Universidad Nacional
Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

Propiedades tipo Lindelöf

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Carlos David Jiménez Flores

TUTOR

Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

Ciudad Universitaria, CDMX, 2019.

Un oasis de horror en medio de
un desierto de aburrimiento

ROBERTO BOLAÑO.

Para las cuatro mujeres más importantes de mi vida.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre, a mi abuela, a mi hermano y a mi hermana por todo. Por cada día que han estado en mi vida y por cada momento que han compartido. Por apoyarme en los malos días y también en los buenos. Por darme la suficiente fuerza para llegar hasta este punto de mi vida y por hacer de mí la persona que soy ahora. Agradezco infinitamente que hayan estado en todo momento, sin importar las consecuencias, sin importar nada. Son la mejor familia que pude haber tenido. Los amo por eso.

Agradezco a Michelle Guadalupe Torres Rodríguez: el amor de mi vida. Doy gracias por cada día que ha compartido conmigo. Por el apoyo incondicional y todo el amor que me ha dado. Por cada consejo, por cada abrazo, por cada beso. Estuvo conmigo en la parte más difícil de este camino y me ayudó a lograrlo. A ella le estaré eternamente agradecido, además, por el amor más grande e infinito que una persona pueda dar.

Agradezco a cada amigo que me motivó. A aquellos que salieron de mi vida pero que me dieron un cachito de la suya, gracias. A los que el tiempo se ha encargado de borrar también agradezco pues cada cosa, incluso la más mínima, me hizo estar en este punto, justo ahora. Agradezco de forma especial a aquellos amigos que aún están y que día a día me acompañan, aunque sea en la distancia, y se alegran conmigo, disfrutan y me quieren. Muy especialmente agradezco a Ricardo Olvera Ramírez por cada risa, cada consejo, cada sonrisa y cada abrazo: sin ellos no estaría aquí. A Daniela Fernanda Chávez Tovar por su apoyo al inicio de la licenciatura. Sin ella no sé qué habría sido de mí. A Daniela Valle Bravo por su confianza, por su amistad y por ser la amiga que necesitaba en el momento más oscuro de mi vida. A Andrés Gustavo Ángeles Sánchez por cada risa, cada momento feliz que me proporcionó y por aquellos grandes consejos que supo darme y yo supe aprovechar. A Elmer Enrique Tovar Acosta, mi compañero de universidad. Por su ayuda, sus regaños, su amistad fiel y su afán de ayudarme a ser mejor matemático cada día. A cada uno de ustedes, mis amigos, les agradezco esto. A Andrés Quadri, Arturo Quiroz, Brandon Guadarrama, Carlos Daniel, Casandra Aguilar, Diana Ramírez, Emiliano Monreal, Erick Vergara, Fernando Estévez, Gabriel Manzanares, Guillermo Luna, Ilse Cervantes, Isis Franco, Javier Amezcua, Rafael Di Mare, Sebastián Alvarado, Valeria Montesinos, Vanessa Flores, Viridiana Guzmán, Johan Martínez, Oswaldo Hernández, Elizabeth Guzmán. Si alguno faltó en la lista, le pido me disculpe. No es intencional el olvidar el nombre.

Agradezco también a cada profesor y a cada ayudante que supo enseñarme. Que ayudó en mi formación y que me marcó además. Agradezco a Florencio Vera Butanda, Marco Antonio Montes de Oca Balderas, Alejandro Darío Rojas Sánchez, Rafael Rojas Barbachano, Raybel Andrés García Ancona, Ángel Tamariz Mascarúa y a Eugenia O'Reilly-Regueiro. A todos ellos por ser lo que un profesor debe ser. Les agradezco por ayudarme a encontrarme en este mundo. Por ayudarme a hallar la motivación necesaria para seguir adelante con mis estudios.

Finalmente, agradezco de nuevo a Alejandro Darío Rojas Sánchez, por su infinita paciencia y toda la ayuda brindada para culminar este proyecto. Además de ello, agradezco el conocimiento que me brindó y la gran disposición que tuvo siempre a apoyarme. Sin él habría sido imposible llegar hasta aquí. Gracias.

Índice general

Introducción

La topología general es una rama de las matemáticas sumamente importante. Es, someramente, una generalización de los conceptos que se tienen acerca de la distancia entre puntos y las nociones de estar cerca y lejos. Y aunque parezca que es una disciplina muy antigua, en realidad no lo es. Sus inicios están fechados a finales del siglo XIX y aunque algunas de las ideas que giran en torno a la topología sean de uso común quizá desde el inicio mismo del pensar matemático, las bases formales quedaron sentadas precisamente a inicios del siglo pasado. Diversos matemáticos participaron para formar, no de manera progresiva, a la topología general. Entre ellos figuran los nombres de G. Cantor, R. Baire, Felix Hausdorff, Frederic Riesz', L. Viertoris, H. Tietze, M. Fréchet, A.N. Tychonoff, P. S. Alexandrov entre otros. Más adelante el desarrollo de la topología se impulsó de una forma impresionante con la participación de matemáticos como P.S. Urysohn, Miroslav Katetov, Leonard Gillman, R. L. Moore por solo mencionar algunos.

La incursión de la topología general en México se da entre los años de 1940 a 1950. Entre los primeros profesores interesados en la topología en México figuran José Adem, Samuel Gitler y Roberto Vázquez García. Sin embargo, un personaje clave en el desarrollo de tal disciplina es, sin duda alguna, el Dr. Adalberto García Máynez. Él fue el primer investigador mexicano en Topología General.

Con el pasar de los años se volvió casi una necesidad para un matemático saber al menos las nociones básicas de topología. Es difícil determinar qué tanto es lo básico, pero es un hecho que debe haber cierta formación topológica en cada matemático; particularmente, en cada matemático formado en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Esto estimula, claramente, a disfrutar su estudio y a profundizar lo más posible en él. Y eso es precisamente lo que se hará en este trabajo: estudiar, de forma sistemática, ciertas propiedades de algunos espacios topológicos particulares. El rigor con el que se estudiará será el requerido para que no quede lugar a dudas. Sin embargo, gran parte de lo utilizado en este trabajo excede, aunque no de una forma tan grave, lo que se entiende usualmente por conocimientos básicos de topología general. Se pide que el lector interesado conozca a detalle los temas impartidos en al menos los dos primeros cursos de Topología General en la Facultad de Ciencias de la UNAM con especial enfásis en temas como compactaciones, axiomas de separación, extensiones de espacios topológicos, compacidad, filtros y ultrafiltros y un dominio aceptable de teoría de conjuntos que incluye nociones de ordinales, cardinales y operaciones de conjuntos. A pesar de esto, algunas definiciones básicas son dadas a lo largo del trabajo para poder encaminar, de forma adecuada, lo que se quiere exponer. Aunque, cabe aclarar, que no todas las definiciones básicas se proporcionan. Una aclaración importante es que a lo largo de todo el trabajo todos los conjuntos se suponen no vacíos a no ser que se indique lo contrario; también no suponemos ningún axioma de separación sobre los espacios topológicos a no ser que se mencione.

El objetivo de este trabajo es presentar un análisis de cuatro clases de espacios topológicos: los espacios Lindelöf, casi Lindelöf, débilmente Lindelöf y quasi-Lindelöf. Quizá la primera de ellas, es decir, los espacios Lindelöf, es ya bien conocida pues es una propiedad básica. Las otras tres restantes quizá sean menos estudiadas pero no con ello menos relevantes. El objetivo de este estudio es tanto presentar las principales propiedades como también para servir como material de consulta, ampliando así, la poca bibliografía en español encontrada acerca de estas cuatro propiedades.

El trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el primero de ellos se analiza con detenimiento a los espacios Lindelöf así como su comportamiento con las principales operaciones topológicas. Además, se estudia la relación entre estos y los espacios métricos. Es en realidad una relación muy interesante dado que los espacios métricos tienen intrínsecamente propiedades sumamente ricas, topológicamente hablando. Se finaliza el capítulo con algunas preguntas abiertas para motivar al lector tanto a ahondar más en el tema como quizá también en un futuro poder desarrollarlas más y obtener nuevos resultados.

El segundo capítulo, aunque breve, muestra a los espacios casi Lindelöf. Estos surgen de una debilitación de la propiedad de Lindelöf. Se ilustran las relaciones entre estos y los espacios Lindelöf así como el comportamiento añadiendo cierta separación a los espacios así como, nuevamente, con las principales operaciones topológicas. En este capítulo se abordan varias clases de continuidad que no son tan comunes y se comprueba cómo se comportan con los espacios casi Lindelöf. Finaliza con un acercamiento al comportamiento del producto de espacios casi Lindelöf, que, como se espera, resulta un poco complicado.

El tercer capítulo, y el de mayor extensión, es una exposición amplia de los espacios débilmente Lindelöf. Estos, de forma natural, surgen de debilitar la definición de un espacio casi Lindelöf. Sin embargo, el enfoque que se da para motivarlos es totalmente diferente. Se ven como una debilitación de la definición de un espacio casi Lindelöf pero a su vez, como consecuencia de otra clase de espacios: los espacios H-cerrados. Es el estudio de estos últimos el que nos motivará a definir un espacio débilmente Lindelöf así como también a encontrar diversos contraejemplos y ejemplos. También aparecen clases de espacios muy tradicionales como lo son los P-espacios, el duplicado de Alexandroff, entre otros. El capítulo cierra con el análisis del producto de dos espacios débilmente Lindelöf. El ejemplo necesario para probar que el producto de dos espacios débilmente Lindelöf no necesariamente es débilmente Lindelöf es uno de los más extensos de este trabajo pero también uno de los más detallados y satisfactorios, en el sentido de que se vislumbra muy claramente el poder de las herramientas topológicas.

Finalmente, el capítulo que cierra este trabajo lleva por título *Espacios quasi-Lindelöf*. En comparación con las anteriores tres propiedades, es la menos estudiada. Eso no quita su relevancia ni mucho menos la influencia que tiene sobre las anteriores tres.
Sobre esta propiedad se estudian las principales relaciones que tiene con la continuidad, el comportamiento hereditario así como las clases de espacios que cumplen ser quasi-Lindelöf. Sin embargo, el punto central del capítulo gira en torno a una pregunta abierta que Petra Staynova hace en su artículo [28]. La propiedad de quasi-Lindelöf es tan poco estudiada que, al menos hasta el 2011, no se sabía si el producto de un espacio quasi-Lindelöf y un espacio compacto resulta quasi-Lindelöf. Sin embargo, Song en su artículo [25] resuelve la pregunta. Es entonces la exposición de tal respuesta así como

el desarrollo de toda la teoría necesaria para entenderla el punto cumbre del capítulo.

$\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ que sea numerable cumple que $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$. En tal caso decimos que $\mathcal{A}$ tiene la PIN.

Con la definición que se necesitaba ya establecida, observemos pues la equivalencia para la definición de espacios Lindelöf, pero antes de ella presentaremos una pequeña observación.

Observación 1.3. *Sea $A \subseteq X$ con X un espacio topológico. Para probar si A es Lindelöf hay que considerar cubiertas abiertas pero la pregunta es: ¿de abiertos de X o de abiertos de A? En realidad da lo mismo y eso queda resumido en el siguiente enunciado: cualquier cubierta abierta $\mathscr{U}$ de A formada por abiertos de X tiene una subcubierta numerable si y solo si cualquier cubierta abierta $\mathscr{V}$ de A formada por abiertos de A tiene una subcubierta numerable. La prueba de este hecho es muy sencilla:*

Primero supongamos que cualquier cubierta abierta $\mathscr{U}$ de A formada por abiertos de X tiene una subcubierta numerable y tomemos $\mathscr{V}$ una cubierta abierta de A formada por abiertos de A. Entonces para cada $V \in \mathscr{V}$ existe U_V un abierto de X tal que $V = A \cap U_V$. De esta manera $\{U_V \mid V \in \mathscr{V}\}$ es una cubierta abierta de A formada por abiertos de X y así existe $\mathscr{V}_0 \subseteq \mathscr{V}$ numerable tal que

$$A = \left(\bigcup_{V \in \mathscr{V}_0} U_V \right) \cap A$$

de donde se deduce entonces que $\mathscr{V}_0$ es la subcubierta numerable buscada.

Ahora supongamos que cualquier cubierta abierta $\mathscr{V}$ de A formada por abiertos de A tiene una subcubierta numerable y tomemos $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de A formada por abiertos de X. Así, para cada $U \in \mathscr{U}$ se cumple que $U \cap A$ es un abierto de A y en consecuencia $\{U \cap A \mid U \in \mathscr{U}\}$ es una cubierta abierta de A formada por abiertos de A y por hipótesis entonces existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $\{U \cap A \mid U \in \mathscr{U}_0\}$ es una cubierta de A. Claramente $\mathscr{U}_0$ es la subcubierta numerable buscada.

Continuemos entonces con la equivalencia antes mencionada.

Proposición 1.4. *Sea X un espacio topológico. X es Lindelöf si y solo si toda familia de cerrados en X con la PIN tiene intersección no vacía.*

Demostración. Para la primera implicación, supongamos que X es Lindelöf y sea $\mathcal{F}$ una familia de cerrados en X con la PIN. Probemos que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Supongamos que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Así, $X \setminus \bigcap \mathcal{F} = X$. Por las leyes de De Morgan, tenemos que $X = \bigcup \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Como cada elemento de $\mathcal{F}$ es un cerrado entonces la colección $\mathcal{U} = \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es Lindelöf entonces existe $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_0$ es numerable y además $X = \bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}_0} X \setminus F$. Así entonces, $\bigcap \mathcal{F}_0 = \emptyset$. Esto es un absurdo pues supusimos que $\mathcal{F}$ era una familia de cerrados con la PIN. Por lo tanto $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Recíprocamente, probemos que X es Lindelöf bajo el supuesto de que cualquier familia de cerrados en X con la PIN tiene intersección no vacía. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Supongamos que $\mathcal{U}$ no tiene subcubiertas numerables. Entonces, consideremos $\mathcal{F} = \{X \setminus U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Afirmamos que $\mathcal{F}$ tiene la PIN. Consideremos pues $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ un subconjunto numerable. De la suposición inicial tenemos que $\{U \mid U \in \mathcal{F}_0\}$ no es subcubierta numerable de $\mathcal{U}$ y por lo tanto, $\bigcup\limits_{X \setminus U \in \mathcal{F}_0} U \subsetneq X$. Tomemos entonces un punto

$$z \in X \setminus \bigcup_{X \setminus U \in \mathcal{F}_0} U = \bigcap_{X \setminus U \in \mathcal{F}_0} X \setminus U.$$

Tal punto existe precisamente porque $\{U \mid U \in \mathcal{F}_0\}$ no es subcubierta. Pero entonces podemos concluir que $z \in \bigcap \mathcal{F}_0$ y con ello $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. De la hipótesis obtenemos que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ con lo cual $X \setminus \bigcap \mathcal{F} \neq X$, es decir, $\bigcup \mathcal{U} \neq X$. Esto es un absurdo. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ tiene subcubiertas numerables, es decir, X es Lindelöf. ■

Esta forma de caracterizar a los espacios Lindelöf es muy práctica y útil y, de hecho, en algunos textos suele ser dada como la definición. Otra caracterización muy útil y que de cierta manera simplifica la Definición 1.1 es la siguiente.

Proposición 1.5. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base fija para la topología de X. Entonces X es Lindelöf si y solo si cualquier cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X formada únicamente por elementos de $\mathcal{B}$ tiene una subcubierta numerable.*

Demostración. Supongamos que X es Lindelöf. Consideremos $\mathcal{B}$ una base fija de X y tomemos $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X formada únicamente por elementos de $\mathcal{B}$, es decir, $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{B}$. Por ser X un espacio Lindelöf entonces $\mathscr{U}$ tiene una subcubierta numerable. Esto prueba la primera implicación.

Para la implicación restante, consideremos $\mathscr{V}$ una cubierta abierta de X. Vamos a demostrar que $\mathscr{V}$ tiene una subcubierta numerable. Es importante observar que dado que $\mathscr{V}$ es una cubierta abierta arbitraria, entonces no necesariamente se cumple que esté formada únicamente por elementos de la base $\mathcal{B}$. Notemos que para cada $x \in X$, como $\mathscr{V}$ es cubierta abierta, existe $V_x \in \mathscr{V}$ tal que $x \in V_x$. Como cada elemento de $\mathscr{V}$ es abierto entonces existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq V_x$. Así tenemos que

$$X = \bigcup_{x \in X} B_x$$

y además $\{B_x \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{B}$. Por lo tanto, la colección $\{B_x \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X formada únicamente por elementos de $\mathcal{B}$ y por hipótesis tiene una subcubierta numerable, esto es, existe $X_0 \subseteq X$ tal que X_0 es numerable y además

$$X = \bigcup_{x \in X_0} B_x.$$

Pero para todo $x \in X_0$ se cumple que $x \in B_x \subseteq V_x$. En consecuencia

$$X = \bigcup_{x \in X_0} V_x.$$

Por lo tanto, $\{V_x \mid x \in X_0\} \subseteq \mathscr{V}$ es la subcubierta numerable buscada con lo que concluimos que X es un espacio Lindelöf. ■

En resumen, la Proposición 1.5 nos dice que para comprobar que un espacio es Lindelöf basta considerar cubiertas formadas por una base fija. La importancia de tal resultado radica en el hecho de que así se descarta una cantidad inmensa de cubiertas a tener en cuenta. Además, de manera general, es más cómodo trabajar con una base que con toda la topología. Aunque el uso de una u otra equivalencia dependerá del contexto y las condiciones particulares en las que nos encontremos. A todo esto, ¿qué espacios Lindelöf existen? Tenemos la definición y algunas equivalencias importantes pero aún no poseemos ejemplos para visualizar espacios concretos. Eso es lo que viene a continuación:

Ejemplo 1.6.

i) Cualquier espacio segundo numerable es Lindelöf. En particular, $\mathbb{R}$ *es Lindelöf.*

ii) Cualquier espacio compacto es Lindelöf.

iii) La recta de Sorgenfrey, que denotaremos por $\mathcal{L}_S$*, es un espacio Lindelöf.*

iv) Cualquier espacio numerable es Lindelöf. Más aún, si X *tiene la topología discreta, entonces* X *es Lindelöf si y solo si* $|X| \leq \aleph_0$

Para no dejar lugar a dudas se vuelve necesaria una prueba de que, en efecto, las afirmaciones contenidas en el Ejemplo 1.6 son ciertas. La demostración de tales hechos es lo que sigue:

Demostración.

i) Sea X un espacio segundo numerable. Esto garantiza la existencia de $\mathcal{B}$ una base para X tal que $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$. Gracias a la Proposición 1.5, para probar que X es Lindelöf, basta considerar cubiertas abiertas formadas por elementos de $\mathcal{B}$. Sea pues $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X tal que $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{B}$. Esto implica que $|\mathscr{U}| \leq |\mathcal{B}| \leq \aleph_0$. Por lo tanto, $\mathscr{U}$ es la subcubierta numerable buscada y así, concluimos que X es Lindelöf.

ii) Esta implicación es una aplicación directa de la definición de compacidad. De hecho, la compacidad es una condición más fuerte pues nos asegura que cada cubierta abierta no solo tiene una subcubierta numerable, sino más aún, finita.

iii) Recordemos que la recta de Sorgenfrey, denotada por $\mathcal{L}_S$, no es más que $\mathbb{R}$ equipado con la topología que tiene por base a $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$. Gracias a lo enunciado en la Proposición 1.5, para demostrar que $\mathcal{L}_S$ es Lindelöf, basta considerar cubiertas formadas por elementos de $\mathcal{B}$. Sea pues $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de $\mathcal{L}_S$ formada por elementos de $\mathcal{B}$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{V} = \{(a, b) \mid [a, b) \in \mathscr{U}\}.$$

Sea $\mathcal{Z} = \bigcup \mathcal{V}$. Por la definición del conjunto $\mathcal{V}$, podemos observar que es un abierto en la topología euclidiana de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es segundo numerable y cualquier subespacio de él lo es, entonces $\mathcal{Z}$ es segundo numerable y por el Ejemplo 1.6 i) entonces $\mathcal{Z}$ es Lindelöf. Además, como sabemos que $\mathcal{Z} = \bigcup \mathcal{V}$ entonces $\mathcal{V}$ es cubierta abierta de $\mathcal{Z}$. Gracias a que $\mathcal{Z}$ es Lindelöf, existe $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ numerable tal que $\bigcup \mathcal{V}_0 = \mathcal{Z}$. Consideremos ahora

$$\mathscr{U}_0 = \{[a, b) \mid (a, b) \in \mathcal{V}_0\}.$$

Observemos que $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ y además $\mathscr{U}_0$ es numerable dado que $\mathcal{V}_0$ lo es. Ahora afirmamos que $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ es numerable. Dado $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$, tenemos que $x \notin (a, b)$ para todo $[a, b) \in \mathscr{U}$. Pero sabemos que existe $[a_x, b_x) \in \mathscr{U}$ tal que $x \in [a_x, b_x)$. Por lo tanto $a_x = x$. Además, $a_x < b_x$, por tanto existe $r_x \in (a_x, b_x) \cap \mathbb{Q}$. Definamos $\varphi : \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z} \to \mathbb{Q}$ como $\varphi(x) = r_x$. Veamos que φ es inyectiva. Sean $p, q \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ tales que $p \neq q$. Sin pérdida de generalidad $p < q$. Entonces $p = a_p \in [a_p, b_p) \in \mathscr{U}$ y $q = a_q \in [a_q, b_q) \in \mathscr{U}$. Si $q < b_p$ entonces $q \in (a_p, b_p =\subseteq \mathcal{Z}$; lo cual es absurdo. Por tanto, $p = a_p < r_p < b_p \leq q = a_q < r_q$. Lo que nos dice que φ es inyectiva. Así concluimos que $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ es numerable. Ahora, $\bigcup \mathscr{U}$ cubre a $\mathcal{Z}$ y como $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ es numerable entonces para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ tomamos $U_x \in \mathscr{U}$. Así $\{U_x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}\} \bigcup \mathscr{U}_0$ es la subcubierta numerable buscada.

iv) Primero supongamos que X satisface que $|X| \leq \aleph_0$. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Para cada $x \in X$ tomemos $U_x \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U_x$. Así, la colección $\{U_x \mid x \in X\}$ es una cubierta y además $|\{U_x \mid x \in X\}| \leq \aleph_0$. Entonces $\{U_x \mid x \in X\}$ es la subcubierta numerable buscada. Ahora, supongamos que X tiene la topología discreta y además que es Lindelöf. Supongamos que $|X| > \aleph_0$ y tomemos $\mathscr{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ que es una cubierta abierta de X. Ella misma no es numerable por la suposición sobre la cardinalidad de X. Si tomamos $\mathscr{U}_0 \subsetneq \mathscr{U}$, entonces existe $x \in X$ tal que $\{x\} \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{U}_0$. Por lo tanto, $x \notin \bigcup \mathscr{U}_0$. Así, $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta sin subcubiertas propias y ella misma no es una cubierta numerable. Por lo tanto, X no es Lindelöf.

■

Con lo demostrado en el Ejemplo 1.6 tenemos ya una amplia variedad de espacios Lindelöf, sin embargo, ¿hay alguna manera de producir nuevos espacios Lindelöf a partir de los que ya tenemos? La respuesta a esta pregunta es positiva: podemos hacerlo involucrando las operaciones topológicas más usuales. Y aunque el tratamiento de algunas de ellas es sumamente delicado, las más usuales y comunes tienen el comportamiento esperado. Un primer acercamiento a esto lo podemos encontrar en lo siguiente.

Proposición 1.7. *Sean X un espacio Lindelöf y F un subconjunto cerrado de X. Entonces F es Lindelöf (con la topología de subespacio).*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de F formada por abiertos de X. Como F es cerrado entonces $X \setminus F$ es abierto. Así, $\mathscr{U} \cup \{X \setminus F\}$ es cubierta abierta de X. Como X es Lindelöf, existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U} \cup \{X \setminus F\}$ numerable tal que $\bigcup \mathscr{U}_0 = X$. Por lo tanto, $F \subseteq \bigcup \mathscr{U}_0$ y así, hemos encontrado la subcubierta numerable buscada. Por lo tanto, F es Lindelöf. ■

En resumen, esto nos dice que la propiedad de Lindelöf se hereda a cerrados. Sin embargo, es natural preguntarnos si dicha propiedad se hereda a cualquier subespacio. La respuesta, lamentablemente, es negativa. En general, ser Lindelöf no se hereda a cualquier subconjunto. Esto lo ejemplificaremos en seguida.

Ejemplo 1.8. *Consideremos $\mathbb{R}$ y p un punto tal que $p \notin \mathbb{R}$. Tomemos entonces $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ con la siguiente topología*

- *Para cada $x \in \mathbb{R}$, declaramos que $\{x\}$ es abierto.*
- *Sea $U \subseteq X$ tal que $p \in U$. Entonces U es abierto si y solo si $X \setminus U$ es finito.*

Observemos que X es un espacio topológico compacto pues si $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de X entonces existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $p \in U$. Pero esto nos dice que $X \setminus U$ es finito y así, para cada $x \in X \setminus U$ tomamos $U_x \in \mathscr{U}$. Entonces concluimos que $\mathscr{U}_0 = \{U_x \mid x \in X \setminus U\} \cup \{U\}$ es la subcubierta finita buscada. En virtud del Ejemplo 1.6 ii) tenemos que X es Lindelöf. Sin embargo, $\mathbb{R}$ como subespacio de X, hereda la topología discreta y además $|\mathbb{R}| > \aleph_0$. Nuevamente, gracias al Ejemplo 1.6 iv) entonces $\mathbb{R}$ no es Lindelöf visto como subespacio de X. Esto prueba que la propiedad de Lindelöf no es hereditaria.

Después de esto, ¿a qué subespacios podemos asegurar que la propiedad de Lindelöf se hereda? Ya hemos visto que en el caso general no es posible decir con certeza que a todos, sin embargo, sí podemos garantizar que se hereda a algunos. Para ello, primero necesitamos la siguiente definición.

Definición 1.9. *Sea X un espacio topológico. Decimos que $A \subseteq X$ es un conjunto F_σ si existe una colección numerable de cerrados $\{F_n\}_{n\in\omega}$ tal que $A = \bigcup_{n\in\omega} F_n$.*

Así, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.10. *Sean X un espacio Lindelöf y A un subconjunto F_σ de X. Entonces A es Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de A formada por abiertos de X. Como A es un conjunto F_σ, existe una colección numerable de cerrados $\{F_n\}_{n\in\omega}$ tal que

$$A = \bigcup_{n\in\omega} F_n. \tag{1.1}$$

Por la Proposición 1.7 tenemos que para toda $n \in \omega$ se cumple que F_n es Lindelöf pues es cerrado. Además, por la igualdad (1.1) se tiene que $F_n \subseteq A$ para toda $n \in \omega$. Así, $\mathscr{U}$ es también cubierta abierta de F_n y por ser Lindelöf existe $\mathscr{U}_n \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $F_n \subseteq \bigcup \mathscr{U}_n$. Así entonces

$$A = \bigcup_{n\in\omega} F_n \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \left(\bigcup \mathscr{U}_n \right). \tag{1.2}$$

Como cada $\mathscr{U}_n$ es numerable y la unión numerable de numerables es numerable, entonces, por la igualdad 1.2, $\bigcup \{\mathscr{U}_n \mid n \in \omega\}$ es la subcubierta numerable buscada. Concluimos entonces que A es Lindelöf. ∎

Pensemos en un espacio X segundo numerable. Así, dado $A \subseteq X$ entonces se cumple que A es segundo numerable también y por lo tanto, A es Lindelöf. Así, cualquier subconjunto de X es Lindelöf. ¿Habrá una clase de espacios en donde cualquier subconjunto sea Lindelöf? La respuesta es afirmativa y de hecho a estos espacios se les llama espacios hereditariamente Lindelöf. Entre ellos, el ejemplo más importante es la recta de Sorgenfrey. Resumimos esto en la siguiente proposición.

Proposición 1.11. *Consideremos $\mathcal{L}_S$ a la recta de Sorgenfrey. Entonces cualquier subconjunto de $\mathcal{L}_S$ equipado con la topología de subespacio es Lindelöf.*

Demostración. Sea $W \subseteq \mathcal{L}_S$. Una mínima modificación de la prueba dada del Ejemplo 1.6 iii) aplicada a W nos otorga el resultado deseado. ∎

Aunque la definición de ser hereditariamente Lindelöf es muy simple, se vuelve muy problemático verificar si cada subespacio es Lindelöf o no. La dificultad precisamente radica en la cantidad de subespacios y más aún, la generalidad de estos, pues es bien sabido que no todos los subespacios de un espacio topológico son abiertos o cerrados. Sin embargo, la proposición que viene a continuación resume el problema de comprobar si un espacio es hereditariamente Lindelöf al comportamiento de sus abiertos. Más formalmente:

Proposición 1.12. *Sea X un espacio topológico. X es hereditariamente Lindelöf si y solo si cada subespacio abierto de X es Lindelöf.*

Demostración. La primera implicación es inmediata dado que si X es hereditariamente Lindelöf entonces cualquier subespacio es Lindelöf. En particular entonces lo serán los subespacios abiertos.

Para la otra implicación, supongamos pues que cualquier subespacio abierto de X es Lindelöf y probemos que X es hereditariamente Lindelöf. Sean entonces $A \subseteq X$ un subconjunto arbitrario y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de A formada por abiertos de X, es decir, $A \subseteq \bigcup \mathscr{U}$. Sea $Z = \bigcup \mathscr{U}$. Notemos que Z es un abierto por ser unión de abiertos. Por hipótesis entonces Z es Lindelöf. Como $\mathscr{U}$ es cubierta de Z existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $Z = \bigcup \mathscr{U}_0$. Pero entonces $A \subseteq \bigcup \mathscr{U}_0$. Por lo tanto, $\mathscr{U}_0$ es la subcubierta numerable buscada y en consecuencia A es Lindelöf. ■

Después de analizar el comportamiento de la propiedad de Lindelöf con los subespacios, vamos ahora a involucrar funciones. ¿Cómo es el comportamiento entre las funciones y los espacios Lindelöf? Para comenzar, tenemos lo siguiente.

Proposición 1.13. *Sean X y Y dos espacios topológicos con X Lindelöf y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de Y. Gracias a la continuidad de f, para todo $U \in \mathscr{U}$ se cumple que $f^{-1}[U]$ es un abierto. Además, como

$$Y = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$$

entonces también se cumple que

$$X = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} f^{-1}[U].$$

Esto último pues tomar imágenes inversas preserva uniones. Como X es Lindelöf, existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que

$$X = \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} f^{-1}[U].$$

Sin embargo, debido a que f es suprayectiva y tomar imágenes preserva uniones entonces

$$Y = f[X] = f\left[\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0 f^{-1}[U]}\right] = \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} f\left[f^{-1}[U]\right] = \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} U$$

Así, $\mathscr{U}_0$ es la subcubierta numerable buscada y entonces Y es Lindelöf. ■

Como una aplicación inmediata de esto, tenemos el siguiente corolario

Corolario 1.14. *Si X es Lindelöf y Y es cociente de X entonces Y es Lindelöf.*

Demostración. Todo cociente es una imagen continua y suprayectiva y gracias a la Proposición 1.13 ser Lindelöf se preserva bajo imágenes continuas y suprayectivas. ■

Como hemos visto, las funciones continuas se comportan muy bien junto con la propiedad de Lindelöf. Esto quizá se intuía desde que la definición de ser Lindelöf quedó dada en términos de abiertos y es que precisamente los abiertos y las funciones continuas están ligados muy fuertemente. Sin embargo, ¿de qué otra forma podemos relacionar funciones con espacios Lindelöf? Quizá considerar continuidad no nos lleve hacia nuevos horizontes, pero pensar en alguna otra clase de funciones puede ser útil. Pero para ahondar en esto, se hace necesario definir lo siguiente.

Definición 1.15. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función.*

i) Decimos que f es compacta si para todo $y \in Y$ se cumple que $f^{-1}[\{y\}]$ es compacto.

ii) Decimos que f es perfecta si es cerrada y compacta. Recordemos que f es cerrada si para todo cerrado F de X se cumple que $f[F]$ es cerrado en Y.

Con la definición requerida podemos entonces pasar a enunciar la proposición.

Proposición 1.16. *Sean X y Y dos espacios topológicos con Y Lindelöf y una función perfecta y suprayectiva $f : X \to Y$. Entonces X es Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Probemos que tiene una subcubierta numerable. Definimos

$$T = \{\mathscr{A} : \mathscr{A} \subseteq \mathscr{U} \text{ y } |\mathscr{A}| < \aleph_0\}.$$

Notemos que T no es más que la familia de todos los subconjuntos finitos de $\mathscr{U}$. Además, para cada $\mathscr{A} \in T$ definimos

$$U_{\mathscr{A}} = \bigcup \mathscr{A}.$$

Ahora, por hipótesis, para cada $y \in Y$, se cumple que $f^{-1}[\{y\}] \subseteq X$ es compacto. Como $\mathscr{U}$ es cubierta de X lo es también de $f^{-1}[\{y\}]$ y así, existe $\mathscr{A} \in T$ tal que $f^{-1}[\{y\}] \subseteq U_{\mathscr{A}}$. Esta contención implica que para cualquier elemento $w \in X \setminus U_{\mathscr{A}}$ se cumple que $f(w) \neq y$, es decir, $f(w) \notin \{y\}$. Así entonces, $y \notin f[X \setminus U_{\mathscr{A}}]$ y por lo tanto $y \in Y \setminus f[X \setminus U_{\mathscr{A}}]$ y así

$$Y = \bigcup_{\mathscr{A} \in T} Y \setminus f[X \setminus U_{\mathscr{A}}].$$

Observemos que $U_{\mathscr{A}}$ es abierto para cualquier $\mathscr{A} \in T$. Así, $X \setminus U_{\mathscr{A}}$ es cerrado y como f es perfecta entonces $f[X \setminus U_{\mathscr{A}}]$ es cerrado y por lo tanto $Y \setminus f[X \setminus U_{\mathscr{A}}]$ es abierto. Por lo tanto, la colección $\{Y \setminus f[X \setminus U_{\mathscr{A}}] \mid \mathscr{A} \in T\}$ es una cubierta abierta de Y. Como Y es Lindelöf entonces existe $T_0 \subseteq T$ numerable tal que

$$Y = \bigcup_{\mathscr{A} \in T_0} Y \setminus f[X \setminus U_{\mathscr{A}}].$$

Dado que la imagen inversa preserva uniones y abre restas de conjuntos entonces tenemos que

$$X = f^{-1}[Y] = \bigcup_{\mathscr{A} \in T_0} f^{-1}[Y \setminus f[X \setminus U_{\mathscr{A}}]] = \bigcup_{\mathscr{A} \in T_0} X \setminus f^{-1}[f[X \setminus U_{\mathscr{A}}]].$$

A su vez obtenemos que

$$\bigcup_{\mathscr{A} \in T_0} X \setminus f^{-1}[f[X \setminus U_{\mathscr{A}}]] \subseteq \bigcup_{\mathscr{A} \in T_0} X \setminus (X \setminus U_{\mathscr{A}}) = \bigcup_{\mathscr{A} \in T_0} U_{\mathscr{A}}.$$

Así entonces, $X \subseteq \bigcup_{\mathscr{A} \in T_0} U_{\mathscr{A}}$ y por lo tanto, como la otra contención es inmediata, se tiene que

$$X = \bigcup_{\mathscr{A} \in T_0} U_{\mathscr{A}}.$$

Analicemos con un poco de detenimiento a la familia $\{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \in T_0\}$. Primero, T_0 es un subconjunto numerable de T y como cada $\mathscr{A} \in T_0$ se tiene que $\mathscr{A}$ es un subconjunto finito de $\mathscr{U}$. Por lo tanto, $\bigcup_{\mathscr{A} \in T_0} U_{\mathscr{A}}$ es la unión de una cantidad a lo más numerable de elementos de $\mathscr{U}$ y así, es la subcubierta numerable buscada. Concluimos entonces que X es Lindelöf. ■

La Proposición 1.16 un resultado un poco complicado pero que nos servirá para el desarrollo ulterior de este trabajo. Sin embargo, antes de eso, vamos a analizar el comportamiento de los espacios Lindelöf con la suma topológica. Recordemos brevemente que la suma topológica sobre la unión ajena de una colección de conjuntos es la topología fuerte inducida por las inclusiones en la unión disjunta.

Proposición 1.17. *La suma topológica $\bigoplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ es Lindelöf si y solo si cada X_α es Lindelöf y $|J| \leq \aleph_0$.*

Demostración. Para la primera implicación sea $\alpha \in J$ y supongamos que $\bigoplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ es Lindelöf . Recordemos que X_α es abierto y cerrado en la topología suma además de ser subespacios de $\bigoplus_{\alpha \in J} X_\alpha$. Por lo tanto, como ser Lindelöf se hereda a cerrados, entonces X_α es Lindelöf. Ahora, sea $\mathscr{U} = \{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ cubierta abierta de $\bigoplus_{\alpha \in J} X_\alpha$.

Notemos que la única subcubierta de $\mathscr{U}$ es ella misma pues si tomamos cualquier subconjunto propio faltaría al menos un X_α. Como el espacio $\bigoplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ es Lindelöf y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta sin subcubiertas propias entonces $|J| \leq \aleph_0$.

Para la otra implicación, supongamos que cada X_α es Lindelöf. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de $\bigoplus_{\alpha \in J} X_\alpha$. Definimos

$$\mathscr{U}_\alpha = \{U \cap X_\alpha \mid U \in \mathscr{U}\}.$$

Notemos que $\mathscr{U}_\alpha$ es cubierta abierta de X_α pues cada elemento de $\mathscr{U}_\alpha$ es intersección de abiertos y si $x \in X_\alpha$ entonces como $\mathscr{U}$ es cubierta, existe un abierto $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U \cap X_\alpha$ y así $x \in \bigcup \mathscr{U}_\alpha$. Como X_α es Lindelöf entonces existe $\mathscr{U}_{0,\alpha} \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que se cumple que

$$X_\alpha = \bigcup_{U \in \mathscr{U}_{0,\alpha}} U \cap X_\alpha.$$

Por lo tanto $\bigcup_{\alpha \in J} \mathscr{U}_{0,\alpha}$ es la subcubierta numerable buscada. ■

Después de analizar la suma topológica viene el caso del producto, que es un poco más complicado. Un primer vistazo y siguiendo la línea de estos resultados nos diría que el producto numerable de espacios Lindelöf es Lindelöf, pero, desafortunadamente, no es tan simple. De hecho, el caso del producto es tan patológico que ni siquiera el producto de dos espacios Lindelöf puede ser Lindelöf.

Ejemplo 1.18. *Existen dos espacios Lindelöf X y Y tales que $X \times Y$, equipado con la topología producto, no es Lindelöf.*

Demostración. Sean $X = Y = \mathcal{L}_S$, es decir, tomamos X y Y como la recta de Sorgenfrey abordada ya en el Ejemplo 1.6. Del mismo Ejemplo 1.6 sabemos que $\mathcal{L}_S$ es Lindelöf. Incluso sabemos más, ya que gracias a la Proposición 1.11, cualquier subconjunto de $\mathcal{L}_S$ es Lindelöf. Consideremos

$$W = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid x + y = 0 \text{ y además } x, y \in \mathbb{R}\}$$

como subespacio topológico de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$. Afirmamos que son ciertas las siguientes dos afirmaciones.

i) W es cerrado.

ii) W hereda la topología discreta.

Para la prueba de i), sea $(a, b) \in (\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S) \setminus W$. Tenemos dos casos.

- Si $a + b > 0$ entonces tomemos los conjuntos $[a, a+1)$ y $[b, b+1)$. Ambos son abiertos en $\mathcal{L}_S$ y por tanto $[a, a+1) \times [b, b+1)$ es abierto en $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$. Además tenemos que $(a, b) \in [a, a+1) \times [b, b+1)$. Para ver que $[a, a+1) \times [b, b+1)$ es el conjunto buscado, basta verificar que $([a, a+1) \times [b, b+1)) \cap W = \emptyset$. Esto es inmediato pues si tomamos un punto $(x, y) \in [a, a+1) \times [b, b+1)$ entonces tenemos que $a \leq x < a+1$ y además $b \leq y < b+1$. Así entonces $a + b \leq x + y$ pero como $a + b > 0$ concluimos que $x + y > 0$ y por tanto $(x, y) \notin W$.

- Si $a+b<0$ consideremos los intervalos $\left[a, \frac{a-b}{2}\right)$ y $\left[b, \frac{b-a}{2}\right)$. Están bien definidos pues por hipótesis $a+b<0$; con ello obtenemos entonces que $0<-a-b$; en consecuencia $0<a-2a-b$ con lo que $2a<a-b$ y finalmente $a<\frac{a-b}{2}$. De la misma manera, como $0<-a-b$ entonces $0<b-2b-a$ y así $2b<b-a$ y por lo tanto $b<\frac{b-a}{2}$.

  Solo nos resta probar que
$$\left(\left[a, \frac{a-b}{2}\right) \times \left[b, \frac{b-a}{2}\right)\right) \cap W = \emptyset.$$
  Tomemos pues un elemento $(x,y) \in \left[a, \frac{a-b}{2}\right) \times \left[b, \frac{b-a}{2}\right)$. Con ello entonces $a \leq x < \frac{a-b}{2}$ y también
$$b \leq y < \frac{b-a}{2}.$$
  Esto implica que
$$x+y < \frac{a-b}{2} + \frac{b-a}{2} = \frac{a-b+b-a}{2} = 0.$$

Esto nos da el resultado deseado pues de ambos casos concluimos que W es cerrado por tener complemento abierto.

Para la prueba de ii), tomemos un punto $(x,-x) \in W$. Consideremos los conjuntos $[x,x+1)$ y $[-x,-x+1)$. Es claro que son abiertos en $\mathcal{L}_S$ y por lo tanto $[x,x+1) \times [-x,-x+1)$ es un abierto en $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$. Afirmamos que $W \cap ([x,x+1) \times [-x,-x+1)) = \{(x,-x)\}$. Evidentemente tenemos que $(x,-x) \in [x,x+1) \times [-x,-x+1)$ y además también que $(x,-x) \in W$ y por tanto $W \cap ([x,x+1) \times [-x,-x+1)) \supseteq \{(x,-x)\}$. Ahora, tomemos un elemento $(m,n) \in W \cap ([x,x+1) \times [-x,-x+1))$. Esto tiene las siguientes implicaciones

- Primero, del hecho de que $(m,n) \in W \cap ([x,x+1) \times [-x,-x+1))$ se deduce que $(m,n) \in W$ y entonces $m+n=0$, es decir, $n=-m$. Por lo tanto, $(m,n)=(m,-m)$

- Además, también se concluye que $(m,-m) \in [x,x+1) \times [-x,-x+1)$. De aquí entonces se tienen las siguientes dos desigualdades
$$x \leq m < x+1, \text{ y} \tag{1.3}$$
$$-x \leq -m < -x+1. \tag{1.4}$$

De la desigualdad 1.3 concluimos que $-x \geq -m > -x-1$ y esto aunado a la desigualdad 1.4 implican que $-x=-m$ y por lo tanto, $x=m$.

Por lo tanto, $(m,-m)=(x,-x)$ y concluimos que

$$W \cap ([x,x+1) \times [-x,-x+1)) = \{(x,-x)\}.$$

Así W es discreto en su topología de subespacio pues para cada punto w en W encontramos un abierto de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ tal que intersectado con W da como resultado $\{w\}$. Finalmente notemos entonces que W es un espacio cerrado en W tal que hereda la topología discreta y además $|W| > \aleph_0$. Si suponemos que $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ es Lindelöf entonces W también es Lindelöf gracias a la Proposición 1.7. Sin embargo, según el Ejemplo 1.6 iv), W no puede ser Lindelöf. Esto es una contradicción que viene de suponer que $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ es Lindelöf. Por lo tanto, tal espacio no es Lindelöf. ■

Como podemos observar, la propiedad de Lindelöf no se preserva ni siquiera bajo productos finitos. Este hecho nos empuja a pensar qué condiciones son necesarias para que el producto de dos espacios Lindelöf resulte también Lindelöf. Pensemos en lo más simple primero: sin importar la topología con que se dote a un espacio finito, este resulta siempre Lindelöf (de hecho compacto) y el producto de dos espacios finitos sigue siendo finito y por tanto Lindelöf. Entonces en el caso finito sí se preserva tal propiedad; sin embargo, eso es exigirle demasiado a los espacios pues en realidad son muy poco comunes en la práctica los espacios finitos. Pensemos pues ahora en algo más general: un espacio compacto siempre es Lindelöf y además es bien sabido que el producto arbitrario de espacios compactos resulta compacto. Entonces si tomamos dos espacios compactos, resultan Lindelöf y su producto también por ser compacto. ¿Y si ahora consideráramos un espacio compacto y un espacio Lindelöf? ¿Cómo resultaría su producto? Justo es lo que abordaremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.19. *Sean X y Y dos espacios topológicos con X Lindelöf y Y compacto. Entonces $X \times Y$ es Lindelöf.*

Demostración. Consideremos la proyección $\Pi_X : X \times Y \to X$ definida como $\Pi_X(x,y)=x$. Es fácil observar que es una función suprayectiva pues dado $x \in X$ entonces podemos tomar cualquier $y_0 \in Y$ y así $\Pi_X(x,y_0)=x$. Además, afirmamos que Π_X es perfecta, es decir, es compacta y cerrada.

- Para probar que es compacta, sea $x \in X$. Notemos que se cumple la igualdad $\Pi_X^{-1}[\{x\}] = \{x\} \times Y$ y como $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y entonces es un espacio compacto y por lo tanto $\Pi_X^{-1}[\{x\}]$ es compacto.

- Para probar que es cerrada, sea $Z \subseteq X \times Y$ un cerrado y consideremos $\Pi_X[Z]$. Probemos que tal conjunto es cerrado. Sea $x_0 \in X \setminus \Pi_X[Z]$. Para cada $y \in Y$ notemos que $(x_0, y) \notin Z$ pues de lo contrario entonces $\Pi_X(x_0, y) = x_0 \in \Pi_X[Z]$ pero esto es imposible. Así, como Z es cerrado, existen $U(y)$ y $V(y)$ abiertos en X y Y respectivamente tales que $(x_0, y) \in U(y) \times V(y)$ y además $(U(y) \times V(y)) \cap Z = \emptyset$. Notemos que $\{V(y) \mid y \in Y\}$ es una cubierta abierta para Y. Por la compacidad de Y existe $Y_0 \subseteq Y$ finito tal que $Y = \bigcup \{V(y) \mid y \in Y_0\}$. Definamos entonces el conjunto

  $$U = \bigcap \{U(y) \mid y \in Y_0\}.$$

  Observemos que como Y_0 es finito entonces U es abierto y además $x_0 \in U$ pues para cada $y \in Y$ se cumple que $x_0 \in U(y)$. Más aún, $U \cap \Pi_X[Z] = \emptyset$ pues si suponemos que existe $a \in U \cap \Pi_X[Z]$ entonces para alguna $b \in Y$ se cumple que $(a, b) \in Z$. De esta forma, $b \in V(y_0)$ para alguna $y_0 \in Y_0$. Como $a \in U$ y además $U \subseteq U(y_0)$ entonces tenemos que $(a, b) \in U(y_0) \times V(y_0)$ como $(a, b) \in Z$ entonces

  $$(a, b) \in (U(y_0) \times V(y_0)) \cap Z.$$

  Sin embargo, habíamos pedido que $(U(y_0) \times V(y_0)) \cap Z = \emptyset$. Por lo tanto, esto es una contradicción que viene de suponer que existe $a \in U \cap \Pi_X[Z]$. Concluimos entonces que $U \cap \Pi_X[Z] = \emptyset$ y así, como $x_0 \in U$ y U es abierto entonces $\Pi_X[Z]$ es un cerrado y en consecuencia Π_X es una función cerrada.

Para concluir la prueba, recapitulemos lo que tenemos hasta ahora: la proyección $\Pi_X : X \times Y \to X$ es una función perfecta y suprayectiva con contradominio Lindelöf. Por lo tanto, gracias a la Proposición 1.16 podemos concluir que $X \times Y$ es Lindelöf.

■

Después del problema del producto parcialmente resuelto, nos queda ya muy poco para concluir este capítulo. Antes de ello quedan dos cosas importantes por mencionar. La primera de ellas quizá se haya pensado ya pues hasta ahora no hemos impuesto ningún axioma de separación a nuestros espacios topológicos. Llegó precisamente el momento de hacerlos. ¿Cómo lo haremos? Seguiremos la línea de la compacidad junto con los axiomas de separación. Es bien sabido que un espacio compacto Hausdorff resulta ser normal. ¿Hay algún resultado análogo para espacios Lindelöf? La respuesta a esto es positiva y queda plasmada en la siguiente proposición.

Proposición 1.20. *Sea X un espacio Lindelöf regular*[1] *(también llamado T_3). Entonces X es normal.*[2]

Demostración. Sea X un espacio Lindelöf regular. Probemos que X es normal. Sean F_1 y F_2 cerrados ajenos de X. Para toda $p \in F_1$, como $p \notin F_2$, existen U_p y V_p abiertos tales que $p \in U_p$ y $F_2 \subseteq VP$ y $V_p \cap U_p = \emptyset$. De la misma manera, para toda $q \in F_2$, como $q \notin F_1$, existen W_q y O_q abiertos tales que $q \in W_q$ y $F_1 \subseteq O_q$ y $W_q \cap O_q = \emptyset$. Como F_1 y F_2 son cerrados entonces son Lindelöf y por lo tanto existen $\{U_n \mid n \in \omega\} \subseteq \{U_p \mid p \in F_1\}$ y $\{W_n \mid n \in \omega\} \subseteq \{W_q \mid q \in F_2\}$. (Estos tienen sus pares V_n y O_n). Definimos $R_n = U_n \cap O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$ y $S_n = W_n \cap V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$. Notemos que R_n y S_n son abiertos. Afirmamos que $F_1 \subseteq \bigcup_{n\in\omega} R_n$ y $F_2 \subseteq \bigcup_{n\in\omega} S_n$. Para la primera contención, sea $x \in F_1$. Entonces existe $m \in \omega$ tal que $x \in U_m$ y además para toda $j \in \{1, ..., m\}$ se tiene que $x \in F_1 \subseteq O_j$. Por lo tanto $x \in U_m \cap O_1 \cap \cdots \cap O_m$. La otra contención se prueba de manera análoga. Ahora afirmamos que $\left(\bigcup_{n\in\omega} R_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\omega} S_n\right) = \emptyset$. Para probar esto, supongamos que existe $p \in \left(\bigcup_{n\in\omega} R_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\omega} S_n\right)$. Entonces existen $m, k \in \omega$ tales que

$$p \in R_m \cap S_k = (U_m \cap O_1 \cap \cdots \cap O_m) \cap (W_k \cap V_1 \cap \cdots \cap V_K).$$

De aquí se desprenden dos casos.

[1] En este texto, ser regular significa que los conjuntos unitarios son cerrados y además que dados un punto x y un cerrado F tal que $x \notin F$ entonces existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subseteq V$. De forma equivalente, ser regular significa que los unitarios son cerrados y que para cualquier abierto U y para cualquier punto x en U existe otro abierto V tal que $x \in V \subseteq \mathrm{cl}\,(V) \subseteq U$.

[2] Entenderemos que un espacio es normal si los unitarios son cerrados y dados dos cerrados ajenos F_1 y F_2 existen dos abiertos ajenos U y V tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$.

- Si $m \leq k$ entonces $p \in U_m \cap V_m = \emptyset$. Esto es imposible.
- Si $k < m$ entonces $p \in W_k \cap O_m = \emptyset$. Esto es imposible.

De esta manera $\left(\bigcup_{n\in\omega} R_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\omega} S_n\right) = \emptyset$ y así X es normal. ■

Como hemos visto, bajo la presencia de axiomas de separación, la propiedad de Lindelöf hace dar un salto a las propiedades de nuestros espacios y con ello a la riqueza de su estructura. Aunque, ¿esto es todo lo que podemos asegurar? Más precisamente, ¿no podrán debilitarse las hipótesis en cuanto a separación y seguir obteniendo como resultado la normalidad del espacio? Por ejemplo, en gran cantidad de textos se pide como estándar que los espacios topológicos sean Hausdorff. ¿Será posible que la propiedad de Lindelöf junto con el ser Hausdorff nos otorguen la normalidad? E incluso siendo un poco menos exigentes, ¿la propiedad de Lindelöf más el ser T_2 permitirá un aumento en la separación del espacio? Observemos el siguiente ejemplo para responder a nuestra pregunta.

Ejemplo 1.21. *Existe un espacio topológico X Hausdorff y Lindelöf pero no regular.*

Demostración. Denotemos por τ_e a la topología usual de $\mathbb{R}$. Definimos

$$\mathcal{B} = \{V \setminus A \mid V \in \tau_e, A \subseteq \mathbb{R} \text{ y } |A| \leq \aleph_0\}.$$

Para que $\mathcal{B}$ sea una base para alguna topología en $\mathbb{R}$ debe cumplir las siguientes dos propiedades.

i) $\mathbb{R} = \bigcup \mathcal{B}$

ii) Para cualesquiera B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$ y para todo punto $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Para probar i), notemos que es claro que $\bigcup B \subseteq \mathbb{R}$. Para probar la otra contención, tomemos $x \in \mathbb{R}$. Consideremos el abierto euclidiano $(x-1, x+1)$. Es claro que $x \in (x-1, x+1)$. Sea $A = \emptyset$. Entonces

$$(x-1, x+1) \setminus A = (x-1, x+1) \in \mathcal{B}$$

y así, como $(x-1, x+1) \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ se tiene lo deseado.

Para probar ii) tomemos dos elementos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y un punto $x \in B_1 \cap B_2$. Por definición de $\mathcal{B}$, existen $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ y $V_1, V_2 \in \tau_e$ tales que $|A_1|, |A_2| \leq \aleph_0$ y además $B_1 = V_1 \setminus A_1$ y también $B_2 = V_2 \setminus A_2$. Consideremos $B_3 = V_1 \cap V_2$. Es claro que $B_3 \in \mathcal{B}$ pero además $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq B_3$.

Ambos incisos prueban que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología que denotaremos por $\tau*$. Una observación inmediata es que $\tau_e \subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau*$. Con esto, como $(\mathbb{R}, \tau_e)$ es Hausdorff entonces $(\mathbb{R}, \tau*)$ también lo es. Ahora, veamos que $(\mathbb{R}, \tau*)$ no es regular. Por comodidad, consideremos $X = (\mathbb{R}, \tau_e)$ y $Y = (\mathbb{R}, \tau*)$. Para continuar con la prueba, veamos la siguiente afirmación.

Afirmación 1.22. *Sea $W \subseteq \mathbb{R}$ un abierto en X. Consideremos además $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto numerable tal que es denso en W. Esto es posible gracias a que W es segundo numerable en la topología que hereda de X y por tanto es separable. Entonces, para cada $x \in A \cap W$ se cumple que $x \in cl_Y (W \setminus A)$*

Para demostrar la veracidad de tal afirmación, tomemos $x \in A \cap W$ y un abierto básico de Y de la forma $V \setminus B$ tal que $x \in V \setminus B$ donde V es un abierto euclidiano y $|B| \leq \aleph_0$. Además, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $V \subseteq W$ dado que de no estarlo, bastaría tomar $V \cap W$ que vuelve a ser un abierto euclidiano. Consideremos el conjunto $A_0 = A \setminus \{x\}$. Observemos que $x \in V \setminus (A_0 \cup B)$ pues en efecto, $x \in V$ pero $x \notin A_0$ y además $x \notin B$ con lo cual $x \notin A_0 \cup B$. Además, claramente se tiene que

$$V \setminus (A_0 \cup B) \subseteq V \setminus B \text{ y además } V \setminus (A_0 \cup B) \subseteq W \setminus A_0$$

Más aún, para cualquier $y \in V \setminus (A_0 \cup B)$ tal que $y \neq x$ se tiene que $y \in W \setminus A$. Esto se traduce en que el abierto básico $V \setminus B$ intersecta a $W \setminus A$. Por lo tanto, $x \in \text{cl}_Y (W \setminus A)$.

Ahora, para mostrar que Y no es regular vamos a exhibir un cerrado C tal que para cualquier abierto $U \subseteq Y \setminus C$ se cumple que $\text{cl}_Y (U) \cap C \neq \emptyset$. Esto en efecto demostraría que no es regular pues existiría un abierto, a saber, el abierto $Y \setminus C$ tal que ningún abierto se queda contenido con todo y cerradura en él. Para probar esto, consideremos $C = \mathbb{Q}$. Notemos que C es cerrado pues $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es abierto en Y según la definición de $\tau*$. Consideremos ahora U un abierto en Y tal que $U \subseteq Y \setminus C$. Podemos suponer que U es un abierto básico, con lo cual entonces $U = W \setminus A$ donde W es abierto en X y A es a lo más numerable. Observemos que como

$$U = W \setminus A = U \subseteq Y \setminus C = Y \setminus \mathbb{Q}$$

entonces U está compuesto únicamente por números irracionales, es decir, $W \setminus A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pero como W es un abierto en X entonces $W \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $W \cap \mathbb{Q} \subseteq A$. Sin embargo, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ según la topología euclidiana, entonces $\mathrm{cl}\,(W \cap \mathbb{Q}) = \mathrm{cl}\,(W)$ y por lo tanto $W \subseteq \mathrm{cl}\,(W) \subseteq \mathrm{cl}\,(A)$, es decir, A es denso en W respecto a la topología euclidiana. Por la Afirmacion 1.22 entonces cualquier punto de $A \cap W$ es elemento de $\mathrm{cl}_Y\,(W \setminus A)$. En particular, para cada $x \in C \cap W$ se cumple que $x \in \mathrm{cl}_Y\,(W \setminus A)$. Esto finaliza la prueba. Por lo tanto Y no es regular.

Finalmente, para comprobar que Y es Lindelöf, basta hacerlo con cubiertas formadas por básicos. Sea pues $\{U_i \setminus V_i \mid i \in I\}$ una cubierta abierta de Y. Esto significa que $\mathbb{R} = \bigcup\{U_i \setminus V_i \mid i \in I\}$ y por lo tanto también $\mathbb{R} = \bigcup\{U_i \mid i \in I\}$. Sin embargo, esta última cubierta está formada únicamente por abiertos euclidianos con lo cual, como X es Lindelöf entonces existe $I_0 \subseteq I$ numerable tal que $\mathbb{R} = \bigcup\{U_i \mid i \in I_0\}$. Pero entonces, como para cada $i \in I_0$ se cumple que $|V_i| \leq \aleph_0$ entonces $\bigcup\{V_i \mid i \in I_0\}$ es un conjunto a lo más numerable. Por lo tanto, la familia numerable $\{U_i \setminus V_i \mid i \in I_0\}$ cubre a todo X excepto por una cantidad numerable de puntos. Llamemos D a este conjunto numerable de puntos que no es cubierto. Tomemos un abierto $W_x \in \{U_i \setminus V_i \mid i \in I\}$ para cada $x \in D$ tal que $x \in W_x$. Así entonces $\{U_i \setminus V_i \mid i \in I_0\} \cup \{W_i \mid x \in D\}$ es la subcubierta numerable buscada. Así Y es Lindelöf.

Notemos entonces que X es un espacio Lindelöf, Hausdorff pero no regular.

■

Con esto, queda claro que entonces la propiedad de Lindelöf no aumenta la separación cuando solo se tiene un espacio Hausdorff. Pensar en debilitar más la separabilidad es quizá algo inútil pues si en este caso no aumentó, mucho menos cuando el espacio tenga menos estructura. Sin embargo, para no dejar lugar a dudas, observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.23. *Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología cofinita. Este es un espacio compacto y por tanto Lindelöf. Además, es T_1 pero no es Hausdorff pues cualesquiera dos abiertos tienen intersección no vacía. Probemos cada una de las afirmaciones.*

- *Recordemos primero que la topología cofinita es aquella donde los conjuntos abiertos son los que tienen complemento finito. Sea pues $\mathscr{U}$ una* *cubierta abierta de* $\mathbb{R}$ *formada por abiertos de la topología cofinita. Entonces tomemos* $U \in \mathscr{U}$ *un abierto. Por lo tanto,* $|\mathbb{R} \setminus U| < \aleph_0$*. Así, para cada* $x \in \mathbb{R} \setminus U$ *tomemos* $U_x \in \mathscr{U}$ *tal que* $x \in U_x$*. La colección* $\{U_x \mid x \in \mathbb{R} \setminus U\}$ *es finita y por lo tanto* $\{U\} \cup \{U_x \mid x \in \mathbb{R} \setminus U\}$ *es la subcubierta finita buscada. Así, es compacto y luego Lindelöf.*

- *Para ver que es* T_1 *basta demostrar que los unitarios son cerrados, pero esto es inmediato pues dado* $x \in \mathbb{R}$ *notemos que* $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ *es abierto pues su complemento es finito. Así entonces,* $\{x\}$ *es cerrado.*

- *Sean* U *y* V *dos abiertos de la topología cofinita en* $\mathbb{R}$*. Supongamos que* $U \cap V = \emptyset$*. Así,* $\mathbb{R} \setminus (U \cap V) = (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus V) = \mathbb{R}$*. Pero como* U *y* V *son abiertos entonces tienen complemento finito. Esto diría que* $\mathbb{R}$ *es finito lo cual es imposible. Por lo tanto,* $U \cap V \neq \emptyset$*.*

Después de observar este ejemplo nos queda un último cabo suelto: ¿Cómo se comportan los espacios Lindelöf cuando la topología es metrizable? En realidad el análisis de esto es muy sencillo pues la metrizabilidad dota, de entrada, de una separación muy fuerte a los espacios topológicos. Con eso en mente observemos el último resultado de este capítulo.

Proposición 1.24. *Sea* X *un espacio metrizable con métrica* d*. Entonces las siguientes son equivalentes.*

i) X *es segundo numerable*

ii) X *es hereditariamente Lindelöf*

iii) X *es Lindelöf*

iv) X *es separable*

Demostración.
i)$\Rightarrow$ii)

Sea $S \subseteq X$. Probemos que S es Lindelöf. Sin embargo, esto es inmediato pues es bien sabido que ser segundo numerable se hereda. Por lo tanto S es segundo numerable y por el Ejemplo 1.6 i) tenemos el resultado deseado.

ii)$\Rightarrow$iii)

Es inmediato pues al ser X un subconjunto de sí mismo entonces X es Lindelöf.

iii)⇒iv)

Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ definimos

$$U_n = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in X \right\}.$$

Notemos que U_n es una cubierta abierta de X. Como X es Lindelöf entonces existe $D_n \subseteq X$ numerable tal que

$$X = \bigcup_{x \in D_n} B\left(x, \frac{1}{n}\right).$$

Proponemos al denso numerable como el conjunto $D = \bigcup \{D_n \mid n \in \omega\}$. Notemos que es numerable por ser unión numerable de numerables. Para probar que, en efecto, es denso, sean $x \in X$ y $n \in \omega \setminus \{0\}$. Demostremos que $B(x, \frac{1}{n}) \cap D \neq \emptyset$. Como $X = \bigcup \left\{ B(y, \frac{1}{n}) \mid y \in D_n \right\}$ entonces existe $y \in D_n$ tal que $x \in B(y, \frac{1}{n})$. Esto implica que $y \in B(x, \frac{1}{n})$ y por lo tanto $y \in B(x, \frac{1}{n}) \cap D$, es decir, tal intersección es no vacía y por lo tanto D es un denso numerable y entonces X es separable.

iv)⇒i)

Como X es separable, sea $D \subseteq X$ un denso numerable. Para cada elemento $n \in \omega \setminus \{0\}$ definimos $\mathcal{B}_n = \left\{ B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in D \right\}$. Sea $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_n \mid n \in \omega \setminus \{0\}\}$. Es claro que $\mathcal{B}$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables. Probemos que es base.

Sean $U \subseteq X$ un abierto y $y \in U$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subseteq U$. Más aún, existe $n \in \omega$ tal que $n > \frac{2}{\varepsilon}$ con lo cual $\frac{2}{n} < \varepsilon$ y con ello entonces $B(y, \frac{2}{n}) \subseteq B(y, \varepsilon) \subseteq U$. Esto implica que $B(y, \frac{2}{n}) \subseteq U$. Como D es denso, entonces existe $x \in D \cap B(y, \frac{1}{n})$. Así, como $x \in B(y, \frac{1}{n})$ entonces $y \in B(x, \frac{1}{n})$. Observemos que para todo $z \in B(x, \frac{1}{n})$ y como $y \in B(x, \frac{1}{n})$ entonces se tiene que

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}.$$

Así, $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(y, \frac{2}{n})$. Concluimos así que $y \in B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$ y por lo tanto $\mathcal{B}$ es base. En consecuencia, X es segundo numerable. ■

La moraleja que nos trae el haberle impuesto una estructura mucho más rica (pero menos general) a un espacio topológico es que algunas propiedades que de forma general no resultan equivalentes lo son. ¿A qué nos referimos? Observemos los siguiente.

- En general, ser segundo numerable no es equivalente a ser Lindelöf. Como ejemplo tenemos a la recta de Sorgenfrey $\mathcal{L}_S$ que gracias al Ejemplo 1.6 iii) sabemos que es Lindelöf pero no es segundo numerable pues si tomamos una base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{L}_S$ entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subseteq [x, x+1)$. Si $x < y$ entonces $U_x \neq U_y$ ya que $x \in U_x$ pero como $x < y$ entonces $x \notin [y, y+1)$ y por lo tanto $x \notin U_y$. Por lo tanto, la asignación $\mathbb{R} \to \mathcal{B}$ dada por $x \mapsto U_x$ es inyectiva. Esto implica que $\mathcal{B}$ es no numerable, es decir, $\mathcal{L}_S$ no es segundo numerable. Sin embargo, en espacios métricos estas dos nociones coinciden.

- Nuevamente, gracias al Ejemplo 1.8 sabemos que en general un espacio Lindelöf no es hereditariamente Lindelöf. Pero en espacios métricos sorpresivamente los dos conceptos son lo mismo. Esto hace evidente la gran diferencia entre un espacio topológico general y un espacio métrico.

- Es bien sabido que $\mathcal{L}_S$ es separable ($\mathbb{Q}$ es un denso numerable) pero no segundo numerable. Sin embargo, cuando el espacio es metrizable, nuevamente ambas nociones son la misma.

Es sorprendente cómo el tener una topología metrizable añade muchísimas propiedades al espacio y otras las simplifica. Eso es claro desde que los espacios métricos son T_4 y algunos espacios topológicos generales no llegan ni a T_0. Después de estas observaciones queda un ejemplo más que mostrar para cerrar este capítulo.
A pesar de que vimos que ser segundo numerable es equivalente a ser Lindelöf en espacios métrizables, existe otra clase de espacios topológicos, en general no metrizables, donde estas dos nociones coinciden. Veamos primero la siguiente definición.

Definición 1.25. *Un desarrollo para un espacio topológico X es una familia $\{\mathscr{U}_n \mid n \in \omega\}$ donde cada $\mathscr{U}_n$ es una cubierta abierta de X tal que si p es un punto en X y para cada $n \in \omega$ tomamos un abierto $U_n \in \mathscr{U}_n$ tal que $p \in U_n$ entonces $\{U_n \mid n \in \omega\}$ es una base local para p.*

La definición no es nada complicada en realidad y de hecho todos los espacios métricos la cumplen. En efecto, si X es un espacio métrico basta tomar como $\mathscr{U}_n$ la cubierta abierta formada por las bolas de radio $\frac{1}{n}$ con centro en cada punto de x y así, la colección $\{\mathscr{U}_n \mid n \in \omega\}$ es un desarrollo para X. Por lo tanto, X es desarrollable. Sin embargo, nuestra atención no está puesta en los espacios métricos pues precisamente nos interesan aquellos que no lo son. De forma general podemos ver que los espacios desarrollables no son metrizables. Con esto entonces tendremos una clase de espacios, que en general no son metrizables, donde una de las preguntas enunciadas anteriormente tendrán una solución parcial. Observemos entonces el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.26. *Sea $\Gamma = \{(x,y) \mid y \geq 0\}$. Además, definamos el conjunto $\Gamma_0 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y consideremos a $||\ ||$ como la norma usual en $\mathbb{R}^2$. Definiremos una topología para Γ de la siguiente forma.*

- *Para cada $(a,b) \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ y $r > 0$ definimos*

$$D((a,b),r) = \Gamma \cap \{(x,y) : ||(a,b) - (x,y)|| < r\}$$

  como una base local de (a,b).

- *Para cada $(a,0) \in \Gamma_0$ y $r > 0$ definimos*

$$C((a,0),r) = \{(a,0)\} \cup \{(x,y) : ||(a,r) - (x,y)|| < r\}$$

  como una base local de $(a,0)$.

El conjunto Γ equipado con la topología generada por las bases locales es conocido como el plano de Moore. Resulta que este es un espacio completamente regular no normal (para la prueba ver [15], Capítulo 3), separable ($\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un denso) y por definición primero numerable. Pero además, es un espacio desarrollable. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los conjuntos

$$O_n = \left\{ C\left(z, \frac{1}{n}\right) \mid z \in \Gamma_0 \right\}$$

y también

$$P_n = \left\{ D\left(z, \frac{1}{n}\right) \mid z \in \Gamma \setminus \Gamma_0 \text{ y además } D\left(z, \frac{1}{n}\right) \cap \Gamma_0 = \emptyset \right\}$$

y finalmente $G_n = O_n \cup P_n$ entonces $\{G_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un desarrollo para Γ. Una prueba de esto puede ser encontrada en [11], Proposición 2.6.

Entonces tenemos como resultado que en general un espacio desarrollable no es metrizable. Como consecuencia de esto, podemos plantear la siguiente proposición.

Proposición 1.27. *Sea X un espacio desarrollable. Entonces X es Lindelöf si y solo si X es segundo numerable.*

Demostración. Gracias al Ejemplo 1.6 tenemos que ser segundo numerable implica Lindelöf. Nos resta probar una implicación. Para esta, supongamos que X es Lindelöf y probemos que X es segundo numerable. Como por hipótesis X es un espacio desarrollable entonces existe una colección de cubiertas abiertas de X, digamos $\{\mathscr{U}_n \mid n \in \omega\}$, tal que forman un desarrollo para X. Como el espacio X es Lindelöf, cada $\mathscr{U}_n$ tiene una subcubierta numerable $\mathcal{U}_n$. Afirmamos que

$$\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{U}_n \mid n \in \omega\}$$

es una base para X. Notemos que $\mathcal{B}$ es numerable y así, resta probar que es base para obtener que X es segundo numerable. Consideremos entonces $x \in X$ y W un abierto tal que $x \in W$. Como cada $\mathcal{U}_n$ es cubierta abierta entonces, para cada $n \in \omega$, tomemos $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U_n$. Por hipótesis, como $\{\mathscr{U}_n \mid n \in \omega\}$ es un desarrollo, entonces $\{U_n \mid n \in \omega\}$ es una base local y por lo tanto, existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \in U_{n_0} \subseteq W$. En consecuencia, $\mathcal{B}$ es base y concluimos que X es segundo numerable. ■

Capítulo 2

Espacios casi Lindelöf

Después de realizar un análisis detallado de la propiedad de Lindelöf en el primer capítulo de este trabajo, surge de forma natural el pensar en propiedades similares, es decir, ligar las cubiertas abiertas y la numerabilidad, pero de una forma más débil en el sentido de que se exijan menos condiciones. Pensemos, de entrada, en debilitar la propiedad de Lindelöf: ¿y si en lugar de que existiera una subcubierta numerable para cada cubierta abierta, existiera una subcolección numerable que «casi cubriera» al espacio? Claro, la idea de «casi cubrir» tendría que ser formalizada. Introduzcamos pues la definición de los espacios que le dan título a este capítulo

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es casi Lindelöf si cualquier cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X tiene una subcolección numerable $\mathcal{V} \subseteq \mathscr{U}$ tal que $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} cl(V) = X$.*

Como podemos observar, la definición es muy simple y, casi de manera intuitiva, se puede ver que tiene cierta relación con la propiedad de Lindelöf, pero, ¿qué tipo de relación? ¿Es más débil, justo como queríamos, o resultó ser más fuerte, en el sentido de que una implique a la otra? Más aún, ¿es igual a la propiedad de Lindelöf o con la debilitación que se hace conseguimos realmente una propiedad nueva? Vamos a responder estas preguntas con mucho detalle en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.2. *Sea X un espacio Lindelöf. Entonces X es casi Lindelöf.*

Demostración. Consideremos $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es Lindelöf entonces existe una subcubierta numerable $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$. Esto significa que

$\bigcup \mathscr{U}_0 = X$. Sin embargo, notemos que

$$X = \bigcup \mathscr{U}_0 = \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} U \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}\,(U) \subseteq X.$$

Es decir, $\mathscr{U}_0$ es la subcolección buscada y por lo tanto X es casi Lindelöf. ■

Esto prueba que, en efecto, ser Lindelöf es más fuerte que ser casi Lindelöf en el sentido de que uno implica el otro. ¿Es válida la otra implicación o efectivamente estamos ante una propiedad nueva? Aclaremos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.
Vamos a construir un espacio topológico X que será casi Lindelöf pero no Lindelöf. Para ello, necesitamos tener presente algunos datos básicos sobre ordinales y cardinales: es bien sabido que la cardinalidad de los reales es $2^{\aleph_0}$. En símbolos simplemente escribimos que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Además, recordemos que el cardinal sucesor de $\aleph_0$ es $\aleph_1$ y simplemente $\aleph_1 = |\omega_1|$ donde ω_1 es el primer ordinal no numerable. Es también de conocimiento general que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$; sin embargo, como $\aleph_1$ es el sucesor entonces tenemos que $\aleph_0 < \aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, $|\mathbb{R}| \geq |\omega_1|$.

Con esto en mente entonces consideremos el conjunto

$$W = \{(x, -1) \mid x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Como $|W| = |\mathbb{R}|$, por lo anteriormente explicado acerca de las cardinalidades, entonces podemos considerar $A = \{(a_\alpha, -1) \mid \alpha < \omega_1\} \subseteq W$ tal que cada $(a_\alpha, -1)$ sea distinto de todos los demás elementos de A. Con base en el conjunto A definamos $Y = \{(a_\alpha, n) \mid \alpha < \omega_1$ y además $n \in \omega\}$ y finalmente tomemos $a = (-1, -1)$. Sea entonces $X = Y \cup A \cup \{a\}$. Dotemos a X de una topología de la siguiente manera.

- *Todos los puntos de Y son aislados. Esto implica que Y como subespacio hereda la topología discreta y además es abierto en X.*

- *Para cada $\alpha < \omega_1$ una base de vecindades de $(a_\alpha, -1)$ será de la forma*

$$\{(a_\alpha, -1)\} \cup \{(a_\alpha, m) \mid m \geq n\} \;\; \text{con } n \in \omega$$

- *Una base de vecindades para $a = (-1, -1)$ será de la forma*

$$\{a\} \cup \{(a_\beta, n) \mid \beta > \alpha \text{ y además } n \in \omega\} \text{ con } \alpha < \omega_1$$

Primero, probemos que X no es Lindelöf. Para esto, consideremos el subespacio A. La afirmación es que es un espacio cerrado que hereda la topología discreta. Para esto entonces tomemos $x \in A$. Por la definición de las vecindades básicas de un punto de A inmediatamente obtenemos que si tomamos V una vecindad básica de x entonces $V \cap A = \{x\}$. Esto prueba que A hereda la topología discreta. Ahora, notemos que $X \setminus A = Y \cup \{a\}$. Si tomamos un punto $z \in X \setminus A$ entonces, hay dos posibilidades: si $z \in Y$, dado que cada punto de Y es aislado entonces una vecindad básica es $\{z\}$ y así $z \in \{z\} \subseteq Y \cup \{a\}$. Si ahora $z = a$ entonces tomemos V_a una vecindad básica de a. Por definición $a \in V_a \subseteq Y \cup \{a\}$. Esto prueba que $X \setminus A$ es abierto y por tanto A es cerrado. Esto inmediatamente nos dice que X no puede ser Lindelöf, ya que de serlo entonces A al ser un subespacio cerrado heredaría la propiedad de Lindelöf pero como es discreto y no numerable (pues $|A| > \aleph_0$)) es imposible que A sea Lindelöf.

Observemos ahora que X es casi Lindelöf. Para esto, tomemos el punto $a = (-1, -1)$ y sea U un abierto tal que $a \in U$. Afirmamos que $X \setminus cl(U)$ es a lo más un conjunto numerable. Para esto, como $a \in U$ entonces existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que

$$a \in \{a\} \cup \{(a_\beta, n) \mid \beta > \alpha_0 \text{ y además } n \in \omega\} \subseteq U.$$

Además, si hacemos $R = \{a\} \cup \{(a_\beta, n) \mid \beta > \alpha_0 \text{ y además } n \in \omega\}$ entonces claramente se cumple que $cl(R) \subseteq cl(U)$. Ahora tomemos $\beta < \omega_1$ tal que $\beta > \alpha_0$ y $n \in \omega$. Entonces tenemos que

$$R \cap \{(a_\beta, m) \mid m \geq n\} \neq \emptyset.$$

Por la elección arbitraria de la $n \in \omega$ entonces hemos probado que cualquier vecindad básica de los puntos de la forma $(a_\beta, 1)$, con $\alpha_0 < \beta < \omega_1$ intersecta a R. Por lo tanto, $\{(a_\beta, 1) \mid \alpha_0 < \beta < \omega_1\} \subseteq cl(R) \subseteq cl(U)$. En resumen obtuvimos lo siguiente

- $\{a\} \subseteq cl(U)$
- $\{(a_\beta, n) \mid \beta > \alpha_0 \text{ y además } n \in \omega\} \subseteq cl(U)$

- $\{(a_\beta, 1) \mid \alpha_0 < \beta < \omega_1\} \subseteq cl\,(U)$

Así, la cardinalidad de $X \setminus cl\,(U)$ es a lo más numerable. Sea pues $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Tomemos $U \in \mathscr{U}$ tal que $a \in U$. Por lo probado entonces $X \setminus cl\,(U)$ es a lo más numerable. Entonces, para cada elemento $x \in X \setminus cl\,(U)$ tomemos $U_x \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U_x$. Así, si consideramos la subcolección $\{U_x \mid x \in X \setminus cl\,(U)\} \cup \{U\} \subseteq \mathscr{U}$. Como $X \setminus cl\,(U)$ es a lo más numerable entonces la subcolección considerada es a lo más numerable y además

$$X = \left(\bigcup_{x \in X \setminus cl(U)} U_x \right) \cup cl\,(U) \subseteq \left(\bigcup_{x \in X \setminus cl(U)} cl\,(U_x) \right) \cup cl\,(U) \subseteq X.$$

Esto prueba que X es casi Lindelöf y además, P. Staynova prueba en [28] que X es Hausdorff.

Entonces, en efecto, definimos una nueva propiedad diferente a la propiedad de Lindelöf. Gracias a la Proposición 2.2 sabemos también que ser Lindelöf implica ser casi Lindelöf. Una caracterización muy útil de la propiedad casi Lindelöf es la siguiente. Está pensada en la misma línea de estudio que la propiedad de Lindelöf.

Proposición 2.4. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base fija para X. Entonces X es casi Lindelöf si y solo si cualquier cubierta abierta $\mathscr{U}$ formada únicamente por elementos de $\mathcal{B}$ tiene una subcolección numerable $\mathcal{B}_0$ tal que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_0} cl_X\,(U)$*

Demostración. Si X es casi Lindelöf, entonces dada $\mathscr{U}$ una cubierta abierta formada por elementos de $\mathcal{B}$, inmediatamente se cumple que existe $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ numerable tal que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_0} \mathrm{cl}_X\,(U)$.

Para la implicación restante, sea $\mathscr{V}$ una cubierta abierta de X. Notemos que no necesariamente cualquier elemento de $\mathscr{V}$ es elemento de $\mathcal{B}$, sin embargo, para cada $x \in X$ existe $V_x \in \mathscr{V}$ tal que $x \in V_x$. Como $\mathcal{B}$ es base entonces existe B_x tal que $x \in B_x \subseteq V_x$. Así, la colección $\{B_x \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta para X formada únicamente por elementos de $\mathcal{B}$. Entonces, por hipótesis, existe $X_0 \subseteq X$ numerable tal que

$$X = \bigcup_{x \in X_0} \mathrm{cl}_X\,(B_x)\,.$$

Ahora, notemos que como $\mathrm{cl}_X(B_x) \subseteq \mathrm{cl}_X(V_x)$ se tiene que

$$X = \bigcup_{x \in X_0} \mathrm{cl}_X(B_x) \subseteq \bigcup_{x \in X_0} \mathrm{cl}_X(V_x) \subseteq X.$$

En consecuencia, $\{V_x \mid x \in X_0\}$ es la subcolección numerable buscada que atestigua que X es casi Lindelöf. ∎

A pesar de que ser Lindelöf y ser casi Lindelöf no es lo mismo según lo demostrado en el Ejemplo 2.3, ¿bajo qué condiciones las propiedades resultan equivalentes? O tan siquiera, ¿es posible que sean equivalentes? La respuesta es afirmativa. Bajo condiciones, en perspectiva, realmente sencillas, resulta que ser Lindelöf y casi Lindelöf son lo mismo. Esto nos muestra, nuevamente, que en realidad el debilitamiento de la condición de Lindelöf fue lo suficientemente ligera como para obtener una propiedad muy similar al grado de que con ligeras variaciones resulte ser la misma pero en general no lo sea. Observemos pues la demostración de este hecho.

Proposición 2.5. *Sea X un espacio topológico regular. Entonces X es Lindelöf si y solo si X es casi Lindelöf.*

Demostración. Gracias a la Proposición 2.2 una implicación ya está demostrada y de hecho es válida siempre incluso sin la regularidad. Para la implicación restante, supongamos que X es casi Lindelöf y probemos que es Lindelöf. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Para cada $x \in X$ existe $U_x \in \mathscr{U}$ tal que $x \in U_x$. Como X es regular entonces existe V_x abierto tal que $x \in V_x \subseteq \mathrm{cl}(V_x) \subseteq U_x$. Por lo tanto, $\{V_x \mid x \in X\}$ es también una cubierta abierta para X. Como por hipótesis X es casi Lindelöf entonces existe $X_0 \subseteq X$ numerable tal que $X = \bigcup_{x \in X_0} \mathrm{cl}(V_x)$. Sin embargo, esto implica que

$$X = \bigcup_{x \in X_0} \mathrm{cl}(V_x) \subseteq \bigcup_{x \in X_0} U_x \subseteq X.$$

Por lo tanto, $\{U_x \mid x \in X_0\}$ es la subcubierta numerable buscada y concluimos así que X es Lindelöf. ∎

Entonces, según la Proposición 2.5, el espacio X construido en el Ejemplo 2.3 no puede ser regular, dado que de serlo, entonces también sería Lindelöf. También, la Proposición 2.5 nos entrega estos dos corolarios inmediatos.

Corolario 2.6. *Sea X un espacio topológico metrizable con métrica d. Entonces X es Lindelöf si y solo si X es casi Lindelöf.*

Demostración. Todo espacio métrico es regular. ■

Corolario 2.7. *Sea X un espacio topológico regular y casi Lindelöf. Entonces X es normal.*

Demostración. Si X es regular y casi Lindelöf entonces X es Lindelöf. Gracias a la Proposición 1.20, concluimos que X es normal. ■

Después de esto, ¿cómo se comporta la propiedad de ser casi Lindelöf con las principales operaciones topológicas? Por ejemplo, es bien sabido que la propiedad de Lindelöf se hereda a subconjuntos cerrados. ¿Sucede lo mismo con lo casi Lindelöf? Observemos la respuesta a esta pregunta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8. *Consideremos X como el espacio construido en el Ejemplo 2.3. En la construcción probamos que el subespacio A es cerrado, discreto y no numerable. En consecuencia, aunque X es casi Lindelöf es imposible que A sea casi Lindelöf. Por lo tanto, ser casi Lindelöf no se hereda a subespacios cerrados.*

Sin embargo, hay una clase muy peculiar de subespacios a la que sí se hereda la propiedad en cuestión.

Proposición 2.9. *Sea X un espacio casi Lindelöf. Entonces cualquier subconjunto abierto y cerrado de X es casi Lindelöf.*

Demostración. Sean B un subconjunto abierto y cerrado de X y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X formada por abiertos de X. Entonces, como B es cerrado entonces $X \setminus B$ es abierto y por lo tanto $\mathscr{U} \bigcup \{X \setminus B\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es casi Lindelöf entonces existe una subcolección numerable $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ tal que

$$X = \left(\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}_X(U) \right) \cup \mathrm{cl}_X(X \setminus B).$$

Como B es abierto entonces $X \setminus B$ es cerrado y así $\mathrm{cl}_X(X \setminus B) = X \setminus B$. Con esto entonces

$$B \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}_X(U).$$

Concluimos entonces que B es casi Lindelöf. ■

Después de esto, ¿cómo se comporta la continuidad con los espacios casi Lindelöf? Observemos esto en la siguiente proposición.

Proposición 2.10. *Sean X un espacio casi Lindelöf, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es casi Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de Y. Por lo tanto

$$\mathscr{V} = \left\{ f^{-1}[U] \mid U \in \mathscr{U} \right\}$$

es una cubierta abierta de X. Como X es casi Lindelöf entonces existe $\mathscr{U}_0$ subcolección numerable de $\mathscr{U}$ tal que

$$X = \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}_X \left(f^{-1}[U] \right).$$

En consecuencia

$$Y = f[X] = f\left[\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}_X \left(f^{-1}[U] \right) \right] = \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} f\left[\mathrm{cl}_X \left(f^{-1}[U] \right) \right].$$

Y entonces, por la continuidad y la suprayectividad de f obtenemos

$$\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} f\left[\mathrm{cl}_X \left(f^{-1}[U] \right) \right] \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}_Y \left(f\left[f^{-1}[U] \right] \right) = \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}_Y (U) \subseteq Y.$$

Por lo tanto, la subcolección $\mathscr{U}_0$ testifica que Y es casi Lindelöf. ■

Inmediatamente obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.11. *Cualquier cociente de un espacio casi Lindelöf es casi Lindelöf*

Demostración. Los cocientes son imagen continua y suprayectiva. ■

Un resultado muy relevante también es el siguiente.

Proposición 2.12. *La suma topológica $\bigoplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ es casi Lindelöf si y solo si cada sumando es casi Lindelöf y $|J| \leq \aleph_0$.*

Demostración. Supongamos primero que $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es casi Lindelöf. Como cada X_α es un subespacio cerrado y abierto de $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ entonces, por la Proposición 2.9, cada X_α es casi Lindelöf. De hecho, como cada X_α es abierto, podemos considerar

$$\mathscr{U} = \{X_\alpha \mid \alpha \in J\}.$$

Es claro que $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ Si suponemos que se cumple que $|J| > \aleph_0$ entonces si tomamos $J_0 \subseteq J$ numerable, dado que los X_α son ajenos dos a dos, como también los X_α son cerrados, se tiene que

$$\bigcup_{\alpha\in J_0} \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}(X_\alpha) \subsetneq \bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha.$$

Esto significa que cualquier subcolección numerable de $\mathscr{U}$ cumple que la unión de las cerraduras de sus elementos es un subconjunto propio del conjunto $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$. Se concluye entonces que $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ no es casi Lindelöf.

Para la implicación restante, probemos que $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es casi Lindelöf. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$. En particular $\mathscr{U}$ es una cubierta para cada X_α y como por hipótesis cada X_α es casi Lindelöf existe $\mathscr{U}_{0,\alpha} \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que

$$X_\alpha \subseteq \bigcup_{U\in\mathscr{U}_{0,\alpha}} \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}(U).$$

Por lo tanto, la colección

$$\mathscr{U}_0 = \bigcup_{\alpha\in J} \mathscr{U}_{0,\alpha} \subseteq \mathscr{U}$$

es numerable pues por hipótesis $|J| \leq \aleph_0$ y además cumple que

$$\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha = \bigcup_{U\in\mathscr{U}_0} \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}(U).$$

En consecuencia, $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es casi Lindelöf. ■

Después de observar el comportamiento de la propiedad estudiada tanto con la continuidad como con la suma topológica, con la idea de la prueba de la Proposición 2.10, podemos debilitar un poco más las condiciones. Para ello, primero definamos lo siguiente.

Definición 2.13. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es una función θ-continua si para cada $x \in X$ y cualquier abierto V de Y tal que $f(x) \in V$ existe un abierto U de X tal que se cumple que $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V)$.*

A primera instancia, parece una simple reformulación de la definición clásica de continuidad, pero en realidad es una condición más débil. Es claro que si una función es continua entonces también es θ-continua. Sin embargo, no es cierto que cualquier función θ-continua es continua. Un ejemplo de este hecho puede ser encontrado en [22], Capítulo 4, página 304. La verdadera intención de definir este concepto es porque la propiedad casi Lindelöf se preserva bajo este tipo de funciones. Observemos pues la prueba en la siguiente proposición.

Proposición 2.14. *Sean X un espacio casi Lindelöf, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función suprayectiva y θ-continua. Entonces Y es casi Lindelöf.*

Demostración. Sea $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ una cubierta abierta de Y. Sean $x \in X$ y tomemos V_{α_x} un abierto de la cubierta tal que $f(x) \in V_{\alpha_x}$. Como la función f es θ-continua entonces existe un abierto U_{α_x} de X tal que $x \in U_{\alpha_x}$ que cumple que $f[\mathrm{cl}_X(U_{\alpha_x})] \subseteq \mathrm{cl}_Y(V_{\alpha_x})$. Entonces la colección

$$\{U_{\alpha_x} \mid x \in X\}$$

es una cubierta abierta de X. Como X es casi Lindelöf entonces sabemos que existe $X_0 \subseteq X$ numerable tal que

$$X = \bigcup_{x \in X_0} \mathrm{cl}_X(U_{\alpha_x}).$$

De esta forma entonces

$$Y = f[X] = f\left[\bigcup_{x \in X_0} \mathrm{cl}_X(U_{\alpha_x})\right] = \bigcup_{x \in X_0} f[\mathrm{cl}_X(U_{\alpha_x})] \subseteq \bigcup_{x \in X_0} \mathrm{cl}_Y(V_{\alpha_x}) \subseteq Y.$$

Por lo tanto, la colección $\{V_{\alpha_x} \mid x \in X_0\}$ testifica que Y es casi Lindelöf. ■

De hecho, si seguimos esta línea de trabajo en la que relacionamos funciones con la propiedad de casi Lindelöf, podemos encontrar un resultado sorprendente. Para exhibirlo, necesitamos primero de una definición.

Definición 2.15. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función.*

- *Decimos que f es una función precontinua si para cualquier abierto V de Y se cumple que $f^{-1}[V] \subseteq int_X\,(cl_X\,(f^{-1}[V]))$.*
- *Decimos que f es una función subcontra-continua si existe una base $\mathcal{B}$ para Y tal que $f^{-1}[V]$ es cerrado en X para cualquier $V \in \mathcal{B}$.*

Estas definiciones son inusuales y en realidad poco conocidas. De hecho, gracias a [13], podemos ver que la continuidad usual implica la precontinuidad pero que en general, una función subcontra-continua no necesariamente es continua. Más aún, en [5] se prueba que la continuidad es una propiedad independiente de la subcontra-continuidad. No profundizaremos en estas propiedades pues en realidad el presentarlas es con el motivo de la formulación del siguiente resultado.

Proposición 2.16. *Sean X un espacio topológico casi Lindelöf, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función precontinua, subcontra-continua y suprayectiva. Entonces Y es Lindelöf.*

Demostración. Como la función f es subcontra-continua entonces sea $\mathcal{B}$ una base para Y tal que $f^{-1}[V]$ es cerrado en X para cualquier $V \in \mathcal{B}$. Sea $\mathscr{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ una cubierta abierta de Y. Para cada $x \in X$ tomemos U_{α_x} un abierto de la cubierta tal que $f(x) \in U_{\alpha_x}$. Como $\mathcal{B}$ es base entonces existe $V_{\alpha_x} \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) \in V_{\alpha_x} \subseteq U_{\alpha_x}$. Como f es subcontra-continua entonces $f^{-1}[V_{\alpha_x}]$ es cerrado en X. En consecuencia, como f es precontinua entonces

$$f^{-1}[V_{\alpha_x}] \subseteq \operatorname{int}_X\left(\operatorname{cl}_X\left(f^{-1}[V_{\alpha_x}]\right)\right) = \operatorname{int}_X\left(f^{-1}[V_{\alpha_x}]\right).$$

Esto nos dice entonces que $f^{-1}[V_{\alpha_x}]$ es un abierto y entonces $f^{-1}[V_{\alpha_x}]$ es un abierto y cerrado. Entonces, en particular, la familia

$$\left\{f^{-1}[V_{\alpha_x}] \mid x \in X\right\}$$

es una cubierta abierta de X formada por conjuntos abiertos y cerrados. Como por hipótesis X es casi Lindelöf entonces existe un subconjunto numerable $X_0 \subseteq X$ tal que

$$X = \bigcup_{x \in X_0} \operatorname{cl}_X\left(f^{-1}[V_{\alpha_x}]\right) = \bigcup_{x \in X_0} f^{-1}[V_{\alpha_x}] \subseteq \bigcup_{x \in X_0} f^{-1}[U_{\alpha_x}].$$

Por lo tanto

$$Y = f[X] \subseteq f\left[\bigcup_{x \in X_0} f^{-1}[U_{\alpha_x}]\right] = \bigcup_{x \in X_0} f\left[f^{-1}[U_{\alpha_x}]\right] = \bigcup_{x \in X_0} U_{\alpha_x} \subseteq Y.$$

Esto prueba que Y es Lindelöf. ■

Para terminar el pequeño vistazo a las distintas clases de continuidad, veamos la siguiente definición.

Definición 2.17. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es contra-continua si para cualquier abierto V de Y se cumple que $f^{-1}[V]$ es un cerrado en X.*

Es claro que si una función f es contra-continua entonces es subcontra-continua, pero no necesariamente pasa que si una función es subcontra-continua entonces es contra-continua. Un ejemplo de este hecho puede ser encontrado en [5], Ejemplo 1. Entonces, en virtud de la Definición 2.17, enunciemos el siguiente corolario que en realidad es una versión ligeramente diferente a lo enunciado en la Proposición 2.16.

Corolario 2.18. *Sean X un espacio casi Lindelöf, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función suprayectiva, contra-continua y precontinua. Entonces Y es Lindelöf.*

Demostración. Simplemente notemos que cualquier función contra-continua es subcontra-continua. En virtud de la Proposición 2.16 tenemos el resultado deseado. ■

Como podemos ver, el comportamiento de la propiedad casi Lindelöf junto con las variaciones de continuidad es, en resumen, muy bueno. Sin embargo, con el afán de no desviarnos del camino que seguimos, continuemos estudiando el comportamiento de las operaciones topológicas y su relación con ser casi Lindelöf. Una de las operaciones más importantes (y también más difíciles) es el producto topológico. Veamos pues primero un resultado negativo en este camino.

Ejemplo 2.19. *Sea $\mathcal{L}_S$ la recta de Sorgenfrey. Gracias a lo demostrado en el Ejemplo 1.6 iii) sabemos que es Lindelöf y por tanto, casi Lindelöf. Sin embargo, notemos que si $X = \mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ no es Lindelöf según el Ejemplo 1.18.*

Sin embargo, tal espacio es regular por ser producto de regulares. Esto nos dice que X no puede ser casi Lindelöf pues de serlo, por lo establecido en la Proposición 2.5, entonces sería Lindelöf. Por lo tanto, X no es casi Lindelöf aunque es producto de dos espacios casi Lindelöf.

Esto evidencia que, de forma general, el producto de dos espacios casi Lindelöf no resulta casi Lindelöf. A pesar de esto, podemos establecer ciertas condiciones para asegurar que el producto sí resulte casi Lindelöf. Aquí es donde intervienen los espacios compactos. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Proposición 2.20. *Sean X un espacio casi Lindelöf y Y un espacio compacto. Entonces $X \times Y$ es casi Lindelöf.*

Demostración. Notemos primero que como Y es compacto entonces es casi Lindelöf. Además, observemos también que basta probar que la propiedad de ser casi Lindelöf se cumple para cualquier cubierta abierta formada por abiertos básicos. De esta manera, sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de $X \times Y$ formada por abiertos básicos. Dado $x \in X$ se cumple que $\{x\} \times Y \cong Y$ y por lo tanto, $\{x\} \times Y$ es compacto. Así, existe una subcolección finita de $\mathscr{U}$, digamos $\{U_{x_i} \times V_{x_i} \mid i = 1, 2, \ldots, n_x\}$ tal que

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup \{U_{x_i} \times V_{x_i} \mid 1 \leq i \leq n_x\}.$$

Definamos entonces

$$W_x = \bigcap \{U_{x_i} \mid 1 \leq i \leq n_x\}.$$

Notemos que W_x es abierto en X y además $x \in W_x$. Entonces obtenemos que

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup \{W_x \times V_{x_i} \mid 1 \leq i \leq n_x\}.$$

Observemos entonces que $\mathcal{W} = \{W_x \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta para X. Como X es casi Lindelöf entonces existe una subcolección numerable $\left\{W_{x_j} \mid j \in \omega\right\}$ tal que

$$X = \bigcup_{j \in \omega} \mathrm{cl}_X \left(W_{x_j}\right).$$

Afirmamos que

$$\mathscr{U}_0 = \left\{U_{x_{j_i}} \times V_{x_{j_i}} \mid 1 \leq i \leq n_x \text{ y además } j \in \omega\right\}$$

es la subcolección buscada. Para esto, sea $(s,t) \in X \times Y$. Entonces $s \in X$ pero como

$$X = \bigcup_{j \in \omega} \mathrm{cl}_X \left(W_{x_j}\right)$$

entonces existe j_0 tal que $s \in \mathrm{cl}_X \left(W_{x_{j_0}}\right)$. Además, como

$$\left\{W_{x_{j_0}} \times V_{x_i} \mid 1 \leq i \leq n_{x_{j_0}}\right\}$$

es una cubierta para $\{x_{j_0}\} \times Y$ entonces existe i_0 tal que $(x_{j_0}, t) \in W_{x_{j_0}} \times V_{x_{i_0}}$ Y como $s \in \mathrm{cl}_X \left(W_{x_{j_0}}\right)$ tenemos entonces que $(s,t) \in \mathrm{cl}_X \left(W_{x_{j_0}}\right) \times V_{x_{i_0}}$. Por definición de $W_{x_{j_0}}$ entonces hay un $U_{x_{j_0}}$ tal que $W_{x_{j_0}} \subseteq U_{x_{j_0}}$ y por lo tanto

$$(s,t) \in \mathrm{cl}_X \left(U_{j_0}\right) \times V_{x_{i_0}} \subseteq \mathrm{cl}_{X \times Y} \left(U_{x_{j_0}} \times V_{x_{i_0}}\right).$$

Por lo tanto, $X \times Y$ es casi Lindelöf. ■

Capítulo 3

Espacios débilmente Lindelöf

Después de analizar con detenimiento los espacios débilmente Lindelöf, ¿cómo obtenemos nuevas clases de espacios que estén ligadas, de cierta manera, a los espacios ya estudiados? La manera usual es pensar en el debilitamiento de algunas de las condiciones impuestas en la definición de alguna propiedad. Justo es la manera en la que se obtuvo la definición de un espacio débilmente Lindelöf a partir de los espacios Lindelöf. Sin embargo, hacerlo de esta forma se tornaría repetitivo e incluso haría que se perdiera el interés. Entonces, ¿por qué no motivar la definición desde otra perspectiva?

¿Cómo abordaremos los espacios débilmente Lindelöf? Históricamente, el concepto de un espacio H-cerrado, que más adelante definiremos con todo rigor, fue introducido en 1924 por Alexandroff y Urysohn en su artículo *Zur Theórie der topologischen Raüme*, mientras que los espacios débilmente Lindelöf fueron definidos en 1959 por Frolik en su artículo titulado *Generalizations of compact and Lindelöf spaces*. Entonces podemos ver que los espacios H-cerrados anteceden a los espacios débilmente Lindelöf en forma cronológica. Precisamente el eje que definirá a los (espacios) débilmente Lindelöf estará sostenido sobre el estudio, de forma somera, de los espacios H-cerrados.

Además de la razón histórica y la búsqueda de una nueva forma de motivar las definiciones, atiende esto también al deseo de mostrar una clase de espacios, los H-cerrados, poco conocida al menos en matemáticas de nivel licenciatura. De hecho, los espacios H-cerrados son una generalización natural de los espacios compactos. Para esto, pensemos en un espacio K con las propiedades de ser compacto y Hausdorff. Notemos que si Z es cualquier espacio

Hausdorff que contiene como subespacio a K entonces K es cerrado en Z. Esto nos motiva a definir, ahora sí, con todo rigor, los espacios H-cerrados.

Definición 3.1. *Un espacio X es H-cerrado si X es cerrado en cualquier espacio Hausdorff que contiene a X como subespacio.*

Precisamente, los compactos Hausdorff son ejemplos de espacios H-cerrados. Sin embargo, no es tan claro que en general, un espacio H-cerrado no necesariamente es compacto. Un ejemplo de esto puede ser encontrado en [22], Capítulo 4, página 300. Observemos entonces lo siguiente.

Proposición 3.2. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Lo siguiente es equivalente.*

1 X es H-cerrado.

2 Cualquier cubierta abierta de X tiene una subcolección finita de unión densa.

3 Cualquier filtro abierto en X tiene al menos un punto de acumulación.

4 Cualquier ultrafiltro abierto en X converge.

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 3)

Sea $\mathcal{F}$ un filtro abierto en X. Recordemos que un filtro es abierto si todos sus elementos son conjuntos abiertos. Además, el conjunto de puntos de acumulación de $\mathcal{F}$, denotado por $a_X(\mathcal{F})$, se define como

$$a_X(\mathcal{F}) = \bigcap \{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Supongamos que $a_X(\mathcal{F}) = \emptyset$. Consideremos entonces $Y = X \cup \{\mathcal{F}\}$. Hagamos de Y un espacio topológico declarando que $U \subseteq Y$ es abierto si $U \cap X$ es abierto en X y si $\mathcal{F} \in U$ implica que $U \cap X \in \mathcal{F}$. Notemos que por definición entonces X es abierto en Y. Como por hipótesis X es Hausdorff entones para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen A y B abiertos ajenos de X que cumplen que $x \in A$ y $y \in B$. Pero entonces, existen U y V abiertos de Y tales que $A = X \cap U$ y $B = X \cap V$. Sin embargo, como X es abierto en Y entonces A y B son abiertos en Y. Por lo tanto, puntos distintos en X pueden ser separados por abiertos de Y ajenos.

Tomemos un punto $p \in X$. Como supusimos que $a_X(\mathcal{F}) = \emptyset$ entonces hay un abierto $U \in \mathcal{F}$ y una vecindad abierta V de p tales que $U \cap V = \emptyset$ pues $p \notin \bigcap\{\mathrm{cl}\,(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$. Notemos entonces que V y $U \cup \{\mathcal{F}\}$ son abiertos ajenos en Y tales que $p \in V$ y $\mathcal{F} \in U \cup \{\mathcal{F}\}$. Por lo tanto, hemos probado que X es un espacio Hausdorff. Ahora, notemos que X no es cerrado en Y pues si lo fuese entonces $\{\mathcal{F}\}$ sería un abierto y entonces $\{\mathcal{F}\} \cap X \in \mathcal{F}$, sin embargo, $\{\mathcal{F}\} \cap X = \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Por lo tanto, X no es cerrado en Y y concluimos entonces que X no es H-cerrado.

3) $\Rightarrow$ 4)

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro abierto. Recordemos que, en general, si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro entonces se cumple que $a_X(\mathcal{F}) = c_X(\mathcal{F})$ donde $c_X(\mathcal{F})$ es el conjunto de puntos a los que converge $\mathcal{F}$. Por lo tanto, como por hipótesis $a_X(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ y dado que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro entonces $c_X(\mathcal{U}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ converge.

4) $\Rightarrow$ 3)

Sea $\mathcal{F}$ un filtro abierto en X. Gracias al axioma de elección, sabemos que existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro abierto en X tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Observemos que si se cumple que $p \in \bigcap\{\mathrm{cl}_X\,(A) \mid A \in \mathcal{U}\}$ entonces, dado que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, en particular se tiene que $p \in \bigcap\{\mathrm{cl}_X\,(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$. Por lo tanto, $a_X(\mathcal{U}) \subseteq a_X(\mathcal{F})$. Por hipótesis cualquier ultrafiltro abierto converge y así existe $p \in X$ tal que $p \in c_X(\mathcal{U})$ y en consecuencia

$$p \in c_X(\mathcal{U}) = a_X(\mathcal{U}) \subseteq a_X(\mathcal{F}).$$

Con esto concluimos entonces que $\mathcal{F}$ tiene al menos un punto de acumulación.

3) $\Rightarrow$ 1)

Supongamos que X no es H-cerrado. Por lo tanto, existe un espacio topológico Y Hausdorff tal que X es un subespacio de Y pero $\mathrm{cl}_Y\,(X) \neq X$. Tomemos entonces un punto $p \in \mathrm{cl}_Y\,(X) \setminus X$ y definamos

$$\mathcal{F} = \{U \cap X \mid U \text{ es abierto en } Y \text{ y además } p \in U\}\,.$$

Es fácil observar que $\mathcal{F}$ es un filtro abierto en X. La afirmación es que $a_X(\mathcal{F}) = \emptyset$. Supongamos que no. Así, existe $x \in a_X(\mathcal{F})$. Como $a_X(\mathcal{F}) \subseteq X$

entonces claramente $x \neq p$. Como Y es Hausdorff existen U y V abiertos de Y ajenos tales que $x \in U$ y $p \in V$. Esto nos dice que $V \cap X \in \mathcal{F}$ pero $x \notin \mathrm{cl}_X(V \cap X)$ pues $U \cap (V \cap X) = \emptyset$. Por lo tanto, concluimos que $a_X(\mathcal{F}) = \emptyset$.

2) $\Rightarrow$ 3)

Sea $\mathcal{F}$ un filtro abierto en X. Supongamos que $a_X(\mathcal{F}) = \emptyset$. Esto significa, por definición, que $\emptyset = \bigcap \{\mathrm{cl}_X(U) \mid U \in \mathcal{F}\}$. Por lo tanto, se tiene que $X = \bigcup \{X \setminus \mathrm{cl}_X(U) \mid U \in \mathcal{F}\}$. Esto nos dice entonces que la colección

$$\mathcal{V} = \{X \setminus \mathrm{cl}_X(U) \mid U \in \mathcal{F}\}$$

es una cubierta abierta para X. Entonces una subcolección finita de $\mathcal{V}$ tiene la forma $\{X \setminus \mathrm{cl}_X(U) \mid U \in A\}$ con A un subconjunto finito de $\mathcal{F}$. Notemos entonces que

$$\mathrm{cl}_X\left(\bigcup \{X \setminus \mathrm{cl}_X(U) \mid U \in A\}\right) = \bigcup \{X \setminus \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(U)) \mid U \in A\}. \tag{3.1}$$

La Igualdad 3.1 se da pues en general se cumple que

$$\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(U)) = X \setminus \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(U))$$

y porque A es un subconjunto finito de $\mathcal{F}$ y la cerradura abre uniones finitas. Sin embargo, por las leyes de De Morgan se tiene que

$$\bigcup \{X \setminus \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(U)) \mid U \in A\} = X \setminus \bigcap \{\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(U)) \mid U \in A\}.$$

Pero observemos también que

$$X \setminus \bigcap \{\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(U)) \mid U \in A\} \subseteq X \setminus \bigcap \{U \mid U \in A\}. \tag{3.2}$$

Esto es cierto pues como cada U es un abierto entonces se cumple que $U \subseteq \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(U))$ y así $\bigcap \{U \mid U \in A\} \subseteq \bigcap \{\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(U))\}$ y así, tomando complementos, obtenemos lo escrito en la Ecuación 3.2. Finalmente, como $\mathcal{F}$ es un filtro entonces la intersección finita de sus elementos es no vacía. Por lo tanto $\bigcap \{U \mid U \in A\} \neq \emptyset$ y con ello

$$X \setminus \bigcap \{U \mid U \in A\} \subsetneq X.$$

Concluimos con esto que ninguna subcolección finita de $\mathcal{V}$ puede tener unión densa.

3) $\Rightarrow$ 2)

Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de X tal que para cada subconjunto finito $A \subseteq \mathcal{C}$ se cumple que

$$\mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right) \subsetneq X$$

Es decir, tomemos una cubierta abierta sin subcolecciones finitas de unión densa. Definamos entonces

$$\mathcal{F} = \left\{U \subseteq X \mid U \text{ es abierto y } X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right) \subseteq U \text{ para algún } A \text{ subconjunto finito de } \mathcal{C}\right\}$$

La afirmación es que $\mathcal{F}$ es un filtro abierto en X. Por definición, cada elemento de $\mathcal{F}$ es un abierto y por lo tanto, resta probar que es un filtro.

- Cada elemento de $\mathcal{F}$ es no vacío pues como $\mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right) \subsetneq X$ entonces $X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right) \neq \emptyset$ y por tanto, como $X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right) \subseteq U$, con $U \in \mathcal{F}$, entonces $U \neq \emptyset$. Además, $\mathcal{F}$ es no vacío pues $X \in \mathcal{F}$ y X es un abierto.

- Sean U y V dos elementos de $\mathcal{F}$. Por definición, existen A y B subconjuntos finitos de $\mathcal{C}$ tales que $X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right) \subseteq U$ y $X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup B\right) \subseteq V$. Tomemos $D = A \cup B$. Entonces D es también un subconjunto finito de $\mathcal{C}$ y además $X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup (A \cup B)\right) \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right) \subseteq U$ y de la misma forma $X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup (A \cup B)\right) \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup B\right) \subseteq V$ Por lo tanto, concluimos que $X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup (A \cup B)\right) \subseteq U \cap V$. Como $U \cap V$ es abierto entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$.

- Sea U un elemento de $\mathcal{F}$ y supongamos que $U \subseteq V$ con V un abierto. Probemos que V es también elemento de $\mathcal{F}$. Sin embargo, esto es inmediato, pues como U está en $\mathcal{F}$ entonces existe A subconjunto finito de $\mathcal{C}$ tal que $X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right) \subseteq U \subseteq V$. Por lo tanto, $V \in \mathcal{F}$.

Esto prueba que $\mathcal{F}$ es un filtro abierto. Observemos entonces que

$$a_X(\mathcal{F}) = \bigcap \left\{\mathrm{cl}_X\left(U\right) \mid U \in \mathcal{F}\right\} \subseteq \bigcap \left\{\mathrm{cl}_X\left(X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right)\right) \mid A \subseteq \mathcal{C} \text{ es finito}\right\}. \tag{3.3}$$

La última contención de la Ecuación 3.3 queda justificada pues si definimos

$$R = \left\{\mathrm{cl}_X\left(X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup A\right)\right) \mid A \subseteq \mathcal{C} \text{ es finito}\right\}$$

y

$$S = \{\mathrm{cl}_X(U) \mid U \in \mathcal{F}\}$$

y observamos que $R \subseteq S$ pues $\{X \setminus \mathrm{cl}_X(\bigcup A) \mid A \subseteq \mathcal{C} \text{ es finito}\}$ está contenido trivialmente en $\mathcal{F}$. Por lo tanto, $\bigcap S \subseteq \bigcap R$. Además, observemos que

$$\bigcap \left\{\mathrm{cl}_X \left(X \setminus \mathrm{cl}_X \left(\bigcup A\right)\right) \mid A \subseteq \mathcal{C} \text{ es finito}\right\} \subseteq \bigcap \{\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) \mid V \in \mathcal{C}\}. \tag{3.4}$$

A su vez, tomemos un punto $x \in \bigcap \{\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) \mid V \in \mathcal{C}\}$. Por definición obtenemos que, $x \in \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V))$ para todo $V \in \mathcal{C}$. ¿Es posible que exista algún $V_0 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in V$? Supongamos que sí. Tomemos pues $V_0 \in \mathcal{C}$ tal que $x \in V$. En consecuencia, como $(X \setminus \mathrm{cl}_X(V_0)) \cap V_0$ entonces V_0 es una vecindad de x que es testigo de que $x \notin \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V_0))$, lo cual es un absurdo por la elección de x. Por lo tanto, $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{C}$ y así, dado que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de X entonces

$$\bigcap \{\mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) \mid V \in \mathcal{C}\} \subseteq X \setminus \bigcup \mathcal{C} = X \setminus X = \emptyset. \tag{3.5}$$

De las igualdades 3.3, 3.4 y 3.5 obtenemos que $a_X(\mathcal{F}) = \emptyset$. ■

Después de esta prueba, los espacios H-cerrados han quedado caracterizados de muchas formas, pero hay una de ellas que es la que nos interesa y es que tales espacios pueden ser caracterizados vía una propiedad de cubierta. Y de hecho, gracias a la Proposición 3.2 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3. *Sea X un espacio topológico. Si X es $H-$ cerrado entonces X es casi Lindelöf*

Demostración. La cerradura de una unión finita de conjuntos es igual a la unión de las cerraduras. ■

Esto nos da una gran clase de espacios como ejemplo para la propiedad de casi Lindelöf, pero, más allá de eso, ¿qué otra clase de espacios podemos obtener? Porque, ¿cómo podemos ligar la propiedad de cubierta que tienen con la propiedad de Lindelöf? Por un lado, ser H-cerrado y ser Lindelöf están definidos vía cubiertas abiertas. En este punto se ven muy similares, sin embargo, el ingrediente que buscamos para unirlas es la numerabilidad. ¿De qué forma lo haremos? Observémoslo en la siguiente definición.

Definición 3.4. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es débilmente Lindelöf si para toda cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X existe una subcolección numerable $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ tal que $cl_X\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right) = X$.*

Una reformulación muy útil de la definición es la siguiente.

Proposición 3.5. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base para X. Entonces X es débilmente Lindelöf si y solo si para toda cubierta abierta $\mathscr{U}$ formada por elementos de $\mathcal{B}$ existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $X = cl_X\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)$.*

Demostración. Si X es débilmente Lindelöf y $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{B}$ es una cubierta abierta de X entonces concluimos que existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ tal que $X = \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)$.

Para la otra implicación, tomemos $\mathscr{V}$ una cubierta abierta de X. Notemos que para cada $x \in X$ existe $V_x \in \mathscr{V}$ tal que $x \in V_x$. Como $\mathcal{B}$ es una base entonces existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq V_x$. Por hipótesis entonces existe $X_0 \subseteq X$ numerable tal que

$$X = \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{x \in X_0} B_x\right).$$

Sin embargo, notemos que

$$\bigcup_{x \in X_0} B_x \subseteq \bigcup_{x \in X_0} V_x$$

con lo cual

$$\mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{x \in X_0} B_x\right) \subseteq \mathrm{cl}_X\left(\bigcup_{x \in X_0} V_x\right).$$

Por lo tanto, $\{V_x \mid x \in X_0\}$ es la subcolección numerable de unión densa que buscábamos y que atestigua que X es débilmente Lindelöf. ■

Evidentemente, por la definición, cualquier espacio H-cerrado será débilmente Lindelöf. La pregunta es entonces si cualquier espacio Hausdorff débilmente Lindelöf es H-cerrado. Lo deseable es que no para que la definición sea algo completamente nuevo a los espacios H-cerrados y no una simple reformulación de ellos. Observemos pues el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6. *Consideremos a $\mathbb{R}$ con su topología euclidiana usual. Claramente es un espacio Hausdorff. Tomemos la cubierta abierta*

$$\mathscr{U} = \{(-n, n) \mid n \in \omega\}.$$

Notemos que una subcolección finita de $\mathscr{U}$ tiene la forma $\{(-n, n) \mid n \in A\}$ donde A es un subconjunto finito de ω. Pero entonces, observemos que

$$\bigcup \{(-n, n) \mid n \in A\} = (-k, k)$$

donde $k = \max(A)$. Este máximo está bien definido pues el conjunto A es finito. Por lo tanto

$$cl_{\mathbb{R}}\left(\bigcup \{(-n, n) \mid n \in A\}\right) = cl_{\mathbb{R}}((-k, k)) = [-k, k]$$

y claramente $[-k, k] \subsetneq \mathbb{R}$. Esto nos dice que $\mathbb{R}$ no es un espacio H-cerrado. Sin embargo, $\mathbb{R}$ sí es un espacio débilmente Lindelöf pues dada $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de $\mathbb{R}$, para cada $q \in \mathbb{Q}$ existe $V_q \in \mathcal{V}$ tal que $q \in V_q$. Entonces

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} V_q$$

y por lo tanto

$$\mathbb{R} = cl_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = cl_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\right) \subseteq cl_{\mathbb{R}}\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} V_q\right) \subseteq \mathbb{R}.$$

Además, como $\mathbb{Q}$ es numerable entonces la subcolección buscada es

$$\{V_q \mid q \in \mathbb{Q}\}.$$

Con esto probamos que $\mathbb{R}$ es débilmente Lindelöf.

Así, queda claro que la nueva clase de espacios que definimos es diferente a la clase de los espacios H-cerrados. De hecho, de la prueba anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.7. *Sea X un espacio topológico. Si X es separable entonces X es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Como X es separable, sea D un denso numerable de X. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Para cada $d \in D$ podemos tomar $U_d \in \mathscr{U}$ tal que $d \in U_d$ porque $\mathscr{U}$ es cubierta abierta. Afirmamos que $\{U_d \mid d \in D\}$ es la subcolección numerable buscada. Y en efecto lo es pues por la densidad de D en X obtenemos que

$$X = \mathrm{cl}\,(D) = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{d \in D} \{d\}\right) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{d \in D} U_d\right) \subseteq X.$$

Por lo tanto, X es débilmente Lindelöf. ■

Siguiendo el enunciado del Corolario 3.7, ¿será cierto que todo espacio débilmente Lindelöf es separable? La respuesta es negativa y podemos observarla en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.8. *Consideremos el espacio de ordinales $[0, \omega_1]$ equipado con la topología de orden. Es bien sabido que $[0, \omega_1]$ es un compacto Hausdorff y por lo tanto débilmente Lindelöf. Sin embargo, en [20], página 111, se prueba que $[0, \omega_1]$ no es separable.*

De hecho, la relación entre la separabilidad y la propiedad débilmente Lindelöf se vuelve mucho más sencilla de observar si introducimos la siguiente definición.

Definición 3.9. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es ccc (por las siglas en inglés de countable chain condition) o tiene la condición ccc si dada $\mathcal{U}$ una familia no vacía de abiertos no vacíos ajenos dos a dos, es decir, si U y V son dos elementos distintos de $\mathcal{U}$ entonces $U \cap V = \emptyset$, se cumple que $\mathscr{U}$ es numerable.*

Observemos que inmediatamente de la definición obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.10. *Sea X un espacio topológico. Si X es separable entonces X tiene la condición ccc.*

Demostración. Si suponemos que X no es ccc entonces existe $\mathscr{U}$ una colección no vacía de abiertos no vacíos ajenos dos a dos tal que es más que numerable. De esta forma, si tomamos D un subconjunto denso de X entonces, dado $U \in \mathscr{U}$, existe $d_U \in D$ tal que $d_U \in D \cap U$. Entonces la asignación $U \mapsto d_U$ es inyectiva gracias a que los abiertos de $\mathscr{U}$ son ajenos dos a dos. De esta forma $\aleph_0 < |\mathcal{U}| \leq |D|$. Por lo tanto, X no es separable. ■

El interés en realidad de definir a la propiedad ccc es la siguiente proposición. Es tanto de importancia para este capítulo pues resume la prueba de que todo espacio separable es débilmente Lindelöf tanto como ayudará eventualmente en el desarrollo del siguiente capítulo.

Proposición 3.11. *Sea X un espacio ccc. Para cada familia $\mathcal{W}$ de abiertos de X existe una subcolección numerable $\mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{W}$ tal que $\bigcup \mathcal{W} \subseteq cl_X \left(\bigcup \mathcal{W}_0\right)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{W}$ una familia de abiertos de X. Consideremos entonces

$$\mathcal{V} = \{A \subseteq X \mid A \text{ es abierto no vacío y existe } W \in \mathcal{W} \text{ tal que } A \subseteq W\}.$$

Tomemos el siguiente conjunto

$$\mathcal{Z} = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ es una familia de abiertos no vacíos ajenos dos a dos tal que } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}\}.$$

Notemos que $\mathcal{Z}$ es no vacío, pues como $\mathcal{V}$ es no vacío, si tomamos un elemento $V \in \mathcal{V}$, se cumple que $\{V\} \in \mathcal{Z}$. Consideremos entonces a $\mathcal{Z}$ ordenado con la contención. Tomemos $C \subseteq \mathcal{Z}$ una cadena. Afirmamos que $\bigcup C \in \mathcal{Z}$. Por la naturaleza del orden inmediatamente tenemos que $\bigcup C$ es una familia de abiertos no vacíos ajenos dos a dos y claramente $\bigcup C \subseteq \mathcal{V}$. Esto nos dice que $\bigcup C \in \mathcal{Z}$ y además es claro que $\bigcup C$ es una cota superior para C. En consecuencia, el Lema de Zorn nos otorga la existencia de una familia maximal $\mathcal{V}_0$ conformada por abiertos ajenos dos a dos tal que $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$. Como X es ccc entonces $\mathcal{V}_0$ es numerable. Probemos ahora que

$$\bigcup \mathcal{W} \subseteq \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \mathcal{V}_0\right). \tag{3.6}$$

Supongamos que no. De esta manera, existe $x \in \bigcup \mathcal{W}$ tal que $x \notin \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \mathcal{V}_0\right)$. Como $\mathrm{cl}_X \left(\bigcup \mathcal{V}_0\right)$ es un cerrado, existe M un abierto de X tal que se cumple que $x \in M \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \mathcal{V}_0\right)$. Pero más aún, para todo $V \in \mathcal{V}_0$ se cumple que $V \cap M = \emptyset$. Como $x \in \bigcup \mathcal{W}$ entonces existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $x \in W$. Así, $x \in W \cap M$. Consideremos entonces la familia

$$\mathcal{V}_0 \cup \{W \cap M\}.$$

Como $W \cap M \subseteq W$ entonces $\mathcal{V}_0 \cup \{W \cap M\}$ es una familia de abiertos ajenos dos a dos tal que está contenida en $\mathcal{V}$ y que además contiene propiamente a $\mathcal{V}_0$. Pero la maximalidad de $\mathcal{V}_0$ hace imposible la existencia de tal familia.

Esto es una contradicción que viene de suponer que $\bigcup \mathcal{W}$ no está contenido en $\mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathcal{V}_0\right)$. Por lo tanto, la contención de la Ecuación 3.6 es cierta. Finalmente, si para cada A elemento de $\mathcal{V}_0$ tomamos un elemento $B_A \in \mathcal{W}$ tal que $A \subseteq B_A$ y definimos

$$\mathcal{W}_0 = \{B_A \mid A \in \mathcal{V}_0\}$$

entonces como $\bigcup \mathcal{V}_0 \subseteq \bigcup \mathcal{W}_0$ obtenemos que

$$\mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathcal{V}_0\right) \subseteq \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathcal{W}_0\right). \tag{3.7}$$

Por la Ecuación 3.6 y la Ecuacion 3.7 se concluye que

$$\bigcup \mathcal{W} \subseteq \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathcal{V}_0\right) \subseteq \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathcal{W}_0\right). \tag{3.8}$$

Como $\mathcal{W}_0$ es numerable y por la Ecuacion 3.8 obtenemos el resultado deseado. ■

Inmediatamente obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.12. *Sea X un espacio topológico. Si X es ccc entonces X es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.11. ■

Y claro, como ser separable implica ser ccc, la Proposición 3.11 nos da una prueba diferente del Corolario 3.7. Después de esto, es natural pensar en las relaciones que tiene el concepto de débilmente Lindelöf con las propiedades de Lindelöf y casi Lindelöf. ¿Es equivalente a algunas o es más fuerte que ellas en el sentido de que las implica? Exploremos eso con mucho detenimiento.

Proposición 3.13. *Sea X un espacio topológico. Si X es casi Lindelöf entonces X es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es casi Lindelöf, existe una subcolección numerable $\mathscr{U}_0$ tal que $\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}\,(U) = X$. Sin embargo notemos que dado $U \in \mathscr{U}_0$ se cumple que

$$U \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} U$$

y por lo tanto

$$\mathrm{cl}\,(U) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} U\right)$$

y en consecuencia

$$\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}\,(U) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} U\right)$$

Finalmente

$$X = \bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} \mathrm{cl}\,(U) \subseteq \mathrm{cl}\left(\bigcup_{U \in \mathscr{U}_0} U\right)$$

■

Después de observar esto, ¿será cierto que un espacio débilmente Lindelöf es casi Lindelöf? Respondamos a esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.14. *Si consideramos la recta de Sorgenfrey $\mathcal{L}_S$, gracias al Ejemplo 2.19, sabemos que $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ no es casi Lindelöf. Sin embargo, como $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un denso de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ entonces tal espacio es separable y según el Corolario 3.7 se convierte en un espacio débilmente Lindelöf.*

Con esto entonces podemos observar que, de forma general, ser Lindelöf implica ser casi Lindelöf y que ser casi Lindelöf implica ser débilmente Lindelöf. Y además, gracias a los ejemplos expuestos, de forma general, las implicaciones son solo en un sentido pues débilmente Lindelöf no implica necesariamente ser casi Lindelöf y ser casi Lindelöf no implica necesariamente ser Lindelöf. Más aún, el Ejemplo 3.14 muestra que a pesar de que $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ es regular, ser Lindelöf y débilmente Lindelöf no son propiedades equivalentes, como sucedía en el caso de ser Lindelöf y casi Lindelöf (Proposición 2.5) y también que ser débilmente Lindelöf y casi Lindelöf no resultan equivalentes bajo la regularidad. Lo mencionado lo resumimos en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\text{Lindelöf} \arrow[d] \\
\text{Casi Lindelöf} \arrow[d] \\
\text{Débilmente Lindelöf}
\end{tikzcd}$$

Todas las implicaciones, indicadas por flechas, son estrictas gracias a los Ejemplos 2.3 y 3.14.

Después de observar esto es claro que las propiedades estudiadas, en general, no resultan equivalentes. ¿Habrá alguna forma de hacerlas equivalentes? ¿Qué condiciones necesitan para convertirse en una única propiedad? Para mostrar un ejemplo donde son equivalentes, necesitamos primero la siguiente definición. Observemos que esta vez sí exigimos cierta separación en nuestro espacio.

Definición 3.15. *Sea X un espacio topológico T_1. Consideremos entonces $A(X) = X \times \{0,1\}$. Para cada $x \in X$ tomemos las siguientes familias de conjuntos*

- $\mathcal{B}(x,0) = \{(U \times \{0,1\}) \setminus \{(x,1)\} \mid x \in U \text{ y } U \text{ es abierto en } X\}$
- $\mathcal{B}(x,1) = \{\{(x,1)\}\}$

Entonces, si tomamos a $\mathcal{B}(x,0)$ y $\mathcal{B}(x,1)$ como bases de vecindades abiertas para $(x,0)$ y $(x,1)$ respectivamente, para alguna topología σ en $A(X)$, entonces $(A(X),\sigma)$ es un espacio topológico conocido como el duplicado de Alexandroff.

De la definición quizá lo que no es tan evidente es que las colecciones $\mathcal{B}(x,0)$ y $\mathcal{B}(x,1)$ formen una base de vecindades para alguna topología σ en $A(X)$. Demostremos este hecho entonces.

Demostración. Dado un punto $x \in X$, tenemos que demostrar tres[1] cosas para que la colección $\mathcal{B}(x,0)$ sea una base local para $(x,0)$ y $\mathcal{B}(x,1)$ sea una

[1] Recordemos que, de forma general, si para cada $x \in X$ tomamos $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ con las siguientes tres propiedades

- Para todo $B \in \mathcal{B}_x$ se cumple que $x \in B$
- Para cualesquiera B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}_x$ existe B_3 elemento de $\mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cup B_2$
- Para todo B elemento de $\mathcal{B}_x$ existe $B_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_0 \subseteq B$ y además para todo $y \in B_0$ existe $V \in \mathcal{B}_y$ tal que $V \subseteq B_0$

entonces

$$\tau = \{A \subseteq X \mid \text{Para todo } x \in A \text{ existe } V \in \mathcal{B}_x \text{ tal que } V \subseteq A\}$$

es una topología para X en la cual cada $\mathcal{B}_x$ es una base local para x.

base local para $(x, 1)$. Procedamos primero para el punto $(x, 0)$ pues para el punto $(x, 1)$ no hay nada que hacer dado que gracias a cómo definimos $\mathcal{B}(x, 1)$ entonces $(x, 1)$ resulta aislado.

- Por definición tenemos que para todo $B \in \mathcal{B}(x, 0)$ se cumple que $(x, 0) \in B$
- Sean B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}(x, 0)$. Por lo tanto, tenemos por un lado que $B_1 = (U \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}$ y además $B_2 = (V \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}$ con U y V abiertos de X tales que $x \in U \cap V$. Tomemos $W = U \cap V$. Es un abierto de X y además $x \in W$. Más aún, se cumple que

  $$(W \times \{0,1\}) \setminus \{(x,1)\} \subseteq ((U \times \{0,1\}) \setminus \{(x,1)\}) \cap ((V \times \{0,1\}) \setminus \{(x,1)\})$$

  es decir, si $B_3 = (W \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}$ entonces $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
- Sea B un elemento de $\mathcal{B}(x, 0)$. Así, si tomamos $B_0 = B$ entonces se cumple que $B_0 \subseteq B$. Ahora tomemos un punto $y \in B_0$. Entonces tenemos dos casos pues como B_0 es elemento de $\mathcal{B}(x, 0)$ se tiene que $B_0 = (U \times \{0, 1\} \setminus \{(x, 1)\})$. Analicemos tales casos.
  - Si $y = (a, 0)$ con $a \in U$ entonces $V = B_0 \in \mathcal{B}(a, 0)$ cumple que $V \subseteq B_0$.
  - Si $y = (a, 1)$ con $a \in U$ y $a \neq x$ entonces $\{(a, 1)\} \in \mathcal{B}(a, 1)$ y claramente, si $V = \{(a, 1)\}$ entonces $V \subseteq B_0$.

■

Por lo tanto, la definición que hemos dado para la topología de $A(X)$ es correcta. Este espacio es muy relevante para muchos resultados en topología. En este caso, tenemos el siguiente resultado que además de ser muy importante involucra las tres propiedades hasta ahora estudiadas y más aún, ¡las hace equivalentes! Sin embargo, antes de probarlo, observemos el siguiente lema.

Lema 3.16. *Sea X un espacio topológico. Consideremos además $A(X)$ el duplicado de Alexandroff de X como en la Definicion 3.15. Entonces la función $f : A(X) \to X$, definida como $f(x, y) = x$, es perfecta.*

Demostración. Según la Definición 1.15, tenemos que probar que f es una función compacta y cerrada.

- Primero, para ver que f es compacta, sea $x_0 \in X$. Observemos que de forma sencilla se observa que $f^{-1}[\{x_0\}] = \{(x_0, 1), (x_0, 0)\}$. Así, el conjunto $f^{-1}[\{x_0\}]$ es finito y por tanto compacto. En consecuencia concluimos que f es una función compacta.

- Para ver que f es cerrada, tomemos F un cerrado de $A(X)$. Probemos entonces que $f[F]$ es un cerrado en X. Para esto, tomemos un punto $x \in X \setminus f[F]$. Así, tenemos que $f^{-1}[\{x\}] = \{(x, 0), (x, 1)\} \cap F = \emptyset$ pues si $f^{-1}[\{x\}] \cap F \neq \emptyset$ entonces $x \in f[F]$ pero por la elección de x esto no sucede. Por lo tanto, $(x, 0) \notin F$ y $(x, 1) \notin F$. Dado que F es cerrado, existe un abierto U de X tal que

$$(x, 0) \in (U \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\} \subseteq A(X) \setminus F.$$

  De esta forma entonces $x \in U \subseteq X \setminus f[F]$. Así, $f[F]$ es un cerrado.

■

Por lo tanto, el lema queda demostrado. Ahora sí veamos entonces la proposición.

Proposición 3.17. *Sea X un espacio topológico T_1. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *X es Lindelöf*

2. *$A(X)$ es Lindelöf*

3. *$A(X)$ es casi Lindelöf*

4. *$A(X)$ es débilmente Lindelöf*

Demostración.
1) $\Rightarrow$ 2)

Supongamos que X es Lindelöf. Consideremos la función $f : A(X) \to X$ definida como $f(x, y) = x$. En virtud del Lema 3.16 se tiene que f es una función perfecta y así, gracias a que X es Lindelöf y a la Proposición 1.16, concluimos que $A(X)$ es Lindelöf.

2) $\Rightarrow$ 3)

Es inmediato de la Proposición 2.2.

$3 \Rightarrow 4)$

Se sigue de la Proposición 3.13.

$4) \Rightarrow 1)$

Supongamos que X no es Lindelöf. Así, existe $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X sin subcubiertas numerables. Observemos primero que dado $U \in \mathscr{U}$ entonces $U \times \{0,1\}$ es un abierto de $A(X)$. Para probar tal afirmación, simplemente consideremos un punto $z \in U \times \{0,1\}$. Entonces, si $z = (x,0)$ con $x \in U$, tomemos V un abierto de X tal que $x \in V \subseteq U$. Eso es posible pues U es abierto de X. Con ello entonces

$$z = (x,0) \in (V \times \{0,1\}) \setminus \{(x,1)\} \subseteq U \times \{0,1\}.$$

Si ahora $z = (x,1)$, con $x \in U$, entonces simplemente basta tomar la vecindad abierta $\{(x,1)\}$ y así $(x,1) \in \{(x,1)\} \subseteq U \times \{0,1\}$. De ambos casos probamos que $U \times \{0,1\}$ es un abierto. Así, $\mathcal{V} = \{U \times \{0,1\} \mid U \in \mathscr{U}\}$ es una cubierta abierta de $A(X)$. Supongamos que $\mathcal{V}$ contiene una subcolección numerable $\{U_n \times \{0,1\} \mid n \in \omega\}$ tal que

$$\mathrm{cl}\left(\bigcup \{U_n \times \{0,1\} \mid n \in \omega\}\right) = A(X).$$

Sea $D = \bigcup \{U_n \times \{0,1\} \mid n \in \omega\}$. Como por hipótesis $\mathscr{U}$ no tiene subcubiertas numerables entonces existe $p \in X$ tal que $p \notin \bigcup_{n\in\omega} U_n$. Sin embargo, como D es denso en $A(X)$ y $\{(p,1)\}$ es un abierto de $A(X)$ entonces $D \cap \{(p,1)\} \neq \emptyset$, es decir, $(p,1) \in D$. Pero esto implica que existe $n \in \omega$ tal que $p \in U_n$, pero esto es imposible. Así, $A(X)$ no puede ser débilmente Lindelöf. ■

Después de observar todos estos resultados que ligan a la propiedad de ser débilmente Lindelöf con las ya estudiadas, pasemos a centrarnos solamente en los espacios débilmente Lindelöf. Primero, ¿cómo obtenemos más ejemplos? Tenemos los ya conocidos para los espacios estudiados en los dos primeros capítulos, pero gracias a la motivación que tomamos en este capítulo, podemos obtener muchos ejemplos de espacios débilmente Lindelöf. Seguiremos

una técnica muy usada en topología general para construir nuevas clases de espacios.
Una parte muy importante de la topología es la teoría de extensiones. En ella se abordan problemas muy diversos, pero en general, se trata de encontrar espacios con un comportamiento más sencillo de describir a comparación de los espacios usuales que no tienen un comportamiento tan fácil de abordar. Para poder trabajar con extensiones, debemos entender primero qué es una extensión de un espacio topológico: intuitivamente, dado un espacio topológico X, una extensión de X es un espacio topológico Y en el cual X es denso. Precisamente la densidad nos permite tomar puntos de X tan cercanos a puntos de Y como queramos. Veamos la definición formal.

Definición 3.18. *Sea X un espacio topológico. Una extensión para X es una pareja (Y, h) en donde Y es un espacio topológico y $h : X \to Y$ es un encaje denso, es decir, $cl_Y(h[X]) = Y$. Recordemos que un encaje es simplemente una función que es homeomorfismo sobre su imagen.*

En la práctica se suele pensar que simplemente X está contenido en Y y por lo tanto, el encaje queda dado por la inclusión, aunque en general no es así. Esto es simplemente para facilitar un poco las cosas. Justamente el principal objetivo de las extensiones es poder facilitar la resolución de problemas pues si tenemos un espacio X, podemos generar una extensión de X que tenga propiedades topológicas que faciliten el trabajo. Por ejemplo, si consideramos al espacio $X = (0, 1)$ entonces $Y = [0, 1]$ es una extensión de X pues $h = \iota : X \to Y$ definida como $\iota(x) = x$, es decir, la función inclusión, es un encaje denso. Pero observemos que X no es compacto y Y sí lo es. Entonces, claro, el espacio Y tiene propiedades topológicas mucho más fuertes que el espacio X. De hecho, como hemos remarcado, la extensión que consideramos es un espacio compacto. A las extensiones compactas se les llamará compactaciones.

Una de las extensiones más famosas es la compactación de Stone-Čech de un espacio topológico X. Queda caracterizada como la única compactación en la cual el espacio X está C^*-encajado. Por ejemplo, si $X = [0, \omega_1)$ equipado con la topología de orden, entonces $\beta X = [0, \omega_1]$. Si consideramos el espacio $T^* = [0, \omega_1] \times [0, \omega]$ entonces la plancha de Tychonoff se define como $T = T^* \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$. Resulta entonces que $\beta T = T^*$. Un análisis a detalle de estos dos espacios puede ser encontrado en [15], en los capítulos 5 y 8, respectivamente. No lo haremos aquí pues no es el objetivo principal. Antes

de continuar, hemos de aclarar que en general, la compactación de Stone-Čech no es simplemente añadir un punto. Los ejemplos que hemos mostrado son en realidad de los más patológicos. De hecho, si consideramos $\mathbb{N}$ con la topología discreta entonces resulta que $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\aleph_0}}$. La prueba de este hecho puede ser consultada en el capítulo 9 de [15].
Pero retomando nuestro objetivo, lo que haremos será construir, para cada espacio Hausdorff, una extensión con la propiedad de ser un espacio H-cerrado. Gracias al Corolario 3.3 entonces también la extensión será débilmente Lindelöf con lo cual lograremos tener para cada espacio Hausdorff un ejemplo de un espacio débilmente Lindelöf. La extensión de la que hablamos queda definida de la siguiente manera.

Definición 3.19. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Consideremos el conjunto κX definido como*

$$\kappa X = X \cup \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \text{ es un ultrafiltro libre y abierto en } X\}.$$

La topología de la que dotaremos a κX lleva por base a

$$\mathcal{B} = \{V \mid V \text{ es abierto en } X\} \cup \{U \cup \{\mathcal{U}\} \mid U \in \mathcal{U} \text{ y } \mathcal{U} \in \kappa X \setminus X\}.$$

Decimos entonces que si τ es la topología generada por $\mathcal{B}$ entonces $(\kappa X, \tau)$ es la extensión de Katetov de un espacio X.

Como sucedió cuando definimos el duplicado de Alexandroff, quizá lo que no es evidente es que la familia $\mathcal{B}$ sea base para alguna topología en X. Demostrémoslo para que no haya ninguna duda.

Demostración. Para probar que $\mathcal{B}$ tenemos que comprobar que dos[2] condiciones se cumplen. Probemos entonces cada una.

[2]Recordemos que si tomamos X un conjunto arbitrario y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que cumple

- $X = \bigcup \mathcal{B}$.
- Para cualesquiera B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$ y para cualquier $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

entonces

$$\tau_{\mathcal{B}} = \left\{A \subseteq X \mid \text{Existe } U \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } A = \bigcup U\right\}$$

es una topología para la cual $\mathcal{B}$ es una base.

- Observemos que $\bigcup \mathcal{B} \subseteq X$. Así, solo resta probar una contención. Tomemos $x \in X$. De esta forma entonces, como $X \in \{V \mid V \text{ es abierto en } X\}$ se tiene que $x \in \bigcup\{V \mid V \text{ es abierto en } X\} \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ lo cual prueba la igualdad.

- Tomemos B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$. Observemos que tenemos varios casos.

  - Si B_1 y B_2 son elementos de $\{V \mid V \text{ es abierto en } X\}$ entonces tomemos un punto $x \in B_1 \cap B_2$. Como

    $$B_1 \cap B_2 \in \{V \mid V \text{ es abierto en } X\}$$

    y además tal intersección la supusimos no vacía entonces podemos considerar $B_3 = B_1 \cap B_2$ y con ello $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

  - Si B_1 es elemento de $\{V \mid V \text{ es abierto en } X\}$ y B_2 es elemento del conjunto

    $$\{U \cup \{\mathcal{U}\} \mid U \in \mathcal{U} \text{ y } \mathcal{U} \in \kappa X \setminus X\}$$

    entonces $B_2 = U \cup \{\mathcal{U}\}$ para algunos $U \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$. Consideremos $x \in B_1 \cap (U \cup \{\mathcal{U}\})$. Notemos que es imposible que $x \in \{\mathcal{U}\}$ y así tenemos que $x \in U$. Sin embargo, como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro abierto entonces $B_1 \cap U$ es un elemento de $\{V \mid V \text{ es abierto en } X\}$ y por lo tanto, si hacemos $B_3 = B_1 \cap U$ entonces $x \in B_1 \cap U \subseteq B_1 \cap (U \cup \{\mathcal{U}\})$

  - Si $B_1 = U \cup \{\mathcal{U}\}$ y $B_2 = V \cup \{\mathcal{V}\}$ con $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$ además de que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son elementos de $\kappa X \setminus X$. Consideremos entonces un punto $x \in (U \cup \{\mathcal{U}\}) \cap (V \cup \{\mathcal{V}\})$. Esto nos da las siguientes posibilidades.

    - Si $x \in \{\mathcal{U}\}$ entonces necesariamente $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ ya que es imposible que x sea elemento de $\mathcal{U}$ y a la vez elemento de V o de U. Así, si hacemos $B_3 = U \cup \{\mathcal{U}\}$ entonces $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
    - Si $x \in U$ entonces es imposible que x sea elemento de $\{\mathcal{V}\}$ con lo cual $x \in V$. Así, $x \in U \cap V$ y como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son filtros abiertos entonces $U \cap V \in \mathcal{B}$ y por lo tanto, si hacemos $B_3 = U \cap V$, entonces tenemos que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

$\blacksquare$

Esto evidencia formalmente que la definición de κX es correcta. Sin embargo, lo más interesante de este espacio queda contenido en la siguiente proposición.

Proposición 3.20. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Entonces κX es un espacio H-cerrado Hausdorff en el cual X es denso y además abierto.*

Demostración. Primero, dado que X es elemento de $\mathcal{B}$ entonces X es abierto en κX. Ahora, para probar que κX es Hausdorff observemos los siguientes casos.

- Si $x \in X$ y $y \in X$ son tales que $x \neq y$ entonces, dado que X es Hausdorff, existen U y V abiertos ajenos de X tales que $x \in U$ y $y \in V$. Sin embargo, como $\{V \mid V \text{ es abierto en } X\} \subseteq \mathcal{B}$ entonces U y V son abiertos de κX.

- Si $x \in X$ y $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$ entonces, como $\mathcal{U}$ es libre
$$\bigcap \{\mathrm{cl}_X(U) \mid U \in \mathcal{U}\} = \emptyset.$$
Por lo tanto, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin \mathrm{cl}_X(U)$. Así, $x \in X \setminus \mathrm{cl}_X(U)$. Sean entonces U y $V = X \setminus \mathrm{cl}_X(U)$ los abiertos ajenos no vacíos de X que consideraremos. Estos componen a las vecindades abiertas y ajenas V y $U \cup \{\mathcal{U}\}$ de x y $\mathcal{U}$ respectivamente.

- Si ahora tomamos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos elementos distintos de $\kappa X \setminus X$ entonces, sin pérdida de generalidad, existe $U \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$. Afirmamos que existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Si no, entonces para todo $V \in \mathcal{V}$ se cumple que $U \cap V \neq \emptyset$, pero como $\mathcal{V}$ es un ultrafiltro entonces $U \in \mathcal{V}$ pero esto es imposible. Por lo tanto, sea $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \cap U = \emptyset$. Así, $U \cup \{\mathcal{U}\}$ y $V \cup \{\mathcal{V}\}$ son vecindades abiertas ajenas de U y V respectivamente.

Esto prueba que X es Hausdorff. Ahora, si tomamos un abierto básico U no vacío de κX tenemos dos posibilidades.

- Si U es abierto en X entonces $U \cap X = U \neq \emptyset$.

- Si $U = A \cup \{\mathcal{A}\}$ con $A \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \in \kappa X \setminus X$ entonces, dado que A es un abierto de X no vacío, entonces $U \cap X = A \neq \emptyset$.

De ambos casos podemos concluir que X es denso en κX y por tanto κX es un extensión de X.

Finalmente, nos resta probar que κX es H-cerrado. Gracias a la Proposición 3.2, en su apartado 4, entonces basta demostrar que cualquier ultrafiltro abierto en κX converge. Para probar esto, supongamos que existe $\mathcal{W}$ un ultrafiltro abierto en κX tal que $c_{\kappa X}(\mathcal{W}) = \emptyset$. Sin embargo, como $\mathcal{W}$ es un ultrafiltro entonces $c_{\kappa X}(\mathcal{W}) = a_{\kappa X}(\mathcal{W})$ y por tanto, $\mathcal{W}$ es un ultrafiltro abierto libre. Como X es denso en κX y los elementos de $\mathcal{W}$ son todos abiertos no vacíos, cualquier elemento de $\mathcal{W}$ tiene intersección no vacía con X, así, X es elemento de $\mathcal{W}$. Definamos ahora el conjunto

$$\mathcal{U} = \{W \cap X \mid W \in \mathcal{W}\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro abierto en X. Es claro que cada uno de sus elementos es un abierto en X. Resta probar que es un ultrafiltro. Primero, veamos que es un filtro.

- Claramente, como cada $W \in \mathcal{W}$ es un abierto no vacío y X es denso entonces $W \cap X$ es un abierto no vacío. Así, ningún elemento de $\mathcal{U}$ es vacío. Ahora, como $X \in \mathcal{W}$ entonces X mismo es elemento de $\mathcal{U}$.

- Sean $W_1 \cap X$ y $W_2 \cap X$ dos elementos de $\mathcal{U}$. Observemos que

  $$(W_1 \cap X) \cap (W_2 \cap X) = (W_1 \cap W_2) \cap X$$

  Y como $\mathcal{W}$ es un filtro entonces $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{W}$ y por lo tanto concluimos que $(W_1 \cap W_2) \cap X \in \mathcal{U}$.

- Sean $W \cap X$ un elemento de $\mathcal{U}$ y V un abierto de X tal que $W \cap X \subseteq V$. Probemos que V es elemento de $\mathcal{U}$. Notemos que $W \cap X$ es también elemento de $\mathcal{W}$ y como V es un abierto que lo contiene entonces $V \in \mathcal{W}$. Por lo tanto, $W \cap V = V \in \mathcal{U}$.

Para probar que es un ultrafiltro, simplemente tomemos un abierto A de X tal que para todo $U \in \mathcal{U}$ se cumple que $A \cap U \neq \emptyset$. Sin embargo, U es de la forma $W \cap X$ con $W \in \mathcal{W}$. En consecuencia, se cumple que $W \cap X \cap A = W \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, como $\mathcal{W}$ es un ultrafiltro abierto, entonces $A \in \mathcal{W}$ y por lo tanto, $A \cap X = A$ es elemento de $\mathcal{U}$. Esto prueba que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro abierto en X. Resta demostrar que $\mathcal{U}$ es libre pero esto es inmediato pues si existe $x \in \bigcap \{\mathrm{cl}_X (W \cap X) \mid W \in \mathcal{W}\}$ entonces, como

$$\mathrm{cl}_X (W \cap X) \subseteq \mathrm{cl}_{\kappa X} (W \cap X) \subseteq \mathrm{cl}_{\kappa X} (W)$$

entonces $x \in \bigcap \{\mathrm{cl}_{\kappa X}(W) \mid W \in \mathcal{W}\}$ con lo cual $\mathcal{W}$ no es libre, pero esto es imposible pues supusimos que $\mathcal{W}$ era un ultrafiltro abierto libre. Así, $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$.

Para finalizar, observemos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ y para cualquier elemento $U \in \mathcal{U}$ se cumple que $U \subseteq U \cup \{\mathcal{U}\}$ y como este último conjunto es abierto en κX entonces $U \cup \{\mathcal{U}\}$ es elemento de $\mathcal{W}$. Por lo tanto, las vecindades abiertas de $\mathcal{U}$ están contenidas en $\mathcal{W}$. Por lo tanto, $\mathcal{W}$ converge a $\mathcal{U}$. Esto contradice el hecho de que $\mathcal{W}$ sea un ultrafiltro libre. Por lo tanto, κX es un espacio H-cerrado. ■

Después de esta prueba, como observación tenemos lo siguiente.

Observación 3.21. *Notemos que el espacio $\kappa X \setminus X$ hereda la topología discreta. Para esto, simplemente veamos que si $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$ entonces, si tomamos un elemento $U \in \mathcal{U}$, se cumple que $U \cup \{\mathcal{U}\}$ es un abierto que tiene a $\mathcal{U}$ y $(U \cup \{\mathcal{U}\}) \cap (\kappa X \setminus X) = \{\mathcal{U}\}$.*

Para continuar nuestro estudio de los espacios débilmente Lindelöf, pensemos en la vía que seguimos para estudiar tanto a los espacios Lindelöf como a los espacios casi Lindelöf: entender el comportamiento de la propiedad estudiada en este capítulo con las principales operaciones topológicas. Sigamos este camino paso por paso para profundizar de forma adecuada en el estudio de la propiedad en cuestión. Primero, pensemos en el comportamiento al considerar subespacios topológicos. Si pensamos en los espacios Lindelöf, tal propiedad se hereda a cerrados y aunque en el caso de los casi Lindelöf la respuesta es negativa, ¿qué sucede con los débilmente Lindelöf? Analicemos con detalle el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.22. *Consideremos el espacio topológico $\kappa\mathbb{N}$. Gracias a lo enunciado en la Proposición 3.20, sabemos que $\kappa\mathbb{N}$ es un espacio H-cerrado y por lo tanto es un espacio débilmente Lindelöf. Observemos además que $\kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es un cerrado discreto según la Proposición 3.20 y la Observación 3.21.*

Un hecho bien conocido es que $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Además, según la construcción de la compactación de Stone-Čech realizada en [15], en el capítulo 6, los puntos de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ son simplemente los z-ultrafiltros libres en $\mathbb{N}$. El hecho de que $\mathbb{N}$ es discreto hace que cualquier z-ultrafiltro sea también un ultrafiltro *abierto. Por lo tanto, hay al menos $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltros libres y abiertos en $\mathbb{N}$. En consecuencia, $|\kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}| \geq 2^{2^{\aleph_0}}$ y así, $\kappa\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ es un espacio discreto con una cardinalidad infinita y por lo tanto no débilmente Lindelöf. Concluimos entonces que ser débilmente Lindelöf no se hereda a subconjuntos cerrados.*

Como podemos ver, ser débilmente Lindelöf no se hereda a subespacios cerrados. La pregunta natural es entonces pensar si se hereda a espacios abiertos. Sin embargo, la respuesta es negativa. La justificación queda contenida en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.23. *Consideremos X un conjunto no numerable (por ejemplo $X = \mathbb{R}$) equipado con la topología discreta. Así, X no es débilmente Lindelöf. Sin embargo, X es Hausdorff y por tanto podemos considerar κX su extensión de Katetov. Como sabemos, κX es un espacio débilmente Lindelöf y X es un subconjunto abierto de κX. Además, la topología de subespacio que hereda X de κX es la misma con la que ya estaba equipado X por definición. Por lo tanto, κX es un espacio débilmente Lindelöf pero X es un subespacio abierto de κX no débilmente Lindelöf.*

Entonces, según el Ejemplo 3.23, hemos visto que ser débilmente Lindelöf tampoco se hereda a subespacios abiertos. ¿A qué clase de subconjuntos se hereda? O mejor aún, ¿tan siquiera se hereda a algún subespacio propio? Como podemos ver, mientras más se debilitan las propiedades, su comportamiento se vuelve más errático y difícil de predecir. No es tan claro ni inmediato observar qué propiedades aún se preservan y cuáles definitivamente se han perdido. Para continuar esta parte del estudio, necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.24. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es un cerrado regular si $A = cl_X\left(int_X\left(A\right)\right)$.*

Como se debe intuir, la razón de haber definido a los cerrados regulares es porque ser débilmente Lindelöf sí se hereda a tal clase de conjuntos, y en efecto, es cierto. Observemos la prueba.

Proposición 3.25. *Sea X un espacio topológico débilmente Lindelöf. Entonces cualquier subconjunto cerrado regular de X es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Sea $F \subseteq X$ un cerrado regular y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de F formada por abiertos de X. Como F es un cerrado regular entonces $X \setminus F$

es un abierto de X y por tanto $\mathscr{U} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es débilmente Lindelöf entonces existe una subcolección numerable $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ tal que

$$\mathrm{cl}_X \left(\left(\bigcup \mathscr{U}_0 \right) \cup (X \setminus F) \right) = X. \tag{3.9}$$

Observemos que $\mathrm{int}_X (F) \cap \mathrm{cl}_X (X \setminus F) = \emptyset$ debido a que si existiera un punto $x \in \mathrm{int}_X (F) \cap \mathrm{cl}_X (X \setminus F)$ entonces, primero, existe V_0 una vecindad de x tal que $x \in V_0 \subseteq F$ y después, para toda vecindad V de x se cumple que $V \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$, pero estas dos condiciones no pueden suceder a la vez. Por lo tanto, en efecto, $\mathrm{int}_X (F) \cap \mathrm{cl}_X (X \setminus F) = \emptyset$. De esta manera entonces podemos concluir, gracias a la Ecuación 3.9, que

$$\mathrm{int}_X (F) \subseteq \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \mathscr{U}_0 \right).$$

Por la monotonía de la cerradura y del hecho de que F es un cerrado regular se concluye entonces que

$$F = \mathrm{cl}_X (\mathrm{int}_X (F)) \subseteq \mathrm{cl}_X \left(\mathrm{cl}_X \left(\bigcup \mathscr{U}_0 \right) \right) = \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \mathscr{U}_0 \right).$$

Esto prueba que F es débilmente Lindelöf. ■

Entonces, de forma inmediata, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.26. *Sean X un espacio topológico débilmente Lindelöf y B un subconjunto abierto y cerrado de X. Entonces B es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Simplemente notemos que como B es abierto y cerrado entonces $B = \mathrm{cl}_X (\mathrm{int}_X (B))$, es decir, B es un cerrado regular. Entonces, por la Proposición 3.25, concluimos que B es débilmente Lindelöf. ■

Estos resultados, de cierta forma, restringen mucho el comportamiento de los espacios débilmente Lindelöf pues preservar tal propiedad es más complicado y conlleva exigir más condiciones a la estructura topológica del espacio en cuestión. Continuemos entonces analizando el comportamiento de la propiedad que nombra a este capítulo. Un resultado que se intuye y que en realidad es clásico es el siguiente.

Proposición 3.27. *Sean X un espacio débilmente Lindelöf, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de Y. Por la continuidad de f entonces $\mathcal{V} = \{f^{-1}[U] \mid U \in \mathscr{U}\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es débilmente Lindelöf entonces existe $\mathcal{V}_0$ un subconjunto numerable de $\mathcal{V}$ tal que $\mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathcal{V}_0\right) = X$. En consecuencia, afirmamos que

$$\mathscr{U}_0 = \left\{U \mid f^{-1}[U] \in \mathcal{V}_0\right\}$$

es la subcolección buscada. Notemos que es numerable pues $\mathcal{V}_0$ lo es. Pero además,

$$f\left[\mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathcal{V}_0\right)\right] = Y$$

pues f es suprayectiva, pero además, por la continuidad de f, obtenemos que

$$Y = f\left[\mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathcal{V}_0\right)\right] \subseteq \mathrm{cl}_Y\left(f\left[\bigcup \mathcal{V}_0\right]\right) = \mathrm{cl}_Y\left(f\left[\bigcup_{f^{-1}[U]\in\mathcal{V}_0} f^{-1}[U]\right]\right).$$

Notemos además que

$$\mathrm{cl}_Y\left(f\left[\bigcup_{f^{-1}[U]\in\mathcal{V}_0} f^{-1}[U]\right]\right) = \mathrm{cl}_Y\left(\bigcup_{f^{-1}[U]\in\mathcal{V}_0} f\left[f^{-1}[U]\right]\right)$$

y por la suprayectividad de f entonces

$$\mathrm{cl}_Y\left(\bigcup_{f^{-1}[U]\in\mathcal{V}_0} f\left[f^{-1}[U]\right]\right) = \mathrm{cl}_Y\left(\bigcup_{f^{-1}[U]\in\mathcal{V}_0} U\right) = \mathrm{cl}_Y\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right) \subseteq Y.$$

Por lo tanto, Y es débilmente Lindelöf. ■

De forma natural entonces obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.28. *Si X es un espacio débilmente Lindelöf y Y es cociente de X entonces Y es débilmente Lindelöf*

Demostración. Los cocientes son imágenes continuas. Por lo tanto, el resultado se sigue de la 3.27. ■

Después de mostrar que el comportamiento entre espacios débilmente Lindelöf y funciones continuas es el esperado, ¿qué más podemos decir acerca de esto? ¿Podemos debilitar algunas condiciones? Recordemos que en la Proposición 1.16 probamos que las preimágenes bajo funciones perfectas y suprayectivas de espacios Lindelöf también resultan espacios Lindelöf. ¿Ocurrirá lo mismo con los espacios débilmente Lindelöf? Observemos la respuesta en el ejemplo que viene a continuación.

Ejemplo 3.29. *Consideremos X como el espacio topológico definido en el Ejemplo 2.3. En tal ejemplo, probamos que X es casi Lindelöf y Hausdroff. Con ello entonces es débilmente Lindelöf. Tomemos entonces $f : A(X) \to X$ la función definida como $f(x, y) = x$. Seguiremos la notación usada en el Ejemplo 2.3.*

Para continuar, recordemos del Ejemplo 2.3 que A es un cerrado que hereda la topología discreta. Ahora bien, notemos que $A \times \{1\}$ es un abierto en $A(X)$ pues cada punto de $X \times \{1\}$ es abierto. La última afirmación es que $A \times \{1\}$ es cerrado en $A(X)$. Para esto, consideremos un punto z elemento de $A(X) \setminus (A \times \{1\})$.

- *Si z es de la forma $(x, 0)$ con $x \in A$ entonces, como A hereda la topología discreta en X, existe U un abierto de X tal que $U \cap A = \{x\}$. De esta manera, el abierto $(U \times \{x, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}$ está contenido en $A(X) \setminus (A \times \{1\})$ y es vecindad de $(x, 0)$.*

- *Si ahora z es de la forma $(x, 1)$ con $x \in X \setminus A$ entonces $\{(x, 1)\}$ es una vecindad contenida en $A(X) \setminus (A \times \{1\})$.*

- *Finalmente, si z es de la forma $(x, 0)$ con $x \in X \setminus A$ entonces, como A es cerrado en X, existe W un abierto de X tal que $x \in W \subseteq W \setminus A$. Por lo tanto, el abierto*

  $$(W \times \{0, 1\}) \setminus \{(x, 1)\}$$

  es una vecindad de $(x, 0)$ contenida en $A(X) \setminus (A \times \{1\})$.

Por lo tanto, $A \times \{1\}$ es un abierto y cerrado de $A(X)$ y discreto, pero además, dado que A es no numerable, entonces $A \times \{1\}$ es no numerable. Así, $A(X)$ no puede ser débilmente Lindelöf pues de serlo, $A \times \{1\}$, por ser abierto cerrado, heredaría la propiedad, pero esto es imposible.

Para terminar el ejemplo, observemos que por el Lema 3.16, la función f es perfecta. Pero aún podemos decir más. Si tomamos U un abierto de X entonces $f^{-1}[U] = U \times \{0,1\}$ es también un abierto por lo demostrado en la Proposición 3.17, en 4) $\Rightarrow$ 1). Así, f es una función continua, perfecta y suprayectiva. Además, X es débilmente Lindelöf pero $A(X)$ no lo es. Entonces esto nos da una ejemplo de que la propiedad de ser débilmente Lindelöf no se preserva bajo preimágenes continuas y cerradas. En consecuencia, no podemos tener un resultado análogo al establecido en la Proposición 1.16.

Esto nos ejemplifica que a pesar de lo débil que luce la propiedad de ser débilmente Lindelöf, conserva algunas de las propiedades similares a las que tienen los espacios Lindelöf. De hecho, pensando precisamente en el estudio de los espacios Lindelöf nos surge la pregunta acerca de la relación entre los axiomas de separación y el ser débilmente Lindelöf. De hecho, por el Ejemplo 3.14 podemos observar que $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ es un espacio débilmente Lindelöf además de Tychonoff. Sin embargo, $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ no es normal ni mucho menos casi Lindelöf y por tanto no Lindelöf. Así que, en este caso, no aumentó la separación ni tampoco su comportamiento respecto a las propiedades tipo Lindelöf. ¿Puede pasar esto bajo ciertas condiciones? La respuesta es afirmativa, aunque para ello, necesitamos desarrollar, de forma breve, una nueva clase de espacios. Comencemos pues con la definición.

Definición 3.30. *Sea X un espacio topológico. Decimos que $A \subseteq X$ es un conjunto G_δ si $A = \bigcap \{U_n \mid n \in \omega\}$ donde cada U_n es un abierto de X.*

Así, podemos entonces enunciar lo siguiente.

Definición 3.31. *Decimos que X es un P-espacio si cualquier G_δ es un subconjunto abierto de X (y por tanto, cualquier subconjunto F_σ es un cerrado de X).*

En general, la intersección numerable de conjuntos abiertos no es un conjunto abierto. Como ejemplo, tomemos para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ los abiertos $U_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ en $\mathbb{R}$ con la topología euclidiana. Notemos entonces que $\bigcap \{U_n \mid n \in \omega \setminus \{0\}\} = \{0\}$ y $\{0\}$ no es un abierto en $\mathbb{R}$.
Un ejemplo de un P-espacio es cualquier conjunto equipado con la topología discreta, aunque no todo P-espacio es discreto. Tal ejemplo existe aunque no lo estudiaremos, pues su presentación se desvía de los objetivos de este trabajo. Sin embargo, puede ser encontrado en [15] en 4N.
Ahora, prosigamos con la siguiente definición.

Definición 3.32. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{A}$ es una familia localmente numerable si para cada $x \in X$ existe una vecindad V_x tal que $x \in V_x \subseteq X$ y además se cumple que $|\{D \in \mathcal{A} \mid D \cap V_x \neq \emptyset\}| \leq \aleph_0$*

Con todas las definiciones necesarias, pasemos a probar el siguiente lema que antecede al resultado buscado.

Lema 3.33. *Sean X un P-espacio y $\mathcal{A}$ una familia localmente numerable de subconjuntos de X. Entonces se cumple que*

$$cl_X\left(\bigcup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}\right) = \bigcup\{cl_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Demostración. Procedamos, como siempre, por doble contención. Afirmamos que $\bigcup\{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ es un cerrado de X. Sea $x \in X \setminus \bigcup\{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$. Como $\mathcal{A}$ es una familia localmente numerable entonces sea V_x la vecindad abierta[3] de x que cumple que

$$|\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V_x \neq \emptyset\}| \leq \aleph_0.$$

Consideremos $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V_x \neq \emptyset\}$. Como $x \in X \setminus \bigcup\{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ entonces para toda $A \in \mathcal{V}$ se cumple que $x \notin A$ pero además, $x \notin \mathrm{cl}_X(A)$. Entonces, para cada $A \in \mathcal{A}$ tomemos un abierto $U_{A,x}$ tal que cumpla que $x \in U_{A,x} \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X(A)$. Así, la colección de abiertos $\{U_{A,x} \mid A \in \mathcal{V}\}$ es numerable pues $\mathcal{V}$ lo es y además, como X es un P-espacio, entonces el conjunto V definido como

$$V = \left(\bigcap_{A \in \mathcal{V}} U_{A,x}\right) \cap V_x$$

es un abierto no vacío. Sin embargo, notemos que $V \subseteq X \setminus \bigcup\{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$. Por lo tanto, $\bigcup\{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ es un cerrado. Así, como

$$\bigcup\{A \mid A \in \mathcal{A}\} \subseteq \bigcup\{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

entonces

$$\mathrm{cl}_X\left(\bigcup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}\right) \subseteq \mathrm{cl}_X\left(\bigcup\{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}\right) = \bigcup\{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

[3] Aunque en la definición no pidamos la vecindad abierta, podemos considerarla abierta al tomar su interior. Esto no afecta las condiciones que cumple.

Para la contención restante, tomemos un punto $y \in \bigcup \{\mathrm{cl}_X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$. Entonces esto nos dice que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $y \in \mathrm{cl}_X(A)$. Queremos probar que $y \in \mathrm{cl}_X(\bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\})$. Para esto, tomemos U_y una vecindad arbitraria de y. Como $y \in \mathrm{cl}_X(A)$ entonces $U_y \cap A \neq \emptyset$ y en consecuencia

$$\emptyset \neq U_y \cap A \subseteq U_y \cap \left(\bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\}\right)$$

Concluimos entonces que $y \in \mathrm{cl}_X(\bigcup \{A \mid A \in \mathcal{A}\})$ ■

Con el lema demostrado, observemos el tan esperado resultado.

Proposición 3.34. *Sea X un P-espacio que además es T_3 y débilmente Lindelöf. Entonces X es Lindelöf y T_4.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es regular entonces para cada $x \in X$ tomemos $U_x \in \mathscr{U}$ y W_x un abierto tal que se cumple que $x \in W_x \subseteq \mathrm{cl}_X(W_x) \subseteq U_x$. Esto nos dice entonces que la colección $\{W_x \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es débilmente Lindelöf entonces existe $X_0 \subseteq X$ tal que X_0 es numerable y además

$$\mathrm{cl}_X\left(\bigcup \{W_x \mid x \in X_0\}\right) = X.$$

Sin embargo, observemos que la familia $\{W_x \mid x \in X_0\}$ es localmente numerable, pues, de hecho, es numerable. Por lo tanto, como X es un P-espacio entonces, por el Lema 3.33, se tiene que

$$X = \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \{W_x \mid x \in X_0\}\right) = \bigcup \{\mathrm{cl}_X(W_x) \mid x \in X_0\}.$$

Además, como para toda $x \in X_0$ sucede que $\mathrm{cl}_X(W_x) \subseteq U_x$ entonces

$$X = \bigcup \{\mathrm{cl}_X(W_x) \mid x \in X_0\} \subseteq \bigcup \{U_x \mid x \in X_0\} \subseteq X.$$

Por lo tanto, $\{U_x \mid x \in X_0\}$ es la subcubierta numerable buscada. En consecuencia X es Lindelöf y como X es regular, gracias a la Proposición 1.20, concluimos que X es normal. ■

Como observación a la Proposición 3.34, notemos que con esas hipótesis entonces el espacio X es también casi Lindelöf. Entonces tenemos condiciones bajo las cuales los tres conceptos estudiados hasta ahora son equivalentes.

Como preámbulo para estudiar el producto topológico y su relación con la propiedad débilmente Lindelöf, nos resta estudiar la suma topológica siguiente la línea de estudio que hemos trazado en las dos propiedades anteriores. Tenemos pues el siguiente resultado.

Proposición 3.35. *La suma topológica $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es débilmente Lindelöf si y solo si cada X_α es débilmente Lindelöf y además $|J| \leq \aleph_0$.*

Demostración. Para la primera implicación supongamos que $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es débilmente Lindelöf. Como ser débilmente Lindelöf se hereda a subconjuntos cerrados abiertos y cada X_α es un cerrado abierto en la suma entonces cada X_α es débilmente Lindelöf. Ahora, supongamos que $|J| > \aleph_0$. Como los X_α son ajenos dos a dos y cada uno es abierto entonces la colección

$$\mathscr{U} = \{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

es una cubierta abierta tal que $|\mathscr{U}| = |J| > \aleph_0$. Tomemos $J_0 \subseteq J$ numerable. Así, este subconjunto nos induce la colección numerable

$$\mathscr{U}_0 = \{X_\alpha \mid \alpha \in J_0\} \subseteq \mathscr{U}$$

pero además, como todos los X_α son ajenos dos a dos entones $\mathscr{U}_0$ resulta ser una familia localmente finita y por lo tanto, como cada X_α también es cerrado obtenemos que

$$\mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup_{\alpha\in J_0} X_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in J_0} \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}(X_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in J_0} X_\alpha$$

y como supusimos que $|J| > \aleph_0$ entonces

$$\mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup_{\alpha\in J_0} X_\alpha\right) \subsetneq \bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha.$$

En consecuencia, $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ que atestigua que tal espacio no es débilmente Lindelöf.

Para la implicación restante, sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ que también es cubierta de cada X_α y como por hipótesis cada X_α es débilmente

Lindelöf entonces existe $\mathscr{U}_{0,\alpha} \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $X_\alpha \subseteq \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}(\bigcup \mathscr{U}_{0,\alpha})$. Por lo tanto, $\mathscr{U}_0 = \bigcup_{\alpha\in J} \mathscr{U}_{0,\alpha} \subseteq \mathscr{U}$, dado que $|J| \leq \aleph_0$, es una subcolección numerable de $\mathscr{U}$ y además cumple que

$$\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J} X_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in J} \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup \mathscr{U}_{\alpha,0}\right) \subseteq \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup_{\alpha\in J}\left(\bigcup \mathscr{U}_{\alpha,0}\right)\right).$$

Finalmente, como

$$\mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup_{\alpha\in J}\left(\bigcup \mathscr{U}_{\alpha,0}\right)\right) = \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)$$

concluimos que $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es débilmente Lindelöf. ■

De manera natural,la Proposición 3.35 nos encamina a pensar en el producto de espacios débilmente Lindelöf con el siguiente corolario.

Corolario 3.36. *Si X es débilmente Lindelöf y D es un espacio discreto y tal que $|D| \leq \aleph_0$ entonces $X \times D$ es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Notemos que como D es numerable, sin importar la topología con la que esté equipado, es un espacio débilmente Lindelöf. Algo que debemos notar es que

$$X \times D = \bigoplus_{d\in D} X \times \{d\}$$

y para todo $d \in D$ se cumple que $X \times \{d\}$ es débilmente Lindelöf. En consecuencia, gracias a la Proposición 3.35, tenemos el resultado deseado. ■

Como es de esperarse, no es tan sencillo predecir los resultados del comportamiento del producto topológico con la propiedad débilmente Lindelöf. Observemos primero que, como sucede casi siempre, si tomamos una colección de espacios débilmente Lindelöf compactos entonces su producto también resultará ser compacto y débilmente Lindelöf. Sin embargo, es una situación demasiado trivial pues pedir compacidad es muy exigente. ¿Cómo podemos debilitar esto? Un primer ejemplo lo observaremos en la siguiente proposición, no sin antes enunciar un lema que requerimos.

Lema 3.37. *Sea X un espacio topológico. Si existe $D \subseteq X$ tal que es denso y débilmente Lindelöf entonces X es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Sean D subconjunto denso y débilmente Lindelöf y una cubierta abierta $\mathscr{U}$ de X. Como D es débilmente Lindelöf y $\mathscr{U}$ también cubre a D entonces existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $D \subseteq \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)$ de donde entonces $X = \mathrm{cl}_X(D) \subseteq \mathrm{cl}_X\left(\mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)\right) = \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)$. Por lo tanto, X es débilmente Lindelöf. ■

Esto nos encamina para demostrar lo siguiente.

Proposición 3.38. *Sean X un espacio débilmente Lindelöf y Y un espacio separable. Entonces $X \times Y$ es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Sea $D \subseteq Y$ un denso numerable de Y. Probemos que $X \times D$ es débilmente Lindelöf. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de $X \times D$ formada por abiertos de $X \times Y$. Sea $A_n = X \times \{d_n\}$ con $d_n \in D$. Entonces

$$X \times D = \bigcup \{A_n \mid n \in \omega\}$$

con cada A_n débilmente Lindelöf pues $X \times \{d\}$ es homeomorfo a X. Así, $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta para cada A_n y entonces existe $\mathscr{U}_n$ una subcolección numerable tal que

$$A_n \subseteq \mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \mathscr{U}_n\right).$$

Por lo tanto, $\mathscr{B} = \bigcup \{\mathscr{U}_n \mid n \in \omega\}$ es una subcolección numerable de $\mathscr{U}$ tal que cumple que

$$X \times D = \bigcup \{A_n \mid n \in \omega\} \subseteq \bigcup \left\{\mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \mathscr{U}_n\right) \mid n \in \omega\right\}.$$

Pero observemos que

$$\bigcup \left\{\mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \mathscr{U}_n\right) \mid n \in \omega\right\} \subseteq \mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \left\{\bigcup \mathscr{U}_n \mid n \in \omega\right\}\right).$$

Finalmente, se puede notar que

$$\mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \left\{\bigcup \mathscr{U}_n \mid n \in \omega\right\}\right) = \mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \mathscr{B}\right).$$

Entonces $X \times D$ es débilmente Lindelöf y además, denso en $X \times Y$, con lo cual, por el Lema 3.37, concluimos que $X \times Y$ es débilmente Lindelöf. ■

Tenemos entonces un primer resultado acerca del producto de espacios débilmente Lindelöf. En este punto, tenemos que recordar una clase de espacios que fue vital para el desarrollo de la teoría de este capítulo. Sí, nos referimos a los espacios H-cerrados. Estos nos otorgarán una prueba un poco más general relacionada con el producto de espacios débilmente Lindelöf. Para ella, necesitamos primero un pequeño lema.

Lema 3.39. *Sean X un espacio H-cerrado y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es H-cerrado.*

Demostración. Una pequeña modificación de la Proposición 3.27 nos otorga la prueba de este resultado. ■

Enunciemos el resultado del que hablamos. Este es más general en el sentido de que asegura que el producto de una cantidad arbitraria de espacios débilmente Lindelöf resultará débilmente Lindelöf y sin que los espacios sean compactos.[4]

Proposición 3.40. *Sea $\{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una colección no vacía de espacios topológicos no vacíos. Entonces cada X_α es H-cerrado si y solo si el producto topológico $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es H-cerrado.*

Demostración. Notemos que si $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es H-cerrado entonces, dado $\alpha \in J$ se tiene que la proyección $\Pi_{X_\alpha} : \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in J\} \to X_\alpha$ es una función continua y suprayectiva. Por lo tanto, según el Lema 3.39, X_α es un espacio H-cerrado. Esto prueba una implicación.

Para la implicación restante, supongamos que cada X_α es H-cerrado. Según lo demostrado en la Proposición 3.2, basta probar que cualquier ultrafiltro abierto en $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ converge. Justo esta será la técnica a seguir. Sea pues $\mathcal{U}$ un ultrafiltro abierto en $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Como Π_α es una función continua, suprayectiva y abierta entonces $\{\Pi_\alpha[U] \mid U \in \mathcal{U}\}$ es un filtro abierto en X_α.

Para probar que $\{\Pi_\alpha[U] \mid U \in \mathcal{U}\} = \Pi_\alpha[\mathscr{U}]$ es un ultrafiltro abierto en X_α, sea W un abierto de X_α tal que para toda $U \in \mathcal{U}$ se cumple que

[4] De hecho, como simple observación, aunque los espacios compactos hayan sido una de las razones de la definición de los espacios H-cerrados, no todo H-cerrado es compacto. Un ejemplo de esto puede ser encontrado en [22], en el capítulo 4, ejemplo 4.8(d).

$W \cap \Pi_\alpha[U] \neq \emptyset$. De esta manera, $\Pi_\alpha^{-1}[W] \cap U \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathcal{U}$. Así, como $\mathcal{U}$ es un ultraflitro abierto y Π_α es continua además de que W es abierto, se tine que $\Pi_\alpha^{-1}[W] \in \mathcal{U}$. En consecuencia, $\Pi_\alpha\left[\Pi_\alpha^{-1}[W]\right] = W \in \Pi_\alpha[\mathcal{U}]$. Concluimos entonces que $\Pi_\alpha[\mathcal{U}]$ es un ultrafiltro abierto y como X_α es un espacio H-cerrado entonces $\Pi_\alpha[\mathcal{U}]$ converge a algún punto x_α elemento de X_α. Entonces, finalmente, $\mathcal{U}$ converge a $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$. Con ello, concluimos que $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es un espacio H-cerrado. ■

Por lo tanto, si tenemos una colección arbitraria de espacios H-cerrados, entonces su producto será un espacio débilmente Lindelöf.
Otro resultado concerniente al producto es el siguiente.

Proposición 3.41. *Sean X un espacio débilmente Lindelöf y Y un espacio métrico compacto. Entonces $X \times Y$ es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Sabemos que cualquier espacio métrico compacto es separable. Por lo tanto, según la Proposición 3.38, $X \times Y$ es un espacio débilmente Lindelöf. ■

De hecho, esta proposición, aunque trivial quizá, es el preludio de la forma más general de ella. Antes, necesitamos un lema muy famoso y conocido.

Lema 3.42. *Sean X un espacio topológico y Y un espacio compacto. Para cada $x \in X$ y para cada abierto U de $X \times Y$ tales que $\{x\} \times Y \subseteq U$ existe un abierto $O \subseteq X$ tal que $\{x\} \times Y \subseteq O \times Y \subseteq U$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y U un abierto de $X \times Y$ tales que $\{x\} \times Y \subseteq Y$. Para cada $y \in Y$ tomemos dos abiertos $A_y \subseteq X$ y $B_y \subseteq Y$ tales que se cumple que $(x, y) \in A_y \times B_y \subseteq U$. Como Y es compacto, existe $Y_0 \subseteq Y$ tal que Y_0 es finito y además $Y = \bigcup\{B_y \mid y \in Y_0\}$. Definamos $O = \bigcap\{A_y \mid y \in Y_0\}$. Entonces O es un abierto y además $\{x\} \times Y \subseteq O \times Y \subseteq U$ ■

Entonces ahora sí podemos enunciar el resultado. Es el siguiente.

Proposición 3.43. *Sean X un espacio débilmente Lindelöf y Y un espacio compacto. Entonces $X \times Y$ es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de $X \times Y$. Para cada $x \in X$, como $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y entonces existe $\mathscr{U}_x$ un subconjunto finito de $\mathscr{U}$ tal que cubre a $\{x\} \times Y$. Por el Lema 3.42 tenemos que existe un abierto $O_x \subseteq X$ tal que

$$\{x\} \times Y \subseteq O_x \times Y \subseteq \bigcup \mathscr{U}_x.$$

De esta manera, $\{O_x \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es débilmente Lindelöf, existe $A \subseteq X$ tal que A es numerable y además

$$X = \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \{O_x \mid x \in A\} \right).$$

Sea $\mathscr{U}_A = \bigcup \{\mathscr{U}_x \mid x \in A\}$. Notemos que $\mathscr{U}_A$ es una subcolección numerable de $\mathscr{U}$. Además, observemos que el conjunto $\bigcup \{O_x \times Y \mid x \in A\}$ es denso en $X \times Y$. Esto pues si tomamos W un abierto no vacío de $X \times Y$ entonces, dado $(a, b) \in W$, existe $x \in A$ tal que $a \in O_x$ y de esta manera, $(a, b) \in O_x \times Y$. Por lo tanto, como

$$O_x \times Y \subseteq \bigcup \mathscr{U}_x$$

entonces

$$\bigcup \{O_x \times Y \mid x \in A\} \subseteq \bigcup \left\{ \bigcup \mathscr{U}_x \mid x \in A \right\}$$

y por la densidad de $\bigcup \{O_x \times Y \mid x \in A\}$ en $X \times Y$ concluimos que

$$X = \mathrm{cl}_{X \times Y} \left(\bigcup \{O_x \times Y \mid x \in A\} \right) \subseteq \mathrm{cl}_{X \times Y} \left(\bigcup \left\{ \bigcup \mathscr{U}_x \mid x \in A \right\} \right) \subseteq X$$

Esto prueba que $X \times Y$ es débilmente Lindelöf. ■

Como tal, hasta ahora, hemos obtenido solamente resultados positivos para el producto de espacios débilmente Lindelöf. Desafortunadamente, no todo es tan sencillo como parece. Precisamente para cerrar este capítulo mostraremos un ejemplo en donde el producto de dos espacios débilmente Lindelöf no resulta débilmente Lindelöf. La exposición de tal ejemplo es relativamente sencilla pero para ello necesitamos antes ciertas definiciones y algo de teoría relativa a órdenes. Revisemos con cuidado entonces cada una de las cosas necesarias.

Definición 3.44. *Un conjunto X con una relación binaria $\leq$ es un conjunto linealmente ordenado si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, es decir, $\leq$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, y además para cualesquiera a y b en X se cumple que $a \leq b$ o $b \leq a$.*

Como convención, entenderemos que $a < b$ significa que $a \leq b$ y $a \neq b$. Con esto en mente entonces tenemos las siguientes definiciones.

Definición 3.45. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado*

i) Decimos que el orden $\leq$ es denso si para cualesquiera a y b elementos de X tales que $a < b$ existe $c \in X$ tal que $x < c < y$.

ii) Decimos que $A \subseteq X$ está acotado superiormente (inferiormente) si existe $b \in X$ tal que para todo $a \in A$ se cumple que $a \leq b$ ($b \leq a$)

iii) Decimos que $\leq$ es un orden lineal Dedekind completo si para todo subconjunto A de X no vacío tal que A está acotado superiormente, entonces $\sup(A)$ existe.

iv) Dados a y b elementos de X, definimos.

- $(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in X \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\}$
- $[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$
- $(\leftarrow, b] = \{x \in X \mid x \leq b\}$
- $(\leftarrow, b) = \{x \in X \mid x < b\}$
- $[a, \rightarrow) = \{x \in X \mid a \leq x\}$
- $(a, \rightarrow) = \{x \in X \mid a < x\}$

Finalmente, observemos la última definición necesaria para poder comenzar el desarrollo del ejemplo.

Definición 3.46. *Sea X un espacio linealmente ordenado. Denotaremos por X^+ al espacio topológico (X, τ_+) donde τ_+ es la topología que lleva por base a $\mathcal{B}_+ = \{[x, y) \mid x, y \in X\} \cup \{[c, \rightarrow) \mid c \in X\}$. Además, denotaremos por X^- al espacio topológico (X, τ_-) donde τ_- es la topología que lleva por base a $\mathcal{B}_- = \{(x, y] \mid x, y \in X\} \cup \{(\leftarrow, c] \mid c \in X\}$*

Con todo esto en mente, observemos la siguiente proposición.

Proposición 3.47. *Sea $(X, \preceq)$ un espacio linealmente ordenado con extremos, Dedekind completo y que no contiene sucesiones estrictamente crecientes de tamaño ω_1. Entonces el espacio X^+ es Lindelöf.*

Demostración. Como X tiene extremos, entonces existen $\text{máx}(X)$ y $\text{mín}(X)$ tales que $X = [\text{mín}(X), \text{máx}(X)]$. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X^+ formada por abiertos básicos de la forma $[x, y)$ y $[c, \text{máx}(X)]$. De esta manera entonces definamos

$$D = \left\{ d \in X \mid \text{Existe } \mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U} \text{ numerable tal que } [\text{mín}(X), d] \subseteq \bigcup \mathscr{U}_0 \right\}.$$

Notemos que $D \neq \emptyset$ pues $[\text{mín}(X), \text{mín}(X)] = \{\text{mín}(X)\}$ que evidentemente puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$ y así $\text{mín}(X) \in D$. Dado que D es un subconjunto no vacío y acotado superiormente ($\text{máx}(X)$ es una cota superior) entonces existe $\sup(D)$. Sea $c = \sup(D)$. Probemos que $c = \text{máx}(X)$.
Primero, afirmamos que $[\text{mín}(X), c]$ puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$. Si $c = \text{mín}(X)$ entonces es inmediato pues nuevamente el conjunto resultante es únicamente un punto. Si ahora $\text{mín}(X) \prec c$ entonces tenemos dos casos.

- Si c tiene un predecesor inmediato, es decir, existe $c_1 \in X$ tal que $c_1 \prec c$ y $c_1 \neq c$ y además $(c_1, c) = \emptyset$, como $c = \sup(D)$ tenemos que $c_1 \in D$ pues de no estarlo sería una cota superior más pequeña que c lo cual es imposible. Observemos además que también es imposible que $c_1 \prec \text{mín}(X)$. Por lo tanto, $\text{mín}(X) \preceq c_1$ y de esta manera, como $c_1 \in D$ entonces $[\text{mín}(X), c_1]$ es cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$ y como $[\text{mín}(X), c] = [\text{mín}(X), c_1] \cup \{c\}$ entonces también $[\text{mín}(X), c]$ es cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$ (en el peor de los casos simplemente basta agregar un abierto que tenga como elemento a c).

- $c = \sup(D)$ no tiene un predecesor inmediato. Consideremos entonces λ un número cardinal tal que $\lambda \leq |X|$. Con esto construiremos una sucesión estrictamente creciente $\{c_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ donde $c_\alpha \prec c$ para toda $\alpha < \lambda$ de la siguiente forma.

  1. Sea $c_0 = \text{mín}(X)$
  2. Si tenemos a c_n construido y es tal que $c_n \prec c$, como c no tiene predecesor inmediato, entonces existe $c_{n+1} \in (c_n, c)$. Por lo tanto, c_{n+1} es el siguiente en la sucesión.
  3. Supongamos que tenemos construida la sucesión $\{c_\alpha \mid \alpha < \alpha_0\}$ tal que $c_\alpha \prec c$ para toda $\alpha < \alpha_0$ donde α_0 es un ordinal límite. De esta manera, como $\{c_\alpha \mid \alpha < \alpha_0\}$ está acotada por c, sea

$c_{\alpha_0} = \sup \{c_\alpha \mid \alpha < \alpha_0\}$. Tal supremo está bien definido y además se cumple que $c_{\alpha_0} \preceq c$

Observemos que si $c_{\alpha_0} = c$ entonces la construcción ha terminado. De otra forma, si $c_{\alpha_0} \prec c$ podemos seguir con la inducción hasta λ en el peor de los casos. Sin embargo, a pesar de continuar la inducción, este proceso debe parar en algún ordinal numerable α^* pues por la hipótesis, X no contiene sucesiones estrictamente crecientes de tamaño ω_1. De hecho, de forma general, cuando c no tiene un predecesor inmediato, podemos construir $\{c_n \mid n \in \omega\}$ tal que para toda $n \in \omega$ se cumple que $c_n \prec c$ y si $\min(X) \prec e \prec$ entonces existe una $n \in \omega$ tal que $e \preceq c_n$. Notemos que el hecho de que $c_n \prec c$ implica que $c_n \in D$ pues de otra forma, c_n sería una cota superior más pequeña que c. Sin embargo, observemos que

$$[\min(X), c) = \bigcup_{n \in \omega} [\min(X), c_n)$$

y como cada intervalo de la forma $[\min(X), c_n)$ puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$, al ser $[\min(X), c)$ una unión numerable de estos intervalos también puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$. Por lo tanto como

$$[\min(X), c] = [\min(X), c) \cup \{c\}$$

entonces $[\min(X), c]$ también puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$. Concluimos que $c \in D$.

Finalmente, si $c = \max(X)$ habremos acabado. Supongamos ahora que $c \prec \max(X)$. Tenemos los siguientes casos.

- c tiene un sucesor inmediato que llamaremos c'. De esta forma, como $[\min(X), c]$ puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$ entonces $[\min(X), c] \cup \{c'\}$ y por lo tanto $c' \in D$ y $\sup(D) = c \prec c'$. Esto es una contradicción.

- c no tiene un sucesor inmediato. Como c es cubierto por algún abierto de la forma $[x, y) \in \mathscr{U}$ entonces existe $c' \in [x, y)$ tal que $c \prec c'$. Consideremos entonces el conjunto $[\min(X), c'] = [\min(X), c] \cup [c, c']$. Sabemos que $[\min(X), c]$ puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$ y a su vez, como $\{c, c'\} \subseteq [x, y)$ entonces $[c, c'] \subseteq [x, y)$.

Por lo tanto, $[\text{mín}(X), c']$ puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$ y en consecuencia, si $c' \preceq \text{máx}(X)$, entonces $c' \in D$ y así $c = \sup(D) \prec c'$. Esto es una contradicción.

De ambos casos obtenemos una contradicción que viene de suponer que $c \prec \text{máx}(X)$. En conclusión, el intervalo $[\text{mín}(X), \text{máx}(X)]$ puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de $\mathscr{U}$, es decir, X^+ es Lindelöf. ■

Como consecuencia de la Proposición 3.47 obtenemos el siguiente corolario

Corolario 3.48. *Sea $(X, \preceq)$ un espacio linealmente ordenado con extremos, Dedekind completo y que no contiene sucesiones estrictamente decrecientes de tamaño ω_1. Entonces el espacio X^- es Lindelöf.*

Demostración. Definamos en X un nuevo orden que llamaremos $\preceq^*$. Declaramos que $b \preceq^* a$ si y solo si $a \preceq b$. Por las características de $\preceq$ resulta que $\preceq^*$ es también un orden Dedekind completo con extremos y que no contiene sucesiones estrictamente crecientes de tamaño ω_1. De hecho, notemos que el máximo de $(X, \preceq^*)$ es el mínimo de $(X, \preceq)$ y también que el mínimo de $(X, \preceq^*)$ es el máximo de $(X, \preceq)$
Por lo tanto, por la Proposición 3.47 se cumple que $X^+_{\preceq^*}$ (el subíndice es por el orden al que está asociado) es Lindelöf. Notemos que los básicos de $X^+_{\preceq^*}$ tienen la forma $[a, b)$ con $a \preceq^* b$, es decir, $b \preceq a$ y $[a, \text{máx}_{\preceq^*}(X)]$ con $a \preceq^* \text{máx}_{\preceq^*}(X)$, es decir, $\text{máx}_{\preceq^*}(X) = \text{mín}_{\preceq}(X) \preceq a$ mientras que los básicos de $X^-_{\preceq}$ son de la forma $(x, y]$ con $x \preceq y$ y $[\text{mín}_{\preceq}(X), x]$ con $\text{mín}_{\preceq}(X) \preceq x$. Esto evidencia que, de hecho, como espacios topológicos se cumple que $X^+_{\preceq^*} = X^-_{\preceq}$. Por lo tanto, X^- también es Lindelöf. ■

Ahora, vamos a demostrar que, para un espacio linealmente ordenado X respecto a un orden denso y que satisfaga las condiciones tanto de la Proposición 3.47 como del Corolario 3.48, el producto de sus respectivos espacios X^+ y X^- no puede ser débilmente Lindelof.

Proposición 3.49. *Sea $(X, \preceq)$ un espacio linealmente ordenado, no separable, con extremos, Dedekind completo, con $\preceq$ un orden denso y que no contiene sucesiones estrictamente crecientes ni decrecientes de tamaño ω_1. Entonces $X^+ \times X^-$ no es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Consideremos

$$\Delta = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\} \subseteq X^+ \times X^-$$

y además sea
$$\Gamma = \left\{ \langle x, y\rangle \in X^+ \times X^- \mid x \prec y \right\}.$$
Probemos que Γ es abierto en $X^+ \times X^-$. Sea entonces $\langle p, q\rangle \in \Gamma$. Por definición tenemos que $p \prec q$ y como $\preceq$ es un orden denso entonces existe $r \in X$ tal que $p \prec r \prec q$. Es claro entonces que $[p, r) \times (r, q] \subseteq \Gamma$. Además es un abierto pues es producto de dos abiertos básicos.

Ahora, definamos
$$\mathcal{U} = \{\Gamma\} \cup \{[p, \text{máx}(X)] \times [\text{mín}(X), p] \mid p \in X\}.$$
Es claro que cada elemento de $\mathcal{U}$ es un abierto de $X^+ \times X^-$. Además, dado $\langle x, y\rangle \in X^+ \times X^-$ tenemos dos casos.

- Si $x \prec y$ entonces $\langle x, y\rangle \in \Gamma$ por definición.
- si $y \preceq x$ entonces $\langle x, y\rangle \in [x, \text{máx}(X)] \times [\text{mín}(X), x]$

De esta forma, se cumple que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $X^+ \times X^-$. Sea ahora $\mathcal{V}$ una subcolección numerable de $\mathcal{U}$. Primero, notemos que Γ también es cerrado pues dado $\langle x, y\rangle \in (X^+ \times X^-) \setminus \Gamma$ entonces $y \preceq x$ y por lo tanto $\langle x, y\rangle \in [x, \text{máx}(X)] \times [\text{mín}(X), x]$ el cual es un abierto de $X^+ \times X^-$ que no intersecta a Γ. Definamos ahora
$$A = \{p \in X \mid [p, \text{máx}(X)] \times [\text{mín}(X), p] \in \mathcal{V}\}.$$
Notemos que si $A = \emptyset$ entonces $\mathcal{V} = \{\Gamma\}$ y además se cumple que
$$\text{cl}_{X^+ \times X^-}\left(\bigcup \mathcal{V}\right) = \text{cl}_{X^+ \times X^-}(\Gamma) = \Gamma$$
pues Γ es cerrado. Por lo tanto, la unión no es densa pues $\Gamma \subsetneq X^+ \times X^-$. Ahora supongamos que $A \neq \emptyset$. Como $|A| \leq |\mathcal{V}| \leq \aleph_0$ y como X no es separable gracias a la hipótesis, entonces A no puede ser un conjunto denso en X. Por lo tanto, existe un abierto básico no vacío (a, b) tal que $(a, b) \cap A = \emptyset$. Como $\preceq$ es un orden denso entonces existe $c \in X$ tal que $a \prec c \prec b$. Entonces $[c, b) \times (a, c] \neq \emptyset$ pues $\langle c, c\rangle \in [c, b) \times (a, c]$. Por la definición de Γ podemos observar que $([c, b) \times (a, c]) \cap \Gamma = \emptyset$. Además, para cada $p \in A$ tenemos que
$$([p, \text{máx}(X)] \times [\text{mín}(X), p]) \cap ([c, b) \times (a, c]) = \emptyset$$

pues si existe $\langle r, s\rangle \in ([p, \text{máx}(X)] \times [\text{mín}(X), p]) \cap ([c, b) \times (a, c])$ entonces tenemos que $p \preceq r \prec b$ y además $a \prec s \preceq p$ y así $a \prec p \prec b$, es decir, $(a, b) \cap A \neq \emptyset$. Esto es una contradicción.
En resumen, hemos encontrado una cubierta abierta $\mathscr{U}$ tal que cualquier subcolección numerable no tiene unión densa en $X^+ \times X^-$. Eso demuestra que $X^+ \times X^-$ no es débilmente Lindelöf a pesar de ser producto de dos espacios Lindelöf. ■

Como podemos observar, la construcción de lo probado anteriormente nos da condiciones necesarias para encontrar dos espacios Lindelöf, y por tanto débilmente Lindelöf, tales que su producto no es débilmente Lindelöf. Además, nos da pauta precisamente para encontrar el espacio que dará el ejemplo. Esto es lo que haremos a continuación.

Ejemplo 3.50. *Consideremos el espacio $X = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Definamos un orden $\preceq$ para X de la siguiente manera. Dados dos puntos $\langle a, b\rangle$ y $\langle c, d\rangle$ elementos de X, decimos que $\langle a, b\rangle \preceq \langle c, d\rangle$ si y solo si $a \leq c$ (con el orden usual de $\mathbb{R}$) o $a = c$ y $b \leq d$ (también con el orden usual de $\mathbb{R}$). Esto, en efecto, define un orden en X, y de hecho, un orden lineal. Esto último pues $\mathbb{R}$ mismo es un orden lineal con su orden usual. Por lo tanto podemos equipar a X con la topología de orden. Demostremos que X cumple las propiedades necesarias para el ejemplo buscado.*

Afirmación 3.51. *El espacio X es primero numerable.*

Demostración. Sea $\langle x, y\rangle$ un elemento de X. Distinguimos los siguientes casos.

I. Si $\langle x, y\rangle \in X \setminus (([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\}))$ entonces tomemos N como el primer natural tal que $\left(y - \frac{1}{N}, y + \frac{1}{N}\right) \subseteq [0, 1]$. De esta forma definimos

$$U^N_{\langle x,y\rangle} = \left\{\{x\} \times \left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right) \mid n \geq N\right\}.$$

Afirmamos que $U^N_{\langle x,y\rangle}$ es una base local numerable para $\langle x, y\rangle$. En efecto es numerable pues está indizada sobre los naturales. Falta ver que es una base local. Es claro que está compuesta de abiertos pues simplemente

$$\{x\} \times \left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right) = \left(\left\langle x, y - \frac{1}{n}\right\rangle, \left\langle x, y + \frac{1}{n}\right\rangle\right)$$

Ahora, sea V un abierto tal que $\langle x, y\rangle \in V$. Esto implica que existen $\langle r, s\rangle$ y $\langle t, u\rangle$ elementos de X tales que $\langle x, y\rangle \in (\langle r, s\rangle, \langle t, u\rangle) \subseteq V$. Esto nos dice que entonces $\langle r, s\rangle \prec \langle x, y\rangle \prec \langle t, u\rangle$. En consecuencia tenemos los siguientes subcasos.

- Si $r < x < t$, entonces de forma directa observemos que

$$\langle x, y\rangle \in \{x\} \times \left(y - \frac{1}{N}, y + \frac{1}{M}\right) \subseteq (\langle r, s\rangle, \langle t, u\rangle) \subseteq V.$$

- Sin pérdida de generalidad, si $x = r$ y $x < t$, como se tiene que $\langle r, s\rangle \prec \langle x, y\rangle$, entonces $s < y$ y de esta manera, existe $n \geq N$ tal que se cumple que $s < y - \frac{1}{n}$. En consecuencia, si tomamos un punto $\langle x, b\rangle \in \{x\} \times \left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right)$ entonces $b > s$ y así entonces $\langle r, s\rangle \prec \langle x, b\rangle \prec \langle t, u\rangle$. Por lo tanto

$$\langle x, y\rangle \in \{x\} \times \left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right) \subseteq (\langle r, s\rangle, \langle t, u\rangle) \subseteq V.$$

- Si $r = x = t$ entonces necesariamente $s < y < u$. Entonces, existe $n \geq N$ tal que $s < y - \frac{1}{n} < y < y + \frac{1}{n} < u$. De forma inmediata entonces se concluye que

$$\langle x, y\rangle \in \{x\} \times \left(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right) \subseteq (\langle r, s\rangle, \langle t, u\rangle) \subseteq V.$$

II. Si ahora tomamos el punto $\langle 1, 1\rangle$ entonces notemos que los básicos que lo contienen son de la forma $(\langle a, b\rangle, \langle 1, 1\rangle)$ para algún $\langle a, b\rangle < \langle 1, 1\rangle$. Por lo tanto, tomemos

$$U_{\langle 1,1\rangle} = \left\{\{1\} \times \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right] \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Afirmamos que $U_{\langle 1,1\rangle}$ es una base local numerable para $\langle 1, 1\rangle$. Es claro que es numerable. Así, basta probar que es base local. Para ello, sea V un abierto tal que $\langle 1, 1\rangle \in V$. Entonces existe un elemento $\langle a, b\rangle \in X$ tal que $\langle a, b\rangle \prec \langle 1, 1\rangle$ y además $\langle 1, 1\rangle \in (\langle a, b\rangle, \langle 1, 1\rangle) \subseteq V$. Esto nos da dos subcasos.

- Si $a = 1$ entonces $b < 1$ y de esta forma existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < 1 - \frac{1}{n}$. Así entonces concluimos que

$$\langle 1,1\rangle \in \{1\} \times \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right] \subseteq (\langle a,b\rangle, \langle 1,1\rangle) \subseteq V.$$

- Si $a < 1$ entones directamente, si tomamos $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\langle 1,1\rangle \in \{1\} \times \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right] \subseteq (\langle a,b\rangle, \langle 1,1\rangle) \subseteq V.$$

III. Si tomamos el punto $\langle 0,0\rangle$, entonces un razonamiento totalmente análogo al realizado con el punto $\langle 1,1\rangle$ nos otorga el hecho de que la colección

$$U_{\langle 0,0\rangle} = \left\{\{0\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

es una base local numerable para $\langle 0,0\rangle$

IV. Si tomamos $\langle x,1\rangle$ con $0 \leq x < 1$ entonces sea N_0 el primer natural tal que $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \subseteq [0,1]$. De esta forma, definimos $U^{N_0}_{\langle x,1\rangle}$ como el conjunto

$$\left\{\left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right) \times [0,1]\right) \cup \left(\{x\} \times \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right]\right) \cup \left(\left\{x + \frac{1}{n}\right\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right)\right) \mid n \geq N_0\right\}$$

Es claro que $U^{N_0}_{\langle x,1\rangle}$ es numerable. Además, afirmamos que es una base local numerable para $\langle x,1\rangle$. Sea V un abierto tal que $\langle x,1\rangle \in V$. Entonces, existen $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle \in X$ tales que $\langle a,b\rangle \prec \langle c,d\rangle$ y además

$$\langle x,1\rangle \in (\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle) \subseteq V.$$

Obtenemos entonces los siguientes casos.

- Si $a < x < c$ entonces existe $n \geq N_0$ tal que

$$a < x - \frac{1}{n} < x < x + \frac{1}{n} < c.$$

Así, si

$$W = \left(\left(x, x + \frac{1}{n}\right) \times [0,1]\right) \cup \left(\{x\} \times \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right]\right) \cup \left(\left\{x + \frac{1}{n}\right\} \times \left[0, \frac{1}{n}\right)\right)$$

entonces $\langle x,1\rangle \in W \subseteq (\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle) \subseteq V$.

- Sin pérdida de generalidad, si $a = x$ y $x < c$, necesariamente $b < 1$ y entonces sabemos que existe $n \geq N$ tal que $x + \frac{1}{n} < c$ y a su vez $b < 1 - \frac{1}{n}$. Entonces, es claro que si

$$W = \left(\left(x, x + \frac{1}{n} \right) \times [0,1] \right) \cup \left(\{x\} \times \left(1 - \frac{1}{n}, 1 \right] \right) \cup \left(\left\{ x + \frac{1}{n} \right\} \times \left[0, \frac{1}{n} \right) \right)$$

se cumple que

$$\langle x, 1 \rangle \in W \subseteq (\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle) \subseteq V.$$

Es natural esperar que el último caso a considerar sea cuando $a = x = c$ pero eso es imposible pues entonces $b < 1 = d$ y con ello, $\langle c, d \rangle = \langle x, 1 \rangle$ y entonces $\langle x, 1 \rangle \prec \langle x, 1 \rangle$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto, ese caso es imposible y entonces hemos concluido con todos los casos.

V. Si tomamos $\langle x, 0 \rangle$ con $0 < x \leq 1$ entonces sea N_1 el primer natural tal que $\left(x - \frac{1}{N_1}, x + \frac{1}{N_1} \right) \subseteq [0,1]$. De esta forma definimos $U^{N_1}_{\langle x,0 \rangle}$ como

$$\left\{ \left(\left(x - \frac{1}{n}, x \right) \times [0,1] \right) \cup \left(\left\{ x - \frac{1}{n} \right\} \times \left(1 - \frac{1}{n}, 1 \right] \right) \cup \left(\{x\} \times \left[0, \frac{1}{n} \right) \right) \mid n \geq N_1 \right\}$$

Es análogo a lo probado para los puntos $\langle x, 1 \rangle$ demostrar que $U^{N_1}_{\langle x,0 \rangle}$ es una base local numerable de $\langle x, 0 \rangle$.

■

Afirmación 3.52. *El orden $\preceq$ es un orden Dedekind completo.*

Demostración. Sea A un subconjunto de X no vacío acotado superiormente. De hecho, notemos que cualquier subconjunto no vacío de X está siempre acotado superiormente por $\langle 1, 1 \rangle$. Mostremos que $\sup(A)$ existe. Definamos el conjunto

$$A_x = \{ x \in [0,1] \mid \text{Existe } y \in [0,1] \text{ tal que } \langle x, y \rangle \in A \}.$$

Observemos que A_x es no vacío pues como A es no vacío entonces existe al menos un punto $\langle a, b \rangle \in A$. Por lo tanto, $a \in A_x$. Notemos que entonces A_x es un conjunto no vacío acotado de números reales. Esto implica que existe $\sup(A_x)$. Sea $\alpha = \sup(A_x)$. Con esto, tenemos dos casos.

1. Si existe $y \in [0,1]$ tal que $\langle \alpha, y \rangle \in A$ entonces el conjunto

$$\{y \in [0,1] \mid \langle \alpha, y \rangle \in A\}$$

es no vacío y está acotado superiormente. Por lo tanto, sea

$$\beta = \sup \{y \in [0,1] \mid \langle \alpha, y \rangle \in A\} .$$

Afirmamos entonces que $\langle \alpha, \beta \rangle = \sup(A)$. Primero observemos que $\langle \alpha, \beta \rangle$ es cota superior de A. Sea pues $\langle a, b \rangle \in A$. Notemos que entonces $a \in A_x$ y por lo tanto $a \leq \alpha$. Si $a < \alpha$ se tiene que $\langle a, b \rangle \preceq \langle \alpha, \beta \rangle$. Por otro lado, si $a = \alpha$ obtenemos que $b \in \{y \in [0,1] \mid \langle \alpha, y \rangle \in A\}$ y entonces $b \leq \beta$. Esto implica también que $\langle a, b \rangle \preceq \langle \alpha, \beta \rangle$. De ambos casos se concluye que $\langle \alpha, \beta \rangle$ es cota superior.

Ahora probemos que es la cota superior más pequeña. Para esto, sea $\langle u, v \rangle$ una cota superior de A tal que $\langle u, v \rangle \preceq \langle \alpha, \beta \rangle$. Notemos que no puede pasar que $u < \alpha$ pues de ser así, como asumimos que existe $y \in [0,1]$ tal que $\langle \alpha, y \rangle \in A$, entonces $\langle u, v \rangle \prec \langle \alpha, y \rangle$ pero por hipótesis $\langle u, v \rangle$ es cota superior. Por lo tanto, $u = \alpha$. También observemos que es imposible que $v < \beta$ pues de ser así, existe un elemento $v' \in \{y \in [0,1] \mid \langle \alpha, y \rangle \in A\}$ tal que $v < v' < \beta$ dado que β es el supremo del conjunto $\{y \in [0,1] \mid \langle \alpha, y \rangle \in A\}$. De esta forma, $\langle u, v \rangle \prec \langle u, v' \rangle$ y $\langle u, v' \rangle \in A$. Sin embargo, esto no puede pasar pues $\langle u, v \rangle$ es cota superior. Por lo tanto, $v = \beta$ y así, $\sup(A) = \langle \alpha, \beta \rangle$.

2. Si para todo $y \in [0,1]$ se cumple que $\langle \alpha, y \rangle \notin A$ entonces tenemos que $(\{\alpha\} \times [0,1]) \cap A = \emptyset$. Afirmamos entonces que $\sup(A) = \langle \alpha, 0 \rangle$.

Para ver que es cota superior, sea $\langle a, b \rangle$ un elemento de A. Por la elección de α y el hecho de que $(\{\alpha\} \times [0,1]) \cap A = \emptyset$ hacen que $\alpha \neq a$ y de esta forma entonces $a < \alpha$ y así $\langle a, b \rangle \prec \langle \alpha, 0 \rangle$.

Para probar que es la cota superior más pequeña, sea primero $\langle r, s \rangle$ una cota superior de A tal que $r = \alpha$. De esta forma, como $s \in [0,1]$ entonces $0 \leq s$ y por lo tanto $\langle \alpha, 0 \rangle \preceq \langle r, s \rangle$. Ahora, demostremos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\left\langle \alpha - \frac{1}{n}, 0 \right\rangle$ no es una cota superior de A. Esto pues dada una $n \in \mathbb{N}$ se cumple que, como $\alpha = \sup(A_x)$ entonces $\alpha - \frac{1}{n}$ no es una cota superior de A_x. Por lo tanto existen $a_n \in A_x$ y

$y_n \in [0,1]$ tales que $\langle a_n, y_n \rangle \in A$ y además

$$\alpha - \frac{1}{n} \leq a_n < \alpha.$$

Por lo tanto $\left\langle \alpha - \frac{1}{n}, 0 \right\rangle \preceq \langle a_n, y_n \rangle$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, $\left\langle \alpha - \frac{1}{n}, 0 \right\rangle$ no es cota superior para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Esto concluye la prueba y por lo tanto $\langle \alpha, 0 \rangle = \sup(A)$.

En ambos casos hemos probado que $\sup(A)$ existe. ■

Continuemos con la siguiente afirmación.

Afirmación 3.53. *El orden $\prec$ es un orden denso.*

Demostración. Sean $\langle a, b \rangle$ y $\langle c, d \rangle$ elementos de X tales que $\langle a, b \rangle \prec \langle c, d \rangle$. Esto nos da dos casos.

- Si $a < c$ entonces existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $a < u < c$ y por lo tanto, si tomamos cualquier $v \in [0,1]$ se cumple que $\langle u, v \rangle \in X$ y por lo tanto $\langle a, b \rangle \prec \langle u, v \rangle \prec \langle c, d \rangle$.
- Si $a = c$ y $b < d$ entonces existe $v \in \mathbb{R}$ tal que $b < v < d$ y por lo tanto $\langle v, a \rangle \in X$ y además $\langle a, b \rangle \prec \langle a, v \rangle \prec \langle c, d \rangle$.

■

Ahora, después de probar esto, observemos con cuidado lo que viene a continuación.

Afirmación 3.54. *Cualquier subconjunto denso de X tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso de X. Como $|X| = 2^{\aleph_0}$ entonces $|D| \leq |X| = 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, basta probar que $|D| \geq 2^{\aleph_0}$. Consideremos

$$\mathcal{C} = \{\{x\} \times (0,1) \mid x \in [0,1]\}.$$

Observemos que dada $x \in [0,1]$ entonces $\{x\} \times (0,1) = (\langle x, 0 \rangle, \langle x, 1 \rangle)$ y por lo tanto, cualquier elemento de $\mathcal{C}$ es un abierto. Además, la colección $\mathcal{C}$ está formada por abiertos ajenos dos a dos. En consecuencia, $|C| = |[0,1]| = 2^{\aleph_0}$. Como D es un conjunto denso, cada elemento de $\mathcal{C}$ debe contener al menos un punto de D. Así, $|D| \geq 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto $|D| = 2^{\aleph_0}$. ■

Una propiedad muy importante del espacio X que será clave para probar lo deseado es la siguiente.

Afirmación 3.55. *X no contiene sucesiones estrictamente crecientes de tamaño ω_1.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que existe

$$A = \{\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \mid \alpha < \omega_1\}$$

de longitud ω_1 el cual cumple que si $\alpha < \beta < \omega_1$ entonces $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \prec \langle x_\beta, y_\beta\rangle$. Como $\langle 1, 1\rangle$ es cota superior de A entonces sea $a = \sup(A)$. Observemos que $A \cup \{a\}$, visto como subespacio de X, es homeomorfo al espacio $[0, \omega_1]$. En efecto, la biyección que se define naturalmente entre $A \cup \{a\}$ y $[0, \omega_1]$ como $f(\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle) = \alpha$ es un homeomorfismo. Sin embargo, dado que X es primero numerable, gracias a la Afirmación 3.51, entonces $A\cup\{a\}$ es también primero numerable. En consecuencia, $\{\omega_1\}$ tiene una base local numerable pero esto es imposible pues si $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es tal base local numerable entonces para cada V_n existe $r_n \in [0, \omega_1)$ tal que $(r_n, \omega_1] \subseteq V_n$. Sin embargo, esto nos diría que $\sup\{r_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \omega_1$ lo cual es un absurdo pues entonces ω_1 sería unión numerable de ordinales numerables, pero ω_1 es no numerable. De esta forma, tal conjunto A no puede existir. ■

Como consecuencia de la Afirmación 3.55 tenemos el siguiente resultado.

Afirmación 3.56. *X no contiene sucesiones estrictamente decrecientes de tamaño ω_1.*

Demostración. Supongamos que existe un conjunto

$$A = \{\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \mid \alpha < \omega_1\}$$

de longitud ω_1 el cual cumple que si $\alpha < \beta < \omega_1$ entonces $\langle x_\beta, y_\beta\rangle \prec \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle$. Observemos que una ligera modificación a la demostración de la Afirmación 3.52 obtenemos que cualquier subconjunto no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo en X. Entonces, como A está acotado por $\langle 0, 0\rangle$ entonces existe $a = \text{ínf}(A)$. Consideremos entonces $A \cup \{a\}$. Este conjunto es homeomorfo a $[0, \omega_1]$ y como X es primero numerable entonces $A \cup \{a\}$ lo es y así $\{\omega_1\}$ tiene una base local numerable. Por lo dicho ya en la Afirmación 3.55 esto es imposible. Concluimos entonces que el conjunto A no puede existir. ■

Toda la exposición del Ejemplo 3.50 culmina en la siguiente proposición.

Proposición 3.57. *Existen dos espacios Lindelöf (y por tanto débilmente Lindelöf) normales tales que su producto no es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Notemos que por todo lo demostrado en el Ejemplo 3.50, el cuadrado lexicográfico cumple las hipótesis necesarias para satisfacer a la Proposición 3.47, el Corolario 3.48 y la Proposición 3.49. En consecuencia, si X denota al cuadrado lexicográfico, entonces X^+ y X^- son dos espacios Lindelöf, y por tanto débilmente Lindelöf, tales que $X^+ \times X^-$ no es débilmente Lindelöf. Nos basta probar que X^+ y X^- son normales. Haremos la prueba para X^+ y un razonamiento totalmente análogo nos otorgará el resultado para X^-. Primero probemos que X^+ es Hausdorff. Sean x y y dos elementos de X^+ tales que $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \prec y$. Como en $(X, \prec)$ el orden es denso entonces existe $z \in X$ tal que se cumple que $x \prec z \prec y$. De esta forma, $[\langle 0,0\rangle, z)$ y $[z, \langle 1,1\rangle]$ son abiertos ajenos que separan a x y y. Ahora, observemos lo siguiente.

- Sean $a, b \in X$ y consideremos $[a, b)$. Notemos entonces que

  $$X \setminus [a,b) = [\langle 0,0\rangle, a) \cup [b, \langle 1,1\rangle].$$

  Así $X \setminus [a,b)$ es un abierto y por lo tanto, $[a,b)$ es un cerrado.

- Sea $a \in X$. Entonces consideremos $[a, \langle 1,1\rangle]$. Notemos que

  $$X \setminus [a, \langle 1,1\rangle] = [\langle 0,0\rangle, a).$$

  En consecuencia $X \setminus [a, \langle 1,1\rangle]$ es un abierto y así $[a, \langle 1,1\rangle]$ es un cerrado.

Esto nos evidencia entonces que X^+ tiene una base formada por abiertos y cerrados. Por lo tanto, X^+ es Tychonoff y como además es Lindelöf entonces concluimos que X^+ es normal. Un razonamiento idéntico nos prueba que X^- también es normal. ■

Más allá de la naturaleza del ejemplo presentado, hemos podido ver que el producto, incluso finito, de dos espacios Lindelöf, y por tanto débilmente Lindelöf, no resulta débilmente Lindelöf. Es natural pensarlo de hecho cuando se observa que si en general el producto de dos espacios Lindelöf no es Lindelöf, menos podría suceder esto en una debilitación de tal concepto. La moraleja que obtenemos de este resultado y de lo desarrollado hasta ahora es que el producto topológico es una de las operaciones topológicas más complicadas y erráticas entendiendo esto como la dificultad que presenta tanto decidir cuándo algo se preserva bajo productos como por encontrar contraejemplos para exhibir cuándo algo no es preservado bajo productos. Además, gracias a todo lo desarrollado en este capítulo, podemos notar que los espacios débilmente Lindelöf son muy ricos en propiedades topológicas y por tanto, de gran relevancia en el ámbito topológico.

Capítulo 4

Espacios quasi-Lindelöf

Este es el último capítulo de este trabajo y como tal, pretende estudiar un concepto íntimamente relacionado con los espacios anteriormente abordados. Sin embargo, ¿cómo la presentaremos? La forma de hacerlo es un poco diferente a las tres propiedades anteriores pues ahora en realidad la motivación nace de un problema que abordaba el matemático Arkhangel'skii que tiene que ver con funciones cardinales que aunque sean el punto de partida para la definición de los espacios que le dan título al capítulo, no abordaremos más allá de lo necesario por ser algo que se escapa de los objetivos de este trabajo. Parafraseando lo escrito por R. Hodel en [19], las funciones cardinales extienden conceptos tan importantes para la topología como lo son la separabilidad, lo segundo numerable y lo primero numerable, entre otras, a «cardinalidades más grandes». Más aún, las funciones cardinales permiten formular y generalizar resultados así como tener de forma precisa una manera de comparar ciertas propiedades topológicas. Por ejemplo, es bien sabido que cualquier espacio segundo numerable es separable aunque la implicación conversa no es cierta necesariamente pero, gracias a la profundización de las funciones cardinales, se sabe que si un espacio es separable entonces tal espacio tiene una base de cardinalidad menor que $2^{\aleph_0}$. En resumen, las funciones cardinales son una gran herramienta para la topología general y para el desarrollo de esta.

Uno de los resultados más importantes asociados a las funciones cardinales es la famosa desigualdad de Arkhangel'skii que afirma que, para un espacio Hausdorff X, se cumple que

$$|X| \leq 2^{L(X)\chi(X)}$$

en donde $L(X)$ y $\chi(X)$ denotan el grado de Lindelöf y el carácter de X respectivamente. Motivado en esta desigualdad, el propio Arkhangel'skii busca dar una versión refinada de la misma y para ello introduce una nueva función cardinal llamada quasi-grado de Lindelöf y que denota por $\mathrm{qL}(X)$. Esta función cardinal se define como sigue: para un espacio topológico (X, τ_X), denotamos por $\mathcal{F}$ a la familia de todos los cerrados de X y consideramos la familia de cardinales infinitos

$$\mathcal{Q} = \left\{\kappa \mid \forall F \in \mathcal{F} \forall \mathscr{U} \subseteq \tau_X \left(F \subseteq \bigcup \mathscr{U} \Rightarrow \exists \mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}, \text{ tal que } |\mathscr{V}| \leq \kappa \wedge F \subseteq \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \mathscr{V}\right)\right)\right\}.$$

De esta manera, el quasi-grado de Lindelöf de X está dado por

$$\mathrm{qL}(X) = \min \mathcal{Q}.$$

De la definición queda claro que para cualquier espacio X se cumple que $\mathrm{qL}(X) \leq L(X)$. No está de más comentar que Arkhangel'skii logra la impresionante mejora

$$|X| \leq 2^{\mathrm{qL}(X)\chi(X)}.$$

Una prueba de este hecho puede consultarse en [1]. Ahora bien, cuando $\mathrm{qL}(X) = \aleph_0$, entonces obtenemos la definición de un espacio quasi-Lindelöf que, escrita de forma un poco más precisa, es la siguiente.

Definición 4.1. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es quasi-Lindelöf si cualquier cerrado F de X tiene la siguiente propiedad: dada una familia $\mathscr{U}$ de abiertos de X tal que $F \subseteq \bigcup \mathscr{U}$ existe una subcolección $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $F \subseteq cl_X (\bigcup \mathscr{U}_0)$.*

Una reformulación muy útil de la definicion es la siguiente.

Proposición 4.2. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de X. Entonces X es quasi-Lindelöf si y solo si cualquier cerrado F de X tiene la siguiente propiedad: dada una familia $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $F \subseteq \bigcup \mathscr{U}$ existe una subcolección $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $F \subseteq cl_X (\bigcup \mathscr{U}_0)$.*

Demostración. Es claro que si X es quasi-Lindelöf entonces cualquier cerrado F de X cumple que dada una familia $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $F \subseteq \bigcup \mathscr{U}$ existe una subcolección $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $F \subseteq \mathrm{cl}_X (\bigcup \mathscr{U}_0)$.

Para la implicación restante, sean F un cerrado y $\mathscr{V}$ una colección de abiertos que es cubierta de F. Para cada $x \in F$ tomemos $B_x \in \mathcal{B}$ y $V_x \in \mathscr{V}$ tales que

$x \in B_x \subseteq V_x$. Entonces la colección $\{B_x \mid x \in F\}$ es una colección de abiertos de X que cubre a F. Por hipótesis entonces existe $X_0 \subseteq X$ numerable tal que

$$F \subseteq \mathrm{cl}_X \left(\bigcup_{x \in X_0} B_x \right).$$

Sin embargo, como

$$\bigcup_{x \in X_0} B_x \subseteq \bigcup_{x \in X_0} V_x$$

entonces

$$\mathrm{cl}_X \left(\bigcup_{x \in X_0} B_x \right) \subseteq \mathrm{cl}_X \left(\bigcup_{x \in X_0} V_x \right)$$

y en consecuencia obtenemos que $\{V_x \mid x \in X_0\}$ es la subcolección numerable que atestigua que F cumple la propiedad de cubierta estipulada y por lo tanto X es quasi-Lindelöf. ■

Como podemos observar, ser quasi-Lindelöf es una condición que se impone sobre todos los cerrados del espacio X. ¿De qué forma se relaciona con la propiedad de ser débilmente Lindelöf?

Proposición 4.3. *Sea X un espacio quasi-Lindelöf. Entonces X es débilmente Lindelöf.*

Demostración. Simplemente observemos que X es un subespacio cerrado de sí mismo. Por lo tanto, X cumple la propiedad de cubierta impuesta en la Definición 4.1 y por lo tanto X es débilmente Lindelöf. ■

Esta proposición va en contra de lo que se pensaba pues al definir esta nueva propiedad, se esperaba que fuera una debilitación del concepto de ser débilmente Lindelöf y por tanto, fuera consecuencia de ella. En realidad, la definición de ser quasi-Lindelöf es muy delicada pues aunque lo parezca, no es equivalente ser quasi-Lindelöf a que cualquier subconjunto cerrado sea débilmente Lindelöf. Observemos esto en el siguiente ejemplo. Pero antes de él, necesitamos algunas definiciones.

Definición 4.4. *Consideremos el conjunto*

$$[\omega]^\omega = \{A \subseteq \omega : |A| = \aleph_0\}.$$

Sea $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$. Decimos que $\mathcal{U}$ es una familia casi ajena si para cualesquiera A y B elementos de $\mathcal{U}$ tales que $A \neq B$ se cumple que $|A \cap B| < \aleph_0$.

La existencia de familias casi ajenas es fácilmente demostrable. Para ello, observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.5. *Si consideramos* $A = \{2n \mid n \in \omega\}$ *y* $B = \omega \setminus A$ *entonces* $\mathcal{U} = \{A, B\}$ *es casi ajena pues cada uno de sus elementos es numerable y la intersección de ambos es vacía.*

Notemos que el Ejemplo 4.5 en realidad es una trivialidad. Un ejemplo más sofisticado es el siguiente.

Ejemplo 4.6. *Para cada* $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *sabemos que existe* $\{s_n^r\} \subseteq \mathbb{Q}$ *una sucesión tal que* $s_n^r \to r$. *De esta forma, definamos*

$$S_r = \{s_n^r \mid n \in \omega\}.$$

Como la sucesión está compuesta únicamente por números racionales, entonces S_r *es infinito. Como* $|\mathbb{Q}| = |\omega|$ *entonces sea* $f : \mathbb{Q} \to \omega$ *una función biyectiva. Para cada* $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *definamos* $A_r = f[S_r]$. *La afirmación es que*

$$\mathcal{U} = \{A_r \mid r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

es una familia casi ajena. Del hecho de la biyectividad de f *obtenemos que si* $A_r \in \mathcal{U}$ *entonces* $A_r \in [\omega]^\omega$. *Ahora, tomemos* $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *distintos. Podemos considerar* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$B(r_1, \varepsilon) \cap B(r_2, \varepsilon) = \emptyset.$$

De esta forma, existe $N \in \omega$ *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $s_n^{r_1} \in B(r_1, \varepsilon)$ *y* $s_n^{r_2} \in B(er_2, \varepsilon)$. *Por lo tanto,* $|S_{r_1} \cap S_{r_2}| < \aleph_0$ *y como* f *es biyectiva entonces* $|A_{r_1} \cap A_{r_2}| < \aleph_0$. *De esta forma concluimos que* $\mathcal{U}$ *es una familia casi ajena y además,* $|\mathcal{U}| = 2^{\aleph_0}$.

El haber introducido familias casi ajenas no es una simple curiosidad pues sobre ellas definiremos lo siguiente.

Definición 4.7. *Sea* $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ *una familia casi ajena. Definimos el conjunto* $\Psi(\mathcal{A}) = \omega \cup \mathcal{A}$ *y lo dotaremos de la siguiente topología.*

- *Cada* $n \in \omega$ *es aislado, es decir,* $\{n\}$ *es abierto.*
- *Para* $B \in \mathcal{A}$, *un abierto básico es de la forma* $\{B\} \cup (B \setminus F)$ *donde* F *es un subconjunto finito de* B. *De esta manera, una base local de* B *es*

$$\{\{B\} \cup (B \setminus F) \mid F \text{ es un subconjunto finito de } B\}.$$

Al espacio $\Psi(\mathcal{A})$ se le conoce como el espacio de Mrówka-Isbell asociado a $\mathcal{A}$ o simplemente como el Ψ-espacio asociado a $\mathcal{A}$.

Los espacios de Mrówka-Isbell son ricos en propiedades topológicas. Sin embargo, aquí solamente mostraremos algunas de ellas.

Proposición 4.8. *Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi ajena. Entonces el espacio de Mrówka-Isbell asociado a $\mathcal{A}$ cumple las siguientes propiedades.*

i) $\Psi(\mathcal{A})$ *es separable.*

ii) $\Psi(\mathcal{A})$ *es localmente compacto.*

iii) $\Psi(\mathcal{A})$ *es Tychonoff.*

Demostración.
i) Observemos que ω es un denso en $\Psi(\mathcal{A})$. Es claro pues si U es un abierto básico entonces $U = \{n\}$ para algún $n \in \omega$ con lo cual $U \cap \omega \neq \emptyset$ y si $U = \{B\} \cup (B \setminus F)$ con $B \in \mathcal{A}$ y F un subconjunto finito de B, como $|B| = \aleph_0$ entonces $B \setminus F$ es infinito y por lo tanto, $(B \setminus F) \cap \omega \neq \emptyset$ y así nuevamente $U \cap \omega \neq \emptyset$. En efecto entonces ω es denso y así $\Psi(\mathcal{A})$ es separable.

ii) Para un elemento $n \in \omega$ una vecindad compacta es $\{n\}$. Si ahora $B \in \mathcal{A}$, afirmamos que $\{B\} \cup (B \setminus F)$, con F un subconjunto finito de B, es compacto. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de $\{B\} \cup (B \setminus F)$ conformada por abiertos de $\Psi(\mathcal{A})$. Por lo tanto, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $B \in U$. Como U es una vecindad abierta de B entonces existe $F_0 \subseteq B$ finito tal que

$$\{B\} \cup (B \setminus F_0) \subseteq U. \tag{4.1}$$

Observemos que

$$\{B\} \cup (B \setminus F) = \{B\} \cup [(B \setminus F_0) \cap (B \setminus F)] \cup [(B \setminus F) \setminus (B \setminus F_0)] \tag{4.2}$$

y además que

$$(B \setminus F) \setminus (B \setminus F_0) \subseteq F_0 \tag{4.3}$$

pues si $x \in (B \setminus F) \setminus (B \setminus F_0)$ entonces $x \in B \setminus F$ y $x \notin B \setminus F_0$, es decir, $x \in B \cap F_0$ o $x \notin B$ pero como $x \in B$ entonces $x \in B \cap F_0$ y por lo tanto

$x \in F_0$. Recapitulando, notemos que por la Igualdad 4.1 y la Igualdad 4.2 tenemos que

$$\{B\} \cup [(B \setminus F_0) \cap (B \setminus F)] \subseteq U \tag{4.4}$$

pues $(B \setminus F_0) \cap (B \setminus F) \subseteq (B \setminus F_0)$. Además, por la Igualdad 4.3 concluimos que $(B \setminus F) \setminus (B \setminus F_0)$ es finito. Por lo tanto, como $\mathscr{U}$ es cubierta de $\Psi(\mathcal{A})$, existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ finito tal que

$$(B \setminus F) \setminus (B \setminus F_0) \subseteq \bigcup \mathscr{U}_0. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, por lo obtenido en las Igualdades 4.4 y 4.5 y en virtud de la Igualdad 4.2, $\mathscr{U}_0 \cup \{U\}$ es la subcubierta finita buscada. Así, $\{B\} \cup (B \setminus F)$ es compacto y por lo tanto, $\Psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto.

iii) Primero probemos que $\Psi(\mathcal{A})$ es Hausdorff. Si tomamos $n, m \in \omega$ tales que $n \neq m$ entonces $\{n\}$ y $\{m\}$ son abiertos que separan. Si ahora tomamos $n \in \omega$ y $B \in \mathcal{A}$ entonces, tenemos dos casos.

- Si $n \in B$ entonces $U = \{n\}$ y $V = \{B\} \cup (B \setminus \{n\})$ son dos abiertos que separan.
- Si $n \notin B$ entonces $U = \{n\}$ y $V = \{B\} \cup B$ son dos abiertos que separan.

Finalmente, si $C, D \in \mathcal{A}$ y $C \neq D$, como $\mathcal{A}$ es casi ajena entonces se tiene que $|C \cap D| < \aleph_0$. Así, $C \cap D$ es un subconjunto finito de C y de D. Por lo tanto, $U = \{C\} \cup (C \setminus (C \cap D))$ y $V = \{D\} \cup (D \setminus (D \cap C))$ son abiertos que separan. Esto prueba que X es Hausdorff. Además, como en ii) probamos que los abiertos básicos son compactos, entonces son cerrados. Por lo tanto, $\Psi(\mathcal{A})$ tiene una base formada por abiertos y cerrados, es decir, es cero dimensional, y por lo tanto, $\Psi(\mathcal{A})$ es Tychonoff. ∎

Antes de continuar con el ejemplo prometido, observemos la siguiente proposición

Proposición 4.9. *Sea X un espacio topológico. Si X es un espacio ccc entonces X es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Sean F un subconjunto cerrado de X y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de F formada por abiertos de X. Notemos que entonces como X es ccc, gracias a la Proposición 3.11, existe una subcolección numerable $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ tal que

$$F = \bigcup \mathscr{U} \subseteq \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \mathscr{U}_0 \right).$$

De esta manera concluimos que X es quasi-Lindelöf. ■

Como corolario tenemos lo siguiente.

Corolario 4.10. *Sea X un espacio topológico. Si X es separable entonces X es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Simplemente notemos que como X es separable entonces X es ccc. Así, por la Proposición 4.9 tenemos el resultado deseado. ■

Finalmente, el ejemplo del que tanto se habló se presentará a continuación.

Proposición 4.11. *Existe un espacio Tychonoff tal que es quasi-Lindelöf pero con un cerrado no débilmente Lindelöf.*

Demostración. Tomemos la familia casi ajena $\mathcal{U}$ presentada en el Ejemplo 4.6. Así, consideremos el espacio de Mrówka-Isbell $\Psi(\mathcal{U})$ asociado a $\mathcal{U}$. Por la Proposición 4.8 i) se cumple que $\Psi(\mathcal{U})$ es separable y por lo tanto, gracias al Corolario 4.10 $\Psi(\mathcal{U})$ es quasi-Lindelöf. Sin embargo, el conjunto $\mathcal{U}$ es cerrado en $\Psi(\mathcal{U})$ pues ω es abierto. Más aún, $\mathcal{U}$ hereda la topología discreta y además es no numerable. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ no puede ser débilmente Lindelöf. ■

Naturalmente, tenemos la siguiente relación.

Proposición 4.12. *Sean X un espacio topológico con la propiedad de que cualquier subconjunto cerrado F de X es débilmente Lindelöf. Entonces X es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Si tomamos $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de F formada por abiertos de X. Como F es cerrado entonces, por hipótesis, es débilmente Lindelöf. De esta forma, existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que $F \subseteq \mathrm{cl}_X (\bigcup \mathscr{U}_0)$. Por lo tanto, X es quasi-Lindelöf. ■

Es natural pensar entre las relaciones que hay entre las cuatro propiedades estudiadas. Explorémoslo con detenimiento en las siguientes proposiciones y ejemplos.

Proposición 4.13. *Sea X un espacio Lindelöf. Entonces X es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de X. Como la propiedad de Lindelöf se hereda a cerrados entonces F es Lindelöf y en consecuencia es débilmente Lindelöf. Por la Proposición 4.12 entonces concluimos que X es quasi-Lindelöf. ∎

Continuemos exhibiendo un espacio débilmente Lindelöf que no será quasi-Lindelöf en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.14. *Consideremos a X como el espacio topológico construido en el Ejemplo 2.3. Según lo demostrado, y siguiendo la misma notación, el espacio X es casi Lindelöf y por tanto débilmente Lindelöf pero no es Lindelöf. Nos resta probar que no es quasi-Lindelöf. Consideremos entonces el conjunto A. Por lo demostrado en el Ejemplo 2.3 sabemos que A es cerrado. Tomemos ahora*

$$\mathscr{U} = \{\{(a_\alpha, -1)\} \cup \{(a_\alpha, m) \mid m \geq 0\} \mid \alpha < \omega_1\}.$$

Afirmamos que la familia $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta para A. En efecto, si tomamos $\alpha < \omega_1$ entonces el punto $(a_\alpha, -1) \in A$ y además se cumple que $(a_\alpha, -1) \in \{(a_\alpha, -1)\} \cup \{(a_\alpha, m) \mid m \geq 0\}$. Así $A \subseteq \bigcup \mathscr{U}$. Observemos sin embargo que la colección $\mathscr{U}$ está formada por abiertos ajenos dos a dos. Sean $\alpha, \beta \in \omega_1$ dos ordinales tales que $\alpha \neq \beta$. En consecuencia se tiene que $a_\alpha \neq a_\beta$ y por lo tanto $(a_\alpha, -1) \neq (a_\beta, -1)$ y más aún, $(a_\alpha, m) \neq (a_\beta, n)$ para cualesquiera $m, n \in \omega$. Así

$$[\{(a_\alpha, -1)\} \cup \{(a_\alpha, m) \mid m \geq 0\}] \cap [\{(a_\beta, -1)\} \cup \{(a_\beta, m) \mid m \geq 0\}] = \emptyset.$$

Si tomamos $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ una subcolección numerable entonces existe un ordinal $\kappa < \omega_1$ tal que $\{(a_\kappa, -1)\} \cup \{(a_\kappa, m) \mid m \geq 0\} \notin \mathscr{U}_0$. Sin embargo, el punto $(a_\kappa, -1) \in A$ y como la cubierta $\mathscr{U}$ está formada por conjuntos abiertos dos a dos entonces $\{(a_\kappa, -1)\} \cup \{(a_\kappa, m) \mid m \geq 0\}$ es una vecindad de $(a_\kappa, -1)$ que no intersecta a $\bigcup \mathscr{U}_0$. Esto significa que $(a_\kappa, -1) \notin cl_X(\bigcup \mathscr{U}_0)$. En consecuencia, $A \nsubseteq cl_X(\bigcup \mathscr{U}_0)$. Entonces X no es quasi-Lindelöf.

Finalmente, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.15. *Consideremos el espacio de la Proposición 4.11. Claramente es un espacio quasi-Lindelöf por lo ya demostrado pero no es Lindelöf pues el subconjunto cerrado discreto y no numerable $\mathscr{U}$ no es Lindelöf.*

A continuación, tenemos un pequeño resultado que liga las propiedades de quasi-Lindelöf y débilmente Lindelöf .

Proposición 4.16. *Sea X un espacio topológico normal. Entonces X es débilmente Lindelöf si y solo si X es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Sabemos, por la Proposición 4.3, que ser quasi-Lindelöf implica ser débilmente Lindelöf. Por lo tanto, nos resta probar una implicación. Para demostrarla, supongamos que X es débilmente Lindelöf y normal. Probemos entonces que X es quasi-Lindelöf. Para esto, sea F un subconjunto cerrado de X. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de F compuesta por abiertos de X. Definamos $U = \bigcup \mathscr{U}$. Notemos que U es un abierto que contiene a F. Por lo tanto, como X es normal, entonces existe un abierto V de X tal que

$$F \subseteq V \subseteq \mathrm{cl}_X(V) \subseteq U.$$

Consideremos entonces $\mathscr{U}_1 = \mathscr{U} \cup \{X \setminus \mathrm{cl}_X(V)\}$. Claramente $\mathscr{U}_1$ es una cubierta abierta de X pues $F \subseteq U$ y $X \setminus U \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X(V)$. Como por hipótesis X es débilmente Lindelöf entonces existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ una subcolección numerable tal que

$$X = \left(\mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)\right) \cup \mathrm{cl}_X\left(X \setminus \mathrm{cl}_X(V)\right).$$

Para concluir, afirmamos que $F \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $x \in F \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V))$. Como $F \subseteq V$ entonces

$$F \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) \subseteq V \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V)).$$

Por lo tanto, $x \in V \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V))$ y en consecuencia $x \in V$. Como V es abierto y $x \in \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V))$ entonces $V \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) \neq \emptyset$. Pero notemos que

$$V \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) \subseteq \mathrm{cl}_X(V) \cap (X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) = \emptyset.$$

Por lo tanto, hemos obtenido una contradicción. En consecuencia

$$F \cap \mathrm{cl}_X(X \setminus \mathrm{cl}_X(V)) = \emptyset$$

y entonces

$$F \subseteq \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right).$$

Así, F es débilmente Lindelöf. Concluimos pues que X es quasi-Lindelöf. ∎

Es entonces importante pensar que mientras más separación hay en nuestros espacios, más posible es que las propiedades tengan un mejor comportamiento y, en el mejor de los casos, se vuelvan equivalentes. Lo probado en los capítulos anteriores junto con lo hecho en la Proposición 4.3, la Proposición 4.13, el Ejemplo 4.14 y el Ejemplo 4.15 nos otorga el siguiente diagrama que ilustra las relaciones entre los cuatro espacios estudiados. Cada flecha señala una implicación y por los ejemplos exhibidos anteriormente tales implicaciones no son reversibles.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Lindelöf} \arrow[d] \arrow[ddl] \\
 & \text{Casi Lindelöf} \arrow[d] \\
\text{Quasi-Lindelöf} \arrow[r] & \text{Débilmente Lindelöf}
\end{tikzcd}$$

Prosiguiendo con el estudio de los espacios quasi-Lindelöf, observemos que desafortunadamente no es hereditaria a cerrados.

Ejemplo 4.17. *Consideremos el espacio de la Proposición 4.11. Es un espacio con un discreto cerrado no numerable* $\mathcal{U}$*. Así, cualquier subconjunto de él es un cerrado en la topología de subespacio de* $\mathcal{U}$*. En particular, si tomamos un subconjunto no numerable, la cubierta formada por los unitarios es una cubierta abierta que no cumple la propiedad para satisfacer la definición de quasi-Lindelöf. Así,* $\mathcal{U}$ *no es quasi-Lindelöf en su topología de subespacio.*

A pesar de los resultados negativos en cuanto a el comportamiento hereditario, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.18. *Sean* X *un espacio quasi-Lindelöf y* B *un subconjunto cerrado y abierto de* X*. Entonces* B *es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Sean F un subconjunto cerrado de B y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de F formada por abiertos de B. Como B es abierto entonces, de hecho, $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta formada por abiertos de X y además, como B es cerrado entonces en realidad F es cerrado en X. De esta forma, como X es quasi-Lindelöf entonces existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que

$$F \subseteq \mathrm{cl}_B \left(\bigcup \mathscr{U}_0 \right).$$

Entonces B es quasi-Lindelöf. ∎

Como hasta ahora hemos hecho, veremos cómo se comporta la propiedad quasi-Lindelöf con las principales operaciones topológicas. La primera de ellas es la continuidad y es lo que tenemos a continuación

Proposición 4.19. *Sean X un espacio quasi-Lindelöf, Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Sean F un subconjunto cerrado de Y y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de F formada por abiertos de Y. Como f es continua entonces $f^{-1}[F]$ es un cerrado en X y además $\{f^{-1}[U] \mid U \in \mathscr{U}\}$ es una cubierta abierta de $f^{-1}[F]$ formada por abiertos de X. Debido a que X es quasi-Lindelöf entonces existe $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ numerable tal que

$$f^{-1}[F] \subseteq \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \{ f^{-1}[U] \mid U \in \mathscr{U}_0 \} \right).$$

Por lo tanto, por la suprayectividad de f obtenemos que

$$F \subseteq \mathrm{cl}_X \left(\bigcup \{U \mid U \in \mathscr{U}\} \right).$$

En consecuencia, Y es quasi-Lindelöf. ■

Y como lo marca la intuición, el corolario que viene a continuación ya ni siquiera necesita una demostración.

Corolario 4.20. *Cualquier cociente de un espacio quasi-Lindelöf es también quasi-Lindelöf.*

Ahora analicemos el comportamiento de la suma topológica con la propiedad quasi-Lindelöf.

Proposición 4.21. *La suma topólogica $\bigoplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ es quasi-Lindelöf si y solo si cada X_α es quasi-Lindelöf y además $|J| \leq \aleph_0$.*

Demostración. Primero supongamos que la suma topólogica $\bigoplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ es quasi-Lindelöf. De esta forma, como cada X_α es cerrado y abierto entonces, por la Proposición 4.18, cada X_α es quasi-Lindelöf. Notemos que

$$\mathscr{U} = \{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

es una cubierta abierta de $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ formada por conjuntos ajenos dos a dos. Esto implica que $\mathscr{U}$ es una familia discreta y por lo tanto se cumple que si $I \subseteq J$ entonces

$$\mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}(X_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha.$$

Esto prueba que cualquier subcoleccion $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ de unión densa en $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es en realidad una subcubierta de $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ y por lo tanto $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}$. Como $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es quasi-Lindelöf concluimos que $|\mathscr{U}| \leq \aleph_0$, es decir, $|J| \leq \aleph_0$.

Para la implicación restante, para cada $\alpha \in J$ tomemos $\mathcal{B}_\alpha$ una base de X_α. Entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{B}_\alpha$ es una base de $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$. Tomemos $C \subseteq \bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ un cerrado y $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $C \subseteq \bigcup \mathscr{U}$. Para cada $\alpha \in J$ tomemos $\mathscr{U}_\alpha = \mathscr{U} \cap \mathcal{B}_X$. Como $C \cap X_\alpha$ es cerrado en X_α entonces existe $\mathscr{V}_\alpha \subseteq \mathscr{U}_\alpha$ numerable tal que

$$C \cap X_\alpha \subseteq \mathrm{cl}_{X_\alpha}\left(\bigcup \mathscr{V}_\alpha\right) = \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup \mathscr{V}_\alpha\right).$$

Sea $\mathscr{V} = \bigcup_{\alpha\in J} \mathscr{V}_\alpha \subseteq \mathscr{U}$. Observemos que $\mathscr{V}$ es numerable pues los $\mathscr{V}_\alpha$ lo son y $|J| \leq \aleph_0$. Por otro lado, la familia

$$\left\{\bigcup \mathscr{V}_\alpha \mid \alpha \in J\right\}$$

es discreta en $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ pues $\bigcup \mathscr{V}_\alpha \subseteq X_\alpha$ y $\{X_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es discreta en $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$. Por lo tanto

$$\mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup \mathscr{V}\right) = \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup_{\alpha\in J}\left(\bigcup \mathscr{V}_\alpha\right)\right) = \bigcup_{\alpha\in J} \mathrm{cl}_{\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha}\left(\bigcup \mathscr{V}_\alpha\right).$$

Dado que $C = \bigcup_{\alpha\in J}(C \cap X_\alpha)$, se sigue que $C \subseteq \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathscr{V}\right)$. Concluimos entonces que $\bigoplus_{\alpha\in J} X_\alpha$ es quasi-Lindelöf. ■

En [28], P. Staynova deja dos preguntas abiertas para motivar más la investigación así como, claro, en espera de una respuesta. La primera pregunta que abordaremos es la siguiente.

Pregunta 4.22. *¿Qué tipo de propiedades topológicas son requeridas para demostrar que un espacio casi Lindelöf es quasi-Lindelöf?*

En [26], Yan-Kui Song responde a esta pregunta y es justamente una parte de su respuesta lo que mostraremos a continuación.
Primeramente, según la Proposición 2.5, si X es un espacio regular, entonces ser Lindelöf es equivalente a ser casi Lindelöf. De esta manera, podemos enunciar el siguiente resultado que responde parcialmente la pregunta establecida por P. Staynova.

Proposición 4.23. *Sea X un espacio regular. Si X es casi Lindelöf entonces X es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Como X es regular y casi Lindelöf entonces X es Lindelöf. Por la Proposición 4.13 concluimos que X es quasi-Lindelöf. ■

De hecho, la Proposición 4.23 puede ser debilitada un poco más pues en la hipótesis exigimos que X sea Lindelöf y casi Lindelöf. Para esto, primero necesitamos la siguiente definición ([24]).

Definición 4.24. *Decimos que X es un espacio localmente Lindelöf si para todo $x \in X$ y para cada vecindad U_x de x existe una vecindad V_x de x tal que $V_x \subseteq U_x$ y $cl_X(V_x)$ es Lindelöf.*

Con la definición requerida enunciemos la proposición siguiente.

Proposición 4.25. *Si X es localmente Lindelöf y casi Lindelöf entonces X es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Como X es localmente Lindelöf, para cada $x \in X$ existe V_x una vecindad de X tal que $\mathrm{cl}_X(V_x)$ es Lindelöf y además existe $U_x \in \mathscr{U}$ tal que $x \in V_x \subseteq U_x$. De esta forma el conjunto

$$\{\mathrm{int}_X(V_x) \mid x \in X\}$$

es una cubierta abierta de X y como X es casi Lindelöf entonces existe $A \subseteq X$ numerable tal que

$$X = \bigcup \{\mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X(V_x)) \mid x \in A\}.$$

Notemos que para cada $x \in A$, como $\mathrm{cl}_X(V_x)$ es Lindelöf, existe una subcolección numerable $\mathscr{U}_x \subseteq \mathscr{U}$ tal que

$$\mathrm{cl}_X(V_x) \subseteq \bigcup \mathscr{U}_x.$$

Más aún, se cumple que

$$\mathrm{cl}_X\left(\mathrm{int}_X\left(V_x\right)\right) \subseteq \mathrm{cl}_X\left(V_x\right) \subseteq \bigcup \mathscr{U}_x.$$

Por lo tanto, si $\mathscr{U}_0 = \bigcup\{\mathscr{U}_x \mid x \in A\}$, entonces $\mathscr{U}_0$ es una subcolección numerable de $\mathscr{U}_0$ tal que $X = \bigcup \mathscr{U}_0$. En consecuencia X es Lindelöf y por tanto, X es quasi-Lindelöf. ■

Recordemos que si X es Hausdorff, entonces X es localmente compacto si y solo si cada punto tiene una base local de vecindades compactas. Entonces, tenemos el siguiente corolario

Corolario 4.26. *Si X es un espacio Hausdorff localmente compacto y casi Lindelöf entonces X es quasi-Lindelöf.*

Naturalmente, después de estudiar estas relaciones, como hemos hecho antes, continuaremos con el estudio del comportamiento de la propiedad quasi-Lindelöf con el producto topológico. Es de especial cuidado pues, para comenzar, de forma general, el producto de dos espacios quasi-Lindelöf no necesariamente es quasi-Lindelöf. Para esto, observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.27. *Recordemos la Proposición 3.57. En ella, si X denota al cuadrado lexicográfico, vimos que X^+ y X^- son dos espacios Lindelöf tales que $X^+ \times X^-$ no es débilmente Lindelöf. Sin embargo, por la Proposición 4.13, tenemos que X^+ y X^- son también quasi-Lindelöf. Finalmente, por la contrapuesta de la Proposición 4.3, como $X^+ \times X^-$ no es débilmente Lindelöf, entonces $X^+ \times X^-$ no es quasi-Lindelöf. Así, hemos exhibido dos espacios quasi-Lindelöf tales que su producto no es quasi-Lindelöf.*

Quizá ahora se intuya, como ha pasado con las otras tres clases de espacios estudiadas en este trabajo, que el producto de un espacio quasi-Lindelöf y el producto de un espacio compacto es quasi-Lindelöf. Sin embargo, este problema nos empuja a la segunda pregunta abierta lanzada por P. Staynova en [28].

Pregunta 4.28. *¿El producto de un espacio quasi-Lindelöf y un espacio compacto es quasi-Lindelöf?*

Sobre la misma vía de la Pregunta 4.28, tenemos el primer resultado concerniente al producto.

Proposición 4.29. *Si X es quasi-Lindelöf y D es discreto numerable entonces $X \times D$ es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Notemos que para cada $d \in D$ se tiene que $X \times \{d\}$ es quasi-Lindelöf. Observemos simplemente que $X \times D = \bigoplus_{d \in D} X \times \{d\}$. Gracias a la Proposición 4.21 se concluye que $X \times D$ es quasi-Lindelöf. ■

Regresando a la Pregunta 4.28, el hecho de que quede lanzada como pregunta abierta habla de la dificultad del problema. En [29], P. Staynova da una respuesta parcial que queda enunciada de la siguiente forma.

Proposición 4.30. *Si $Y = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ está equipado con la topología discreta y X es un espacio quasi-Lindelöf entonces $X \times Y$ es quasi-Lindelöf.*

Notemos que la prueba de la Proposición 4.30 es en realidad un corolario inmediato de lo dicho en la Proposición 4.29. De hecho, podría pensarse que con la Proposición 4.30, el camino para probar afirmativamente la Pregunta 4.28 está puesto. Desafortunadamente, este problema vuelve a enseñarnos que con un caso particular no basta para poder inferir el resultado del caso general y es que Yan-Kui Song, en [25], exhibe un ejemplo de un espacio Tychonoff quasi-Lindelöf y un espacio normal compacto tales que su producto no resulta quasi-Lindelöf. Esto queda en la siguiente proposición.

Proposición 4.31. *Existe un espacio X Tychonoff separable y un espacio compacto Y tal que $X \times Y$ no es quasi-Lindelöf.*

Demostración. Tomemos $\mathcal{U}$ la familia casi ajena del Ejemplo 4.6. Consideremos entonces $X = \Psi(\mathcal{U})$ el espacio de Mrówka-Isbell asociado a $\mathcal{U}$. Por la Proposición 4.8 i) sabemos que $\Psi(\mathcal{U})$ es separable y así, gracias al Corolario 4.10, $\Psi(\mathcal{U})$ es quasi-Lindelöf. Además, en virtud de la Proposición 4.8 iii), $\Psi(\mathcal{U})$ es Tychonoff. Notemos que $|\mathcal{U}| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. De esta forma, consideremos $D = \{d_\alpha \mid \alpha < \mathfrak{c}\}$ el espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ y sea entonces $Y = D \cup \{d^*\}$ la compactación por un punto de D. Tal compactación existe pues D es localmente compacto. Probemos entonces que $X \times Y$ no es quasi-Lindelöf.

Como $|\mathcal{U}| = \mathfrak{c}$ entonces $\mathcal{U} = \{R_\alpha \mid \alpha < \mathfrak{c}\}$. Definimos el conjunto

$$A = \{(R_\alpha, d_\alpha) \mid \alpha < \mathfrak{c}\}.$$

Afirmamos que A es cerrado. Tomemos entonces $(x,y) \in (X \times Y) \setminus A$. Si $y \neq d^*$ entonces $y = d_\alpha$ para alguna $\alpha < \mathfrak{c}$ y en consecuencia $x \neq R_\alpha$. Si consideramos entonces $U_x = \{R_\beta\} \cup R_\beta$ si $x = R_\beta$ para alguna $\beta \neq \alpha$ o $U_x = \{x\}$ si $x \in \omega$ y $V_y = \{d_\alpha\}$ entonces $U_x \times V_y$ no intersecta a A y por lo tanto

$$(x,y) \in U_x \times V_y \subseteq (X \times Y) \setminus A.$$

Si ahora $y = d^*$ y además $x \in \omega$ entonces $\{x\} \times Y$ es una vecindad de (x,y) que no intersecta a A y si $x = R_\beta$ para alguna $\beta \in \omega$ entonces se cumple que $(\{R_\beta\} \cup R_\beta) \times (Y \setminus \{d_\beta\})$ es una vecindad de (x,y) que no intersecta a A. Por lo tanto, de todos los casos se concluye que, en efecto, A es cerrado. Ahora, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ sea

$$U_\alpha = X \times \{d_\alpha\}.$$

Es claro que cada U_α es un abierto de $X \times Y$ pero más aún, si

$$\mathscr{U} = \{U_\alpha \mid \alpha < \mathfrak{c}\}$$

entonces $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de A. Ahora, consideremos $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ una subcolección numerable. Afirmamos que

$$\mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right) = \left(\bigcup \mathscr{U}_0\right) \cup (X \times \{d^*\}).$$

Notemos primero que si $\mathscr{U}_0 = \{U_\beta \mid \beta \in \omega\}$ entonces

$$\bigcup \mathscr{U}_0 = X \times \{d_\beta \mid \beta \in \omega\}.$$

En consecuencia

$$\mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right) = \mathrm{cl}_{X\times Y}\left(X \times \{d_\beta \mid \beta \in \omega\}\right) = X \times \mathrm{cl}_Y\left(\{d_\beta \mid \beta \in \omega\}\right).$$

Como en Y los abiertos que tienen a d^* son de la forma $Y \setminus A$ con A un subconjunto finito de Y, entonces cualquier abierto que tiene a d^* intersecta a $\{d_\beta \mid \beta \in \omega\}$ pues este último es infinito. Y más aún, cualquier otro punto $x \in Y \setminus (\{d_\beta \mid \beta \in \omega\} \cup \{d^*\})$ cumple que $\{x\}$ es un abierto que no intersecta a $\{d_\beta \mid \beta \in \omega\}$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_Y\left(\{d_\beta \mid \beta \in \omega\}\right) = \{d_\beta \mid \beta \in \omega\} \cup \{d^*\}$ y entonces

$$X \times \mathrm{cl}_Y\left(\{d_\beta \mid \beta \in \omega\}\right) = X \times \left(\{d_\beta \mid \beta \in \omega\} \cup \{d^*\}\right).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right) = (X\times\{d_\beta \mid \beta\in\omega\})\cup(X\times\{d^*\}) = \left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)\cup(X\times\{d^*\})\,. \tag{4.6}$$

Sea ahora $\alpha_0 = \sup\{\alpha \mid U_\alpha \in \mathscr{U}_0\}$. Entonces, como $\{\alpha \mid U_\alpha \in \mathscr{U}_0\}$ es numerable se tiene que $\alpha_0 < \mathfrak{c}$. Tomemos entonces $\alpha' > \alpha_0$. Así $U_{\alpha'} \notin \mathscr{U}_0$ y por lo tanto

$$(R_{\alpha'}, d_{\alpha'}) \notin \mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)$$

pues $U_{\alpha'}$ es el único elemento de $\mathscr{U}$ que contiene a $(R_{\alpha'}, d_{\alpha'})$ y por la Igualdad 4.6 se cumple que $\mathrm{cl}_{X\times Y}\left(\bigcup \mathscr{U}_0\right)\cap U_{\alpha'} = \emptyset$. En consecuencia, A es un cerrado para el cual existió una cubierta abierta sin subcolecciones numerables de cerradura densa. Entonces $X\times Y$ no es quasi-Lindelöf. ■

Finalmente, para concluir, observemos que lo demostrado en la Proposición 4.31 y la Proposición 3.40 nos permiten ver que, en general, el producto de un espacio débilmente Lindelöf con un separable tampoco resulta quasi-Lindelöf. Es, sin duda alguna, una de las propiedades más delicadas cuando del producto topológico se habla.

Bibliografía

[1] Arkhangelskii, A. V.: *A theorem on cardinality*. Uspekhi Mat. Nauk, 34(4):177–178, 1979.

[2] Aull, C.E. y R. Lowen: *Handbook of the History of General Topology*, volumen 1. Kluwer Academic Publishers, primera edición, 1997.

[3] Aull, C.E. y R. Lowen: *Handbook of the History of General Topology*, volumen 2. Kluwer Academic Publishers, primera edición, 1998.

[4] Aull, C.E. y R. Lowen: *Handbook of the History of General Topology*, volumen 3. Kluwer Academic Publishers, primera edición, 2001.

[5] Baker, C.W.: *Subcontra-continuous functions*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 21(1):19–24, 1998.

[6] Blair, R. L.: *Chain Conditions in Para-Lindelöf and related spaces*. Topology Proceedings, 11:247–266, 1986.

[7] Burke, D. K.: *Paralindelöf spaces and closed mappings*. Topology Proceedings, 5:47–57, 1980.

[8] Cammaroto, F. y G. Santoro: *Some counterexamples and properties on generalizations of Lindelöf spaces*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 19(4):737–746, sep 1996.

[9] Engelking, R.: *General Topology. Revised and completed edition*. Heldermann Verlag, primera edición, 1989.

[10] Escobedo, R. y M. I. Contreras: *Topología y sus aplicaciones*, volumen 6 de *Ciencias exactas*. BUAP. Dirección general de publicaciones, primera edición, 2018.

[11] Espinosa, María Fernanda Villaseñor: *Espacios de Moore e hiperespacios Pixley-Roy*. Tesis de Licenciatura, UNAM, 2019.

[12] Ewert, J. y S. P. Ponomarev: *On the generalized Lindelöf property*. Real Analysis Exchange, páginas 177–194, jul 1999.

[13] Fawakhreh, A. J. y A. Kiliçman: *Mappings and decompositions of continuity on almost Lindelöf spaces*. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, páginas 1–7, mar 2006.

[14] Frolik, Z.: *Generalizations of compact and Lindelöf spaces*. Czech. Math., 9, 1959.

[15] Gillman, L. y M. Jerison: *Rings of Continuous Functions*. Springer Verlag, primera edición, 1960.

[16] Hajnal, A. y I. Juhász: *On the Products of Weakly Lindelöf Spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, 48(2):454–456, 1975.

[17] Joseph, J. E.: *On H-Closed Spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society, 55(1):223–226, 1976.

[18] Kocev, D.: *Menger-type covering properties of topological spaces*. Filomat, 29(1):99–106, 2014.

[19] Kunen, K. y J. E. Vaughan: *Handbook of set-theoretic topology*. Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

[20] Mascarúa, A. T. y F. C. Segura: *Elementos de Topología General*. Instituto de Matemáticas. UNAM., primera edición, ene 2015.

[21] Misra, Arvind K.: *A topological view of P-spaces*. General Topology and its Applications, 2(4):349 – 362, 1972.

[22] Porter, J. R. y R. G. Woods: *Extensions and absolutes of Hausdorff spaces*. Springer Verlag, primera edición, 1980.

[23] Sarsak, M. S.: *On relatively almost Lindelöf subsets*. Acta Mathematica Hungarica, 97(1):109–114, 2002.

[24] Somasundaram, D. y G. Balasubramanian: *Locally Lindelöf spaces*. Mathematical chronicle, (9):137–143.

[25] Song, Y.: *Remarks on quasi-Lindelöf spaces*. Bulletin of the Australian Mathematical, 88:506–508, 2013.

[26] Song, Y.: *Some notes on quasi-Lindelöf spaces*. Quaestiones Mathematicae, 40(7):891–896, 2017.

[27] Song, Y. y Y. Zhang: *Some remarks on almost Lindelöf spaces and weakly Lindelöf spaces*. Matematicki Vesnick, 62(1):77–83, 2010.

[28] Staynova, P.: *A comparison of Lindelöf-type covering properties of topological spaces*. Rose-Hulman. Undergraduate Mathematics Journal, 12(2):1–42, 2011.

[29] Staynova, P.: *A Note on Quasi-Lindelöf Spaces*. Proceedings of the Forty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, dic 2012.

[30] Urysohn, P. y P. Alexandroff: *Zur Theorie der topologischen Räume*. Mathematische Annalen, 92:258–266, 1924.

[31] Willard, S. y U.N.B. Dissanayake: *The almost Lindelöf degree*. Canadian Mathematical Bulletin, 27(4):452–455, 1984.