UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA ENTROPÍA Y TURBULENCIA COMO CRITERIOS DE COMPLEJIDAD EN SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

GUILLERMO RAMÓN TORRES OLIN

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. BELÉN ESPINOSA LUCIO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

1. Datos del alumno
   Torres
   Olin
   Guillermo Ramón
   55 63 97 33 44
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   311268760

2. Datos de la tutora
   Dra
   Belén
   Espinosa
   Lucio

3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Javier
   Páez
   Cárdenas

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Gerardo
   Acosta
   García

5. Datos del sinodal 3
   M en C
   Leonel
   Rito
   Rodríguez

6. Datos del sinodal 4
   M en C
   Artico
   Ramírez
   Urrutia

7. Datos del trabajo escrito
   Estudio de la entropía y turbulencia como criterios de complejidad en sistemas dinámicos discretos
   93 p
   2019

Agradecimientos

A Irma y a Guillermo, por haberme dado la capacidad de tomar mis propias decisiones. Por haberme permitido cometer mis propios errores. Por su infinito apoyo. Por su infinito cariño. Por escucharme y enseñarme a escuchar.

A Belén, por aquel primer curso de Cálculo I, por heredarme el amor a la docencia, por tu ejemplo al tomar posturas firmes y por tu infinita paciencia.

A Koke, porque sin importar si vivimos juntos un mes o hablamos una vez a la semana, nunca dejo de sentir tu apoyo.

A Marcos. El Chewbacca de mi Han Solo, el James Wilson de mi Gregory House. Por las gráficas para toda mi tesis. Por tu guía, tu escucha, tu cariño y tu cuidado.

A Ana, por haber sido el *antes* y el *después*. Por todo el tiempo que crecimos y aprendimos juntxs.

A Daniel, por toda la música, por todas las películas, por las noches de Halo, y más aún, por recordarme que el matemático no sólo vive de matemáticas.

A Dave por ser mi sensei. A Aceves, el Max Chinasky de mi Shot Paradise. A Kat por todo el chisme. A Omar por los solos de guitarra. A Dan por ser de la misma tierra. Y al *Sitio*, por ser mi familia en Ciencias.

Índice general

Introducción

En el estudio de los sistemas dinámicos discretos, dada una función f definida en un espacio métrico X, se pretende entender y caracterizar el "comportamiento"de dicha función respecto al paso del tiempo. Este "pasar del tiempo"se asocia de manera natural (y de forma discreta) con las iteraciones de la función (es decir f^n con n natural); así, analizando el comportamiento de la función conforme iteramos f sabremos si dicho sistema involucra un movimiento simple o complejo. El presente trabajo desarrolla la construcción de una herramienta que identifica la dinámica de la iteración f^2 de forma binaria, el cual es el resultado principal de esta tesis así como del artículo [Block and Coven, 1986]:

Sea $f\colon I \longrightarrow I$ continua. Si cada punto en I es recurrente por cadenas bajo f, entonces o bien f^2 es turbulenta o f^2 es la identidad.

Para lograr esto es necesario entender nociones básicas dentro de los sistemas dinámicos discretos, y para ello, enunciarémos en el primer capítulo algunos conceptos y resultados básicos dentro del análisis y la topología de espacios métricos (particularmente del intervalo $[0, 1]$).

Presentaremos en el segundo capítulo conceptos como *órbita*, *periodo de una función* y *puntos no errantes* (por mencionar algunos) para pasar después al estudio de un concepto un poco más sofisticado: *puntos recurrentes por cadenas (bajo f).* Esta definición es imprescindible por su forma de generalizar a los *puntos periódicos* y por la forma en que determinan la dinámica de una función. Los puntos recurrentes por cadenas son particularmente interesantes debido a su doble formulación: tanto métrica, como topológica; naturalmente, en el Teorema 3.1, probaremos la equivalencia de estas definiciones en espacios métricos a partir del trabajo de [Block and Franke, 1985]. Todo esto queda plasmado en el tercer capítulo.

Es importante señalar que debido a la carencia de detalle en las demostraciones de los artículos [Block and Coven, 1986] y [Block and Franke, 1985] las pruebas presentadas en el Capítulo 3 se desarrollaron de forma propia. Es así que presentamos un Apéndice A, donde se incluye un pequeño estudio de los *conjuntos atractores*, así como las demostraciones detalladas de las herramientas necesarias para la prueba del Teorema 3.1.

Habiendo presentado tales herramientas, pasamos a analizar criterios de complejidad en este tipo de sistemas como son la *entropía topológica* y la *turbulencia*. Estudiaremos al primero como una medida numérica y al segundo como una propiedad en la dinámica. Esto en el cuarto y quinto capítulo respectivamente.

Finalmente, dedicamos el sexto capítulo a la presentación y demostración de los resultados principales: utilizaremos la hipótesis de la recurrencia por cadenas para obtener propiedades interesantes y distintos teoremas sobre la entropía y la turbulencia de las funciones, terminando así este estudio de la complejidad en sistemas dinámicos discretos.

Capítulo 1

Preliminares

Para la correcta comprensión de este trabajo se recomienda tener presente la formulación y manejo de los siguientes conceptos y resultados.

Con excepción de un par de resultados finales, cuyas demostraciones destacan por su simpleza e importancia, no se proporcionarán pruebas en este capítulo ya que los conceptos y las herramientas aquí expuestas forman parte de cursos básicos en el estudio de los sistemas dinámicos discretos.

A menos que se especifique algo distinto, X denotará siempre un espacio métrico arbitrario.

Proposición 1.1. Sean X un espacio topológico cualquiera y $f\colon X \longrightarrow X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es continua.

(ii) Para todo conjunto abierto $U \subseteq X$, $f^{-1}(U)$ es abierto.

(iii) Para todo conjunto cerrado $F \subseteq X$, $f^{-1}(F)$ es cerrado.

(iv) Para todo conjunto $Y \subseteq X$, $f\left(\overline{Y}\right) \subseteq \overline{f(Y)}$.

(v) Para todo conjunto $Y \subseteq X$, $\overline{f^{-1}(Y)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{Y}\right)$.

Corolario 1.1. Para toda $m \in \mathbb{N}$, $f^m\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{f^m(U)}$.

Teorema 1.1. (Valor Intermedio) Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f\colon A \longrightarrow A$ una función continua en A. Sean a y b puntos de A tales que $a < b$, y sea $M \in \mathbb{R}$. Si alguna de las siguientes dos condiciones se cumple:

(i) $f(a) < M < f(b)$,

(ii) $f(a) > M > f(b)$,

entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$.

Teorema 1.2. Supóngase que f y g son continuas en $[a,b]$ y que $f(a) \leq g(b)$, pero $f(b) \geq g(b)$. Entonces existe un punto $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = g(x)$.

Definición 1.1. Decimos que $f\colon X \longrightarrow X$ es *uniformemente continua en* X si para todo número $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cualesquiera dos puntos en X que cumplan $d(x,y) < \delta$, cumplen a su vez $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Definición 1.2. Sea X un espacio topológico cualquiera.

(i) Llamamos a α *cubierta* del espacio, si α es una familia de conjuntos de X y si α cubre al espacio, es decir, si dado un punto $x \in X$ existe $U \in \alpha$ tal que $x \in U$.

(ii) Decimos que α es una *cubierta abierta* del espacio X si α es cubierta y además si está compuesta únicamente de conjuntos abiertos de X.

(iii) Dada una cubierta α de X, decimos que β es una *subcubierta* de α si cubre al espacio X y si todo elemento $U \in \beta$ es a su vez elemento de α.

Definición 1.3. Definimos a X como un *espacio compacto* si para toda cubierta abierta α, existe una subcubierta β de α para el espacio X tal que es de cardinalidad finita.

Proposición 1.2. Sean X un espacio métrico compacto y $f\colon X \longrightarrow X$ una función. Entonces f es continua si y sólo si es uniformemente continua.

Aunque existen muchas propiedades de los espacios métricos compactos, en este trabajo bastan un par de propiedades elementales para avanzar en nuestro estudio de los sistemas dinámicos. En la siguiente proposición se enlistan las propiedades que utilizaremos.

Proposición 1.3. Sean X un espacio métrico compacto y Y un subconjunto de X.

(i) Y es cerrado si y sólo si Y es compacto.

(ii) Si $f\colon X \longrightarrow X$ es continua y $Y \subseteq X$ compacto, entonces $f^n(Y)$ es compacto para todo natural n.

(iii) Sea Y un subconjunto compacto de X. Toda sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de Y contiene una subsucesión convergente en Y.

En un contexto distinto lo siguiente es considerado como la condición de *normalidad* para un espacio topológico. Sin embargo, para poder enfocarnos en el contexto de los sistemas dinámicos discretos, únicamente demostraremos esta condición como una propiedad de los espacios métricos.

Lema 1.1. Para cualesquiera dos conjuntos cerrados ajenos $F_1, F_2 \subseteq X$, existen conjuntos abiertos ajenos $U_1, U_2 \subseteq X$, tales que $F_1 \subseteq U_1$ y $F_2 \subseteq U_2$.

Demostración. Sean $F_1, F_2 \subseteq X$ conjuntos cerrados ajenos. Para cada $x \in F_1 \subseteq X \setminus F_2$, como $X \setminus F_2$ es abierto, existe una $\delta_x > 0$ tal que $B(x, \delta_x) \subseteq X \setminus F_2$. De la misma forma, para cada $z \in F_2 \subseteq X \setminus F_1$ existe una $\varepsilon_z > 0$ tal que $B(z, \varepsilon_z) \subseteq X \setminus F_1$. Definimos ahora los siguientes dos conjuntos:

$$U = \bigcup_{x \in F_1} B\left(x, \tfrac{\delta_x}{3}\right) \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{z \in F_2} B\left(z, \tfrac{\varepsilon_z}{3}\right)$$

Veamos entonces que para cualesquiera puntos $x \in F_1$ y $z \in F_2$, se cumple que $B\left(x, \frac{\delta_x}{3}\right) \cap B\left(z, \frac{\varepsilon_z}{3}\right) = \emptyset$. Si suponemos que existe un punto $w \in B\left(x, \frac{\delta_x}{3}\right) \cap B\left(z, \frac{\varepsilon_z}{3}\right)$, entonces $d(x,z) \leq d(x,w) + d(w,z) < \text{máx}\{\delta_x, \varepsilon_z\}$. Es decir, se cumple que $x \in B\left(z, \frac{\varepsilon_z}{3}\right) \subseteq X \setminus F_1$ o que $z \in B\left(x, \frac{\delta_x}{3}\right) \subseteq X \setminus F_2$. En cualquiera de los dos casos tenemos una contradicción. Por lo tanto $U \cap V = \emptyset$, además de que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$.

■

Proposición 1.4. Dado cualquier abierto $U \subseteq X$ y cualquier cerrado $F \subseteq U$, existe V abierto de X con la propiedad de que

$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

Demostración. Tomemos $F \subseteq U \subseteq X$ conjuntos tales que F es cerrado y U es abierto. Por el lema anterior, existen V_1 y V_2 abiertos ajenos del espacio X, tales que $F \subseteq V_1$ y $X \setminus U \subseteq V_2$. Con esto, se cumple que $F \subseteq V_1 \subseteq X \setminus V_2 \subseteq U$. Como $X \setminus V_2$ es cerrado, podemos concluir que

$$F \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq X \setminus V_2 \subseteq U.$$

■

Capítulo 2

Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un organismo cambiante, o propenso al cambio. Es un conjunto de elementos que describen la evolución de un sistema.

El conocimiento matemático producido por personas de distintas razas, géneros e identidades, alrededor del mundo y a lo largo de la historia, es un sistema dinámico. El lenguaje, por ejemplo, no está escrito en piedra, se ha ido modificando y actualizando por las mismas personas conforme a sus necesidades y al contexto. Sus elementos cambian, y las relaciones entre ellos también: agregamos palabras nuevas a nuestro vocabulario y modificamos las reglas gramaticales para poder pensar y expresarnos mejor. La cuestión entonces no es si cambia o no el lenguaje, sino en *función* de qué cambia, ¿cuál es la regla que permite describir su evolución? Puede ser que el lenguaje se transforme en *función* de una expresión parsimoniosa, o quizá en *función* de una crisis de derechos humanos a nivel global. O tal vez, al tratarse de la forma en que pensamos, expresamos e interpretamos el mundo, el lenguaje se modifique en *función* de estas dos cosas y otras más. En los sistemas dinámicos es preciso tener en cuenta la *complejidad* de cada problema, lo que significa que no podemos determinar el cambio de un sistema de forma parcial y sesgada, ignorando factores que no nos parezcan agradables.

Es entonces cuando de inmediato podemos darnos cuenta que diferentes sistemas tienen un nivel distinto de *complejidad* y *dinámica*: no es lo mismo estudiar la influencia militar de Alemania, a nivel mundial, a lo largo del siglo XX que la influencia militar de Botsuana en el siglo XXI. Tampoco podríamos igualar la *dinámica* familiar en una familia europea occidental de clase media, a una familia latinoamericana patriarcal y machista.

¿Qué diferencía un sistema dinámico de otro? Para empezar sus objetos o sujetos de estudio. Después, el contexto: dónde se encuentras sitiados estos elementos, el momento histórico, el lugar geográfico o el espacio topológico. En particular, una característica determinante en un sistema dinámico, que incluso nos obliga a separar esta rama de las matemáticas en dos, es la forma en que medimos el tiempo.

Se define un *sistema dinámico discreto* cuando medimos el tiempo de forma tal que cualesquiera dos puntos en el tiempo t_1 y t_2 están "bien separados", es decir, el tiempo se mide respecto a un conjunto *discreto*. En el caso de este trabajo, el tiempo siempre será asociado al conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Un ejemplo de esto es que, al estudiar empíricamente fenómenos físicos o sociales, dadas dos mediciones iniciales en tiempos t_1 y t_2, es imposible medir lo que sucede en un tiempo t, para todo t número real entre t_1 y t_2. Esto es, la capacidad físico-espacial de nuestros instrumentos de medición funcionan irremediablemente en tiempos discretos.

Por otro lado, cuando nuestro conjunto respecto al cual asociamos la variable de tiempo es un subintervalo de los números reales, decimos que el sistema dinámico con el cual trabajamos es *continuo*. Aún cuando es difícil asociar en la practica sistemas dinámicos continuos con mediciones empíricas, la teoría matemática al rededor de esta clase de sistemas es basta y en constante expansión.

Una vez dicho esto, presentaremos los elementos que definen a este trabajo como parte del estudio de los sistemas dinámicos discretos. En todo momento X denotará un espacio métrico arbitrario, $I = [0, 1]$ y f una función continua a menos que se especifique algo distinto.

Definición 2.1. Sean $f \colon X \longrightarrow X$ una función cualquiera y x_0 un elemento de X. Definimos la *órbita de x_0 bajo f* como el conjunto:

$$\begin{aligned} o\left(x_0, f\right) &= \left\{x_0, f\left(x_0\right), f^2\left(x_0\right), f^3\left(x_0\right), \ldots\right\} \\ &= \left\{f^n\left(x_0\right) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}. \end{aligned}$$

Observación 2.1. Podemos trabajar intuitivamente a la órbita de un punto como sigue: En el tiempo $n = 0$ un objeto cualquiera se encuentra en el estado x_0; en el tiempo $n = 1$ el mismo objeto ahora se encuentra en el estado $f\left(x_0\right)$. Recursivamente, para un tiempo $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, nuestro objeto estará en el estado $f^n\left(x_0\right)$.

Así, la pareja (X, f) es una sencilla descripción de un concepto mucho más complejo: un modelo matemático sobre cómo cambia un sistema respecto al tiempo. Este cambio es lo que permite trabajar el sistema como *dinámico*, y el hecho de considerar el tiempo respecto a cada numero natural en $\mathbb{N}$ es lo que lo hace *discreto*.

Ejemplo 2.1. Consideremos la función continua $f \colon I \longrightarrow I$ definida como $f\left(x\right) = 4x\left(1 - x\right)$.

Sea $x_0 = \frac{1}{8}$. Tomando las primeras tres iteraciones de x_0 obtenemos:

$$f\left(\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{7}{16};\ f\left(\tfrac{7}{16}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{9}{16}\right) = \tfrac{9}{32};\ f\left(\tfrac{9}{32}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{23}{32}\right) = \tfrac{23}{64}.$$

Por lo tanto la órbita de $\frac{1}{8}$ bajo f incluye estos tres puntos, *i.e.*

$$o\left(\tfrac{1}{8}, f\right) = \left\{\tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{16}, \tfrac{9}{32}, \tfrac{23}{64}, \ldots\right\}.$$

Esta función se conoce con el nombre de *función logística*.

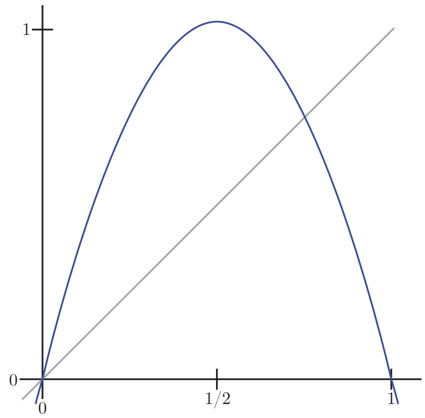

Figura 2.1: Gráfica de la función logística en $[0, 1]$.

Definición 2.2. Sea $f\colon X \longrightarrow X$. Decimos que x_0 es un *punto fijo de* f si $f(x_0) = x_0$. Al conjunto de puntos fijos de f lo llamamos $\mathrm{Fix}(f)$.

Observación 2.2.

(I) Vale la pena notar que la órbita bajo f de un punto fijo x_0 es:

$$o(x_0, f) = \{x_0\}.$$

(II) Si x_0 es un punto fijo entonces para cada n se tiene que $f^n(x_0) = x_0$. Así, la órbita $o(x_0, f)$ es un conjunto con un único elemento: x_0. Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = x_0$.

(III) $\mathrm{Fix}(f)$ es un conjunto cerrado.

Ejemplo 2.2. Tomando de nuevo la función $f(x) = 4x(1-x)$, notemos que pasa lo siguiente: $x = 4x(1-x) \Leftrightarrow x = 4x - 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}x$. Ahora, si $x = 0$ la igualdad se preserva, por lo tanto $x_1 = 0$ es un punto fijo de f. Si por otro lado, $0 < x$, entonces $x = \frac{3}{4}$. Así, nuestra función f tiene dos puntos fijos: $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{3}{4}$.

Ejemplo 2.3. Definamos la *función identidad* $id\colon X \longrightarrow X$ como $id(x) = x$.

Inmediato de la definición de la función tenemos que $\mathrm{Fix}(id) = X$. Es decir, todos los puntos de X son fijos bajo id.

Lema 2.1. Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f\colon A \longrightarrow A$ una función continua. Para todo $[a, b] \subseteq A$ se cumple lo siguiente.

(I) Si $f([a,b]) \subseteq [a,b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a,b]$.

(II) Si $[a,b] \subseteq f([a,b])$, entonces f tiene un punto fijo en $[a,b]$.

Demostración. Para probar el inciso (I), como $f([a,b]) \subseteq [a,b]$, se sigue entonces que $id(a) = a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b = id(b)$. Por lo tanto, por el Teorema Del Valor Intermedio, existe un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = id(x_0) = x_0$. Es decir, un punto fijo.

En el inciso (II), si $[a,b] \subseteq f([a,b])$, entonces existen $\alpha, \beta \in [a,b]$ tal que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$. Así, notemos que: $f(\alpha) = a \leq \alpha = id(\alpha)$ y $id(\beta) = \beta \leq b = f(\beta)$. Entonces, por el Teorema Del Valor Intermedio, existe un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que $id(x_0) = f(x_0) = x_0$, esto es, un punto fijo.

■

Proposición 2.1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f\colon A \longrightarrow A$ una función continua. Sean $[a,b]$ y $[c,d]$ dos intervalos contenidos en A. Si $[c,d] \subseteq f([a,b])$, entonces existe un intervalo $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$, tal que $f([\alpha,\beta]) = [c,d]$.

Demostración. Teniendo $[c,d] \subseteq f([a,b])$ podemos encontrar dos puntos $\xi, \eta \in [a,b]$ tal que $f(\xi) = c$ y $f(\eta) = d$. Sin pérdida de la generalidad suponemos $\xi < \eta$ y tomamos el punto $\alpha = \max\{x \in [\xi,\eta]\colon f(x) = c\}$. Por el Teorema Del Valor Intermedio, $[c,d] \subseteq f([\alpha,\eta])$. Entonces tomamos ahora el punto $\beta = \min\{x \in [\alpha,\eta]\colon f(x) = d\}$. Así, por la definición de los puntos α y β, obtenemos $f([\alpha,\beta]) = [c,d]$.

■

Proposición 2.2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f\colon A \longrightarrow A$ continua. Sean $J_0, J_1, \ldots, J_n$, $n+1$ intervalos compactos contenidos en A tales que para cada $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ pasa que

$$J_{i+1} \subseteq f(J_i)\,.$$

Entonces existe un intervalo compacto $K \subseteq J_0$ tal que $f^n(K) = J_n$, y para cada $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ sucede que

$$f^i(K) \subseteq J_i.$$

Si además $J_0 \subseteq J_n$, entonces existe un punto $y \in J_0$ tal que $f^i(y) \in J_i$ para cada $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, y $f^n(y) = y$.

Demostración. Para demostrar el caso $n = 1$, la Proposición 2.1 da la primera parte y el Lema 2.1 la existencia del punto fijo.

Sea $n > 1$ y supongamos que la afirmación se cumple para $n-1$, esto es, siempre que tengamos n intervalos como en las hipótesis, se cumplirá el resultado.

Ahora sean $J_0, J_1, \ldots, J_n$ intervalos como en las hipótesis. Aplicando nuestra hipótesis de inducción a la colección $J_1, J_2, \ldots, J_n$, obtendremos la existencia

de $K_1 \subseteq J_1$ intervalo compacto tal que $f^{n-1}(K_1) = J_n$, y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ cumple
$$f^i(K_1) \subseteq J_{i+1}.$$

Así, por la Proposición 2.1, existe un intervalo compacto $K \subseteq J_0$ tal que $f(K) = K_1$, y por lo tanto, para dada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$f^i(K) = f^{i-1}(f(K)) = f^{i-1}(K_1) \subset J_i.$$

Además, $f^n(K) = f^{n-1}(K_1) = J_n$.

Finalmente, como $J_n = f^n(K)$, si $J_0 \subseteq J_n$, entonces $K \subseteq J_0 \subseteq f^n(K) = J_n$. Por lo tanto, del Lema 2.1, existe un punto $y \in K \subseteq f^n(K)$ tal que $f^n(y) = y$. Como $f^i(K) \subseteq J_i$, se sigue que $f^i(y) \in J_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

■

Definición 2.3. Sean $f\colon X \longrightarrow X$ y $x_0 \in X$.

(i) Llamamos a x_0 un *punto periódico de* f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$.

(ii) Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos por $\operatorname{Per}(f)$.

(iii) Si $x_0 \in \operatorname{Per}(f)$ diremos que $o(x_0, f)$ es una *órbita periódica*.

(iv) Si $k = \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}$, decimos que x_0 tiene *periodo* k, y su órbita está dada por $o(x_0, f) = \left\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\right\}$.

Ejemplo 2.4. Sea $f\colon [0,4] \longrightarrow [0,4]$ la función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x = 1, \\ 3, & \text{si } x = 2, \\ 1, & \text{si } x = 3, \\ 0, & \text{si } x \neq 1, 2, 3. \end{cases}$$

Por como definimos nuestra función podemos observar que $x = 1$ es un punto de periodo 3, pues

$$\begin{aligned} f(1) &= 2, \\ f^2(1) &= f(f(1)) = f(2) = 3, \\ f^3(1) &= f\left(f^2(1)\right) = f(3) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la órbita del punto $x = 1$ será el conjunto $o(1, f) = \{1, 2, 3\}$. Más aún, por el mismo razonamiento, tanto $z = 2$ como $w = 3$ serán también puntos de periodo 3 de la función, y tendremos la siguiente igualdad de conjuntos:

$$o(1, f) = \{1, 2, 3\} = o(2, f) = o(3, f).$$

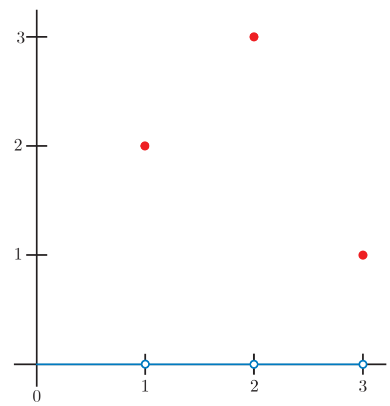

Figura 2.2: Gráfica de la función f en el ejemplo 2.4.

Observación 2.3. Procediendo por inducción no es difícil probar lo siguiente:

(I) Todo punto z en la órbita de un punto x de periodo n, es a su vez de periodo n.

(II) Cuando un punto x tiene periodo n, entonces $f^{mn}(x) = x$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(III) Si consideramos las sucesiones $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f^n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, con z en la órbita del punto x, aún cuando estas tienen el mismo rango, como sucesiones son distintas.

Ejemplo 2.5. Consideremos una función $f\colon I \longrightarrow I$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Notemos de inmediato que los únicos puntos fijos de f son 0 y $\frac{3}{4}$, pues si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ entonces $f(x) = 2x$, y la igualdad $2x = x$ sólo se cumple cuando $x = 0$. Por otro lado, si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, y $\frac{3}{2} - x = x$, entonces $\frac{3}{2} = 2x$ y por lo tanto $\frac{3}{4} = x$.

Veamos qué sucede con un punto $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ y con $f^2(x)$. Por la definición de nuestra función, sucede que $f(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, y por lo tanto, la segunda iteración está dada por

$$f^2(x) = f\left(\tfrac{3}{2} - x\right) = \tfrac{3}{2} - \left(\tfrac{3}{2} - x\right) = x.$$

En otras palabras, todo punto en $[\frac{1}{2}, 1]$ es de periodo 2 (a excepción de $\frac{3}{4}$).

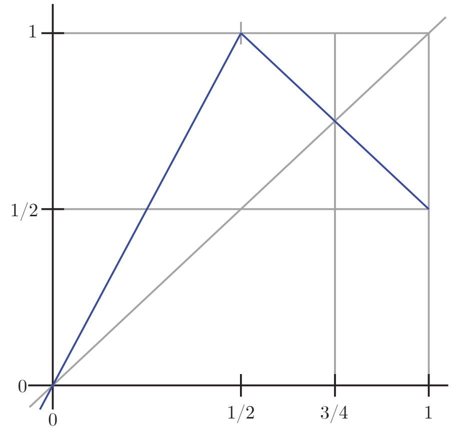

Figura 2.3: Gráfica de la función f del ejemplo 2.5.

Ahora, como f es estrictamente creciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, al aplicar la función repetidamente a un punto $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ eventualmente las iteraciones llegan al intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, y a partir de ahí la órbita oscila sólo entre dos puntos.

En otras palabras, para todo punto $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, existe un natural $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$. Y por lo tanto $f^m(x) \in \mathrm{Per}(f)$. Los puntos que cumplen esta propiedad son llamados *puntos preperiódicos*, más explícitamente, todo punto $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ es un punto preperiódico. Esto se deja enunciado en la siguiente definición.

Definición 2.4. Decimos que un punto x es un *punto preperiódico*, o tiene *órbita preperiódica*, bajo f si existe $m \in \mathbb{N}$ de tal forma que $f^m(x) \in \mathrm{Per}(f)$.

Observación 2.4. Si una función no tiene puntos *periódicos*, tampoco tiene puntos *preperiódicos*.

Ejemplo 2.6. Sea $f\colon I \longrightarrow I$ definida como $f(x) = x^2$.

Si analizamos la órbita del punto $x_0 = \frac{1}{2}$, obtenemos que

$$o\left(\tfrac{1}{2}, f\right) = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{64}, \ldots\right\} = \left\{\tfrac{1}{x^{2n}} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Y nosotros sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.

El ejemplo anterior permite entonces definir un nuevo tipo de puntos: aquellos cuya órbita, vista como sucesión, tiende a un determinado elemento cuando $n \to \infty$.

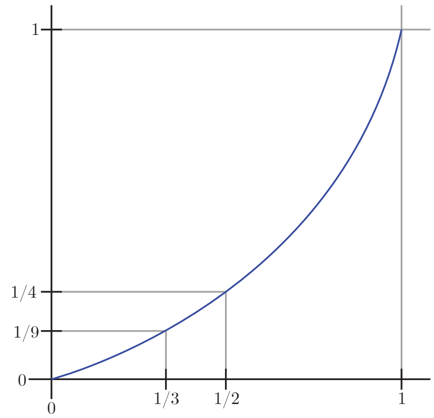

Figura 2.4: Función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Definición 2.5. Llamamos a un punto $x \in X$ *asintóticamente fijo*, o de *órbita asintóticamente fija*, si existe algún punto $y \in X$ bajo la función f tal que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = y.$$

Observación 2.5. De la Definición 2.5 se sigue que, como f es continua, entonces

$$y = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(x)\right) = f(y).$$

Es decir, y es un punto fijo.

Ejemplo 2.7. Tomemos de nuevo la función del ejemplo 2.1 dada por $f(x) = 4x(1-x)$.

Consideremos el punto $x_0 = \frac{1}{4} \in [0, 1]$ y observemos que sus iteraciones bajo f son

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{4}\right) &= 4 \cdot \tfrac{1}{4}\left(1 - \tfrac{1}{4}\right) = \left(1 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{3}{4}, \\ f\left(\tfrac{3}{4}\right) &= \tfrac{3}{4} \cdot 4\left(1 - \tfrac{3}{4}\right) = 3 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir dos cosas: primero que el punto $\frac{3}{4}$ es un punto fijo de la función f; y segundo, que el punto $\frac{1}{4}$ tiene órbita asintóticamente fija, pues para toda $n \geq 2$ se tiene que $f^n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f^n\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{3}{4}.$$

Definición 2.6. Decimos que un punto $x \in X$ es *asintóticamente periódico*, o tiene *órbita asintóticamente periódica*, si existe un punto $y \in X$ periódico tal que

$$\lim_{j\to\infty} d\left(f^j(x), f^j(y)\right) = 0.$$

Observación 2.6. De la definición anterior se sigue lo siguiente.

(I) Todo punto asintóticamente fijo, así como todo punto preperiódico, es asintóticamente periódico.

(II) Un punto asintóticamente periódico es tal que su órbita “sigue de cerca” a la órbita de algún punto y periódico, o mejor dicho, “la sigue acercándose cada vez más”.

Proposición 2.3. Sea $x \in I$ tal que este es un punto asintóticamente periódico de la función $f\colon I \longrightarrow I$. Entonces x es asintóticamente fijo de f^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como x es un punto asintóticamente periódico, sabemos que existe $y \in I$ de periodo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{j\to\infty} |f^j(x) - f^j(y)| = 0$. Entonces $\lim_{k\to\infty} |f^{nk}(x) - f^{nk}(y)| = 0$. Como y es un punto fijo de la función f^n, entonces

$$\lim_{k\to\infty} |f^{nk}(x) - f^{nk}(y)| = \lim_{k\to\infty} |f^{nk}(x) - y| = 0.$$

Lo que implica que $\lim_{k\to\infty} (f^n)^k(x) = y$. Por lo tanto x es un punto asintóticamente fijo de f^n.

■

Consideremos por un segundo la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x+1$. No es difícil ver que para todo punto $x \in \mathbb{R}$, se cumple que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{n\to\infty} x+n = \infty$, lo que muestra que esta función no tiene órbitas periódicas. De esto se sigue inmediatamente que la función tampoco tiene órbitas preperiódicas, ni órbitas asintóticamente fijas, y por lo tanto, tampoco órbitas asintóticamente periódicas.

Pero una característica aún más interesante de esta función es que si consideramos cualquier punto $p \in \mathbb{R}$ y tomamos el intervalo $\left(p - \frac{1}{4}, p + \frac{1}{4}\right) = J$, donde la longitud de J es $\frac{1}{2}$ y nuestra función es una traslación de magnitud 1, entonces $J \cap f(J) = \emptyset$ (esto se aprecia en la figura 2.5). De la misma forma para las siguientes iteraciones.

Puesto en otras palabras: para cualquier $x \in J$ se cumple que $f^n(x) \notin J$. Esto quedará definido formalmente a continuación.

Definición 2.7. Sea $f\colon X \longrightarrow X$. Decimos que $p \in X$ es un *punto errante* de f si existe un abierto $J \subseteq X$, con $p \in J$, tal que para todo punto $x \in J$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^n(x) \notin J$.

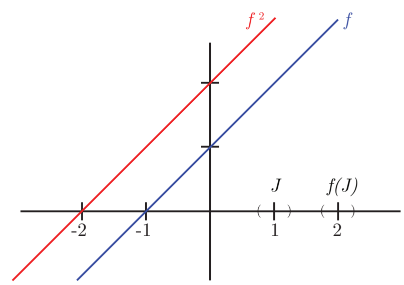

Figura 2.5: En azul está representada la función $f(x) = x + 1$ y en rojo su iteración $f^2(x) = x + 2$.

Observación 2.7. De la definición anterior se desprenden las siguientes observaciones:

(I) Negando la definición de *punto errante* obtenemos el concepto de *punto no errante*. Es decir, un punto $p \in X$ es un punto no errante de f si para todo abierto $J \subseteq X$, con $p \in J$, existen $x \in J$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in J$. Al conjunto de todos los puntos no errantes de f lo denotamos por $\Omega(f)$.

(II) Si x es un punto periódico de f, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Así, para cualquier $J \subseteq X$ abierto que contenga a x, se tiene también que $f^n(x) \in J$. Esto es, x es un punto *no errante* de f. Lo anterior se puede expresar también diciendo que $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Per}(f) \subseteq \Omega(f)$.

(III) De la Definición 2.7 se sigue que todo punto en el abierto J es errante, y así, para toda $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $f^n(J) \cap J = \emptyset$. Llamemos entonces al abierto J de esta definición *abierto errante*. Con esto, para cada punto errante existe un abierto errante, y todo punto de un abierto errante es un punto errante.

Ejemplo 2.8. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1$. Definamos $f \colon I \longrightarrow I$ como $f(x) = x^n$.

Sabemos bien que 0 y 1 son puntos fijos de f, entonces $\{0, 1\} \subseteq \Omega(f)$. Ahora, también tenemos que si $0 < x < 1$, entonces $f(x) = x^n < x$, por lo tanto $x^n < \frac{x+x^n}{2}$, y así, $x < \left(\frac{x+x^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$. Llamemos $y = \left(\frac{x+x^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Si llamamos $J = (x, y)$, entonces $f(J) = (x^n, y^n)$. Pero $y^n = \frac{x+x^n}{2}$ punto medio que cumple $x^n < \frac{x+x^n}{2} < x$. Por lo tanto $J \cap f(J) = \emptyset$.

Tomemos ahora cualquier número $k \in \mathbb{N}$. Como $0 < x < 1$, se sigue entonces que $x^k < x$ y también que $x^{(nk)} < x$. Por lo tanto $x < x^{\frac{1}{k}}$ y $x^n < x^{\frac{1}{k}}$. Y por lo tanto $x + x^n < 2x^{\frac{1}{k}}$. De esta forma

$$x + x^n < 2x^{\frac{1}{k}} \Leftrightarrow \frac{x + x^n}{2} < x^{\frac{1}{k}} \Leftrightarrow \left(\frac{x + x^n}{2}\right)^k < x.$$

Por lo tanto si $x < y$ entonces $x^{nk} < y^{nk} = \left(\frac{x+x^n}{2}\right)^k$, es decir, $y^{nk} < x$. Lo cual permite concluir que $J \cap f^k(J) = \emptyset$, y esto para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, todo punto $x \in (0,1)$ es errante, concluyendo que $\Omega(f) = \{1, 0\}$.

Proposición 2.4. Para cualquier función $f\colon X \longrightarrow X$ se tiene que el conjunto $\Omega(f)$ es cerrado.

Demostración. Como todo punto errante pertenece a un abierto errante, obtenemos que

$$X \setminus \Omega(f) \subseteq \bigcup_{J \subseteq X} J, \quad \text{con J abierto errante de } f.$$

Reciprocamente, todo punto en un abierto errante es errante, por lo tanto

$$\bigcup_{J \subseteq X} J \subseteq X \setminus \Omega(f), \quad \text{con J abierto errante de } f.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X \setminus \Omega(f) &= \{x \in X : x \text{ es punto errante}\} \\ &= \{x \in X : x \in J, \text{ con J abierto errante de } f\} \\ &= \bigcup_{J \subseteq X} J. \end{aligned}$$

Y como bien sabemos, el complemento de un abierto es cerrado.

■

Para concluir nuestro pequeño estudio de los puntos periódicos de una función, mencionaremos el renombrado y multicitado *Teorema de Sharkovskii*. Siendo la demostración de este teorema (así como las herramientas necesarias para lograrlo) un resultado tan explorado y trabajado, su prueba no será proporcionada, ya que escapa a los objetivos de este escrito. Sin embargo, nuestro protagonista L. S. Block (junto con algunos colegas) proporciona una demostración de este teorema en [Block et al., 1980].

Definición 2.8. Tomando en cuenta el conjunto de los números naturales, definimos para $\mathbb{N}$ el *orden de Sharkovskii* (denotado por $\triangleright$) como:

$$\begin{aligned} &3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \cdots \\ &2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright 2 \cdot 9 \triangleright \cdots \\ &2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright 2^2 \cdot 9 \triangleright \cdots \\ &2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright 2^3 \cdot 9 \triangleright \\ &\cdots \\ &\cdots \triangleright 2^5 \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1 \end{aligned}$$

Teorema 2.1. (Sharkovskii) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Sean n y m números naturales.

(I) Si una función continua $f\colon A \longrightarrow A$ tiene un punto de periodo n y $n \rhd m$ en el orden de Sharkovskii, entonces f tiene un punto de periodo m.

(II) Si $m \rhd n$, entonces existe una función continua $f\colon A \longrightarrow A$ tal que tiene un punto de periodo n, pero no tiene puntos de periodo m.

(III) Existe una función continua $f\colon A \longrightarrow A$ que tiene puntos periódicos de periodo 2^k para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y no tiene puntos periódicos de ningún otro periodo.

El siguiente resultado, aunque en este trabajo se muestra como corolario, es de suma importancia histórica y es atribuido a Tien-Yien Li y James A. Yorke.

Corolario 2.1. (Li-Yorke) Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f\colon A \longrightarrow A$. Si f tiene un punto de periodo 3, entonces f tiene puntos de todos los periodos.

Demostración. La demostración es totalmente directa del Teorema de Sharkovskii, sin embargo enunciamos este resultado como una proposición individual porque no deja de ser impresionante.

■

Proposición 2.5. Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f\colon A \longrightarrow A$. Si f^2 tiene puntos de todos los periodos, entonces f tiene puntos de todo periodo par.

Demostración. Tomando $n \in \mathbb{N}$, probaremos que f tiene un punto de periodo $2n$.

Por hipótesis f^2 tiene un punto de periodo n. Es decir, existe un punto $x \in X$ de manera que n es el mínimo natural tal que $\left(f^2\right)^n (x) = x$. Si sucediera el caso donde $2n$ es el mínimo natural tal que $f^{2n}(x) = x$ concluimos la prueba, pero esto podría no suceder.

Si $f^k(x) = x$, para $k < 2n$ donde k es un natural par, esto sería una contradicción a que x es punto de periodo n para f^2.

Por el contrario si sucediera que $f^k(x) = x$ para $k < 2n$, donde k es un natural impar, por el Teorema de Sharkovskii, tenemos que $k \rhd m$ con m cualquier natural par. Lo cual implica que f tiene un punto de periodo $2n$, concluyendo así la prueba.

■

Definición 2.9. Sea $x_0 \in X$. Decimos que un punto y es *un punto límite de la órbita* $o(x_0, f)$ si existe una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ los cuales cumplen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, y tales que

$$\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y.$$

Definición 2.10. Definimos el ω *-conjunto límite* de un punto x_0 como la colección de todos los puntos límite de $o\left(x_0, f\right)$. Es decir,

$$\omega\left(x_0\right) = \left\{y \in X : y \text{ es punto limite de } o\left(x_0, f\right)\right\}.$$

Observación 2.8. Bien sabemos que si $x \in X$ es un punto fijo de la función f, entonces su órbita es $o\left(x_0, f\right) = \{x_0\}$. Así, para cualquier sucesión de naturales $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, se cumple que

$$\lim_{i \to \infty} f^{n_i}\left(x_0\right) = \lim_{i \to \infty} x_0 = x_0.$$

En otras palabras, únicamente x_0 es punto límite de $o\left(x_0, f\right)$, y por lo tanto $\omega\left(x_0\right) = \{x_0\}$.

Proposición 2.6. Si $x_0 \in X$ es un punto periódico de f, entonces $\omega\left(x_0\right) = o\left(x_0, f\right)$.

Demostración. Supongamos que x_0 es un punto de periodo n y digamos que la órbita de este es $o\left(x_0, f\right) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

Sabemos que para todo $i \cdot n$, con i en los naturales, se cumple que $f^{in}\left(x_0\right) = f^n\left(f^n\left(\cdots\left(f^n\left(x_0\right)\right)\right)\right) = x_0$; es decir, $f^n\left(x_0\right)$ iterado i-veces. Por lo tanto, si tomamos la sucesión de naturales $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ definida por $m_i = i \cdot n$ obtenemos de inmediato que

$$\lim_{i \to \infty} f^{m_i}\left(x_0\right) = \lim_{i \to \infty} f^{in}\left(x_0\right) = \lim_{i \to \infty} x_0 = x_0.$$

En otras palabras, $x_0 \in \omega\left(x_0\right)$.

De la misma forma, si definimos para cada i natural $k_i = i \cdot n + 1$, obtenemos que $f^{in+1}\left(x_0\right) = x_1$, y por lo tanto

$$\lim_{i \to \infty} f^{in+1}\left(x_0\right) = \lim_{i \to \infty} x_1 = x_1.$$

Por lo tanto, x_1 también está en el conjunto $\omega\left(x_0\right)$. Análogamente para cada punto en la órbita. Por lo tanto podemos concluir que $o\left(x_0, f\right) \subseteq \omega\left(x_0\right)$, lo cual arroja una primera contención.

Tomemos ahora un punto $y \in \omega\left(x_0\right)$, es decir, un y tal que existe una sucesión creciente de naturales $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} f^{n_i}\left(x_0\right) = y.$$

Llamemos $d = \min\left\{d\left(x_i, y\right) : x_i \in o\left(x_0, f\right)\right\}$ y supongamos que $d > 0$. Por definición de límite, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n_i \geq N$, ocurrirá que $d\left(f^{n_i}\left(x_0\right), y\right) < d$. Pero nosotros sabemos que $\left\{f^{n_i}\left(x_0\right)\right\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, entonces lo anterior es realmente $d\left(x_j, y\right) < d$ para algún $x_j \in o\left(x_0, f\right)$. Lo cual contradice la definición de d como mínimo. Por lo tanto $d = 0$. Esto es, y está en la órbita de x_0 bajo f.

■

Ejemplo 2.9. Sea $T\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la función Tienda definida como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

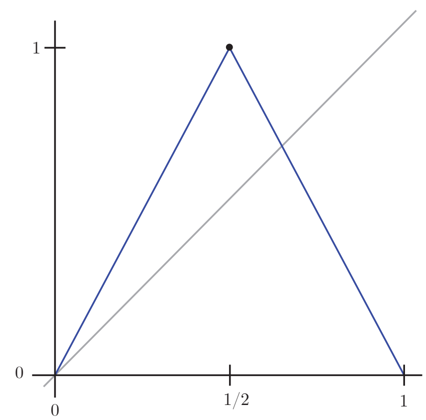

Figura 2.6: Gráfica de la función Tienda.

(I) Consideremos el punto $x_0 = \frac{2}{5}$ y notemos que, por un lado, $T\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$. Y también $T\left(\frac{4}{5}\right) = 2 - 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{20-16}{10} = \frac{2}{5}$. Por lo tanto, la órbita del punto bajo la función Tienda es $o(x_0, T) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$. Y así, por el lema anterior, $\omega(x_0) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$.

(II) Tomemos ahora $k \in \mathbb{N}$ y $z_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} T(z_0) &= 2 \cdot \tfrac{1}{2^k} = \tfrac{1}{2^{k-1}} \\ T^k(z_0) &= \tfrac{1}{2^{k-k}} = 1 \\ T^{k+1}(z_0) &= T(1) = 0 \\ T(0) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la órbita de este punto será $o(z_0, T) = \left\{\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, 0\right\}$. Es decir, z_0 es un punto asintoticamente fijo, así que si $\lim_{n\to\infty} f^n(z_0) = 0$, cualquier subsuceción de naturales también cumple que $f^{n_i}(z_0) \longrightarrow 0$. Concluyendo que $\omega(z_0) = \{0\}$.

Lema 2.2. Para cualquier punto $x_0 \in X$, el conjunto $\omega(x_0)$ se queda contenido en la cerradura de la órbita de x_0 bajo f. Es decir, $\omega(x_0) \subseteq \overline{o(x_0, f)}$. Y más aún, para todo m natural, $\omega(x_0) \subseteq \overline{\{f^k(x_0) : k \geq m\}} \subseteq \overline{o(x_0, f)}$.

Demostración. Tomemos $y \in \omega(x_0)$. Por definición del conjunto ω-*límite* podemos encontrar una sucesión creciente de naturales $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x_0) = y$. Como los elementos n_i tienden a infinito cuando i tiende a infinito, para cada natural m podemos encontrar un $j \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq j$, entonces $n_i \geq m$.

Así, tomamos ahora la subsucesión $\{n_i\}_{i\geq j}$, la cual define a su vez a la subsucesión $\{f^{n_i}(x_0)\}_{i\geq j}$. Por ser esta subsucesión de la original, tenemos que $f^{n_i}(x_0) \longrightarrow y$ cuando $i \geq j$ y cuando $i \longrightarrow \infty$. Con esto, por definición, $y \in \overline{\{f^k(x_0) : k \geq m\}}$. En otras palabras, $\omega(x_0) \subseteq \overline{\{f^k(x_0) : k \geq m\}}$.

Sólo basta notar que como $\left\{f^k(x_0) : k \geq m\right\} \subseteq \left\{f^k(x_0) : k \in \mathbb{N}\right\} = o(x_0, f)$, entonces $\overline{\{f^k(x_0) : k \geq m\}} \subseteq \overline{o(x_0, f)}$, lo cual concluye la demostración.

■

El ω-*conjunto límite*, ya sea de un punto o de un conjunto, puede definirse de formas distintas. Partiremos de la definición dada en [Block and Franke, 1985].

Definición 2.11. Sea $Y \subseteq X$, definimos el conjunto ω-*conjunto límite de* Y de la siguiente forma:

$$\omega(Y) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{k\geq n} f^k(Y)} \right).$$

Observación 2.9. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\overline{\bigcup_{k\geq n} f^k(Y)}$ es cerrado, y la intersección arbitraria de conjuntos cerrados es a su vez un conjunto cerrado, se sigue que $\omega(Y)$ es cerrado.

Siguiendo la interpretación de J. King y H. Méndez en su libro *Sistemas Dinámicos Discretos* (página 167), "el omega conjunto límite de x es el lugar a donde se *dirige* la órbita de x"[King-Dávalos and Méndez-Lango, 2014]. En ese mismo espíritu, la anterior definición deja ver que el conjunto omega límite, ahora de un conjunto Y, son los puntos a donde se *dirige* Y bajo la función f. Así mismo probaremos más adelante que la definición del conjunto ω-límite de un punto x_0 coincide con el conjunto ω-límite de $\{x_0\}$.

Antes de empezar con las propiedades del conjunto ω-límite, consideremos las siguientes dos definiciones:

Proposición 2.7. Sean $A_1, \ldots, A_k$ una colección finita de subconjuntos de X. Entonces

$$\omega\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{k} \omega(A_i).$$

Demostración. Demostraremos el enunciado mediante doble contención. Para empezar, tomemos $y \in \omega\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$.

Lo anterior se traduce en que,

$$y \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\left(\bigcup_{n\geq m} f^n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\right)} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\left(\bigcup_{n\geq m}\left(\bigcup_{i=1}^{k} f^n(A_i)\right)\right)}.$$

Con una rápida observación, notamos que

$$\bigcup_{n\geq m}\left(\bigcup_{i=1}^{k} f^n\left(A_i\right)\right)=\bigcup_{i=1}^{k}\left(\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_i\right)\right).$$

Entonces, para toda $m\in\mathbb{N}$,

$$y\in\overline{\bigcup_{i=1}^{k}\left(\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_i\right)\right)}.$$

Es decir, existe una sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}\left(\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_i\right)\right)$ la cual converge a nuestro punto y. Con esto, a su vez existe una subsucesión $\{y_{i_l}\}_{l\in\mathbb{N}}\subseteq\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tal que se queda contenida en el conjunto $\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_j\right)$ para algún $j\in\{1,\ldots,k\}$, y tal que $y_{i_l}\longrightarrow y$. En otras palabras, $y\in\overline{\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_j\right)}$, y esto para toda $m\in\mathbb{N}$, lo que se traduce en que

$$y\in\omega\left(A_j\right)\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}\omega\left(A_i\right).$$

Para la contención faltante tomemos $y\in\bigcup_{i=1}^{k}\omega\left(A_i\right)$, es decir, existe un $j\in\{1,\ldots,k\}$ tal que $y\in\omega\left(A_j\right)$. Así, para todo $m\in\mathbb{N}$,

$$y\in\overline{\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_j\right)}.$$

Lo cual significa que existe una sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ contenida en el conjunto $\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_j\right)$, la cual converge al punto y.

Pero como $\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_j\right)\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}\left(\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_i\right)\right)$, podemos concluir que

$$y\in\overline{\bigcup_{i=1}^{k}\left(\bigcup_{n\geq m} f^n\left(A_i\right)\right)}=\overline{\bigcup_{n\geq m}\left(\bigcup_{i=1}^{k} f^n\left(A_i\right)\right)}=\overline{\left(\bigcup_{n\geq m} f^n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)\right)}.$$

Como esto sucede para todo $m\in\mathbb{N}$, obtenemos entonces que por definición $y\in\omega\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$, concluyendo la demostración.

■

La siguiente proposición ilustra la equivalencia entre la definición de ω-*conjunto límite* de un punto x_0 y la definición de ω-*conjunto límite* del conjunto $\{x_0\}$.

Antes de adentrarnos en esto notemos lo siguiente:

Observación 2.10. Para toda $k\in\mathbb{N}$ y todo punto $x_0\in X$, sabemos que $f^k\left(\{x_0\}\right)=\left\{f^k\left(x_0\right)\right\}$.

Proposición 2.8. Para todo punto $x_0 \in X$ se cumple que

$$\omega(x_0) = \omega(\{x_0\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{k \geq n} f^k(\{x_0\})} \right)$$

Demostración. Notemos de inmediato que para todo n natural, y con ayuda de la observación 1.4,

$$\begin{aligned} \bigcup_{k \geq n} f^k(\{x_0\}) &= \bigcup_{k \geq n} \left\{ f^k(x_0) \right\} \\ &= \left\{ f^k(x_0) : k \geq n \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, $\overline{\bigcup_{k \geq n} f^k(\{x_0\})} = \overline{\{f^k(x_0) : k \geq n\}}$.

Del Lema 2.2, sabemos que $\omega(x_0) \subseteq \overline{\{f^k(x_0) : k \geq n\}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\omega(x_0), \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^k(x_0) : k \geq n\}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} f^k(\{x_0\})} = \omega(\{x_0\}).$$

Para la contención de regreso, tomemos $y \in \omega(\{x_0\})$. Es decir,

$$y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} f^k(\{x_0\})} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{f^k(x_0) : k \geq n\}}.$$

Así, si tomamos $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $y \in \overline{\{f^k(x_0) : k \geq m\}}$. Con esto, por definición de cerradura, existe una sucesión $\left\{f^{k_i}(x_0)\right\}_{i \in \mathbb{N}}$, la cual cumple que $k_i \geq m$ y $f^{k_i}(x_0) \longrightarrow y$.

CASO 1. El rango de la sucesión $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es finito.

Sea este el conjunto $\{k_1, k_2, \ldots, k_l\}$. Si esto sucede, tenemos que la sucesión $\left\{f^{k_i}(x_0)\right\}_{i \in \mathbb{N}}$ está compuesta por los términos $f^{k_1}(x_0), f^{k_2}(x_0), \ldots, f^{k_l}(x_0)$.

Llamemos $d = \text{mín}\left\{d\left(f^{k_i}(x_0), y\right) : i \in \{1, 2, \ldots, l\}\right\}$ y supongamos $d > 0$.

Por definición de límite, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k_i \geq N$, ocurre que $d\left(f^{k_i}(x_0), y\right) < d$. Así, como lo anterior contradice la definición de d, sucede que $y \in \left\{f^{k_1}(x_0), f^{k_2}(x_0), \ldots, f^{k_l}(x_0)\right\}$. Si llamamos a $y = f^j(x_0)$, para algún $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, este mismo argumento permite garantizar que si $k_i \geq N$, y entonces $f^{k_i}(x_0) = y$.

Definamos entonces la sucesión $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ como $n_1 = k_j + 1$, $n_2 = k_j + 2$, $\ldots$, $n_i = k_j + i$. Así, obtenemos que $n_i < n_{i+1}$, y como $f^{n_i}(x_0) = y$ para toda $i \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{i \to \infty} f^{n_i}(x_0) = y$. En conclusión, y es un punto límite del conjunto $o(x_0, f)$, es decir, $y \in \omega(x_0)$.

CASO 2. El rango de la sucesión $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es infinito.

Si esto sucede, podemos encontrar una subsucesión $\left\{k_{i_j}\right\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, que cumpla $k_{i_j} < k_{i_{j+1}}$, y tal que por ser subsucesión, $\lim\limits_{j \to \infty} f^{k_{i_j}}(x_0) = y$.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Recurrencia por cadenas

Nuestro tercer capitulo lo dedicamos al estudio de la *recurrencia por cadenas*, un concepto, aunque trascendente en los sistemas dinámicos, un tanto opacado por términos más glamurosos. Este concepto es fundamental en nuestro estudio ya que, al estar en un espacio métrico compacto, la condición de que cada punto sea recurrente por cadenas polariza la dinámica de f^2, esto es, ya sea que su dinámica se comporta de manera trivial, o se comporta de manera compleja (siendo f la función en cuestión).

Antes de ponernos técnicos al trabajar la recurrencia por cadenas, vale la pena entender que, bajo una función f, un punto recurrente por cadenas es "algo muy cercano" a un punto periódico. Y entenderemos que es "algo muy cercano" en el sentido en que, en lugar de que cada punto de una órbita dé al siguiente bajo la función f, cada punto estará en una vecindad ε del siguiente bajo la función f.

La formulación original de la *recurrencia por cadena* es atribuida a C. Conley donde hace explicita la dependencia a la métrica del espacio [Conley, 1978]. También, este concepto es protagonista en el artículo *Maps of the interval with every point chain recurrent* [Block and Coven, 1986] y medianamente analizada en el texto *Dynamics in one dimension* [Block and Coppel, 1992]. A continuación se recuperan las definiciones fundamentales y algunos resultados importantes.

En todo este capítulo se entenderá que nuestro espacio X es un espacio métrico compacto y se entenderá a f como una función continua de X en sí mismo, a menos que se especifique algo distinto.

Definición 3.1. Sean $f : X \to X$ y $x, y \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ definimos una *ε-cadena* de x a y como una sucesión finita $\{x = x_0, \ldots, x_n = y\}$, con $n > 0$, tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$, con $0 \leq i \leq n-1$.

Observación 3.1. De la definición anterior se desprende lo siguiente.

(I) Si existen ε-cadenas de a a b y de b a c, entonces existe una de a a c. Es decir, la Definición 3.1 es transitiva entre puntos. Sencillamente, si

$\{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$ y $\{y_0 = b, \ldots, y_m = c\}$ son las respectivas ε-cadenas, definimos $\{z_0 = a, \ldots, z_n = b, z_{n+1} = y_1, \ldots, z_{n+m} = c\}$, el cual cumple ser ε-cadena de a a c. A esta acción la llamamos *concatenar*.

(II) Dada una ε-cadena de x en x, siempre podremos encontrar otra tal que su longitud supere cualquier natural k.

Esto sucede ya que gracias a la observación anterior, podemos concatenar a x con x k-veces para cualquier k natural.

Una forma más clara de entender este concepto es el siguiente: en una ε-cadena la función f "empuja" el punto x_i hacia el punto x_{i+1} (*i.e.*, lo acerca en una distancia menor a ε).

Para ver lo anterior con más claridad, analicemos el siguiente ejemplo, en el cual se expone un método sencillo para construir una función con una ε-cadena de seis elementos.

Ejemplo 3.1. Sea $f\colon [1,6] \longleftrightarrow [1,6]$ la función definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 2.8, & \text{si } x = 1, \\ 0.8, & \text{si } x = 2, \\ 4.2, & \text{si } x = 3, \\ 5.8, & \text{si } x = 4, \\ 2.2, & \text{si } x = 5, \\ 4.8, & \text{si } x = 6. \end{cases}$$

Por último, entre cada par de puntos x y $x+1$ definimos a f de forma lineal (con $x \in \{1, \ldots, 5\}$). Esto se puede apreciar en la figura 3.1.

Notemos que la imagen de cada punto $x \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ dista en 0.2 del entero más cercano. Así, tomando $\varepsilon = 0.5$, logramos construir una 0.5-cadena del punto 1 al 2 punto con los puntos $\{x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 5, x_5 = 2\}$, ya que la distancia del punto $f(x_i)$ al punto x_{i+1} siempre es 0.2, claramente menor a 0.5.

Definición 3.2. Decimos que $x \in X$ es *recurrente por cadenas* (bajo f) si para toda $\varepsilon > 0$ existe una ε-cadena de x en x. Al conjunto de estos puntos lo denotamos como $R(f)$.

Ejemplo 3.2. Sea $id : I \longrightarrow I$ la función identidad. Veamos que cada punto es recurrente por cadenas bajo esta función.

Demostración. Sea $x \in I$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Elijamos cualquier punto $y \in \left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap [0,1]$ y definamos el conjunto $\{x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x\}$. Sólo resta notar, por un lado, que $d(id(x_0), x_1) = d(x, y) < \varepsilon$, y por otro, que $d(id(x_1), x_2) = d(x, y) < \varepsilon$. Así, la identidad tiene todos sus puntos recurrentes por cadenas.

■

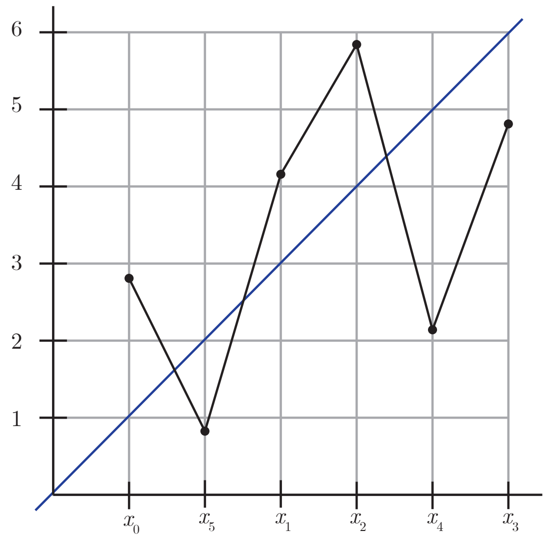

Figura 3.1: Gráfica de la función f en el ejemplo 3.1.

Ejemplo 3.3. Sea $f\colon I \longrightarrow I$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tomemos $x = \frac{1}{4}$ y veamos que este punto no es recurrente por cadenas para $\varepsilon = \frac{1}{16}$.

Para tener una $\frac{1}{16}$-cadena notemos que, si $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, entonces el punto x_1 vive en el intervalo $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}, \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\right)$.

CASO 1. Si tomamos $x_1 \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{16})$ entonces, como $f(x_1) = 1$, necesariamente $x_2 \in (1 - \frac{1}{16}, 1] \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$. Y como $f(x_2) = 1$, sucede también que $x_3 \in (1 - \frac{1}{16}, 1]$. Recursivamente, todo elemento de la cadena x_i, con $i \geq 2$, vive en $(1 - \frac{1}{16}, 1]$, por lo tanto, es falso que $d\left(f(x_i), \frac{1}{4}\right) = d\left(1, \frac{1}{4}\right) < \frac{1}{16}$. Como $d\left(f(x_1), \frac{1}{4}\right) = d\left(1, \frac{1}{4}\right)$ tampoco cumple ser menor a $\frac{1}{16}$, concluimos que no es posible obtener una $\frac{1}{16}$-cadena de $\frac{1}{4}$ en sí mismo.

CASO 2. Tomemos el primer elemento $x_1 \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16}, \frac{1}{2}\right)$. Entonces $f(x_1) \in \left(\frac{14}{16}, 1\right)$, es decir, debemos tomar ahora el elemento x_2 en el intervalo $\left(\frac{14}{16}, 1\right)$, y a partir de aquí la situación es análoga al CASO 1: para cada $i \geq 3$, tendremos que $x_i \in (1 - \frac{1}{16}, 1]$ y por lo tanto, $f(x_i) = 1$; es decir, es falso que $d\left(f(x_i), \frac{1}{4}\right) < \frac{1}{16}$ para $i \geq 3$ (y es claro que para $i = 1, 2$ tampoco ocurre). Por lo tanto, no podemos construir una $\frac{1}{16}$-cadena de $\frac{1}{4}$ en sí mismo.

Pero veamos ahora que esta función sí tiene puntos recurrentes por cadenas.

Ejemplo 3.4. Sea de nuevo $f\colon I \longrightarrow I$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Sea $x = 0$ (que por cierto es punto fijo de f) y veamos que este es recurrente por cadenas para cualquier $\varepsilon > 0$. Como para todo punto $z \in (0, \varepsilon)$, el elemento $\frac{z}{2}$ también vive en $(0, \varepsilon)$, tenemos que el conjunto $\left\{x_0 = 0, x_1 = \frac{z}{2}, x_2 = 0\right\}$ cumple la definición de ε-cadena, ya que se cumplen las siguientes dos desigualdades:

$$d(f(x_0), x_1) = d\left(0, \tfrac{z}{2}\right) < \varepsilon \quad \text{y} \quad d(f(x_1), x_2) = d(z, 0) < \varepsilon$$

Observación 3.2. Del ejemplo anterior es fácil notar que todo punto fijo es un punto recurrente por cadenas.

Existen varios tipos de puntos que son recurrentes por cadenas, además de los puntos fijos, el conjunto de los no errantes (que se mencionaron en el segundo capitulo) también cumplen la recurrencia por cadenas. Esto se expone en el siguiente lema.

Proposición 3.1. Un punto no errante bajo f es un punto recurrente por cadenas bajo f. En otras palabras, $\Omega(f) \subseteq R(f)$.

Demostración. Sea $p \in \Omega(f)$ y sea $\varepsilon > 0$.

Antes de cualquier otra cosa, como f es continua, existe $\delta_1 > 0$, con $\frac{\varepsilon}{3} > \delta_1 > 0$, tal que para todo punto $w \in B(p, \delta_1)$, sucede que $d(f(w), f(p)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Como p es no errante, y $p \in B\left(p, \frac{\delta_1}{2}\right)$, existe un punto $x \in B\left(p, \frac{\delta_1}{2}\right)$ y un número $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $f^n(x) \in B\left(p, \frac{\delta_1}{2}\right)$.

Supongamos que $n = 1$.

Entonces $d(f(x), p) < \delta_1/2$, y por lo tanto, $d(f(p), x) \leq d(f(p), f(x)) + d(f(x), p) + d(p, x) < 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon$. Es decir, el conjunto $\{x_0 = p, x_1 = x, x_2 = p\}$ es una ε-cadena de p en sí mismo.

Supongamos ahora que $n \geq 2$.

Por la continuidad uniforme de f existe un número $\delta_2 > 0$, el cual cumple $0 < \delta_2 < \delta_1/2 < \varepsilon$, tal que para cualquier punto w que $d\left(w, f^{n-2}(x)\right) < \delta_2$, sucede que $d\left(f(w), f^{n-1}(x)\right) < \delta_1$. Análogamente, para cada $k \in \{3, \ldots, n\}$ tenemos que $0 < \delta_k < \delta_{k-1}$ tal que si un punto w cumple $d\left(w, f^{n-k}(x)\right) < \delta_k$, entonces $d\left(f(w), f^{n-(k-1)}(x)\right) < \delta_{k-1}$.

CASO 1. Supongamos que n es par.

Como $x \in B\left(p, \frac{\delta_1}{2}\right)$, entonces $d(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Llamemos entonces $x_0 = p$ y $x_1 = f(x)$ y sea ahora x' cualquier elemento en $B(x, \delta_n) \subseteq B(x, \delta_1/2)$. Entonces se sigue que

$$d\left(f\left(x'\right), f\left(x\right)\right) < \delta_{n-1} \quad \text{y por lo tanto} \quad d\left(f^{2}\left(x'\right), f^{2}\left(x\right)\right) < \delta_{n-2} < \varepsilon.$$

Llamemos $x_2 = f^2\left(x'\right)$. Partiendo ahora de que $d\left(f^2\left(x'\right), f^2\left(x\right)\right) < \delta_{n-2}$, podemos afirmar que

$$d\left(f^{3}\left(x'\right), f^{3}\left(x\right)\right) < \delta_{n-3} < \varepsilon.$$

Por lo tanto llamamos $x_3 = f^3\left(x\right)$.

Vale la pena mencionar que para la ε-cadena que estamos construyendo, vamos definiendo $x_k = f^k\left(x\right)$ cuando k es impar, y $x_k = f^k\left(x'\right)$ cuando k es par. De esta forma, procediendo recursivamente, podemos definir $x_{n-1} = f^{n-1}\left(x\right)$ ya que n es par.

Por la construcción inicial de los números δ_i, tendremos que

$$d\left(f\left(f^{n-2}\left(x'\right)\right), f^{n-1}\left(x\right)\right) = d\left(f^{n-1}\left(x\right), f^{n-1}\left(x'\right)\right) < \delta_1 < \varepsilon.$$

Simplemente llamamos $x_n = p$. Y ya sabemos que $f^n\left(x\right) \in B\left(p, \frac{\delta_1}{2}\right)$.

Con esto, el conjunto

$$\{x_0 = p, x_1 = f\left(x\right), x_2 = f^2\left(x'\right), x_3 = f^3\left(x\right),$$
$$\ldots, x_{n-2} = f^{n-2}\left(x'\right), x_{n-1} = f^{n-1}\left(x\right), x_n = p\}.$$

demuestra nuestro resultado.

CASO 2. Supongamos por otro lado que n es impar.

Sea $x' \in B\left(x, \delta_n\right) \subseteq B\left(x, \delta_1/2\right)$. Entonces

$$\begin{aligned} d\left(p, x'\right) &\leq d\left(p, x\right) + d\left(x, x'\right) \\ &< \delta_1/2 + \delta_1/2 < \delta_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d\left(f\left(p\right), f\left(x'\right)\right) < \varepsilon$, y con esto, llamemos $x_0 = p$ y $x_1 = f\left(x'\right)$. En particular, como $x' \in B\left(x, \delta_n\right)$, obtenemos que $d\left(f\left(x\right), f\left(x'\right)\right) < \delta_{n-1} < \varepsilon$. Entonces $d\left(f^2\left(x\right), f^2\left(x'\right)\right) < \delta_{n-2} < \varepsilon$.

Llamemos $x_2 = f^2\left(x\right)$. Análogo al CASO 1, construimos recursivamente al punto $x_k = f^k\left(x'\right)$ cuando k sea impar, y $x_k = f^k\left(x\right)$ cuando k sea par. Finalmente definimos la ε-cadena como sigue:

$$\{x_0 = p, x_1 = f\left(x'\right), x_2 = f^2\left(x\right), x_3 = f^3\left(x'\right),$$
$$\ldots, x_{n-2} = f^{n-2}\left(x'\right), x_{n-1} = f^{n-1}\left(x\right), x_n = p\}$$

la cual cumplirá lo deseado.

∎

Corolario 3.1. Dada $f \colon X \longrightarrow X$, se cumple la siguiente contención de conjuntos:

$$\operatorname{Fix}\left(f\right) \subseteq \operatorname{Per}\left(f\right) \subseteq \Omega\left(f\right) \subseteq R\left(f\right).$$

Demostración. Se sigue de la Observación 2.7 del capítulo anterior que $\mathrm{Fix}\,(f) \subseteq \mathrm{Per}\,(f) \subseteq \Omega\,(f)$. Y por la Proposición 3.1 tenemos que $\Omega\,(f) \subseteq R\,(f)$. Estas dos contenciones dan el resultado.

■

Antes de avanzar en nuestro estudio de puntos recurrentes por cadenas es necesario mencionar un pequeño resultado de cálculo elemental:

Lema 3.1. Si $f\colon X \longrightarrow X$ no es suprayectiva entonces existen un punto $y_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ tal que para todo punto $y \in B\,(y_0, \varepsilon)$, $y \notin f\,(X)$.

Demostración. Si f no es sobre, entonces existe $y_0 \in X$ tal que $y_0 \notin f\,(X)$. Supongamos que para todo número $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $y_n \in B\left(y_0, \frac{1}{n}\right) \cap f\,(X)$. Es decir, existe un punto $x_n \in X$ el cual cumple que $f\,(x_n) = y_n$ y que $d\,(y_n, y_0) < \frac{1}{n}$. Entonces $y_n \longrightarrow y_0$. Es decir, $f\,(x_n) \longrightarrow y_0$.

En otras palabras, $f\,(X)$ es un conjunto compacto que contiene a la sucesión convergente $\{f\,(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, pero que no contiene su punto de acumulación y_0. Es decir, una contradicción. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $B\left(y_0, \frac{1}{n}\right) \cap f\,(X) = \emptyset$.

■

Proposición 3.2. Si $R(f)$ es denso en X, entonces f es suprayectiva.

Demostración. Supongamos que f no es sobre. Entonces, por el Lema 3.1, hay un $\varepsilon > 0$ y un $y_0 \in X$, tal que $B\,(y_0, \varepsilon) \cap f\,(X) = \emptyset$. Como $R(f)$ es denso en X, podemos encontrar un punto x en $B\left(y_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ tal que x es recurrente por cadenas, lo que significa que existe un conjunto $\{x = x_0, \ldots, x_n = x\}$, con $n > 0$, tal que $d\,(f\,(x_i)\,, x_{i+1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, con $0 \leq i \leq n-1$. En particular $d\,(f\,(x_{n-1})\,, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, es decir, $f\,(x_{n-1}) \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, lo que significa que $f\,(x_{n-1}) \in B\,(y_0, \varepsilon)$, lo cual es una contradicción porque $f\,(x_{n-1}) \in f\,(X)$. Así, f es suprayectiva.

■

Corolario 3.2. Si cada punto de X es recurrente por cadenas, entonces f es suprayectiva.

Demostración. La prueba se sigue de la proposición anterior. ■

Proposición 3.3. Para todo natural $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $R\,(f) = R\left(f^k\right)$.

Demostración. Para la primera contención, tomemos $x \in R\,(f)$ y $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$. Ahora veamos que existe una ε-cadena de x_0 en sí mismo bajo f^k.

Dada $\varepsilon > 0$, como f es función uniformemente continua, existen números $\delta_{k-1}, \delta_{k-2}, \ldots, \delta_1 > 0$, cada uno menor estricto que ε, los cuales, para cualesquiera puntos $x, y \in X$ con $d\,(x, y) < \frac{\delta_i}{k}$, sucede que $d\,(f\,(x)\,, f\,(y)) < \frac{\delta_{i+1}}{k}$, con $i \in \{1, \ldots, k-2\}$; y si $d\,(x, y) < \frac{\delta_{k-1}}{k}$, entonces $d\,(f\,(x)\,, f\,(y)) < \frac{\varepsilon}{k}$.

Como tomamos a x en $R\,(f)$, podemos encontrar una $\frac{\delta_1}{k}$-cadena de x en sí mismo. Notemos que si esta cadena tiene una cierta longitud inicial de $n+1$

elementos (es decir, los puntos $x_0 = x = x_n$ son el inicio y el final), siempre podemos extender la cadena de tal forma que tenga longitud $nk + 1$:

$$\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = x, x_{n+1} = x_1, \ldots, x_{2n} = x, \ldots, x_{3n} = x, \ldots, x_{kn} = x\}$$

La ε-cadena que necesitamos será la conformada por los puntos múltiplos de k, es decir, el conjunto $\{x_0 = x, x_k, x_{2k}, \ldots, x_{nk} = x\}$. Como requerimos esta cadena bajo la función f^k, es preciso que se cumpla la desigualdad $d\left(f^k(x), x_k\right) < \varepsilon$. Veamos que esto efectivamente se cumple.

Como esta es una $\frac{\delta_1}{k}$-cadena bajo f, se cumple la siguiente sucesión de implicaciones:

$$d(f(x_0), x_1) < \tfrac{\delta_1}{k} \Rightarrow d\left(f^2(x_0), f(x_1)\right) < \tfrac{\delta_2}{k} \Rightarrow \cdots$$

$$\Rightarrow d\left(f^{k-1}(x_0), f^{k-2}(x_1)\right) < \tfrac{\delta_{k-1}}{k} \Rightarrow d\left(f^k(x_0), f^{k-1}(x_1)\right) < \tfrac{\varepsilon}{k}.$$

Esta misma serie de implicaciones se cumple si sustituimos los puntos evaluados x_0, x_1 por cualesquiera x_i, x_{i+1} (con $i \in \{0, 1, \ldots, kn-1\}$). Por ejemplo, ahora para x_1 y x_2 tendremos

$$d(f(x_1), x_2) < \tfrac{\delta_1}{k} \Rightarrow d\left(f^2(x_1), f(x_2)\right) < \tfrac{\delta_2}{k} \Rightarrow \cdots$$

$$\Rightarrow d\left(f^{k-1}(x_1), f^{k-2}(x_2)\right) < \tfrac{\delta_{k-1}}{k} \Rightarrow d\left(f^k(x_1), f^{k-1}(x_2)\right) < \tfrac{\varepsilon}{k}.$$

Entonces, si tomamos el último elemento $d\left(f^k(x_0), f^{k-1}(x_1)\right)$ de la primera colección, y el antepenultimo de la segunda, $d\left(f^{k-1}(x_1), f^{k-2}(x_2)\right)$, es claro que podemos empezar a comparar distancias usando la desigualdad del triángulo. Por lo tanto, sucede lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&d\left(f^k(x_0), f^{k-1}(x_1)\right) + d\left(f^{k-1}(x_1), f^{k-2}(x_2)\right) + \cdots \\
&+ d\left(f^2(x_{k-2}), f^1(x_{k-1})\right) + d(f(x_{k-1}), x_k) \\
&< \tfrac{\varepsilon}{k} + \tfrac{\delta_{k-1}}{k} + \tfrac{\delta_{k-2}}{k} + \cdots + \tfrac{\delta_1}{k} \leq \tfrac{k\varepsilon}{k}
\end{aligned}$$

Resumiendo: $d\left(f^k(x_0), x_k\right) < \varepsilon$.

Por un procedimiento completamente análogo, se cumple también que

$$d\left(f^k(x_k), x_{2k}\right) < \varepsilon, \quad d\left(f^k(x_{2k}), x_{3k}\right) < \varepsilon, \quad \cdots, \quad d\left(f^k\left(x_{(n-1)k}\right), x_{nk}\right) < \varepsilon.$$

Siendo esta la definición de una ε-cadena de longitud $n+1$ con inicio y final en $x_0 = x = x_{kn}$ bajo f^k. Por lo tanto, $R(f) \subseteq R\left(f^k\right)$.

Ahora tomemos a x en $R\left(f^k\right)$ y un $\varepsilon > 0$.

Sea $\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = x\}$ la ε-cadena de x en sí mismo (bajo f^k) que existe por hipótesis.

Claramente, para cada iteración de $f^i(x)$, con $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, se cumple que $d\left(f^i(x), f^i(x)\right) = 0$.

Llamemos $z_0 = x$ y continuemos definiendo la ε-cadena como sigue:

$$\begin{aligned} z_1 = f(x) &\Rightarrow d(f(z_0), z_1) = d(f(x), f(x)) < \varepsilon \\ z_2 = f^2(x) &\Rightarrow d(f(z_1), z_2) = d\left(f^2(x), f^2(x)\right) < \varepsilon \\ &\dots \\ z_{k-1} = f^{k-1}(x) &\Rightarrow d(f(z_{k-2}), z_{k-1}) = d\left(f^{k-1}(x), f^{k-1}(x)\right) < \varepsilon \end{aligned}$$

Ahora, para continuar definiendo nuestra nueva ε-cadena, definimos $z_k = x_1$, y observemos que precisamente se cumple que $d(f(z_{k-1}), z_k) = d\left(f^k(x), x_1\right) < \varepsilon$ ya que x y x_1 son parte de la ε-cadena inicial bajo f^k.

Haciendo un proceso totalmente análogo al anterior, definimos $z_{k+i} = f^i(x_1)$, para $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Una vez más, se cumple que $d\left(f(z_{k+i}), z_{k+(i+1)}\right) = d\left(f^{i+1}(x_1), f^{i+1}(x_1)\right) < \varepsilon$. Hacemos $z_{2k} = x_2$ para obtener $d(f(z_{2k-1}), z_{2k}) = d\left(f^k(x_1), x_2\right) < \varepsilon$.

Es fácil notar que entre cada dos puntos de la ε-cadena original (bajo f^k), estamos agregando puntos z_i de distancia cero, es decir $d(f(z_i), z_{i+1}) = d\left(f^{i+1}(x), f^{i+1}(x)\right) = 0$. De esta forma construimos la ε-cadena bajo f.

Definimos entonces $z_{jk} = x_j$, tomando a $j \in \{2, \dots, n\}$, y por otro lado, $z_{jk+i} = f^i(x_j)$, con $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Por lo tanto si $j \in \{0, \dots, n-1\}$ entonces, para $i \in \{0, \dots, k-1\}$, se sigue que

$$d\left(f(z_{jk+i}), z_{jk+(i+1)}\right) = d\left(f^{i+1}(x_j), f^{i+1}(x_j)\right) < \varepsilon.$$

Terminando así la construcción de una ε-cadena (de longitud $nk+1$) de x en sí mismo bajo f.

■

Definición 3.3. Definimos al conjunto $R_\varepsilon(x) \subseteq X$ como sigue:

$$R_\varepsilon(x) := \{y \in X : \text{Existe una } \varepsilon\text{-cadena de } x \text{ a } y\}.$$

Observación 3.3. Notemos que para toda $x \in X$ y para toda $\varepsilon > 0$, $f(x) \in R_\varepsilon(x)$, ya que $d(f(x), f(x)) < \varepsilon$.

Definición 3.4. Dados $x, y \in X$ decimos que x *puede ser encadenado a* y si para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que $y \in R_\varepsilon(x)$.

Observación 3.4. Ahora tenemos dos formas distintas de decir lo mismo: x es recurrente por cadenas, o x puede encadenarse a sí mismo.

Definición 3.5. Decimos que $Y \subseteq X$ es *positivamente invariante por cadenas* si para cada $y \in Y$ y $x \in X \setminus Y$, y no puede encadenarse a x.

Proposición 3.4. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

(I) Si $a \in R_\varepsilon(x)$ entonces $R_\varepsilon(a) \subseteq R_\varepsilon(x)$.

(II) $R_\varepsilon(x)$ es un conjunto abierto.

(III) $R_\varepsilon(x)$ es un conjunto positivamente invariante por cadenas.

(IV) $f\left(\overline{R_\varepsilon(x)}\right) \subseteq R_\varepsilon(x)$.

Demostración. Para probar (I) veamos que si $y \in R_\varepsilon(a)$, existe ε-cadena de a en y; y si $a \in R_\varepsilon(x)$, entonces existe ε-cadena de x en a. Por lo tanto, por el inciso (I) de las Observaciones 3.1, existe una ε-cadena de x a y, es decir $y \in R_\varepsilon(x)$. Así $R_\varepsilon(a) \subseteq R_\varepsilon(x)$.

Para probar (II) tomemos $y \in R_\varepsilon(x)$. Con esto, existe un conjunto de puntos $\{x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_k = y\}$, con $k > 0$, tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ para cada $i = 0, \ldots, k-1$. En particular pasa que $d(f(x_{k-1}), y) < \varepsilon$, es decir, $y \in B(f(x_{k-1}), \varepsilon)$. Sea $\delta > 0$ el número tal que $B(y, \delta) \subseteq B(f(x_{k-1}), \varepsilon)$, entonces podemos afirmar que cada punto $z \in B(y, \delta)$ cumple que $d(f(x_{k-1}), z) < \varepsilon$. Es decir, el conjunto $\{x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_k = z\}$ es una ε-cadena de x en z para todo $z \in B(y, \delta)$. En otras palabras, $B(y, \delta) \subseteq R_\varepsilon(x)$, probando que $R_\varepsilon(x)$ es un conjunto abierto.

Sean ahora $a \in R_\varepsilon(x)$ y $b \in X \backslash R_\varepsilon(x)$ y probemos el inciso (III). Si suponemos que a puede encadenarse a b entonces para toda $\delta > 0$, $b \in R_\delta(a)$, en particular $b \in R_\varepsilon(a)$. Entonces, por el inciso (I) de esta Proposición, $b \in R_\varepsilon(a) \subseteq R_\varepsilon(x)$, es decir $b \in R_\varepsilon(x)$ y $b \in X \backslash R_\varepsilon(x)$, lo cual es imposible. Por lo tanto a no puede encadenarse a b, es decir $R_\varepsilon(x)$ es positivamente invariante por cadenas.

Por último, si tomamos $y \in f\left(\overline{R_\varepsilon(x)}\right)$, entonces existirá $x_0 \in \overline{R_\varepsilon(x)}$ tal que $f(x_0) = y$. Y como f es continua, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, con $\delta < \varepsilon$, tal que

$$f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) = B(y, \varepsilon).$$

Como $x_0 \in \overline{R_\varepsilon(x)}$ tenemos que $R_\varepsilon(x) \cap B(x_0, \delta) \neq \emptyset$. Si sucede que $z \in R_\varepsilon(x) \cap B(x_0, \delta)$ entonces por un lado $d(x_0, z) < \delta$ y así $d(f(x_0), f(z)) = d(y, f(z)) < \varepsilon$. Además por otro lado existe $\{y_0 = x, y_1, \ldots, y_n = z\}$ ε-cadena de x en z. Por lo tanto $\{y_0 = x, y_1, \ldots, y_n = z, f(x_0) = y\}$ es ε-cadena de x en y, es decir $y \in R_\varepsilon(x)$ y por lo tanto que $f\left(\overline{R_\varepsilon(x)}\right) \subseteq R_\varepsilon(x)$, concluyendo así la prueba del inciso (IV).

$\blacksquare$

En este punto vale la pena resaltar que hemos estado ocupando la definición de *recurrencia por cadenas* basada en la métrica del espacio en cuestión. Hemos mencionado ya que esta definición está dada en [Conley, 1978], sin embargo en el texto *Dynamics In One Dimension* se utiliza una definición topológica de este concepto [Block and Coppel, 1992]. Ambas definiciones, por su puesto, resultarán ser equivalentes.

La definición topológica de la recurrencia por cadena es la siguiente:

Definición 3.6. Sean X un espacio topológico arbitrario y $f\colon X \longrightarrow X$. Denotemos a $R_T(f)$ el conjunto de todos los puntos *recurrentes por cadenas en X bajo f*. Diremos que un punto $x \notin R_T(f)$ si existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \notin \overline{U}$, $f(x) \in U$ y además $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$.

Así, una vez que demostradas las propiedades básicas de la recurrencia por cadenas, nuestro objetivo principal será demostrar el siguiente teorema, que entre otras cosas, arroja la equivalencia entre ambas definiciones. Sin embargo, para tener en nuestras manos la demostración completa de este resultado (Teorema 3.1), necesitaremos una caracterización importante de los denominados conjuntos *atractores*. Este concepto, y algunos resultados que lo involucran, serán analizados en el Apéndice A de este trabajo. Mientras tanto, enunciaremos el teorema y daremos la primera parte de su demostración.

Teorema 3.1. Sean X un espacio métrico compacto y x un punto en él. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) $x \notin R(f)$.

(2) Existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x \notin \overline{U}$, $f(x) \in U$ y $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$.

(3) Existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x \notin U$, $f(x) \in U$ y $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$.

(4) Existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x \notin U$, $f^k(x) \in U$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ y $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$.

(5) Existe un atractor K con $x \notin K$ y $\omega(x) \subseteq K$.

Notemos de inmediato que el enunciado (2) es la definición de que $x \notin R_T(f)$, tomando en cuenta la topología inducida por la métrica del espacio X.

Dividiremos la demostración de este resultado en dos partes debido a que un par de implicaciones requieren resultados intermedios un poco más sofisticados. Por lo pronto, de manera muy natural tenemos lo siguiente.

Demostración del Teorema 3.1 (Primera parte). Demostremos que el inciso uno implica el inciso dos. Si $x \notin R(f)$ entonces x no es recurrente por cadenas, así, por la Definición 3.4, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \notin R_\varepsilon(x)$. Sea $W = R_\varepsilon(x)$.

Como ya demostramos anteriormente, W es abierto, $f\left(\overline{W}\right) \subseteq W$ y $f(x) \in W$. Además $x \notin W$. Supongamos primero que $x \in \overline{W}$. Como $f\left(\overline{W}\right) \subseteq W$, donde $f\left(\overline{W}\right)$ es cerrado y W es abierto, al ser X métrico podemos encontrar un abierto $U \subseteq X$ tal que

$$f\left(\overline{W}\right) \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W.$$

Por lo tanto, $x \notin \overline{U}$ pero $f(x) \in f\left(\overline{W}\right) \subseteq U$. Agregando que $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$, el conjunto U permite concluir la implicación. En el caso donde $x \notin \overline{W}$, simplemente tomamos $W = U$ y se concluye la implicación.

La siguiente implicación se sigue ya que si $x \notin \overline{U}$, entonces $x \notin U$.

Tomando $k = 1 \in \mathbb{N}$, concluimos que el inciso tres implica el cuatro. ■

Para poder finalizar esta prueba, son indispensables algunos resultados extra.

El primero de ellos garantiza que si podemos encontrar una ε-cadena de un punto x en sí mismo, para todo $\varepsilon > 0$, entonces podemos encontrar una ε-cadena de x a cualquier iteración de este, en otras palabras:

Proposición 3.5. Si $x \in X$ es un punto recurrente por cadenas, entonces $f^k(x)$ puede ser encadenado a x, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ y supongamos primero que x no es un punto periódico. En este caso, sea δ_1 la distancia de x al conjunto $\left\{f(x), f^2(x), dots, f^{k+1}(x)\right\}$ y tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para encontrar una ε-cadena de x en $f^k(x)$ consideremos el hecho de que $f, f^2, \ldots, f^{k+1}$ son funciones uniformemente continuas, es decir existe $\delta > 0$, donde sin pérdida de la generalidad $\delta < \varepsilon$ y también $\delta < \delta_1$, tal que, si $x, y \in X$ y $d(y,z) < \delta$, entonces

$$d\left(f^i(y), f^i(z)\right) < \text{mín}\left\{\tfrac{\varepsilon}{k+1}, \tfrac{\delta_1}{k+1}\right\}, \text{ donde } 0 < i \leq k+1.$$

Ahora, como x es un punto recurrente por cadenas, para $\delta > 0$ existe una δ-cadena de x en sí mismo. Es decir, existe una colección $\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = x\}$ donde $n > 0$ y $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ para $0 \leq i \leq n-1$. Así, sabemos que podemos hacer la cardinalidad de la δ-cadena mayor a cualquier número natural, en particular mayor a k, es decir, sin pérdida de la generalidad tomamos $k+1 \leq n$. Entonces si $1 \leq i \leq k+1$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d\left(f^i(x_0), x_i\right) &\leq d\left(f^i(x_0), f^{i-1}(x_1)\right) + d\left(f^{i-1}(x_1), f^{i-2}(x_2)\right) + \cdots \\ &\quad + d\left(f^2(x_{i-2}), f(x_{i-1})\right) + d\left(f(x_{i-1}), x_i\right) \\ &= d\left(f^{i-1}(f(x_0)), f^{i-1}(x_1)\right) + d\left(f^{i-2}(f(x_1)), f^{i-2}(x_2)\right) + \cdots \\ &\quad + d\left(f(f(x_{i-2})), f(x_{i-1})\right) + d\left(f(x_{i-1}), x_i\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahora, como $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ debido a nuestra δ-cadena, se sigue que $d\left(f^j(f(x_i)), f^j(x_{i+1})\right) < \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{k+1}, \frac{\delta_1}{k+1}\right\} \leq \frac{\delta_1}{k+1}$, debido a la continuidad uniforme de f^j para $1 \leq j \leq k+1$. Además, $d(f(x_{i-1}), x_i) < \delta < \delta_1$. Concluyendo así que

$$d\left(f^i(x_0), x_i\right) < (i-1) \cdot \tfrac{\delta_1}{k+1} \leq \delta_1.$$

Entonces, $d\left(f^i(x_0), x_i\right) < \delta_1 \leq d\left(f^i(x), x\right)$. Es decir $x \neq x_i$ con $0 \leq i \leq k+1$. Esto ya que si $x = x_i$, para algún $0 \leq i \leq k+1$, sucede que $d\left(f^i(x), x\right) < \delta_1 \leq d\left(f^i(x), x\right)$, lo cual es imposible. Por lo tanto, cualquier δ-cadena de x en sí mismo debe tener más de $k+2$ elementos.

Para terminar probaremos que $\left\{f^k(x), x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n = x\right\}$ es ε-cadena de $f^k(x)$ en x. Y para demostrarlo, simplemente observamos que de la desigualdad en (3.1) de esta misma demostración obtenemos

$$d\left(f^{k+1}(x), x_{k+1}\right) < (k+1) \cdot \text{mín}\left\{\tfrac{\varepsilon}{k+1}, \tfrac{\delta_1}{k+1}\right\} \leq (k+1) \cdot \tfrac{\varepsilon}{k+1} = \varepsilon.$$

Por otro lado, como los puntos $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ son parte de nuestra δ-cadena, y como tomamos $\delta < \varepsilon$, se cumple que

$$d\left(f\left(x_i\right), x_{i+1}\right) < \delta < \varepsilon, \quad \text{tomando } k+1 \leq i \leq n-1.$$

Es decir, $\left\{f^k\left(x\right), x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n = x\right\}$ es una ε-cadena de $f^k\left(x\right)$ en x. ■

Lema 3.2. Sea $S \subseteq X$ un conjunto positivamente invariante por cadenas. Si $x \notin S$ y $f^k\left(x\right) \in S$ para algún natural k, entonces x no es recurrente por cadenas.

Demostración. Supongamos que por el contrario x es recurrente por cadenas. Por la Proposición anterior $f^k\left(x\right)$ puede encadenarse a x, contradiciendo que el conjunto S sea positivamente invariante por cadenas, ya que $f^k\left(x\right) \in S$. ■

Lema 3.3. Si $f\left(\overline{W}\right) \subseteq W$, entonces $\overline{W}$ es positivamente invariante por cadenas bajo f.

Demostración. Para cada $w \in f\left(\overline{W}\right)$ existe un $\varepsilon_w > 0$ tal que $B\left(w, \varepsilon_w\right) \subseteq W$. Como $f\left(\overline{W}\right)$ es compacto, podemos encontrar un conjunto $F \subseteq f\left(\overline{W}\right)$ finito tal que

$$f\left(\overline{W}\right) \subseteq \bigcup_{w \in F} B\left(w, \tfrac{\varepsilon_w}{2}\right) \subseteq W.$$

Sea $\varepsilon_0 = \frac{\min\{\varepsilon_w : w \in F\}}{2}$; tomemos $z \in \overline{W}$, $y \in X \setminus \overline{W}$ y supongamos que z puede ser encadenado a y. Entonces existe una ε_0-cadena de z a y, es decir existe un conjunto $\{z_0 = z, z_1, \ldots, z_n = y\}$, con $n > 0$, tal que $d\left(f\left(z_i\right), z_{i+1}\right) < \varepsilon_0$, con $0 \leq i \leq n-1$.

Si $z \in \overline{W}$, entonces $f\left(z\right) \in f\left(\overline{W}\right)$, entonces existe un $w_0 \in F$ tal que $f\left(z\right) \in B\left(w_0, \frac{\varepsilon_{w_0}}{2}\right) \subseteq W$, en otras palabras $d\left(f\left(z_0\right), w_0\right) < \frac{\varepsilon_{w_0}}{2}$. También, $d\left(f\left(z_0\right), z_1\right) < \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_{w_0}}{2}$. Por lo tanto

$$d\left(w_0, z_1\right) < \frac{\varepsilon_{w_0}}{2} + \frac{\varepsilon_{w_0}}{2} = \varepsilon_{w_0}.$$

Es decir, $z_1 \in B\left(w_0, \varepsilon_{w_0}\right) \subseteq W$. Entonces $f\left(z_1\right) \in f\left(\overline{W}\right)$, y así, encontramos un punto $w_1 \in F$ tal que $f\left(z_1\right) \in B\left(w_1, \frac{\varepsilon_{w_1}}{2}\right) \subseteq W$, es decir, $d\left(f\left(z_1\right), w_1\right) < \frac{\varepsilon_{w_1}}{2}$. De la misma manera, la ε_0-cadena asegura que $d\left(f\left(z_1\right), z_2\right) < \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon_{w_1}}{2}$. Por lo tanto

$$d\left(w_1, z_2\right) < \frac{\varepsilon_{w_1}}{2} + \frac{\varepsilon_{w_1}}{2} = \varepsilon_{w_1}.$$

Esto es, $z_2 \in B\left(w_1, \varepsilon_{w_1}\right) \subseteq W$. Así, inductivamente, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, los puntos z_i están en W. En particular $z_n = y \in W$, lo cual es una contradicción, ya que $y \in X \setminus \overline{W} \subseteq X \setminus W$.

Por lo tanto z no puede ser encadenado a z, concluyendo que $\overline{W}$ es positivamente invariante por cadenas. ■

Es en este punto donde rescatamos la definición de atractor y el teorema A.1 del apéndice A para poder finalizar nuestro resultado principal.

Definición A.1 Sea $f\colon X \longrightarrow X$ función continua. Decimos que un conjunto $K \subseteq X$ no vacío y cerrado es un *atractor de* f si existe un abierto U de X, tal que $K \subseteq U$, y donde

$$K = \omega(U) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)}.$$

Teorema A.1 Sean $f\colon X \longrightarrow X$ y $K \subseteq X$. K es un atractor de f si y solo si existe un abierto U tal que $K \subseteq U$, $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$ y $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n\left(\overline{U}\right)$.

Únicamente enunciamos este resultado debido al contenido técnico en su prueba, que desarticula la lectura de la recurrencia por cadenas de este capítulo. Sin embargo, su demostración puede ser consultada, como ya se dijo, en el apéndice A.

Demostración del Teorema 3.1 (Segunda parte). Supongamos valido el inciso (4) y llamemos $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n\left(\overline{U}\right)$. Veremos que este conjunto K es el que cumple las condiciones del inciso 5.

Para ver que K es atractor, tomamos en cuenta dos simples cosas: primero, por hipótesis, $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$. Y segundo, la siguiente contención:

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n\left(\overline{U}\right) \subseteq f\left(\overline{U}\right) \subseteq U.$$

Por lo tanto, por el Teorema A.1, y por cómo definimos al conjunto K, tenemos que este es un atractor. Ahora, $x \notin K$, pues de otra forma $x \in K \subseteq U$, pero esto no puede pasar ya que por hipótesis $x \notin U$.

Por último veamos que $\omega(x) \subseteq K$. Para esto, sean $z \in \omega(x)$ y $n \in \mathbb{N}$ y notemos que basta ver que $z \in f^n\left(\overline{U}\right)$. Como $z \in \omega(x)$, por la Definición 2.10 del capitulo 2, existe una sucesión creciente de naturales $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $f^{n_i}(x) \longrightarrow z$. Así, por hipótesis tenemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in U$, entonces $f^l(x) \in U$ para todo $l \geq k$. Con esto, tenemos un punto $q \in \mathbb{N}$ tal que $n_q \geq n + k$.

Tomamos la sucesión $\{f^{n_i - n}(x)\}_{i\geq q}$. Ahora, como $n_i - n > k$ para $i \geq q$, $\{f^{n_i-n}(x)\}_{i\geq q} \subseteq U \subseteq \overline{U}$, concluyendo que $\{f^{n_i}(x)\}_{i\geq q} \subseteq f^n\left(\overline{U}\right)$. Como $f^n\left(\overline{U}\right)$ es compacto entonces hay una subsucesión de $\{f^{n_i}(x)\}_{i\geq q}$ tal que converge en $f^n\left(\overline{U}\right)$, pero toda subsuceción converge al mismo punto que la sucesión original, por lo tanto $z \in f^n\left(\overline{U}\right)$, concluyendo así la implicación.

Cerremos finalmente la cadena de implicaciones y con ello la demostración. Por el Teorema A.1, como el conjunto K es un atractor, podemos encontrar un abierto $U \subseteq X$ tal que $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$, $K \subseteq U$ y con $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n\left(\overline{U}\right)$; además por hipótesis tenemos que $x \notin K$, con lo cual, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin f^m\left(\overline{U}\right)$. Así, como los conjuntos U y $X \setminus \{x\}$ son abiertos, obtenemos que $U \setminus \{x\}$ es abierto, además de que $f^m\left(\overline{U}\right) \subseteq U \setminus \{x\}$. Por lo tanto, la métrica del espacio X permite encontrar $W \subseteq X$ abierto tal que

$$f^m\left(\overline{U}\right) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U \setminus \{x\}$$

Notando que $x \notin \overline{W}$, la afirmación es que $\overline{W}$ es un conjunto positivamente invariante por cadenas bajo f^m; la cual es cierta gracias al Lema 3.3 anterior.

Ahora, supongamos que para toda natural j, $f^j(x) \notin U$, es decir la órbita de x bajo f está fuera de U. Entonces, como $X \setminus U$ es cerrado, sucede que $\overline{o(f,x)} \subseteq X \setminus U$. Así, por el Lema 2.2 del segundo capítulo, obtenemos que $\omega(x) \subseteq \overline{o(x,f)} \subseteq X \setminus U$. Pero por hipótesis $\omega(x) \subseteq K \subseteq U$, generando una contradicción. Por lo tanto existe algún $j \in \mathbb{N}$ tal que $f^j(x) \in U$.

Por lo tanto, para toda $i \geq j+m$ sucede que $f^i(x) \in \overline{W}$. En particular $f^{mk}(x) \in \overline{W}$ para algún entero k. Teniendo las hipótesis del Lema 3.2, concluimos que x no es recurrente por cadenas bajo f^m, es decir $x \notin R(f^m)$, pero por la Proposición 3.3, $R(f) = R(f^m)$, por lo tanto $x \notin R(f)$, concluyendo la implicación.

■

El siguiente corolario nace del Teorema 3.1 ya que la simpleza de su demostración recae en el uso topológico de la recurrencia por cadenas.

Corolario 3.3. Así como $\mathrm{Fix}(f)$ y $\Omega(f)$, el conjunto $R(f)$ es cerrado.

Demostración. Veamos que el conjunto $X \setminus R(f)$ es abierto: tomemos $x \in X \setminus R(f)$. Entonces, por el Teorema 3.1, existe un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x \notin \overline{U}$, $f(x) \in U$ y $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \in B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$, por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $d\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon$.

Tomemos $V = B(x,\delta) \cap X \setminus \overline{U}$. Naturalmente $x \in V$; sólo falta ver que $V \subseteq X \setminus R(f)$. Para esto, si tomamos un punto $w \in V$, por un lado $w \notin \overline{U}$, y por otro, $f(w) \in B\left(f(x), \varepsilon\right) \subseteq U$. Como se cumple $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$, el abierto U garantiza que $w \notin R(f)$. ■

Capítulo 4

Entropía

A partir de este punto, el incentivo de nuestro trabajo será intentar medir y clasificar la "complejidad de la dinámica" de una función continua en un espacio métrico compacto X y con esto, saber qué tan "caótica" es. Aquí nos referiremos a la "complejidad", tristemente, sólo a la capacidad de la función de "revolver" puntos del espacio conforme aumentamos sus iteraciones. Es decir, qué tanto se intersecan los elementos de una y varias cubiertas del espacio bajo las iteraciones de f.

El termino *entropía topológica* se atribuye a los autores Adler, Konheim y McAndrew, por ocuparlo por primera vez en 1965 [Adler et al., 1965]. Existen varias formas de medir la "complejidad de la dinámica" de una función, pero en esencia, lo que nos interesa, es asignar un valor a nuestra función que nos permita interpretar si dicha función se comporta de manera "caótica" o de manera "aburrida".

Veremos que, intuitivamente y para digerir mejor el concepto, la "complejidad" de la función tiene que crecer exponencialmente, para que, al momento de medirse con el logaritmo, obtengamos números positivos. Es decir, podamos interpretar que "la entropía de la función es positiva".

A menos que se especifique algo distinto, a lo largo de este capítulo X denotará un espacio métrico compacto, $f\colon X \longrightarrow X$ una función continua y α una cubierta abierta para X.

Definición 4.1. Dada una cubierta abierta α para X, denotamos como $N(\alpha)$ a *la mínima cardinalidad de todas las subcubiertas finitas de* α.

Observación 4.1. Como X es compacto, toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita. Por lo tanto $N(\alpha)$ siempre es un número natural.

Definición 4.2. Dada una cubierta abierta α para X, definimos *la entropía de* α como $H(\alpha) = \ln(N(\alpha))$.

Observación 4.2. De las definiciones previas se sigue lo siguiente.

(I) Notemos que como $N(\alpha) \geq 1$ para toda cubierta abierta α, entonces $H(\alpha) \geq 0$ siempre.

(II) Dada cualquier cubierta α, si consideramos la cubierta $\alpha' = \alpha \cup \{\emptyset\}$, entonces obtenemos que $N(\alpha) = N(\alpha')$ ya que el conjunto vacío no cubre ninguna porción del espacio en ningún caso. Así, $H(\alpha) = H(\alpha')$.

Ejemplo 4.1. Tomemos $X = [0,1]$ y $\alpha = \left\{[0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{(\frac{1}{3}, 1]\right\}$.

Ya que $1 \notin [0, \frac{1}{n})$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces para toda γ subcubierta finita de α, $(\frac{1}{3}, 1]$ pertenece a γ. Sin embargo $(\frac{1}{3}, 1]$ no cubre al espacio $[0,1]$. Por lo tanto, toda subcubierta de α debe tener al menos dos elementos, *i.e.* $N(\alpha) \geq 2$. Ahora tomemos $\left\{[0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, 1]\right\}$, subcubierta de α que claramente cubre al $[0,1]$. Por lo tanto $N(\alpha) = 2$, y así, $H(\alpha) = \ln 2$.

En general, las cubiertas de la forma $\gamma = \left\{[0, \frac{1}{n}), (a, 1]\right\}$, donde $a < \frac{1}{n}$ y $n \in \mathbb{N}$, son tal que $H(\gamma) = \ln 2$. Esto ya que toda subcubierta de γ debe tener los mismos dos elementos para cubrir al $[0,1]$.

Ejemplo 4.2. Sean $X = [0,1]$ y $\alpha = \left\{\left(x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}\right) \cap [0,1] : x \in [0,1]\right\}$ cubierta abierta.

Notemos que la longitud del $[0,1]$ es 1 y que la longitud de cada intervalo $\left(x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}\right)$ es $\frac{1}{2}$ para cualquier $x \in X$. Por lo tanto, como [0,1] es un conjunto cerrado y todo conjunto de la forma $\left(x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}\right)$ es abierto, se concluye que para cubrir a X con elementos de α se necesitan por lo menos 3 elementos. Así, $N(\alpha) \geq 3$.

Tomemos $\left\{\left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) \cap [0,1], \left(\frac{2}{8}, \frac{6}{8}\right) \cap [0,1], \left(\frac{5}{8}, \frac{9}{8}\right) \cap [0,1]\right\}$. Como este conjunto es cubierta abierta para X y subcubierta finita de α, podemos concluir que $N(\alpha) = 3$, y por lo tanto, $H(\alpha) = \ln 3$.

Ejemplo 4.3. Generalizando el ejemplo anterior, si tomamos $X = [0,1]$ y $\alpha = \left\{\left(x - \frac{1}{2N}, x + \frac{1}{2N}\right) \cap [0,1] : x \in [0,1]\right\}$ con N fija en $\mathbb{N}$, entonces $N(\alpha) = N + 1$ y $H(\alpha) = \ln(N+1)$.

Definición 4.3. Dadas α y β cubiertas abiertas para el espacio X, decimos que β *refina* a α si para todo $U \in \beta$ existe $V \in \alpha$ tal que $U \subseteq V$. En notación escribimos $\alpha < \beta$.

Ejemplo 4.4. Para cualquier $\varepsilon > 0$, la familia $\alpha = \{B(x, \varepsilon) : x \in X\}$ siempre es cubierta abierta del espacio X. Definiendo $\beta = \left\{B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) : x \in X\right\}$ tenemos que $\alpha < \beta$, ya que para todo $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ elemento de β se tiene que $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B(x, \varepsilon)$, con $B(x, \varepsilon) \in \alpha$. Es decir, β refina a α.

Observación 4.3. Si β es una subcubierta de α, entonces para todo elemento de $U \in \beta$, $U \subseteq U$, con $U \in \alpha$. Por lo tanto $\alpha < \beta$, es decir, toda subcubierta de α es un refinamiento de α.

Definición 4.4. Para cualesquiera α y β cubiertas abiertas de X, definimos la *cubierta cuña* como

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha \text{ y } B \in \beta\}.$$

Ejemplo 4.5. Sea $X = [0,1]$ y tomemos las siguientes cubiertas abiertas: $\alpha = \left\{[0, \frac{1}{3}), (\frac{1}{6}, \frac{3}{6}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{3}{6}, \frac{5}{6}), (\frac{2}{3}, 1]\right\}$ y $\beta = \left\{[0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{2}, 1]\right\}$.

Por la tanto, la cubierta cuña queda definida como

$$\alpha \vee \beta = \left\{[0, \tfrac{1}{3}), (\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{6}), (\tfrac{2}{3}, 1]\right\}.$$

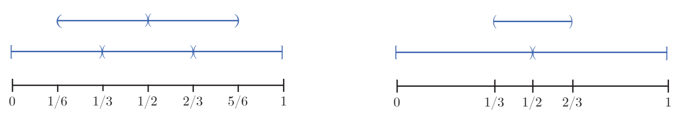

Figura 4.1: A la izquierda podemos apreciar la cubierta α y a la derecha la cubierta β.

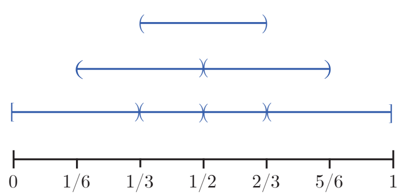

Figura 4.2: Cubierta $\alpha \vee \beta$.

Observación 4.4. De la definición de cubierta cuña podemos concluir lo siguiente.

(I) Como α y β son cubiertas de X, se sigue entonces que $\alpha \vee \beta$ es siempre una cubierta de X: si $x \in X$, entonces $x \in A$ para algún $A \in \alpha$, y $x \in B$ para algún $B \in \beta$, por lo tanto $x \in A \cap B$, *i.e.* $\alpha \vee \beta$ es cubierta.

(II) La cubierta $\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha \text{ y } B \in \beta\}$ es una cubierta abierta debido a que la intersección finita de abiertos es abierta.

(III) Para todo par de cubiertas abiertas α y β, se cumple que $\alpha < \alpha \vee \beta$ y $\beta < \alpha \vee \beta$. Esto ya que para cualesquiera $A \in \alpha$ y $B \in \beta$, $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

Definición 4.5. Dada cualquier cubierta abierta α y $f \colon X \longrightarrow X$ función continua, definimos una nueva cubierta de la siguiente manera:

$$f^{-1}\alpha := \left\{f^{-1}(A) : A \in \alpha\right\}.$$

Observación 4.5. De la cubierta definida anteriormente podemos concluir los siguientes puntos.

(I) Para cada $x \in X$, se tiene que $f(x) \in X$. Como α es cubierta del espacio, entonces $f(x) \in A$, para algún $A \in \alpha$, *i.e.* $x \in f^{-1}(A)$. Probando que $f^{-1}\alpha$ es cubierta del X.

(II) Como f es continua y todo elemento de α es abierto, se sigue entonces que los elementos de $f^{-1}\alpha$ son abiertos.

Ejemplo 4.6. Sean $X = [0,1]$ y $f\colon X \longrightarrow X$ definida como $f(x) = x^2$. Sea $\alpha = \left\{[0, \frac{1}{2}), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (\frac{1}{2}, 1]\right\}$ cubierta abierta para X. Con esto tenemos:

$$f^{-1}\left([0, \tfrac{1}{2})\right) = [0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)\right) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ y } f^{-1}\left((\tfrac{1}{2}, 1]\right) = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1].$$

Por lo tanto $f^{-1}\alpha = \left\{[0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]\right\}$.

Proposición 4.1. Sean α, β, γ y δ cubiertas para el espacio X, entonces:

(I) $\alpha < \beta \Rightarrow H(\alpha) \leq H(\beta)$ y $H(\alpha \vee \beta) = H(\beta)$.

(II) $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

(III) $\alpha < \beta \Rightarrow f^{-1}\alpha < f^{-1}\beta$.

(IV) $f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}\alpha \vee f^{-1}\beta$.

(V) $H\left(f^{-1}\alpha\right) \leq H(\alpha)$ y la igualdad se da siempre que f es suprayectiva.

(VI) Si $\alpha < \beta$ y $\gamma < \delta$, entonces $\alpha \vee \gamma < \beta \vee \delta$.

Demostración. Para probar el inciso (I), como $\alpha < \beta$, al tomar $\left\{B_1, \ldots, B_{N(\beta)}\right\}$ subcubierta abierta finita de β, para cada B_i existe un elemento $A_i \in \alpha$ tal que $B_i \subseteq A_i$, con $i \in \{1, \ldots, N(\beta)\}$. Por lo tanto $\left\{A_1, \ldots, A_{N(\beta)}\right\}$ es subcubierta abierta finita de α. Así, la mínima subcubierta abierta de α no puede tener más de $N(\beta)$ elementos, *i.e.* $N(\alpha) \leq N(\beta)$. Concluyendo que $H(\alpha) \leq H(\beta)$.

Además, como para cada $i \in \{1, \ldots, N(\beta)\}$ se cumple $B_i \subseteq A_i$, entonces $B_i \cap A_i = B_i$. Por lo tanto $\left\{A_1 \cap B_1, \ldots, A_{N(\beta)} \cap B_{N(\beta)}\right\} = \left\{B_1, \ldots, B_{N(\beta)}\right\}$ es subcubierta abierta finita de $\alpha \vee \beta$, concluyendo que $N(\alpha \vee \beta)$ no puede contener más de $N(\beta)$ elementos, *i.e.* $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\beta)$. Y como ya probamos que $\beta < \alpha \vee \beta \Rightarrow N(\beta) \leq N(\alpha \vee \beta)$, concluimos entonces que $N(\alpha \vee \beta) = N(\beta)$, es decir, $H(\alpha \vee \beta) = H(\beta)$.

Sean $\left\{A_1, \ldots, A_{N(\alpha)}\right\}$ subcubierta finita abierta de α y $\left\{B_1, \ldots, B_{N(\beta)}\right\}$ subcubierta abierta finita de β.

Definimos ahora $C = \{A_i \cap B_j : 1 \leq i \leq N(\alpha),\ \ 1 \leq j \leq N(\beta)\}$, y notamos que es cubierta del espacio. Así, C es subcubierta abierta finita de $\alpha \vee \beta$, concluyendo que $N(\alpha \vee \beta)$ no tiene más de $|C|$ elementos. Es decir, $N(\alpha \vee \beta) \leq$

$N(\alpha) \cdot N(\beta)$. Aplicando logaritmo de ambos lados obtenemos $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$. Esto concluye el segundo inciso.

Probemos a continuación la afirmación en (III). Si tomamos $U \in f^{-1}\beta$, entonces $U = f^{-1}(B)$ para algún $B \in \beta$. Como $\alpha < \beta$, existe $A \in \alpha$ tal que $B \subseteq A$, por lo tanto $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$ y así $f^{-1}\alpha < f^{-1}\beta$.

El inciso (IV) se sigue directamente del hecho de que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ para todo $A \in \alpha$ y $B \in \beta$.

Para el inciso (V), si tomamos $\{A_1, \ldots, A_{N(\alpha)}\}$ subcubierta mínima de α, y cubierta del espacio X, entonces el conjunto $\{f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$ también es cubierta para el espacio X. Por lo tanto la mínima cantidad de elementos de $f^{-1}\alpha$ que cubren a X no puede ser mayor a $N(\alpha)$, es decir, $N(f^{-1}\alpha) \leq N(\alpha)$.

Ahora supongamos que f es suprayectiva y sea $\{f^{-1}(B_1), \ldots, f^{-1}(B_m)\}$ subcubierta finita de $f^{-1}\alpha$ tal que

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} f^{-1}(B_n), \text{ donde } m < N(\alpha).$$

Entonces $f(X) \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} B_n$. Y como $f(X) = X$, concluimos que $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} B_n$, contradiciendo la definición de $N(\alpha)$. Por lo tanto no es posible que $N(f^{-1}\alpha) < N(\alpha)$, es decir, $N(f^{-1}\alpha) = N(\alpha)$.

Para la afirmación final tomemos V un elemento de la cubierta $\beta \vee \delta$. Esto quiere decir que existen conjuntos B en β, y D en δ, tal que $V = B \cap D$.

Como por hipótesis $\alpha < \beta$ y $\gamma < \delta$, entonces tenemos que existen conjuntos A en α y C en γ tal que $B \subseteq A$ y $D \subseteq C$. Por lo tanto $U = A \cap C$ es elemento de $\alpha \vee \gamma$ y además $V \subseteq U$. Con esto probamos que $\alpha \vee \gamma < \beta \vee \delta$.

$\blacksquare$

Definición 4.6. Si $f\colon X \longrightarrow X$ es una función continua y α es una cubierta abierta del espacio X, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos una nueva cubierta como

$$f^{-n}\alpha = \left\{f^{-n}(A) : A \in \alpha\right\}.$$

Más aún, podemos aplicar nuestra operación cuña y obtener una cubierta del siguiente estilo:

$$\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha =$$
$$\left\{A_0 \cap f^{-1}(A_1) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(A_{n-1}) : A_j \in \alpha, j = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

Lema 4.1. Sean $f\colon X \longrightarrow X$, α cubierta abierta de X y $n, k \in \mathbb{N}$. Entonces se cumplen los siguientes incisos:

(I) $f^{-k}f^{-m}\alpha = f^{-(k+m)}\alpha$.

(II) $\left(f^k\right)^{-m}\alpha = f^{-mk}\alpha$.

(III) $f^{-k}\left(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}\alpha\right) = f^{-k}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m+k-1)}\alpha$.

Demostración. La demostración del primer inciso es como sigue:

$$\begin{aligned}
f^{-k}f^{-m}\alpha &= \left\{f^{-k}\left(U\right) : U \in f^{-m}\alpha\right\} \\
&= \left\{f^{-k}\left(U\right) : U = f^{-m}\left(A\right),\, A \in \alpha\right\} \\
&= \left\{f^{-k}\left(f^{-m}\left(A\right)\right) : A \in \alpha\right\} \\
&= \left\{f^{-k-m}\left(A\right) : A \in \alpha\right\} \\
&= f^{-(k+m)}\alpha.
\end{aligned}$$

Para probar (II) notemos que $x \in \left(f^k\right)^{-m}(A) \Leftrightarrow \left(f^k\right)^m(x) \in A \Leftrightarrow f^{mk}(x) \in A \Leftrightarrow x \in f^{-mk}(A)$. Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\left(f^k\right)^{-m}\alpha &= \left\{\left(f^k\right)^{-m}\left(A\right) : A \in \alpha\right\} \\
&= \left\{f^{-km}\left(A\right) : A \in \alpha\right\} \\
&= f^{-mk}\alpha.
\end{aligned}$$

Finalmente, para el tercer inciso, tenemos al primer conjunto definido como:

$$f^{-k}\left(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}\alpha\right) = \left\{f^{-k}\left(U\right) : U \in \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}\alpha\right\}.$$

De donde si $U \in \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}\alpha$, significa que existen m conjuntos abiertos de α, $D_0, D_1, \ldots, D_{m-1}$, con $U = D_0 \cap f^{-1}\left(D_1\right) \cap \cdots \cap f^{-(m-1)}\left(D_{m-1}\right)$ y tal que

$$\begin{aligned}
f^{-k}\left(U\right) &= f^{-k}\left(D_0 \cap f^{-1}\left(D_1\right) \cap \cdots \cap f^{-(m-1)}\left(D_{m-1}\right)\right) \\
&= f^{-k}\left(D_0\right) \cap f^{-(k+1)}\left(D_1\right) \cap \cdots \cap f^{-(k+m-1)}\left(D_{m-1}\right).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Y por otro lado, el segundo conjunto está definido como

$$\begin{gathered}
f^{-k}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m+k-1)}\alpha = \\
\left\{f^{-k}\left(D_0\right) \cap f^{-(1+k)}\left(D_1\right) \cap \cdots \cap f^{-(m+k-1)}\left(D_{m-1}\right) : D_j \in \alpha, j = 0, \ldots, m-1\right\}.
\end{gathered}$$

Por lo tanto, por (4.1), nuestros conjuntos son iguales. ■

Definición 4.7. Dada $f\colon X \longrightarrow X$ continua y α cubierta abierta del espacio X, definimos el siguiente conjunto:

$$H_f^n\left(\alpha\right) = H\left(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha\right).$$

Ejemplo 4.7. Consideremos al espacio $X=[0,1]$, $\alpha=\left\{[0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{3},1]\right\}$ cubierta y sea $f(x)=c$ para todo elemento $x\in X$ con $c\in[0,1]$.

CASO 1. $c\notin[0,\frac{1}{2})\cap(\frac{1}{3},1]$. Por lo tanto, existe un elemento $A\in\alpha$ tal que $c\in A$. Así, $f^{-n}(A)=X$ para todo natural n, y $f^{-n}(B)=\emptyset$, con B el otro elemento de α y para todo natural n.

Con esto obtenemos que $f^{-n}\alpha=\{X,\emptyset\}$ para todo natural n. Entonces, si tomamos un elemento U en la cubierta $\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha$, obtenemos inmediatamente un $U_0\in\alpha$ y $U_1,\ldots,U_{n-1}$ elementos en $\{X,\emptyset\}$ tal que

$$U=U_0\cap U_1\cap\cdots\cap U_{n-1}.$$

Y notemos con esto que si alguno de los U_i es el conjunto vacío, con $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, entonces $U=\emptyset$. Pero si ninguno de los conjuntos $U_1,\ldots,U_{n-1}$ es vacío, entonces $U=U_0$. Así, obtenemos la siguiente igualdad

$$\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha=\left\{[0,\tfrac{1}{2}),(\tfrac{1}{3},1],\emptyset\right\}.$$

Entonces, por el inciso(II) de la Observación 4.2, sabemos que su mínima subcubierta finita es tal que $N\left(\left\{[0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{3},1],\emptyset\right\}\right)=N(\alpha)=2$, y por lo tanto

$$H_f^n(\alpha)=H\left(\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha\right)=\ln 2,\quad \text{para todo } n \text{ natural.}$$

CASO 2. Supongamos que $c\in[0,\frac{1}{2})\cap(\frac{1}{3},1]$. Esto significa que $f^{-n}\left([0,\frac{1}{2})\right)=X=f^{-n}\left((\frac{1}{3},1]\right)$, por lo tanto, $f^{-n}\alpha=\{X\}$, y esto para todo natural n. Entonces, cualquier elemento $U\in\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha$ es la intersección de un conjunto U_0 de α con todo el espacio X, es decir el conjunto U_0 mismo. Por lo tanto, para toda n en los naturales, tenemos que

$$\begin{aligned}&\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha=\alpha\\ \Rightarrow &H\left(\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha\right)=H(\alpha)=\ln 2\\ \Rightarrow &H_f^n(\alpha)=\ln 2.\end{aligned}$$

Proposición 4.2. $\left\{H_f^n(\alpha)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente.

Demostración. Para cada $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha$ tiene un total de n cubiertas bajo la operación cuña, y $\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha\vee f^{-n}$ tiene un elemento más, concluyendo que

$$\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha<\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-(n-1)}\alpha\vee f^{-n}.$$

Y por lo tanto $H_f^n(\alpha)\leq H_f^{n+1}(\alpha)$. ∎

Con esto en mente, nuestra meta es crear una definición de entropía para cualquier función continua $f\colon X\longrightarrow X$. Para ello, necesitamos recordar las definiciones de límite superior y límite inferior de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf\left\{\sup\left\{x_m : m \geq n\right\} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup\left\{\inf\left\{x_m : m \geq n\right\} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Con esto, probaremos el siguiente resultado de límites de sucesiones.

Teorema 4.1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es subaditiva, es decir que para toda n natural

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{n}\right)$ existe y $\inf\left\{a_n \cdot \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{n}\right)$.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ existen enteros no negativos q, r tal que $n = mq + r$, donde $0 \leq r < m$. Así, de la subaditividad de la sucesión se sigue que

$$a_n \leq a_{mq} + a_r \leq a_m \cdot q + a_r \quad \Rightarrow \quad \tfrac{a_n}{n} \leq \tfrac{a_m \cdot q}{n} + \tfrac{a_r}{n}.$$

Además, si $n = mq + r$, entonces $1 = \frac{q}{n} \cdot m + \frac{r}{n}$. Como m es fijo y $r < m$, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r}{n} = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} 1 &= \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{q}{n} \cdot m + \tfrac{r}{n}\right) \\
\Rightarrow 1 &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{q}{n} \cdot m \\
\Rightarrow \tfrac{1}{m} &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{q}{n} \\
\Rightarrow \tfrac{a_m}{m} &= \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{q}{n} \cdot a_m\right).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

No solo esto, como $0 \leq r < m$, tenemos que $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$ siempre. Por lo tanto $a_r \in \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$, *i.e.* el termino a_r siempre está acotado. Podemos concluir entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{a_r}{n} = 0. \tag{4.3}$$

Juntando los límites en (4.2) y (4.3), obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{q}{n} \cdot a_m + \frac{a_r}{n}\right) = \frac{a_m}{m}$.

Así, por las propiedades del ínfimo y del supremo, sabemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\tfrac{a_m \cdot q}{n} + \tfrac{a_r}{n}\right).$$

Por lo tanto, como $\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_m \cdot q}{n} + \frac{a_r}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_m \cdot q}{n} + \frac{a_r}{n}\right) = \frac{a_m}{m}$, se sigue que $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}$. Y como esto sucede para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ es una cota inferior del conjunto $\left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}$. Por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \tfrac{a_n}{n} \leq \inf\left\{\tfrac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}$$

Finalmente, como sabemos que $\text{ínf}\left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\} \leq \frac{a_n}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, obtenemos que

$$\text{ínf}\left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Por lo tanto

$$\text{ínf}\left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \text{ínf}\left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Concluyendo que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \text{ínf}\left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

$\blacksquare$

Proposición 4.3. $H_f^n(\alpha)$ es una sucesión subaditiva.

Demostración. Si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces, con ayuda de la Proposición 4.1 y el Lema 4.1, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
H_f^{n+m}(\alpha) &= H\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n+m-1)}\alpha\right) \\
&= H\left(\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}\alpha\right) \vee f^{-m}\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha\right)\right) \\
&\leq H\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}\alpha\right) + H\left(f^{-m}\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha\right)\right) \\
&\leq H\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(m-1)}\alpha\right) + H\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha\right) \\
&= H_f^m(\alpha) + H_f^n(\alpha).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Con esta última proposición y el teorema previo, no queda más que preguntarse qué pasa cuando tomamos el límite de $\frac{1}{n} \cdot H_f^n(\alpha)$.

Lo primero es notar que para toda cubierta abierta α del espacio X, $N(\alpha) \geq 1$, y por lo tanto

$$H_f^1(\alpha) = H(\alpha) \geq 0.$$

Añadiendo el hecho de que $H_f^n(\alpha) \geq 0$ para todo numero natural n, ya que $\left\{H_f^n(\alpha)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot H_f^n(\alpha) \geq 0.$$

Y esta es la definición con la que podemos empezar a hablar de entropía para funciones continuas.

Definición 4.8. Para cada función continua $f : X \longrightarrow X$ y para cada α cubierta abierta del espacio X, definimos *la entropía de f respecto de α* como

$$h(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot H_f^n(\alpha).$$

Ejemplo 4.8. Del ejemplo 4.7, obtuvimos que dado el espacio $X = [0,1]$, la cubierta $\alpha = \left\{[0,\frac{1}{2}), (\frac{1}{3},1]\right\}$ y $f(x) = c$, para todo elemento $x \in X$ con $c \in [0,1]$, sucede que $H_f^n(\alpha) = \ln 2$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} h(f,\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot H_f^n(\alpha) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln 2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.9. Consideremos el espacio $I = [0,1]$, la cubierta $\alpha = \left\{[0,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},1]\right\}$ y la función $f\colon I \longrightarrow I$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0,\frac{1}{2}], \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

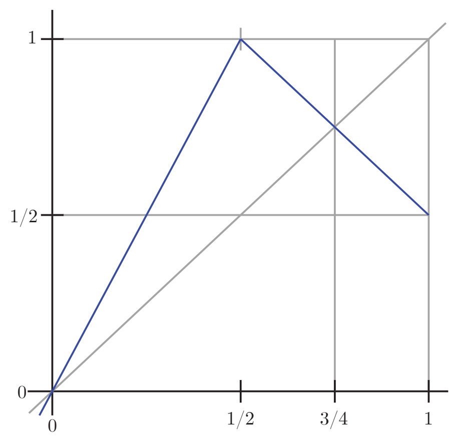

Figura 4.3: Gráfica de la función en los ejemplos 2.5 y 4.9.

Al calcular las preimágenes de cada conjunto en la cubierta α observamos que $f^{-1}\left([0,\frac{1}{2})\right) = [0,\frac{1}{2})$, esto por definición de f. Más aún, se tiene que $f^{-1}\left([0,\frac{1}{2})\right) = [0,\frac{1}{2^2})$, y en consecuencia, $f^{-n}\left([0,\frac{1}{2})\right) = [0,\frac{1}{2^{n+1}})$. Así mismo, $f^{-n}\left((\frac{1}{3},1]\right) = (\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n},1]$. Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$f^{-n}\alpha = \left\{[0,\tfrac{1}{2^{n+1}}), (\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2^n},1]\right\}.$$

Ahora necesitamos encontrar la cardinalidad de la cubierta $\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha$, es decir, cuántos elementos distintos del vacío contiene.

Sea entonces $A \in \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha$. Con esto, tenemos que $A = A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$, con cada $A_i \in f^{-i}\alpha$. Notemos de inmediato que si $A \neq \emptyset$, y además algún elemento de A es de la forma $A_i = [0, \frac{1}{2^{i+1}})$, entonces todos los elementos anteriores a él tienen que ser de la misma forma $A_j = [0, \frac{1}{2^{j+1}})$, estando $j \in \{0, 1, \ldots, i\}$. Esto ya que si suponemos $A_i = [0, \frac{1}{2^{i+1}})$ y $A_{i-1} = (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{i-1}}, 1]$ sucede lo siguiente:

$$3 < 2^2 \Leftrightarrow 3 < 2^{i+1-(i-1)} \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{i+1}}{2^{i-1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{i+1}} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Por lo tanto $[0, \frac{1}{2^{i+1}}) \cap (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{i-1}}, 1] = \emptyset$, y entonces $A = \emptyset$. En conclusión, los elementos distintos del vacío en $\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha$ son de la forma

$$[0, \tfrac{1}{2}) \cap [0, \tfrac{1}{2^2}) \cap \cdots \cap [0, \tfrac{1}{2^{i+1}}) \cap (\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2^{i+1}}, 1] \cap \cdots \cap (\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2^{n-1}}, 1].$$

Así, contando todos estos elementos, obtendremos que la cardinalidad de $\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha$ será n. Entonces $N\left(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha\right) \leq n$, y por lo tanto, $h(f, \alpha) \leq \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Proposición 4.4. Si $\alpha < \beta$ entonces $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$.

Demostración. Del inciso(III) de la Proposición 4.1 sabemos que $\alpha < \beta$ implica que $f^{-n}\alpha < f^{-n}\beta$, y esto para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la misma Proposición 4.1, pero del inciso(VI), obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha < \beta \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\beta.$$

Por lo tanto $H_f^n(\alpha) \leq H_f^n(\beta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en conclusión, $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$.

■

Antes del siguiente resultado conviene hacer una pequeña observación: si tenemos que f y g son funciones tal que una es inversa de la otra, *i.e.* $f^{-1} = g$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ sucede lo siguiente:

$$g^{-k}\alpha = \left\{g^{-k}(U) : U \in \alpha\right\} = \left\{\left(f^{-1}\right)^{-k}(U) : U \in \alpha\right\} = \left\{f^{k}(U) : U \in \alpha\right\}.$$

Pero ya que f es inversa de g, entonces la preimagen de g coincide con la imagen directa de f. Es decir $g^{-k}\alpha = f^k\alpha$.

Proposición 4.5. Si f es un homeomorfismo, entonces $h(f, \alpha) = h\left(f^{-1}, \alpha\right)$.

Demostración. Sea g la función inversa del homeomorfismo f, entonces por el párrafo previo, y el inciso(III) del Lema 4.1:

$$\begin{aligned}
H_g^n(\alpha) &= H\left(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha\right) \\
&= H\left(\alpha \vee f\alpha \vee \cdots \vee f^{(n-1)}\alpha\right) \\
&= H\left(f^{(n-1)}\left(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha\right)\right) \\
&= H\left(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\alpha\right) \\
&= H_f^n(\alpha).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(f,\alpha) = h\left(f^{-1},\alpha\right)$.

■

Definición 4.9. Dada $f\colon X \longrightarrow X$, definimos la entropía de f como

$$h(f) = sup\{h(f,\alpha) : \alpha \text{ es cubierta abierta para el espacio } X\}.$$

Observación 4.6. De la definición previa de entropía se sigue lo siguiente.

(I) Como $0 \leq h(f,\alpha)$, entonces $0 \leq h(f)$.

(II) Si $\phi\colon X \longrightarrow X$ homeomorfismo, como $h(\phi,\alpha) = h\left(\phi^{-1},\alpha\right)$ para cualquier α, entonces $h(\phi) = h\left(\phi^{-1}\right)$.

Proposición 4.6. Podemos considerar $h(f)$ únicamente sobre las cubiertas abiertas finitas del espacio X.

Demostración. Si γ es cubierta abierta para X, entonces existe α subcubierta finita de γ gracias a que X es compacto. Esto es $\gamma < \alpha$, de donde se sigue que $h(f,\gamma) \leq h(f,\alpha)$, y por lo tanto,

$$h(f) \leq \sup\{h(f,\alpha) : \alpha \text{ es cubierta abierta finita del espacio } X\}.$$

Por otro lado, claramente tenemos la siguiente contención de conjuntos

$$\begin{aligned}
&\{h(f,\alpha) : \alpha \text{ es cubierta abierta finita del espacio } X\} \\
&\quad \subseteq \{h(f,\gamma) : \gamma \text{ es cubierta abierta del espacio } X\}.
\end{aligned}$$

Obteniendo así la desigualdad faltante:

$$\sup\{h(f,\alpha) : \alpha \text{ es cubierta abierta finita del espacio } X\} \leq h(f).$$

Por lo tanto, podemos considerar la entropía de f únicamente sobre las cubiertas abiertas finitas del espacio X.

■

Teorema 4.2. Si $f\colon X \longrightarrow X$ es continua, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $h\left(f^k\right) = k \cdot h\left(f\right)$.

Demostración. Sabemos nosotros que

$$h\left(f^k\right) = \sup\left\{h\left(f^k, \alpha\right) : \alpha \text{ es cubierta abierta del espacio } X\right\}.$$

Llamemos $\beta = \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(k-1)}\alpha$, con α una cubierta abierta para el espacio X cualquiera. Entonces obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} h\left(f^k\right) &= \sup\left\{h\left(f^k, \alpha\right) : \alpha \text{ es cubierta abierta del espacio } X\right\} \\ &\geq h\left(f^k, \beta\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \cdot H^n_{f^k}\left(\beta\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \cdot H\left(\beta \vee \left(f^k\right)^{-1}\beta \vee \cdots \vee \left(f^k\right)^{-(n-1)}\beta\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ahora veamos quién es la cubierta con la que estamos trabajando. Ocupando el Lema 4.1 anterior:

$$\begin{aligned} \left(f^k\right)^{-1}\beta &= \left(f^k\right)^{-1}\left(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(k-1)}\alpha\right) \\ &= \left(f^k\right)^{-1}\alpha \vee \left(f^k\right)^{-1} f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee \left(f^k\right)^{-1} f^{-(k-1)}\alpha \\ &= f^{-k}\alpha \vee f^{-k-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-k-(k-1)}\alpha \\ &= f^{-k}\alpha \vee f^{-(k+1)}\alpha \cdots \vee f^{-(2k-1)}\alpha. \end{aligned}$$

Es decir, las pre-imágenes de la cubierta α van desde la k-ésima hasta una antes de la $2k$-ésima. Pero veamos que en el caso más general con $\left(f^k\right)^{-m}\beta$ sucede lo siguiente (una vez más, con el Lema anterior):

$$\begin{aligned} \left(f^k\right)^{-m}\beta &= f^{-km}\alpha \vee f^{-km-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-km-(k-1)}\alpha \\ &= f^{-km}\alpha \vee f^{-(km+1)} \vee \cdots \vee f^{-(k(m+1)-1)}\alpha. \end{aligned}$$

Como sospechamos, las pre-imágenes de la cubierta α van desde la km-ésima hasta una antes de la $k\left(m+1\right)$-ésima.

Por lo tanto,

$$\left(f^k\right)^{-(n-1)}\beta = f^{-k(n-1)}\alpha \vee f^{-(k(n-1)+1)}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(kn-1)}\alpha.$$

Así, de (4.4) tendremos los siguiente:

$$\begin{aligned} h\left(f^k, \beta\right) &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{k}{k}\tfrac{1}{n} \cdot H\left(\alpha \vee f^{-1}\alpha \cdots \vee f^{-(k-1)} \vee f^{-k} \vee \cdots \vee f^{-(kn-1)}\alpha\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{k}{k}\tfrac{1}{n} H^{kn}_f\left(\alpha\right) \\ &= k \cdot h\left(f, \alpha\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como α fue una cubierta abierta arbitraria, tomando el supremo sobre estas, concluimos que

$$h\left(f^k\right) \geq k \cdot h\left(f\right).$$

Para mostrar la desigualdad contraria notemos lo siguiente: para $k, n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{1, \ldots, k, k+1, \ldots, 2k, 2k+1, \ldots, (n-1)\,k, (n-1)\,k+1, \ldots, nk-1\}$ contiene a $\{k, 2k, 3k, \ldots, (n-1)\,k\}$. Por lo tanto,

$$\alpha \vee \left(f^k\right)^{-1} \alpha \vee \cdots \vee \left(f^k\right)^{-(n-1)} \alpha < \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(nk-1)}\alpha.$$

Y así

$$\begin{aligned} h\left(f, \alpha\right) &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{nk} \cdot H\left(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(nk-1)}\alpha\right) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{nk} \cdot H\left(\alpha \vee \left(f^k\right)^{-1} \alpha \vee \cdots \vee \left(f^k\right)^{-(n-1)} \alpha\right) \\ &= \tfrac{1}{k} \cdot h\left(f^k, \alpha\right). \end{aligned}$$

Es decir, $k \cdot h\left(f, \alpha\right) \geq h\left(f^k, \alpha\right)$. Por lo tanto, tomando supremos sobre todas las cubiertas abiertas α, concluimos que $k \cdot h\left(f\right) \geq h\left(f^k\right)$, y con ello la demostración.

■

Como la medida de entropía $h\left(f\right)$ es un número real que describe parte de la dinámica de la función $f\colon X \longrightarrow X$ es decir, de f sobre el espacio X, si encontramos otra función y otro espacio (compacto) $g\colon Y \longrightarrow Y$ tal que la dinámica de f y g en sus espacios sean equivalentes (es decir, que sean topológicamente conjugadas), no es descabellado pensar entonces que las entropias de ambas funciones puedan ser iguales.

Antes de enunciar el Teorema que demuestra la intuición anterior, necesitamos un pequeño lema.

Lema 4.2. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f\colon X \longrightarrow X$, $g\colon Y \longrightarrow Y$ y $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ funciones continuas tales que el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces para cualquier cubierta abierta α de Y y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\varphi^{-1} g^{-n} \alpha = f^{-n} \varphi^{-1} \alpha$$

Demostración. Primero notemos que si $A \in \alpha$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$x \in \varphi^{-1}\left(g^{-n}(A)\right) \Leftrightarrow \varphi(x) \in g^{-n}(A) \Leftrightarrow g^{n}(\varphi(x)) \in A \Leftrightarrow$$

$$\varphi(f^{n}(x)) \in A \Leftrightarrow f^{n}(x) \in \varphi^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in f^{-n}\left(\varphi^{-1}(A)\right).$$

Es decir, $\varphi^{-1}(g^{-n}(A)) = f^{-n}\varphi^{-1}(A)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}g^{-n}\alpha &= \left\{\varphi^{-1}(U) : U \in g^{-n}\alpha\right\} \\
&= \left\{\varphi^{-1}(U) : U = g^{-n}(A)\,,\ A \in \alpha\right\} \\
&= \left\{\varphi^{-1}\left(g^{-n}(A)\right) : A \in \alpha\right\} \\
&= \left\{f^{-n}\left(\varphi^{-1}(A)\right) : A \in \alpha\right\} \\
&= f^{-n}\varphi^{-1}\alpha.
\end{aligned}$$

■

Teorema 4.3. Sean X, Y espacios métricos compactos y $f\colon X \longrightarrow X$, $g\colon Y \longrightarrow Y$ funciones continuas. Si existe $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ función continua y suprayectiva tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

Entonces $h(g) \leq h(f)$.

Demostración. Llamemos

$$\begin{aligned}
A &= \{h(f,\beta) : \beta \text{ es cubierta abierta finita de } X\} \\
B &= \{h(g,\alpha) : \alpha \text{ es cubierta abierta finita de } Y\}.
\end{aligned}$$

Para demostrar el resultado bastará demostrar que $B \subseteq A$.

Primero recordemos que como φ es supra, entonces si α es cualquier cubierta abierta de Y, obtenemos para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$H\left(\varphi^{-1}\left(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha\right)\right) = H\left(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha\right).$$

También sabemos que si α es cubierta abierta de Y, entonces $f^{-1}\alpha$ es cubierta abierta de X gracias a que f es continua. Y por otro lado, que el diagrama conmute significa que $\varphi \circ f^{k}(x) = g^{k} \circ \varphi(x)$ $\forall x \in X$, por lo tanto, por todo esto y el Lema 4.2, se sigue lo siguiente

$$\begin{aligned}
h\left(g,\alpha\right) &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\cdot H\left(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\cdot H\left(\varphi^{-1}\left(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\cdot H\left(\varphi^{-1}\alpha \vee \varphi^{-1}g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee \varphi^{-1}g^{-(n-1)}\alpha\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n}\cdot H\left(\varphi^{-1}\alpha \vee f^{-1}\varphi^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\varphi^{-1}\alpha\right)\\
&= h\left(f,\varphi^{-1}\alpha\right).
\end{aligned}$$

Con lo anterior demostramos que todo elemento $h\left(g,\alpha\right)$ del conjunto B corresponde a un elemento en A. Por lo tanto, como α fue arbitraria, podemos concluir que $B \subseteq A$, es decir

$$h\left(g\right) = \sup B \leq \sup A = h\left(f\right).$$

■

Corolario 4.1. Sean X, Y espacios topológicos compactos. Si $f\colon X \longrightarrow X$ y $g\colon Y \longrightarrow Y$ son topologicamente conjugadas, entonces $h\left(f\right) = h\left(g\right)$.

Demostración. Sea $\Phi\colon X \longrightarrow Y$ el homeomorfismo que hace a f y g conjugadas.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi"'] & X \arrow[d, "\Phi"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

Llamemos $\varphi = \Phi^{-1}$. Primero tenemos que Φ cumple las hipótesis del teorema , es decir $h\left(g\right) \leq h\left(f\right)$. Y por otro lado, φ también cumple las hipótesis de este Teorema 4.3, arrojando que $h\left(f\right) \leq h\left(g\right)$, y concluyendo el resultado.

■

Teorema 4.4. Si $f\colon X \longrightarrow X$ y $Y \subseteq X$ es cerrado e invariante, entonces

$$h\left(f\upharpoonright_Y\right) \leq h\left(f\right).$$

Demostración. Sea α cubierta abierta de Y. Si $A \in \alpha$, entonces existe un conjunto C abierto de X tal que $A = C \cap Y$. Con esto, el conjunto $\gamma = \{C_i : C_i \cap Y = A_i,\ A_i \in \alpha\} \cup \{X \setminus Y\}$ es cubierta para X. Llamemos $g = f\upharpoonright_Y$ y sea M un elemento de la cubierta $\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha$, tal que $M \neq \emptyset$. Entonces, por definición de la cubierta, existirán elementos $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1} \in \gamma$ de tal forma que

$$M = \left(D_0 \cap Y\right) \cap g^{-1}\left(D_1 \cap Y\right) \cap \cdots \cap g^{-(n-1)}\left(D_{n-1} \cap Y\right).$$

Notemos que si $D_j = X \setminus Y$ para algún j, entonces $D_j \cap Y = \emptyset$ y por lo tanto M sería vacío. Así, $D_j \neq X \setminus Y$ para todo $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Entonces, para cada $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} g^{-j}(D_j \cap Y) &= (f\restriction_Y)^{-j}(D_j \cap Y) \\ &= f^{-j}(D_j \cap Y) \cap Y \\ &= f^{-j}(D_j) \cap f^{-j}(Y) \cap Y. \end{aligned}$$

Como $f(Y) \subset Y$, obtenemos $Y \subseteq f^{-1}(f(Y)) \subseteq f^{-1}(Y)$, y por lo tanto $f^{-1}(Y) \cap Y = Y$. Así, $g^{-j}(D_j \cap Y) = f^{-j}(D_j) \cap Y$.

Entonces

$$\begin{aligned} M &= (D_0 \cap Y) \cap g^{-1}(D_1 \cap Y) \cap \cdots \cap g^{-(n-1)}(D_{n-1} \cap Y) \\ &= D_0 \cap Y \cap f^{-1}(D_1) \cap Y \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(D_{n-1}) \cap Y \\ &= D_0 \cap f^{-1}(D_1) \cap \cdots \cap f^{-(n-1)}(D_{n-1}) \cap Y \\ &= R \cap Y \end{aligned}$$

Donde R es un elemento de la cubierta $\gamma \vee f^{-1}\gamma \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\gamma$.

Por lo tanto, por cada elemento de $\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha$ podemos encontrar un elemento de $\gamma \vee f^{-1}\gamma \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\gamma$ vinculado a él, es decir, la cubierta $\gamma \vee f^{-1}\gamma \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\gamma$ tiene al menos tantos elementos como $\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha$. Así,

$$N\left(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha\right) \leq N\left(\gamma \vee f^{-1}\gamma \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\gamma\right).$$

Y con esto $H\left(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-(n-1)}\alpha\right) \leq H\left(\gamma \vee f^{-1}\gamma \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\gamma\right)$. Por lo tanto $h(g, \alpha) \leq h(f, \gamma) \leq h(f)$, y como elegimos la cubierta α de manera arbitraria, podemos concluir que $h(g) \leq h(f)$, terminando así la demostración. ■

Capítulo 5

Turbulencia

Así como la entropía topológica nos proporciona un medida explicita (es decir un número) para la "complejidad" de una función dada, la *turbulencia* es también una forma de describir el "caos" en la dinámica de una función.

Al contrario de la entropía, la *turbulencia* es una propiedad matemática de la función y no es representada con un valor numérico. Este concepto intenta describir la forma en que las funciones "revuelven" puntos con cada iteración.

El concepto de *turbulencia* es importante por ser una definición relativamente sencilla y de gran utilidad práctica (al contrario, por ejemplo, de la *entropía*), además de estar dada en términos topológicos. A lo largo de este capitulo, así como en el siguiente, lograremos hilar conceptos nuevos y previos para lograr una descripción cada vez más completa del "caos" en los sistemas dinámicos.

En lo que resta de este capítulo, a menos que se especifique algo distinto, todo intervalo de $\mathbb{R}$ se considerará de interior no vacío y f denotará una función continua arbitraria de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ en sí mismo.

Definición 5.1. Decimos que la función f es *turbulenta* si existen $J, K \subseteq I$ intervalos compactos con a lo más un punto en común tales que

$$J \cup K \subseteq f(J) \cap f(K).$$

Si además $J \cap K = \emptyset$, entonces diremos que f es *estrictamente turbulenta.*

Observación 5.1. Si una función es estrictamente turbulenta se sigue inmediatamente que es turbulenta.

Lema 5.1. Si f es (estrictamente) turbulenta entonces f^n es (estrictamente) turbulenta, siendo $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

Demostración. Sean $J, K \subseteq I$ intervalos compactos con a lo más un punto en común y f turbulenta (estrictamente turbulenta).

Primero veamos que el lema es cierto para $n = 2$. Si $J \cup K \subseteq f(J) \cap f(K)$ entonces $f(J \cup K) \subseteq f^2(J) \cap f^2(K)$. Como además $f(J) \cup f(K) = f(J \cup K)$ obtenemos entonces

$$f(J)\cap f(K)\subseteq f(J)\cup f(K)=f(J\cup K)\subseteq f^2(J)\cap f^2(K).$$

Y por lo tanto $J\cup K\subseteq f^2(J)\cap f^2(K)$.

Ahora supongamos verdadero el Lema para n y veamos que es cierto para $n+1$. Si $J\cup K\subseteq f(J)\cap f(K)$ entonces $f^n(J\cup K)\subseteq f^{n+1}(J)\cap f^{n+1}(K)$. Como además $f^n(J)\cup f^n(K)=f^n(J\cup K)$ obtenemos entonces

$$f^n(J)\cap f^n(K)\subseteq f^n(J)\cup f^n(K)\subseteq f^n(J\cup K)\subseteq f^{n+1}(J)\cap f^{n+1}(K).$$

Por hipótesis de inducción $J\cup K\subseteq f^n(J)\cap f^n(K)$, y consecuentemente $J\cup K\subseteq f^{n+1}(J)\cap f^{n+1}(K)$, probando así que f^{n+1} es turbulenta (estrictamente turbulenta).

■

El siguiente ejemplo mostrará que al definir *función turbulenta* y *función estrictamente turbulenta* efectivamente estamos definiendo objetos distintos, es decir, existen funciones turbulentas que no son estrictamente turbulentas.

Ejemplo 5.1. Sea $T:[0,1]\to[0,1]$ la función Tienda definida como:

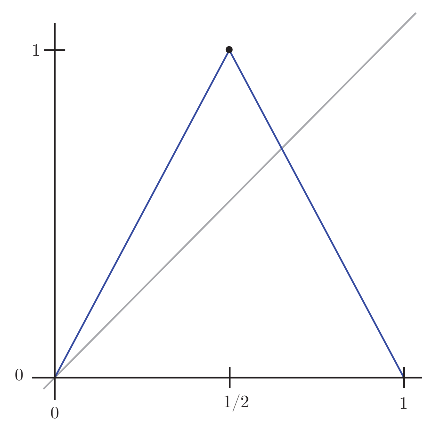

Figura 5.1: Gráfica de la función Tienda.

$$T(x)=\begin{cases}2x, & \text{si } x\leq \frac{1}{2},\\ 2-2x, & \text{si } x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Nuestra afirmación es que la función Tienda es turbulenta pero no estrictamente turbulenta.

Demostración. Sean $J=[0,\frac{1}{2}]$ y $K=[\frac{1}{2},1]$. Veamos ahora que la función Tienda es turbulenta. Para esto, sencillamente notamos lo siguiente

$$\begin{aligned} T(J) = T\left([0,\tfrac{1}{2}]\right) = [0,1] = T\left([\tfrac{1}{2},1]\right) = T(K) \\ \Rightarrow J \cup K \subseteq T(J) \cap T(K) = [0,1]. \end{aligned}$$

Para poder ver que T no es estrictamente turbulenta debemos probar que cualesquiera subintervalos compactos ajenos $J, K \subseteq [0,1]$ son tales que $J \cup K \nsubseteq T(J) \cap T(K)$. Tomemos entonces $J, K \subseteq [0,1]$ arbitrarios como en las hipótesis y consideremos los siguientes escenarios:

ESCENARIO A. Supongamos que los puntos extremos $0, 1$ están en los intervalos, es decir, supongamos que $0 \in J$ y que $1 \in K$. Con esto, si sucediera que $\frac{1}{2} \in J$, entonces $\frac{1}{2}$ no está en K, pues los intervalos son ajenos. De esta forma, $1 \notin T(K)$ ya que que sólo el elemento $\frac{1}{2}$ es tal que $T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Por lo tanto, $K \nsubseteq T(K)$.

Análogamente, si $\frac{1}{2}$ no estuviera en J, entonces el 1 no sería elemento de $T(J)$, puesto que, una vez más, sólo $\frac{1}{2}$ va a dar al 1. Por lo tanto $K \nsubseteq T(J)$.

Con los mismos argumentos, si $\frac{1}{2}$ no estuviera en J ni en K, entonces $J \nsubseteq T(J)$ y también $K \nsubseteq T(J)$.

ESCENARIO B. Supongamos ahora que $J = [0, a]$ y que $1 \notin K$. Como J y K son ajenos, entonces 0 tampoco está en K. Por lo tanto 0 no estará en la imagen de K, ya que sólo los puntos 0 y 1 son tales que $T(0) = 0 = T(1)$. Así, $0 \in J$, pero no en $T(K)$, *i.e.*, $J \nsubseteq T(K)$.

ESCENARIO C. Supongamos que $0 \notin J$ y que $K = [b, 1]$. De aquí se desprenden dos casos:

(C.1) El elemento $\frac{1}{2} \in K$. Entonces $J = [m, M] \subseteq \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto $T(J) = [2m, 2M]$, con $0 < m < 2m$. Es decir $m \notin T(J)$, de donde concluimos que $J \nsubseteq T(J)$.

(C.2) El elemento $\frac{1}{2} \notin K$. Por lo tanto, $1 \notin T(K)$ ya que sólo $T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, y $1 \in K$. Así, $K \nsubseteq T(K)$.

ESCENARIO D. Finalmente, supongamos que $0 \notin J \cup K$ y que $1 \notin J \cup K$. Una vez más, se desprenden varios casos:

(D.1) Alguno de los intervalos está completamente contenido en $(0, \frac{1}{2}]$. Sin pérdida de la generalidad supongamos que $J \subseteq (0, \frac{1}{2}]$ y que $J = [m, M]$. Por lo tanto, como la tienda, en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, es estrictamente creciente, tenemos que $T(J) = [T(m), T(M)]$. Pero $m \neq 0$, por lo tanto $m < T(m) = 2m$, es decir, $m \notin T(J)$. En otras palabras, $J \nsubseteq T(J)$.

(D.2) Ambos intervalos J, K están contenidos, o bien en $(0, \frac{1}{2}]$, o bien en $[\frac{1}{2}, 1)$. Notemos sencillamente que este caso se reduce al inciso (D.1).

(D.3) Ahora veamos qué pasa si $\frac{1}{2} \in int(J)$.

(D.3.1) Si $K \subseteq \left(0, \frac{1}{2}\right)$, por los mismos argumentos que en (D.2), $K \nsubseteq T(K)$.

(D.3.2) Si $K \subseteq [\frac{2}{3}, 1)$ con $K = [n, N]$, como la Tienda es estrictamente decreciente en $[\frac{1}{2}, 1]$, se sigue que $T(n)$ es el máximo de T en K, y entonces $T(K) \subseteq (0, \frac{2}{3}]$. Pero $K \subseteq [\frac{2}{3}, 1)$, por lo tanto, como K es un intervalo, $K \nsubseteq T(K)$.

(D.3.3) Ahora, si $K \subseteq (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ entonces, una vez más suponiendo que $K = [n, N]$, obtendremos que $T(K) \subseteq [\frac{2}{3}, 1)$. Por lo tanto, como K es un intervalo, $K \nsubseteq T(K)$.

(D.3.4) Por último, supongamos que $\frac{1}{2} \in int(J)$ y que $\frac{2}{3} \in int(K)$.

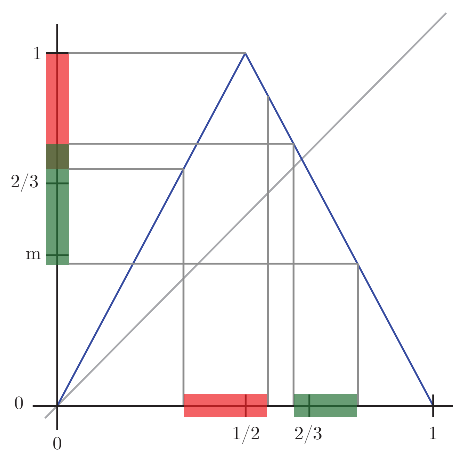

Figura 5.2: Gráfica de la función Tienda en el caso (D.3.4). El intervalo J aparece coloreado en rojo y el intervalo K aparece coloreado en verde.

Sea $J = [m, M]$. Entonces tenemos la siguientes dos contenciones:

$$T\left(J \cap [\tfrac{1}{2}, 1]\right) \subseteq (\tfrac{2}{3}, 1]$$

$$T\left(J \cap [0, \tfrac{1}{2}]\right) \subseteq [2m, 1].$$

De esto se sigue que $m \notin T\left(J \cap [0, \frac{1}{2}]\right) \subseteq [2m, 1]$, ya que $m < 2m$. Si sucediera el caso en donde m fuera elemento de $T\left(J \cap [\frac{1}{2}, 1]\right)$, entonces tendríamos $m < \frac{2}{3} < 1$, con 1 y m ambos elementos de $T\left(J \cap [\frac{1}{2}, 1]\right)$. Por lo tanto, como T es continua, $\frac{2}{3}$ también estaría en $T\left(J \cap [\frac{1}{2}, 1]\right)$, lo cual es imposible porque el único punto en $[\frac{1}{2}, 1]$ cuya imagen es $\frac{2}{3}$ es el punto fijo $\frac{2}{3}$, el cual está en K y $J \cap K = \emptyset$. Por lo tanto $m \notin T\left(J \cap [\frac{1}{2}, 1]\right)$, es decir, $m \notin T(J)$, probando así que $J \nsubseteq T(J)$, concluyendo la demostración.

$\blacksquare$

Lema 5.2. Sea $f\colon I \longrightarrow I$, y sean $J=[\alpha,\beta]$ y $K=[\gamma,\delta]$, con $\beta \leq \gamma$, intervalos tal que hacen a f turbulenta. Entonces existen $x_1 \in [\alpha,\beta)$ y $x_2 \in (\gamma,\delta]$ puntos fijos de f.

Demostración. Como $J \subseteq f(J)$ por ser f turbulenta, entonces existe un punto fijo de f en J. Si este punto fijo vive en $[\alpha,\beta)$, obtenemos el primer punto x_1. Supongamos entonces que este punto fijo es β, es decir $f(\beta)=\beta$. Ahora, $\alpha,\delta \in f(J)$ por ser f turbulenta. Entonces existen dos puntos $z_1,z_2 \in J$ tales que $f(z_1)=\alpha$ y $f(z_2)=\delta$. Así

$$f(z_1)=\alpha \leq z_1 = id(z_1); \quad id(z_2)=z_2 \leq \delta = f(z_2).$$

Por lo tanto, por el Teorema Del Valor Intermedio, existirá un punto x_0 entre z_1 y z_2 tal que $f(x_0)=id(x_0)=x_0$, es decir un punto fijo. Sólo queda notar que como $z_1 \neq \beta \neq z_2$, porque sus imágenes son distintas, entonces x_0 no es β.

De la misma forma, como $K \subseteq f(K)$ por ser f turbulenta, existe un punto fijo de f en K. Si este punto fijo vive en $(\gamma,\delta]$, terminamos. Así que supongamos que dicho punto fijo es γ. Como $\alpha,\delta \in f(K)$ por la turbulencia de f, entonces existen dos puntos $z_3,z_4 \in K$ de tal forma que $f(z_3)=\alpha$ y $f(z_4)=\delta$. Por lo tanto, obtenemos lo siguiente:

$$f(z_3)=\alpha \leq z_3 = id(z_3); \quad id(z_4)=z_4 \leq \delta = f(z_4).$$

Entonces, por el Teorema Del Valor Intermedio, obtendremos un punto x_1 entre los valores z_3 y z_4 tal que $f(x_1)=id(x_1)=x_1$. Sólo resta notar que como $z_3,z_4 \in (\gamma,\delta]$, ya que sus imágenes son distintas a la imagen de γ, entonces $x_1 \in (\gamma,\delta]$.

■

Corolario 5.1. Si f es turbulenta, entonces f tiene más de un punto fijo.

Demostración. Esta es una particularidad del Lema 5.2.

■

Lema 5.3. Sea $f\colon I \longrightarrow I$ tal que $J=[\alpha,\beta]$ y $K=[\beta,\gamma]$ son intervalos que hacen a f turbulenta. Si β es un punto fijo, entonces f es estrictamente turbulenta.

Demostración. Como $[\beta,\gamma] \subseteq f(J)$, entonces existe un punto $x_0 \in J$ de tal manera que $f(x_0)=\gamma$. Como $f(\beta)=\beta$, entonces $x_0 \in [\alpha,\beta)$. Sea $x_1 \in [\alpha,\beta)$ el punto tal que $f(x_1)=\alpha$ y tal que sin pérdida de la generalidad $x_1 < x_0$. Así, por el Teorema del Valor Intermedio $[\alpha,\gamma] \subseteq f([x_1,x_0])$. Análogamente sean $y_0,y_1 \in (\beta,\gamma]$ los puntos tales que $f(y_0)=\gamma$ y $f(x_1)=\alpha$, y tal que sin pérdida de la generalidad, $y_1 < y_0$. Por lo tanto, de nuevo por el Teorema del

Valor Intermedio, $[\alpha, \gamma] \subseteq f([y_1, y_2])$. Con esto, tenemos que se cumplen las siguientes contenciones:

$$[x_1, x_0] \cup [y_1, y_0] \subseteq [\alpha, \gamma] \subseteq f([x_1, x_0])$$
$$[x_1, x_0] \cup [y_1, y_0] \subseteq [\alpha, \gamma] \subseteq f([y_1, y_0])$$

Como $[x_1, x_0]$ y $[y_1, y_0]$ son ajenos, concluimos que f es estrictamente turbulenta.

■

Lema 5.4. Si f es turbulenta, entonces f tiene puntos de todos los periodos.

Demostración. Sabemos por la Proposición 2.2 que si tenemos $I_0, I_1, \ldots, I_n$ intervalos, esto nombrando $I_0 = J = I_n$ y $K = I_i$, con $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, los cuales cumplen que $I_0 \subseteq I_n$ y además

$$I_{i+1} \subseteq f(I_i), \text{ para toda } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

entonces existe un punto $x_n \in I_0$ tal que $f^i(x_n) \in I_i$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ y tal que $f^n(x_n) = x_n$. Ahora sean $J, K \subseteq I$ los intervalos que hacen a f turbulenta, es decir, tales que $J \cup K \subseteq f(J)$ y $J \cup K \subseteq f(K)$.

CASO 1. Supongamos $J \cap K = \{\beta\}$ donde β no es un punto fijo.

Es fácil ver que el uso de la Proposición 2.2 prueba el resultado. Sólo resta mencionar que, si β de periodo $k > 1$ entonces, la argumentación anterior garantiza puntos periódicos para todo periodo distinto de k. Todos estos puntos, mas el punto β generan puntos de todos los periodos.

CASO 2. Si β resultara ser un punto fijo, entonces por el Lema 5.3, f es estrictamente turbulenta. Aplicando de nuevo la Proposición 2.2 a los intervalos que hacen a f estrictamente turbulenta terminamos la demostración.

■

Proposición 5.1. Si existen puntos $a, b, c \in I$, ya sea con $a < c < b$, o bien con $b < c < a$, tales que

$$a = f(a) = f(b) \text{ y } f(c) = b$$

entonces f es turbulenta.

Demostración. CASO 1. Supongamos que $a < c < b$. Demostraremos que los intervalos $J = [a, c]$ y $K = [c, b]$ hacen a f turbulenta. Para esto, demostraremos que $J \cup K \subseteq f(J)$.

Como f es continua, entonces existe $M = \max f(J)$ y $m = \min f(J)$. Así, tenemos las siguientes dos implicaciones:

$$f(a) = a \Rightarrow m \leq a \leq M; \quad f(c) = b \Rightarrow m \leq b \leq M.$$

Por lo tanto, por el Teorema Del Valor Intermedio, como $m \leq a < b \leq M$, se sigue que $[a, b] \subseteq f(J)$, es decir, $J \cup K \subseteq f(J)$.

Análogamente, existen $N = \max f(K)$ y $n = \min f(K)$, y por lo tanto tenemos

$$f(b) = a \Rightarrow n \leq a \leq N; \quad f(c) = b \Rightarrow n \leq b \leq N.$$

Por lo tanto, por el Teorema Del Valor Intermedio, como $n \leq a < b \leq N$, se sigue que $[a,b] \subseteq f(K)$, es decir, $J \cup K \subseteq f(K)$.

El CASO 2, donde $b < c < a$, es totalmente análogo.

■

Proposición 5.2. Si f es turbulenta, entonces existen puntos a, b, $c \in I$ tal que $f(b) = f(a) = a$, $f(c) = b$ y además se cumple alguna de las siguientes opciones:

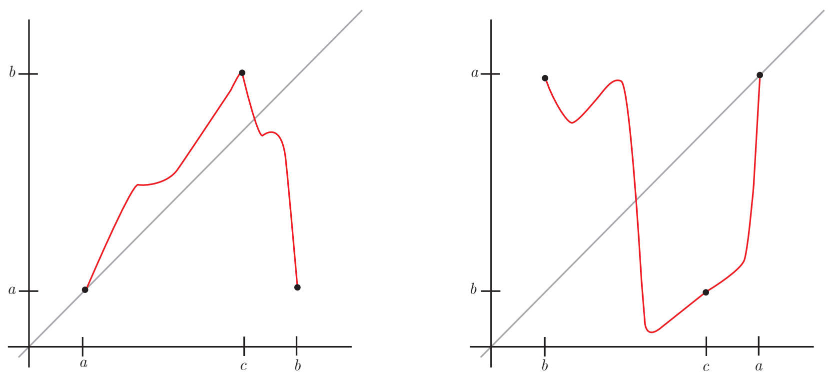

Figura 5.3: A la izquierda la gráfica del escenario (I) y a la derecha la gráfica del escenario (II) del Lema 5.2

(I) $a < c < b$,
$f(x) > a$ para $a < x < b$,
$x < f(x) < b$ para $a < x < c$.

(II) $b < c < a$,
$f(x) < a$ para $b < x < a$,
$b < f(x) < x$ para $c < x < a$.

Demostración. Sean $J = [\alpha, \beta]$ y $K = [\gamma, \delta]$, con $\beta \leq \gamma$ los subintervalos de I tales que cumplen la definición de turbulencia para f. De $J \subseteq f(J)$ se sigue que f tiene un punto fijo en J, y por el Lema 5.2, podemos tomar ese punto fijo en $[\alpha, \beta)$. Así, si tenemos que

$$R = \{x \in J : x = f(x)\} \neq \emptyset.$$

Y como $R \subseteq J$ es también cerrado y acotado, podemos concluir que existe $a' = \text{mín}\, R \in J$. Por turbulencia, $a' \in J \subseteq f(K)$, y entonces

$$S = \{x \in K : f(x) = a'\} \neq \emptyset.$$

Por los mismos argumentos que para el conjunto R, existe $b' = \text{máx}(S)$; y notemos que como $a' \in [\alpha, \beta)$ y $b' \in K$, tenemos fácilmente que $a' < b'$.

CASO 1. Supongamos que existe $c' \in (a', b')$ de tal forma que $f(c') = b'$.

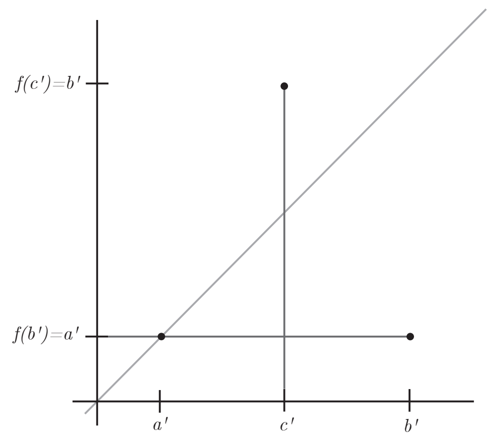

Figura 5.4: En el caso 1, suponemos que existe $c' \in (a', b')$ tal que $f(c') = b'$.

Sea $A = \{x \in [a', c'] : f(x) = x\}$. Notemos que $A \neq \emptyset$ ya que $a' \in A$, además de que A es cerrado y acotado. Por lo tanto podemos definir $a = \text{máx}(A) \in [a', c']$. (Observemos que $a \in [a', c')$. Esto ya que si $f(c') = c' = b'$, entonces $f(b') = b' = a'$, y eso no puede pasar porque $a' < b'$). Esto se puede apreciar en la figura 5.5. Tomemos el conjunto $B = \left(f^{-1}[a] \cap [c', b']\right)$ y notemos que $B \neq \emptyset$ ya que

$$f(b') = a' \leq a \leq b' = f(c').$$

Por lo tanto existe un punto $x \in [c', b']$ ta que $f(x) = a$. Con esto, el conjunto B es cerrado acotado y no vacío. Tomemos $b = \text{mín}(B)$ (y observemos que $b \neq c'$ ya que $f(c') = b' > a = f(b)$). Lo anterior queda ilustrado en la figura 5.6.

Ahora tomemos $C = \left(f^{-1}[b] \cap [a, c']\right)$, conjunto no vacío ya que $f(a) = a \leq b \leq b' = f(c')$. Por lo tanto existe $y \in [a, c']$ tal que $f(y) = b$. Entonces, como C es cerrado, acotado y no vacío, podemos tomar $c = \text{mín}\, C$ (con $c \in (a, c']$ ya que $f(c) = b > a = f(a)$). Así, $a < c < b$ como podemos observar en la figura 5.7. Ahora hay que verificar que se cumple el caso(I).

Demostremos que $f(x) > a$ para toda $x \in (a, b)$.

Supongamos que existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) \leq a$. Entonces $x_0 \neq c'$ ya que $f(c') = b' > a$.

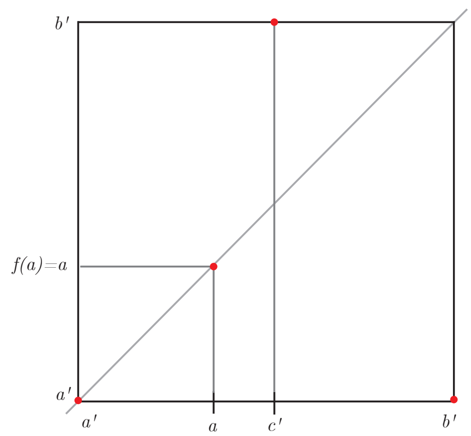

Figura 5.5: Habiendo definido a, se tiene que $a = \text{máx}\,(A) \in [a', c']$.

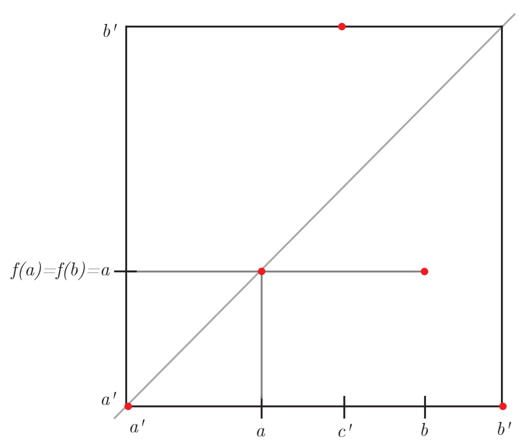

Figura 5.6: Tomamos $b = \text{mín}\,(B)$ y tal que $f\,(b) = a$.

Si $x_0 \in (a, c')$, entonces tendríamos $f\,(x_0) \leq a \leq x_0 = id\,(x_0)$ y simultáneamente $id\,(c') = c' \leq f\,(c') = b'$. Por lo tanto existe un punto $p \in [x_0, c'] \subsetneq (a, c']$ tal que $f\,(p) = p$, contradiciendo la definición del punto a. Así, x_0 está en el intervalo (c', b). De $f\,(x_0) \leq a$ tenemos dos opciones: si $f\,(x_0) = a$ tenemos una contradicción a la definición de b, y si $f\,(x_0) < a$, entonces $f\,(x_0) < a < f\,(c') = b'$, es decir que existe un punto $p \in (c', x_0) \subsetneq (c', b]$ tal que $f\,(p) = a$, contradiciendo de nuevo la definición de b. Por lo tanto, $f\,(x) > a$ para toda $x \in (a, b)$.

Probemos $x < f\,(x) < b$ para $x \in (a, c)$.

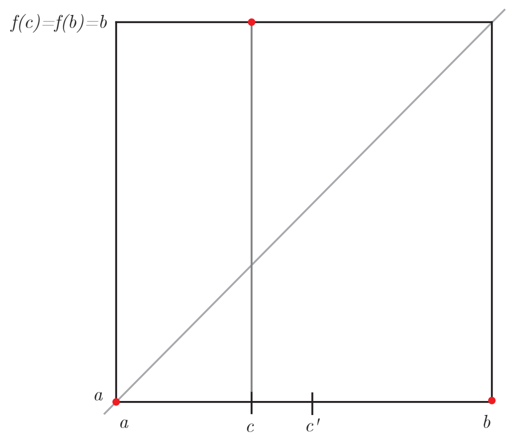

Figura 5.7: El elemento c es el mínimo tal que $f(c) = b$. Además, $c \in (a, c')$.

Supongamos que existe $x_0 \in (a, c)$ tal que $f(x_0) \leq x_0$. Entonces tenemos dos casos:

1. $f(x_0) = x_0$, lo cual contradice la definición de a como máximo.

2. $f(x_0) < x_0$, implicando que $f(x_0) < x_0 = id(x_0)$ y $id(c) = c < b = f(c)$. Por lo tanto existe un punto fijo en (x_0, c), contradiciendo una vez más la definición de a.

Por lo tanto $x < f(x)$ para $x \in (a, c)$. Por otro lado, si suponemos que existe $x_0 \in (a, c)$ tal que $b \leq f(x_0)$ entonces sucede lo siguiente:

1. O bien $f(x_0) = b$, contradiciendo la definición de c como mínimo.

2. O sucede que $f(x_0) > b$, implicando que $f(x_0) > b > f(a)$, es decir, existe un punto en $(a, x_0) \subsetneq [a, c]$ cuya imagen es b, generando la misma contradicción.

Por lo tanto, también se cumple que $f(x) < b$ para $x \in (a, c)$, obteniendo el inciso(I) de la proposición.

CASO 2. Supongamos por otro lado que $f(x) < b'$ para toda x en el intervalo $[a', b']$ (de otra forma, como $f(b') = f(a') = a' \leq b'$, habría un punto en $[a', b']$ tal que su imagen es b', y ese es el caso 1). Así, como $\delta \in K \subseteq f(J) \cap f(K)$ y $b' < \delta$, tenemos que existen puntos $x_1 \in [\alpha, a')$ y $x_2 \in (b', \delta]$ tal que $f(x_1) = \delta$ y $f(x_2) = \delta$. En la figura 5.8 podemos apreciar la construcción de este segundo caso.

Veamos que si suponemos que existe un punto $x \in [\alpha, a')$ tal que $f(x) < x$, entonces $f(x) < id(x)$ y también $id(x_1) = x_1 < \delta = f(x_1)$. Es decir, obtenemos un punto $x_0 \in (x, x_1)$ tal que $f(x_0) = x_0$, contradiciendo la definición de a'.

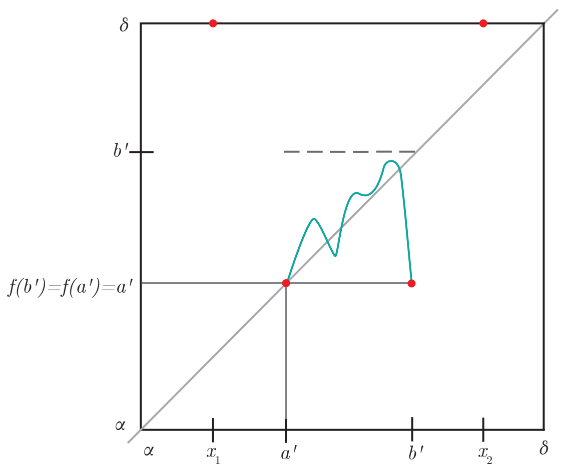

Figura 5.8: Los puntos x_1 y x_2 son tales que $f(x_1) = \delta = f(x_2)$.

Por lo tanto, si $x \in [\alpha, a')$, entonces $\alpha \leq x < f(x)$. Esto se puede ejemplificar con la figura 5.9. Así, obtenemos las dos desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} f(b') &= a' < b' = id(b') \\ id(x_2) &= x_2 < \delta = f(x_2). \end{aligned}$$

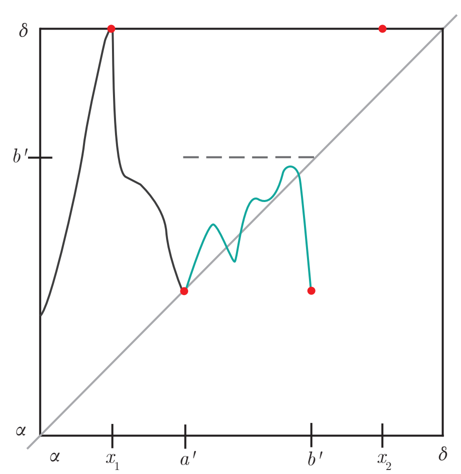

Figura 5.9: Si $x \in [\alpha, a')$, entonces $\alpha \leq x < f(x)$.

Sucede entonces que existe un punto $a'' \in (b', \delta]$ tal que $f(a'') = a''$. Como $(b', \delta] \subseteq K \subseteq f([\alpha, a'))$ y $a'' \in (b', \delta]$, entonces existe ahora un punto $b'' \in [\alpha, a')$ tal que $f(b'') = a''$, como podemos apreciar en la figura 5.10.

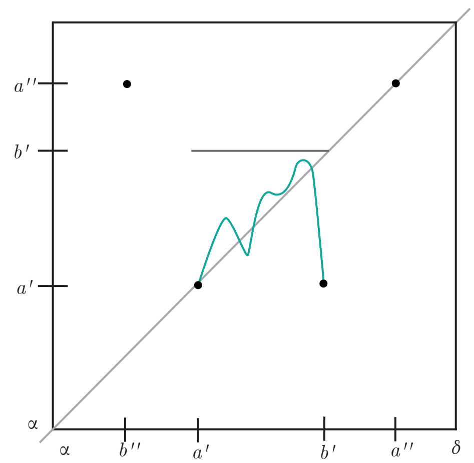

Figura 5.10: Los puntos a'' y b'' son tales que $f(a'') = a'' = f(b'')$.

Sabemos por lo dicho anteriormente que no existe $x \in [\alpha, a')$ tal que $f(x) = \alpha$. Pero α vive en $J \subseteq f(J)$, entonces podemos encontrar un punto $p \in (a', \beta]$ tal que $f(p) = \alpha$. Así, como $f(p) = \alpha < b'' < a' = f(a')$, existe $c'' \in (a', p) \subseteq (a', \beta]$ tal que $f(c'') = b''$. Para una ayuda visual de lo anterior tenemos la figura 5.11.

Finalmente definimos los siguientes elementos (ilustrados en la figura 5.12):

A. $a = \text{mín}\{x \in (c'', a''] : f(x) = x\}$. Este mínimo existe porque el conjunto no es vacío: existe al menos $a'' \in (c'', a'']$ y $f(a'') = a''$.

B. $b = \text{máx}\{x \in [b'', c'') : f(x) = a\}$. También este máximo existe porque, como $f(c'') = b'' < a \leq a'' = f(b'')$, existe $w_1 \in [b'', c'')$ tal que $f(w_1) = a$.

C. $c = \text{máx}\{x \in [c'', a) : f(x) = b\}$. Una vez más, este existe ya que, como $f(c'') = b'' \leq b < c'' < a = f(a)$, hay un punto $w_2 \in [c'', a)$ tal que $f(w_2) = b$.

Por construcción de los puntos a, b y c, obtenemos el escenario (II) del enunciado.

■

Antes de continuar con algún otro resultado recordemos las Definiciones 3.1 y 3.2 del tercer capítulo, las cuales corresponden a los conceptos ε-cadena y *punto reccurente por cadena* respectivamente. La razón por la que aludimos

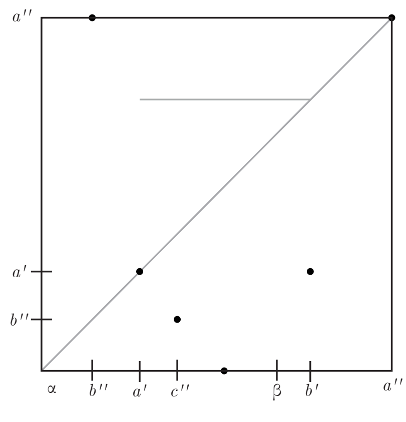

Figura 5.11: El punto c'' es tal que $f(c'') = b''$.

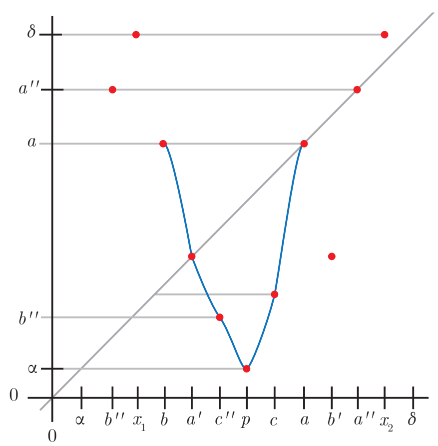

Figura 5.12: Los puntos a, b y c cumplen el inciso (II) del enunciado.

a estas dos definiciones es la siguiente: cuando tenemos un espacio con todos sus puntos recurrentes por cadena (bajo una cierta función f), sólo con esto, podemos distinguir ampliamente la dinámica de la función. Más explícitamente:

(i) f será la función identidad.

(ii) f tendrá un único punto fijo.

(iii) f será turbulenta.

Lo anterior será formulado como la proposición protagónica del siguiente capítulo y su demostración será el contenido del teorema principal.

Capítulo 6

Resultados principales

En este capitulo presentamos el resultado principal de este trabajo, no sin antes exhibir un par de pequeñas herramientas que permitirán aterrizar en la demostración del resultado estelar. Además, citaremos trabajos relacionados con la turbulencia y la entropía topológica que desembocan en teoremas importantes. Todo esto en combinación con lo ya expuesto.

Es importante notar que las siguientes afirmaciones trabajan asumiendo que el dominio X es el intervalo $[0,1]$ y que f es una función continua. Esto a menos que se especifique algo distinto.

Observación 6.1. Si $f\colon I \longrightarrow I$ es suprayectiva, entonces $f(I) = I$. Así, por el Lema 2.1 del segundo capitulo, f tiene al menos un punto fijo en I.

Lema 6.1. Si $f\colon I \longrightarrow I$ es suprayectiva, entonces f^2 tiene más de un punto fijo.

Demostración. Si resulta que f tiene más de un punto fijo no hay nada que hacer. Así que supongamos un único punto fijo p por parte de f.

Es fácil notar que $0 \neq p \neq 1$, o de otra forma, al ser f suprayectiva, tendría más de un punto fijo. Así mismo, como $I \subseteq f(I)$, sólo puede suceder que $f(x) > x$ con $x \in [0,p)$ y que $f(x) < x$ con $x \in (p,1]$ ya que de lo contrario, por el Teorema Del Valor Intermedio, f tendría más de un punto fijo. Por lo tanto, de nuevo por la suprayectividad de f, se cumple que $[0,p] \subseteq f([p,1])$ y que $[p,1] \subseteq f([0,p])$. Por lo tanto, $[0,p] \subseteq f^2([0,p])$, y así, existe $a \in [0,p)$ tal que $f^2(a) = 0$. Por lo tanto, tenemos que $f^2(0) \geq 0$, junto con que $a \geq f^2(a) = 0$, es decir, existe un punto fijo en el intervalo $[0,a]$. Esto concluye la demostración. ∎

Lema 6.2. Si $f\colon I \longrightarrow I$ es una función continua tal que para cualesquiera puntos fijos $a, b \in I$ de f, con $a < b$, se cumple que existe algún otro punto fijo en el intervalo (a,b), entonces existen $p, q \in I$ tal que

$$\emptyset \neq \operatorname{Fix}(f) = [p,q] \subseteq I.$$

Demostración. Sabemos que el conjunto de puntos fijos de una función es un conjunto cerrado, así que llamemos $p = \min(\mathrm{Fix}(f))$ y $q = \max(\mathrm{Fix}(f))$. Sea $w \in (p,q)$ y veamos que es punto fijo de f.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left(w - \frac{1}{N}, w + \frac{1}{N}\right) \subseteq (p,q)$. Ahora vamos a demostrar que para cada $n \geq N$ existe x_n un punto fijo de f en el intervalo $\left(w - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n}\right) \subseteq (p,q)$. Nombremos los siguientes dos puntos:

$$M_n = \max\left(\mathrm{Fix}(f) \cap [p, w - \tfrac{1}{n}]\right)$$
$$m_n = \min\left(\mathrm{Fix}(f) \cap [w + \tfrac{1}{n}, q]\right)$$

Como ambos, M_n y m_n, son puntos fijos de f, por hipótesis existe un punto $x_n \in (M_n, m_n)$. Ahora, si x_n viviera en $(M_n, w - \frac{1}{n}]$, entonces M_n no sería máximo; y si x_n viviera en $[w + \frac{1}{n}, m_n)$ entonces m_n no sería mínimo. Por lo tanto, x_n debe vivir en $\left(w - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n}\right)$.

Así, hemos encontrado $\{x_n\}_{n \geq N}$ sucesión de puntos fijos de f los cuales cumplen que $d(w, x_n) < \frac{1}{n}$. Por lo tanto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a w, y por lo tanto, $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(w)$. Es decir $x_n \longrightarrow f(w)$. Entonces (como nuestro espacio es métrico), si la misma sucesión converge a dos puntos, es porque estos dos puntos son el mismo, esto es, $f(w) = w$. Concluyendo que $[p,q] \subseteq \mathrm{Fix}(f)$.

Para terminar basta notar que si hubiera un punto fijo z el cual no estuviera en $[p,q]$, entonces, o bien p no sería el mínimo de $\mathrm{Fix}(f)$, o bien, q no sería el máximo de $\mathrm{Fix}(f)$. Es decir, debe pasar que $z \in [p,q]$, concluyendo con ello la prueba.

■

El siguiente resultado es el contenido principal en [Block and Coven, 1986].

Proposición 6.1. Si cada punto de I es recurrente por cadenas, entonces se cumple exactamente uno de los siguientes escenarios:

(I) f es la función identidad.

(II) f tiene un sólo punto fijo.

(III) f es turbulenta.

Demostración. Supongamos que f no es la identidad y que f tiene más de un punto fijo. Demostremos entonces que f es turbulenta.

Por el Teorema 3.1 del tercer capitulo, si I tiene todos sus puntos recurrentes por cadenas bajo f, se sigue que *no existe* abierto U de I tal que cumpla simultaneamente las tres condiciones siguientes para cualquier punto $x \in I$:

(I) $x \notin U$.

(II) $f(x) \in U$.

(III) $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$.

De aquí empezaremos la demostración dividiéndola en dos casos:

CASO 1. Supongamos que existen puntos fijos a y b tal que f no tiene otro punto fijo en (a, b).

Con esto, sin pérdida de la generalidad, $f(x) < x$ para todo elemento $x \in (a, b)$. Así, tenemos que a no puede ser 0 ya que, de ser así, si tomamos cualquier $b' \in (a, b)$, tenemos al conjunto $U = [0, b')$, un abierto de $[0, 1]$, el cual cumple que $b' \notin U$, $f(b') < b'$ y $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$. Las cuales son tres condiciones que no pueden pasar simultaneamente.

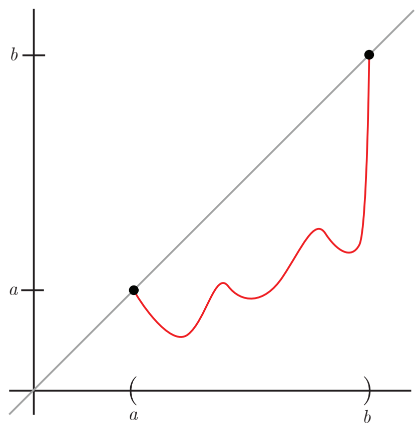

Figura 6.1: La función f es tal que $f(x) < x$ para todo elemento $x \in (a, b)$

Afirmación: El conjunto $C = \{x \in [0, a] : f(x) = b\}$ es no vacío.

Supongamos que C es vacío, es decir, supongamos que todo punto $x \in [0, a]$ cumple que $f(x) < b$. Tomemos entonces $\beta = \max\{f(x) : x \in [0, a]\}$. Y ahora, como $\beta < b$, tomemos $b' \in I$ tal que $\beta < b' < b$. Entonces, todo elemento $x \in [0, a]$ cumplirá que $f(x) < \beta < b'$, y por otro lado, todo $x \in [a, b'] \subseteq [a, b)$ es tal que $f(x) < x \leq b'$. Es decir, el abierto $U = [0, b')$ es tal que $b' \notin U$, $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$ y $f(b') \in U$, lo cual no puede pasar.

Por lo tanto, existe un punto $x_1 \in [0, a]$ el cual cumple que $b \leq f(x_1)$. Si $b = f(x_1)$ probamos que $C \neq \emptyset$. Si $b < f(x_1)$ entonces $f(a) = a < b < f(x_1)$. Por lo tanto, por el Teorema Del Valor Intermedio, $C \neq \emptyset$.

Así, como $C = \left(f^{-1}(\{b\}) \cap [0, a]\right)$, y este es no vacío, podemos tomar $c = \max(C)$.

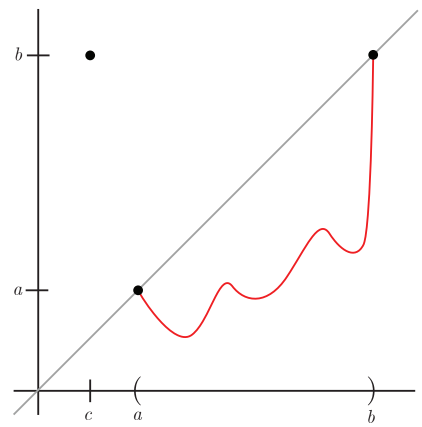

Figura 6.2: Tenemos a c como el punto máximo tal que $f(c) = b$ en el intervalo $[0, a]$.

Sea ahora d cualquier punto en (c, b) tal que $f(d) = c$. Si no existiera tal punto es porque $c < f(x)$ para toda x en $[c, b]$. Tomamos entonces $y_1 = \min\{f(x) : x \in [c, b]\}$, el cual cumple estar dentro del intervalo (c, b) y que $y_1 \leq f(a) = a$.

Llamemos c' a cualquier número tal que $c < c' < y_1$. Ahora tomemos $y_2 = \max\{f(x) : x \in [c', a]\}$. Claramente $y_2 < b$. Tomemos entonces cualquier número b' tal que $y_2 < b' < b$. Con esto, es fácil ver que el conjunto $U = (c', b')$ cumple que $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$. Esto ya que todo punto x en $[c'a] \subseteq [c, a]$ cumple que $f(x) \geq y_1 > c'$. Además de que $f(x) \leq y_2 < b'$. Así mismo, todo punto $x \in [a, b'] \subseteq [a, b]$ cumple que $f(x) \geq y_1 > c'$. Además, $f(x) < x \leq b'$. Por lo tanto $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$. Así mismo, el punto $b' \notin U$ y además $c' < y_1 \leq f(b') < b'$. Y sabemos que estas tres condiciones no pueden suceder.

Sea entonces d cualquier punto en (c, b) tal que $f(d) = c$ (figura 6.3). Si tomamos ahora $J = [c, d]$ y $K = [d, b]$, estos intervalos prueban la turbulencia de f:

$$f(c) = b = f(b) \text{ y además que } f(d) = c.$$

Por lo tanto, por el Lema 5.1 del quinto capítulo, concluimos la turbulencia de f.

CASO 2. Supongamos que para cada par de puntos fijos $a < b$, existe otro punto fijo de f en (a, b) y veamos que este caso es imposible.

Por el Lema 6.2 podemos concluir que existen $p, q \in I$ tales que $\mathrm{Fix}(f) = [p, q]$. Así, como f no es la función identidad $0 \neq p$, o $1 \neq q$.

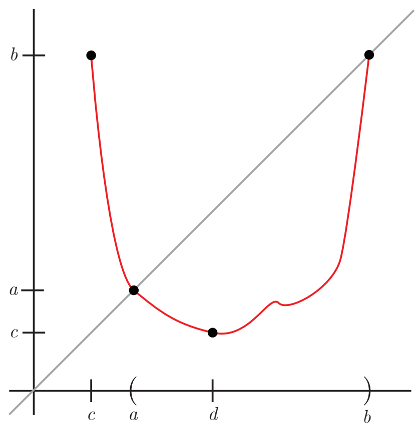

Figura 6.3: El punto $d \in (a, b)$ es tal que $f(d) = c$.

Suponiendo que $0 \neq p$ y que $1 = q$, se sigue entonces que todo punto x en el intervalo $[0, p)$ cumple $f(x) > x$ (como se puede apreciar en la figura 6.4).

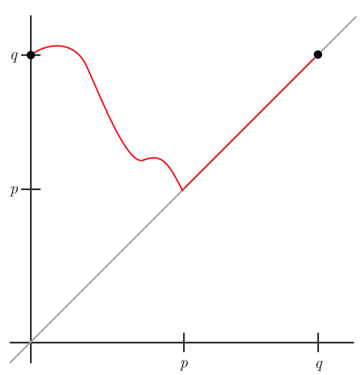

Figura 6.4: Todo punto x en el intervalo $[0, p)$ cumple $f(x) > x$.

Así, tenemos que si y es un punto en $[0, p)$, entonces y carece de preimágen bajo f, contradiciendo que f es suprayectiva. Al suponer simétricamente que $0 = p$ y $1 \neq q$ llegamos a la misma contradicción. Por lo tanto $0 \neq p$ y $1 \neq q$.

Con ello, como todos los puntos fijos de f son el intervalo $[p, q]$, obtenemos que $f(x) > x$ para todo punto $x \in [0, p)$ y $f(x) < x$ para todo punto $x \in (q, 1]$.

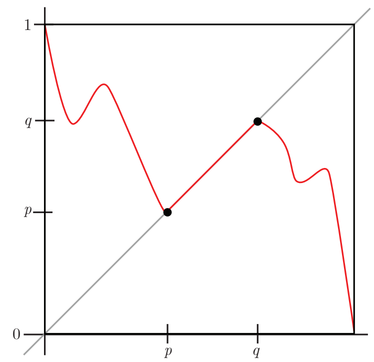

Figura 6.5: Ejemplo de cómo podría comportarse la función f fuera del intervalo $[p, q]$.

Llamemos $z_1 = \max\left(f^{-1}[\{q\}] \cap [0, p]\right)$, y notemos que $z_1 < p$. Por lo tanto, $p \in (z_1, q)$, y no sólo eso, todo punto x en (z_1, p) cumple que $f(x) < q$. Análogamente podemos encontrar $z_2 = \min\left(f^{-1}[\{p\}] \cap [q, 1]\right)$ donde $q \in (p, z_2)$ y para todo punto x en (q, z_2), $p < f(x)$.

Sea entonces $U = (z_1, z_2)$. Para cada $x \in [z_1, q]$ sucede que $z_1 \leq x < f(x) < q$. Y para cada $x \in [p, z_2]$ tenemos $p < f(x) < x \leq z_2$. Es decir, $f\left(\overline{U}\right) \subseteq (z_1, z_2) = U$. Al mismo tiempo, $z_1 \notin U$ pero $f(z_1) = p \in (z_1, z_2) = U$, la cual es la tercia que genera nuestra contradicción favorita. Por lo tanto el CASO 2 no puede suceder, de lo cual se sigue que sólo ocurre el CASO 1, concluyendo que f es turbulenta.

■

Teorema 6.1. Sea $f\colon I \longrightarrow I$ continua. Si cada punto en I es recurrente por cadenas bajo f, entonces o bien f^2 es turbulenta o f^2 es la identidad.

Demostración. Por la Proposición 3.3 del tercer capitulo, si $x \in R(f)$ entonces $x \in R\left(f^2\right)$. Es decir, cada punto es recurrente por cadenas bajo f^2. Así, por la Proposición 6.1, se cumple que, o bien f^2 es la función identidad, o f^2 tiene un sólo punto fijo, o f^2 es turbulenta.

Por otro lado, por el Corolario 3.2 del tercer capitulo, f es suprayectiva por tener a cada uno de sus puntos recurrente por cadenas. Así, por el Lema 6.1 recién demostrado, f^2 tiene más de un punto fijo. Por lo tanto, sólo le resta a f^2 o bien ser la función identidad, o bien ser turbulenta.

■

Teorema 6.2. Sea $f\colon I \longrightarrow I$ continua, entonces se sigue a lo más una de las siguientes afirmaciones:

(I) f^2 es la función identidad.

(II) f^2 es turbulenta.

(III) Existe $K \subseteq I$ un conjunto cerrado, tal que es un atractor para f.

Demostración. CASO 1. Si todos los puntos de I son recurrentes por cadenas bajo f, entonces por el Corolario 6.1 se sigue alguna de las opciones(I) o(II).

CASO 2. Si resultara que algún punto de I no es recurrente por cadenas, entonces, por el inciso (5) del Teorema 3.1 del tercer capítulo, existe $K \subseteq I$ atractor para f. Y más aún, por la demostración de dicho resultado, $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n\left(\overline{U}\right)$ para algún abierto $U \subseteq I$. Como la intersección arbitraria de cerrados es un conjunto cerrado, se sigue que K es cerrado, concluyendo así el corolario.

■

Continuando con los resultados en este capítulo, y citando una vez más a L. S. Block y W. A. Coppel, de su bello texto *Dynamics in One Dimension* podemos obtener la Definición 6.1 y y el Lema 6.3 [Block and Coppel, 1992]:

Definición 6.1. Diremos que un sistema dinámico es *caótico* si su entropía es positiva.

Esta definición rescata el concepto de *entropía topológica* del capítulo 4, y sentencia explícitamente el significado del calificativo "caótico" como una propiedad para una función dada.

El siguiente resultado es tal que nuestra Proposición 6.1 del presente capítulo juega un papel central en su formulación. Sin embargo no será demostrado ya que esta prueba escapa a los objetivos del presente trabajo (la prueba puede consultarse en el Capítulo VIII de [Block and Coppel, 1992]).

Lema 6.3. Si f es una función turbulenta, entonces su entropía es tal que $h\left(f\right) \geq \ln 2$.

Teorema 6.3. Sea $f\colon I \longrightarrow I$ continua y tal que cada punto es recurrente por cadenas. Si f^2 no es la función identidad, entonces f tiene puntos de todo periodo par y además $h\left(f\right) \geq \frac{1}{2}\ln 2$.

Demostración. Por el Corolario 6.1, si f^2 no es la función identidad, entonces f^2 es turbulenta. Así, por el Lema 5.4 del quinto capítulo, f^2 tiene puntos de todos los periodos, por lo tanto, gracias al Teorema de Sharkovskii en el Lema 2.5, f tiene puntos de todo periodo par.

Ahora, por el Lema 6.3, como f^2 es turbulenta, se sigue que $h\left(f^2\right) \geq \ln 2$. Y del Teorema 4.2 del cuarto capítulo obtenemos que $2 \cdot h\left(f\right) = h\left(f^2\right) \geq \ln 2$, por lo tanto se concluye que $h\left(f\right) \geq \frac{1}{2}\ln 2$, probando así el corolario.

■

Apéndice A

Atractores

El objetivo de este apéndice es probar el teorema A.1 del tercer capitulo. Como se mencionó, esta demostración puede resultar un poco técnica debido a las herramientas necesarias para llegar a la prueba en cuestión.

Si el lector o lectora desea profundizar un poco más acerca de los conjuntos atractores puede consultar las referencias en [Block and Coppel, 1992] y [Block and Franke, 1985].

Antes de empezar el capítulo se sugiere tener presentes las Definiciones 2.9, 2.10 y 2.11, así como el Lema 2.2 del segundo capítulo; también tener en cuenta que en todo el apéndice se entenderá que nuestro espacio X es un espacio métrico compacto y se entenderá a f como una función continua de X en sí mismo (a menos que se especifique algo distinto).

Definición A.1. Sea $f\colon X \longrightarrow X$ función continua. Decimos que un conjunto $K \subseteq X$ no vacío y cerrado es un *atractor de* f si existe un abierto U de X, tal que $K \subseteq U$, y donde

$$K = \omega(U) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)}.$$

A continuación daremos dos lemas indispensables para trabajar con el concepto de ω-*límite* de un conjunto.

Lema A.1. Sea $U \subseteq X$ cualquiera tal que $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(I) Para cada $n, m \in \mathbb{N}$, sucede $f^{n+m}\left(\overline{U}\right) \subseteq f^n\left(\overline{U}\right)$ y $f^{n+m}\left(\overline{U}\right) \subseteq f^m\left(\overline{U}\right)$.

(II) Para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\bigcup_{l\geq m} f^l(U) \subseteq f^m\left(\overline{U}\right).$$

(III)
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n\left(\overline{U}\right)\subseteq U.$$

Demostración. Tomemos $m,n\in\mathbb{N}$ para probar el inciso (I). Si $f\left(\overline{U}\right)\subseteq U$, entonces sucede que $f^2\left(\overline{U}\right)\subseteq f(U)\subseteq f\left(\overline{U}\right)\subseteq U$. Inductivamente $f^n\left(\overline{U}\right)\subseteq f\left(\overline{U}\right)\subseteq U$. Por lo tanto, $f^{n+m}\left(\overline{U}\right)\subseteq f^m(U)\subseteq f^m\left(\overline{U}\right)$, obteniendo así el resultado deseado (la deducción de $f^{n+m}\left(\overline{U}\right)\subseteq f^n\left(\overline{U}\right)$ es absolutamente análoga).

Sea $m\in\mathbb{N}$ y procedamos a demostrar (II). Para cada $l\geq m$ sucede que $f^l(U)\subseteq f^l\left(\overline{U}\right)$ ya que $U\subseteq\overline{U}$. Por lo tanto,
$$\bigcup_{l\geq m} f^l(U)\subseteq\bigcup_{l\geq m} f^l\left(\overline{U}\right).$$

Del inciso(I) sabemos que $f^l\left(\overline{U}\right)\subseteq f^m\left(\overline{U}\right)$ para toda $l\geq m$, por lo tanto concluimos que
$$\bigcup_{l\geq m} f^l(U)\subseteq\bigcup_{l\geq m} f^l\left(\overline{U}\right)\subseteq f^m\left(\overline{U}\right).$$

Finalmente, del inciso(I) sabemos que para $1\in\mathbb{N}$, obtenemos $f^{1+l}\left(\overline{U}\right)\subseteq f\left(\overline{U}\right)$ para toda $l\in\mathbb{N}$. Y sabemos por hipótesis que $f\left(\overline{U}\right)\subseteq U$. Por lo tanto es cierto que
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n\left(\overline{U}\right)\subseteq U.$$

■

Lema A.2. Si $U\subseteq X$ un conjunto que cumple $f\left(\overline{U}\right)\subseteq U$, entonces se tiene que
$$\omega(U)=\bigcap_{m\in\mathbb{N}} f^m\left(\overline{U}\right).$$

Demostración. Para la primera contención, tomamos un punto $y\in\omega(U)$ y un $m\in\mathbb{N}$ cualquiera. Así $y\in\overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)}$, con lo que garantizamos una sucesión $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\bigcup_{l\geq m} f^l(U)$ tal que $z_i\longrightarrow y$. Y como $f\left(\overline{U}\right)\subseteq U$, por el Lema A.1, se sigue que
$$\bigcup_{l\geq m} f^l(U)\subseteq f^m\left(\overline{U}\right).$$

Así, $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subseteq f^m\left(\overline{U}\right)$. Es decir, existe ahora una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\overline{U}$ tal que $f^m(x_i)=z_i$ para cada $i\in\mathbb{N}$, que cumple que $f^m(x_i)\longrightarrow y$. Como $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subseteq\overline{U}$, entonces podemos encontrar subsucesión $\left\{x_{i_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que esta converja a algún punto $x\in\overline{U}$. Pero si $x_{i_j}\longrightarrow x$, entonces por ser f^m continua, tenemos que $f^m\left(x_{i_j}\right)\longrightarrow f^m(x)$. Y al ser $\left\{f^m\left(x_{i_j}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{f^m(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, la cual converge a y, entonces $f^m\left(x_{i_j}\right) \longrightarrow y$. Por lo tanto, $y = f^m(x)$. Es decir, existe $x \in \overline{U}$ tal que $y = f^m(x)$, en otras palabras, $y \in f^m\left(\overline{U}\right)$.

Para la contención contraria sencillamente notamos que, como f^m es continua, entonces sucede que $f^m\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{f^m(U)}$, obteniendo así que

$$\begin{aligned} f^m(U) &\subseteq \bigcup_{l\geq m} f^l(U) \subseteq \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)} \\ \Rightarrow \overline{f^m(U)} &\subseteq \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)} \Rightarrow f^m\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)}. \end{aligned}$$

Concluyendo que $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} f^m\left(\overline{U}\right) \subseteq \omega(U)$ y con esto el lema.

■

Proposición A.1. Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k \subseteq X$ abiertos tales que $Y_k = Y$ y $U = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$. Supongamos las siguientes dos propiedades:

(I) $f^i\left(\overline{Y}\right) \subseteq Y_i$, con $1 \leq i \leq k$.

(II) $f\left(\overline{Y_i}\right) \subseteq Y_{i+1}$, con $1 \leq i \leq k-1$.

Entonces, $\omega(Y) = \omega(U)$.

Es decir,

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(Y)} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)}.$$

Demostración. Para le primera contención, sea $y \in \omega(Y)$ y sea $m \in \mathbb{N}$. Esto implica que $y \in \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(Y)}$. Entonces existe una sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ contenida en $\bigcup_{l\geq m} f^l(Y)$ tal que $y_i \longrightarrow y$. Con esto, existe ahora una sucesión $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,m-1\}$ tal que $y_i \in f^{n_i}(Y)$ y $y_i \longrightarrow y$. Y así, aseguramos $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ sucesión tal que $f^{n_i}(x_i) = y_i$ y $y_i \longrightarrow y$, es decir, $f^{n_i}(x_i) \longrightarrow y$.

Como $Y = Y_k \subseteq U = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$, obtenemos que $y \in \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)}$. Por lo tanto

$$y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)}\right).$$

Lo cual concluye la primera contención.

Para la contención de regreso primero debemos tomar un punto

$$y \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)}.$$

Ahora, dado $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, debemos probar que

$$y \in \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(Y)}.$$

Empecemos definiendo $N = m + k$. Entonces, como $y \in \omega(U)$, sucede entonces que

$$y \in \overline{\bigcup_{l \geq N} f^l(U)}.$$

De esta forma, tenemos $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\bigcup_{l\geq N} f^l(U)$ tal que $z_i \longrightarrow y$. Es decir, existen sucesiones $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, N-1\}$ y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq U$, tal que $f^{n_i}(x_i) = z_i$ y $f^{n_i}(x_i) \longrightarrow y$.

Recordemos que $U = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_k$. Con ello podemos asegurar que existen $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ subsucesión y un conjunto Y_s, con $s \in \{1, \ldots, k\}$, tal que $\{x_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq Y_s$. Ahora, si $s = k$, terminamos nuestra demostración. Supongamos entonces que $s < k$.

Por otro lado, sabemos por hipótesis que $f\left(\overline{Y_i}\right) \subset Y_{i+1}$ con $1 \leq i \leq k-1$, entonces $f\left(\overline{Y_s}\right) \subseteq Y_{s+1} \subseteq \overline{Y_{s+1}}$.

Entonces

$$f^2\left(\overline{Y_s}\right) \subseteq f\left(\overline{Y_{s+1}}\right) \subseteq Y_{s+2} \subseteq \overline{Y_{s+2}}.$$

Y por lo tanto, inductivamente,

$$f^{k-s}\left(\overline{Y_s}\right) \subseteq Y_{s+(k-s)} = Y_k = Y.$$

Además, como tomamos $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, N-1\}$, sucede que

$$n_{i_j} \geq N = m + k \geq m + (k-s) \quad \Rightarrow \quad n_{i_j} - (k-s) \geq m.$$

Con esto definimos $w_j = n_{i_j} - (k-s)$, $j \geq N$. Por lo tanto

$$\{w_j\}_{j\geq N} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, m-1\}.$$

Ahora, para cada $x_{i_j} \in Y_s$ tenemos que $f^{k-s}\left(x_{i_j}\right) \in f^{k-s}(Y_s) \subseteq Y$. Por lo tanto

$$\left\{f^{k-s}\left(x_{i_j}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq Y.$$

Tomando nuestra sucesión $\{w_j\}_{j\geq N}$, obtenemos

$$f^{w_j}\left(f^{k-s}\left(x_{i_j}\right)\right) = f^{w_j+k-s}\left(x_{i_j}\right) = f^{n_{i_j}+(k-s)-(k-s)}\left(x_{i_j}\right) = f^{n_{i_j}}\left(x_{i_j}\right) = z_{i_j}$$

Concluyendo finalmente que existen sucesiones $\{w_j\}_{j\geq N} \subseteq \mathbb{N}\setminus\{1, \ldots, m-1\}$ y $\left\{f^{k-s}\left(x_{i_j}\right)\right\}_{j\geq N} \subseteq Y$, tal que $f^{w_j}\left(f^{k-s}\left(x_{i_j}\right)\right) = z_{i_j}$. Donde, como $\left\{z_{i_j}\right\}_{j\geq N}$ es una subsucesión de $\left\{z_{i_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, esta converge al punto y. Por lo tanto

$$y \in \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(Y)}$$

Es decir, $y \in \omega(Y)$.

■

La última herramienta que necesitamos para demostrar el teorema A.1 es la siguiente:

Proposición A.2. Si existe un atractor $K \subseteq X$ de f entonces existe un abierto $Y \subseteq X$ y un natural n tal que $f^n\left(\overline{Y}\right) \subseteq Y$.

Demostración. Por definición de atractor, existe un abierto $Y \subseteq X$ tal que $K \subseteq Y$ y $K = \omega(Y)$. Para demostrar nuestro resultado supongamos que no es verdad, *i.e.* que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $y_n \in f^n\left(\overline{Y}\right)$ tal que $y_n \notin Y$. Con esto, sucede que para cada $n \in \mathbb{N}$, como $y_n \in f^n\left(\overline{Y}\right)$, existe $x_n \in \overline{Y}$ tal que $f^n(y_n) = x_n$.

Significa que para cada $n \in \mathbb{N}$, como $x_n \in \overline{Y}$, por definición de cerradura, existe una sucesión $\{x_i^n\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ convergente a x_n. Y como para cada $n \in \mathbb{N}$ la función f^n es continua y la sucesión $\{x_i^n\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x_n, sucede ahora que la sucesión $\{f^n(x_i^n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge al punto $f^n(x^n)$ cuando i tiende a infinito. Es decir $\{f^n(x_i^n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a y_n cuando i tiende a infinito.

Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$x_i^n \in Y \Rightarrow f^n(x_i^n) \in f^n(Y).$$

Es decir, la sucesión $\{f^n(x_i^n)\}_{i\in\mathbb{N}}$ está contenida en $f^n(Y)$, y es tal que converge a y_n. Por lo tanto, por la definición de cerradura, $y_n \in \overline{f^n(Y)}$.

También, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(Y) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(Y)$$

y como la cerradura preserva contenciones, obtenemos

$$y_n \in \overline{f^n(Y)} \subseteq \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(Y)}.$$

De esta forma concluimos que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(Y)}$. Y como nuestro espacio X es compacto, entonces $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(Y)}$ es compacto. Por lo tanto, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(Y)}$, es decir, existe $\{y_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_{n_l} \longrightarrow z$, cuando $l \longrightarrow \infty$, para algún elemento $z \in \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(Y)}$.

Afirmamos a continuación que

$$z \in \omega(Y) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{n\geq k} f^n(Y)} \right).$$

Y para probarlo, observamos que, tomando un $k \in \mathbb{N}$ fijo, si $n \geq k$, entonces se cumple que

$$f^n(Y) \subseteq \bigcup_{n\geq k} f^n(Y) \Rightarrow \overline{f^n(Y)} \subseteq \overline{\bigcup_{n\geq k} f^n(Y)}.$$

Y por lo tanto tenemos también

$$y_n \in \overline{f^n(Y)} \Rightarrow y_n \in \overline{\bigcup_{n\geq k} f^n(Y)}.$$

Así, $\{y_n\}_{n\geq k} \subseteq \overline{\bigcup_{n\geq k} f^n(Y)}$.

De la misma forma, para un $l \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq l$, también se tiene que $k \leq l \leq n_l$, debido a que n_l es subindice de nuestra subsucesión. De esto concluimos que los primeros k términos de $\{y_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ son iguales o siguientes a los primeros k términos de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto,

$$\{y_{n_l}\}_{l\geq k} \subseteq \{y_n\}_{n\geq k}.$$

Es decir, la cola de $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a partir del termino k se queda contenida en la cola de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a partir del termino k, dándose entonces las siguientes contenciones

$$\{y_{n_l}\}_{l\geq k} \subseteq \{y_n\}_{n\geq k} \subseteq \overline{\bigcup_{n\geq k} f^n(Y)}.$$

Así, como $\{y_{n_l}\}_{l\geq k}$ es subsucesión de $\{y_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$, tenemos que $y_{n_l} \longrightarrow z$ para $l \geq k$, permitiéndonos concluir que $z \in \overline{\bigcup_{n\geq k} f^n(Y)}$. Por lo tanto

$$z \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{n\geq k} f^n(Y)} \right) = \omega(Y).$$

Por último notamos que z no puede ser elemento de Y, esto ya que cada y_{n_l} es elemento de $X \setminus Y$ por construcción. Es decir, $\{y_{n_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus Y$, con $X \setminus Y$ cerrado, y como z es punto de acumulación de la subsucesión, necesariamente $z \in X \setminus Y$.

Llegando finalmente a que existe este punto z tal que $z \in \omega(Y) = K$ pero $z \notin Y$. Pero en un principio teníamos que $K = \omega(Y) \subseteq Y$, obteniendo así una contradicción. Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n\left(\overline{Y}\right) \subseteq Y.$$

■

Teorema A.1. Sean $f\colon X \longrightarrow X$ y $K \subseteq X$. K es un atractor de f si y solo si existe un abierto U tal que $K \subseteq U$, $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$ y $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n\left(\overline{U}\right)$.

Demostración. Supongamos primero que K es un conjunto atractor. Por definición, existe un abierto $Y \subseteq X$ tal que $K \subseteq Y$ y $K = \omega(Y)$. Por la proposición anterior sabemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n\left(\overline{Y}\right) \subseteq Y$.

Ahora, como $\overline{Y} \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de un compacto, entonces $\overline{Y}$ es compacto y por lo tanto $f^n\left(\overline{Y}\right)$ es compacto. También, como X es métrico y $f^n\left(\overline{Y}\right) \subseteq X$ es compacto, tenemos que $f^n\left(\overline{Y}\right)$ es cerrado.

Aplicando imagen inversa al resultado recién obtenido, se sigue que

$$f^{-1}\left(f^{n}\left(\overline{Y}\right)\right) \subseteq f^{-1}(Y) \quad \Rightarrow \quad f^{n-1}\left(\overline{Y}\right) \subseteq f^{-1}(Y).$$

Donde $f^{n-1}\left(\overline{Y}\right)$ es cerrado, y por lo tanto compacto, y $f^{-1}(Y)$ es abierto. Entonces, como X es espacio métrico, existirá $V \subseteq X$ subcojunto abierto con la siguiente propiedad

$$f^{n-1}\left(\overline{Y}\right) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq f^{-1}(Y).$$

Llamemos $Y_{n-1} = V$ y enumeremos las propiedades que cumple:

(a) $f^{n-1}\left(\overline{Y}\right) \subseteq Y_{n-1}$.

(b) $f\left(\overline{Y_{n-1}}\right) \subseteq Y$.

Llamemos ahora $Y_n = Y$ y supongamos que hemos conseguido Y_{n-1}, Y_{n-2}, ... ,Y_2 subconjuntos abiertos de X con las siguientes propiedades:

(I) $f^{i}\left(\overline{Y}\right) \subseteq Y_i$, con $2 \leq i \leq n$.

(II) $f\left(\overline{Y_i}\right) \subseteq Y_{i+1}$, con $2 \leq i \leq n-1$.

Si tomamos en particular $i = 2$ se cumple que

$$f^{2}\left(\overline{Y}\right) \subseteq Y_2 \quad \Rightarrow \quad f\left(\overline{Y}\right) \subseteq f^{-1}(Y_2)$$

con $f\left(\overline{Y}\right)$ compacto y $f^{-1}(Y_2)$ abierto por la continuidad de f. Una vez más, como X es un espacio métrico, existe un abierto $V_{n-1} \subseteq X$ que cumple

$$f\left(\overline{Y}\right) \subseteq V_{n-1} \subseteq \overline{V_{n-1}} \subseteq f^{-1}(Y_2).$$

Llamamos entonces $Y_1 = V_{n-1}$. De las contenciones anteriores se sigue que $f\left(\overline{Y}\right) \subseteq Y_1$ y también que

$$f\left(\overline{Y_1}\right) = f\left(\overline{V_{n-1}}\right) \subseteq f\left(f^{-1}(Y_2)\right) \quad \Rightarrow \quad f\left(\overline{Y_1}\right) \subseteq f\left(f^{-1}(Y_2)\right) \subseteq Y_2$$

cumpliendo así las condiciones en(I) y(II). Con esto, hemos construido una familia de abiertos Y_{n-1}, Y_{n-2}, ... ,Y_2, $Y_1 \subseteq X$ tales que cumplen las condiciones(I) y(II). Llamemos

$$U = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_{n-1} \cup Y.$$

Finalmente, por la proposición A.1, podemos garantizar que $\omega(Y) = \omega(U)$, es decir, $K = \omega(Y) = \omega(U)$.Además, observamos que

$$f\left(\overline{U}\right) = f\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} Y_i}\right) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{Y_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(\overline{Y_i}\right) \subseteq \bigcup_{i=2}^{n} Y_i \subseteq U.$$

Es decir, $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$, entonces, por el Lema A.2, obtenemos que $\omega(U) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} f^m\left(\overline{U}\right)$, concluyendo, de lo ya demostrado, que

$$K = \omega(Y) = \omega(U) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} f^m\left(\overline{U}\right).$$

Recordando que $K \subseteq Y$ por la definición de atractor, y que $Y \subseteq U$, concluimos que $K \subseteq U$. Obteniendo así todas las conclusiones de la primera implicación.

Para la implicación de regreso, es decir para probar que el conjunto K es un atractor, notemos que por el Lema A.2, como $f\left(\overline{U}\right) \subseteq U$, se tiene que

$$\begin{aligned} \omega(U) &= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{l\geq m} f^l(U)} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} f^m\left(\overline{U}\right) \\ \Rightarrow \omega(U) &= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} f^m\left(\overline{U}\right) = K. \end{aligned}$$

Es decir, $U \subseteq X$ es un abierto tal que $K \subseteq U$ y tal que $K = \omega(U)$. En otras palabras, el abierto U cumple la definición de atractor para K.

■

Como podemos observar, el teorema A.1 es una caracterización del concepto de atractor. Se puede notar que es sumamente similar a la definición original, con la sutileza de que en esta proposición existirá un abierto $U \subseteq X$ que contiene a K de tal manera que

$$\omega(U) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(U).$$

Y a su vez obtendremos:

$$\omega(U) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(U) = K.$$

Esto permitirá encontrar de forma más práctica un conjunto atractor así como ocuparlo más naturalmente. Todo esto se podrá ver en el final de la demostración del Teorema 3.1 del tercer capítulo.

Bibliografía

[Adler et al., 1965] Adler, R. L., Konheim, A. G., and McAndrew, M. H. (1965). Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:309–319.

[Block et al., 1980] Block, L., Guckenheimer, J., Misiurewicz, M., and Young, L. S. (1980). Periodic points and topological entropy of one dimensional maps. *Global Theory of Dynamical Systems*, 819:18–34.

[Block and Coppel, 1986] Block, L. S. and Coppel, W. A. (1986). Stratification of continuous maps of an interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 297(2):587–604.

[Block and Coppel, 1992] Block, L. S. and Coppel, W. A. (1992). *Dynamics In One Dimension.* Lecture Notes in Math. 1513. Springer-Verlag, Berlin.

[Block and Coven, 1986] Block, L. S. and Coven, E. M. (1986). Maps of the interval with every point chain recurrent. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 98(3):513–515.

[Block and Franke, 1985] Block, L. S. and Franke, J. E. (1985). The chain recurrent set, attractors and explosions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 5(3):321–327.

[Conley, 1978] Conley, C. (1978). *Isolated Invariant Sets And The Morse Index.* CBMS Regional Conference Series in Mathmatics. 38. Amer. Math. Soc., Providence.

[Espinosa-Lucio, 2006] Espinosa-Lucio, B. (2006). Introducción a la entropía topológica. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México.

[King-Dávalos and Méndez-Lango, 2014] King-Dávalos, J. E. and Méndez-Lango, H. (2014). *Sistemas Dinámicos Discretos.* Las Prensas de Ciencias. FC-UNAM, Ciudad de México.