{\pi n R^3}{1+3n} \left(\frac{GR}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.15)$$

Esta última ecuación se puede reexpresar en función del diámetro y renombrar la solución al flujo y sus respectivos parámetros con el subíndice lp :

$$Q_{lp} = \frac{\pi n D_{lp}^3}{8(1+3n)} \left(\frac{G_{lp} D_{lp}}{4k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.16)$$

De la ecuación anterior se despeja G_{lp} , con lo que se obtiene una expresión para el gradiente de presión.

$$G_{lp} = \frac{4k}{D_{lp}} \left(\frac{8(1+3n)Q_{lp}}{\pi n D_{lp}^3} \right)^n \quad (2.17)$$

La velocidad media en la tubería se obtiene dividiendo la ecuación 2.16 entre el área de la sección de la tubería, $A_{lp} = \frac{\pi}{4} D_{lp}^2$:

$$\bar{v}_{lp} = \frac{Q_{lp}}{A_{lp}} = \frac{n D_{lp}}{2(1+3n)} \left(\frac{G_{lp} D_{lp}}{4k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.18)$$

Se puede ahora calcular el coeficiente de fricción:

$$C_{f_{lp}} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_{lp} \bar{v}_{lp}^2} \quad (2.19)$$

-donde τ_w representa al esfuerzo cortante en la pared de la tubería, dado por:

$$\tau_w = \frac{D_{lp} G_{lp}}{4} \quad (2.20)$$

Entonces:

$$C_{f_{lp}} = \frac{16}{Re_{lp}} \quad (2.21)$$

-donde Re_{lp} es el número de Reynolds generalizado, definido en la ecuación 1.14.

Por último se calcula la resistencia hidráulica de la tubería como el cociente entre la caída de presión y el flujo. El primero es despejado de forma sencilla de la ecuación 2.17, a partir de la definición del gradiente de presión, y el segundo se expresa tal cual. Con lo que al reducir se obtiene la siguiente ecuación:

$$R_{H_{lp}} = \frac{\Delta P_{lp}}{Q_{lp}} = \frac{4kL}{D_{lp}} \left(\frac{8(1+3n)}{\pi n D_{lp}^3} \right)^n Q_{lp}^{n-1} \quad (2.22)$$

2.1.3. Formas adimensionales

Ahora que se han encontrado la solución al flujo y demás variables importantes para el flujo en tuberías, se pueden definir una serie de ecuaciones adimensionales para poder graficar el comportamiento de las mismas.

Utilizando la velocidad media se adimensionaliza a la velocidad en z , dividiendo la ecuación 2.14, puesta en términos del diámetro y nombrando respectivamente con el subíndice lp , entre la ecuación 2.18. Al operar algebraicamente el cociente antes mencionado se obtiene:

$$\frac{v_z}{\bar{v}_{lp}} = \frac{1+3n}{1+n} \left(1 - \left(\frac{2r}{D_{lp}} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right) \quad (2.23)$$

Se puede graficar el resultado anterior para observar la forma del perfil de velocidad al variar el índice de potencia, figura 2.2; donde se tiene que el caso newtoniano, $n = 1$, el adelgazante, $n < 1$, y el espesante, $n > 1$. El valor utilizado para n adelgazante y espesante se dan arbitrariamente con una disminución y un aumento proporcionales con respecto al caso newtoniano, es decir, cuando el fluido es adelgazante $n = 0.5$ y cuando es espesante $n = 1.5$.

2. DESARROLLO TEÓRICO

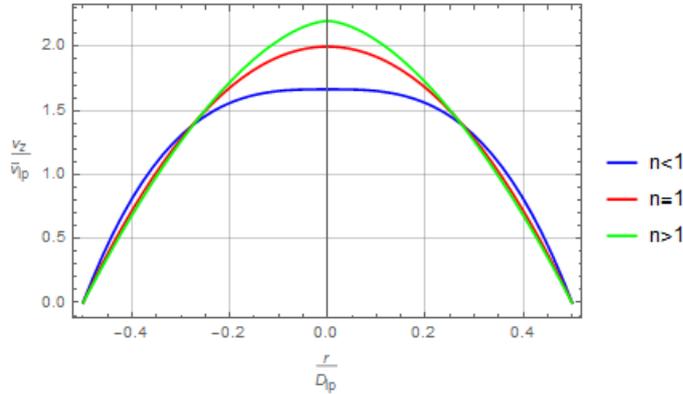


Figura 2.2: Gráfica perfil de velocidad adimensional, tubería uniforme

En la figura anterior se observa que el perfil de velocidad newtoniano muestra una tendencia parabólica. Cuando el fluido se hace adelgazante el perfil tiende a aplanarse, mientras que cuando el fluido se hace espesante el perfil tiende a ser más puntiagudo.

A partir de la solución al gasto se puede definir $Q_{lp}^* = \frac{Q_{lp}}{Q_n}$; donde se toma la solución de la ecuación 2.16 y se divide respecto a la solución newtoniana, ecuación 1.5.

$$Q_{lp}^* = \frac{4^{2-\frac{1}{n}} n \mu D_{lp}^{3+\frac{1}{n}} G_{lp}^{\frac{1}{n}}}{1 + 3n k^{\frac{1}{n}} D_n^4 G_n} \quad (2.24)$$

La ecuación anterior se puede desarrollar con el fin de separar los efectos de cada variable. Se empieza definiendo tres cambios de variable: $\mu_{lp} = \frac{k}{\mu}$, $D_{lp}^* = \frac{D_{lp}}{D_n}$ y $G_{lp}^* = \frac{G_{lp}}{G_n}$, y sustituyendo en la ecuación 2.24. Nótese que μ_{lp} no es un parámetro adimensional, sin embargo, Q_{lp}^* sí es adimensional; el cambio de variable se utiliza para observar cómo es que cambia el índice de consistencia con respecto a la viscosidad. Se puede hacer un último cambio de variable para los demás términos en el análisis, X , con lo que al desarrollar algebraicamente se obtiene:

$$Q_{lp}^* = \frac{X D_{lp}^{*3+\frac{1}{n}} G_{lp}^{*\frac{1}{n}}}{\mu_{lp}^{\frac{1}{n}}} \quad (2.25)$$

-donde X es:

$$X = \frac{4^{2-\frac{1}{n}} n}{1 + 3n} \left(\frac{D_n G_n}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}-1} \quad (2.26)$$

Con el fin de que la ecuación del gasto adimensional sea graficada, para observar los cambios que tiene el flujo al variar las propiedades del fluido, se toman las siguientes consideraciones: mismo gradiente de presión, $G_{lp}^* = 1$ y mismo diámetro, $D_{lp}^* = 1$. Por lo tanto, el flujo adimensional a analizar queda expresado como:

$$Q_{lp}^* = \frac{X}{\mu_{lp}^{\frac{1}{n}}} \quad (2.27)$$

El gradiente de presión adimensional, G_{lp}^* , se puede obtener de la ecuación 2.25:

$$G_{lp}^* = \frac{\mu_{lp} Q_{lp}^{*n}}{X^n D_{lp}^{*3n+1}} \quad (2.28)$$

Para graficar al gradiente de presión, el flujo adimensional y el diámetro adimensional se mantienen constantes: $Q_{lp}^* = 1$ y $D_{lp}^* = 1$, por lo cual la relación a estudiar en este caso queda definida como:

$$G_{lp}^* = \frac{\mu_{lp}}{X^n} \quad (2.29)$$

Ahora se puede definir el coeficiente de fricción normalizado, $C_{f_{lp}}^* = \frac{C_{f_{lp}}}{C_{f_n}}$. Este es obtenido del cociente del coeficiente de fricción dado para un fluido ley de potencia en una tubería uniforme, ecuación 2.21, entre la solución newtoniana, ecuación 1.10, lo que resulta en:

$$C_{f_{lp}}^* = 4^{\frac{2}{n}-4} \left(\frac{1+3n}{n} \right)^2 \frac{D_n^3}{D_{lp}^{1+\frac{2}{n}}} \frac{G_n}{G_{lp}^{\frac{2}{n}-1}} \frac{k_n^{\frac{2}{n}} \rho_n}{\mu^2 \rho_{lp}} \quad (2.30)$$

Al igual que en el caso del flujo adimensional se pueden proponer los mismos cambios de variable para D_{lp}^* , G_{lp}^* y μ_{lp} , con de estos cambios de variable también se obtiene el factor X ; y uno nuevo para la densidad, $\rho_{lp}^* = \frac{\rho_{lp}}{\rho_n}$. De estos cambios de variable se despejan los valores de la solución de ley de potencia, se sustituyen en la ecuación 2.30, se desarrolla algebraicamente y se expresa como:

$$C_{f_{lp}}^* = \frac{G_{lp}^{*1-\frac{2}{n}} \mu_{lp}^{\frac{2}{n}}}{X^2 \rho_{lp}^* D_{lp}^{*1+\frac{2}{n}}} \quad (2.31)$$

De la ecuación anterior podemos obtener dos casos particulares interesantes para el análisis. El primer caso se obtiene al considerar un mismo gradiente de presión, misma densidad y mismo diámetro, es decir, $G_{lp}^* = 1$, $\rho_{lp}^* = 1$ y $D_{lp}^* = 1$, por lo cual la primera ecuación a graficar para el coeficiente de fricción normalizado se expresa a continuación, donde el subíndice G , hace referencia a que el gradiente de presión adimensional es unitario.

$$C_{f_{G_{lp}}}^* = \frac{\mu_{lp}^{\frac{2}{n}}}{X^2} \quad (2.32)$$

En el segundo caso solo cambia en que se considera un mismo flujo, $Q_{lp}^* = 1$, esto es posible sustituyendo en la ecuación 2.31 la definición del gradiente de presión adimensional definido para un flujo adimensional unitario, en la ecuación 2.29. Al realizar lo

2. DESARROLLO TEÓRICO

anterior y desarrollar algebraicamente se obtiene que el coeficiente de fricción adimensional para un mismo flujo es igual a G_{lp}^* .

Finalmente, se puede adimensionalizar la resistencia hidráulica, R_{Hlp}^* .

$$R_{Hlp}^* = \frac{G_{lp}^*}{Q_{lp}^*} \quad (2.33)$$

Para realizar las gráficas de la resistencia hidráulica adimensional a partir de la ecuación anterior, se puede suponer primero que ambas tuberías se encuentran bajo un mismo gradiente de presión, donde Q_{lp}^* fue definido anteriormente para un mismo gradiente de presión en la ecuación 2.27, con lo cual la expresión a graficar está descrita por:

$$R_{HG_{lp}}^* = \frac{1}{Q_{lp}^*} \quad (2.34)$$

Ahora, se puede suponer un mismo flujo, $Q_{lp}^* = 1$, donde la resistencia hidráulica adimensional es exactamente igual a G_{lp}^* . Con lo anterior se observa que existe una similitud entre las formas adimensionales realizadas para $G_{lp}^* = 1$ y otra para las realizadas con $Q_{lp}^* = 1$. Las relaciones siguientes presentan respectivamente dichas similitudes.

$$Q_{lp}^* = \frac{1}{R_{HG_{lp}}^*} = \frac{1}{C_{fG_{lp}}^*{}^2} \quad (2.35)$$

$$G_{lp}^* = R_{HQ_{lp}}^* = C_{fQ_{lp}}^* \quad (2.36)$$

-donde el subíndice Q hace referencia a que el gasto es constante.

De las relaciones anteriores se observa que en el caso de fluidos modelados a partir de la ley de potencia tanto la resistencia hidráulica como el coeficiente de fricción presentan una afinidad con el flujo, dependiendo del valor de n que defina al tipo de fluido. También se puede ver que dichas relaciones presentan de forma general como es que se relacionan las formas adimensionales de las soluciones en flujo en tuberías, por lo que para posteriores cálculos se opta solamente por calcular el flujo y el gradiente de presión; pudiendo obtener el coeficiente de fricción y la resistencia hidráulica, para sus respectivos casos, a partir de estas relaciones.

2.1.3.1. Lubricación mecánica

Se podría argumentar que, al producirse mayor rapidez de deformación conforme se reduce el tamaño de la tubería, sería eficiente transportar fluidos adelgazantes en tuberías de menor diámetro. En esta sección se realizan cálculos hidrodinámicos para verificar la eficacia de esta idea.

Con el fin de observar cómo es que el flujo y el gradiente de presión se ven afectados al distribuir un flujo de una tubería “*grande*” en varias tuberías más pequeñas. Primero se define el cociente entre dos flujos dados por la ecuación 2.16, donde el numerador es nombrado con el subíndice lm y el denominador conserva el subíndice lp , es decir, $Q_{lm}^* = \frac{Q_{lm}}{Q_{lp}}$. Al definir que $A_{lp} = NA_{lm}$, donde A es el área de la sección transversal de la tubería y N es el número de tuberías, se puede despejar D_{lm} de la relación de áreas y sustituirlo en Q_{lm}^* , con lo que al desarrollar algebraicamente se obtiene:

$$Q_{lm}^* = \frac{G_{lm}^* \frac{1}{n}}{N^{\frac{3n+1}{2n}}} \quad (2.37)$$

Para poder graficar la ecuación anterior se pueden definir dos casos: primero, el gradiente de presión impuesto a ambas tuberías es el mismo, $G_{lm}^* = 1$ con lo cual la ecuación para el flujo de lubricación mecánica adimensional queda expresado como:

$$Q_{lm}^* = \frac{1}{N^{\frac{3n+1}{2n}}} \quad (2.38)$$

Como segundo caso se puede investigar cómo se comporta el gradiente de presión adimensional al distribuir el flujo en varias tuberías más pequeñas. De la ecuación 2.37, se considera que el flujo entre ambos casos es el mismo y se despeja al gradiente de presión adimensional.

$$G_{lm}^* = N^{\frac{3n+1}{2}} \quad (2.39)$$

Se observa que al conservar un mismo gradiente de presión en las tuberías, el gasto cambia de forma inversa con el número de tuberías, mientras que, para el caso en que el gasto es el mismo, el gradiente cambia de manera proporcional con el número de tuberías. Además de esto queda aclarar que el hecho de dividir un cierto flujo en un mayor número de tuberías aumentará la superficie de contacto, lo que se traduce en un aumento de fricción. Por lo que, en principio, se deduce que la idea de lubricación mecánica es ineficiente.

2.2. Flujo en una tubería de sección convergente o divergente de un fluido newtoniano

En el estudio de flujo en tuberías se presenta constantemente el caso de ligeras expansiones o reducciones en la sección transversal del sistema de tuberías, mediante la implementación de accesorios. Este tipo de accesorios nos dan la posibilidad de aportar velocidad o presión al flujo en tránsito. Esta geometría tiene diversas aplicaciones para fluidos newtonianos, como en instalaciones hidráulicas, sistemas sanitarios o inclusive en moldes de fundición.

2.2.1. Planteamiento

Al igual que con el caso anterior, se parte presentando la figura 2.3, en la cual se muestra la geometría de la sección de tubería a analizar con sus respectivas cotas y la ubicación del sistema coordenado, éste último mantiene la consideración de ser cilíndrico.

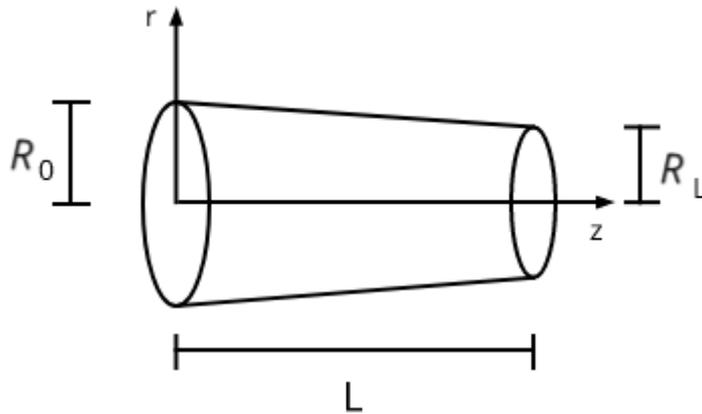


Figura 2.3: Tobera convergente

Para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, vistas en el Capítulo 1 para un fluido newtoniano e incompresible que pasa a través de una tubería como la que se muestra en la figura 2.3, se plantean una serie de consideraciones tomadas del procedimiento utilizado en la resolución del flujo presentada por Bird (3).

1. Fluido incompresible: $\rho = cte$
2. Flujo axisimétrico en dirección θ : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$
3. Flujo estacionario: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

4. Los efectos por fuerzas de cuerpo se excluyen

En éste análisis se toma la consideración de que la tubería puede ser de sección convergente o divergente, bajo un aumento o decremento muy pequeño con respecto al radio inicial. Como en este caso se presenta un cambio de tamaño en la sección transversal de la tubería se puede definir una función para el cambio de radio con respecto a la dirección z , este cambio se considera lineal y muy pequeño ($\sim 2^\circ$) (15). Con todo lo anteriormente mencionado, se presenta dicha función en la ecuación 2.40.

$$R_z = \frac{R_L - R_0}{L}z + R_0 \quad (2.40)$$

En la ecuación anterior se observa que cuando $R_L < R_0$, la sección es convergente, y cuando $R_L > R_0$ es divergente. Además de lo anterior se visualiza que la función previa queda referenciada al radio inicial, R_0 , por lo cual al tener un valor de $R_L = R_0$ se debe recuperar la solución del caso de un flujo newtoniano a través de una tubería circular uniforme.

2.2.2. Solución

Considerando las suposiciones mencionadas en la Subsección anterior, la ecuación de conservación de masa se reduce a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.41)$$

De igual forma las ecuaciones de conservación de momentum en r y z se reducen a:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \quad (2.42)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.43)$$

Se observa que en el sistema de ecuaciones obtenido existen términos no lineales en derivadas parciales, por lo que el sistema es muy complejo para ser resuelto de forma analítica. Entonces, se procede a realizar un análisis de orden de magnitud para así eliminar los términos menos significativos y simplificar el problema.

Se inicia el análisis de orden de magnitud partiendo de la ecuación de continuidad, suponemos que la velocidad en z es del tamaño de la velocidad promedio valuada en $z = L$.

$$v_z \sim \frac{Q}{\pi R_L^2} = V \quad (2.44)$$

2. DESARROLLO TEÓRICO

De la ecuación de Bernoulli, se sabe que la presión y la magnitud la velocidad al cuadrado son proporcionales. Si el cambio de radio es muy pequeño, el cambio de velocidades será muy pequeño, entonces se puede considerar que dicho cambio es lineal:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \sim \frac{Q}{\pi R_L^2 L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.45)$$

Se sabe que la velocidad en z tiene un orden de magnitud definido por la ecuación 2.44, por lo que se puede factorizar este orden de magnitud de la ecuación 2.45 y obtener el tamaño de $\frac{\partial}{\partial z}$. Por lo tanto, para los cambios con respecto a z en la en la dirección en que se desarrolla el flujo, tiene un orden de magnitud definido por:

$$\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.46)$$

Para el orden de magnitud de la segunda derivada respecto a z en la misma dirección, sabemos que el orden de magnitud nominal de z es L , por lo cual la segunda derivada en z para esta misma dirección se puede expresar como la ecuación 2.46 multiplicada por $\frac{1}{L}$. Con lo que queda definido el orden de magnitud de la segunda derivada por:

$$\frac{\partial}{\partial z^2} \sim \frac{1}{L^2} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.47)$$

Como el punto de referencia es la salida de la tubería, el radio presente en este extremo dará el tamaño de r y, como se sabe, r va a variar de R_0 a R_L , entonces, el orden de magnitud de r está dado por:

$$r \sim R_L \quad (2.48)$$

Ahora, se definen los tamaños pertinentes para la dirección r del flujo. En general la variación de la velocidad con respecto a r es muy pequeña, por lo que se puede suponer que los cambios con respecto a r tienen un orden de magnitud dado por:

$$\frac{\partial}{\partial r} \sim \frac{1}{R_L} \quad (2.49)$$

La variación que se presenta a lo largo de z , como se vio anteriormente, es muy pequeña. Por lo cual se puede suponer que las derivadas respecto a z están dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{L} \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2} \sim \frac{1}{L^2} \quad (2.51)$$

Para que la ecuación de conservación de masa se cumpla, los ordenes de magnitud de ambos términos de la ecuación deben de ser similares:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \sim \frac{V}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.52)$$

Se conocen los ordenes de magnitud de la derivada de v_z respecto a z y de r y sus derivadas, pero no el orden de magnitud de la derivada de v_r , por lo que se propone un orden de magnitud arbitrario, B :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \sim \frac{B}{R_L} \quad (2.53)$$

Se resuelve la ecuación 2.53 para B , igualando los ordenes de magnitud de las ecuaciones 2.52 y 2.53, con lo cual Se obtiene el valor de B :

$$B = \frac{VR_L}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.54)$$

Ahora se puede conocer el orden de magnitud de la derivada de v_r respecto a r , al sustituir el valor de B en la ecuación 2.53.

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \sim \frac{VR_L}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.55)$$

Puesto que los ordenes de magnitud en dirección radial de la derivada y r están definidos, se pueden factorizar y eliminarlos para encontrar el orden de magnitud de v_r , el cual queda expresado como:

$$v_r \sim \frac{VR_L}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.56)$$

Ahora se pueden desarrollar los términos de aceleración convectiva y los términos viscosos de las ecuaciones 2.42 y 2.43, para obtener sus ordenes de magnitud relativos:

$$\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \sim \rho \frac{V^2 R_L}{L^2} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right)^2 \quad (2.57)$$

$$\rho v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \sim \rho \frac{V^2 R_L}{L^2} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.58)$$

$$\rho v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \sim \rho \frac{V^2}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.59)$$

$$\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \sim \rho \frac{V^2}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.60)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) \sim \mu \frac{V}{R_L L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.61)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \sim \mu \frac{V R_L}{L^3} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.62)$$

$$\mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \sim \mu \frac{V}{R_L^2} \quad (2.63)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \sim \mu \frac{V}{L^2} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.64)$$

En los tamaños obtenidos, tanto convectivos como viscosos, se observa que la mayoría posee el factor $1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2$, dado que el cambio entre R_0 y R_L es muy pequeño, el cociente $\frac{R_L}{R_0}$ tiende a hacer que dicho factor se vuelva muy pequeño. En todos los términos convectivos se presenta el factor antes mencionado, mientras que en los términos viscosos se encuentra el término más significativo dado por la ecuación 2.63, por lo cual se puede suponer que el gradiente de presión se verá afectado en forma más significativa por los términos viscosos. Entonces, para la direcciones r y z , el gradiente de presión será del tamaño de sus términos viscosos más grandes, ecuaciones 2.61 y 2.63, respectivamente.

$$\frac{\partial P}{\partial r} \sim \mu \frac{V}{R_L L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \sim \mu \frac{V}{R_L^2} \quad (2.66)$$

Se puede ver que tan significativos son los cambios de presión en r con respecto a los de z , dividiendo la ecuación 2.65 entre la ecuación 2.66.

$$\frac{\partial P / \partial r}{\partial P / \partial z} \sim \frac{R_L}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \quad (2.67)$$

Esto último quiere decir que los cambios de presión respecto a r son muy pequeños en comparación con los de z . Entonces, no existen términos relevantes para la ecuación de conservación de momentum en dirección r . Ahora se procede a eliminar los términos menos significativos de la ecuación de momentum lineal en z , de donde se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (2.68)$$

Se puede suponer que el gradiente de presión, $\frac{\partial P}{\partial z}$, es constante y resolver la ecuación diferencial para v_z .

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{r}{2\mu} + \frac{C_1}{r}$$

$$v_z = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (2.69)$$

Para que la solución esté acotada en $r=0$, $C_1 = 0$, y se encuentra el valor de C_2 utilizando la condición de no deslizamiento, es decir, $v_z = 0$ en $r = R_z$. Se obtiene el valor de la constante :

$$C_2 = -\frac{\partial P}{\partial z} \frac{R_z^2}{4\mu} \quad (2.70)$$

Sustituyendo el valor de las constantes C_1 y C_2 en la ecuación 2.69 se obtiene que el perfil de velocidad, el cual queda en función del gradiente de presión en z , donde se pueden expresar las derivadas parciales como derivadas totales, y de un radio R_z función de z .

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (r^2 - R_z^2) \quad (2.71)$$

Se integra la ecuación anterior en la sección transversal para obtener el flujo. Durante esta integración se mantiene la consideración de que el gradiente de presión es constante. Por lo tanto:

$$Q = \frac{\pi R_z^4}{8\mu} \left(-\frac{dP}{dz} \right) \quad (2.72)$$

En este punto se observa que el flujo obtenido en la ecuación 2.72 depende de un gradiente de presión que no necesariamente es constante. Entonces, con el fin de considerar este cambio de presión, suponiendo que el flujo es constante, se integra la caída de presión respecto a z para corregir la ecuación, tomando en cuenta el cambio de radio.

$$-\int_{P_0}^{P_L} dP = \frac{8\mu Q}{\pi} \int_0^L \frac{dz}{R_z^4}$$

$$P_0 - P_L = \frac{8\mu QL}{\pi(R_L - R_0)} \left(\frac{1}{3R_0^3} - \frac{1}{3R_L^3} \right) \quad (2.73)$$

Se define un cambio de variable para la ecuación 2.73, donde $\frac{P_0 - P_L}{L} = G$ y se despeja al flujo.

$$Q = \frac{3\pi G}{8\mu} \frac{(R_0 - R_L)}{(R_L^{-3} - R_0^{-3})} \quad (2.74)$$

2. DESARROLLO TEÓRICO

De la ecuación 2.74 se reexpresa el término $\frac{3(R_0 - R_L)}{(R_L^{-3} - R_0^{-3})}$ y desarrollarlo para obtener una mejor presentación para el flujo. Se demuestra que, después de ciertas manipulaciones algebraicas se tiene:

$$x = \frac{3(R_0 - R_L)}{(R_L^{-3} - R_0^{-3})} \quad (2.75)$$

...

$$x = \frac{3R_0^4 \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^3}{1 + \left(\frac{R_L}{R_0}\right) + \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2} \quad (2.76)$$

Por lo que el flujo queda definido por la siguiente ecuación:

$$Q = \frac{\pi G R_0^4}{8\mu} \left(\frac{3 \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^3}{1 + \left(\frac{R_L}{R_0}\right) + \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^2} \right) \quad (2.77)$$

Ahora se puede expresar la ecuación anterior en función de los diámetros de la tubería y renombrar con el subíndice tn .

$$Q_{tn} = \frac{\pi G_{tn} D_0^4}{128\mu} \left(\frac{3 \left(\frac{D_L}{D_0}\right)^3}{1 + \left(\frac{D_L}{D_0}\right) + \left(\frac{D_L}{D_0}\right)^2} \right) \quad (2.78)$$

De la ecuación 2.78 se despeja al gradiente de presión, G_{tn} , con lo que este queda expresado por:

$$G_{tn} = \frac{128\mu_{tn} Q_{tn}}{\pi D_0^4} \left(\frac{1 + \left(\frac{D_L}{D_0}\right) + \left(\frac{D_L}{D_0}\right)^2}{3 \left(\frac{D_L}{D_0}\right)^3} \right) \quad (2.79)$$

2.2.3. Formas adimensionales

A partir de la solución al flujo no-newtoniano en una tubería uniforme, se definen los parámetros adimensionales $Q_{tn}^* = \frac{Q_{tn}}{Q_n}$ y $G_{tn}^* = \frac{G_{tn}}{G_n}$; donde los parámetros con subíndice tn son referentes a la solución obtenida en esta Sección y los que tienen subíndice n hacen referencia a la solución newtoniana para una tubería uniforme. Para esta adimensionalización se supone que el valor del diámetro en la tubería uniforme es igual al diámetro inicial de la tubería de sección convergente o divergente, es decir, $D_n = D_0$, también las viscosidades, puesto que se puede asumir que el fluido circundante es el mismo. Además de esto para adimensionalizar al gasto se considera que se tiene un gradiente de presión igual al de la tubería uniforme, $G_{tn} = G_n$, y para adimensionalizar el gradiente de presión se considera un mismo flujo con respecto a la tubería uniforme, $Q_{tn} = Q_n$. Las definiciones de Q_{tn} y G_{tn} , se toman respectivamente de las ecuaciones

2.2 Flujo en una tubería de sección convergente o divergente de un fluido newtoniano

2.78 y 2.79. También se realiza un cambio de variable para la relación de diámetros de la tubería, donde $D_t^* = \frac{D_t}{D_0}$

$$Q_{tn}^* = \left(\frac{3D_t^{*3}}{1 + D_t^* + D_t^{*2}} \right) \quad (2.80)$$

$$G_{tn}^* = \left(\frac{1 + D_t^* + D_t^{*2}}{3D_t^{*3}} \right) \quad (2.81)$$

A partir de las relaciones adimensionales encontradas para la tubería uniforme se observa que tanto para un mismo flujo como para un mismo gradiente de presión, la resistencia hidráulica adimensional no debe de cambiar, pues conserva un comportamiento constante, por lo que en el caso newtoniano éste ya no dependerá del flujo o del gradiente adimensional. En el caso del coeficiente de fricción, éste mantiene una dependencia cuadrada cuando se analiza para un gradiente de presión adimensional unitario.

2.3. Flujo en una tubería de sección convergente o divergente de un fluido no-newtoniano

2.3.1. Planteamiento y solución

En este caso se consideran las mismas suposiciones que en el caso newtoniano.

Se aplican las simplificaciones pertinentes en las ecuaciones de conservación de momentum lineal, con lo cual se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \right) \quad (2.82)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \quad (2.83)$$

Nótese que, para considerar efectos no newtonianos estas se escriben en términos del tensor de esfuerzos disipativo.

De manera análoga al caso newtoniano, se procede a realizar un análisis de orden de magnitud. El orden de magnitud de los términos convectivos es el mismo que ha sido desarrollado en el caso newtoniano, por lo que estos términos no presentan aporte significativo al problema. Para este caso se pueden analizar solamente el aporte de los términos de esfuerzo, se obtienen sus ordenes de magnitud partiendo de los definidos para la velocidad y sus derivadas de la solución anterior y se plantea el orden de magnitud de los esfuerzos a partir de la ley de potencia. Con esto obtenemos los términos en dirección r y z .

Términos de esfuerzo en dirección r :

$$\tau_{rr} = k \left(-\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^n \sim k \left(-\frac{V}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \right)^n \quad (2.84)$$

$$\tau_{zr} = k \left(-\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^n \sim k \left(-\frac{VR_L}{L^2} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \right)^n \quad (2.85)$$

Términos de esfuerzo en dirección z :

$$\tau_{rz} = k \left(-\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^n \sim k \left(-\frac{V}{R_L} \right)^n \quad (2.86)$$

$$\tau_{zz} = k \left(-\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^n \sim k \left(-\frac{V}{L} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \right)^n \quad (2.87)$$

De los tamaños obtenidos se observa que los más significativos están dados por las ecuaciones 2.85 y 2.86, entonces los efectos cortantes más significativos son τ_{rz} y τ_{zr} . Además de esto, al igual que en el caso newtoniano, el cambio de presiones en r es muy pequeño en comparación con el de dirección z .

$$\frac{\partial P/\partial r}{\partial P/\partial z} \sim \left(\frac{R_L^2}{L^2} \left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0} \right)^2 \right) \right)^n \quad (2.88)$$

Como el gradiente de presión en r es muy pequeño, de forma análoga al caso newtoniano, la ecuación a resolver esta dada por el gradiente de presión en z igual al término de esfuerzos con mayor orden de magnitud.

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \left(-\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^n \right) \quad (2.89)$$

Como los cambios de presión respecto al cambio de radios no es significativo, durante una primera integración $-\frac{\partial P}{\partial z}$ se considera constante. Se integra y resuelve para v_z .

$$\left(-\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^n = \frac{r}{2k} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{C_1}{rk} \quad (2.90)$$

Se sabe que la derivada de v_z respecto a r debe ser máxima en $r = 0$, por lo tanto para obtener una solución finita $C_1 = 0$. Por lo que al sustituir este valor y volver a integrar la ecuación 2.90 se obtiene v_z

$$v_z = -\frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \left(\frac{1}{2k} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) \right)^{\frac{1}{n}} + C_2 \quad (2.91)$$

Se utiliza el no deslizamiento del fluido como condición de frontera, es decir, $v_z = 0$ en $r = R_z$. Con lo cual el valor de C_2 se expresa como en la siguiente ecuación:

$$C_2 = \frac{R_z^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \left(\frac{1}{2k} \left(-\frac{\partial P}{\partial z} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.92)$$

Se sustituye el valor de C_2 en la ecuación 2.91 para obtener el perfil de velocidad para la tobera. En este punto se puede expresar al gradiente de presión en términos de derivadas totales.

$$v_z = \frac{n}{1+n} \left(\frac{1}{2k} \left(-\frac{dP}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{n}} (R_z^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1}) \quad (2.93)$$

Una vez se tiene el perfil de velocidad se puede integrar en la sección de tubería y así obtener el flujo. Esta integración se realiza manteniendo la consideración de que $-\frac{dP}{dz}$ es un valor constante.

$$Q = \frac{\pi n R_z^3}{1+3n} \left(\frac{R_z}{2k} \left(-\frac{dP}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.94)$$

2. DESARROLLO TEÓRICO

El flujo obtenido en la ecuación 2.94 es incompleto por la misma razón que en el caso newtoniano. Se puede reintegrar esta ecuación, separando variables para el gradiente de presión, considerando que el flujo es constante y realizando un cambio de variable a partir de la definición de R_z . Con esto obtiene la caída de presión en la tubería.

$$P_0 - P_L = \frac{2kL}{3n(R_L - R_0)} \left(\frac{Q(1 + 3n)}{\pi n} \right)^n (R_0^{-3n} - R_L^{-3n}) \quad (2.95)$$

Se puede definir un cambio de variable para la ecuación 2.95, donde $\frac{P_0 - P_L}{L} = G$ y despejar al flujo.

$$Q = \frac{\pi n}{1 + 3n} \left(\frac{G}{2k} \frac{3n(R_0 - R_L)}{R_L^{-3n} - R_0^{-3n}} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.96)$$

Se realiza un cambio de variable en la ecuación anterior, definiendo a Y como la nueva variable. Con dicho cambio el flujo de la tubería se expresa como:

$$Q = \frac{\pi n}{1 + 3n} \left(\frac{G}{2k} \right)^{\frac{1}{n}} Y \quad (2.97)$$

-donde Y es:

$$Y = R_0^{3 + \frac{1}{n}} \left(\frac{\left(1 - \frac{R_L}{R_0}\right) 3n \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^{3n}}{\left(1 - \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^n\right) \left(1 + \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^n + \left(\frac{R_L}{R_0}\right)^{2n}\right)} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.98)$$

Ahora se sustituye Y en la ecuación 2.97, se reordena y reexpresa en función de los diámetros de la tubería, con lo cual el flujo queda definido como la solución de la tubería uniforme por un factor de corrección. También se renombran el flujo y el gradiente de presión como Q_{tlp} , G_{tlp} , respectivamente. Además, se sustituye el cambio de variable para la relación de diámetros planteada en la solución newtoniana, D_t^* .

$$Q_{tlp} = \frac{\pi n D_0^3}{8(1 + 3n)} \left(\frac{G_{tlp} D_0}{4k_{tlp}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{(1 - D_t^*) 3n (D_t^*)^{3n}}{(1 - D_t^{*n}) (1 + D_t^{*n} + D_t^{*2n})} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.99)$$

En el flujo obtenido se observa que existe una indeterminación cuando $D_L = D_0$. Como la solución debe de estar acotada para este valor se puede expandir el término $1 - D_t^{*n} = f(D_t^*)$ en series de Taylor. Con lo que dicho término puede expresarse como se muestra en la siguiente ecuación:

$$f(D_t^*) = 1 - D_t^{*n} = (D_t^* - 1) \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)}(1) \frac{(D_t^* - 1)^{i-1}}{i!} = (1 - D_t^*) F(D_t^*) \quad (2.100)$$

-donde $F(1) = n$.

Por lo tanto, al sustituir la definición anterior en la ecuación de flujo, se obtiene la siguiente expresión.

$$Q_{tlp} = \frac{\pi n D_0^3}{8(1+3n)} \left(\frac{G_{tlp} D_0}{4k} \right)^{\frac{1}{n}} Y^{*\frac{1}{n}} \quad (2.101)$$

-donde Y^* es:

$$Y^* = \left(\frac{1}{F(D_t^*)} \frac{3n D_t^{*3n}}{(1 + D_t^{*n} + D_t^{*2n})} \right) \quad (2.102)$$

De la ecuación anterior se puede despejar al gradiente de presión y expresarlo como:

$$G_{tlp} = \frac{4k}{D_0} \left(\frac{8Q_{tlp}(1+3n)}{\pi n D_0^3} \right)^n Y^{*-1} \quad (2.103)$$

2.3.2. Formas adimensionales

Se empieza con la adimensionalización del perfil de velocidad, presentado en la ecuación 2.93, y renombrándolo como v_{ztlp} . Para esto dividimos la ecuación antes mencionada entre la velocidad media de la misma tubería, esta última también es renombrada como \bar{v}_{tlp} . Se simplifica algebraicamente y se escribe la ecuación en función del diámetro para obtener:

$$\frac{v_{ztlp}}{\bar{v}_{tlp}} = \frac{1+3n}{1+n} \left(1 - \left(\frac{2r}{D_z} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right) \quad (2.104)$$

Este perfil de velocidad adimensional es muy similar al obtenido en el caso de una tubería uniforme con la única diferencia de que en este caso el diámetro es una función del largo de la tubería. Como el cambio de diámetros es pequeño las variaciones en el perfil de velocidad también lo serán.

Se prosigue con la adimensionalización del flujo de la ecuación 2.99, con respecto al flujo en una tubería uniforme para un fluido ley de potencia, ecuación 2.15, donde el diámetro de esta tubería uniforme es igual al diámetro inicial de la tubería de sección convergente o divergente y el gradiente de presión es el mismo para ambas tuberías. Con lo cual al desarrollar el cociente, tomando en cuenta que el fluido circundante es el mismo, se obtiene:

$$Q_{tlp}^* = Y^{*\frac{1}{n}} \quad (2.105)$$

Se puede adimensionalizar ahora al gradiente de presión de la ecuación 2.103, dividiéndolo entre el gradiente para una tubería uniforme, ecuación 2.17. Después de desarrollar este cociente para un mismo gasto y tomando en cuenta que el diámetro de

2. DESARROLLO TEÓRICO

la tubería uniforme es igual al inicial de la tubería de sección convergente o divergente, se obtiene:

$$G_{tlp}^* = \frac{1}{Y^*} \quad (2.106)$$

Las formas adimensionales para el coeficiente de fricción y la resistencia hidráulica se obtienen a partir de las relaciones vistas en el desarrollo para la tubería uniforme con fluido ley de potencia, ecuaciones 2.35 y 2.36.

También se puede adimensionalizar la solución de la tubería de sección convergente o divergente para un fluido ley de potencia, pero ahora con respecto a su solución newtoniana, presentada en la Sección anterior. Se comienza con el flujo para un gradiente de presión adimensional unitario, donde se observa que la forma adimensional es igual a la obtenida en el caso de la tubería uniforme multiplicada por un factor de corrección, Z^* . Esta nueva forma adimensional es nombrada como Q_{tlp}^{I*} .

$$Q_{tlp}^{I*} = Q_{lp}^* Z^{*\frac{1}{n}} \quad (2.107)$$

-donde Z^* es:

$$Z^* = \frac{3^{1-n} n (1 + D_t^* + D_t^{*2})^n}{F(D_t^*) (1 + D_t^{*n} + D_t^{*2n})} \quad (2.108)$$

El gradiente de presión adimensional, G_{tlp}^{I*} , para un flujo adimensional unitario, puede ser presentado de forma parecida al flujo, es decir, la forma adimensional de la tubería uniforme por un factor de corrección.

$$G_{tlp}^{I*} = \frac{G_{lp}^*}{Z^*} \quad (2.109)$$

En este caso, las formas adimensionales para observar el efecto de la lubricación mecánica son exactamente las mismas que las desarrolladas en el caso de la tubería uniforme.

Resultados

3.1. Tubería uniforme para un fluido no-newtoniano

Para presentar resultados, se tienen que definir los valores de referencia utilizados para la tubería del caso considerado como newtoniano, dichos valores se encuentran en la tabla 3.1. En el caso del gradiente de presión se dan valores arbitrarios, ya que un aumento o decremento de presión se traduce en un cambio de la rapidez de deformación en el fluido.

Tabla 3.1: Valores de referencia para una tubería uniforme en el caso newtoniano

Parámetro	Valor
μ	10 [Pa.s]
D_n	0.5 [m]
G_n	10; 1000 [Pa/m]

Primero se grafica Q_{lp}^* , para $G_{lp}^* = 1$, como función de n , ecuación 2.27, variando el valor de μ_{lp} . Se desean ver los efectos al aumentar o disminuir la relación anterior, por lo cual esto se realiza de forma proporcional, es decir, un decremento y un incremento de 0.5 con respecto a la referencia, que posee un valor de 1. Esto último se muestra en la figura 3.1, la cual presenta la gráfica obtenida para los dos valores de G_n propuestos. En posteriores gráficas, la variación de μ_{lp} es la misma que la presentada en este caso, así como la escala.

3. RESULTADOS

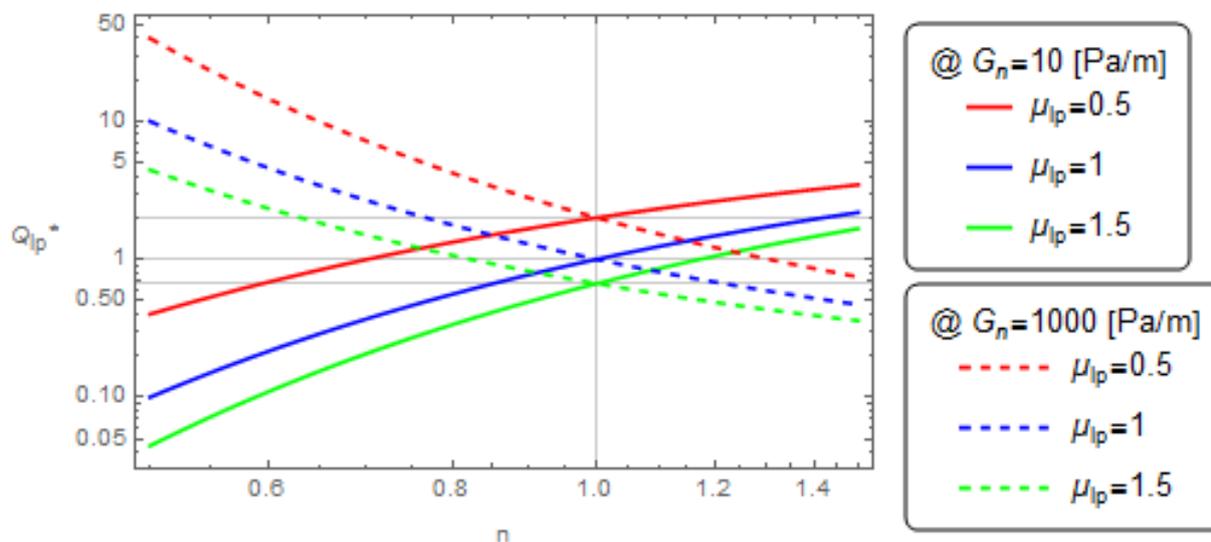


Figura 3.1: Q_{lp}^* contra n , variando μ_{lp}

En la figura 3.1 se observa que, para los fluidos que están sometidos a gradientes de presión bajos (líneas continuas), el gasto tiende a ser menor con el decremento del índice de potencia, es decir, para fluidos altamente adelgazantes el flujo decae, mientras que para valores más altos del índice de potencia, tiende a aumentar. Para fluidos sometidos a gradientes de presión mayores (líneas discontinuas), el flujo aumenta al adelgazar el fluido y disminuye al espesarlo. Por su parte, variación de μ_{lp} da un ligero incremento o decremento de pendiente, además de trasladar la curva sobre el punto de referencia newtoniano, $(1, \frac{1}{\mu_{lp}})$. Entonces, al aumentar el valor de μ_{lp} disminuye el flujo (color verde) y lo contrario al reducirse (color rojo).

En la figura 3.2, se muestra la gráfica correspondiente a la resistencia hidráulica, para $G_{lp}^* = 1$, como función de n , variando μ_{lp} . Esta gráfica es, en esencia, el inverso de la presentada anteriormente para el flujo adimensional y, de cierta forma, expresa el comportamiento para el coeficiente de fricción adimensional tomado para un gradiente de presión adimensional unitario, con la única diferencia en que los cambios, en orden de magnitud, se ven elevados al cuadrado.

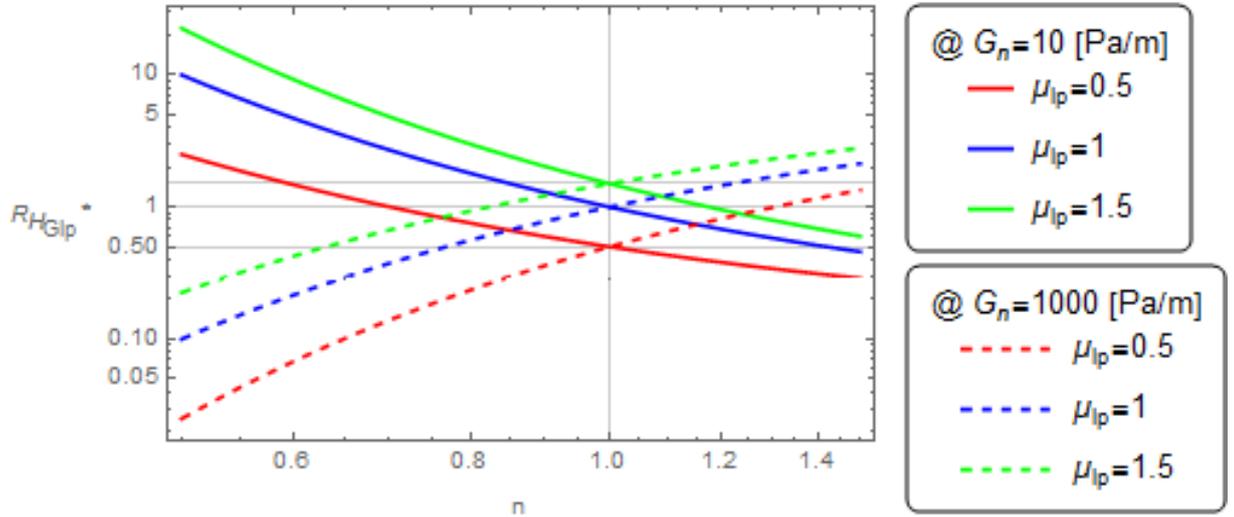


Figura 3.2: R_{HGip}^* contra n , variando μ_{lp}

En la figura 3.2, se observa que, para fluidos sometidos a un gradiente de presión bajo (líneas conitnuas), la resistencia aumenta conforme el fluido se hace más adelgazante y disminuye al espesar, mientras que para el caso en que el gradiente de presión es mayor (líneas discontinuas), la resistencia se reduce al adelgazar y aumenta al espesar. Por su parte la variación de μ_{lp} da un incremento o decremento de pendiente, además de trasladar la curva sobre el punto de referencia newtoniano, $(1, \mu_{lp})$. Entonces al aumentar el valor de μ_{lp} aumenta la resistencia (color verde) y lo contrario al reducirse (color rojo).

De la relación presentada en la ecuación 2.36 se sabe que el gradiente de presión, el coeficiente de fricción y la resistencia hidráulica presentan un mismo comportamiento (para $Q_{lp}^* = 1$), por lo que se pueden esquematizar por medio de una sola gráfica, la cual se presenta a continuación en la figura 3.3.

3. RESULTADOS

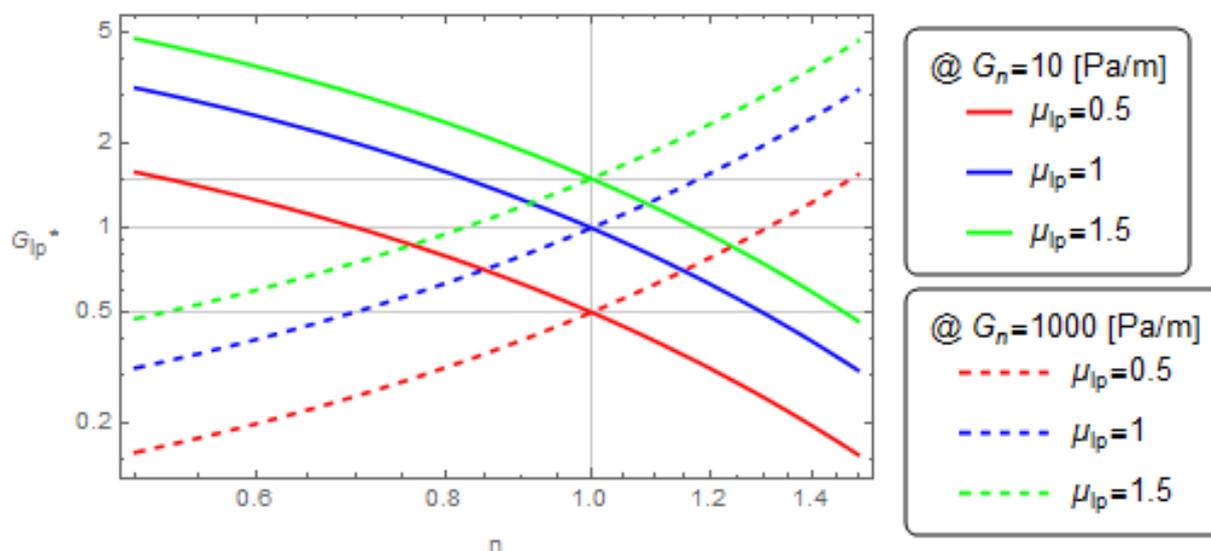


Figura 3.3: G_{lp}^* contra n , variando μ_{lp}

En la figura anterior se puede observar que, cuando el valor de referencia es bajo (líneas continuas), el gradiente de presión tiende a incrementarse al adelgazar el fluido y lo contrario al espesar. Para el caso en que el gradiente de presión de referencia es mayor (líneas discontinuas), el gradiente de presión adimensional tiende a reducirse al adelgazar el fluido y lo contrario al espesarse. Los fluidos que poseen un valor alto de la relación consistencia-viscosidad (color verde) presentan valores más altos del gradiente de presión adimensional, y sus respectivos similares, por su parte los fluidos con valores menores de la relación consistencia-viscosidad (color rojo) presentan menores gradientes de presión, y similares. Al igual que en los casos anteriores los cambios de μ_{lp} originan un cambio de pendiente y un desplazamiento vertical sobre el punto newtoniano $(1, \mu_{lp})$.

3.2. Tubería de sección convergente o divergente para un fluido newtoniano

Con el fin de ver los cambios en el flujo al hacer converger o divergir a la tubería se establecen los límites para la representación gráfica de las formas adimensionales. Se toma un valor de referencia para el D_0 igual a 0.5 m. Como el decremento o incremento del diámetro se da con un ángulo de $\sim 2^\circ$ (15), se puede establecer una longitud de tubería de 0.1 m, con el fin de que la diferencia entre los diámetros no sea tan significativa, y obtener el valor límite de D_L con la siguiente expresión.

$$D_L = 1 \pm \frac{2LT \tan(2^\circ)}{D_0} \quad (3.1)$$

En la ecuación 3.1 se observa que en el caso de la tubería de sección divergente se toma el signo positivo, ya que $D_L > D_0$ y en el caso convergente el negativo, dado que $D_L < D_0$. Con lo anterior se pueden definir los intervalos en que se graficará la relación de diámetros, D_i^* , con un valor intermedio en el cual $D_L = D_0$, que es el caso de la tubería uniforme. Estos intervalos se muestran en la tabla 3.2.

Tabla 3.2: Intervalos para la relación de diámetros de la tubería de sección convergente o divergente

Caso	Intervalo
<i>Convergente</i>	(0.945,1)
<i>Divergente</i>	(1,1.055)

Para este caso, de las relaciones adimensionales presentadas en las ecuaciones 2.35 y 2.36, se sabe que la resistencia hidráulica y el coeficiente de fricción presentan un mismo comportamiento, tanto para un gradiente de presión constante como para un flujo constante, por lo que podemos realizar únicamente dos gráficas. La primera corresponde al flujo adimensional contra la relación de diámetros de la tobera, figura 3.4, y la segunda que corresponde al gradiente de presión, resistencia hidráulica y coeficiente de fricción contra la misma relación de diámetros, figura 3.5.

3. RESULTADOS

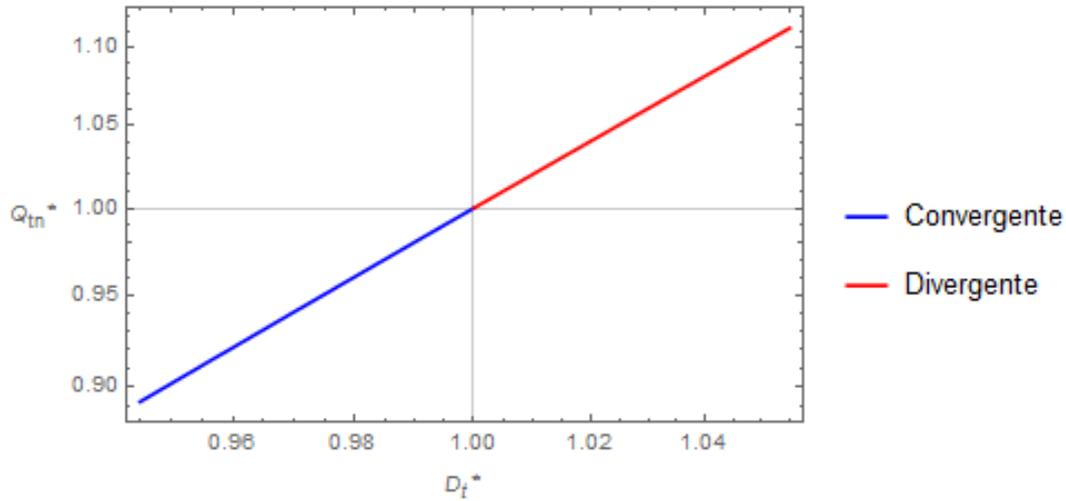


Figura 3.4: Q_{tn}^* contra D_t^*

En la figura 3.4 se observa que, al hacer convergente a la tobera, el flujo disminuye, al contrario del caso divergente, en el cual el flujo aumenta, como se podría esperar.

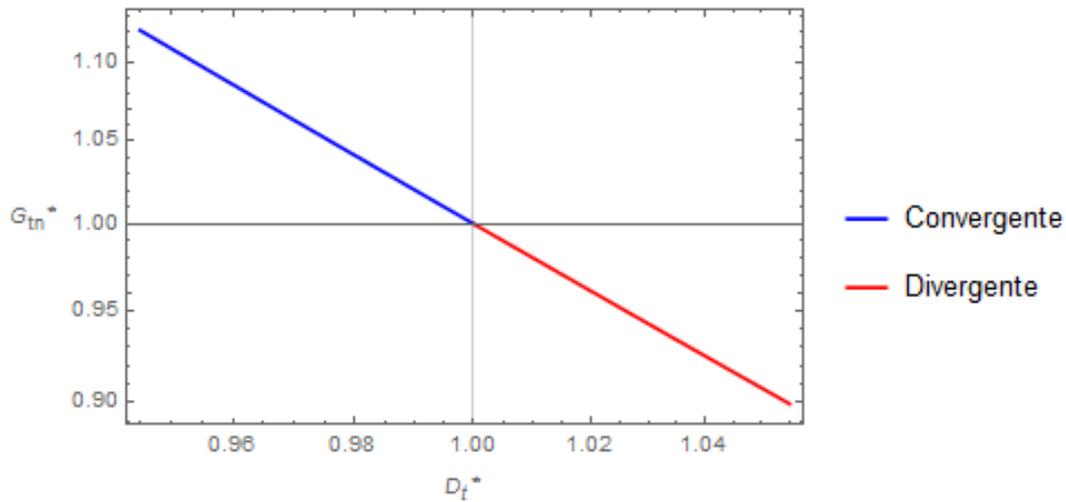


Figura 3.5: G_{tn}^* contra D_t^*

En esta última figura se observa que, para una tobera convergente el gradiente de presión, el coeficiente de fricción y la resistencia hidráulica aumentan, al contrario que en el caso divergente, donde éstas disminuyen.

3.3. Tubería de sección convergente o divergente para un fluido no-newtoniano

Para el caso de la tubería de sección convergente o divergente por la cual fluye un fluido modelado como ley de potencia se tienen dos casos adimensionales, uno para el comportamiento respecto a una tubería uniforme por la cual circula un fluido, igual modelado como ley de potencia, y otro respecto al caso de la tubería de sección convergente o divergente con un fluido circundante modelado como newtoniano.

Primero se muestra el caso de la tubería de sección convergente o divergente respecto a la solución no-newtoniana de la tubería uniforme. Este caso da como resultado tres gráficas. La primera es la del flujo adimensional como función de n , donde se puede variar la relación de diámetros de la tubería, figura 3.6.

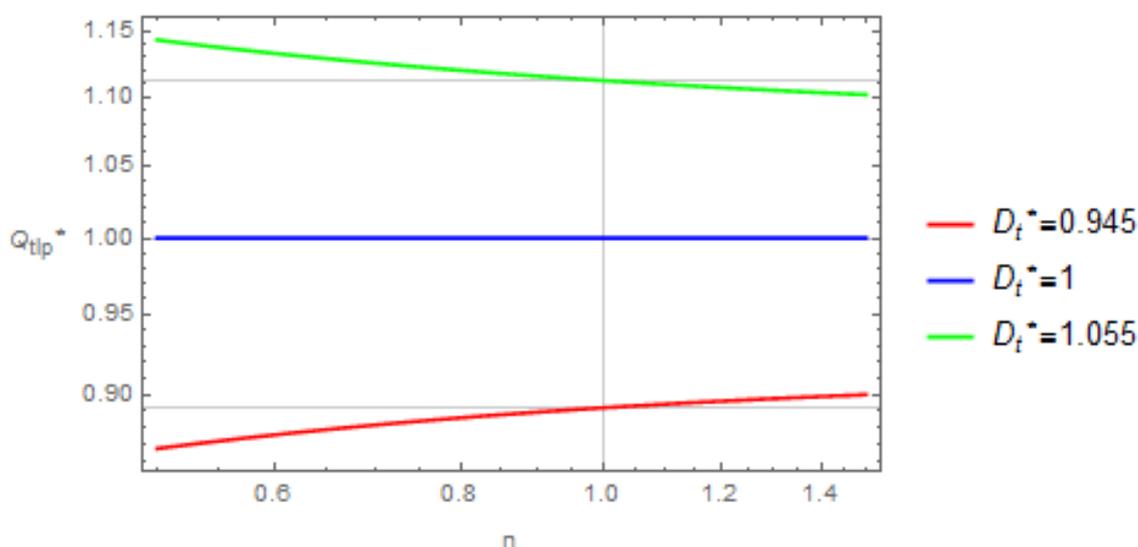


Figura 3.6: Q_{tlp}^* contra n , variando D_t^*

En la figura anterior se observa que, para el caso convergente (color rojo), se tiene una disminución de gasto al adelgazar el fluido, y lo contrario al espesarlo. Para el caso divergente (color verde) se tiene un comportamiento opuesto con respecto al índice de potencia, es decir, al adelgazar el fluido el gasto aumenta y disminuye al espesarlo. También se observa que en el caso en que los diámetros de la tubería son iguales (color azul) se recupera la solución para la tubería uniforme. Como tal, para un mismo gradiente de presión, se tienen menores flujos en tuberías de sección convergente. También se visualiza que al hacer converger o divergir la tubería existe un desplazamiento vertical que ocurre sobre el valor de $n = 1$ y depende de Q_{tn}^* . Este punto coordenado variable puede ser expresado como $(1, Q_{tn}^*)$.

3. RESULTADOS

La segunda gráfica, figura 3.7, corresponde a la resistencia hidráulica, para un mismo gradiente de presión, como función del índice de potencia, variando nuevamente la relación de diámetros de la tobera.

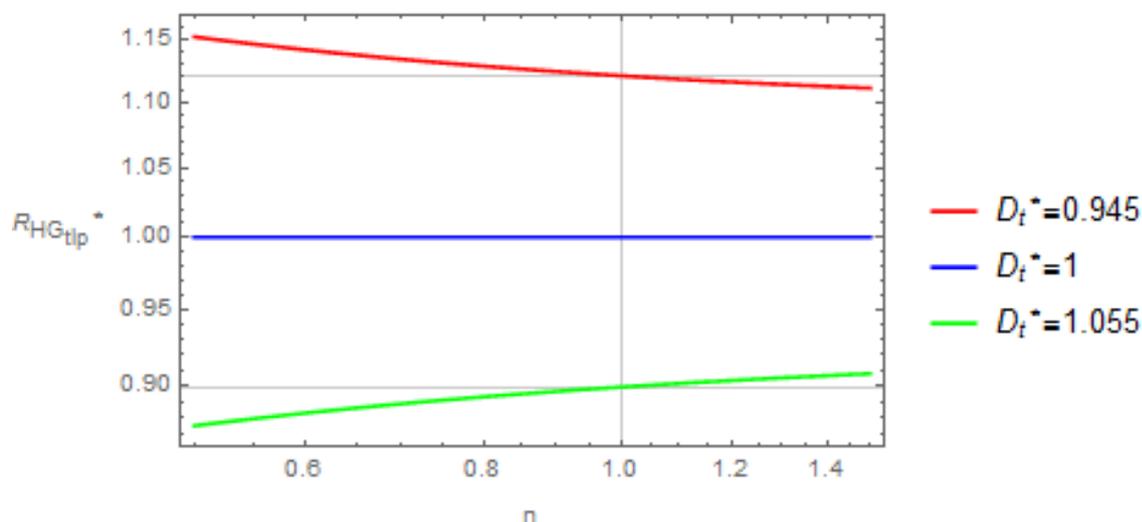


Figura 3.7: $R_{HG_{tip}}^*$ contra n , variando D_t^*

En la figura anterior se observa que, para un mismo gradiente de presión, la resistencia hidráulica presenta valores menores para el caso divergente (color verde), en comparación con caso convergente (color rojo) que presenta mayor resistencia al flujo. Este cambio en la relación de diámetros, además de un cambio de pendiente, hace que las curvas se desplacen verticalmente sobre el punto $(1, \frac{1}{R_{Htn}^*})$. Al adelgazar el fluido en una tubería de sección convergente se tiene un incremento de la resistencia y una disminución al espesarlo. El caso divergente presenta el comportamiento contrario, con respecto a las variaciones de n . Se sabe que esta gráfica nos presenta el comportamiento del coeficiente de fricción adimensional, solo que el orden de magnitud entre los incrementos o decrementos de las variables cambia por su relación cuadrada con la resistencia hidráulica adimensional.

La última gráfica, figura 3.8, presenta el comportamiento que tiene el gradiente de presión adimensional como función del índice de potencia, al variar la relación de diámetros de la tubería. También se sabe que representa el comportamiento del coeficiente de fricción normalizado y resistencia hidráulica adimensional, para un mismo flujo.

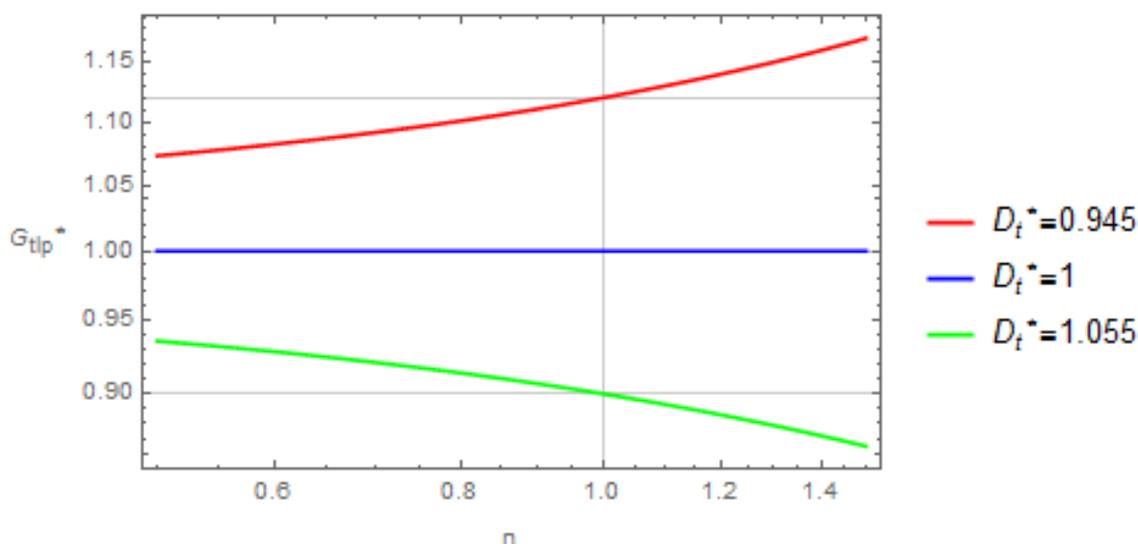


Figura 3.8: G_{tlp}^* contra n , variando D_t^*

La gráfica anterior muestra que, para un flujo constante, en el caso convergente (color rojo) se presentan valores mayores del gradiente de presión y demás variables, a comparación del caso divergente (color verde), donde se dan los valores más pequeños. Para el caso convergente estas variables decrecen al adelgazar el fluido e incrementan al espesarlo. Por su parte el caso divergente presenta un comportamiento opuesto al anterior descrito. El desplazamiento vertical de las curvas sobre el valor de índice de potencia newtoniano puede ser obtenido del punto $(1, G_{tn}^*)$.

Para el caso de las adimensionalizaciones realizadas para la tobera con respecto a la solución de la misma para el caso newtoniano, presentan prácticamente el mismo comportamiento que el visto en las gráficas de la tubería uniforme, puesto que el valor del factor de corrección Z^* , tanto para el caso convergente como para el divergente, es muy cercano a la unidad. En la figura 3.9 se muestra la gráfica para el flujo como función del índice de potencia, para un gradiente de presión de referencia de 10 [Pa/m], donde se incluye el caso de la tubería uniforme para un fluido ley de potencia (líneas continuas) y el caso comentado (líneas discontinuas). Las demás representaciones gráficas se omiten, ya que como se observa en la figura el comportamiento es prácticamente el mismo que en las formas adimensionales del caso de la tubería uniforme.

3. RESULTADOS

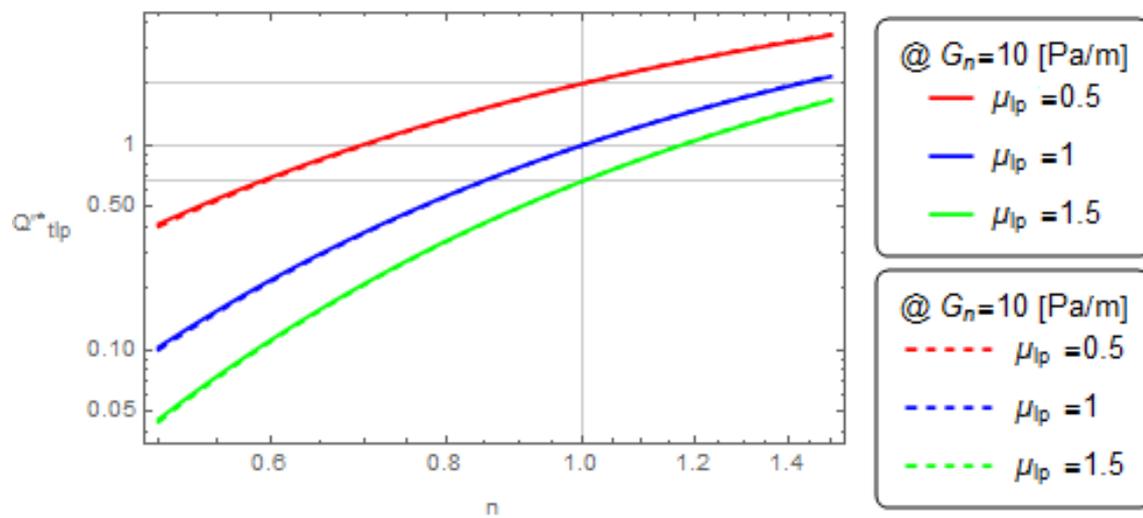


Figura 3.9: Q_{tip}^* contra n , variando μ_{lp}

3.4. Lubricación mecánica

El caso de la forma adimensional encontrada para la lubricación mecánica, tanto para la tubería uniforme como para la tubería de sección convergente o divergente, son las mismas. A continuación, se muestra primero la gráfica para ver el efecto de dividir un gasto en N tuberías más pequeñas, para un gradiente de presión adimensional unitario, figura 3.10.

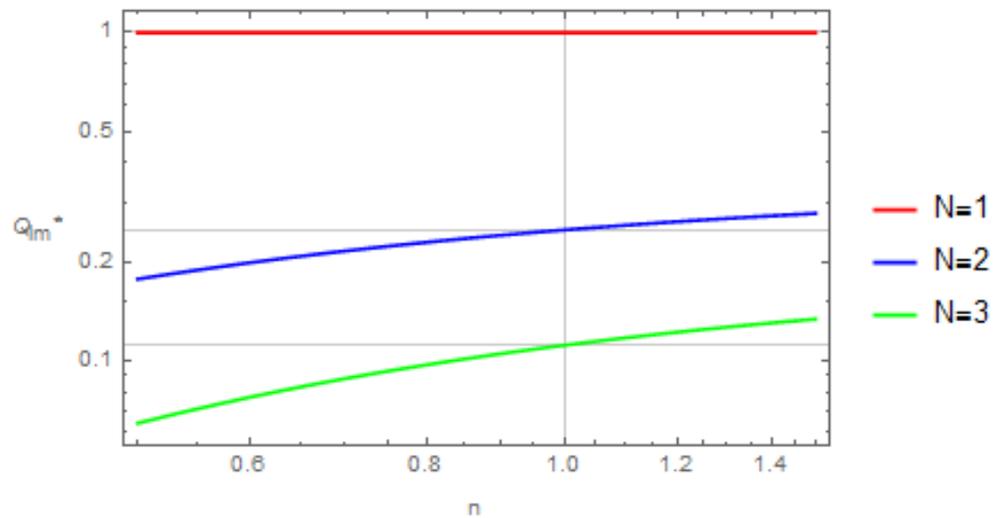


Figura 3.10: Q_{lm}^* contra n , variando el número de tuberías

En la figura anterior se observa que al dividir el gasto en varias tuberías éste disminuye. Además de esto, en las curvas se da un cambio de pendiente, el cual indica que al adelgazar el fluido el flujo es aún menor, al contrario de espesarlo, donde éste aumenta. El desplazamiento vertical en el índice de potencia newtoniano se da sobre el punto $(1, \frac{1}{N^2})$.

En la figura 3.11, se muestra ahora el comportamiento que presenta el gradiente de presión adimensional de lubricación mecánica, para flujo adimensional unitario, al dividir un mismo flujo en tuberías más pequeñas.

3. RESULTADOS

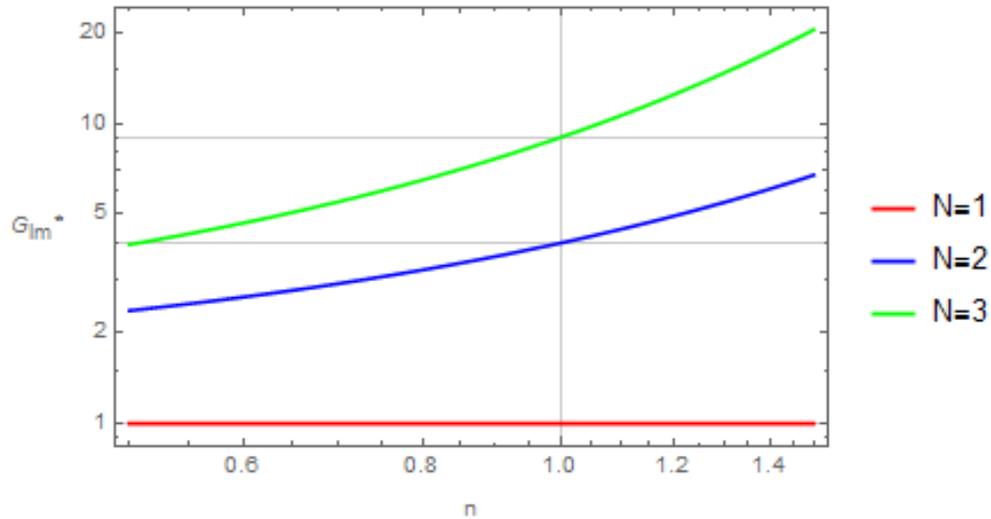


Figura 3.11: G_{lm}^* contra n , variando el número de tuberías

En esta última figura se observa cómo al aumentar el número de tuberías, para un flujo constante, el gradiente de presión igual aumenta. Las curvas sufren un desplazamiento vertical sobre el punto $(1, N^2)$ y un cambio de pendiente, donde se ve que al adelgazar el fluido y aumentar el número de tuberías el gradiente de presión disminuye con respecto al caso newtoniano correspondiente.

4.1. Tubería uniforme

De los resultados se tiene que las variaciones de G_n representan el cambio de la referencia contenida en G_{lp}^* . Además, las variaciones de μ_{lp} representan disminuciones o aumentos del índice de consistencia, con respecto al valor de viscosidad newtoniano. En general, los cambios en la pendiente de las curvas se dan por variaciones de μ_{lp} , pero son principalmente dados por los cambios de G_n , ya que, lleva implícitos cambios en la rapidez de deformación.

Para los casos en lo que se tomó constante e igual a la unidad al gradiente de presión adimensional, se observa que existen valores de G_n para los cuales la variación de los parámetros analizados es prácticamente constante con cambios que llegan a ser menores al 10 %, en un cierto intervalo de n . Esto se da debido al cambio de pendiente que genera la variación del gradiente de presión de referencia en conjunto con los términos de referencia newtonianos ($\frac{G_n D_n}{\mu}$). Por ejemplo: en la figura 4.1, se muestra el comportamiento para $D_n = 0.5$ m y $\mu = 10$ Pa.s, variando el valor de G_n y μ_{lp} , utilizando valores específicos con el fin de alcanzar obtener resultados prácticamente newtonianos.

4. DISCUSIÓN

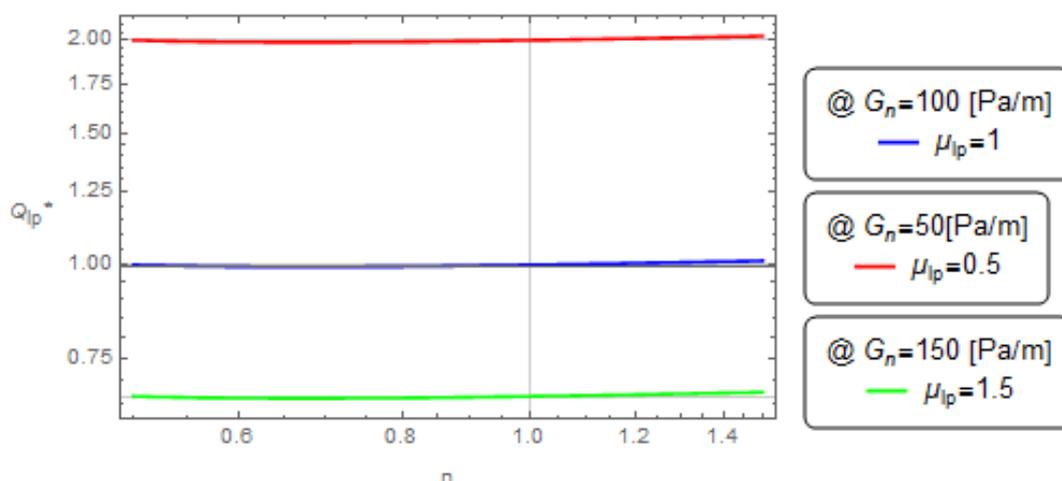


Figura 4.1: Intervalo de flujo aproximadamente constante

Se observa que, para un gradiente de presión de referencia de 100 Pa/m (color azul), se obtiene un intervalo para n de $(0.25, 1.5)$ que resulta en $Q_{lp}^* \approx 1$. Para el caso en que $\mu_{lp} = 0.5$, para un gradiente de presión de referencia de 50 Pa (color rojo), se obtiene un intervalo de n de $(0.23, 1.5)$ que resulta en $Q_{lp}^* \approx 2$. Por último cuando $\mu_{lp}^* = 0.5$, para un gradiente de presión de referencia de 150 Pa (color verde), se obtiene un intervalo para n de $(0.2, 1.5)$ resulta en $Q_{lp}^* \approx \frac{2}{3}$. Entonces, se deduce que deben de existir valores particulares de μ_{lp} y G_n para los cuales la variación del flujo adimensional sea mínima con respecto al caso newtoniano, los cuales cabe mencionar no estarán acotados para todo valor de n .

Lo mencionado anteriormente es interesante ya que nos dice que para crudos que posean la capacidad de adelgazar, o incluso espesar, existen valores de μ_{lp} y G_n para los cuales, ante la variación de n , nos den resultados cercanos al caso newtoniano. Volviendo al ejemplo en que $\mu_{lp} = 0.5$ podríamos decir que si tenemos un crudo cuyo índice de consistencia sea igual a la viscosidad del caso newtoniano y éste decrezca de un valor de 1 a 0.5, con gradiente de presión de 50 Pa, el análisis de flujo puede ser considerado newtoniano, siempre y cuando se tome en cuenta que el flujo obtenido será multiplicado por un factor aproximado de 2.

Cabe mencionar que las curvas mostradas en la figura 4.1 no son líneas rectas. En la figura 4.2 se muestra un acercamiento a la curva para $\mu_{lp} = 1$, $G_n = 100[Pa/m]$ y $D_n = 0.5[m]$, donde se puede observar la tendencia de la función.

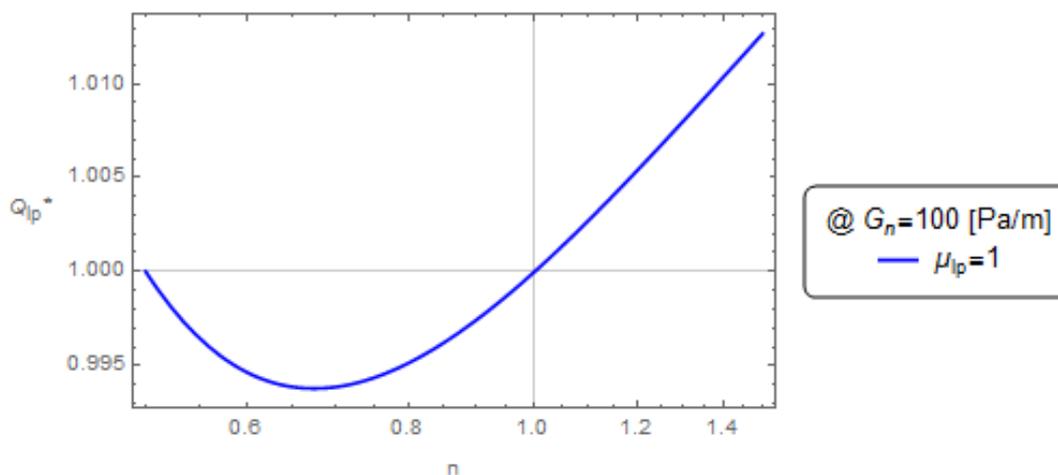


Figura 4.2: Acercamiento de la curva donde: $\mu_{lp} = 1$, $G_n = 100 \text{ [Pa/m]}$ y $D_n = 0.5 \text{ [m]}$

En el caso en que se tomó el análisis para un flujo adimensional unitario, se observa que, para el caso en que $G_n = 100 \text{ Pa/m}$, las variaciones que presenta el gradiente adimensional con respecto al caso newtoniano llegan a ser menores 10% con respecto al caso newtoniano. En el caso en que $\mu_{lp} = 1$ se tiene un intervalo de n de $(0.075, 1.5)$ en el cual G_{lp}^* es prácticamente 1. Para $\mu_{lp} = 1.5$ se tiene un intervalo de n de $(0.12, 1.5)$ en el cual G_{lp}^* es $3/2$. Por último para $\mu_{lp} = 0.5$ se tiene un intervalo de n de $(0.12, 1.5)$ en el cual G_{lp}^* es $1/2$. Bajo las condiciones antes mencionadas, se tiene la posibilidad de analizar el gradiente de presión, la resistencia hidráulica y el coeficiente de fricción con las relaciones newtonianas.

En este último caso se observa que, para una producción neta de crudo, siempre y cuando se manejen gradientes de presión de 100 Pa/m , los gradientes de presión requeridos para transportar el crudo se reducen considerablemente al reducir la relación consistencia-viscosidad.

4.2. Tubería de sección convergente o divergente

Para el caso de los resultados de la tobera nos enfocaremos únicamente en discutir los asociados al caso no-newtoniano, puesto que es el interés principal de la tesis.

Para el caso de los resultados para la adimensionalización con respecto a la solución de la tubería uniforme del caso no-newtoniano, para un mismo gradiente de presión se observa que, para fluidos que sean adelgazantes, con el hecho de generar una pequeña divergencia se puede incrementar el flujo de una tubería uniforme de 10-15% dependiendo el adelgazamiento que presente el fluido. A partir de la idea anterior se puede

4. DISCUSIÓN

decir que los fluidos modelados como ley de potencia son muy susceptibles a cambios cuando se trabaja con tuberías de sección variable, puesto que pequeñas expansiones o contracciones del diámetro de un sistema de transporte de fluido da cambios significativos en el análisis. Por lo que para convergencias o divergencias mayores se pueden esperar cambios más abruptos en el comportamiento.

En cuanto al caso en que el flujo adimensional es unitario, se observa que el mejor comportamiento es dado por la tubería de sección divergente, puesto que hace que el gradiente de presión adimensional se reduzca. Se visualiza que con un aumento o decremento de 0.055 % del valor de la relación de diámetros el gradiente puede disminuir o aumentar, respectivamente, de un 6 a 15 %. Entonces, para una producción de crudo dada, puede ser conveniente tener pequeñas expansiones de la sección transversal, ya que este reduciría el gradiente de presión que tendría que generar la bomba para trasegar el fluido.

Para el caso de los resultados para la forma adimensional de la tubería de sección convergente o divergente para un fluido no-newtoniano con respecto a su solución newtoniana, se tiene que el comportamiento resultante, tanto para el caso convergente como el divergente, es prácticamente el mismo al de la tubería uniforme, por lo cual para tuberías de sección variable que presenten una convergencia o divergencia pequeña, el caso no-newtoniano puede ser calculado con la solución de la tubería uniforme no newtoniana; estos valores al graficarlos no cambian ni 1 %.

4.3. Lubricación mecánica

Para el caso de los resultados obtenidos para la lubricación mecánica se tiene que el aumento de corte por medio de la modificación geométrica de la tubería no da el resultado esperado, pues, para un gradiente de presión adimensional unitario, resulta que el flujo cae al aumentar el número de tuberías y, para un flujo adimensional unitario, el gradiente de presión tiende a aumentar. Todo esto último es válido tanto cuando se adelgaza el fluido como cuando se espesa.

Entonces, se concluye que el hecho de dividir un cierto flujo de crudo, el cual adelgace, en varias tuberías más pequeñas no realiza un aporte positivo, ni a la producción, ni a los costes de bombeo.

Conclusiones

Se concluye que en el caso de tuberías uniformes utilizadas para el transporte de fluidos viscosos con propiedades cercanas al petróleo crudo pesado, modelado como fluido tipo ley de potencia, existen rangos del índice de potencia para los cuales, bajo un cierto gradiente de presión, el comportamiento de flujo es prácticamente newtoniano. Para estos rangos, el análisis de flujo puede realizarse a partir de las relaciones newtonianas. En el caso particular de las tuberías uniformes este estudio puede ser extendido a partir de la inclusión de la mayor parte de los parámetros adimensionales, que en este caso se tomaron como unitarios. A partir de esto podrían obtenerse valores de dichas relaciones los cuales permitan que el análisis pueda ser considerado en su totalidad como newtoniano. Además de esto, el análisis puede extenderse para investigar la reología de crudos extrapesados.

En el caso de las toberas se observa que cuando el crudo se modela como un fluido ley de potencia, los cambios que presentan los resultados con respecto a la tubería uniforme son pequeños por la baja convergencia, pero para convergencia o divergencias más pronunciadas los resultados pueden llegar a ser engañosos. Aunque la solución analítica puede ser obtenida, ésta es una aproximación. Al cambiar el radio se inducen efectos de corte al fluido lo que resultaría en una variación de la viscosidad a lo largo de la tobera. Para que este análisis sea correcto, se requiere realizar un modelo donde se tome en cuenta la inestabilidad creada en el fluido debido a este cambio de área.

Otro aspecto importante es la simplicidad del modelo reológico utilizado. El modelo de ley de potencia tiene limitantes asociadas al dominio de la rapidez de corte, a diferencia del modelo de Carreau-Yasuda, el cual sí está acotado para rapidezces de corte bajas y altas. Es entonces que para obtener un modelo que aporte mejores predicciones se debe desarrollar de forma acoplada la solución de las ecuaciones de conservación con el modelo de Carreau-Yasuda y añadir una perturbación, para observar la estabilidad de la solución.

En el caso de la lubricación mecánica se observa que al parecer no da resultado

5. CONCLUSIONES

dividir un flujo en tuberías de sección más pequeña. Además del aumento de fricción, dado por el incremento de la superficie de contacto, puede deberse a que en este caso de estudio se tomaron en cuenta casos aislados, es decir, uno que representa el comportamiento del flujo para un gradiente de presión constante y otro que representa los cambios en el gradiente de presión para un mismo flujo. Analizar al flujo de esta forma implica que, ni el flujo, ni el gradiente de presión, se ven afectados uno por el otro. Por lo tanto, para poder realizar un análisis más completo sería necesario utilizar todas las variables en conjunto.

Bibliografía

- [1] H. Alfonso, A. Hernández, and Y. Mediaceja. Modelado de la viscosidad aparente de un petróleo crudo de 11° api con comportamiento no newtoniano. *RCI*, 25:674–680, 2017. [4](#), [7](#), [11](#)
- [2] H. Barnes, J. Hutton, and K. Walters. *An Introduction to Rheology*. Elsevier, 1989. [4](#), [6](#), [7](#), [8](#)
- [3] R. Bird, R. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of Polymeric Liquids Vol. 1, Fluid Mechanics*. Wiley-Interscience, 2nd edition, 1987. [22](#)
- [4] D. Chadha. Designing a methodology for the optimization of pipelines on the basis of pressure drop. *IJRED*, 1:6–9. [11](#)
- [5] CNH. Producción de petróleo por clasificación de grados API. 2018. [12](#)
- [6] HART Energy and MathPro Inc. Introducción a la Refinación del Petróleo y Producción de Gasolina y Diesel con Contenido Ultra Bajo de Azufre. ICCT, 2011. [8](#), [9](#), [10](#)
- [7] J. Gerez and A. Pick. Heavy oil transportation by pipeline. *IPC*, 2:699–703, 1996. [12](#)
- [8] M. Ghannam, S. Hasan, B. Abu-Jdayil, and N. Rheological properties of heavy light crude oil mixtures for improving flowability. *JPSE*, 81:122–128, 2012. [10](#)
- [9] S. Hasan, M. Ghannam, and N. Esmail. Heavy crude oil viscosity reduction and rheology for pipeline transportation. *F*, 89:1095–1100, 2010. [11](#)
- [10] A. Lara. Situación y Retos para el Desarrollo de los Crudos Pesados y Extrapesados de México. FI, UNAM, 2018. [10](#), [12](#)
- [11] K. Madlener, B. Frey, and H. Ciezki. Generalized Reynolds Number for Non-Newtonian Fluids. *PPP*, 1:237–250, 2009. [7](#)
- [12] L. Nadirah, Abdurahman, and Rizauddin D. Rheological study of petroleum fluid and oil-in-water emulsion. *IJESRT*, 3:129–134, 2014. [11](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [13] E. Obert. *Motores de Combustión Interna, Análisis y Aplicaciones*. 2nd edition, 1999. [8](#)
- [14] K. Ogata. *Dinámica de Sistemas*. Prentice Hall, 1st edition, 1987. [6](#)
- [15] D. Sankar and K. Hemalatha. Non-linear mathematical models for blood flow through tapered tubes. *AMC*, 188:567–582, 2007. [23](#), [39](#)
- [16] I. Shames. *Mecánica de fluidos*. Mc Graw Hill, 3rd edition, 1995. [2](#), [4](#)
- [17] S. Sutura. The History of Pouseulle’s Law. *ARFM*, 25:1–19, 1993. [5](#)
- [18] F. White. *Mecánica de Fluidos*. Mc Graw Hill, 6th edition, 2008. [3](#)
- [19] R. Zenit. Apuntes de Mecánica de Fluidos. Notas de clase, UNAM, IIM, 2018. [5](#)