Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

MODELO MATEMÁTICO DE VALUACIÓN DE MERCADOS FINANCIEROS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

ARMANDO SALAS IPARRAZAR

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2019

Índice general

Introducción

A ciencia cierta no se sabe la fecha exacta del inicio de las matemáticas financieras, tanto que se podría definir como un tiempo inmemorial, pero de lo que si se tiene conocimiento es que alrededor del año 1500 a.C la aritmética comercial estaba ya bien definida, periodo en el cual se sabe que la civilización egipcia estaba constituida sólidamente y del ejercicio de sus transacciones comerciales, sin embargo es imposible conocer los conceptos fundamentales en los que se basaba, sea el caso del interés, simplemente se sabe que fue introducido cuando alguna persona dedujo que si a alguien se le había prestado dinero, él debería de recibir una compensación por el tiempo en que tardaran en finiquitar el préstamo.

Retomando periodos muy antiguos como a.C y d.C es importante hacer mención que los fenicios, griegos, y romanos negociaban contratos con cláusulas del tipo opción sobre las mercancías que trasportaban en sus naves. El ejemplo que da Katz (1990) en donde describe un breve relato de la ganancia que tuvo el filósofo, matemático Thales, quien invirtiendo en opciones sobre las aceitunas basándose en suposiciones y/o conocimientos anticipados sobre las cosechas se hizo de este beneficio. Y es así que navegando sobre esta anécdota y otras similares podríamos encontrar vestigios de señales del surgimiento de los mercados financieros, pero, en la obra titulada *Confusión de confusiones*, de José de la Vega hace referencia al primer mercado organizado en el siglo XVII ubicado en Holanda donde se hacían contratos en **opciones** y **forwards** sobre las acciones de la compañía de las Indias Orientales. Y así para comienzos del siglo XVIII Inglaterra ya comenzaba a operar con las acciones de las compañías principales para esa época, es importante mencionar que por ese entonces el mercado de las opciones y forwards se consideraba ilegal ya que por una excesiva especulación propiciaba la caída de las acciones. Ya fue por el siglo XX que las operaciones comenzaban a ser permitidas, aunque muchas de ellas se seguían realizando de una manera clandestina.

La aparición de los mercados organizados surge el 26 de abril de 1973 que es la fecha en que comienza a operar el *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) y desde esa fecha al día de hoy países con una economía emergente y los de primer mundo principalmente negocian una amplia gama de activos financieros y no financieros.

En estas dos últimas décadas la valoración de estos activos ha tenido un gran impulso de manera rápida, profunda y continua en la la industria de las inversiones, y esto se debe principalmente a nuevas estrategias de valuación de activos financieros gracias a los sistemas informáticos, sistemas de telecomunicaciones, y avances en la teoría de las matemáticas financieras. Donde gran parte de esta última cuestión se tratará en los siguientes capítulos.

Es prioritario mencionar que muchos principios básicos siguen siendo importantes, en el capítulo 1 se abordarán estos, ya que se consideran importantes en cuanto a sus implicaciones en la construcción de estrategias de inversión a través de modelos matemáticos. Lo cual conlleva que en el capítulo 2 se revise uno de estos modelos, el modelo binomial con base en la hipótesis de que los precios de las acciones se pueden mover sólo hasta dos valores futuros durante períodos cortos de tiempo. Aunque el modelo binomial es sumamente dinámico, en la actualidad requiere de sistemas computacionales para que sus aproximaciones resulten practicas al momento de la toma de decisiones. Entonces sería bastante practico tener una fórmula de valoración de opciones, que ayudara a reducir el largo algoritmo en la aplicación en un modelo binomial, de hecho, esta fórmula se puede deducir si se toman al menos dos hipótesis, es decir, un tipo de interés sin riesgo y que la volatilidad del precio del activo subyacente sea constante durante el período de vida de la opción. Durante años los especialistas financieros estuvieron en la búsqueda de dicha fórmula para la valoración de opciones, hasta que Black y Scholes (1973) y Merton (1973) dedujeron una fórmula, que hoy en día es bastante utilizada por los especialistas en mercados financieros, en el capítulo 3 se deducirá esta fórmula, concluyendo con una propuesta a mejorar la sensibilidad de resultado de dicho modelo a través del cálculo fraccionario y de igual manera para otros modelos financieros, como es la valuación de un bono.

Por otro lado, así como en el contexto global, de igual manera el mercado financiero mexicano tiene una larga historia, remontando a la época prehispánica en el siglo XVI se podría considerar como los orígenes de un mercado de intercambio de valores, no formalmente financiero, ya que el dinero no existía y no había reglas formales de operación, la adquisición de los productos como el oro, plumas, y otros era a través de lo que se denominaba el *trueque* considerándose el cacao como lo más asemejado a un efectivo circulante. Para virreinato en México uno de los sucesos más importantes es la creación de la *Casa de Moneda de México* donde se comienzan a acuñar las primeras monedas en la *Nueva España* la creación del *Monte de Piedad de Animas* y el *Banco de San Carlos* estas dos últimas instituciones creadas por España con el fin de fomentar el comercio y obtener un mayor crecimiento económico. Una vez terminada la época de la colonia, da comienzo para la época independiente la cual permitió la reestructuración de todo el sistema gubernamental, constituyendo y/o dando pie a operaciones al Banco de Amortización de la Moneda de Cobre, la Caja de Ahorros del Nacional Monte de Piedad, el Banco de Londres, Banco Nacional Mexicano, la fundación la Bolsa de Valores de México (1908). Y para la época moderna los sucesos más importantes para el mercado financiero mexicano se podrían resumir en la creación de los petrobonos, los cuales permiten financiar a PEMEX, el Impuesto al Valor Agregado, se emiten los Pagarés de la Tesorería de la Federación, y la nacionalización de la banca. Hoy en día se dice que el sistema financiero es un conjunto de organismos e instituciones que generan, captan, administran, dirigen ahorro, inversión y financiamiento dentro de un marco normativo.

Capítulo 1

Los mercados financieros un modelo matemático y su enseñanza.

Una pregunta que uno se podría hacer al estar trabajando en los mercados financieros sería, cuáles son las matemáticas que se requieren para trabajar en esta área, y esto con el fin de tener alguna certeza de poder entender la evolución de los precios. Y es por esto que en el siguiente capítulo se comenzará con una descripción de las leyes y principios básicos que rigen dentro de los mercados financieros, así como las matemáticas relacionadas con los cambios cuantitativos que se producen al mover los capitales a través del tiempo, mientras que de manera paralela se irán introduciendo los conceptos y convenciones más habituales dentro de los mercados financieros.

1.1. Leyes financieras vistas como funciones matemáticas.

Se entenderá como **fenómeno financiero** a todo aquel intercambio de bienes económicos a través del tiempo. Fijando valor de dichos bienes económicos y de igual manera fijar el momento en que se posee, ya que con estas dos acciones íntimamente relacionadas nos pone en el contexto o entendimiento

Como resultado definamos **capital financiero** como el par (C, t) donde C sea la cantidad de capital en $\mathbb{R}^+$ y t como el tiempo al momento del vencimiento. Gráficamente lo podemos representar como en la figura 1.1.

A una **operación financiera** la llamamos la acción de cambio de un capital o un conjunto de estos, por otro(s) a través del tiempo.

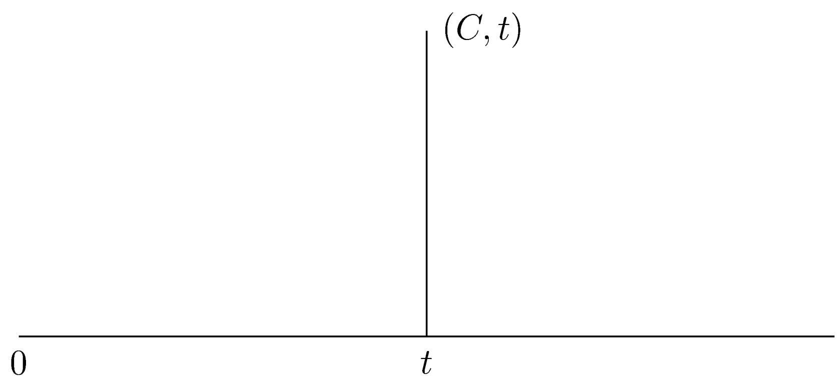


Figura 1.1: Representación del capital financiero

1.2. Principio de sustitución o proyección financiera.

Como vimos en el punto anterior los capitales financieros están definidos como pares de cantidades económicas en un instante de tiempo. Entonces, algo natural seria la comparación entre capitales. Supongamos que tenemos dos capitales financieros (C, t) y (C', t') en donde $t = t'$ aquí escogeremos al que tenga mayor valor, es decir, $C > C'$ entonces se escoge a (C, t) en vez de (C', t'). Ahora bien, si $C = C'$ preferiremos al que tenga una disposición más pronta. Para poder tener un criterio de comparación entre capitales de una manera indirecta haremos uso del principio de sustitución o proyección financiera, y consistirá en valorar a los capitales en un determinado tiempo t, el cual denotaremos con la letra "p". Entonces decimos que para (C, t) obtendremos el valor V del capital sustituyéndolo en p, sea para $t > p$ o $t < p$. Es decir:

$$V = \text{Proy}_p(C, t).$$

Sean dos capitales (C, t) y (C', t') diremos que son equivalentes en p si sus proyecciones son iguales, es decir:

$$[(C, t)\tilde{p}(C', t')] \Rightarrow [\text{Proy}_p(C, t) = \text{Proy}_p(C', t')].$$

Cumpliendo con las propiedades:

- Reflexiva: Para cada (C, t) en el espacio se cumple que $(C, t)\tilde{p}(C, t)$.
- Simétrica: Si ocurre que $(C, t)\tilde{p}(C', t')$, entonces se cumple que $(C', t')\tilde{p}(C, t)$.
- Transitiva: Si se tiene que $(C, t)\tilde{p}(C', t')$ y $(C', t')\tilde{p}(C'', t'')$, entonces $(C, t)\tilde{p}(C'', t'')$.

1.3. Leyes Financieras.

Las leyes financieras las podemos clasificar principalmente en dos grupos, que más adelante veremos a detalle sus propiedades. Las llamadas **Leyes de Capitalización** (simple y

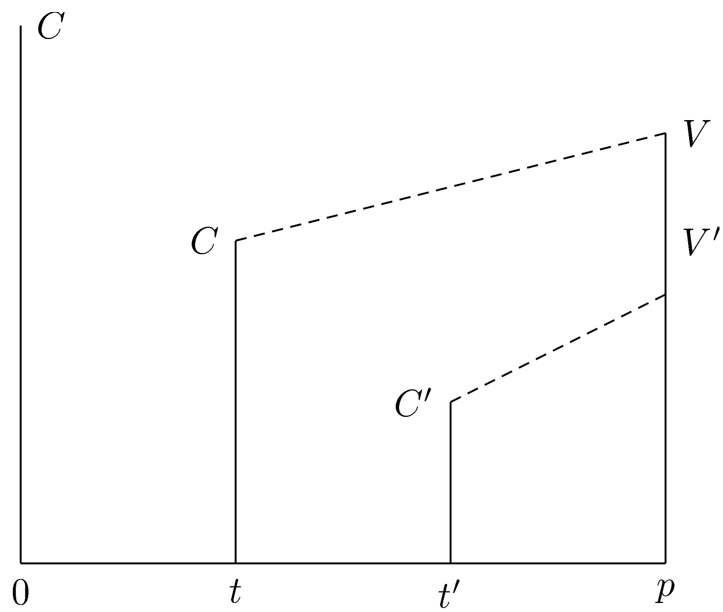


Figura 1.2: Proyección de capitales

compuesta) y **Leyes de Descuento**(simple comercial, simple racional, compuesto). Estas leyes nos permitirán comparar capitales financieros haciendo la proyección de estos en distintos instantes de tiempo. Además de que obtendremos el valor V en p teniendo un par (C, t) y a la cual la definiremos como una función matemática, también llamada **Ley Financiera**.

$$V = f(C, t, p) = \mathrm{Proy}_p(C, t).$$

1.3.1. Ley financiera de capitalización.

Definición 1.1 Si $t < p$, entonces se dice que el valor V es la proyección o resultado de capitalizar hasta p, es decir, el valor obtenido de capitalizar (C, t) en p.

$$V = L(C, t, p).$$

1.3.2. Ley financiera de descuento.

Definición 1.2 Si $t > p$, entonces se dice que el valor V es el descuento o valor actualizado (C, t).

$$V = A(C, t, p).$$

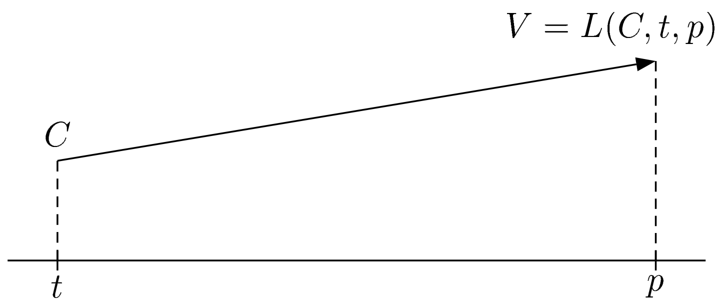


Figura 1.3: Ley financiera de capitalización

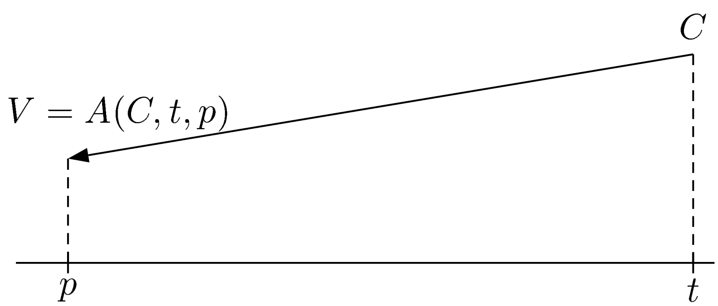


Figura 1.4: Ley financiera de descuento

1.4. Leyes financieras y sus aplicaciones a los mercados financieros.

Como vimos en el punto anterior 1.3 una ley es una función que nos permite hacer una proyección p en un instante de tiempo t a otro instante distinto s. En la práctica, las operaciones financieras están clasificadas de la siguiente manera:

$$\text{Leyes de capitalización} \begin{cases} \text{Capitalización simple} \\ \text{Capitalización compuesta} \\ \text{Capitalización continua} \end{cases}$$

$$\text{Leyes de descuento} \begin{cases} \text{Descuento simple comercial} \\ \text{Descuento simple racional} \\ \text{Descuento compuesto} \end{cases}$$

Ley financiera de capitalización simple. La ley financiera de capitalización simple se caracteriza porque los intereses son directamente proporcionales en un periodo cualquiera a la duración de este y al valor del capital inicial. Y por lo regular es la que se utiliza cuando las operaciones financieras son inferiores a un año.

$$C_F = C_i(1 + i \times n).$$

Ley financiera de capitalización compuesta. La ley de capitalización compuesta se caracteriza porque los intereses de un periodo se acumulan al capital en el periodo siguiente. Esta ley generalmente se utiliza en proyecciones financieras mayores a un año. La capitalización compuesta es un proceso en la cual se van acumulando los intereses al capital para así producir de una manera conjunta nuevos intereses en una operación de n periodos. Como el tanto de interés i representa los intereses producidos por una $u.m$ (unidad monetaria) en un año, es decir, al terminar el primer periodo se transforma en $(1 + i_1)$ pasando a capitalizarse esta cantidad y no sólo la unidad inicial, por lo tanto cuando finalice el segundo periodo tendremos

$$C_2 = (1 + i_1)(1 + i_2)$$

y así sucesivamente, generalizando se obtiene:

$$C_F = C \times (1 + i_1) \times (1 + i_2) \times ... \times (1 + i_n) = C(1 + i)^n.$$

Indistintamente de la Ley Financiera que utilicemos, los intereses generados los obtendremos de la diferencia entre el capital final y el inicial, por lo tanto, se puede deducir que:

$$C_F = C + I$$

$$I = C_F - C$$

$$I = C(1 + i)^n - C$$

$$I = C[(1 + i)^n - 1]$$

$$I = C_F - C = C(1 \times i)^n - C = C[(1 + i)^n - 1].$$

Ley financiera de capitalización continua. La ley de capitalización continua se caracteriza porque los intereses se capitalizan a cada instante. Esta ley por ejemplo, se utiliza en modelos de valuación de opciones, como en el modelo de **Black and Scholes**. Con base a la ley anterior se habrá notado que, si la tasa de interés capitalizable se mantiene constante, pero la capitalización es cada vez más frecuente tendiendo a infinito, el monto compuesto también crecería, esto llevaría a pensar casi de inmediato que el valor final crecería sin límite cuando en cierto tiempo la frecuencia con las que se capitaliza el interés tendieran a infinito, pero esto no es así. Considerando el caso en donde i es la tasa de interés anual capitalizable m veces en un año, sea C el capital inicial, entonces el monto compuesto al final de t años será:

$$V_f = C(1 + \frac{i}{n})^{nt}. \tag{1.1}$$

donde:

$\frac{i}{n}$ es la tasa de interés por periodo de capitalización y nt el número total de periodos de capitalización en t años.

Sea $v = \frac{n}{i}$, entonces $n = vi$ en 1.1 puede escribirse como:

$$V_f = C(1 + \frac{1}{v})^{vit}$$

o

$$V_f = C[(1 + \frac{1}{v})^{v}]^{it}.$$

Por lo tanto, la capitalización continua se obtiene cuando el número de periodos de capitalización aumenta en forma indefinida, es decir, $n \to \infty$. Si n tiende a infinito, entonces, v también tiende a infinito. Por lo tanto, el valor final V_f, cuando el interés se capitaliza continuamente, está dado por:

$$V_f = \lim_{v\to\infty} C[(1 + \frac{1}{v})^{v}]^{it} = C \lim_{v\to\infty} [(1 + \frac{1}{v})^{v}]^{it} = C[\lim_{v\to\infty} (1 + \frac{1}{v})^{v}]^{it}$$

como $\lim_{v\to\infty} (1 + \frac{1}{v})^{v} = e$. Entonces se tiene que $V_f = Pe^{it}$.

Otra manera de entender este resultado del *interés continuo* es verlo como una variación de capital, llámese dS con respecto al tiempo t, es decir, $\frac{dP}{dt}$ que es proporcional al capital que se invierta $\frac{dP}{dt}\alpha S \Rightarrow \frac{dP}{dt} = iP$ donde:

- i =tasa
- α = proporción

resolviendo la ecuación $\frac{dP}{dt} = iP$ con $t = 0$, $P = P_0$ condición inicial. Por separación de variables.

$\frac{dP}{P} = idt$, integrando $\int \frac{dP}{P} = \int idt$, $ln \mid P \mid= it + c$, despejando P, $P = e^{it+c}$ entonces poniendo en función del tiempo se tiene $P(t) = e^{it}e^{c} \Rightarrow$

$$P(t) = e^{it}k. \tag{1.2}$$

Para encontrar k con la condición inicial donde en t_0 se invierte un P_0. Entonces, $P(0) = P_0$, sustituyendo en 1.2 se tiene $P_0 = e^{i0}k \quad \therefore \quad k = P_0$.

Se tiene entonces que $P(t) = P_0e^{it}$ es la ecuación que da el monto de la inversión en cualquier tiempo t.

Ley financiera de descuento simple comercial. Esta ley se caracteriza porque los descuentos son proporcionales al capital inicial en el plazo de descuento, es decir,

$$A(n) = 1 - d \times n,$$

donde d[1] es el descuento aplicado, de manera general y excepto en capitales no unitarios tenemos:

$$C = C_F(1 - d \times n)$$

despejando, para obtener la tasa de descuento

$$d = \frac{C_F - C}{C_F \times n}.$$

El monto del descuento se obtendría restando al capital final el capital inicial, es decir,

$$D = C_F - C = C_F - C_F(1 - d \times n) = C_F \times d \times n.$$

Ley financiera de descuento simple racional. Esta ley es la reciproca de la capitalización simple. Teniendo que:

$$A(n) = \frac{1}{1 + i \times n}$$

de forma general

$$C = \frac{C_F}{1 + i \times n}.$$

Y para obtener el monto de descuento

$$D = C_F - C = C_F - \frac{C_F}{1 + i \times n} = C_F \frac{i \times n}{1 + i \times n}$$

Mencionadas las dos leyes de descuento (simple comercial y simple racional) podemos verificar dependiendo de si la medida se toma sobre el capital inicial, capital descontado (tipo de interés) o sobre el capital final (tasa de descuento), entonces estaremos hablando sobre descuento racional o descuento comercial.

Ya que ambos descuentos son la misma cosa podemos obtener la relación entre la tasa de descuento y el tipo de interés

[1] A la diferencia entre capital final y capital inicial se le conoce como *descuento*. Al resultado de dividir el descuento por el capital final y por el tiempo de la operación se le conoce como la *tasa de descuento*.

$$C_F \times d \times n = C_F \frac{i \times n}{1 \times i \times n} \Rightarrow d = \frac{i}{1 + i \times n} \Rightarrow i = \frac{d}{1 - d \times n}.$$

Ley financiera de descuento compuesto. Esta ley es similar al de la capitalización compuesta y opera de tal forma que el capital descontado después de un periodo pasa a ser el efectivo a descontar en el periodo siguiente. Aplicándose para operaciones que apliquen su renovación superior a un año.

Supongamos una unidad monetaria (u.m) descontada un periodo con una tasa de descuento d teniendo entonces $(1 - d)$ y así el siguiente periodo y continuando con esa misma tasa, tendremos $(1 - d)(1 - d)$ y así sucesivamente hasta obtener

$$A(n) = (1 - d)^n$$

de forma general

$$C = C_F(1 - d)^n.$$

Y dado el monto del descuento por:

$$D_C = C_F - C = C_F - C_F(1 - d)^n = C_F[1 - (1 - d)^n]$$

1.5. Las rentas y sus aplicaciones a los mercados financieros.

En el estudio de las finanzas será importante conocer el valor temporal del dinero, el saber evaluar cualquier renta para cualquier instante de tiempo, es lo que se podría considerar como la esencia de las finanzas. Entendiéndose que una renta es una sucesión de pagos o de cobros periódicos, es decir, una distribución de capitales en el tiempo. Entonces asumiendo que tenemos que encontrar un valor de la renta en un instante de tiempo dado, se determinara el valor presente como la actualización de todos los capitales C hasta el instante t. El valor final se obtendrá de la integración de todos los capitales hasta el instante final t.

Dada la gran aplicación de las rentas para este caso se clasificará en las siguientes por sus aplicaciones a los mercados financieros:

1.- Teniendo en cuenta el vencimiento de los términos, clasificadas en **rentas prepagables** aquellas en las que los vencimientos se producen al principio del intervalo, mientras que las **rentas pospagables** son aquellas en la que los pagos o los cobros se realizan al final de cada periodo.

2.- Las **rentas temporales** son las que tienen una duración finita, mientras las **rentas perpetuas** las que cuentan con un número infinito de periodos.

3.- **Rentas de interés constante** son aquellas en las que se mantendrá constante el interés a lo largo de todo el periodo de tiempo y las de **interés variable** serán las que modificarán el interés a lo largo de su periodo de existencia.

4.- **Rentas ciertas**, son aquellas en donde se conocen las variables que definen una renta y por otro lado las rentas **aleatorias** en la que los flujos de capitales son inciertos.

1.6. Renta unitaria, temporal y pospagable.

Las rentas unitarias temporales y pospagables son aquellas en donde sus capitales son una unidad monetaria finita y con flujos que se producen al final del periodo. Para calcular el valor presente de este tipo de renta se descuenta hasta el instante inicial cada una de las $u.m$ a un tipo de interés i obteniendo

$$VP = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + ... + (1+i)^{-n}.$$

Podemos observar que el valor presente representa una progresión geométrica (finita) con una razón $(1+i)^{-1}$ un primer termino $a_1 = (1+i)^{-1}$ y *n-esimo* término $a_n = (1+i)^n$,

teniendo la fórmula de la suma y haciendo una sustitución de los valores obtenemos para progresiones geométricas

$$S = \frac{a_1 - a_n \times r}{1-r}$$

y después haciendo una sustitución de los valores, obtenemos

$$S = \frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}$$

factorizando,

$$S = \frac{(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{\frac{(1+i)^{-1}}{1+i}} = \frac{(1+i)^{-1}[1-(1+i)^{-n}]}{i(1+i)^{-1}}$$

con lo que tenemos

$$VP = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Ahora bien; si capitalizan los términos de la renta al instante final y los sumamos obtendremos el **valor final**, es decir,

$$VF = 1 + (1+i)^i + (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... + +(1+i)^{n-1}.$$

En donde podemos ver que igualmente es una progresión geométrica con el primer término $a_1 = 1$, un último término $a_n = (1+i)^{n-1}$ y con una razón $(1+i)$,

y de igual manera en la fórmula

$$S = \frac{a_n \times r - a_1}{r - 1}$$

sustituyendo tenemos que

$$S = \frac{(1+i)^{n-1} \times (1+i) - 1}{(1+i) - 1}$$

y factorizando llegamos a

$$VF = \frac{(1+i) - 1}{i}.$$

1.7. Conceptos probabilistas y estadísticos para los instrumentos financieros.

Enfrentándose con una realidad compleja de modelar, como lo es la realidad económica, la mejor forma que se tiene es a través de la modelación matemática. Si bien estos modelos aparte de que sirvan para representar un fenómeno, debe de igual manera permitir hacer variaciones que den una simulación lo mayor certeza posible de los resultados o predicciones. Es por eso que se hará uso de conceptos de probabilidad y de estadística que se emplean en la teoría financiera para poder evaluar estos modelos matemáticos con respecto al fenómeno aleatorio que estemos estudiando, ya que la mayor parte de los elementos que componen a la realidad económica son precisamente fenómenos de este tipo, es decir, fenómenos en los cuales no es posible predecir con toda certeza su ocurrencia final.

1.7.1. Teoría de Probabilidad.

Definición 1.3 Sigma álgebra (σ-álgebra). Sea X un conjunto no vacío, una clase no vacía $S \subset X$ se llama σ-álgebra de subconjuntos de X, si:

(i)

$$X \in S$$

(ii)

$$E, F \in S \Rightarrow E - F \in S$$

(iii) Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de S, entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S.$$

A la pareja (X, F) se le llama espacio medible y a los elementos de F se les llama eventos o conjuntos medibles.

Teorema 1.4 *Sea F una familia no vacía de σ-álgebra de subconjuntos de X, entonces $\bigcap S \mid S \in F$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.*

Definición 1.5 σ-álgebra generada. Sea F una colección no vacía de subconjuntos de X. La σ-álgebra generada por C, $\sigma(C)$, es la colección:

$$\sigma(C) = \bigcap\{F \mid F$$

es σ-álgebra y $C \subset F\}$.

Definición 1.6 σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Sea (X, τ) un espacio topológico. La σ-álgebra de B generada por la topología τ se llama σ-álgebra de Borel. Si $X = \mathbb{R}$ y $\tau \subset P(\mathbb{R})$ es la topología usual de $\mathbb{R}$, entonces a

$$B_{\mathbb{R}} = \sigma(\tau)$$

se le llama la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

Definición 1.7 Espacio medible.

Un espacio medible es una pareja (X, F) en la que X es un conjunto no vacío y F es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Definición 1.8 Medida.

Sea (X, F) un espacio medible. Una medida en (X, F) es una función

$$\mu : X \to \mathbb{R}$$

con las siguientes propiedades:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) $\mu(E) \geq 0$, para cualquier $E \in F$

(iii) Si $\{E_n\}$ es una sucesión de elementos disjuntos entre sí de F, entonces,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definición 1.9 Medida de probabilidad.

Sea (X, F) un espacio medible. Una medida de probabilidad es una función $P{:}F \to [0, 1]$ que satisface:

(i) $P(x) = 1$

(ii) $P(A) \geq 0$, para cualquier $A \in F$

(iii) Si $A_1, A_2, ... \in F$ son ajenos dos a dos, es decir, $A_n \cap A_m = \varnothing$ para $n \neq m$, entonces,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Definición 1.10 Espacio de medida.

Un espacio de medida es una terna (X, F, μ), en donde (X, F) es un espacio medible y μ es una medida definida sobre F.

Definición 1.11 Espacio de probabilidad.

Un espacio de probabilidad es una terna (X, F, P), en donde (X, F) es un espacio medible y P es una medida de probabilidad definida sobre F.

Definición 1.12 Función medible.

Sean (X, F) y (Y, F') dos espacios medibles. Una función $f : x \to y$ se llama medible relativa a las σ-álgebras F y F' si $f^{-1}(E') \in S \ \forall \ E' \in S'$.

Definición 1.13 Variable aleatoria.

Sean los espacios medibles (X, F) y $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ con una variable aleatoria real y una función $G : x \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier conjunto Boreliano B, se cumple que el conjunto $G^{-1}(B)$ es un elemento de F. [2]

1.7.2. Teoría Estadística.

Definición 1.14 Media.

Sean $X_1, ..., X_n$ observaciones o mediciones de una variable cuantitativa. La media es el número

$$\tilde{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}.$$

Definición 1.15 Moda.

Sean $X_1, ..., X_n$ observaciones o mediciones de una variable. La moda es el valor que aparece con mayor frecuencia en el conjunto de datos, si lo hubiera.

Definición 1.16 Mediana.

Sean $X_1, ..., X_n$ observaciones o mediciones de una variable cuantitativa. Sean $X_1 \leq X_2 \leq ... \leq X_n$ los datos ordenados de menos a mayor, incluyendo repeticiones. Si n es par, entonces la **mediana** es:

$$\tilde{X} = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}.$$

Si n es impar, entonces la **mediana** es:

$$\tilde{X} = X(\frac{n+1}{2}).$$

[2] Rincón, Luis 2007

Definición 1.17 Varianza.

Sean $X_1, ..., X_n$ observaciones o mediciones de una variable cuantitativa. Sea $\tilde{X}$ la media. La varianza es el número

$$var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{X})^2$$
$$= S^2(x) = S^2_x.$$

Definición 1.18 Desviación estándar.

Sean $X_1, ..., X_n$ observaciones de una variable cuantitativa. Sea $\tilde{X}$ la media. La **desviación estándar** es el número

$$\sigma = \sqrt{var(x)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{X})^2}.$$

Definición 1.19 Rango.

Sean $X_1, ..., X_n$ observaciones de una variable cuantitativa. Sea $X_{(1)}$ el dato más pequeño y $X_{(n)}$ el dato más grande. El **rango** es el número $r(x) = X_{(n)} - X_{(1)}$.

Definición 1.20 Cuantiles.

Sean $X_1, ..., X_n$ observaciones de una variable cuantitativa, sea

$$p \in (0, 1]$$

un cuantil al $100_p\,\%$ es un número c que cumple:

$$\frac{\#\{X_i : X_i \leq c\}}{n} \geq p$$

$$\frac{\#\{X_i : X_i \geq c\}}{n} \geq 1 - p.$$

Definición 1.21 Covarianza.

Sean $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ observaciones de dos variable cuantitativas. Sean $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ las medias de cada conjunto de observaciones. La **covarianza** es

$$cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{X})(Y_i - \tilde{Y}).$$

Definición 1.22 Coeficiente de correlación.

Sean $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ observaciones conjuntas de dos variables cuantitativas. El **coeficiente de correlación** es

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)\cdot var(y)}}.$$

Propiedas Importantes

(i)

$$-1 \leq \rho(x,y) \leq 1$$

(ii)

$$\rho(x,y) = 1 \Leftrightarrow \text{Existe una correlación lineal positiva perfecta entre las observaciones}$$

(iii)

$$\rho(x,y) = -1 \Leftrightarrow \text{Existe una correlación lineal negativa perfecta entre las observaciones.}$$

1.7.3. Recta de Regresión.

Sean $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ observaciones conjuntas de dos variables cuantitativas. Una vez determinado que puede existir una dependencia lineal y casual entre las observaciones de estas variables, tendría que realizarse la pregunta de cómo encontrar a la línea recta que mejor se adapta a los datos. Bien, a esta línea recta se le llamará recta de regresión. Una manera de encontrar esta recta es mediante el método de mínimos cuadrados.

$$y - \tilde{y} = \frac{cov(x,y)}{var(x)}(x - \tilde{x}).$$

En la sección 1.9 se verá cuál es la aplicación de la recta de regresión, se introduce este primer acercamiento ya que se considera importante como precepto para la modelación de regresiones lineales y/o series financieras.

1.8. La volatilidad y la correlación.

Apuntando hacia el mercado de los productos derivados siempre aparece un parámetro que influye notablemente en el precio de un activo en la realización de un modelo de valoración, y es de aquí donde nace el interés por la dirección que toman los precios de un activo subyacente, es decir, la velocidad con la que cambia de precio un subyacente se le llama **volatilidad**, y está definida por

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2}{n}}.$$

Entendiendo que la velocidad con la que cambia el precio del subyacente es de mucha importancia y la inestabilidad que esto representa, es importante conocer algunas técnicas para tratar de predecir dicha volatilidad.

La volatilidad histórica que para este caso es el hecho de inferir la volatilidad futura a través de volatilidades pasadas y siendo este uno de los métodos más utilizados. Ya sea con base a los precios de *cierre* del subyacente o con base a los precios *alto* y *bajo* registrados a través de las diferentes sesiones, para estas dos maneras solo hay que tomar una ventana de datos (*10,50,100 sesiones*) e inferir.

Por otra parte, si se desea dar más peso a ciertos datos para una volatilidad histórica, decimos que es de una forma ponderada, es decir,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} \lambda^t \cdot R_t^2}{\sum_{i=1}^{n} \lambda^t}}.$$

Y para el caso de precios máximos y mínimos

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n}[ln(\frac{Alto_t}{Bajo_t})]^2}{4 \times ln2}} = \text{(Volatilidad de Parkinson)}.$$

La volatilidad implícita la obtenemos invirtiendo los modelos de valoración, es decir, σ será la incógnita y el precio de la prima será un dato.

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} W_J \cdot \sigma_{iJ}$$

$$\sum_{J=1}^{n} W_J = 1.$$

Donde:

σ_i = volatilidad implícita media en una fecha determinada

σ_{iJ} = volatilidad implícita para el vencimiento, en una serie de precio del ejercicio J con igual fecha.

W_J = pudiéndose calcular por medio de la liquidez de las diferentes series o a partir de la $VEGA$ (parámetro que mide la elasticidad de la prima de una opción a la volatilidad).

La volatilidad futura, a través de la comparación de las volatilidades históricas del subyacente, así como también las volatilidades implícitas.

$$\sigma_i - \sigma_H = \Delta_\sigma^E$$

donde:

σ_i = volatilidad implícita.

σ_H = volatilidad histórica.

Δ_σ^E = diferencia de volatilidad del subyacente.

Como se vio en la definición anterior 1.22 la correlación para el caso de series financieras indicara la manera en que se relacionan dichas series, la representación de la fórmula para el contexto financiero queda

$$\rho(x,y) = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{\sigma_x \cdot \sigma_y}}.$$

Y para la covarianza 1.21 simplificando los términos:

$$cov(x,y) = E[(x - E(x))(y - E(y))].$$

1.9. Modelo de las series financieras y el modelo de regresión.

Ciertamente podríamos afirmar que una parte fundamental de los mercados financieros es la predicción, algunas basadas a veces en los expertos, diciendo que estas son de un carácter cualitativo, por el otro lado están las cuantitativas que son para este caso el objetivo, ya que los modelos matemáticos tienen la función de resumir datos-comportamientos del pasado o presente, para así poder sacar conclusiones a futuro. Una relación fácil de hacer entre dos variables, es la relación lineal 1.7.3

$$Y = b_0 + b_1 x + \varepsilon,$$

donde x es la variable independiente, y la variable dependiente, ε la perturbación aleatoria, con hipótesis:

- $$E[Y_i/X_i] = \beta_0 + \beta_1 x_i$$
  (media de la variable Y depende linealmente de X).
- $$var(Y_i) = \sigma^2$$
  (varianza de la distribución de Y_i constante, homocedastica).
- La distribución de Y para cada X es normal.

Para este modelo debemos hacer estimaciones de b_0 y b_1 y de σ^2, es decir, las β_0 y β_1, resultando en

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

que estima el valor medio de Y y $\tilde{Y}_i$ para cada valor de X con desviación típica de Y que se estima con σ^2.

Por medio del método de mínimos cuadrados tenemos que el error

$$e_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 x_1$$

para los parámetros β :

$$\beta_1 = \frac{cov(x,y)}{var(x)} = \frac{\sum(Y_i - \tilde{Y})(X_i - \tilde{X})}{\sum(X_i - \tilde{X})^2} = \frac{S_{yx}}{S_x^2}$$

$$\beta_0 = \tilde{Y} - \beta_1 \tilde{X}$$

$$S_R^2 = \frac{\sum e_i^2}{h-2}.$$

Donde S_R^2 es el estimador de la varianza residual, con n número de observaciones.

$\beta_0 y \beta_1$ son extraídos de una muestra al azar con distribución probabilistica con las características:

- b_0 se distribuye como una normal con media β_0 y varianza

$$\frac{\sigma_2}{n}(1\frac{\tilde{X}^2}{S_x^2})$$

- b_1 se distribuye como una normal con media β_1 y varianza

$$\frac{\sigma^2}{nS_x^2}.$$

Teniendo la distribución de los parámetros se puede construir los intervalos de confianza. Parámetros b_0 y b_1, estimadores β_0, β_1, desviación típica estimadores S_α, S_b.

Con bandas de confianza

$$\beta_0 \pm t(n-2,\frac{\alpha}{2})S_a \quad \text{y} \quad \beta_1 \pm t(n-2,\frac{\alpha}{2})S_b$$

para cada parámetro respectivamente, donde:

$t =$ distribución *t de Student* con $n-2$ grados de libertad y probabilidad α.

$$S_\alpha^2 = \frac{\sum X_i^2}{n}\ \frac{1}{\sum(X_i-\tilde{X})^2}\ S_R^2$$

$$S_b^2 = \frac{S_R^2}{\sum(X_i-\tilde{X})^2}.$$

Para hacer un contraste de significancia con las bandas de confianza y ver cuáles son los rangos en que varían los estimadores y saber si b_0 puede ser igual α_0 o b_1 puede ser igual a α_1.

Calculemos B_1, luego;

$$\frac{\beta_1-\alpha_1}{S_b} = t_0$$

$$t(n-2,\frac{\alpha}{2})$$

si $|t_0| < t(n-2,\frac{\alpha}{2})$, aceptamos $b_1 = \alpha_1$.

Si el número de observaciones es menor a 30 conviene realizar otro contraste, ahora basándonos en la distribución F.

$$\frac{(\beta_1-\alpha_1)^2}{S_b^2} = F_0 \quad F(1,n-2).$$

Si $F_0 < F(1,n-2)$ entonces aceptamos que $b_1 = \alpha_1$.

Expresando el modelo de regresión lineal general:

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_kx_k + \epsilon$$
$$Y_i = b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + ... + b_kx_{ki} + \epsilon \quad \forall_i = 1, ..., n$$

es decir,

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{kn} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

o bien como

$$Y = Xb + \varepsilon.$$

1.10. Los mercados financieros de tipo interés.

Dentro del mercado bursátil existen operaciones del tipo monetario, a continuación, se hará una descripción breve del tipo de operaciones que se realizan con estos.

Los títulos monetarios que ayudan a financiarse tanto a empresas privadas como al Estado por lo regular cuentan con un vencimiento entre los 18 y 24 meses. Entre los más comunes se encuentran los certificados del tesoro (CETES), los pagarés, y/o instrumentos de renta fija a corto plazo (estos últimos solo emitidos por empresas privadas). Los *cetes* por lo regular van desde 7 días hasta un máximo de 728 días, siendo los más populares los de 28 y 91 días[3], la metodología general para valorar los *cetes* es la siguiente:

$$P = \frac{VN}{(1 + \frac{rt}{360})}$$

donde:

P = precio del *cete*

VN = valor nominal del título

r = tasa de rendimiento

t = plazo en días

Si b es la tasa de descuento de un *cete*, se tiene

[3]banxico.org.mx

$$b = \frac{r}{1 + \frac{r \cdot t}{360}}.$$

Por otro lado en operaciones financieras con activos a corto plazo con venta en el mercado (esto en su mayoría para tener liquidez), u operaciones con pacto de re compra (prestamos simples con la garantía de un activo financiero subyacente, por ejemplo cetes, pagaré) en donde se mantiene el título hasta el vencimiento, se utiliza la misma fórmula de valuación, pero a diferencia de los *cetes* pueden existir otras características como comisiones de intermediación, retenciones sobre la plusvalía generada, pago de impuestos, etc.

1.11. Los mercados financieros de tipo bonos y obligaciones.

Un bono u obligación (en el caso de una empresa) es aquel instrumento financiero que paga intereses en intervalos de tiempo. Las partes esenciales de un bono están conformadas por la fecha de emisión, el valor nominal, y el valor de redención. Una característica de los bonos es que se pueden negociar en cualquier momento en el mercado de valores (comprados o vendidos). El precio de mercado es aquel que pagará el inversionista por la compra del título **a la par**, (que el precio del mercado sea igual al valor de redención) **sobre la par** (con premio) o **bajo la par** (si se paga un precio menor al valor de redención). Y se expresa por

$$PM = F(1+r)^{-n} + I[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}]$$

donde:

PM = precio de mercado

F = valor de redención

r = tasa de interés deseada por el inversionista

I = tasa de interés del cupón

$-n$ = frecuencia de pago de los intereses del cupón.

Es posible calcular una tasa de rendimiento aproximada utilizando

$$r = \frac{2[(I)(n) + F - PM]}{h(F + PM)}.$$

1.12. Los mercados financieros de tipo acciones.

Los mercados de renta variable permiten a las empresas poder financiarse a través de títulos que emiten. Por otro lado, es importante hacer mención que, valorar una acción sería el equivalente a valorar una compañía (métodos basados en el valor patrimonial, en los dividendos, en el descuento de flujos de fondo), pero de este tipo de valuación se encargan las finanzas corporativas. La parte que corresponde para el análisis de los activos financieros está enfocada en la rentabilidad y riesgo en la teoría de la selección de portafolios de inversión.

Llamemos un portafolio a la combinación de activos individuales con determinada distribución expresado por

$$R_p = W_1 R_1 + W_2 R_2 + ... + W_N R_N = \sum_{i=1}^{N} W_i R_i$$

donde:

R_p = rendimiento del portafolio

W_i = valor que se da a cada activo i

R_i = rendimiento del valor i

N = número de activos

entonces, el riesgo que se asume se relaciona con la varianza del rendimiento del portafolio R_p.

$$V(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} W_i W_j \sigma_{ij}$$

en donde:

$V(R_p)$ = varianza del rendimiento del portafolio

σ_i^2 = varianza del rendimiento del título i para $i = 1, ..., N$

$\sigma ij = \sigma ji$ = covarianza de los rendimientos de los activos i y j con $i = 1, ..., N$ y $j = 1, ..., N$.

Una vez entendiendo la relación que hay entre la rentabilidad esperada y su riesgo, podemos concluir que los activos con mayor riesgo, será mayor su rentabilidad, utilizando la teoría de selección de portafolios desarrollada por Markowitz, la cual se basa en la relación entre rentabilidad y riesgo, en la cual se pretende minimizar el riesgo dado un valor de rentabilidad esperado, es decir,

$$Min \ \ \sigma_p^2 = \sum_{i} \sum_{j} X_i X_j \sigma_{ij}$$

$$Ep = \sum_{i=1}^{N} X_i E_i$$

$$X_1 + ... + X_N = 1$$

$$X_1 + ... + X_N \geq 0$$

donde:

X_i = peso de cada valor en el portafolio P

E_i = esperanza del rendimiento del activo i o del portafolio P.

La solución de este problema nos presentara una estructura de portafolio X_i para cada nivel de riesgo asumido.

Por otro lado, es importante resaltar que otra manera de obtener la varianza, es decir, el riesgo que asumimos y que ayuda a ver de una manera más clara las relaciones entre los activos que conforman el portafolio es por medio de la sustitución de las covarianzas por los coeficientes de correlación expresados por P_{ij}, entendiendo un valor normalizado entre -1 y 1 es decir,

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

1.13. Los mercados financieros de productos derivados.

A lo largo del capítulo se ha estado dando una breve descripción sobre los mercados financieros, y para este punto se podría decir que los mercados se resumen en dos tipos distintos, es decir, el conformado por los activos subyacentes como acciones, bonos, materias primas (commodities), tipos de cambio, y el mercado de derivados.

Entonces, un producto financiero **derivado** es un instrumento el cual basa su valor en el precio de otro instrumento.

Al hacer uso de los productos derivados, siempre se pretenderá trabajar con la menor cantidad de riesgo, o dicho en otras palabras, el evitar caer en un incumplimiento de contrato, ya sea para pagar por el activo o la venta de este mismo. En este contexto, se hace mención del concepto de *arbitraje* el cual es una estrategia en el mercado de opciones por lo regular, y significa poder asegurar una ganancia (*payoff*) sin riesgo al momento de realizar transacciones simultaneas en dos o más mercados. De forma general la estrategia del arbitraje para el precio de un futuro sería representado por la fórmula siguiente:

$$F_{tT} = P_t(1 + r_{tT} \frac{dias_{tT}}{360})$$

donde:

F_{tT} = precio del futuro en el instante t con un vencimiento en T

P_t = precio del activo subyacente en t

r_{tT} = tipo de interés vigente entre t y T

Un contrato **forward** es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo subyacente en una fecha futura a un precio pactado (*precio de ejercicio*) el día que se realiza el contrato. La parte que posee el *forward* y entra al contrato buscando comprar el activo subyacente está adquiriendo una *posición larga*. Y si la parte que emite el contrato y tiene que vender el activo subyacente está se dice que esta adquiriendo una *posición corta*.

Supongamos que hoy realizamos un contrato *forward*, entonces $t = 0$, S_t el precio del activo subyacente en tiempo t y sea K el precio de ejercicio (*strike*) con $T > t$ como la fecha de ejercicio del contrato, entonces el *payoff*:

- para la posición larga: $S_T - K$
- para la posición corta: $K - S_T$

Una **opción** es un contrato entre dos partes, el cual otorga al comprador de la opción el derecho más no la obligación de comprar o vender en un futuro (fecha de ejercicio T) el activo subyacente a un precio pactado (precio de ejercicio K) desde un inicio.

- Se dice que una **opción** es del tipo **call** si el comprador desea adquirir el derecho de comprar el activo subyacente, siempre y cuando le convenga.
- Se dice que una **opción** es del tipo **put** si el comprador desea adquirir el derecho de vender el activo subyacente, siempre y cuando le convenga.

Por otra parte, si la opción se puede ejercer en cualquier momento desde la fecha de su adquisición hasta la fecha de ejercicio, se dice que es una **opción americana**. Por el contrario, si la opción solo se puede ejercer una única vez (fecha de ejercicio), se llamará **opción europea**.

Payoff para call y put

Para CALL con fecha de ejercicio T y precio de ejercicio K

$$Payoff_{CALL} = máx\{S_T - K, 0\} = \begin{Bmatrix} S_T - K & \text{si} & S_T \geq K \\ 0 & \text{si} & S_T < K \end{Bmatrix}.$$

Para PUT con fecha de ejercicio T y precio de ejercicio K

$$Payoff_{PUT} = máx\{K - S_T, 0\} = \begin{Bmatrix} K - S_T & \text{si} & S_T \leq K \\ 0 & \text{si} & S_T > K \end{Bmatrix}.$$

Paridad Put-Call, en un activo que no paga dividendos. Si se tiene un activo que no paga dividendos, entonces se cumple la siguiente relación

$$C + B(t,T)K = P + S$$

donde:

Da lo mismo tener una opción de compra y el valor presente del strike, que tener la acción y la opción para venderla al valor K.

$B(t,T)K =$ es el valor en el tiempo multiplicado por el precio de ejercicio K.

Capítulo 2

El Modelo Binomial.

2.1. Definición de árbol binomial.

En el capítulo anterior se examinaron algunos tipos de mercados y algunas estrategias con opciones (el arbitraje). Bien se pudo observar que los activos subyacentes contienen opciones implícitas que están sumamente relacionadas y por lo tanto modifican a su valor, como a sus características de riesgo y rentabilidad. Es por esto que el modelo binomial (*Cox-Ross-Rubinstein)(1979)* será una herramienta que ayudará a comprender la teoría de probabilidad y el arbitraje, que a su vez da esas características *riesgo-rentabilidad* ya previamente mencionadas. El modelo binomial para la valoración de opciones está basado en la hipótesis de que los precios de las acciones se pueden mover sólo hasta dos valores futuros durante periodos cortos de tiempo, cumpliendo los límites de valor de una *CALL*, un supuesto adicional sobre la evolución del precio del subyacente, resumiendo:

- La eficiencia y profundidad de los mercados.
- La ausencia de costes de transacción.
- Es posible comprar y vender en descubierto, sin límite.
- Los activos son perfectamente divisibles.
- Se puede prestar y tomar prestado al mismo tipo de interés.
- Todas las transacciones se pueden realizar de forma simultánea.
- El precio del subyacente evoluciona según un proceso binomial multiplicativo.

Definición 2.1 Sea un activo con precio S en t, cuyo valor en T puede ser uS con probabilidad q y dS con probabilidad $1-q$. Denominaremos $\widehat{r} : (1+r_f)$ donde r_f es la rentabilidad del activo libre de riesgo, verificando en un principio que: $u > \widehat{r} > d$.

Supongamos que tenemos una opción de compra europea con vencimiento a un periodo T y con un precio de ejercicio K.

Entonces los valores al vencimiento de la opción son:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & C_u \text{ con probabilidad } q \\
C \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & C_d \text{ con probabilidad } 1-q
\end{tikzcd}$$

Para este tipo de mercado se puede construir un portafolio de arbitraje con:

- La venta de una opción de compra (posición corta).
- La compra de H acciones (posición larga) o viceversa. H es el ratio de cobertura de la posición en opciones.

Entonces el valor de la cartera tendrá los siguientes cambios:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & HuS - C_u \text{ con probabilidad de } q \\
HS - C \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & HdS - C_d \text{ con probabilidad de } 1-q
\end{tikzcd}$$

H tiene un valor único, el cual hace que el valor de la cartera también sea único al final del periodo.

$$HuS - C_u = Hds - C_d$$

despejando H,

Nota:

- *u representa el movimiento multiplicativo al alza del precio del subyacente en un periodo, con una probabilidad asociada a q.*

- *d representa el movimiento multiplicativo a la baja del precio del subyacente en un periodo, con una probabilidad asociada de (1-q).*

$$H = \frac{C_u - C_d}{(u-d)\cdot S} \tag{2.1}$$

Y con relación al activo libre de riesgo, la cartera también debe cumplir con la siguiente igualdad:

$$HS - C = \frac{HuS - C_u}{\hat{r}} = \frac{HdS - C_d}{\hat{r}}.$$

Su rentabilidad debe coincidir con la rentabilidad del activo libre de riesgo, despejando C:

$$C = \frac{\hat{r}HS - HuS + C_u}{\hat{r}} = \frac{1}{\hat{r}}[HS(\hat{r}-u) + C_u]$$

despejando H por su valor en 2.1

$$C = \frac{1}{\hat{r}}[\frac{C_u - C_d}{u-d}\cdot(\hat{r}-u) + C_u],$$

entonces,

$$C = \frac{1}{\hat{r}}[C_u \cdot \frac{\hat{r}-d}{u-d} + C_d \cdot \frac{u-\hat{r}}{u-d}]$$

llamamos p al cociente

$$p = \frac{\hat{r}-d}{u-d},$$

entonces,

$$1-p = 1 - \frac{\hat{r}-d}{u-d} = \frac{u-\hat{r}}{u-d}$$

$$C = \frac{1}{\hat{r}}\cdot[p\cdot C_u + (1-p)\cdot C_d] \tag{2.2}$$

Si C es el precio de una *call* con un precio strike K. El precio del *call* es C_u o C_d dependiendo como se mueva el precio S.

$$C_u = MAX[0, uS - K]$$

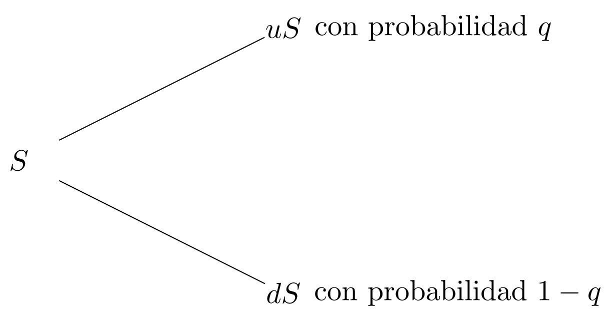
$$C_d = MAX[0, dS - K].$$

Es decir, la expresión anterior nos proporciona un método para valorar una opción de compra europea de un periodo.

Como indica *Lamothe Fernández (2003)* tenemos las siguientes conclusiones para una **opción call europea**:

- La probabilidad no interviene en la fórmula de valoración de la opción.
- El valor de C no depende del riesgo del mercado, sino del carácter aleatorio de la evolución de los precios del subyacente.
- El valor de C no depende de la actitud de los inversionistas ante el riesgo, ya que no incluye ningún parámetro que se asocie con este factor. Por lo tanto, se puede admitir la evolución de una opción, asumiendo arbitrariamente la hipótesis de neutralidad del inversos ante el riesgo.

La demostración para esta hipótesis, en que $p = q$, tenemos:



Entonces, si el inversor es neutro al riesgo, el rendimiento esperado de la acción debe ser igual a la tasa de rentabilidad del activo libre de riesgo:

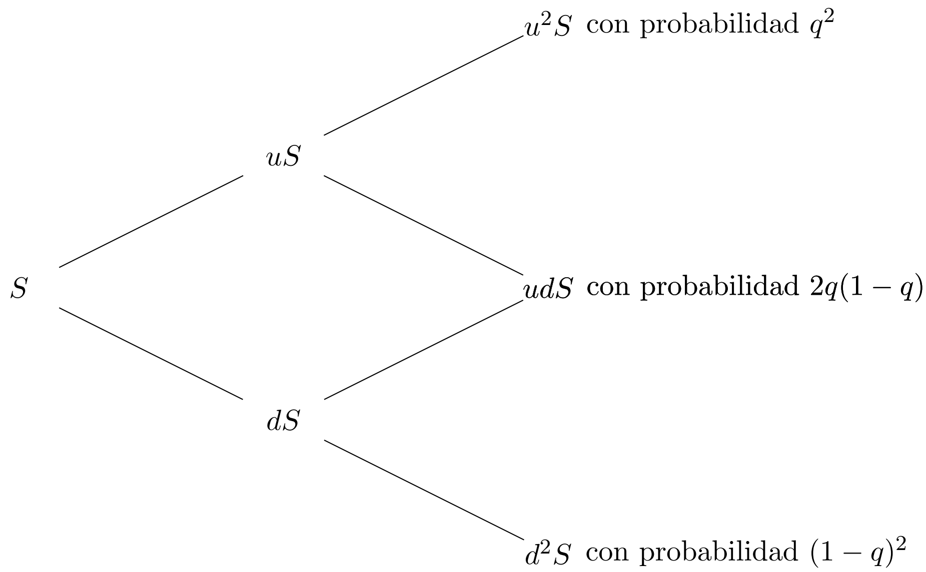
$$quS + (1 - q)dS = \hat{r} \cdot S$$

$$q = \frac{\hat{r} - d}{u - d} = p$$

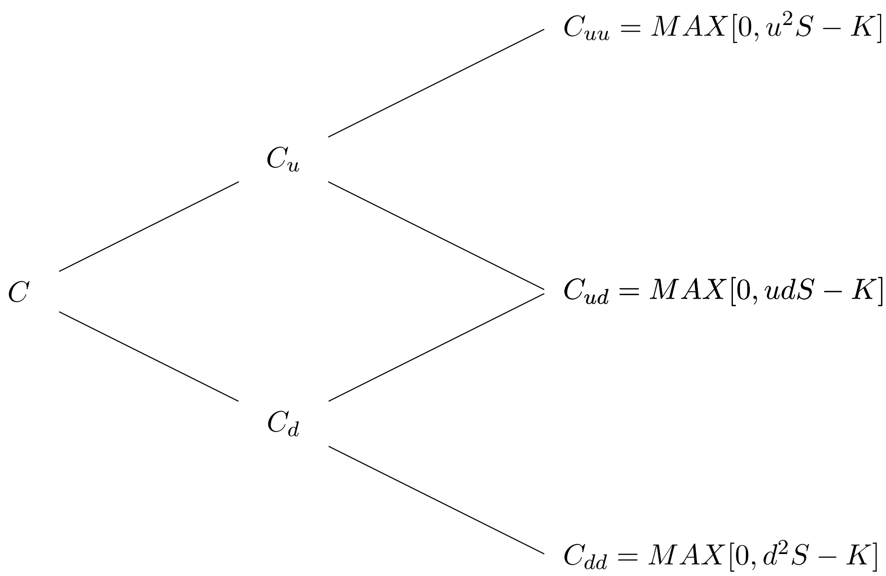
†

2.2. Extensión a 2 periodos en opciones call europeas.

Ahora, si se agregan dos periodos al árbol tendremos que el precio del subyacente será:



El diagrama de evolución del valor de la opción sería:



Para dos periodos aplicaremos el mismo método de valoración que para el de un solo periodo, trabajando primero con las dos ramas superiores del árbol, teniendo:

$$\begin{tikzcd} & u^2S \\ uS \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & udS \end{tikzcd}$$

y de la opción

$$\begin{tikzcd} & C_{uu} \\ C_u \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & C_{ud} \end{tikzcd}$$

De igual manera construyendo un portafolio de arbitraje:

- Vendiendo una opción
- Comprando H unidades del subyacente, o viceversa.

El desarrollo del portafolio es el siguiente:

$$\begin{tikzcd} & Hu^2S - C_{uu} \\ HuS - C_u \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & HudS - C_{ud} \end{tikzcd}$$

H cumpliendo la siguiente igualdad

$$Hu^2S - C_{uu} = HudS - C_{ud}$$

entonces,

$$H = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{(u-d)uS}.$$

El portafolio de arbitraje debe de proporcionar un rendimiento equivalente a la rentabilidad del activo libre de riesgo.

$$HuS - C_u = \frac{Hu^2S - C_{uu}}{\hat{r}} = \frac{HudS - C_{ud}}{\hat{r}}$$

sustituyendo H por su valor y despejando C_u.

$$C_u = \frac{1}{\hat{r}}[p \cdot C_{uu} + (1-p)C_{ud}] \tag{2.3}$$

con

$$p = \frac{\hat{r} - d}{u - d}.$$

De forma análoga, estando en t_1 y para un valor del subyacente de dS, obtenemos:

$$C_d = \frac{1}{\hat{r}}[p \cdot C_{ud} + (1-p)C_{dd}]. \tag{2.4}$$

Sustituyendo 2.3 y 2.4 en 2.2, es decir, en

$$C = \frac{1}{\hat{r}} \cdot [p \cdot C_u + (1-p) \cdot C_d]$$

se obtiene

$$C = \frac{1}{\hat{r}^2}[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}]$$

y

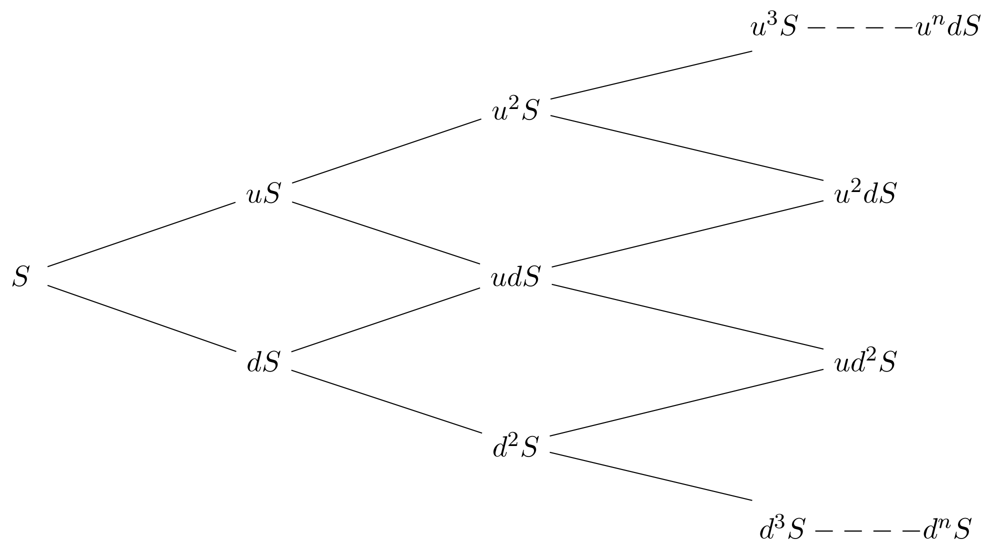
$$C = \frac{1}{\hat{r}^2}[p^2 MAX[0, u^2S - K] + 2p(1-p)MAX[0, udS - K] + (1-p)^2 MAX[0, d^2S - K]. \tag{2.5}$$

Tenemos el valor de una opción *call* europea en el método binomial para dos periodos.

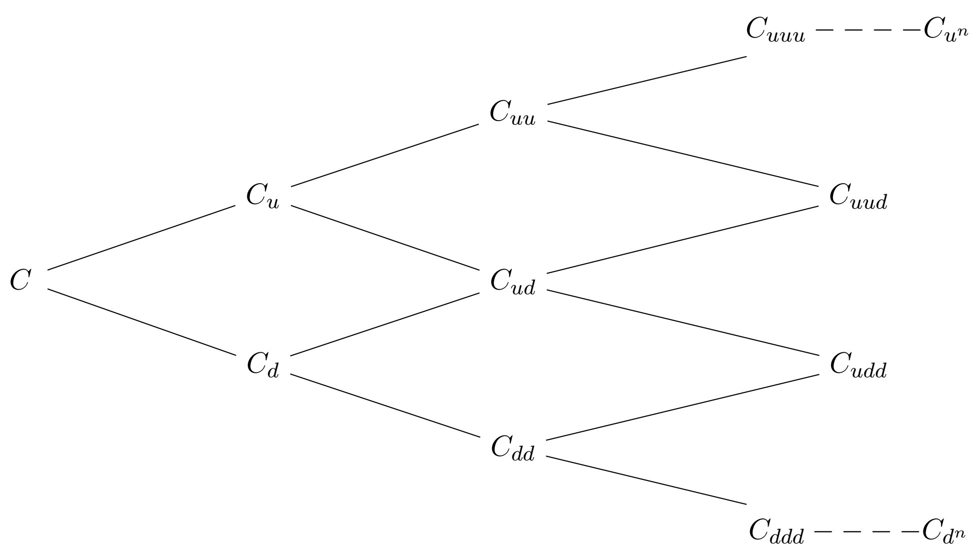
2.3. Generalización para n periodos en opciones call europeas.

En n periodos los diagramas de evolución de los precios del subyacente y del valor de la opción serían los siguientes,

Para activo subyacente:



Para el valor de compra de una opción



$$C_{u^n} = MAX[0, u^nS - K]$$
$$C_{d^n} = MAX[0, d^nS - K]$$

Para la valoración de la opción se tiene que:

(i) Calcular los valores intrínsecos al final de los n periodos y calcular el valor de la opción en cada nodo del diagrama mediante la siguiente expresión:

$$C_{t-1} = \frac{1}{\hat{r}}[p \cdot C_{tu} + (1-p)C_{td}]$$

donde:

p y $\hat{r}$ = los mismos valores antes mencionados (*probabilidad*) y (*rentabilidad*)

C_{t-1} = valor de la opción en un nodo de $t-1$

C_{tu} = valor opción en t, cuando el precio del subyacente se multiplica por u desde $t-1$ a t.

C_{td} = valor opción en t, cuando el precio del subyacente se multiplica por d, desde $t-1$ a t.

(ii) Por medio de la ecuación 2.5 llegamos a la fórmula general de evaluación de una opción de compra europea para n periodos.

$$C = \frac{1}{\hat{r}^n}[\sum_{i=0}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p^j \cdot (1-p)^{n-j} MAX(0, u^j d^{n-j} \cdot S - K)]$$

con

$$p = \frac{\hat{r}-d}{u-d}$$

$$\hat{r} = 1 + r_f$$

r_f rentabilidad del activo libre de riesgo y con n periodos considerados para la valoración.

2.4. Valoración de opciones put europeas.

De manera análoga se puede evaluar una opción en venta e igualmente constituyendo un portafolio de arbitraje con posiciones largas y cortas en acciones y opciones en función al precio de su activo subyacente.

Tenemos entonces:

$$\begin{tikzcd} & P_u = MAX[0, K-uS] \text{ con probabilidad de } q \\ P \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & P_d = MAX[0, K-dS] \text{ con probabilidad de } 1-q \end{tikzcd}$$

Formando el portafolio de arbitraje con H' unidades del subyacente y una opción de venta, su evolución es:

$$H'uS + P_u \text{ con probabilidad } q$$

$$H'S + P$$

$$H'dS + P_d \text{ con probabilidad } 1 - q$$

H' cumpliendo la igualdad

$$H'uS + P_u = H'dS + P_d$$

Despejando H'

$$H' = \frac{P_d - P_u}{(u - d)S}$$

cumpliendo

$$H'S + P = \frac{H'uS + P_u}{\hat{r}} = \frac{H'dS + P_d}{\hat{r}}$$

sustituyendo H' y reduciendo

$$P = \frac{1}{\hat{r}}[P_u \cdot \frac{\hat{r} - d}{u - d} + P_d \cdot \frac{u - \hat{r}}{u - d}]$$

por lo tanto,

$$P = \frac{1}{\hat{r}}[p \cdot P_u + (1 - p)P_d]$$

donde,

$$P_u = MAX[0, K - uS] \quad \text{y} \quad P_d = MAX[0, K - dS]$$

expresando el valor de una opción put europea para n periodos se tiene:

$$P = \frac{1}{\hat{r}^n}[\sum_{j=0}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p^j \cdot (1-p)^{n-j} MAX(0, K - u^j d^{n-j} \cdot S)]. \tag{2.6}$$

Y de igual manera que en una opción de compra, en el caso de la opción *put* se puede calcular los valores intrínsecos en el último periodo y "retrocediendo" en el tiempo calcular los diferentes Pi con la expresión:

$$P_{t-1} = \frac{1}{\hat{r}}[p \cdot P_{tu} + (1-p)P_{td}].$$

Por otro lado, sabiendo la paridad *put-call* en términos del modelo binomial, queda expresado como:

$$C = P + S - \frac{K}{\hat{r}^n}$$

despejando P

$$P = C - S + \frac{K}{\hat{r}^n}.$$

Y de esta manera reducir el número de operaciones como se hacen en la fórmula 2.6 para obtener el valor de una *put*.

2.5. Uso de la hoja de cálculo para evaluar opciones.

En la siguiente sección para fines prácticos y didácticos se da un ejemplo del uso de una hoja de cálculo para la construcción de un modelo binomial [1] para la evaluación de opciones *call* y *put* de tipo *europeas*, en este caso el ejemplo representa tanto el precio del subyacente S y la evolución del valor de la opción en $n = 6$ periodos con un precio del activo subyacente de $S = 100u.m$, un precio de ejercicio de la opción (*strike*) de $K = 100u.m$, con un movimiento multiplicativo al alza $u = 1.2$ un movimiento multiplicativo a la baja $d = 0.8$ y un tipo de interés r anual del 10 %.

donde:

VARIABLES

- Número de períodos (no más de 6): 6 (valor propuesto por el usuario)
- Precio del activo subyacente: 100.00 (valor propuesto por el usuario)
- Precio de ejercicio: 100.00 (valor puesto por el usuario)
- Tasa de interés sin riesgo a corto plazo: 0.02 (valor propuesto por el usuario) poniendo a lado(=1+B9)
- Movimiento multiplicativo al alza: 1.2 (valor propuesto por el usuario)

[1] Como referencia se dejan las formulas utilizadas para la construcción de dicho árbol.

- Movimiento multiplicativo a la baja: 0.8 (valor propuesto por el usuario)
- Probabilidad de subida: 0.55 ($= (C9 - B11)/(B10 - B11)$)
- Probabilidad de bajada: 0.45 ($= 1 - B12$)

PERIODOS

- (0) 0
- (1) =SI(B14<$B$6,B14+1,""))
- (2) =SI(C14="","",SI(C14<$B$6,C14+1,"")))
- (3) =SI(D14="","",SI(D14<$B$6,D14+1,"")))
- (4) =SI(E14="","",SI(E14<$B$6,E14+1,"")))
- (5) =SI(F14="","",SI(F14<$B$6,F14+1,"")))
- (6) =SI(G14="","",SI(G14<$B$6,G14+1,"")))

Para la evolución del precio del subyacente:

- Periodo 0
  - =B7
- Periodo 1
  - =B21*$B$10
  - =B21*$B$11
- Periodo 2
  - =SI(D14="","",+ $B$21* $B$10^2)
  - =SI(D14="","",$B$21*$B$10*$B$11)
  - =SI(D14="","",+$B$21*$B$11^2)
- Periodo 3
  - =SI(E14="","",+$B$21*$B$10^3)
  - =SI(E14="","",$B$21*$B$10^2*$B$11)
  - =SI(E14="","",$B$21*$B$10^2*$B$11)
  - =SI(E14="","",+$B$21*$B$11^3)
- Periodo 4

- =SI(F14="","",+$B$21*$B$10^4)
- =SI(F14="","",$B$21*$B$10^3*$B$11)
- =SI(F14="","",$B$21*$B$10^2*$B$11^2)
- =SI(F14="","",$B$21*$B$10*$B$11^3)
- =SI(F14="","",+$B$21*$B$11^4)

- Periodo 5
  - =SI(G14="","",+$B$21*$B$10^5)
  - =SI(G14="","",$B$21*$B$10^4*$B$11)
  - =SI(G14="","",$B$21*$B$10^3*$B$11^2)
  - =SI(G14="","",$B$21*$B$10^2*$B$11^3)
  - =SI(G14="","",$B$21*$B$10*$B$11^4)
  - =SI(G14="","",+$B$21*$B$11^5)
- Periodo 6
  - =SI(H14="","",+$B$21*$B$10^6)
  - =SI(H14="","",$B$21*$B$10^5*$B$11)
  - =SI(H14="","",$B$21*$B$10^4*$B$11^2)
  - =SI(H14="","",$B$21*$B$10^3*$B$11^3)
  - =SI(H14="","",$B$21*$B$10^2*$B$11^4)
  - =SI(H14="","",$B$21*$B$10*$B$11^5)
  - =SI(H14="","",+$B$21*$B$11^6)

Para la evolución del valor de la opción call:

- Periodo 0
  - =1/$C$9*($B$12*C21+$B$13*C24)
- Periodo 1
  - =SI($C$14="","",SI($C$14=$B$6,SI(C20-$B$8>0,C20-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*D20+$B$13*D23)))
  - =SI($C$14="","",SI($C$14=$B$6,SI(C23-$B$8>0,C23-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*D23+$B$13*D26)))
- Periodo 2
  - =SI($D$14="","",SI($D$14=$B$6,SI(D19-$B$8>0,D19-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*E19+$B$13*E22)))

    - =SI($D$14="","",SI($D$14=$B$6,SI(D22-$B$8>0,D22-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*E22+$B$13*E25)))
    - =SI($D$14="","",SI($D$14=$B$6,SI(D25-$B$8>0,D25-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*E25+$B$13*E28)))

- Periodo 3
    - =SI($E$14="","",SI($E$14=$B$6,SI(E18-$B$8>0,E18-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*F18+$B$13*F21)))
    - =SI($E$14="","",SI($E$14=$B$6,SI(E21-$B$8>0,E21-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*F2—+$B$13*F24)))
    - =SI($E$14="","",SI($E$14=$B$6,SI(E24-$B$8>0,E24-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*F24+$B$13*F27)))
    - =SI($E$14="","",SI($E$14=$B$6,SI(E27-$B$8>0,E27-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*F27+$B$13*F30)))

- Periodo 4
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI(F17-$B$8>0,F17-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*G17+$B$13*G20)))
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI(F20-$B$8>0,F20-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*G20+$B$13*G23)))
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI(F23-$B$8>0,F23-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*G23+$B$13*G26)))
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI(F26-$B$8>0,F26-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*G26+$B$13*G29)))
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI(F29-$B$8>0,F29-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*G29+$B$13*G32)))

- Periodo 5
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI(G16-$B$8>0,G16-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*H16+$B$13*H19)))
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI(G19-$B$8>0,G19-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*H19+$B$13*H22)))
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI(G22-$B$8>0,G22-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*H22+$B$13*H25)))
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI(G25-$B$8>0,G25-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*H25+$B$13*H28)))
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI(G28-$B$8>0,G28-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*H28+$B$13*H31)))

  - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI(G31-$B$8>0,G31-$B$8,0), 1/$C$9*($B$12*H31+$B$13*H34)))

- Periodo 6
  - =SI($H$14="","",SI(H15-$B$8>0,H15-$B$8,0))
  - =SI($H$14="","",SI(H18-$B$8>0,H18-$B$8,0))
  - =SI($H$14="","",SI(H21-$B$8>0,H21-$B$8,0))
  - =SI($H$14="","",SI(H24-$B$8>0,H24-$B$8,0))
  - =SI($H$14="","",SI(H27-$B$8>0,H27-$B$8,0))
  - =SI($H$14="","",SI(H30-$B$8>0,H30-$B$8,0))
  - =SI($H$14="","",SI(H33-$B$8>0,H33-$B$8,0))

Para la evolución del valor de la opción put:

- Periodo 0
  - =1/$C$9*($B$12*C22+$B$13*C25)
- Periodo 1
  - =SI($C$14="","",SI($C$14=$B$6,SI($B$8-C20>0,$B$8-C20,0), 1/$C$9*($B$12*D21+$B$13*D24)))
  - =SI($C$14="","",SI($C$14=$B$6,SI($B$8-C23>0,$B$8-C23,0), 1/$C$9*($B$12*D24+$B$13*D27)))
- Periodo 2
  - =SI($D$14="","",SI($D$14=$B$6,SI($B$8-D19>0,$B$8-D19,0), 1/$C$9*($B$12*E20+$B$13*E23)))
  - =SI($D$14="","",SI($D$14=$B$6,SI($B$8-D22>0,$B$8-D22,0), 1/$C$9*($B$12*E23+$B$13*E26)))
  - =SI($D$14="","",SI($D$14=$B$6,SI($B$8-D25>0,$B$8-D25,0), 1/$C$9*($B$12*E26+$B$13*E29)))
- Periodo 3
  - =SI($E$14="","",SI($E$14=$B$6,SI($B$8-E18>0,$B$8-E18,0), 1/$C$9*($B$12*F19+$B$13*F22)))
  - =SI($E$14="","",SI($E$14=$B$6,SI($B$8-E21>0,$B$8-E21,0), 1/$C$9*($B$12*F22+$B$12*F25)))
  - =SI($E$14="","",SI($E$14=$B$6,SI($B$8-E24>0,$B$8-E24,0), 1/$C$9*($B$12*F25+$B$13*F28)))

- =SI($E$14="","",SI($E$14=$B$6,SI($B$8-E27>0,$B$8-E27,0), 1/$C$9*($B$12*F28+$B$13*F31)))

- Periodo 4
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI($B$8-F17>0,$B$8-F17,0), 1/$C$9*($B$12*G18+$B$13*G21)))
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI($B$8-F20>0,$B$8-F20,0), 1/$C$9*($B$12*G21+$B$13*G24)))
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI($B$8-F23>0,$B$8-F23,0), 1/$C$9*($B$12*G24+$B$13*G27)))
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI($B$8-F26>0,$B$8-F26,0), 1/$C$9*($B$12*G27+$B$13*G30)))
    - =SI($F$14="","",SI($F$14=$B$6,SI($B$8-F29>0,$B$8-F29,0), 1/$C$9*($B$12*G30+$B$13*G33)))

- Periodo 5
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI($B$8-G16>0,$B$8-G16,0), 1/$C$9*($B$12*H17+$B$13*H20)))
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI($B$8-G19>0,$B$8-G19,0), 1/$C$9*($B$12*H20+$B$13*H23)))
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI($B$8-G22>0,$B$8-G22,0), 1/$C$9*($B$12*H23+$B$13*H26)))
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI($B$8-G25>0,$B$8-G25,0), 1/$C$9*($B$12*H26+$B$13*H29)))
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI($B$8-G28>0,$B$8-G28,0), 1/$C$9*($B$12*H29+$B$13*H32)))
    - =SI($G$14="","",SI($G$14=$B$6,SI($B$8-G31>0,$B$8-G31,0), 1/$C$9*($B$12*H32+$B$13*H35)))

- Periodo 6
    - =SI($H$14="","",SI($B$8-H15>0,$B$8-H15,0))
    - =SI($H$14="","",SI($B$8-H18>0,$B$8-H18,0))
    - =SI($H$14="","",SI($B$8-H21>0,$B$8-H21,0))
    - =SI($H$14="","",SI($B$8-H24>0,$B$8-H24,0))
    - =SI($H$14="","",SI($B$8-H27>0,$B$8-H27,0))
    - =SI($H$14="","",SI($B$8-H30>0,$B$8-H30,0))
    - =SI($H$14="","",SI($B$8-H33>0,$B$8-H33,0))

VALORACIÓN DE OPCIONES TIPO EUROPEA
MODELO BINOMIAL MULTIPERIODO

VARIABLES		
Número de períodos (no más de 6):	6	
Precio del activo subyacente:	100.00	
Precio de ejercicio:	100.00	
Tasa de interés sin riesgo a corto plazo:	0.02	1.02
Movimiento multiplicativo al alza:	1.2	
Movimiento multiplicativo a la baja:	0.8	
Probabilidad de subida:	0.55	
Probabilidad de bajada:	0.45	

PERÍODOS	0	1	2	3	4	5	6
							298.60
						248.83	198.60
					207.36	150.79	0.00
				172.80	111.24	0.00	199.07
			144.00	79.56	0.00	165.89	99.07
		120.00	55.30	0.99	138.24	67.85	0.00
Evolución del precio del subyacente:	100.00	37.51	3.69	115.20	44.37	0.00	132.71
Evolución del valor de la opción call:	24.91	8.08	96.00	28.12	2.24	110.59	32.71
Evolución del valor de la opción put:	13.71	80.00	17.42	7.15	92.16	17.64	0.00
		10.62	13.81	76.80	9.51	5.09	88.47
		21.19	64.00	5.13	13.47	73.73	0.00
			2.77	22.56	61.44	0.00	11.53
			31.15	51.20	0.00	24.31	58.98
				0.00	34.68	49.15	0.00
				43.03	40.96	0.00	41.02
					0.00	48.89	39.32
					55.16	32.77	0.00
						0.00	60.68
						65.27	26.21
							0.00
							73.79

Capítulo 3

El modelo de Black and Scholes.

3.1. Derivación del modelo Black and Scholes a partir del modelo binomial.

A lo largo de los dos capítulos anteriores se ha estado trabajando con elementos que en este punto se verá como pueden converger en una ecuación matemática, que con ciertas condiciones nos permite valorar opciones de tipo europeas. Es por esto, que es importante tener presentes todos los conceptos previamente mencionados, ya que serán básicos para la valoración con las condiciones en las que se basa dicha fórmula.

Es muy cierto que le modelo binomial es sumamente dinámico, pero se deduce que, para tener resultados útiles en la práctica, por lo regular se construyen árboles de 50 periodos, como lo mencionan algunos especialistas (Lamothe, 2003) en sus trabajos, lo cual requiere de un software para que los resultados sean útiles. Por esto será más sencillo el utilizar una fórmula que pueda valorar las opciones y que a su vez esta fórmula se pueda deducir con dos hipótesis, es decir, el tipo de interés libre de riesgo y que la volatilidad del precio de la acción sea constante durante la vida de la opción.

Es importante hacer mención que para el siguiente modelo existen varios caminos para su obtención, por ejemplo, en la sección 3.3 se verá uno más a través del cálculo estocástico. Pero, por fines relacionados a la enseñanza y ya habiendo trabajado el modelo binomial se podrá llegar a la fórmula de la solución de la ecuación **Black and Scholes** para las opciones *call* y *put*, esto construyendo un portafolio de arbitraje y calculando las condiciones de equilibrio de una opción call o de una opción put. Por lo tanto, en el modelo binomial para n periodos y después de estos n periodos la probabilidad de tener j resultados a favor (multiplicamos por u) del precio del subyacente es:

$$\frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot q^j \cdot (1-q)^{n-j},$$

donde j puede variar de 0 a n. Y la suma de estas probabilidades debe ser igual a 1, es decir:

$$\sum_{j=0}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})q^j(1-q)^{n-j}=1$$

extendiendo la probabilidad de tener al alza el precio del subyacente después de n periodos es:

$$PROB[Precio\ subyacente \geq d^{n-a}u^aS]=\sum_{j=a}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})q^j(1-q)^{n-j},$$

siendo el inversor neutro al riesgo

$$q=p=\frac{\hat{r}-d}{u-d} \tag{3.1}$$

definiendo

$$Z(a;n,p)=\sum_{j=a}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!}q^j(1-q)^{n-j}.$$

Donde $Z(a;n,p)$ es la función de distribución binomial que nos da la probabilidad acumulada del número a de alzas para el precio del subyacente en n periodos cuando hay una probabilidad p de alza de precio de un periodo a otro. Recordando que para una opción call, la condición necesaria para que la opción esté dentro de dinero[1] (ATM).

$$u^a \cdot d^{n-a} \cdot S > K$$

despejando a

$$a>\frac{ln(\frac{K}{S}\cdot\frac{1}{d^n})}{ln(\frac{u}{d})},$$

donde:

$ln()$ = logaritmo natural.

Como a debe ser entero, tomamos a = el número entero mínimo de alzas para que la opción esté dentro de dinero.

[1] *at the money* (ATM) si su precio de ejercicio (strike), es decir, el precio que el poseedor debe pagar para ejercer su derecho, es el mismo que el precio al contado del subyacente o precio de mercado sobre el que la opción está basada.

Entonces:

Para

$$j < a,\ MAX[0, u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K] = 0$$

opción fuera de dinero.

Para

$$j \geq a,\ MAX[0, u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - K] > 0$$

opción dentro de dinero.

Si $a > n$, la opción al vencimiento estará siempre fuera de dinero, por lo tanto $C = 0$.

Vemos entonces como el valor de a juega un papel importante para calcular el valor de una opción.

Con base a estas condiciones, la forma general del modelo binomial se puede expresar de la siguiente manera:

$$C = \frac{1}{\hat{r}^n}\{\sum_{i=a}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p^j(1-p)^{n-j}[u^j \cdot d^{n-j}S - K]\}$$

desarrollando

$$C = S\{\sum_{j=a}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p^j(1-p)^{n-j}(\frac{u^j \cdot d^{n-j}}{\hat{r}^n})\} - K \cdot \frac{1}{\hat{r}^n}\{\sum_{j=a}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p^j(1-p)^{n-j}\}. \quad (3.2)$$

Se puede observar que la segunda expresión entre llaves de la ecuación 3.2 es la función de distribución de la ley binomial. Entonces, haciendo

$$p' = \frac{u}{\hat{r}} \cdot p,$$

usando la fórmula 3.1, $1 - p$ se expresa de la siguiente forma:

$$1 - p' = \frac{d}{\hat{r}}(1 - p)$$

sustituyendo a p y $(1 - p)$ por

$$p'\frac{\hat{r}}{u} \quad \text{y} \quad (1 - p')\frac{\hat{r}}{d}.$$

Se tiene que el primer termino de 3.2 es

$$S\{\sum_{j=a}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})p'^j(1-p')^{n-j}\} = S \cdot Z[a; n, p'].$$

Tenemos entonces que el valor de una opción de compra por la ley binomial es

$$C = S \cdot Z[a; n, p'] - K \cdot \hat{r}^{-n} \cdot Z[a; n, p] \tag{3.3}$$

con

$$p = \frac{\hat{r} - d}{u - d} \quad y \quad p' = \frac{u}{\hat{r}} \cdot p.$$

Y por la paridad *put-call*

$$P = C - S + \frac{K}{\hat{r}^n},$$

sustituyendo C en 3.3 tenemos:

$$P = K \cdot \hat{r}^{-n}\{1 - Z[a; n, p]\} - S\{1 - Z[a; n, p']\}.$$

Que es la fórmula para una opción de venta dada por la ley binomial.

En otro orden, *Cox, Ros y Rubinstein (1979)* demuestran que cuando $n \to \infty$,

$$Z[a; , n, p'] \to N(d_1)$$

y

$$Z[a; , n, p] \to N(d_2).$$

Sustituyendo estos valores en 3.2, obtenemos la solución que da el modelo de **Black and Scholes (1973)** del precio del *call.*

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2) \tag{3.4}$$

Donde:

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}.$$

S = Precio del activo subyacente en el momento de la valoración.

K = Precio del ejercicio.

r = tasa de interés en tiempo continuo, $r = ln(1 + i)$.

t = plazo de ejercicio medido en años.

σ = volatilidad del precio del subyacente, en términos anuales.

e = base logaritmo neperiano.

$N(i)$ = valor de la función de distribución normal acumulada para i.

Y para las opciones de venta, de manera análoga en el modelo Black and Scholes, se tiene

$$P = K \cdot e^{-rt} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1). \tag{3.5}$$

La construcción de la ecuación 3.5 se puede obtener por la paridad *put-call*. En un mercado de tiempo continuo la paridad queda expresada como

$$P = C - S + K \cdot e^{-rt}. \tag{3.6}$$

Sustituyendo 3.6 en 3.4

$$\begin{gathered} P = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2) - S + K \cdot e^{-rt} \\ = S(N(d_1) - 1) - K(N(d_2) - 1)e^{-rt} \\ K \cdot e^{-rt} \cdot (1 - N(d2)) - S \cdot (1 - N(d_1)) \\ K \cdot e^{-rt} \cdot N(-d_2) - S + N(-d_1) \end{gathered}$$

Haciendo listado de las hipótesis en las que se basa el modelo de Black and Scholes con relación al comportamiento del precio de los subyacentes y al funcionamiento del mercado.

- El mercado funciona sin fricciones, es decir, no hay comisiones en transacciones, ya sea de información o de impuestos, además de que los activos son divisibles.
- Las transacciones se realizan de una manera continua y no existe restricción alguna para hacer compras y ventas a crédito, sin restricciones y/o costos especiales.
- Los agentes pueden prestar y endeudarse a una misma tasa r, el tipo de interés a corto plazo expresado en forma de tasa instantánea y supuesto conocido y constante en el horizonte de valoración de las opciones.
- Las opciones tienen que ser europeas y el subyacente/acción no paga dividendos en el horizonte de valoración.
- El precio del subyacente sigue un proceso continuo estocástico de evolución de Gauss-Wiener definido por:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \tag{3.7}$$

Donde dS representa el cambio de S para el instante dt, μ es la esperanza matemática del rendimiento instantáneo del subyacente, σ su desviación estándar, dz un proceso estándar Gauss-Wiener.

Designando los valores del precio del subyacente para los instantes t y $t+d$, el rendimiento del subyacente se representa como:

$$\frac{dS}{S} = \frac{S_{t+d} - S}{S_t}.$$

Es decir, este rendimiento instantáneo está conformado por los siguientes dos componentes:

- μdt, de forma constante
- σ, de forma aleatoria, σ se considera constante, con una esperanza nula y varianza igual $\sigma^2 dt$.

Resumiendo, el rendimiento instantáneo del activo subyacente y/o de igual manera las variaciones relativas con respecto al precio del subyacente siguen una distribución normal con los parámetros ya antes mencionados μdt(media) y $\sigma^2 dt$(varianza).

Concluyendo la parte principal para poder aplicar el modelo de Black and Scholes y sus derivaciones, se desea que el rendimiento instantáneo del subyacente aproxime su distribución a una distribución normal.

Ahora se describirá la relación que hay entre el modelo de Black and Scholes y el modelo binomial que se ha visto en el capítulo anterior, a través de los conceptos de *arbitraje* y *cartera de réplica.*

Comenzando la equivalencia de $N(d_1)$ con el ratio de cobertura H del modelo binomial, es decir, $N(d_1)$ es la cantidad de acciones o de unidades del activo subyacente que necesitamos para el portafolio de réplica de la opción. Entonces, $S \cdot N(d_1)$ es el costo de las acciones que se necesitan para el portafolio. Y para el segundo término, $K \cdot e^{-rt} N(d_2)$ decimos que es el importe requerido para poder replicar la opción. Por lo tanto, la diferencia de estos dos términos será el costo del portafolio de réplica. Pudiéndose decir que el modelo de Black and Scholes es una relación de arbitraje. Siendo el lado izquierdo de la formula el valor de la opción y el lado derecho el precio de mercado del portafolio de réplica.

3.2. Comparación entre los modelos de valoración.

Anteriormente se hizo la equivalencia entre el modelo binomial y el modelo de Black and Scholes, se puede entender que existen parámetros de fácil obtención, llámese el precio del activo subyacente al momento de la valoración, el precio del ejercicio, el plazo del ejercicio, etc. A diferencia de otros que no son tan fáciles de obtener sobre los mercados financieros, es decir, u y d para el modelo binomial y σ para el modelo Black and Scholes.

Para el modelo binomial, una buena aproximación de los parámetros u y d se obtiene por

$$u = e^{\sigma \cdot (\frac{t}{n})^{\frac{1}{2}}}$$

donde:

t = plazo en años de la opción.

n = número de períodos del modelo binomial.

σ = volatilidad en termino anual prevista para el activo subyacente.

$\hat{r}$ se calcula por la expresión: $\hat{r} = e^{(\frac{rt}{n})}$ donde r es el tipo de interés instantáneo, es decir, $r = ln(1 + i)$.

3.3. Derivación directa del modelo de Black and Scholes por medio del cálculo estocástico.

Por medio de la hipótesis en la cual se esté negociando en tiempo continuo, se considera un portafolio de arbitraje formado por n unidades de la opción C y h unidades de una acción sobre el precio del subyacente S. Si R denota el valor actual de la cartera de arbitraje, entonces:

$$R = n \cdot C + h \cdot S$$

ahora designando por dR, dC, y dS como los cambios de R, C, y S en un intervalo de tiempo dt.

$$dR = ndC + hdS.$$

Con la hipótesis de la volatilidad constante e interés libre de riesgo también constante, para una opción call de tipo europea con un precio de ejercicio K será función del tiempo t y de una variable estocástica, el precio de la acción S, es decir,

$$C = F(t, S).$$

Enunciando el lema de *Ito* el cual permite diferenciar una función $G(t, x)$, donde x es una variable aleatoria y t sea el tiempo, términos expresados por la siguiente ecuación:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial G}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \cdot (dx)^2.$$

Entonces, aplicado el lema para obtener dC, tenemos:

$$dC = C_s \cdot dS + C_t \cdot dt + \frac{1}{2} C_{ss} (dS)^2 \tag{3.8}$$

donde, C_s y C_{ss} son la primera y segunda derivada con respecto a S y C_t la primera derivada con respecto a t.

Como se vio en las hipótesis en las que se basa el modelo de Black and Scholes, donde supone que el precio del activo subyacente es un proceso continuo estocástico, es decir, un proceso de *Markov* tipo Gauss-Wiener.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz.$$

Elevando al cuadrado la igualdad:

$$(\frac{dS}{S})^2 = (\mu dt)^2 + 2\mu \cdot \sigma dt \cdot dz + (\sigma \cdot dz)^2. \tag{3.9}$$

Dada la tabla de multiplicar de *McKean*,

$$dz^2 = dt$$

$$dz \cdot dt = dt \cdot dz = 0$$

$$dt^2 = 0$$

Por lo tanto, 3.9 se expresa:

$$(\frac{dS}{S})^2 = \sigma^2 \cdot dt$$

y

$$(dS)^2 = S^2 \cdot \sigma^2 \cdot dt. \tag{3.10}$$

Sustituyendo 3.10 en 3.8 se tiene

$$dC = C_s \cdot dS + dt(C_t + \frac{1}{2} C_{ss} \cdot S^2 \cdot \sigma^2)$$

por lo tanto, el cambio dR será expresado como:

$$dR = (nC_s + h) \cdot dS + n(C_t + \frac{1}{2} C_{ss} \cdot S^2 \cdot \sigma^2) dt.$$

Como dS es un cambio aleatorio, se construye un portafolio de arbitraje libre de riesgo, pudiendo elegir

$$\begin{cases} n = -1 \\ h = C_s \end{cases} \tag{3.11}$$

ó

$$\begin{cases} n = 1 \\ h = -C_s \end{cases} \tag{3.12}$$

eligiendo 3.11,

$$R = -C + C_s \cdot S \tag{3.13}$$

$$dR = -(C_t + \frac{1}{2} C_{ss} \cdot S^2 \cdot \sigma^2) dt. \tag{3.14}$$

Entonces el portafolio de arbitraje tiene una rentabilidad en equilibrio igual a la rentabilidad del activo subyacente libre de riesgo, es decir:

$$\frac{dR}{R} = r \cdot dt. \tag{3.15}$$

Si se sustituye en 3.15 los valores de R y dR por los valores que tienen en 3.13 y 3.14 resulta:

$$\frac{1}{2} S^2 \cdot \sigma^2 \cdot C_{ss} + r \cdot S \cdot C_s \cdot C_t = 0. \tag{3.16}$$

Con T como fecha de vencimiento se tiene:

$$\frac{1}{2} S^2 \cdot \sigma^2 \cdot C_{ss} + rSC_s - rC - C_r = 0. \tag{3.17}$$

En este tipo de ecuaciones en derivadas parciales son muy frecuentes en física, por ejemplo, la ecuación de calor.

Para las ecuaciones de derivadas parciales, así como para una ecuación diferencial, se puede definir una aproximación de integral general que satisface la ecuación.

Entonces se puede calcular la solución particular de 3.17 que satisface los límites del valor de una opción call, que son:

$$C(S, 0, K) = S - K \quad \text{sí} \quad S \geq K$$

$$C(S,0,K) = 0 \quad \text{sí} \quad S < K \tag{3.18}$$

con $T = 0$.

Ahora se realiza un cambio de variable para hallar la solución de 3.17 que satisface a 3.18 teniendo:

$$C(S,T) = e^{-rT} \cdot Y(S',T')$$

donde

$$S' = \frac{2}{\sigma^2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)[ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T]$$

$$T' = \frac{2}{\sigma^2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)^2 \cdot T$$

3.17 se transforma en:

$$Y_{T'} = Y_{S'S'} \tag{3.19}$$

los límites de 3.18 convirtiéndose a:

$$Y(S',0) = K\{exp[S'(\frac{1}{2\sigma^2})'(r \cdot -\frac{1}{2}\sigma^2)]1\} \quad \text{sí} \quad S' \geq 0$$

$$Y(S',0) = 0 \quad \text{sí} \quad S' < 0.$$

La ecuación 3.19 es la ecuación de la difusión del calor. Su solución se puede obtener a través de diferentes métodos, y por cualquier método la solución se expresa por la igualdad

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} N(d_2).$$

El modelo de **Black and Scholes**.

3.4. Black and Scholes fraccionario.

Como parte de la investigación sobre el modelo de **Black and Scholes** y demás aplicaciones para los mercados financieros se pretende hacer en posteriores estudios el uso del cálculo fraccionario, he aquí una breve explicación sobre su historia, así como una exposición de las definiciones más importantes.

La aparición del cálculo diferencial alrededor de 1699 en la mayoría de los casos se atribuye exclusivamente a Newton, aunque esta teoría fue desarrollada también por Leibniz, por otro lado, el desarrollo del cálculo diferencial fue posible gracias a la notación implementada por Leibniz para las derivadas de orden entero.

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad n \in \mathbb{Z}_0^+.$$

La notación de Leibniz permitió a L'Hopital en 1695 preguntarle en una carta: "¿Qué pasa si n = 1/2?". Debido a que Leibniz no pudo dar una interpretación física y geométrica a esta interrogante, respondió casi de forma profética: " ... esto es una aparente paradoja de la cual, un día, útiles consecuencias serán extraídas." Gracias a su notación Leibniz podría ser considerado como el padre del cálculo fraccional.

Euler contribuyó indirectamente al desarrollo del cálculo fraccional ya que en 1729 desarrolló la definición de la función Gamma, definición conocida como límite infinito de Euler, como un intento de generalizar la función factorial:

$$\Gamma(z) = \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)...(z+n)} n^{\mathbb{Z}}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-.$$

Lagrange también contribuye indirectamente debido a que en 1772 desarrolló la ley de exponentes para operadores diferenciales de orden entero:

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} f(x), \quad m, n \in \mathbb{Z}_0^+.$$

La función Gamma desarrollada por Euler alrededor de 1729, como una generalización de la función factorial, *i.e.*, $\Gamma(n+1) = n!$, juega un papel fundamental en la teoría del cálculo fraccional, una definición alternativa, restringida a valores con parte real positiva, es la forma integral de la función Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}, \quad Re(z) > 0.$$

En 1819, la primera mención de un derivada de orden arbitrario aparece en uno de los textos de Lacroix, en el que dedica menos de dos páginas de las 700 en el texto a este tema. Él desarrolló la derivada n-ésima de $f(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$, utilizando la función gamma y haciendo tender $n \to v$, con v un número real o complejo:

$$\frac{d^v}{dx^v} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-v+1)} x^{m-v}, \quad 0 < Re(v) < m.$$

3.4.1. Definición Integral Fraccional de Riemann-Liouville.

Si f es una función localmente integrable su n-ésima integral viene dada por:

$$a^{I^n}xf(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$

usando que la función Gamma es la generalización de la función factorial, podemos extender la expresión anterior a números complejos para obtener la integral α-ésima, conocida como la **Integral Fraccional** de Riemann-Liouville

$$a^{I^\alpha}xf(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \alpha \in \mathbb{C}, \quad Re(\alpha) > 0.$$

3.4.2. Definición Derivada Fraccional de Riemann-Liouville.

Utilizando el operador diferencial clásico $D = \frac{d}{dx}$, tenemos que la derivada n-ésima de una función $f \in \mathbb{C}^n$ es dada por:

$$D^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x), \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

El operador diferencial es el operador inverso por la izquierda del operador integral

$$D^n a^{I^n}xf(x) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Tomando la misma idea al cálculo fraccional, se puede definir con el símbolo del operador diferencial el inverso del operador integral fraccional

$$a^{I^{-\alpha}}xf(x) =_a D_x^\alpha f(x), \quad Re(\alpha) > 0,$$

para solucionar el problema de divergencia de la integral debido al hecho de tomar $\Gamma(-\alpha)$ se utiliza que $D^n a^{I^n}x = 1$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, para reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera

$${}_aD_x^\alpha f(x) = D^n\ {}_aI_x^n\ {}_aI_x^{-\alpha}f(x), \quad Re(\alpha) > 0.$$

Por la propiedad de semigrupo del operador integral

$${}_aD_x^\alpha f(x) = D^n\ {}_aI_x^{n-\alpha}f(x), \quad Re(\alpha) > 0.$$

utilizando la función piso para restringir el valor de n en términos α, se toma $n = \lfloor Re(\alpha) \rfloor + 1$, entonces obtenemos la definición de la **Derivada Fraccional** de Riemann-Liouville

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \qquad Re(\alpha) > 0. $$

Conclusión

La importancia de las matemáticas financieras tiene su raíz en su aplicación a las operaciones bursátiles y bancarias, en temas de economía matemática, etc. Porque permiten tomar adecuadas decisiones, optimizar recursos, minimizar riesgos. Son la base para los proyectos de inversión, ya que son la herramienta para modelar el dinero a través del tiempo, se podría afirmar que dicha modelación tuvo su auge desde la década de los setenta donde, Merton, Black y Scholes hacen uso de las matemáticas avanzadas para trabajar en ella, y de igual manera para la evaluación y cobertura de instrumentos financieros. Es aquí, donde una formación solida matemática en el cálculo estocástico, la probabilidad, la estadística, las ecuaciones diferenciales y el análisis numérico, se han convertido en una parte fundamental de aquellos que trabajan sobre el área de las matemáticas financieras, no sin antes tener siempre en mente que pueden existir nuevas ramas de las matemáticas como es el caso del cálculo fraccionario u otras ciencias aplicables como la física, ya que la ecuación de difusión del calor juega un papel muy importante en el desarrollo del modelo de Black and Scholes.

Desde el comienzo de la modelación de estos fenómenos financieros hasta hoy en día es claro que se ha tenido un crecimiento exponencial en dicho uso de la modelación, así como el aumento en la complejidad, pues los instrumentos financieros son cada vez más complicados y de mucho mayor volumen en su información comparados con los de décadas anteriores y que estos requieren cada vez resultados matemáticos prácticamente en tiempo real y con un mayor apego a la realidad, o en el mejor de los casos la creación de nuevos modelos matemáticos con dichas características.

Este trabajo se considera para estudiantes que cursan materias de finanzas, economía, riesgos financieros, derivados, evaluación de proyectos de inversión y deseen tener un panorama más amplio sobre los mercados financieros a manera de una introducción general de los distintos tipos de mercados, sus leyes, y también tengan conocimiento de dos de los modelos matemáticos más utilizados para la valuación de instrumentos financieros. Asimismo, se concluye que, con la parte última del tercer capítulo referente al cálculo fraccionario, sirva como referencia o motivación para continuar con el estudio de este, ya sea para la aplicación en las matemáticas financieras u otra área en la cual se considere útil.

Bibliografía

[1] Brambila, Fernando editor. Fractal Analysis-Applications in Physics, Engineering and Technology. InTech, 2017

[2] Cox,J., Ross,S., y Rubinstein,M. (1979): "Options pricing: a simplified approach". Journal of Financial Economics, núm. 7. Págs: 229-263.

[3] Díaz Mata, Alfredo. "Matemáticas Financieras", 5A edición, 2013, Mc Graw Hill. ISBN: 9786071509437

[4] Duque Pita, Tania Lizeth. "Modelo De Black-Scholes-Merton Para Valuar Opciones Europeas Mediante Un Enfoque De Control Óptimo Estocástico". Universidad Nacional Autónoma de México, Dirección General de Bibliotecas, Departamento de Tesis. (2018).

[5] Fischer Black and Myron Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3 (May - Jun. 1973), pp. 637-654

[6] Jimeno Moreno, Juan Pablo. "Los Mercados Financieros y sus Matemáticas", Barcelona, 2004, Ariel. ISBN: 9788434445086.

[7] John C. Hull. "Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones", 8A edición, 2014, Pearson. ISBN: 9786073222693

[8] Lamothe Fernández, Prosper. "Opciones Financieras Y Productos Estructurados", 2A edición, 2003, Mc Graw Hill. ISBN: 8448139267

[9] Martínez Palacio, María Teresa Verónica, "Un análisis comparativo de diversas metodologías para la valuación de opciones". Universidad Nacional Autónoma de México, Dirección General de Bibliotecas, Departamento de Tesis. (2008).

[10] Mascareñas, Juan (2011): "Opciones Reales: Valoración por el método binomial". Monografías de Juan Mascareñas sobre Finanzas Corporativas nº (32). ISSN: 1988-1878.

[11] Rincón, Luis "Curso Elemental De Probabilidad Y Estadística"Departamento de Matemáticas, 2007, Facultad de Ciencias UNAM.

[12] Venegas Martínez, Francisco. “Riesgos Financieros Y Económicos”, 2A edición, 2008, Cengage Learning. ISBN: 9789708300087

[13] Vidaurri Aguirre, Héctor Manuel. “Matemáticas Financieras”, 5A edición, 2015, Cengage Learning. ISBN:9786074817157

[14] Zvi Bodie. y C. Merton, Robert “Finanzas”,1A edición, 2003, Pearson Educación. ISBN: 9702600979

[15] Zvi Bodie. “Principio de Inversiones”, 5A edición, 2004, Mc Graw Hill. ISBN:0072510773