

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

EFECTO MARIPOSA HOLOGRÁFICO EN TEORÍAS FUERTEMENTE ACOPLADAS

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE: MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA: FERNANDO AVITÚA VARELA

TUTOR PRINCIPAL: DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

COMITÉ TUTORIAL

DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

DR. ERICK LEONARDO PATIÑO JAIDAR FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO 2019





UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1.	Teoría Cuántica de Campos		8
	1.1.	Teorías con interacción	12
	1.2.	Renormalización	16
	1.3.	Teorías de Super Yang-Mills	20
2.	Teorías de Gravedad 22		
	2.1.	Relatividad General	22
		2.1.1. Agujeros negros	25
	2.2.	Generalizaciones de Relatividad General	34
		2.2.1. Gravedad Cuasi-Topológica	37
3.	La Correspondencia Holográfica 39		
	3.1.	Teoría de Cuerdas	39
	3.2.	La correspondencia holográfica	46
	3.3.	El Efecto Mariposa	52
		3.3.1. Caos en teorías cuánticas	53
	3.4.	Caos y holografía	56
		3.4.1. Efecto mariposa para teorías de orden superior en la curvatura	67
4.	Resultados		
	4.1.	Materia Conforme	70
		4.1.1. Termodinámica	73
	4.2.	Cota a la velocidad de mariposa en una esfera	74
		Velocidad de mariposa en acoplamiento conforme	78
		Conclusiones y trabajo futuro	80

Introducción

Unas de las características principales de la ciencia es que permite deducir resultados complejos partiendo de principios sencillos. A lo largo de la historia se ha creído en el carácter determinista de las leyes físicas, esto quiere decir que si se conocen las condiciones iniciales de un sistema, y la teoría correcta para describirlo, es posible predecir su evolución de manera precisa. De la mano de este argumento existe una intuición fuerte de que cuando ponemos a prueba una teoría con un par de problemas que difieren muy poco entre sí, las conclusiones resultantes tampoco deben de estar separadas entre sí. Este tipo de fenómenos son los más comunes en la naturaleza, sin embargo, existe una gran cantidad de sistemas donde esto no ocurre. Algunos de estos fenómenos caen en el reino de la mecánica clásica en sistemas relativamente sencillos como el movimiento de un péndulo doble. En este sistema, las ecuaciones de movimiento se pueden resolver, sin embargo, el movimiento del péndulo para posiciones iniciales muy parecidas es muy distinto y se encuentra que es muy difícil predecir si, por ejemplo, el péndulo dará una vuelta alrededor de alguno de sus ejes o si repetirá una trayectoria que recorrió previamente.

Debido a la dificultad para obtener predicciones en esta clase de fenómenos, se les ha denominado sistemas caóticos, donde el término de caos sugiere que la dinámica del sistema está regida por un comportamiento casi aleatorio que da lugar a la gran diferencia que se observa. Así, a grandes rasgos, el caos se define como la susceptibilidad de un sistema a sus condiciones iniciales. Uno de los casos más famosos de dicha susceptibilidad viene del estudio de ecuaciones diferenciales aplicadas a problemas climatológicos. Este fenómeno recibió el nombre de el efecto mariposa ya que las características caóticas parecían decir que un cambio drástico en el estado de las condiciones del clima, como un huracán, podía aparecer al realizar un cambio pequeño, como el aleteo de una mariposa.

Además de encontrarse en el mundo macroscópico el caos también se manifiesta en sistemas cuánticos. La extrañeza de la mecánica cuántica hace que los conceptos de sistemas dinámicos no se puedan transferir de manera directa del mundo macroscópico y todavía existe debate acerca de cómo medir la susceptibilidad a condiciones iniciales en el formalismo de la mecánica cuántica. Aunque la pregunta de cómo es que el caos se extiende al mundo cuántico parecería ser solamente una curiosidad teórica, se cree que el comportamiento caótico es necesario para que se pueda hablar de ensambles

termodinámicos como los conocemos actualmente. Esto se debe a que dicho comportamiento se encuentra detrás de una de las hipótesis fundamentales de mecánica estadística, el teorema ergódico. Este teorema nos dice que podemos intercambiar el análisis de la evolución temporal de cada componente del sistema por un promedio sobre el espacio fase a tiempo fijo. La idea principal detrás de este intercambio es la suposición de que esperando suficiente tiempo los sistemas cruzan una infinidad de veces todas las trayectorias con energía fija.

La manera actual de estudiar la naturaleza en su límite cuántico es mediante las teorías cuánticas de campo (QFT por sus siglas en inglés). Estas teorías postulan que las partículas son excitaciones de campos que permean el espacio-tiempo y, a través de la teoría conocida como el modelo estándar, han logrado describir con mucha precisión la fenomenología de la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza fuerte. Sin embargo, no toda la física contenida en las interacciones de estas tres fuerzas puede ser descrita mediante las teorías de campo. Esto se debe a que la manera en la que se realizan los cálculos de QFT es desarrollando sumas sobre interacciones en las que los términos se van haciendo cada vez más pequeños. Dentro del espacio donde este desarrollo es válido se encuentran los mayores avances y predicciones de las teorías de campos. Nos encontramos en esta región, conocida como el límite de acoplamiento débil, cuando la constante que mide la intensidad de interacciones de las partículas es pequeña. Por otro lado, cuando las interacciones que se suman no son cada vez más pequeñas los métodos tradicionales no funcionan y decimos que estamos en el límite de acoplamiento fuerte. Esta región de las QFTs no ha sido muy bien entendida a pesar de que muchos de los fenómenos de interés, como algunos de los que suceden en colisionadores de partículas, se encuentran dentro de este régimen.

El modelo estándar describe la naturaleza a la escala en la que las partículas fundamentales interactúan, por otro lado, si nos vamos a escalas mucho más grandes donde la fuerza de gravedad domina la dinámica del sistema encontramos que la descripción correcta se puede explicar usando la teoría de la relatividad general de Einstein. Al igual que las QFTs dicha teoría ha sido exitosa realizando predicciones como la existencia de agujeros negros, ondas gravitacionales, explicar la precesión de la órbita de mercurio, entre muchos otros resultados. El hecho de tener dos descripciones tan exitosas de la naturaleza sugiere que la relatividad general es un caso particular de una teoría de campos, sin embargo, la diferencia de la escala en la que ambas teorías operan ha hecho imposible reconciliarlas y una formulación satisfactoria de la fuerza de la gravedad en términos de una teoría cuántica sigue sin ser encontrada. Uno de los candidatos más importantes para resolver el problema de la gravedad cuántica es la teoría de cuerdas. Dicha teoría propone que los ingredientes fundamentales de la naturaleza son cuerdas cuyos modos de vibración dan lugar a las partículas fundamentales. Dentro de la teoría de cuerdas existe mucha libertad para agregar o quitar algunas características manteniendo una teoría consistente y aunque se han estudiado diferentes combinaciones y ajustes de los parámetros de modo que se puedan reproducir el modelo estándar y la gravedad cuántica hasta ahora no se ha logrado esta meta. Independientemente de si la teoría de cuerdas logra unificar la descripción de las fuerzas del universo en una sola teoría los resultados teóricos que se han desarrollado estudiándola son muy valiosos para entender la naturaleza de las teorías de campo y su conexión con las de gravedad.

En particular, una de las características de teoría de cuerdas que llevó a explorar una conexión entre teorías de campo y teorías de cuerdas es el parecido que existe entre las amplitudes de dispersión de ambas teorías cuando los procesos de interacción de la teoría de campos se agrupan de una manera particular. Continuando con el estudio de esta conexión Juan Maldacena encontró en 1997 la llamada correspondencia holográfica (de Maldacena o Norma/Gravedad) que en su versión más sencilla postula que una teoría de cuerdas en 10 dimensiones es equivalente a una teoría de norma en cuatro dimensiones. Este resultado ha dado muchas líneas de investigación que se siguen estudiando actualmente, encontrando conexiones cada vez más profundas entre ambas teorías. Uno de los rubros más importantes de la correspondencia holográfica es el hecho de que explora la región fuertemente acoplada de las teorías de campo usando su dual con teorías de cuerdas en su límite semiclásico. Es decir, los cálculos que se creían inaccesibles en teoría de campos se vuelven procedimientos relativamente sencillos en la teoría de gravedad.

Aunque dicho límite es muy útil para obtener resultados que permiten entender el límite fuertemente acoplado de una teoría de norma la correspondencia pretende ser una conexión entre ambas teorías a cualquier escala energética. Así, las desviaciones del límite de $N \to \infty$ son interesantes y corresponden a correcciones que provienen de teoría de cuerdas. Dentro de estas correcciones se encuentran en la acción términos con más derivadas sobre los campos de la teoría de gravedad así como potencias mayores de dichos campos. Entre estas nuevas contribuciones aparecen términos con mayores potencias y derivadas de la curvatura, de modo que es de interés estudiar espacios-tiempos que sean solución de dichas teorías y además cumplan las condiciones necesarias para ser consideradas en un contexto holográfico. En la familia de teorías que se reducen a la relatividad general y además tienen orden superior en la curvatura existe un conjunto de acciones que se puede construir de manera sistemática basándose en consideraciones topológicas que reciben el nombre de gravedades de Lovelock. La forma explícita de la acción de Lovelock no aparece en la expansión de teoría de cuerdas, sin embargo, la forma sencilla de sus ecuaciones de movimiento las convierte en un escenario ideal para revisar las características de una teoría holográfica con orden superior en la curvatura.

Regresando al problema del caos, actualmente se han desarrollado avances en los que se intenta hacer cálculos en sistemas caóticos usando la correspondencia holográfica. Este estudio forma parte de una línea de investigación reciente en la que se busca explicar temas de entrelazamiento cuántico, transferencia de información y complejidad haciendo un análisis de sistemas gravitacionales. En el caso específico del caos una manera de medir que tan rápido se propaga la información en un sistema caótico es mediante la velocidad de mariposa. En el espacio-tiempo el sistema térmico

se ve como un agujero negro mientras que el escenario que revela la susceptibilidad para condiciones iniciales consiste en una geometría de onda de choque cuyo perfil se propaga con forma de onda viajera a la velocidad de mariposa. Hasta ahora se ha calculado casi exclusivamente la velocidad de mariposa en agujeros negros con horizontes planares, es decir, cuya teoría dual vive en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Esto se debe a que la interpretación del perfil de la onda de choque en este caso se ha hecho precisa mediante distintos cálculos gravitacionales.

En este trabajo nos enfocaremos en estudiar el efecto mariposa en teorías de gravedad que tienen términos de orden mayor en la curvatura. Además, consideramos el acoplamiento conforme de un campo escalar que se agrega a la acción usando términos de orden mayor en la curvatura. Esta teoría sólo tiene agujeros negros en horizontes esféricos de modo que también exploraremos cómo se modifican los cálculos del perfil de onda de choque en esta topología, en este contexto revisaremos qué tan válido es este cálculo usando un enfoque indirecto en el que comprobaremos algunos de los resultados que se conocen como válidos en el caso planar. Aunque el acoplamiento conforme contiene términos de orden superior en la curvatura estos no modifican las ecuaciones del perfil de la onda de choque, esto se debe a que en el ansatz de esta geometría el efecto de la perturbación cayendo al agujero negro es el de recorrer el contenido de materia en la dirección nula opuesta a la dirección de caída. Así, el campo conforme tiene un efecto en la velocidad de mariposa sólo a través de su contribución a la métrica del agujero negro antes de la onda de choque.

En el estudio del efecto mariposa en horizontes con topología esférica deducimos una cota para la velocidad de mariposa en teorías que respetan la condición de energía nula, encontramos que la máxima velocidad se alcanza cuando no hay contenido extra de materia por lo que $v_b < v_b^{(AdS-Schw)}$. Este resultado reproduce lo que ya se había encontrado en el caso planar. Además de esto, calculamos la velocidad de mariposa para teorías en gravedad de Einstein-Hilbert y Gauss-Bonnet con una combinación del campo escalar conformemente acoplado y un campo electromagnético. También hacemos un análisis de la termodinámica extendida¹ del agujero negro para hacer contacto con resultados que sugieren que la velocidad de mariposa se puede expresar como una combinación sencilla de cantidades termodinámicas. Encontramos que la velocidad de mariposa no se puede escribir en términos de estas cantidades para Gauss-Bonnet en el caso esférico. Además en el caso del campo conforme la entropía del agujero negro se modifica gracias a los términos de mayor curvatura que aparecen en la parte de la acción que describe al campo conforme por lo que las cantidades termodinámicas no describen a la velocidad de mariposa aún en gravedad de Einstein. El objetivo de este trabajo fue comenzar a abordar el problema de la velocidad de mariposa en teorías que viven en una esfera a través de la correspondencia holográfica. El enfoque termodinámico del cálculo de la velocidad de mariposa nos permite ver que no es sólo la topología del horizonte lo que provoca los desacuerdos sino que podría

¹En la termodinámica extendida la masa del agujero negro se entiende como la entalpía del sistema termodinámico, incluyendo la presión del sistema como la constante cosmológica.

tener un origen en el cambio de la entropía gracias a los términos extra que aparecen al calcular la entropía de Wald.

La primera parte de la tesis consiste en los antecedentes teóricos necesarios para entender el cálculo holográfico del efecto mariposa. Estos están formados por la teoría cuántica de campos (Capítulo 1), la relatividad general y sus generalizaciones (Capítulo 2) y la correspondencia holográfica junto con los resultados específicos de la deducción de la ecuación para la velocidad de mariposa (Capítulo 3). Por último el capítulo 4 contiene la deducción de la cota a la velocidad de mariposa en agujeros negros con topología esférica que cumplen la condición de energía nula. Además de esto introducimos la teoría con el campo escalar conforme y calculamos la termodinámica y velocidad de mariposa para teorías con y sin campo escalar y campo electromagnético en gravedad de Einstein-Hilbert y Gauss-Bonnet. Comparamos la fórmula termodinámica de la velocidad de mariposa con estos nuevos términos y vemos donde y porqué falla. Por último terminamos con una discusión del trabajo futuro y las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Teoría Cuántica de Campos

Las teorías cuánticas de campo son la manera en la que las partículas elementales y sus interacciones son entendidas en la física moderna. En el límite perturbativo de dichas teorías las partículas se entienden como excitaciones de campos que permean el espacio-tiempo. En este capítulo revisaremos algunos conceptos preliminares de dichas teorías que nos servirán en lo que resta del trabajo.

En el sentido clásico un campo $\phi(x)$ es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio-tiempo. El estudio de la dinámica de dicho campo se trata de la misma forma que en mecánica clásica, partiendo de un principio variacional. Para tener un tratamiento relativista en teoría cuántica de campos construimos una acción que es invariante ante transformaciones de Poincaré donde los diferentes campos que estudiamos están clasificados de acuerdo a cómo transforman bajo el grupo de Poincaré, es decir, a su representación bajo dicho grupo. El grupo de Poincaré esta compuesto por las transformaciones de Lorentz $SO(3,1): x^{\mu} \to \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ y las traslaciones $x^{\mu} \to x^{\mu} + a^{\mu}$. Una representación de este grupo es un mapeo de los elementos de dicho grupo $(\Lambda, a) \to g(\Lambda, a)$ al espacio de funciones lineales sobre otro espacio vectorial tal que estas operaciones preservan la regla de producto. Podemos escribir una transformación de Poincaré general como $q(\Lambda, a) = e^{-\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + ia_{\mu}P^{\mu}}$, donde $M^{\rho\sigma}$ son los generadores del grupo de Lorentz, P^{μ} son los generadores de traslaciones y $\omega_{\rho\sigma}, a_{\mu}$ son los parámetros de la transformación. El hecho de que los parámetros de las transformaciones sean continuos y que podamos quedarnos en un subgrupo conectado a la identidad hace que el grupo de Poincaré sea un grupo de Lie. Estos grupos son variedades diferenciales suaves de dimensión finita que quedan determinados por su comportamiento infinitesimal. En términos matemáticos esto significa que a cada grupo de Lie se le puede asociar un álgebra cuyo espacio vectorial es el espacio tangente al elemento identidad en el grupo. Su carácter infinitesimal implica que la información del grupo está contenida en los generadores de su álgebra, para el caso de Poincaré el álgebra de los generadores tiene como operación binaria al conmutador, [A, B] = AB - BA, y está dada por

$$i \left[M^{\rho\sigma}, M^{\mu\nu} \right] = \eta^{\mu\rho} M^{\sigma\nu} - \eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} + \eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}$$
$$i \left[M^{\mu\nu}, P^{\rho} \right] = \eta_{\mu\rho} P_{\nu} - \eta_{\nu\rho} P_{\mu}$$
$$\left[P_{\mu}, P_{\nu} \right] = 0$$

Es útil dividir el espacio de los generadores de Lorentz en dos álgebras de momento angular $SU(2)\times SU(2)$ definiendo $J_i=\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}, K_i=M_{0i}$, con ϵ_{ijk} el tensor de Levi-Civita. Después, definiendo $N_i=\frac{1}{2}\left(J_i+iK_i\right), N_i^\dagger=\frac{1}{2}\left(J_i-iK_i\right)$ se puede probar que los operadores N_i,N_i^\dagger satisfacen las reglas de conmutación de SU(2), es decir,

$$[N_i, N_j] = \epsilon_{ijk} N_k, \quad [N_i, N_j] = \epsilon_{ijk} N_k, \quad [N_i, N_j^{\dagger}] = 0.$$

De esta forma podemos clasificar las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz mediante los eigenvalores $\left(N^2,N^{\dagger^2}\right)=(n,n^{\dagger})$ de cada una de estas álgebras. El caso más sencillo corresponde a $(n,n^{\dagger})=(0,0)$ donde el campo no cambia bajo la transformación de Lorentz, este campo no tiene índices vectoriales y se le llama campo escalar $\phi(x)$. Debido a su simplicidad, usaremos al campo escalar para ilustrar muchos de los conceptos fundamentales de una teoría cuántica de campos.

De manera análoga a la partícula puntual se define una acción para un campo $\phi(x)$ usando un término cinético y uno potencial

$$S\left[\phi,\partial_{\mu}\phi\right] = \int d^4x \,\mathcal{L}\left[\phi,\partial_{\mu}\phi\right] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - V(\phi)\right]$$

Donde $V(\phi)$ es el potencial al que está sujeto el campo y, al igual que en mecánica clásica, es útil definir la densidad de momento conjugado a ϕ como $\pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)}$. El potencial $V(\phi)$ puede tomar cualquier forma, sin embargo, si queremos que el valor del campo oscile alrededor de un mínimo de potencial debe pasar que V'(0) = 0 y V''(0) > 0. Con esto, la expansión de $V(\phi)$ en una serie de Taylor alrededor de cero toma la forma

$$V = \frac{V''(0)}{2}\phi^2 + \frac{V^{(3)}(0)}{3!}\phi^3 + \frac{V^{(4)}}{4!}\phi^4 + \cdots$$

Uno de los potenciales más sencillos que respeta esta expansión es $V(\phi) = \frac{1}{2}V''(0)\phi^2$. Siguiendo el procedimiento de Euler-Lagrange y considerando $V''(0) = m^2$ obtenemos la ecuación de movimiento para el campo conocida como ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2\right)\phi(\vec{x}, t) = 0, \tag{1.1}$$

haciendo una transformación de Fourier sobre las coordenadas espaciales se obtiene

$$\left[\partial_t^2 + (|\vec{p}|^2 + m^2)\right] \phi(t, \vec{p}) = 0. \tag{1.2}$$

Esta ecuación es la de un oscilador armónico cuya frecuencia angular, $\omega_p = E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$, es exactamente la energía de una partícula libre relativista de masa m

que se mueve con momento espacial \vec{p} . Sustituyendo la solución de (1.2), el campo en el espacio de posiciones queda expresado en términos de modos de Fourier a través de

 $\phi(t,x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^* e^{ip\cdot x} \right]. \tag{1.3}$

De las ecuaciones (1.2) y (1.3) vemos que el campo escalar libre es una superposición de infinitos osciladores armónicos. Se le llama libre porque estos osciladores están desacoplados, es decir, no se mezclan en la solución (1.3). Esto a su vez es consecuencia de que el potencial cuadrático en ϕ nos da una ecuación de movimiento lineal de modo que las soluciones se superponen.

Para cuantizar estas teorías se realiza un procedimiento análogo al que se sigue en mecánica cuántica en donde sustituimos las variables dinámicas, la posición x y el momento p, por operadores, \hat{x}, \hat{p} , que actúan sobre un espacio de Hilbert y les damos relaciones de conmutación canónicas $[\hat{x}, \hat{p}] = 1$. En las teorías cuánticas de campo las variables dinámicas son ahora el campo $\phi(x)$ y su momento conjugado $\Pi(x)$.

Siguiendo los mismos pasos de la cuantización del oscilador armónico se imponen las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\phi}(t,\vec{x}')] = 0 = [\hat{\pi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{x}')] \to [\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger},\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}],$$
$$[\hat{\phi}(t,\vec{x}),\hat{\pi}(t,\vec{x}')] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \to [\hat{a}_{\vec{p}},\hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^{3}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}').$$

De la misma forma que en mecánica cuántica este análisis define un estado de más baja energía $|0\rangle$, el vacío, tal que si se hace actuar cualquier operador de aniquilación sobre él se obtiene $\hat{a}_p |0\rangle = 0$. Los estados excitados de este espacio se obtienen al actuar con operadores de creación \hat{a}_p^{\dagger} sobre $|0\rangle$. Un resultado importante es que al actuar con el Hamiltoniano $\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^{\dagger} \hat{a}_p^{\dagger}$ y momento espacial $\hat{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_p^{\dagger} \hat{a}_p^{\dagger}$ sobre los estados excitados de la forma $|p\rangle = \sqrt{2E_p}\,\hat{a}_p^{\dagger}$ se obtiene precisamente la energía y el momento de una partícula libre relativista. Siguiendo con este procedimiento, el estado excitado de n partículas con momento $\vec{p_1}.\vec{p_2},\ldots,\vec{p_n}$ se escribe como

$$|\vec{p_1}.\vec{p_2},\dots,\vec{p_n}\rangle = \left(\sqrt{2E_{p_1}}\sqrt{2E_{p_2}}\dots\sqrt{2E_{p_n}}\right)\hat{a}_{p_1}^{\dagger}\hat{a}_{p_2}^{\dagger}\dots\hat{a}_{p_n}^{\dagger}|0\rangle.$$

A la unión de espacios de Hilbert que contienen un número fijo de partículas, incluyendo el vacío, se le conoce como espacio de Fock \mathcal{H} . Dicho espacio se puede escribir como la suma directa de los diferentes subespacios que cuentan con un número fijo de partículas, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^2 \oplus \cdots$.

Una de las cantidades más importantes para calcular en una teoría de campos es la amplitud de probabilidad de que una partícula con posición \vec{x} a un tiempo t se encuentre en la posición \vec{x}' a un tiempo t'. A ésta amplitud de probabilidad, junto con la amplitud de propagación de su antipartícula, se le llama el propagador de Feynman

o función de dos puntos y está dada por

$$G_F(x'-x) = \langle x'|x\rangle \,\theta(x'^0-x^0) + \langle x|x'\rangle \,\theta(x^0-x'^0) = \langle 0| \,T\{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(\hat{x}')\} \,|0\rangle$$
$$= \langle 0| \,\left(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x)\theta(x'^0-x^0) + \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')\theta(x^0-x'^0)\right) \,|0\rangle \,,$$

donde $\theta(x)$ es la función de Heaviside, $\theta(x) = 1$ para $x \ge 0$ y $\theta(x) = 0$ si x < 0. El propagador de Feynman es la función de Green del operador de la ecuación de movimiento y para el campo escalar libre toma la forma

$$G_F(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i \frac{e^{-ip \cdot (x'-x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$
 (1.4)

Para calcular correladores de muchas partículas se usa el teorema de Wick [1]. Este teorema dice que es posible expresar cualquier correlador como la suma sobre todas las combinaciones de productos de propagadores de Feynman. Es decir, para N par se tiene

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \cdots G(x_{N-1}, x_N) + G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) \cdots G(x_{N-1}, x_N) + \cdots$$

$$(1.5)$$

Además de la cuantización canónica existen otras formas de entender una teoría de campos que son muy útiles. Una de ellas es el formalismo de integral de trayectoria desarrollado por Richard Feynman en 1948. En mecánica cuántica la integral de trayectoria aparece en el cálculo del propagador

$$\langle x, t \mid x', t' \rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n dp_0 \cdots dp_n e^{i \int_{t_0}^t L[x(t), \dot{x}(t)] dt}$$
$$= \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) e^{iS[x(t), \dot{x}(t)]}$$

que tiene la interpretación de una suma, pesada por e^{iS} , sobre todas las trayectorias posibles desde x a x'. Generalizando este concepto a una teoría de campos ahora se tiene que integrar sobre todas las configuraciones posibles del campo

$$\langle \phi(x) \mid \phi(x') \rangle = \int \mathcal{D}[\phi] e^{iS[\phi]}.$$
 (1.6)

Aunque la descripción de los campos libres tiene una interpretación muy clara, los campos que usamos para describir las partículas en la naturaleza no son libres, es decir, sus ecuaciones de movimiento no son lineales en los campos y esto da lugar a que las soluciones no se superpongan. En ese caso la definición de partícula ya no es tan clara porque el campo $\phi(x)$ ya no se puede desarrollar en términos de operadores de creación y aniquilación desacoplados (1.3) así que sólo es posible hablar de partículas libres como estados asintóticos. En la próxima sección revisaremos el formalismo bajo el cuál se entienden las interacciones.

1.1. Teorías con interacción

Para tratar el caso interactuante se trata la evolución temporal del sistema en el cuadro de interacción. En este cuadro se separa el Hamiltoniano en dos partes $H=H_0+H_I$, donde H_0 es el Hamiltoniano del sistema libre y H_I es la parte de la interacción. En general los sistemas que consideramos no tienen una solución exacta así que es conveniente usar teoría de perturbaciones. Desarrollando el operador de evolución temporal en el cuadro de interacción se obtiene la serie de Dyson

$$U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t,t_0) \quad ; \quad U_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^t dt_n \mathcal{T} \left(H_I(t_1) \cdots H_I(t_n) \right) \quad (1.7)$$

donde \mathcal{T} es el operador de orden temporal que impone $t_1 < t_2 \cdots < t_n$ y donde el método de perturbación consiste en acotar esta serie hasta cierto orden n.

Como ejemplo tomamos el campo escalar con un potencial de la forma $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\phi^4$, a la constante adimensional $\lambda = V^{(4)}(0)$ se le conoce como constante de acoplamiento y podemos ver de (1.7) que cuenta el orden de la perturbación. Como mencionamos cuando hablamos de correladores, toda la información física de una teoría de campos se puede extraer de ellos. Al calcular el correlador en está teoría interactuante obtenemos una expresión en términos de operadores de campo de la parte no interactuante $\hat{\phi}_H$

$$G_{N}(x_{1},...,x_{N}) = \langle \Omega | \mathcal{T}\{\hat{\phi}_{H}(x_{1}) \cdot \cdot \cdot \hat{\phi}_{H}(x_{N})\} | \Omega \rangle =$$

$$= \lim_{T \to \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | \mathcal{T}\{\hat{\phi}_{I}(x_{1}) \cdot \cdot \cdot \hat{\phi}_{I}(x_{N}) exp[-i \int_{-T}^{T} dt \hat{H}_{int}^{I}(t)] | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{T}\{exp[-i \int_{-T}^{T} dt \hat{H}_{int}^{I}(t)]\} | 0 \rangle}, \qquad (1.8)$$

donde $|\Omega\rangle$ es el estado base de la teoría con interacciones y $|0\rangle$ es el de la teoría libre. En el numerador de (1.8), la única diferencia con los correladores del campo escalar libre es el término $exp[-i\int_{-T}^{T}dt\hat{H}_{int}^{I}(t)]$ que aparece multiplicando a los operadores de campo. Si tomamos $\lambda\ll 1$, entonces es posible expandir esta exponencial en una serie tal que cada potencia de λ tenga una contribución cada vez menor

$$exp\left[-i\int_{-T}^{T} dt \hat{H}_{int}^{I}(t)\right] = 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^{4}y \hat{\phi}^{4}(y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{4!}\right)^{2} \int d^{4}y_{1} \hat{\phi}_{I}^{4}(y_{1}) \int d^{4}y_{2} \hat{\phi}_{I}^{4}(y_{2}) + \cdots$$

Cuando se hacen los productos de los términos que aparecen en la serie de Dyson con los otros operadores de campo $\hat{\phi}_H(x_i)$ se obtienen términos de la forma

$$\langle 0|T\left\{\hat{\phi}_I(x_1)\cdots\hat{\phi}_I(x_N)\left(\frac{\lambda}{4!}\right)\int d^4y_1\hat{\phi}_I^4(y_1)\right\}|0\rangle. \tag{1.9}$$

Este término queda escrito nuevamente en función de productos de operadores de campo con la única diferencia de que el campo interactuante no está evaluado sobre

un punto fijo sino está integrado sobre todo el espacio tiempo. Usando el teorema de Wick para desarrollar (1.9) en sumas de correladores de dos partículas vemos que el término $\phi^4(y_1)$ da lugar a cuatro propagadores extra. Una forma de visualizar estos procesos de interacción está dada por los llamados diagramas de Feynman que son representaciones pictóricas de cada proceso incluyendo las interacciones 1.1. Así, el efecto de agregar estas interacciones al Hamiltoniano es el de permitir procesos donde el número de partículas cambia entre procesos de interacción. En este caso esto sucede sucede en grupos de cuatro partículas.

Figura 1.1: Algunos diagramas de Feynman para la teoría ϕ^4 con cuatro patas externas. Cada propagador interno implica una integral en espacio de momentos (1.4) y cada vértice un factor de $-i\lambda$. Imagen tomada de [1].

Los diagramas en los que los propagadores en y aparecen todos contraídos entre sí se les conoce como burbujas de vacío y son cancelados por el denominador de modo que se dice que (1.9) representa la suma sobre todos los diagramas de Feynman conexos.

Visto en el formalismo de integral de trayectoria los correladores se calculan mediante la función de partición Z[J] definida por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-i\left(S + \int d^4x J(x)\phi(x)\right)},$$

donde el último término de la exponencial se entiende como un acoplamiento entre el campo y una corriente externa J(x) que se manda a cero al final de los cálculos. De esta forma (1.8) se escribe como

$$G_N(x_1,\ldots,x_N) = \frac{1}{Z[J=0]} \left(\frac{\delta}{\delta J[x_1]} \cdots \frac{\delta}{\delta J[x_n]} Z[J] \right) \Big|_{J=0}$$

Los estados de partículas que viven en el espacio de Fock generado a partir del campo escalar libre son todos del mismo tipo. Como es de esperarse, el campo escalar libre no describe todos los tipos de partículas que aparecen en la naturaleza así que es necesario tomar en cuenta otros tipos de campos. Si consideramos $(n, n^{\dagger}) = (\frac{1}{2}, 0)$ ó $(n, n^{\dagger}) = (0, \frac{1}{2})$ obtenemos los objetos que se conocen como espinor de Weyl izquierdo ψ_I o derecho ψ_D respectivamente. El término izquierdo y derecho se refieren a que

quiralidad tiene cada uno y nos dicen, para partículas no masivas, si la proyección del espín sobre el momento lineal es positiva (derecho) o negativa (izquierdo). Para considerar partículas masivas y tener simetría bajo paridad en la teoría es conveniente fijarnos en el espacio $(\frac{1}{2},0) \bigoplus (0,\frac{1}{2})$ donde definimos un nuevo objeto conocido como espinor de Dirac que está formado por dos espinores de Weyl $\psi = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix}$.

Los generadores de Lorentz en el espacio del espinor de Dirac toman la forma $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$, donde γ^{μ} son matrices complejas que satisfacen el álgebra de Clifford: $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu,\nu}\mathbb{I}$, así, dada una transformación de Lorentz, un campo espinorial de Dirac cambia mediante $\psi \to \psi' = \exp(\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}S^{\lambda\rho})\psi$. La dimensión del espacio vectorial de los espinores depende de las dimensiones del espacio-tiempo tal que si tomamos un espacio-tiempo 2n dimensional, con grupo de Lorentz SO(2n-1,1), entonces la dimensión del espacio vectorial es 2^n . En general, tenemos que el campo es $\mathbb C$ si n es par y $\mathbb R$ si n es impar.

El Lagrangiano de primer orden en derivadas de ψ que describe partículas fermiónicas libres está dado por $\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi$, donde $\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$. Con esto, la ecuación de movimiento para el campo espinorial se vuelve la llamada ecuación de Dirac para un campo espinorial libre

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) = (i\partial_{\mu} - m)\psi(x) = 0.$$

Esta ecuación implica la de Klein-Gordon para cada componente espinorial por lo que es posible expandir cada componente en términos de osciladores desacoplados como en el caso del campo escalar. Al seguir el proceso de cuantización se encuentra que es necesario pedir que los operadores de creación y aniquilación satisfagan relaciones de anticonmutación en lugar de relaciones de conmutación para evitar que las antipartículas tengan energía negativa. Es decir, se intercambia el conmutador $[\cdot, \cdot]$ por el anticonmutador $\{\cdot, \cdot\}$.

La expansión del campo libre de Dirac en modos normales se puede escribir como

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left[\hat{a}_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right] \Big|_{p^0 = E_p}. \tag{1.10}$$

Donde s etiqueta los diferentes estados de espín; $u(p)^s, v(p)^s$ son las soluciones espinoriales de la ecuación de Dirac y $\hat{a}^{s\dagger}_{\vec{p}}, \hat{b}^{s\dagger}_{\vec{p}}$ son los operadores de creación de partícula y antipartícula respectivamente. Para obtener las relaciones de anticonmutación de los operadores, se imponen primero las relaciones sobre el operador de campo $\{\psi_a(\vec{x}), \psi_b^{\dagger}(\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab}$, así, se obtiene

$$\begin{split} \{\hat{a}^{s}_{\vec{p}}, \hat{a}^{s'\dagger}_{\vec{p}'}\} &= (2\pi)^{3} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{ss'} = \{\hat{b}^{s}_{\vec{p}}, \hat{b}^{s'\dagger}_{\vec{p}'}\}, \\ \{\hat{a}^{s}_{\vec{p}}, \hat{a}^{s'}_{\vec{p}'}\} &= \{\hat{a}^{s}_{\vec{p}}, \hat{b}^{s'}_{\vec{p}'}\} = 0 = \{\hat{b}^{s}_{\vec{p}}, \hat{b}^{s'}_{\vec{p}'}\}. \end{split}$$

Estas relaciones coinciden con el hecho que aparece en mecánica cuántica que nos dice que las partículas con espín 1/2 (y en general espín semientero) son fermiones y

satisfacen el principio de exclusión de Pauli. El propagador de Feynman de un fermión está dado por

 $S_d(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} i \frac{p + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}.$

La teoría de un fermión libre tiene una simetría global continua bajo una transformación del grupo $U(1): \psi(x) \to e^{i\theta}\psi(x)$. De acuerdo al teorema de Noether, existe una corriente conservada J^{μ} asociada a dicha simetría cuya componente cero tiene la interpretación de la carga eléctrica. Cuando hacemos el parámetro θ dependiente de la posición $\theta(x)$ la acción ya no es invariante por lo que tenemos que agregar un término adicional. Si se cambia el operador de derivada mediante $\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} + iqA_{\mu}(x)$ se recupera la invariancia ante el grupo U(1) si el campo vectorial $A_{\mu}(x)$ transforma mediante $A_{\mu} \to A_{\mu} - \partial_{\mu} \theta(x)$. Esta es la transformación que se conoce en electromagnetismo como transformación de norma y sabemos que no cambia la física del sistema ya que la dinámica del campo de Maxwell está dada por $S_{Maxwell} = \int d^4x F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$ con $F_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}A(x)_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}(x)$ la intensidad de campo. Al cuantizar covariantemente la teoría de Maxwell se encuentran problemas con la simetría de norma ya que aparecen estados en la teoría que no son físicos (tienen norma negativa). Una manera de arreglar esto es fijar la condición de norma, por ejemplo escogiendo la norma de Coulomb, desde el principio y después cuantizar de manera normal. La otra forma es cuantizar sin elegir norma y después quitar los estados de norma negativa mediante, por ejemplo, el método de cuantización BRST. Con cualquiera de los métodos que se siga la teoría predice que las partículas asociadas al campo libre $A_{\mu}(x)$ tienen espín 1 y son conocidas como fotones.

Al juntar la acción de Dirac con la de Maxwell y pedir invariancia de norma se obtiene la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés), cuya acción está dada por

$$S_{QED} = \int d^4x \left[\bar{\psi} (i \rlap{/}D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right].$$

Las teorías que tienen invariancia de norma son muy importantes ya que además de describir la fuerza electromagnética describen a las demás fuerzas fundamentales que se encuentran en el modelo estándar. Un resultado importante es que para cada generador del álgebra de Lie existe un campo de norma que se incluye en el Lagrangiano para que este sea invariante bajo estas transformaciones, las partículas que corresponden a estos campos de norma dan lugar a bosones que originan las interacciones del resto de los campos, de manera análoga a como el fotón controla las interacciones entre fermiones en QED.

El caso particular de estas teorías de norma que será relevante en este trabajo es aquel en el que el grupo de norma es el de las matrices complejas unitarias con determinante uno, SU(N). A este tipo de teorías que están basadas en grupos no abelianos (el producto del grupo no es conmutativo) se les llama teorías de Yang-Mills en honor a Chen Ning Yang y Robert Mills quienes, en 1954, extendieron el concepto de teoría de norma a dichos grupos en un intento para explicar la interacción fuerte. La densidad

Lagrangiana de una teoría de Yang-Mills está dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a.$$

Donde $F_{\mu\nu}^a$ corresponde a los campos bosónicos que dan la interacción de las partículas fundamentales y la derivada covariante está dada por $D_\mu = \partial_\mu - i\lambda A_\mu$, donde λ es la constante de acoplamiento de los bosones de norma en la teoría y A_μ es una matriz en la representación en la cuál transforman los campos de materia. En particular, las representación más pequeña no trivial del grupo es llamada la representación fundamental, en el caso de SU(N) toma la forma de las matrices complejas unitarias con determinante uno de $N\times N$. Por otro lado, el campo vectorial A_μ asociado a los bosones de norma se transforma en la representación adjunta de SU(N) que actúa sobre elementos del espacio vectorial generado por el álgebra de Lie, es decir, $A_\mu^a = A_\mu T^a$, donde T^a son los generadores del álgebra de Lie.

Un ejemplo de una teoría de Yang-Mills es la cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) que describe a la fuerza fuerte responsable de mantener a los nucleones dentro del núcleo del átomo. Esta teoría es invariante bajo el grupo de simetría SU(3). El Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi} \left(i \not \!\! D_{\mu} - m \right) \psi - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a,$$

donde $\psi(x)$ es un espinor y transforma en la representación fundamental del grupo de norma, este campo está asociado a los quarks que son las partículas fundamentales que interactúan a través de la fuerza fuerte. Cada quark se representa como un estado que puede tener tres "cargas" diferentes. A dichas cargas, que describen la forma en la que interactúan los quarks, se les llama colores. El campo $G_{\mu\nu}$ es el tensor de intensidad de campo y en términos de los campos asociados a los bosones de norma A_{μ} está dado por

$$G_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}A^{a}_{\mu} + gf^{abc}A^{b}_{\mu}A^{c}_{\nu},$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura de la teoría definidas por $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$. Los campos A_{μ} transforman en la representación adjunta de SU(3) y caracterizan la interacción fuerte entre quarks, a las partículas asociadas a estos campos de norma se le conoce como gluones y son los bosones a través de las cuales los quarks interactúan. La constante g que aparece en (1.11) es la constante de acoplamiento de QCD que como veremos en la siguiente sección se puede estudiar con una dependencia energética $g(\mu)$.

1.2. Renormalización

En el cálculo de amplitudes de dispersión se encuentra que las integrales que resultan de integrar propagadores sobre p corriendo de $-\infty$ a ∞ frecuentemente dan un

resultado divergente. Esta divergencia se puede entender como una consecuencia de la escala energética a la que estamos observando a la teoría, así, es posible quitar estas divergencias fijándonos en una escala energética adecuada para el problema, esto se logra por el método conocido como renormalización. En este método se separa la acción de la teoría en dos partes: Una parte que contiene los parámetros de la teoría hasta la energía que los vamos a medir (términos renormalizados \mathcal{L}_{ren}), y otra parte que quita las divergencias que provienen de colocar mal la escala energética (conocidos como contratérminos \mathcal{L}_{CT}). El comportamiento de las divergencias en la teoría se calcula usando algún método de regularización, por ejemplo, imponiendo un límite en la integral de momento (corte UV) o permitiendo que la dimensión de la teoría tome valores continuos (regularización dimensional). Por ejemplo, para la teoría con interacción cuártica se separa al Lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_{CT} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 + \frac{1}{2} \delta Z \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} \delta m^2 Z \phi^2 - \frac{1}{4!} \delta \lambda \phi^4, \tag{1.11}$$

donde los términos con coeficientes $\delta Z, \delta m, \delta \lambda$ dan lugar a nuevas reglas de Feynman de manera que sumando esta contribución y la que viene de \mathcal{L}_{ren} se obtienen resultados finitos.

El estudio de la física a diferentes escalas energéticas es de mucha utilidad porque en general los grados de libertad de un sistema a una cierta escala energética no afectarán aquellos que ocurren a otra escala. Es decir, podemos estudiar teorías efectivas que tomen en cuenta sólo los procesos que tienen una contribución relevante a esa escala energética en particular. De esta forma, obtenemos una relación entre la constante de acoplamiento física y la escala energética, μ , del proceso que estemos considerando $\lambda(\mu)$. El proceso de renormalización es útil para muchas teorías, entre ellas las que se encuentran en el modelo estándar, sin embargo, existen otras como la teoría de gravedad de Einstein que no son renormalizables. Esto significa que las divergencias de la teoría no pueden ser removidas haciendo la separación análoga a (1.11).

La función que describe el comportamiento de la constante de acoplamiento de la teoría con la escala energética recibe el nombre de función beta y se define como

$$\beta = \frac{\partial \lambda}{\partial (\log \mu)},\tag{1.12}$$

La expansión perturbativa que hicimos en (1.7) depende de que λ sea pequeña, cuando este sucede se dice que estamos en el régimen de acoplamiento débil. Por otro lado, cuando la constante de acoplamiento no permite el desarrollo perturbativo decimos que estamos en el régimen de acoplamiento fuerte de la teoría. Por ejemplo, en la electrodinámica cuántica la constante de acoplamiento, α , depende de la energía μ a través de la relación

$$\alpha(\mu) \approx \frac{\alpha(\mu_0)}{1 - \frac{2}{3\pi}\alpha(\mu_0)ln(\frac{\mu}{\mu_0})},\tag{1.13}$$

donde μ_0 es el valor máximo que puede tomar μ . En la figura 1.2 vemos que la región de acoplamiento fuerte se encuentra a energías altas (distancias pequeñas) mientras que el desarrollo perturbativo es válido para energías pequeñas.

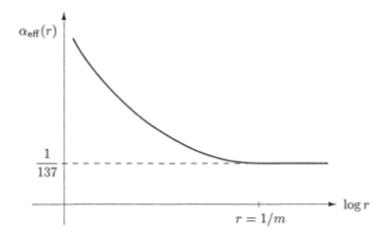


Figura 1.2: Comportamiento cualitativo de la constante de acoplamiento de QED con el logaritmo de la distancia. Vemos que a distancias grandes se aproxima a la carga del electrón. Imagen tomada de [1]

Para la cromodinámica cuántica tenemos el comportamiento opuesto, como podemos ver en la Figura 1.3, ya que la constante de acoplamiento está dada por

$$\alpha_{QCD} \approx \left[\beta_0 ln\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)\right]^{-1},$$
(1.14)

donde β_0 es una constante calculada por Wilczeck, Gross y Politzer y $\Lambda=218\pm24$ MeV es una escala energética conocida como la escala de QCD. Cuando las distancias entre los quarks son grandes (energías pequeñas) comparadas con el tamaño del núcleo tenemos acoplamiento fuerte, mientras que para distancias pequeñas la teoría se encuentra débilmente acoplada. A este tipo de comportamiento que presenta la función beta de QCD se le conoce como libertad asintótica y tiene como consecuencia que no podamos encontrar quarks libres en la naturaleza sino que estos siempre formen estructuras neutras de color con múltiples quarks.

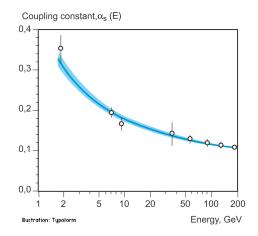


Figura 1.3: Comportamiento de la constante de acoplamiento de QCD que ilustra la libertad asintótica de la teoría y donde podemos ver el acoplamiento fuerte a bajas energías y acoplamiento débil a altas energías. Imagen tomada de [21]

La forma en la que se modifica la teoría mientras la escala energética va cambiando se estudia mediante el flujo del grupo de renormalización. Podemos ilustrar este comportamiento en la teoría del campo escalar libre masivo definiendo una escala $g(\mu) = \frac{m}{\mu}$, la acción en términos de g se escribe como $S = \int d^d x (\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} g^2 m^2 \phi^2)$. Para $g \to 0$, es decir a altas energías comparadas con m, la acción se vuelve la del campo escalar no masivo $S_{UV} = \int d^4 x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ mientras que para energías bajas $g \to \infty$ sólo tenemos el término masivo $S_{IR} = \int d^4 x \frac{m^2 \phi^2}{2}$, cuya ecuación de movimiento es $\phi = 0$. Estas teorías definen lo que se conoce como puntos fijos del grupo de renormalización y tienen la importante propiedad de ser invariantes bajo reescalamientos de las coordenadas. Estos puntos fijos pertenecen a una familia de teorías que se conocen como teorías conformes cuya principal característica es la invariancia ante reescalamientos.

Al igual que las otras formas de etiquetar un campo, las teorías conformes están definidas como aquellas que son invariantes bajo un cierto grupo de transformaciones conocido como el grupo conforme. Este grupo está formado por todas aquellas transformaciones de las coordenadas espacio-temporales que resultan en un cambio de la métrica de la forma

$$g_{\mu\nu}(x) \to \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x). \tag{1.15}$$

Esto quiere decir que aunque el producto punto entre dos vectores puede cambiar, el ángulo entre ellos no lo hará. Para distinguir cuál es el efecto que tienen las transformaciones conformes sobre el espacio-tiempo, es útil dividirlas en dos: Por una parte están formadas por cambios de escala de las coordenadas espacio-temporales, es decir, $x^{\mu} \to \lambda x^{\mu}$. La segunda parte del grupo conforme está formada por las transformaciones conformes especiales que cambian a las coordenadas espacio-temporales a través de

$$x^{\mu} \rightarrow \frac{x^{\mu}-a^{\mu}x^2}{1-2a\cdot x+a^2x^2},$$

donde a^{μ} es el parámetro que describe a la transformación.

Estas transformaciones nos dicen que, desde el punto de vista clásico, la teoría se ve igual a cualquier escala. Esta característica se manifiesta cuánticamente en el hecho de que la función beta (1.12) es cero, es decir, la constante de acoplamiento no depende de la energía. Además de aparecer en la correspondencia holográfica, que veremos en el próximo capítulo, las teorías de campos conformes han sido muy utilizadas en diversas áreas de la física.

1.3. Teorías de Super Yang-Mills

Hemos visto que las simetrías del espacio-tiempo y las simetrías de norma juegan un papel importante para especificar qué tipo de teoría de campos estamos considerando. Sin embargo, falta aún una simetría más para poder describir un tipo de teoría de campos que aparece en la correspondencia holográfica. Esta nueva simetría relaciona los grados de libertad fermiónicos y bosónicos y se le conoce como supersimetría. Al igual que las simetrías de norma, la supersimetría surge de considerar generadores de un álgebra de Lie sólo que en lugar de ser cantidades tensoriales los generadores de la supersimetría Q_{α} son espinoriales. Estos generadores conocidos como supercargas cumplen ciertas relaciones de conmutación con los generadores del grupo de Poincaré y otras relaciones de anticonmutación entre ellos mismos

$$[Q_{\alpha}, M^{\mu\nu}] = i(\sigma_{\mu\nu})^{\beta}_{\alpha}Q_{\beta} \quad , \quad \{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\beta}\} = 2(\sigma^{\mu})_{\alpha\beta} \cdot P_{\mu},$$

 $[Q_{\alpha}, P^{\mu}] = 0 = \{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\},$

donde σ^{μ} son las matrices γ^{μ} restringidas al espacio de espinores de Weyl y $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[\sigma^{\mu} sigma^{\nu} - \sigma^{\nu} sigma^{\mu} \right]$. La acción de estos generadores sobre un estado de partícula es el de cambiar bosones por fermiones y viceversa. Entonces, en una teoría supersimétrica tenemos que por cada partícula bosónica o fermiónica existe un supercompañero que representa una partícula que difiere de la partícula original solamente en que su espín cambia de modo que si teníamos un fermión ahora tenemos un bosón y viceversa. La supersimetría podría ser una simetría presente en la naturaleza aunque todavía no se ha encontrado evidencia experimental de que existe. A pesar de esto, considerar supersimetría es útil en muchas aplicaciones teóricas como la teoría de (super)cuerdas.

Ya explicados estos conceptos tenemos las herramientas necesarias para describir la teoría de campos que aparece en la correspondencia holográfica. Esta es la teoría de campos conforme de Super Yang-Mills (SYM) $\mathcal{N}=4$ con grupo de norma $SU(N_c)$ en espacio-tiempo plano 4-dimensional. El término Super Yang-Mills se refiere a que es una teoría de Yang-Mills con supersimetría; $\mathcal{N}=4$ se refiere al número de supersimetrías presentes donde el número cuatro nos dice que la teoría tiene cuatro veces el número mínimo de supersimetrías que le corresponden a su dimensión, es decir, el

número de conjuntos de generadores \hat{Q}^a . Mientras que $SU(N_c)$ es el grupo de norma de la teoría.

El Lagrangiano de la teoría de Super Yang-Mills está dado por

$$\mathcal{L} = Tr \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2D_{\mu} \phi^{AB} D^{\mu} \bar{\phi}_{AB} - 2i\lambda^{\alpha A} \not\!\!{D}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{A}^{\dot{\alpha}} - 2g\lambda^{\alpha A} [\lambda_{\alpha}^{B}, \bar{\phi}_{AB}], -2g\hat{\lambda}_{\dot{\alpha}A} [\bar{\lambda}_{B}^{\dot{\alpha}}, \phi^{AB}] - 2g^{2} [\phi^{AB}, \phi^{CD}] [\bar{\phi}^{AB}, \bar{\phi}^{CD}] \right\}.$$
(1.16)

Donde g es la constante de acoplamiento de la teoría y su contenido de campos está dado por un campo de norma A_{μ} , cuatro fermiones de Weyl λ_{α}^{A} con $A \in \{1, \ldots, 4\}$ y seis campos escalares reales ϕ^{i} con $i \in \{1, \ldots, 6\}$. Los ϕ_{AB} que aparecen en el lagrangiano forman parte de la representación fundamental 4 del grupo de supersimetría $SU(4)_{R}$ mientras que ϕ transforma en la 6 y están relacionados mediante $\phi^{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma_{AB}^{i} \phi^{AB}$ donde Σ_{AB}^{i} son los coeficientes de Clebsh-Gordan que proyectan el producto de dos 4 en la representación 6.

Esta teoría se encontró por primera vez en el estudio de una teoría de Super Yang-Mills con $\mathcal{N}=1$ en diez dimensiones. Al compactificar seis de estas dimensiones, conservando supersimetría, obtenemos la teoría descrita por el lagrangiano (1.16). El resultado de esta compactificación se manifiesta en el hecho de que las supersimetrías de la teoría en diez dimensiones se mantienen para la teoría en cuatro dimensiones.

A pesar del éxito de las teorías cuánticas de campo para describir la fuerza fuerte, débil y electromagnética todavía no es posible explicar la fuerza de la gravedad a través de ellas. En el próximo capítulo revisaremos algunos de los conceptos fundamentales de la fuerza restante a través del formalismo de la relatividad general de modo que podamos explicar los conceptos básicos de la correspondencia holográfica en el capítulo 3.

Capítulo 2

Teorías de Gravedad

En este capítulo revisaremos la formulación tradicional de Relatividad General así como algunas generalizaciones relevantes para los cálculos principales de este trabajo. En la sección 2.1.1 mencionaremos algunos aspectos importantes de agujeros negros como su termodinámica, la extensión de Kruskal y agujeros negros en AdS. Después, en 2.2, haremos una revisión de algunos resultados en teorías de gravedad con derivadas de orden superior en la curvatura como la construcción de la acción de Lovelock, algunas de sus soluciones y la acción de la llamada gravedad Cuasi-topológica.

2.1. Relatividad General

La descripción actual de la fuerza de gravedad comenzó con la ley de gravitación universal de Newton en 1686. En ella la gravedad se entiende como una fuerza de atracción que se ejerce entre dos cuerpos masivos. Esta teoría dio la primera predicción satisfactoria del movimiento de los cuerpos celestes aunque existían algunos fenómenos que no podía explicar. El camino hacia una nueva teoría de gravitación empezó en 1905 cuando Einstein formuló la teoría de relatividad especial basándose en dos principios fundamentales: la invariancia de la velocidad de la luz y el principio de Galileo. La teoría de Einstein supone una desviación fundamental a las ideas de Galileo sobre marcos inerciales ya que trata el espacio y el tiempo como cantidades dependientes del observador. Esto difiere a la teoría de Newton donde el tiempo es universal entre observadores inerciales de forma que la distancia entre dos eventos que ocurren a un mismo tiempo es independiente del observador. En la relatividad especial la invariancia de la velocidad de la luz para observadores inerciales define una nueva cantidad independiente del observador que recibe el nombre del intervalo

$$ds^{2} = -dt^{2} + (dx^{1})^{2} + \dots + (dx^{n})^{2}.$$
 (2.1)

Así, en la relatividad especial los marcos de referencia inerciales están relacionados entre sí mediante transformaciones, nombradas de Lorentz, que preservan dicho inter-

valo. Podemos entender este escalar como aquel que obtenemos al actuar con un tensor tipo (0,2) sobre dos vectores de modo que se puede escribir (2.1) como $\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$. Al tensor $\eta_{\mu\nu}$ se le llama el tensor métrico del espacio-tiempo plano o la métrica plana y al espacio vectorial formado por (t, x_1, \ldots, x_d) con la condición (2.1) se le conoce como el espacio-tiempo de Minkowski.

En 1915 Einstein desarrolló la teoría de la relatividad general donde extendió las ideas de la relatividad especial a espacio-tiempo curvo postulando que la fuerza de atracción gravitacional es el resultado de la deformación que sufre el espacio-tiempo bajo cuerpos masivos. Esta teoría ha sido muy útil en los últimos 100 años permitiendo explicar aquellos fenómenos que no podían resolverse mediante la gravitación universal de Newton. Entre ellos se encuentra la desviación de la luz debida a cuerpos masivos, la predicción de las ondas gravitacionales y la precesión de la orbita de Mercurio. Las numerosas comprobaciones experimentales y su papel fundamental en diferentes desarrollos tecnológicos han convertido a la Relatividad General en uno de los pilares del conocimiento científico moderno. El postulado que sirve de puente entre las ideas de la relatividad especial y la gravitación es el principio de equivalencia: Unobservador en aceleración constante es localmente equivalente a uno viviendo en un campo gravitacional. De este principio podemos deducir que en cualquier punto de un espacio-tiempo curvo es posible definir de manera local un marco inercial usando coordenadas normales de Riemann [2]. Esta construcción no se puede extender de manera global a todo el espacio-tiempo curvado ya que la dirección de la aceleración constante cambia alrededor del espacio-tiempo y apunta siempre hacia el centro de masa.

En términos matemáticos, el formalismo de la relatividad general es estudiado a través de la geometría diferencial. En esta descripción, el espacio-tiempo se entiende como una variedad diferencial Lorentziana n-dimensional. Sobre estas variedades podemos construir estructuras tensoriales que describen las cantidades relevantes en la teoría física. El tensor más importante es el que usamos para medir distancias en la variedad y, análogamente al caso del espacio-tiempo plano, lo llamamos tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Una forma de caracterizar la variedad que representa al espacio-tiempo es mediante un tensor de rango (0,4) conocido como el tensor de curvatura o tensor de Riemann, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Este tensor esta a su vez descrito en términos del tensor métrico. Las ecuaciones que determinan $g_{\mu\nu}$ se conocen como las ecuaciones de Einstein y están dadas por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$
 (2.2)

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es conocido como el tensor de Einstein, G es la constante gravitacional de Newton, $R_{\mu\nu} = R_{\rho\mu\sigma\nu}g^{\rho\sigma}$ es el tensor de Ricci, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento que define el contenido de materia de la teoría y $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ es el escalar de curvatura. Este último es una cantidad conocida en topología como la densidad de Euler y da lugar, después de integrar sobre la variedad ($\int d\mu R = \int \sqrt{-g} d^4 x R$), a un invariante topológico (no cambia bajo homeomorfismos) que cuenta el número

de manijas que tiene la variedad. Es posible obtener (2.2) a partir de un principio variacional extremizando la acción de *Einstein-Hilbert*

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R,$$
 (2.3)

donde q es el determinante de la métrica.

La acción (2.3) contiene segundas derivadas de la métrica por lo que al variar la acción con respecto a la métrica obtenemos términos de frontera que van como la primera derivada de la métrica $\delta g_{\mu\nu,\rho}$. Si la variedad que estamos estudiando tiene frontera, estos términos tienen que ser cancelados por una contribución extra a la acción para que el problema variacional se encuentre bien definido. El término que arregla estos problemas se conoce como acción de Gibbons-Hawking [3]

$$S_{GH} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial \mathcal{M}} d^3x \epsilon \sqrt{h} K, \qquad (2.4)$$

donde h_{ab} es la métrica inducida en la frontera del espacio-tiempo, $\epsilon = 1$ si $\partial \mathcal{M}$ es tipo tiempo o -1 si es tipo espacio y $K = g^{ab}n_{a;b}$, con n_a un vector unitario perpendicular a la frontera.

Debido a la gran cantidad de soluciones de las ecuaciones de Einstein es últil representar los diferentes espacios-tiempos mediante diagramas que preservan su estructura causal pero tienen un rango finito en las coordenadas. Dichas representaciones son conocidas como diagramas de Penrose. Para Minkowski d-dimensional tomamos la coordenada radial y la temporal y definimos $Y^+ = tanh(t+r), Y^- = tanh(t-r)$ de modo que la información causal del espacio-tiempo queda codificada en el diagrama (2.1).

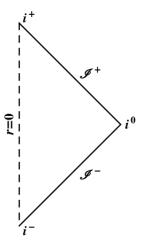


Figura 2.1: Diagrama de Penrose de Minkowski, las líneas a 45° corresponden a las trayectorias nulas. i^0 es el infinito espacial mientras que i^+ e i^- son el infinito temporal futuro y pasado respectivamente. \mathcal{J}^+ es el futuro nulo donde terminan las geodésicas y \mathcal{J}^- es el pasado nulo. Cada punto representa una esfera d-2-dimensional.

2.1.1. Agujeros negros

Dada la complejidad de las ecuaciones de Einstein una de las formas en las que se pueden obtener soluciones exactas es estudiando variedades con simetrías. La primera solución a (2.2) fue dada sólo dos años después de que Einstein publicó sus ecuaciones en 1916 por Karl Schwarzchild para un espacio-tiempo esféricamente simétrico sin contenido de materia y estático, en D=4 dimensiones espacio-temporales toma la forma

$$ds^{2} = -f(r)dt^{2} + f(r)^{-1}dr^{2} + r^{2}d\Omega^{2}, \ f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$$
(2.5)

Esta familia de soluciones, dependientes de M, pretende describir el espacio-tiempo afuera de una estrella de masa M que se colapsó gravitacionalmente sin carga y sin momento angular. Así, la solución es válida para r>R con R el radio del cuerpo celeste.

Cuando el cuerpo a estudiar es muy masivo la región de $r_0 = 2M$ se encuentra fuera del cuerpo celeste por lo que forma parte del espacio-tiempo. En esta situación, la función f(r) cambia de signo cuando se cruza el radio r_0 de modo que el carácter de los eventos con separación tipo-espacio se vuelve tipo-tiempo y viceversa. Al lugar geométrico donde $f(r_0) = 0$ se le conoce como el horizonte de eventos ya que cualquier partícula o rayo de luz que atraviese dicho radio cae hacia r = 0 en un tiempo propio finito y no puede regresar a un radio mayor.

Aunque el horizonte de eventos parece ser un lugar especial debido a que la métrica diverge en r_0 , este no es una singularidad del espacio-tiempo. El procedimiento usual que se sigue para revelar que el horizonte no es una singularidad de la geometría es pasar a coordenadas que corren sobre las geodésicas nulas. Al ampliar el rango de dichas coordenadas obtenemos una extensión del espacio-tiempo original donde es claro que la región del horizonte no corresponde a una singularidad geométrica. Para realizar esta extensión primero tomamos la ecuación de la geodésica nula que sólo se mueve radialmente

$$0 = g_{\mu\nu}\dot{k}^{\mu}\dot{k}^{\mu} = -f(r)\dot{t} + \frac{\dot{r}}{f(r)}$$
$$\rightarrow t = \pm \int \frac{dr}{f(r)} + c$$

y definimos las coordenadas de Regge-Wheeler como aquellas que parametrizan a las diferentes geodésicas

$$u = t - r_*,$$
$$v = t + r_*,$$

donde u corre sobre las geodésicas salientes, v las entrantes y $r_* = \int \frac{dr}{f(r)}$. Haciendo esta construcción para la métrica de Schwarzchild se obtiene

$$ds^2 = -\frac{2Me^{(v-u)/4M}}{r}du\ dv.$$

Definiendo nuevas coordenadas usando el parámetro afín de las geodésicas se remueve la dependencia de u y v, $U = -e^{-u/4M}$, $V = e^{v/4M}$, y se obtiene la métrica

$$ds^{2} = -\frac{32M^{3}e^{-r/2M}}{r}dU\,dV. \tag{2.6}$$

Así, vemos que el horizonte, ahora en U=0 ó V=0, no es una singularidad geométrica y la divergencia de la métrica se debe a una mala elección de coordenadas, la única singularidad real del espacio-tiempo se encuentra en r=0. Si se hace un cambio de coordenadas más a T=(U+V)/2, X=(V-U)/2, la métrica toma la forma dada por Kruskal en 1960

$$ds^{2} = \frac{32M^{3}e^{-r/2M}}{r} \left(-dT^{2} + dX^{2}\right) + r^{2}d\Omega^{2}.$$

La métrica de Kruskal está definida en r>0, es decir, $X^2-T^2>-1$, sin embargo, se puede extender de forma analítica para incluir $X,T\in\mathbb{R}$. De esta forma obtenemos el espacio extendido de Schwarzchild cuyo diagrama de Penrose está dado en la Figura 2.2a).

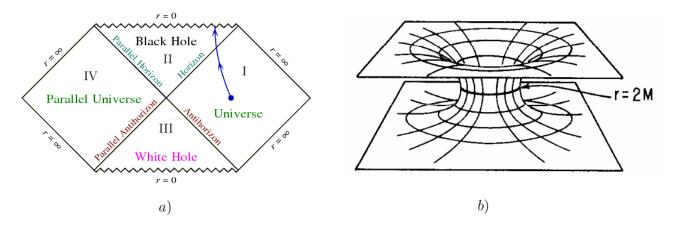


Figura 2.2: a) Vemos la estructura causal de la extensión del espacio-tiempo de Scwharzchild, cada punto representa una esfera 2-dimensional. Imagen tomada de [5]. b) Un corte a t=0 del espacio de Kruskal. La parte de arriba de r=2m es la región I mientras que la parte de abajo es la región IV. Imagen tomada de [2].

La región I es la que corresponde a r>2M en el espacio de Schwarzchild original (2.5). Podemos ver que r=0 corresponde a $X=\pm\sqrt{T^2-1}$ que ahora es una región tipo espacio que se encuentra en el futuro de la región I y en el pasado de la región III. Una partícula que caiga radialmente desde I cruzará el horizonte en X=T hacia la región II y en un tiempo propio finito llegará a la singularidad en $X=\sqrt{T^2-1}$. La región III tiene una estructura parecida a la II solo que ahora cualquier partícula se origina en la singularidad $X=-\sqrt{T^2-1}$ y toma un tiempo propio finito en salir

de III. Este comportamiento parece ser opuesto a la región II por lo que a esta región se le conoce como agujero blanco. La región IV es idéntica a I aunque ambas no pueden comunicarse entre sí ya que sus señales caen al agujero negro. Podemos ver la situación física que describe el espacio-tiempo a t=0 en la Figura 2.2b. Este espacio-tiempo no es muy útil para describir sistemas físicos pero tiene interés teórico como veremos en los siguientes capítulos.

Aunque, para D=4, la métrica (2.5) es la única solución esféricamente simétrica en el vacío de las ecuaciones de Einstein, en general el comportamiento de un agujero negro se manifiesta en muchas soluciones. De manera formal un agujero negro es un espaciotiempo que contiene una región que no está en el pasado del cono de luz del infinito futuro tipo tiempo [6]. La frontera de dicha región es una superficie nula estacionaria que llamamos horizonte de eventos y la topología de dicho horizonte depende de la simetría de nuestro sistema, en el caso de Schwarzchild D-dimensional el horizonte es una esfera D-2 dimensional pero también es posible encontrar soluciones cuyos horizontes tienen otras topologías.

Una manera de considerar diferentes soluciones con horizontes de eventos es tomando en cuenta nuevos campos, por ejemplo, agregando un campo vectorial a la acción mediante el término $S_A = \int \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$. Así, se obtiene un parámetro adicional que caracteriza a la solución en la carga eléctrica del agujero negro Q. Esto da lugar a la métrica de Reissner-Nordström

$$ds^{2} = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)dt^{2} + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^{2}}{r^{2}}\right)^{-1}dr^{2} + r^{2}d\Omega^{2},\tag{2.7}$$

donde la intensidad de campo electromagnética está dada por $F_{01} = \frac{Q}{r^2}$. Al igual que el agujero negro de Schwarzchild tenemos el comportamiento del horizonte de eventos sólo que esta vez $f(r_0) = 0$ tiene dos soluciones $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ y obtenemos comportamientos diferentes dependiendo de la relación entre M y Q: Para $M^2 < Q^2$ ambas soluciones son imaginarias así que tenemos lo que se denomina como una singularidad desnuda. Cuando $M^2 = Q^2$ decimos que estamos en el caso extremal y sólo tenemos un horizonte aunque en este caso f(r) no cambia de signo al cruzar r = 2M. Para $M^2 > Q^2$ las dos raíces son reales y tenemos dos horizontes de eventos en r_+ y r_- .

al considerar un agujero negro con momento angular se obtiene una métrica distinta, conocida como la métrica de Kerr, dada por

$$ds^{2} = -\frac{\Delta}{\rho^{2}}(dt - asin^{2}(\theta)d\phi)^{2} + \frac{sin^{2}(\theta)}{\rho^{2}}\left[(r^{2} + a^{2})d\phi - adt\right]^{2} + \frac{\rho^{2}}{\Delta}dr^{2} + \rho^{2}d\theta^{2}, (2.8)$$

donde $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2(\theta)$. Esta métrica, como la de Reissner-Nordström y la de Schwarzchild, tiene como vectores de Killing a ∂_t y a ∂_{ϕ} que dan lugar a dos cantidades conservadas: la masa M y el momento angular J = aM. A diferencia de la métrica de Schwarzchild y de Reisner-Nostrodm sólo tenemos simetría discreta cuando cambiamos el signo de t y ϕ al mismo tiempo, es decir $(t, \phi) \to (-t, -\phi)$,

ya que el invertir el tiempo también cambia la dirección de giro. Este agujero negro también tiene un horizonte externo y uno interno dados por $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$. Uniendo las contribuciones del campo y del momento angular podemos tener agujeros negros que giren y estén cargados tal que si tenemos un potencial de campo eléctrico dado por $A = \frac{-Q}{\rho^2} \left(dt^2 - a sin^2(\theta) d\phi \right)$ la solución de Kerr se modifica sustituyendo en $(2.8) \Delta \rightarrow \Delta' = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$.

A los parámetros como la masa, carga y momento angular que caracterizan a las soluciones de agujero negro se les denomina pelo del agujero negro. Un aspecto que facilita el estudio de esta familia de espacios-tiempos, en D=4 dimensiones, es el teorema de no-pelo [7] que nos asegura que un agujero negro estacionario en una teoría de Einstein-Maxwell queda completamente caracterizado por los tres parámetros que hemos revisado: J,Q y M. Para estudiar agujeros negros más complejos hay que relajar las restricciones de este teorema, como veremos en las siguientes secciones es posible ponerle pelo extra a los agujeros negros si consideramos teorías con mayores potencias en R, aumentando la dimensión del espacio-tiempo, o considerando teorías con un diferente contenido de campos.

Además de estas propiedades de los agujeros negros, Hawking [8] encontró que es posible asociarle temperatura a los agujeros negros. Podemos llegar a dicho resultado considerando la teoría de gravedad desde el formalismo de integral de trayectoria (1.6). Si se tiene un conjunto de campos de materia, ϕ , entonces la amplitud de tener a la teoría en un estado dado por g_1, ϕ_1 y terminar con otro dado por g_1, ϕ_2 está dada por

$$\langle g_2, \phi_2 \mid \phi_1, g_1 \rangle = \int_{\phi_1, g_1}^{\phi_2, g_2} \mathcal{D}[g, \phi] e^{iS[g, \phi]}.$$

Al hacer una rotación de Wick, pasando el tiempo a una variable compleja $t=-i\tau$, la integral de trayectoria se vuelve $Z=\int \mathcal{D}[g,\phi]e^{-\hat{S}[g,\phi]}$, con $\hat{S}=-iS$ la acción Euclideana. Haciendo un análogo con física estadística buscamos ahora construir la función de partición del ensamble canónico. Para esto consideramos una amplitud en una QFT mediante

$$\langle \phi_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | \phi_1 \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]},$$

si se hace la rotación de Wick con $t_2 - t_1 = -i\beta$ y $\phi_2 = \phi_1$, sumando sobre una base completa de configuraciones se obtiene

$$\mathcal{Z} = \sum_{E_n} e^{-\beta E_n} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\hat{S}[\phi]},$$

para el campo a temperatura $T = \beta^{-1}$ donde E_n es la energía del n-ésimo eigenestado y tomamos la integral funcional sobre todos los campos ϕ que tienen periodo β^{-1} en el tiempo imaginario.

Hacer la identificación periódica del tiempo no tiene problemas para métricas generales pero en el caso de los agujeros negros encontramos una restricción en el periodo

debida al horizonte de eventos. Para ver esto, tomamos una métrica de agujero negro general,

$$ds^{2} = f(r)dt^{2} - \frac{dr^{2}}{f(r)} - \cdots,$$
 (2.9)

y pasamos al tiempo Euclideano $t_E=it$. Con este cambio, el elemento de línea Euclideano ds_E^2 toma la forma

$$ds_E^2 = -\left(f(r)dt_E^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + \cdots\right).$$

Si nos enfocamos en el comportamiento de la función f(r) cerca del horizonte podemos usar el hecho de que se hace cero en $r = r_0$ para aproximarla como $f(r) \approx f'(r_0)(r - r_0)$. Así, el elemento de línea se vuelve

$$ds_E^2 \approx -\left(\frac{ds^2}{f'(r_0)(r-r_0)} + f'(r_0)(r-r_0)dt_E^2 + \cdots\right),$$

para ver porque este resultado da lugar a un estado térmico se define otro conjunto de variables:

$$\rho = 2\sqrt{\frac{(r-r_0)}{f'(r_0)}},$$

$$\theta = \frac{f'(r_0)t_E}{2},$$

donde asumimos que $f'(r_0) > 0$, si es menor que cero entonces tomamos $-f'(r_0)$ y hacemos el mismo desarrollo. Transformando el tensor métrico se obtiene el nuevo elemento de línea

$$ds_e^2 \approx -\left(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \cdots\right),$$

que tiene la forma del elemento de línea de coordenadas polares donde la coordenada radial es ρ y la angular es θ . Esta métrica tiene una singularidad cónica en $\rho = 0$ a menos que la coordenada θ tenga periodo 2π . Así, la coordenada t_E tiene un periodo $4\pi/f'(r_0)$ y vemos que el horizonte del agujero negro nos dice que la temperatura de la teoría está dada por

$$T_H = \frac{1}{\beta} = \frac{f'(r_0)}{4\pi}.$$
 (2.10)

Si se aplica este resultado a la métrica de Schwarzchild (2.5) se obtiene que la temperatura asociada al agujero negro está dada por

$$T_H = \frac{1}{8\pi M}.$$
 (2.11)

El incluir la temperatura como una propiedad del agujero negro nos lleva a preguntarnos si se pueden generalizar los demás conceptos termodinámicos como entropía y

energía al estudio de este espacio-tiempo. En este contexto, el hecho de que ningún cuerpo pueda salir del horizonte de eventos parece indicar una violación a la segunda ley de la termodinámica. Para arreglar este problema, Bekenstein propuso que el área del horizonte del agujero negro es proporcional a su entropía, de esta forma la entropía perdida por el universo cuando algo cae al agujero negro es ganada por el agujero negro mediante el incremento de su área. De acuerdo a las leyes de la termodinámica, este aumento de entropía debería tener asociado una temperatura a través de la energía (masa) del agujero negro y resulta ser igual a la temperatura de Hawking (2.10). Esta conexión entre agujeros negros y termodinámica se hace más clara revisando las leyes de los agujeros negros:

- Ley Cero: La gravedad superficial κ está definida como la aceleración necesaria para mantener un objeto en el horizonte de eventos. Si V^a es un vector de Killing normalizado la gravedad superficial queda definida mediante $V^a \nabla_a V^b = \kappa V^b$. La ley cero asegura que la gravedad superficial es constante en el horizonte de eventos de un agujero negro estacionario. Esto es análogo a la ley cero de la termodinámica que afirma que la temperatura de un cuerpo en equilibrio es constante a través del mismo.
- Primera Ley: Si M es la masa del agujero negro, A el área de su horizonte, Q su carga con potencial químico μ y J su momento angular con potencial Ω entonces $dM = \frac{\kappa}{8\pi G}dA + \mu dQ + \Omega dJ$. Debido al teorema de no-pelo esta ley tiene un carácter general ya que A = A(Q, M, J). Esta ley es análoga a la ley de conservación de energía en un sistema cerrado en termodinámica.
- Segunda Ley: En un proceso dinámico el área del horizonte en un agujero negro nunca decrece. Análogo a que la entropía nunca decrezca en termodinámica.

$$\delta A > 0$$

lacktriangle Tercera Ley: Es imposible que la gravedad superficial se vaya a cero en algún proceso físico finito. Al igual que la primera ley esta ley se relaciona con la de la termodinámica reemplzando κ por la temperatura.

Ya teniendo la función de partición de la teoría, podemos hacer los cálculos termodinámicos como los haríamos para cualquier sistema estadístico. Por ejemplo se puede definir la energía libre de Helmholtz

$$F = M - TS = -T \ln \mathcal{Z} \approx -S[g_{sol}], \qquad (2.12)$$

donde g_{sol} es la métrica del espacio-tiempo y hemos usado la aproximación de punto silla para escribir $\int \mathcal{D}[g]e^{-S[g]} \approx e^{-S[g_{sol}]}$.

El evaluar la acción en la métrica que es la solución implica integrar sobre el volumen (normalmente infinito) de la variedad que estemos considerando por lo que dicho cálculo normalmente presenta divergencias. Para regularizar esta acción y medir la energía con respecto a un punto de referencia lo que se hace es sustraer la contribución

de un espacio-tiempo adecuado. En el caso de los agujeros negros se sustrae el espaciotiempo al que tiende el agujero negro asintóticamente, por esta razón es importante que la teoría de gravedad bajo consideración incluya la solución asintótica del agujero negro por si sola [4].

Ya teniendo una interpretación más clara de la termodinámica del agujero negro podemos enunciar la primera ley de la termodinámica usual como

$$dM = TdS = \frac{\kappa \hbar}{8\pi G} dA,$$

e identificamos la entropía del agujero negro a través de la primera ley

$$S = \frac{Ac^3}{4G\hbar}. (2.13)$$

Al analizar la termodinámica del agujero negro Schwarzchild más a detalle una característica importante que surge es que el sistema es termodinámicamente inestable debido a que su calor específico, $\partial M/\partial T$, es negativo. Esto se sigue de (2.11) ya que cuando el agujero negro incrementa su temperatura, su masa disminuye y sigue siendo de esta forma hasta que el agujero negro se evapora. Por otro lado, cuando se pone en contacto con un reservorio más frío el decremento en la temperatura haría que el agujero negro gane más masa de la que puede radiar y crecería de forma indefinida. Una forma de arreglar este problema es considerar un comportamiento asintótico del agujero negro que no sea Minkowski. Cuando tomamos (2.5) en el límite alejado del horizonte $\frac{r}{2M} >> 1$ tenemos f(r)=1 y la métrica se vuelve plana. Sin embargo, existen otras soluciones máximamente simétricas 1 que podemos considerar. Entre ellas se encuentra el espacio-tiempo de Anti-de Sitter, para obtener esta solución se tiene que tomar en cuenta el término de constante cosmológica en las ecuaciones de Einstein: $G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0$, $\Lambda = -\frac{(n-1)(n-2)}{2b^2}$, donde b es el radio del espacio-tiempo. Así, se obtiene un espacio-tiempo definido como la variedad n-dimensional encajada en el espacio $\mathbb{R}^{2,n}$ que satisface

$$(X^n)^2 + (X^0)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (X^i)^2 = b^2.$$
 (2.14)

Esta relación se puede cumplir usando un gran número de coordenadas dependiendo de la región que se busque conocer del hiperboloide. Una elección de coordenadas que cubre a toda la variedad está dada por

$$X_0 = \sqrt{b^2 + r^2} cos\left(\frac{t}{b}\right)$$
, $X_n = \sqrt{b^2 + r^2} sen\left(\frac{t}{b}\right)$, $X_i = r\Omega_i$,

donde $\sum_i X_i^2 = 1, t \in \mathbb{R}, r \geq 0$, al espacio-tiempo resultante se le conoce como AdS Global y tiene una métrica dada por

$$ds^{2} = f(r)dt^{2} - \frac{dr^{2}}{f(r)} - r^{2}d\Omega_{n-2}^{2} \quad ; \quad f(r) = \frac{r^{2}}{b^{2}} + 1.$$
 (2.15)

¹Tiene el mismo número de vectores de Killing (simetrías) que el espacio plano euclideano.

Además de esta elección de coordenadas existen otras formas de parametrizar a (2.14) que serán de mucha utilidad en los siguientes capítulos. Una de ellas es conocida como coordenadas de Poincaré y parametriza a AdS mediante

$$X^{0} = \frac{1}{2z} \left(z^{2} + b^{2} + \sum_{i} (\hat{x}^{i})^{2} - t^{2} \right), X^{i} = R\hat{x}^{i},$$
$$X^{n-1} = \frac{1}{2z} \left(z^{2} - b^{2} + \sum_{i} (\hat{x}^{i})^{2} - t^{2} \right), X^{n} = \frac{bt}{z}$$

En estas coordenadas la métrica se vuelve

$$ds^{2} = \frac{b^{2}}{z^{2}} \left(-dt^{2} + \sum_{i} d\hat{x}^{i^{2}} + dz^{2} \right).$$
 (2.16)

Las coordenadas de Poincaré sólo cubren una parte del hiperboloide (2.14) como podemos ver en la figura 2.3. Este subespacio corresponde a los observadores con aceleración propia constante que están desconectados causalmente del resto de AdS por un horizonte de aceleración de manera similar a la relación entre el espacio-tiempo de Rindler y el de Minkowski.

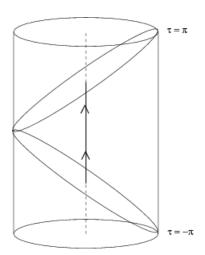


Figura 2.3: El espacio Ads global y la cuña de Poincaré.

A la superficie del cilindro de AdS Global se le conoce como la frontera de AdS y se encuentra en $r \to \infty$ para AdS global y en z=0 para la cuña de Poincaré. Como podemos ver de la métrica (2.16) el espacio aumenta su volumen cuando nos acercamos a la frontera. A la región $r=0, z\to \infty$ se le conoce como el horizonte de AdS, recibe este nombre porque si nos fijamos en la región cercana al horizonte del agujero negro extremal ($M^2=Q^2$) de Reissner-Nordström (2.7) se obtiene $AdS \times S^{d-2}$.

Regresando a la termodinámica de agujeros negros, la característica que hace a un espacio asintóticamente AdS un buen candidato para eliminar la inestabilidad es el

hecho de que existe una barrera de potencial infinita en $r \to \infty$. Una forma de ver esto es considerar una partícula con 4-momento $P^{\mu} = (-E, P^0, P^1, \dots, P^d)$ y un observador estático en infinito con 4-velocidad U^{μ} . De acuerdo a la ley de Tolman la energía medida por el observador está dada por

$$E = -g_{\mu\nu} = \frac{E_{\infty}}{\sqrt{-g_{00}}},\tag{2.17}$$

entonces para AdS $E \to 0$ cuando $r \to \infty$. Como la temperatura escala como la energía, T está corrido al rojo de la misma manera que la energía.

Para explorar la termodinámica de los agujeros negros en AdS revisamos la teoría de Einstein en D=4. En esta teoría el espacio-tiempo conocido como AdS-Schwarzchild es la única solución de agujero negro en el vacío con constante cosmológica negativa que es estática y tiene simetría esférica [4]

$$ds^{2} = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^{2}}{b^{2}}\right)dt^{2} + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^{2}}{b^{2}}\right)^{-1}dr^{2} + r^{2}d\Omega^{2}.$$
 (2.18)

Podemos ver que al tomar el límite r/2M >> 1 recuperamos AdS global por lo que tenemos un espacio asintóticamente AdS. Al igual que en el agujero negro cargado (2.8) vemos el comportamiento de varios horizontes dependiendo de la relación entre las constantes M y b. Para calcular la termodinámica tomamos el radio más grande, r_+ , y usando la fórmula (2.10) vemos que $T = \frac{b^2 + 3r_+^2}{4\pi b^2 r_+}$. Podemos ver la diferencia en la relación entre la masa y la temperatura de Schwarzchild y Ads-Schwarzchild en 2.4.

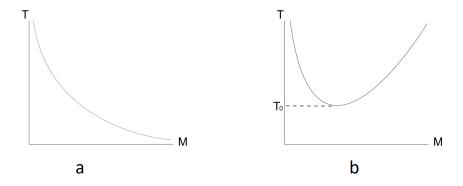


Figura 2.4: a) La Temperatura del agujero negro de Schwarzchild graficada con la masa del agujero negro, la pendiente (calor específico) siempre es negativa lo que indica una inestabilidad. b) La Temperatura de Schwarzchild contra la masa del agujero negro, vemos que para $T < T_0$ no puede existir un agujero negro y el espacio se encuentra lleno de radiación. Para una temperatura mayor tenemos dos soluciones, el agujero negro con menor radio es inestable ya que su pendiente es negativa [4].

Para obtener las demás cantidades termodinámicas debemos calcular la energía libre F a través de la acción en la capa de masa (2.12). Como mencionamos anteriormente

para regularizar el resultado de la integral en AdS-Schwarzchild necesitamos sustraer la contribución de AdS global. Integrando hasta una corte en la variable radial r=K se obtiene

$$I_{AdS} = \frac{\Lambda}{8\pi} \int_0^{\beta_1} \int_0^K r^2 dr \int_{S^2} d\Omega = \frac{\Lambda}{6} \beta_1 K^3,$$

por otro lado el resultado de evaluar la acción de AdS-Schwarzchild es

$$I_{AdS-Sch} = \frac{\Lambda}{8\pi} \int_0^{\beta_0} dt \int_{r_+}^K r^2 dr \int_{S^2} d\Omega = \frac{\Lambda}{6} \beta_0 (K^3 - r_+^3).$$

El periodo del tiempo imaginario en AdS-Schwarzchild, β_1 , está definido por la singularidad cónica del horizonte, sin embargo, la temperatura de AdS Global no tiene esta restricción de modo que es arbitraria. Para que la comparación entre las energías libres tenga sentido se pide que las dos métricas sean iguales en el lugar del corte, r = K. De esta forma las dos coordenadas temporales tienen el mismo periodo y se tiene la relación

$$\beta_1 = \beta_1 \sqrt{1 + \frac{K^2}{b^2}} = \beta_0 \sqrt{1 - \frac{2M}{K} + \frac{K^2}{b^2}}$$

Así, para K grande se obtiene

$$I = I_{AdS} - I_{AdS-Sch} = \frac{\pi r_+^2 (b^2 - r_+^2)}{b^2 + 3r_+^2}.$$
 (2.19)

De aquí se puede calcular la energía y entropía promedio usando las relaciones termodinámicas usales

$$\langle E \rangle = M$$
 , $S_{BH} = \pi r_+^2$.

La entropía es la misma que hubieramos obtenido al usar la fórmula de Bekenstein-Hawking (2.13) así que tenemos una descripción consistente. De estas fórmulas podemos ver que cuando r=b la energía libre es cero F=0 y $T=T_1=1/\pi b$, mientras que para $r_+ < b$ se obtiene F>0 y en la región donde $r_+>b$ se tiene F<0. Esto quiere decir que para $T< T_1$ la radiación domina la función de partición mientras que para $T>T_1$ el agujero negro la domina. Una transición de fase de primer orden, conocida como transición de Hawking-Page, ocurre en $T=1/\pi b$ en donde el estado estable del agujero negro cambia de estar dominado por radiación a un agujero negro grande.

2.2. Generalizaciones de Relatividad General

Además de la acción de Einstein-Hilbert existen otras formas de combinar cantidades físicas que resultan en una acción invariante bajo difeomorfismos. Sin embargo, aunque la acción contenga términos más generales que (2.3) no es seguro que los resultados se manifiesten en las ecuaciones de movimiento, es decir, que tengan sentido físico. Dado

que sabemos que la relatividad general funciona muy bien para explicar fenómenos macroscópicos, es de interés buscar teorías que se reduzcan a RG en un cierto límite. Una manera de lograr esto es agregarle términos a la acción de Einstein-Hilbert, de este modo aseguramos que cuando mandemos a cero los nuevos términos regresaremos a las ecuaciones de Einstein.

La forma de los términos adicionales que se pueden agregar es altamente no trivial. Sin embargo, fijándonos en las características topológicas de la variedad existe una manera sistemática de agregar términos que son consistentes con la relatividad general. El teorema de Gauss-Bonnet generalizado dice que en una variedad Riemanniana 2ndimensional M con tensor de curvatura $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ se tiene

$$\int_{M} \operatorname{Pf}(R) = (2\pi)^{n} \chi(M),$$

donde Pf(R) es el Pfaffiano del tensor de curvatura y $\chi(M)$ es la característica de Euler. Así, podemos obtener una acción en n-dimensiones integrando la expresión contenida en el teorema de Gauss-Bonnet. Dicha acción recibe el nombre de acción de Lovelock [9] y está dada por

$$I_{\text{Lovelock}} = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \sum_{k=0}^{\left[\frac{D-1}{2}\right]} \frac{1}{2^k} \delta^{\mu_1 \nu_1 \cdots \mu_k \nu_k}_{\alpha_1 \beta_1 \cdots \alpha_k \beta_k} a_k R^{\alpha_1 \beta_1}_{\mu_1 \nu_1} \cdots R^{\mu_k \nu_k}_{\alpha_k \beta_k} + I_B, \tag{2.20}$$

$$\delta_{\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_k\beta_k}^{\mu_1\nu_1\cdots\mu_k\nu_k} = (2k)!\delta_{[\alpha_1}^{\mu_1}\delta_{\beta_2}^{\nu_2}\cdots\delta_{\alpha_k}^{\mu_k}\delta_{\beta_k]}^{\nu_k}, \tag{2.21}$$

donde [n] es la parte entera de n, I_B es el término de frontera análogo a (2.4) y a_k son las constantes de acoplamiento de la teoría.

La teoría de Lovelock es la teoría más general de gravedad pura, sin torsión², cuyas ecuaciones de movimiento son de segundo orden en la métrica y están dadas por un tensor de rango 2 simétrico $\epsilon_{\mu\nu}=0$ [9]. Las teorías de Lovelock además tienen los mismos grados de libertad que la teoría de Einstein y son libres de fantasmas en derivadas de orden superior, es decir, el término cinético corresponde a la signatura correcta. La construcción de (2.20) se encuentra restringida por el número de dimensiones de la teoría debido a que integrar una característica de Euler en una dimensión mayor a $\left[\frac{D-1}{2}\right]$ sólo da una constante, es decir, no afecta la física del sistema. Por ejemplo, para obtener contribuciones físicas de los términos con $a_{k>2}$ es necesario considerar dimensiones mayores a cuatro donde (2.20) sólo tiene el término de Einstein-Hilbert. A partir de 5 dimensiones se puede agregar un segundo término que es cuadrático en la curvatura conocido como término de Gauss-Bonnet

$$\mathcal{L}_{GB} = R^2 - 4R_{abcd}R^{abcd} + R_{ab}R^{ab}. \tag{2.22}$$

Al igual que en Einstein-Hilbert en las teorías de Lovelock existen soluciones de curvatura constante en el vacío. Cada una de las soluciones tiene una "constante

²Para toda función $f: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ se cumple $\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = 0$

cosmológica" Λ_i distinta que se encuentra como solución un polinomio característico de orden $K \leq \left\lceil \frac{d-1}{2} \right\rceil$

$$\Gamma[\Lambda] = \sum_{k=0}^{K} a_k \Lambda^k = a_K \prod_{i=1}^{K} (\Lambda - \Lambda_i), \qquad (2.23)$$

donde cada solución corresponde a un vacío diferente de curvatura positiva, negativa o cero. Por ejemplo para Gauss-Bonnet la constante cosmológica efectiva tiene sólo dos valores posibles

$$\Lambda_{\pm} = -\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda L^2},$$

donde $\lambda = a_2$ y L es el radio del espacio-tiempo. Cuando $\lambda = \frac{1}{4}$ ambas soluciones son iguales. Para $1-4\lambda>0$ existen dos vacíos de AdS en los que podemos definir la teoría mientras que cuando $1-4\lambda<0$ encontramos que no existen vacíos con curvatura constante.

Las teorías de Lovelock también admiten soluciones de agujeros negros cuya métrica está dada por [10]

$$ds^{2} = -f(r)dt^{2} + f(r)^{-1}dr^{2} + \frac{r^{2}}{L^{2}}d\Sigma_{d-2,\sigma} \quad , \quad d\Sigma_{d-2,\sigma} = \frac{d\rho^{2}}{1 - \sigma\rho^{2}/L^{2}} + \rho^{2}d\Omega_{d-3}^{2},$$

la libertad de escoger la variedad Σ nos permite escoger entre diferentes simetrías del horizonte aunque en este trabajo sólo revisaremos el caso de topología esférica $\sigma = 0$ y plana $\sigma = 1$. Las ecuaciones de movimiento definen a la función f(r) a través de

$$\left[\frac{d}{d(\ln r)} + (d-1)\right] \sum_{k=0}^{K} a_k g^k = 0$$
 , $g = \frac{\sigma - f(r)}{r^2}$,

cuya solución queda expresada por el mismo polinomio que aparece en (2.23)

$$\Gamma[g] = \sum_{k=0}^{K} a_k g^k = \frac{\kappa}{r^{d-1}},\tag{2.24}$$

donde κ es una constante de integración que está relacionada con la masa del agujero negro a través de $M=\frac{(d-2)V_{d-2}}{16\pi G_n}\kappa$ con V_{d-2} el volumen unitario del horizonte (d-2)-dimensional.

La ecuación (2.24) tiene K diferentes raíces para cada valor del radio por lo que tenemos K diferentes ramas asociadas a cada una de las diferentes constantes cosmológicas. Es de interés considerar a las teorías de Loveleock como extensiones de relatividad general por lo que nos concentraremos en la rama de Einstein-Hilbert, es decir, aquel conjunto de soluciones que se puede reducir a Einstein-Hilbert cuando mandamos $a_{k>2}$ a cero. Cuando la solución de agujero negro de Lovelock presenta un horizonte de eventos podemos calcular la temperatura removiendo la singularidad cónica

$$T = \frac{r_+}{4\pi} \left[(d-1) \frac{\Gamma[g_+]}{\Gamma'[g_+]} - 2g_+ \right],$$

esta cantidad siempre es positiva para agujeros negros con horizonte esférico . Al igual que en la teoría de Einstein-Hilbert la energía libre se calcula regularizando la acción evaluada en la capa de masa sustrayendo el término que viene de considerar la métrica de AdS sin agujero negro, es decir,

$$I = I_{BH} - I_{AdS} = \frac{-V_{d-2}}{16\pi G_N} \sum_{k=0}^{K} \frac{a_k(d-2)}{d-2k} \left[\int_{r_+}^{R} dr \int_0^{\beta} \partial_r^2 (r^d g^k) - \int_0^{R} dr \int_0^{\beta'} \partial_r^2 (r^d \Lambda^k) \right]$$
$$= \beta \frac{V_{d-2}}{16\pi G_n} \partial_r \left[r_+^d \sum_{k=0}^{K} \frac{a_k(d-2)}{d-2k} g^k \right],$$

de aquí podemos calcular las demás cantidades termodinámicas como la entropía dada por

$$S = \frac{A}{4G_N} \left(1 + \sum_{k=2}^K k a_k \frac{d-2}{d-2k} g_+^{k-1} \right), \tag{2.25}$$

esta vez la fórmula para la entropía de Bekenstein-Hawking (2.13) no reproduce este resultado porque la teoría tiene términos extras. Para tener una descripción geométrica de la entropía del agujero negro necesitamos la primera ley de agujeros negros para teorías de orden superior en las derivadas de la curvatura. Wald realizó esta generalización [11] y con ello derivó la fórmula para la llamada entropía de Wald

$$S = 2\pi \int_{\rho^2} \frac{\delta I}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} \epsilon^{\mu\alpha} \epsilon^{\nu\beta} \sqrt{h} d\Omega, \qquad (2.26)$$

donde $\epsilon^{\mu\nu}$ es binormal al horizonte, h es el determinante de la métrica inducida en el horizonte y la variación con respecto a $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ se debe realizar suponiendo que el tensor de Riemann es independiente de la métrica $g_{\mu\nu}$. El cálculo usando la entropía de Wald (2.26) sí coincide con (2.25).

2.2.1. Gravedad Cuasi-Topológica

Como vimos en la sección anterior las gravedades de Lovelock se construyen tomando en cuenta consideraciones topológicas. Esto restringe el orden de curvatura ("potencias" de tensores de Riemann) de los términos que se van agregando ya que la mayor potencia está controlada por la dimensión del espacio-tiempo. Cuando tomamos en cuenta los términos \mathcal{L}_K en una teoría con dimensión $\left[\frac{d-1}{2}\right] > k$, obtenemos términos que sólo son derivadas totales, es decir, no contribuyen a la teoría y por lo tanto se denominan topológicos.

Una manera de agregar términos cúbicos no topológicos en d=5 fue descubierta en [12]. Esta acción fue construida motivada por problemas de la correspondencia holográfica, a consecuencia de esto los coeficientes de la teoría se ajustaron de modo que las ecuaciones de movimiento para fondos de brana negra, que revisaremos

en el siguiente capítulo (3.12), sean sencillas. Otra propiedad importante que tiene esta teoría cuyas consecuencias revisaremos más adelante es que sus ecuaciones de movimiento linealizadas son de segundo orden en fondos AdS.

La acción de la gravedad cuasitopológica está dada por

$$I_{QT} = \frac{1}{2l_p^3} \int d^5x \sqrt{-g} \left[R + \frac{12}{L^2} + \frac{\lambda}{2} L^2 \mathcal{L}_{GB} + \frac{7}{8} \mu L^4 \mathcal{L}_{QT} \right], \qquad (2.27)$$

donde \mathcal{L}_{GB} es el término de Gauss-Bonnet (2.22) y μ es el acoplamiento del nuevo término cúbico en R que está dado por

$$\mathcal{L}_{QT} = R^{\rho\sigma}_{\mu\nu} R^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} R^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + \frac{1}{14} \left(21 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} R - 120 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho}_{\alpha} R^{\sigma^{\alpha}} + 144 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} + 128 R^{\nu}_{\mu} R^{\rho}_{\nu} R^{\mu}_{\rho} - 180 R^{\nu}_{\mu} R^{\mu}_{\nu} R + 11 R^{3} \right).$$

Las teorías de gravedad que revisamos en esta sección aparecerán en lo que resta del trabajo como escenarios donde se realizan cálculos con agujeros negros. Para ver cómo están conectados dichos cálculos con características de una teoría de campo repasaremos en la próxima sección los conceptos principales de la correspondencia holográfica.

Capítulo 3

La Correspondencia Holográfica

En este capítulo revisaremos las herramientas que nos permitirán desarrollar los resultados de este trabajo. Comenzaremos mencionando algunas características de teoría de cuerdas con el objetivo de esbozar una deducción de la correspondencia holográfica en la sección 3.2. Después, revisaremos el fenómeno del caos en su aspecto clásico y su generalización al caso cuántico 3.3. En la última sección 3.4 mencionaremos cómo se ve este fenómeno en el contexto holográfico así como algunos resultados que se obtienen al estudiarlo en teorías de campo duales a teorías con derivadas de orden superior en la curvatura 3.4.1.

3.1. Teoría de Cuerdas

A pesar del éxito que han tenido las teorías cuánticas de campo para describir la naturaleza todavía no existe una descripción satisfactoria de la gravedad cuántica. Expandiendo la acción de Einstein-Hilbert en potencias de la métrica alrededor de un fondo fijo $g^{mn} = \hat{g}^{mn} + \sqrt{G_N} g_1^{mn}$, donde G_N es la constante de Newton en d dimensiones, se obtiene

$$S_{EH} pprox \int d^dx \left((\partial g_1)^2 + \sqrt{G_N} g_1 (\partial g_1)^2 + G_N g_1^2 (\partial g_1)^2 + \cdots \right).$$

Para d>2 la teoría es no renormalizable ya que habría que agregar un número infinito de contratérminos para cancelar las divergencias.

Uno de los candidatos principales para una teoría de gravitación cuántica es la teoría de cuerdas. Dicha teoría propone que los objetos fundamentales de la naturaleza son cuerdas y que son sus modos de vibración los que dan lugar a las partículas que observamos en la naturaleza. De forma análoga al movimiento de una partícula relativista, el movimiento de una cuerda genera una superficie bidimensional que recibe el nombre de hoja de mundo. Dado que sólo nos interesa la dinámica de la

cuerda su Lagrangiano no puede depender de la parametrización que se use para describirla, así, generalizando la acción de la partícula relativista se encuentra la acción de Nambu-Goto cuyo funcional calcula el área propia de la hoja de mundo, es decir,

$$S_{NG} = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} , \ \gamma_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} X^{m}(\tau, \sigma) \partial_{\beta} X_{m}(\tau, \sigma), \tag{3.1}$$

donde T es la tensión de la cuerda; α y β corren sobre los parámetros de la hoja de mundo $\{\sigma,\tau\}$ y $X^m(\tau,\sigma)$ describe la posición de la cuerda en el espacio-tiempo. Las cuerdas se dividen en dos clases de acuerdo a sus condiciones de frontera en el parámetro espacial: si la cuerda tiene condiciones periódicas se dice que es una cuerda cerrada, en cualquier otro caso la cuerda es abierta.

Desde el punto de vista bidimensional de la hoja de mundo, las coordenadas $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ se comportan como una colección de d campos escalares, sin embargo, la raíz cuadrada en (3.1) hace que las ecuaciones de movimiento para X^{μ} sean no-lineales. Para simplificar el estudio de la cuerda es conveniente agregar una métrica sobre la hoja de mundo $h^{\alpha\beta}$ y trabajar con una teoría equivalente que si presenta ecuaciones de movimiento lineales, si el fondo donde se mueve la cuerda es plano la acción está descrita por

$$S_P = -T \int d^2 \sigma \sqrt{-h} h^{\alpha \beta} \partial_{\alpha} X^m \partial_{\beta} X^n \eta_{mn}, \qquad (3.2)$$

esta acción, conocida como la acción de Polyakov, es esencialmente la de d campos escalares libres en una teoría gravitacional de dos dimensiones con métrica $h^{\alpha\beta}$. Además de la invariancia ante reparametrizaciones de la hoja de mundo, la acción de Polyakov tiene invariancia ante transformaciones de Weyl, $h_{\mu,\nu}(\sigma\tau) \to e^{\phi(\sigma,\tau)}h_{\mu,\nu}(\sigma,\tau)$. Ambas transformaciones dependen de la posición en la hoja de mundo por lo que se consideran simetrías de norma. Usando la simetría bajo reparametrizaciones la métrica se puede poner en la forma conformalmente plana: $h_{\alpha\beta} = e^{2\psi(\sigma,\tau)}\eta_{\alpha\beta}$. Después, con la invariancia de Weyl se quita el factor $e^{2\psi(\sigma,\tau)}$ y se obtiene la métrica plana en la hoja de mundo, de esta forma las ecuaciones de movimiento se simplifican y se obtiene

$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}X^{\mu}=0,$$

además de dos ecuaciones provenientes de la variación de S con respecto a h^{ab}

$$T_{01} = \dot{X} \cdot X' = 0,$$

 $T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) = 0.$

Cambiando a coordenadas del cono de luz sobre la hoja de mundo, $\sigma^{\pm}=\tau\pm\sigma,$ la

solución a la ecuación de onda está dada en términos de una serie de Fourier

$$\begin{split} X^{\mu}(\sigma,\tau) &= X_L^{\mu}(\sigma,\tau) + X_R^{\mu}(\sigma,\tau), \\ X_L^{\mu}(\sigma,\tau) &= \frac{x^{\mu}}{2} + \frac{1}{2}\alpha'p^{\mu}\sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^{\mu}e^{-in\sigma^+}}{n}, \\ X_R^{\mu}(\sigma,\tau) &= \frac{x^{\mu}}{2} + \frac{1}{2}\alpha'p^{\mu}\sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^{\mu}e^{-in\sigma^-}}{n}. \end{split}$$

donde α^{μ} son los modos de Fourier de la solución, y $\alpha' = \frac{1}{2\pi T}$.

Al cuantizar la teoría estos modos se convierten en los operadores de creación y aniquilación con relaciones de conmutación canónicas. Como mencionamos en el primer capítulo cuando se tiene una teoría de norma como (3.2), el espacio de Fock tiene estados de norma negativa que se remueven usando las constricciones de la teoría en forma de operadores sobre dichos estados. Después de hacer este procedimiento el espectro de partículas que aparece en la teoría de cuerdas cerradas está dado en términos de su masa por

$$M^{2} = \frac{4}{\alpha'} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} \cdot \alpha_{k} - a \right), \tag{3.3}$$

donde a es una constante que se fija a a=1 cuando se remueven los estados de norma negativa usando las condiciones de norma. Además de establecer la constante a, el proceso de eliminar estados no-físicos hace que la dimensión de la teoría se fije a d=26. Para revisar el espectro de partículas de la teoría se cambia el número de osciladores excitados. De la ecuación (3.3) vemos que cuando no hay ningún modo excitado, $\sum_k \alpha_{-k} \cdot \alpha_k = 0$, la teoría predice un estado con $M^2 < 0$, es decir un estado taquiónico, esto señala una inestabilidad en el potencial que se resuelve agregando fermiones a la teoría. Al encender sólo una excitación, es decir $\sum_k \alpha_{-k} \cdot \alpha_k = 1$, se obtiene un estado no-masivo que da lugar a un campo tensorial con tres partes independientes: la parte antisimétrica conocida como el campo de Kalb-Ramond B_{mn} , la parte simétrica sin traza, que corresponde al el gravitón h_{mn} , y la parte escalar que da lugar a un campo conocido como el dilatón $\phi(x)$.

Aunque los detalles de la expansión perturbativa en teoría de cuerdas son más complicados que para una teoría de campos usual, también existe una forma de pesar los diferentes procesos de interacción de cuerdas mediante una constante de acoplamiento. Al acoplar el dilatón con un valor de expectación en el vacío diferente de cero se obtiene un término de la forma

$$S_{\phi} = \frac{1}{8} \int d^2 \sigma \sqrt{-g} R^{(2)} \phi(X), \qquad (3.4)$$

donde $\mathbb{R}^{(2)}$ es el escalar de curvatura en la hoja de mundo. Así, la parte constante del

dilatón, ϕ_0 , agrega un término a la acción de la forma

$$\chi_{\phi} = \phi_0 \frac{1}{4\pi} \int \sqrt{-g} R^{(2)},$$

como vimos en la sección 2.2, el teorema de Gauss-Bonnet nos dice que esta integral es una constante para superficies con un número de agujeros fijos conocida como la característica Euler, n. Al tomar (3.4) en cuenta las amplitudes de dispersión de la teoría se agrupan mediante

$$\mathcal{A} \propto \sum_{n} g_c^n \mathcal{A}^{(n)}.$$

donde $g_c = e^{\phi_0}$ cumple el papel de la constante de acoplamiento al pesar los procesos de interacción que tienen un número de Euler mayor 3.1.



Figura 3.1: Procesos de dispersión en teoría de cuerdas, mientras más agujeros tiene la superficie el proceso es menos probable. Imagen tomada de [27].

El estudio de la cuerda abierta es similar al de la cuerda cerrada, sin embargo, una de las diferencias importantes es que es necesario especificar condiciones de frontera sobre los extremos de la cuerda σ^* . Se pueden tener condiciones de Neumann, $\partial_{\sigma}X^{\mu}|_{\sigma^*}=0$, que corresponden a extremos libres o condiciones de Dirichlet, $\delta X^{\mu}|_{\sigma^*}=0$, que fijan los extremos en esa dirección. Cuando se tienen condiciones de Neumann en p coordenadas espaciales la cuerda está restingida a moverse en un lugar geométrico p+1-dimensional que recibe el nombre de Dp-brana. Las Dp-branas además de ser regiones en el espacio-tiempo son por si mismas objetos dinámicos en la teoría que vienen de soluciones no perturbativas a las ecuaciones de movimiento.

Al pedir que los extremos de la cuerda se encuentren sobre una Dp-brana el grupo de simetría global SO(1,D-1) se descompone en rotaciones sobre las direcciones transversales SO(D-p-1) y Lorentz sobre la Dp-brana SO(1,p). El espectro no masivo que se obtiene al cuantizar la cuerda abierta en este caso da lugar a un campo de norma A_{μ} con grupo de simetría U(1), donde μ corre sólo sobre las direcciones tangentes a la Dp-brana, y d-p campos escalares Φ^{I} , donde I corre sólo sobre las coordenadas transversales aunque el campo vive en el volumen de mundo de la brana. El campo de norma se acopla a los extremos de la cuerda abierta que actúan como cargas en movimiento, mientras que los campos escalares Φ^{I} tienen la interpretación de deformaciones transversales de la Dp-brana. Al igual que para la cuerda cerrada además de estos estados existe un estado taquiónico y un número infinito de modos masivos.

En el límite donde las deformaciones de la brana no son muy grandes, los campos masivos se desacoplan y la dinámica de la teoría está dada por la acción de Dirac-Born-Infeld

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi l_s^2 F_{\mu\nu})}, \tag{3.5}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica inducida sobre la Dp-brana, $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético asociado al campo de norma y la acción está integrada sobre el volumen de mundo p+1-dimensional. El factor T_p es la tensión de la Dp-brana dado por $T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}$, la constante g_s es la constante de acoplamiento para cuerdas abiertas y satisface $g_s^2 = g_c$. El hecho de que la constante de acoplamiento aparezca en el denominador de la acción nos habla del carácter no perturbativo de las Dp-branas en teoría de cuerdas.

Al desarrollar la raíz de (3.5) en una series de potencias de $g_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ y conservar sólo los términos cuadráticos se obtiene el Lagrangiano de una teoría de norma con d-p campos escalares libres

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} Tr \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi^I \partial^{\mu} \phi^I \right), \tag{3.6}$$

donde se define la constante de acoplamiento de Yang-Mills a partir de la expansión de (3.5) como $g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2}l_s^{p-3}g_s$.

Además de tener cuerdas que comiencen y terminen en un misma Dp-brana es posible que una cuerda tenga un extremo en una Dp-brana y el otro en otra Dp-brana separada una distancia L. El espectro que genera esta configuración tiene como su modo menos masivo un estado cuya masa está dada por la energía mínima para una cuerda extendida entre las branas: $M_0 = T_0 L$. Con el objetivo de tener estados no masivos se puede considerar que la separación entre las branas es cero y aún así entender a las dos Dp-branas como objetos distintos. El contenido de campos de esta configuración queda formado por cuatro campos de norma no masivos: dos que corresponden a cuerdas que comienzan y terminan en la misma Dp-brana y otros dos que corresponden a los modos no masivos de las cuerdas que comienzan en una Dp-brana y terminan en otra. Nuevamente está la torre infinita de modos con masa proporcional a l_s^{-1} .

Si se siguen apilando un número N_c de Dp-branas, siguiendo el procedimiento para dos branas, se obtienen N_c^2 posibilidades distintas para las Dp-branas donde terminan los extremos de las cuerdas. Los campos que corresponden a las excitaciones de dichas cuerdas se pueden acomodar en matrices de $N_c \times N_c$ con lo que los estados no masivos del espectro se convierten en campos matriciales Φ^I_{ij} , A^μ_{ij} , donde el grupo de norma del campo A^μ corresponde ahora al grupo no abeliano U(N). Dicho grupo se puede separar en dos: $U(N_c) = SU(N_c) \times U(1)$, donde U(1) contiene los grados de libertad asociados al centro de masa de las N_c Dp-branas mientras que $SU(N_c)$ describe las excitaciones del campo de norma que vive en en su volumen de mundo. A bajas energías, $E << l_c^{-1}$, e intensidades de campo pequeñas en unidades de l_c^2 se puede

hacer nuevamente un análogo a la expansión de la acción de Dirac-Born-Infeld 3.6 para obtener el Lagrangiano de Yang-Mills

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} Tr \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_{\mu} \phi^i D^{\mu} \phi_i + [\phi^i, \phi^j]^2 \right). \tag{3.7}$$

La teoría de cuerdas que hemos revisado hasta ahora sólo considera grados de libertad bosónicos, sin embargo, es posible incluir campos fermiónicos en la hoja de mundo de manera consistente agregando a la acción de Polyakov el término de Dirac

$$S_{ferm} = -\frac{T}{2} \int d^2 \sigma \bar{\psi}^{\mu}(\sigma, \tau) \partial \psi_{\mu}(\sigma, \tau). \tag{3.8}$$

donde $\Psi^{\mu}(\sigma,\tau)$ es un fermión de Majorana en la representación vectorial del grupo de Lorentz, es decir, transforma como un espinor en la hoja de mundo y como vector en el espacio-tiempo. Todavía a nivel clásico, las condiciones de frontera más generales que se le pueden pedir a las componentes de diferente quiralidad de los campos espinoriales son:

$$\Psi_{+}^{\mu}(\tau,\sigma) = \pm \Psi_{+}^{\mu}(\tau,\sigma+\pi),\tag{3.9}$$

$$\Psi_{-}^{\mu}(\tau,\sigma) = \pm \Psi_{-}^{\mu}(\tau,\sigma+\pi). \tag{3.10}$$

Las condiciones de frontera periódicas, signo positivo, reciben el nombre de condiciones de frontera de Ramond y las antiperiódicas, signo negativo, condiciones de frontera de Neveu-Schwarz. Así, la teoría de cuerdas se separa en dos subespacios o sectores: El sector Ramond (R) que se obtiene de considerar los estados de partícula que surgen de condiciones periódicas, y el sector de Neveu-Schwarz (NS) que contiene a los estados en los cuales se consideran condiciones de anti-periodicidad.

La introducción del término fermiónico a la acción de Polyakov da lugar a una teoría cuántica que relaciona los estados fermiónicos y bosónicos a través de la supersimetría que revisamos en la sección 1.3. Esta simetría remueve a los estados taquiónicos del espectro de la teoría además de bajar la dimensión crítica del espacio-tiempo a diez. Ya con la cantidad de partículas fija debido a la supersimetría la teoría, que recibe el nombre de supercuerdas, se puede separar en cuatro subespacios dependiendo de las diferentes condiciones de frontera para el fermión y su superpareja: (R,R), (NS,NS), (NS,R) y (R,NS).

Agregar la acción (3.8) no es la única forma de obtener una teoría de supercuerdas. Las diferentes maneras que existen de agregar los fermiones dan lugar a los 5 distintos tipos de teorías de supercuerda que se conocen actualmente. La teoría que trataremos en este trabajo pertenece a las llamadas tipo IIB, donde la etiqueta II se refiere a que que la teoría incluye fermiones derechos e izquierdos sobre la hoja de mundo, esto resulta en una supersimetría con $\mathcal{N}=2$. Las teorías tipo II se desglosan a su vez en tipo A, donde sólo existen Dp-branas estables para p par, y tipo B donde las Dp-branas estables tienen p impar.

El contenido de campos de la teoría de supercuerdas IIB está dado por una torre de estados con masa $M^2=\frac{4N}{l_s^2}$. Si nos fijamos en el límite donde las energías son mucho menores a la escala que define los modos masivos de la cuerda, es decir $E << l_s^{-1}$, es posible construir una acción efectiva en la que no se tomen en cuenta los campos masivos. A dicha acción efectiva que sólo deja los modos no masivos de la supercuerda, se le llama supergravedad IIB y está dada por

$$S_{eff} = \frac{1}{16\pi G} \int d^{10}x \sqrt{-g_E} \left[\mathcal{R} - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} e^{-\phi} H_3 - \frac{1}{2} e^{2\phi} F_1^2 - \frac{1}{2} e^{\phi} F_3^2 - \frac{1}{4} F_5^2 \right] - \frac{1}{(2\pi)^7 g_s^2 l_s^8} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3 + \text{Fermiones},$$
 (3.11)

donde para escribir la acción se usa el marco de Einstein, $g_{MN}(x) = e^{\phi(x)/2} g_{MN}^E(x)$; \mathcal{R} es el escalar de Ricci en diez dimensiones; ϕ es el dilatón; H_3 y F_3 son las intensidades de campo asociadas a campos de norma antisimétricos $B_{\mu\nu}$ y $B'_{\mu\nu}$; F_1 es la "intensidad de campo" asociada al campo de norma χ y $F_5 = F_5^*$ es la intensidad de campo autodual asociada a la cuatro forma $C_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Entre las soluciones a las ecuaciones de movimiento de (3.11) existe una que tiene un papel importante en el contexto de la correspondencia holográfica conocida como p-brana negra. Su métrica toma la forma:

$$ds^{2} = H(r)^{-1/2} \left(-f(r)dt^{2} + dx_{1}^{2} + \dots + dx_{p}^{2} \right) + H(r)^{1/2} \left(\frac{dr^{2}}{f(r)} + r^{2} d\Omega_{8-p}^{2} \right),$$

$$H(r) = 1 + \xi \left(\frac{L}{r} \right)^{7-p},$$

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_{h}}{r} \right)^{7-p},$$
(3.12)

donde ξ es un parámetro llamado de no extremalidad. El resto de los campos diferentes de cero están dados por

$$e^{\phi} = g_c H(r)^{(3-p)/4},$$

$$C = \frac{1 - H(r)^{-1}}{\xi g_c} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^p.$$

Dicha solución es máximamente supersimétrica (preserva todas las supersimetrías de la teoría) y presenta un horizonte de eventos con topología $S^{8-p} \times \mathbb{R}^p$. De manera

análoga a un agujero negro, se le asocia carga, masa, entropía y temperatura

$$q = N = \frac{L^{7-p}}{(2\sqrt{\pi})^{5-p}g_c l_c^{7-p}\Gamma(\frac{7-p}{2})},$$
(3.13)

$$M = \frac{N}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}} \left(\frac{r_h}{L}\right)^{7-p} \left(\frac{1}{1-\xi^2} + \frac{1}{7-p}\right) V_p,$$

$$S = \frac{\Omega_{8-p} V_p}{4G_N} \frac{r_h^{8-p}}{(1-\xi^2)^{4-p/2}},$$

$$T = \frac{7-p}{4\pi} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{r_h}.$$

$$(3.14)$$

Para evitar que el espacio-tiempo no tenga una singularidad desnuda el valor de la masa esta restringido por la llamada cota BPS:

$$M \ge \frac{NV_p}{(2\pi)^p g_c l^{p+1}}. (3.15)$$

Cuando (3.15) alcanza la igualdad se obtiene el espacio-tiempo conocido como p-brana negra extremal. Para llegar a dicha igualdad se toman los límites $r_h \to 0, \xi \to 1$ mientras se mantiene $L^{7-p} = r_h^{7-p} \frac{\xi}{1-\xi^2}$ constante. Esta solución tiene $S = T_H = 0$ y sólo preserva la mitad de las supersimetrías de la teoría.

El valor de la masa y la carga para una p-brana extremal resulta coincidir con la masa y carga de una pila de N Dp-branas sin excitar, este resultado es una primera indicación de una conexión más profunda entre branas negras y Dp-branas que como veremos da lugar a la correspondencia holográfica.

3.2. La correspondencia holográfica

En esta sección esbozaremos una deducción de la herramienta que se usará en el siguiente capítulo para mostrar resultados de teorías de campos mediante cálculos en una teoría gravitacional.

En el caso particular de una p-brana negra extremal con p=3 el contenido de campos se simplifica ya que el dilatón toma un valor constante, la 4-forma RR toma el valor $C_{0123} = \frac{1-H(r)^{-1}}{g_c}$ y la métrica tiene una expresión más sencilla dada por,

$$ds^{2} = H(r)^{-1/2} \left(dt^{2} + dx_{1}^{2} + \dots + dx_{p}^{2} \right) + H(r)^{1/2} \left(dr^{2} + r^{2} d\Omega_{8-p}^{2} \right),$$

$$H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r} \right)^{4},$$
(3.16)

donde $L^4 = 4\pi N g_c l_c^4$. Podemos ver un esquema de este espacio-tiempo en la figura 3.2.

Para que la expansión perturbativa de teoría de cuerdas en el fondo (3.16) esté bien definida hay que tener cuidado con las relaciones entre las constantes de acoplamiento y el radio característico L, esto implica imponer dos condiciones sobre el espacio-tiempo: Por una parte la curvatura del espacio-tiempo tiene que ser grande con respecto a la longitud de cuerdas: $\frac{L^4}{l_c^4} = g_c N >> 1$; por otro lado la constante de acoplamiento de cuerdas tiene que ser pequeña, $g_c << 1$. Con el objetivo de describir el límite de bajas energías es útil ver como se comporta (3.16) asintóticamente: cuando la coordenada radial es muy grande r/L >> 1 y $H \approx 1$ de modo que la métrica se vuelve la del espacio-tiempo plano con una corrección de orden $O(L^4/r^4)$, mientras que para $r/L << 1 \longrightarrow H \approx L^4/r^4$ y la métrica se vuelve el producto de un espacio de Anti-de Sitter 5-dimensional con una esfera 5-dimensional, es decir,

$$ds^{2} = \frac{r^{2}}{L^{2}}(-dt^{2} + d\vec{x}^{2}) + \frac{L^{2}}{r^{2}}dr^{2} + L^{2}d\Omega_{5}^{2}.$$
 (3.17)

Es útil escribir esta métrica haciendo el cambio de variable $r \to \frac{1}{z}$

$$ds^{2} = \frac{L^{2}}{z^{2}} \left(-dt^{2} + d\vec{x}^{2} + dz^{2} \right) + L^{2} d\Omega_{5}^{2}, \tag{3.18}$$

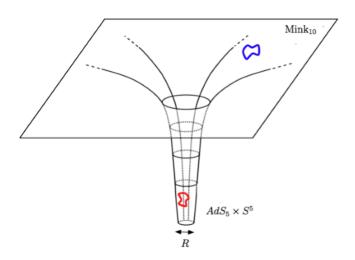


Figura 3.2: La región cercana a r=0 corresponde a la parte más cercana a la 3-brana negra donde el espacio-tiempo se deforma más. Por otro lado, cuando $r\gg L$ el espacio-tiempo es plano. Imagen tomada de [28]

La coincidencia de las masa y la carga de la pila de N_c Dp-branas con la p-brana negra extremal es el primer indicio de que existe una conexión entre ambos sistemas. Pasando al límite de bajas energías $E << \frac{1}{l_c}, E << \frac{1}{L}$, con p=3 esta conexión se vuelve más clara.

En este límite las cuerdas cerradas que se propagan en el espacio plano, r >> L, se desacoplan del resto del espacio ya que su energía hace que tengan una longitud de

onda cuya escala es mayor al radio característico del espacio-tiempo, L. Además de los modos que viven en la región plana, existen dentro del conjunto de estados con energía baja aquellos que tienen una energía alta cerca de $r \approx 0$ pero que al escalar el potencial gravitacional pierden su energía medida desde el espacio plano. Es decir, debido a la componente g_{tt} de la métrica (3.16), observadores a diferente posición radial miden diferentes energías. La energía propia de un objeto E_p se relaciona con la energía que mide un observador en $r \to \infty$ mediante

$$E_p = \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{-1/4} E_r. \tag{3.19}$$

Esto quiere decir que aunque en la región cercana a r=0 existan modos que den lugar a estados muy energéticos, para un observador suficientemente lejano la energía de estos modos se puede hacer arbitrariamente pequeña. Así, en el límite de bajas energías los modos que sobreviven son aquellos que se propagan en la región cercana a r=0 con energía propia alta y aquellos en la región r>L con energía propia pequeña.

Al pasar al límite de bajas energías ocurre una situación similar en el sistema de una pila de N_c D3-branas en la teoría IIB. Las cuerdas cerradas que se propagan fuera de las branas se desacoplan de la teoría en el volumen de mundo, misma que para energías pequeñas se reduce al contenido de los modos no-masivos. En la teoría de supercuerdas IIB, además de los campos que teníamos en la cuerda bosónica descrita por (3.7) el espectro no-masivo de las D-branas incluye a los supercompañeros fermiónicos de estos campos. Nuevamente se puede tomar el límite de deformaciones muy pequeñas sobre las D-branas, análogo a (3.6), sólo que en este caso después del límite se obtiene la teoría de Super Yang Mills con $\mathcal{N}=4$ con grupo de norma $SU(N_c)$ que se mencionó en la sección (1.3).

En el límite de bajas energías tanto en la 3-brana extremal como en la pila de D3-branas existe un sector de cuerdas cerradas propagándose libremente en la región de espacio-tiempo plano que se encuentra desacoplado del resto de la teoría. La identificación de los sectores restantes de ambas teorías da lugar al enunciado de la versión más sencilla de la correspondencia holográfica desarrollada por Juan Maldacena en 1997 [26]: Una teoría de supercuerdas IIB en $AdS_5 \times S_5$ es equivalente a una teoría $\mathcal{N}=4$ de Super-Yang-Mills con grupo de norma $SU(N_c)$ en espacio-tiempo plano 4-dimensional.

Esta equivalencia no es trivial y aunque no está demostrada formalmente la gran cantidad de resultados teóricos que se han desarrollado explotando la conjetura de Maldacena indican que es correcta. Mucha de la utilidad de la correspondencia radica en que podemos rastrear precisamente cantidades y conceptos en una teoría con su equivalente en la teoría dual, estas identificaciones crean un diccionario entre ambas teorías de manera que es posible tratar un problema en teoría de campos como un problema de gravedad y viceversa. En lo que resta de esta sección mencionaremos algunas de las equivalencias mejor conocidas.

El grupo de isometrías del espacio-tiempo de Anti de Sitter 5-dimensional es SO(4,2)mientras que la esfera 5-dimensional es invariante bajo el grupo rotaciones en seis dimensiones: SO(6). Del lado de la teoría de SYM la primer simetría, SO(4,2), corresponde a la invariancia bajo el grupo conforme en 3+1 dimensiones. El segundo factor, SO(6), es homeomorfo a SU(4) y corresponde a la simetría R de la CFT: la invariancia de SYM ante transformaciones de las supercargas bajo SU(4). En particular, dentro del grupo conforme es de interés ver cual es el mapeo de las dilataciones $(t, \vec{x}) \to (\lambda t, \lambda \vec{x})$ ya que los diferentes valores de λ exploran diferentes escalas energéticas en la CFT. La deducción de la correspondencia hace natural identificar las direcciones de la teoría de norma con las coordenadas transversales de la brana negra extremal. Así, del lado de gravedad para mantener el espacio-tiempo de AdS invariante bajo dilataciones es necesario escalar la coordenada radial mediante $r \to r/\lambda$. Esta identificación nos dice que, en esta elección de coordenadas, la dirección radial en AdS da una escala de distancia para la CFT: cuando r es grande estamos en la región de distancias grande y energías bajas (Infrarrojo) en AdS pero en la CFT esto corresponde a distancias pequeñas y energías altas (Ultravioleta). A esta relación entre las diferentes regiones energéticas de ambas teorías se le conoce como conexión UV/IR.

Al estar identificadas las direcciones de la CFT con las rebanadas de AdS a $z=\frac{1}{r}$ fijo los difeomorfismos en AdS que mezclan las coordenadas x^{μ} se mapean a los mismos difeomorfismos en la teoría conforme. Sin embargo, la simetría bajo difeomorfismos que combinan la coordenada radial z de AdS con las coordenadas x^{μ} nos permite explorar diferentes maneras de aproximarnos a la frontera de AdS. Para energías muy grandes, cerca de z=0, las excitaciones de la teoría de campo están localizadas de modo que al tomar el límte de $z\to 0$ podemos leer la forma que tiene el espaciotiempo en el que vive la teoría de norma. Al tomar estos difeomorfismos conviene escribir la métrica en la norma de Fefferman-Graham [29] para evitar que existan términos cruzados en la métrica y poder leer directamente la métrica en la que vive la CFT

$$ds^{2} = \frac{L^{2}}{z^{2}} \left(g_{\mu\nu}(x, z) dx^{\mu} dx^{\nu} + dz^{2} \right), \quad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + z^{2} g_{\mu\nu}^{(2)}(x) + \cdots, \tag{3.20}$$

donde $g_{zz} = \frac{L^2}{z^2}$, $g_{z\mu} = 0$ y la métrica de la CFT estaría dada por la parte correspondiente a z = 0, es decir, $g_{\mu\nu}^{(0)}$. De manera más precisa si se escoge el difeomorfismo en AdS de modo que las coordenadas cambien mediante $z \to \hat{z} = e^{\omega(x)}z, x^{\mu} \to \hat{x}^{\mu}(x,z), hatx^{\mu}(x,0) = x^{\mu}$ entonces la métrica de la CFT difiere de la anterior por una transformación de Weyl $g'_{\mu\nu} = e^{2w(x)}g_{\mu\nu}$.

Uno de los ejemplos que será útil para los resultados de este trabajo es el difeomorfismo que nos permite observar a AdS global. Este espacio-tiempo incluye todo el hiperboloide (2.14) y puede ser parametrizado por las llamadas coordenadas globales mediante:

$$ds^{2} = L^{2} \left(-\cosh^{2} \rho d\tau^{2} + \sinh^{2} \rho d\Omega_{3}^{2} + d\rho^{2} \right).$$

Al tomar estas coordenadas y escribirlas en la norma de Fefferman Graham se obtiene

$$ds^2 = \frac{L^2}{Z^2} \left[-\left(L^2 + \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{16L^2}\right) d\tau^2 + \left(L^2 - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{16L^2}\right) d\Omega_2^3 + dZ^2 \right],$$

donde $Z = 2Le^{-\rho}$. Con esta forma vemos que el dual a AdS global corresponde a una CFT que vive en el espacio-tiempo conocido como el universo estático de Einstein

$$ds_{CFT}^2 = L^2 \left(-d\tau^2 + d\Omega_3^2 \right),\,$$

misma que está relacionada con la CFT en el espacio plano mediante una transformación de Weyl. Usando este procedimiento para diferentes difeomorfismos se pueden obtener distintas equivalencias entre teorías de gravedad y teorías conformes usando (3.20).

Una de las entradas más importantes del diccionario es la llamada correspondencia campo-operador, esta relaciona los campos en la teoría de gravedad con operadores locales en la CFT. Podemos entender su origen pensando en cómo se comporta una campo $\phi(x^m)$ que se propaga en la región plana de ambas teorías antes de tomar el límite de bajas energías. Del lado de las Dp-branas dicho campo se acopla a un operador local $O(x^{\mu})$ en la teoría sobre la Dp-brana mediante el término $\int d^4x \phi_0 O_{\gamma}$ donde ϕ_0 es el valor del campo sobre las Dp-branas. Después de hacer el límite de bajas energías, el campo ϕ_0 aparece en la acción de la teoría de norma como una fuente externa que retiene la información del acoplamiento entre las D3-branas y el resto de la teoría de cuerdas. En el lado de gravedad este campo que vivía en toda la brana negra se restringe a la parte de AdS después de tomar el límite y el término que está acoplado en la teoría de norma corresponde al valor del campo en la frontera de AdS, es decir, $\phi_0 = \phi(x, z = 0)$. Así, al rastrear que sucede con algún campo antes de tomar el límite de bajas energías se puede establecer cuál es su campo dual en la teoría de norma. Por ejemplo, al hacer una expansión del campo del dilatón $e^{-\varphi} = 1 - \varphi(x) + \cdots$ en la acción de las D3-branas se obtiene

$$S = -\frac{1}{(2\pi)^3 g_c l_c^4} \int d^4 x e^{-\varphi} Tr \left[\sqrt{-\det \left(\eta_{\mu\nu} + 2\pi l_c^2 F_{\mu\nu} \right)} + \cdots \right],$$

$$= S_{SYM} + \int d^4 x \varphi(x) \mathcal{L}_{SYM} + \cdots,$$

de modo que el campo dual al dilatón corresponde al Lagrangiano completo de la CFT. Para distinguir el dual de un campo genérico en AdS en el lado de la CFT es útil notar que el comportamiento del campo cerca de la frontera se puede separar en una parte normalizable y una parte no normalizable

$$\lim_{z\to 0}\phi^+(x^\mu,z)\propto z^{\Delta_+}=z^\Delta \text{ modo normalizable;}$$

$$\lim_{z\to 0}\phi^-(x^\mu,z)\propto z^{\Delta_-}=z^{4-\Delta} \text{ modo no-normalizable,}$$

donde Δ es la dimensión conforme del operador O(x) dual a $\phi(x,z)$. El término nonormalizable deforma la teoría de campo y es el que sea acopla al operador O(x) que aparece en la acción de la teoría de norma. En términos de la funcional generadora de ambas teorías esta conexión toma la forma [30]

$$Z_{CFT}[J] = Z_{CIIB}[\phi^{-} = J],$$

$$\langle e^{i \int J(x)O(x)d^{4}x} \rangle_{CFT} = \int \mathcal{D}\Phi e^{-iS_{IIB}} \mid_{\phi^{-}(z=0)=J(x)},$$
(3.21)

mientras que el coeficiente que acompaña al modo normalizable contiene la información acerca del valor esperado del operador O(x) en presencia de la fuente J(x).

El lado derecho de la igualdad (3.21) es difícil de calcular, sin embargo, cuando $\lambda = g_{YM}^2 N_c >> 1$ la acción de la teoría de cuerdas se reduce a supergravedad en 9+1 dimensiones. Además, en el límite $N_c \propto \frac{1}{\sqrt{G_N^{(5)}}} \to \infty$ la aproximación de punto silla es

válida ya que la acción es proporcional a G_5^{-1} , tomando esta aproximación se puede reemplazar la integral por el término evaluado en la solución clásica. En el lado de la CFT, el límite $\lambda, N_c \to \infty$ corresponde a la región de acoplamiento fuerte con muchos colores de la teoría de campos pero en su dual estos límites dan lugar a una teoría evaluada en su solución clásica. Esta identificación hace que exista una manera de tratar los problemas que eran previamente inaccesibles debido al carácter no-perturbativo del acoplamiento fuerte como problemas más sencillos en gravedad clásica.

A través de la correspondencia campo-operador se pueden considerar casos donde la temperatura de la teoría de campos es diferente de cero. Tomando el tensor de energía momento de la CFT como uno térmico y relacionándolo con el modo normalizable del tensor métrico se pueden resolver las ecuaciones de Einstein para obtener la métrica completa dual a una teoría a temperatura T, por ejemplo

$$ds^{2} = \frac{L^{2}}{z^{2}} \left(f(z)dt^{2} - d\vec{x}^{2} + \frac{dz^{2}}{f(z)} \right) \quad ; \quad f(r) = 1 - \frac{z^{4}}{z_{0}^{4}}, \tag{3.22}$$

donde L es el radio de AdS con un horizonte localizado en $z=z_0$. Las propiedades termodinámicas de este agujero negro como la temperatura y entropía se identifican con aquellas de la teoría conforme. Al tomar el límite $\lambda, N_c \to \infty$ esta identificación es muy útil ya que permite calcular cantidades de plasmas fuertemente acoplados estudiando la termodinámica de agujeros negros en gravedad clásica.

Además de las diferentes relaciones que podemos encontrar estudiando regiones distintas del hiperboloide (2.14), se cree que la correspondencia es un enunciado más general que relaciona teorías de gravedad y teorías de norma aunque no exista una derivación tan clara como la de la dualidad original. Esto ha llevado considerar un conjunto muy grande de teorías gravitacionales con el fin de reproducir las diversas características de las teorías de norma. Entre las CFTs que son de interés se encuentran aquellas en las que la teoría tiene acoplamiento grande pero no infinito, esto equivale

a tomar en cuenta correcciones de la acción de supergravedad donde la curvatura no es pequeña [29], dichas correcciones agregan nuevos términos a la acción que tienen mayores derivadas de los campos. Dentro de estos términos se encuentran aquellos de orden superior en la curvatura que estudiamos en la sección 2.2 y, aunque los términos de Lovelock no aparecen explícitamente en las correcciones a supergravedad, el hecho de que existan soluciones de AdS con y sin agujeros negros hace que sean un escenario ideal para esbozar el comportamiento de los términos de orden superior en la curvatura que sí aparecen en la teoría de cuerdas, además de dar información acerca de teorías conformes con diferentes propiedades.

Habiendo mencionado algunas de las características de la correspondencia holográfica, en lo que resta de este capítulo nos enfocaremos en el fenómeno específico del caos, mencionando las entradas del diccionario que han sido útiles para trasladar el cálculo de una teoría de campos a una teoría gravitacional.

3.3. El Efecto Mariposa

Una de las características importantes de la correspondencia es su capacidad para estudiar sistemas fuertemente acoplados a temperatura finita usando por ejemplo, agujeros negros en AdS, dentro de los fenómenos que se presentan en estas teorías térmicas se encuentra el caos. Aunque el estudio del caos comenzó siendo puramente clásico existen generalizaciones al mundo cuántico y recientemente se han estudiado estas ideas usando la correspondencia holográfica. En esta sección revisaremos algunos resultados importantes del comportamiento caótico y su generalización al mundo cuántico con el objetivo de estudiar su aparición en el contexto holográfico así como algunos resultados importantes del efecto mariposa en teorías con derivadas de orden superior en la curvatura que nos permitirán tener las herramientas necesarias para deducir los cálculos del próximo capítulo.

Una de las hipótesis fundamentales de mecánica estadística es el hecho de que podemos intercambiar el análisis de la evolución temporal de cada componente del sistema por un promedio sobre el espacio fase a tiempo fijo. La idea principal detrás de este intercambio es la suposición de que esperando suficiente tiempo los sistemas cruzan una infinidad de veces todas las trayectorias con energía fija, este enunciado es conocido como el teorema ergódico. Una de las formas de explicar este fenómeno es a través del estudio de sistemas caóticos. A grandes rasgos en sistemas clásicos el caos se define como la susceptibilidad de un sistema a condiciones iniciales. El ejemplo más famoso de este comportamiento surgió en los 60's cuando el matemático Edward Lorenz se dio cuenta, haciendo el cálculo de ecuaciones diferenciales climatológicas, que se obtienen predicciones muy diferentes cuando las condiciones iniciales se cambian muy poco. Este fenómeno recibe el nombre de el efecto mariposa ya que estas características parecían decir que el estado climatológico podía cambiar con algo tan pequeño como el aleteo de una mariposa.

Pasando a un sistema de partículas, el comportamiento caótico del movimiento se caracteriza por una amplia diferencia en las trayectorias para posiciones iniciales cercanas. Al tomar como posición inicial x(0) y hacer una perturbación $\delta x(0)$ la evolución temporal en una teoría caótica separa estas trayectorias de manera exponencial

$$|\delta x(t)| = e^{\lambda_L t} |\delta x(0)|, \tag{3.23}$$

donde λ_L sirve para cuantificar la separación y es conocido como el coeficiente de Lyapunov, podemos ver el comportamiento en la Figura 3.3. Los sistemas caóticos son una rama de estudio muy grande por si misma, sin embargo, para propósitos de este trabajo bastará con enfocarnos en las características contenidas en la ecuación (3.23).

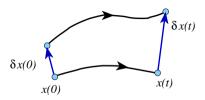


Figura 3.3: Separación de trayectorias con condiciones iniciales cercanas.

3.3.1. Caos en teorías cuánticas

Al describir sistemas cuánticos no es necesario usar la posición o el momento por lo que esperamos que en general el caos se manifieste en un gran número de operadores. Existen varias formas de trasladar los conceptos del caos al mundo cuántico, en este trabajo nos enfocaremos en una de estas formas que ha resultado útil recientemente para cálculos holográficos siguiendo la explicación de [32]. Para entender esta manera de tratar el caos cuántico se calcula el efecto de una perturbación \hat{V} en la medición de otro operador \hat{W} . En una teoría caótica el efecto del operador \hat{V} sobre el sistema será susceptible a las condiciones iniciales como en el caso clásico, sin embargo, en este caso la medida de este efecto está dada por el cuadrado del conmutador de $\hat{W}(t)$, $\hat{V}(0)$. Para operadores unitarios y hermitianos tenemos

$$C(t) = -\langle \left[\hat{W}(t), \hat{V}(0) \right]^2 \rangle = -\langle \left[\hat{W}(t), \hat{V}(0) \right]^{\dagger} \left[\hat{W}(t), \hat{V}(0) \right] \rangle$$
(3.24)

$$= 2(1 - Re\left(\langle \hat{W}(t)\hat{V}(0)\hat{W}(t)\hat{V}(0)\rangle\right), \tag{3.25}$$

esta cantidad recibe el nombre de correlador desordenado en el tiempo (OTOC por sus siglas en inglés) y fue estudiada por primera vez para una teoría de superconductores en el límite semiclásico en [31]. En particular, si se sustituyen los operadores de posición y momento, $\hat{W} = \hat{q}(t), \hat{V} = \hat{p}(0)$, se obtiene $[\hat{q}(t), \hat{p}]$ que en el límite

semiclásico se vuelve el paréntesis de Poisson $i\hbar \{q(t), p\} = i\hbar \frac{\partial q(t)}{\partial q(0)}$. Así, el aumento exponencial de este conmutador nos daría la separación de trayectorias que se observa en el caos clásico (3.24). Para entender porqué C(t) da una medida del caos hacemos el intercambio $t \to -t$ y reescribimos el segundo término de (3.24) como

$$OTO(t) = \langle \hat{W}(-t)\hat{V}(0)\hat{W}(-t)\hat{V}(0)\rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle, \qquad (3.26)$$

donde

$$|\psi_1\rangle = \hat{W}(-t)\hat{V}(0)|\beta\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \hat{V}(0)\hat{W}(-t)|\beta\rangle,$$
 (3.27)

y $|bet\rangle$ es un estado térmico cómo el que veremos en la próxima sección. En este desarrollo la ecuación (3.24) nos dice que cuando los estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ son muy parecidos C(t) tiende a cero. Para explicar porqué sucede esto mostramos la construcción de ambos estados en las figuras 3.4 y 3.5.

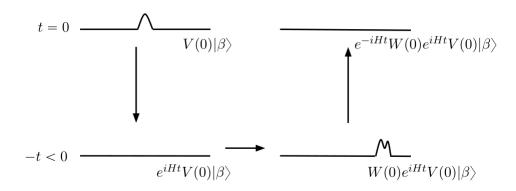


Figura 3.4: Construcción del estado $|\psi_1\rangle$. Primero se evoluciona el estado $\hat{V}(0)|\beta\rangle$ hacia atrás en el tiempo, mediante e^{iHt} . Después se aplica el operador \hat{W} y se evoluciona hacia adelante el tiempo. Si se espera una cantidad de tiempo grande y la teoría es caórica se espera que la perturbación \hat{W} tenga un efecto grande cuando se evoluciona hacia adelante el tiempo. Imagen tomada de [32].

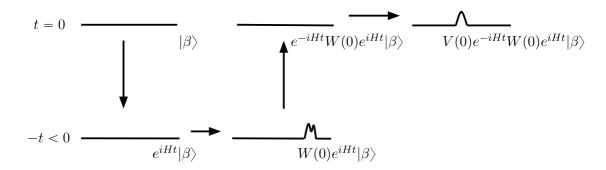


Figura 3.5: Construcción del estado $|\psi_2\rangle$. En este caso el sistema primero se evoluciona hacia atrás en el tiempo y luego se aplica \hat{W} . Después se regresa el estado a t=0 y se aplica el operador V, como este operador se crea en t=0 se espera que el estado sea diferente a $|\psi_1\rangle$ donde el efecto de \hat{V} casi desaparece. Así, cuando la teoría es caótica se espera que $\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \approx 0$. Imagen tomada de [32].

Aunque el resultado con $\hat{W} = \hat{q}(t)$, $\hat{V} = \hat{p}(0)$, hace contacto con el problema clásico, en general el comportamiento cuántico de la teoría se manifiesta por el crecimiento exponencial de (3.24) para una gran cantidad operadores hermitianos. En este trabajo nos enfocaremos en sistemas donde el número de grados de libertad es muy grande N >> 1, ya que como vimos en la sección anterior esto hace que podamos considerar soluciones clásicas en la parte gravitacional de la correspondencia holográfica. En este tipo de sistemas a temperatura finira y tiempos pequeños se espera que el efecto de $\hat{V}(t)$ todavía no haya alcanzado a $\hat{W}(0)$ de modo que el conmutador es pequeño [37]

$$C(t) \approx \frac{1}{N}, \quad 0 \le t \le t_d,$$

donde N es el número de grados de libertad del sistema y t_d es el tiempo de disipación característico del equilibrio térmico¹. Cuando nos alejamos de este tiempo se tiene el comportamiento exponencial que caracteriza el caos

$$C(t) \propto \frac{1}{N} e^{\lambda t}, \quad t_d << t << t_s,$$

donde t_s es llamado el tiempo de mezcla (scrambling time en inglés). En este intervalo de tiempo la perturbación inicial se esparce por el sistema, de modo que cuando transcurre suficiente tiempo $t \geq t_s$ el conmutador C(t) permanece constante ya que $\hat{W}(t)$ se encuentra mezclado con todos los grados de libertad del sistema. Este conmutador mantiene su valor para tiempos posteriores a diferencia de sistemas no caóticos donde la influencia de la perturbación inicial es oscilatoria [56].

¹Esta escala temporal controla el decaimiento de la función de dos puntos $\langle V(t)V(0)\rangle \approx e^{-t/t_d}$.

Si los operadores se separan espacialmente el resultado anterior se generaliza a

$$C(t, \vec{x}) \propto \frac{1}{N} e^{\lambda \left(t - \frac{|\vec{x}|}{v_b}\right)}, \quad t_d << t << t_s,$$

el efecto del operador \hat{W} empieza a ser relevante cuando $C(t,\vec{x}) \propto 1$ de modo que la distancia espacial entre ambos operadores define la región de influencia de \hat{W} . A v_b se le conoce como la velocidad de mariposa ya que caracteriza la velocidad con la que la perturbación al sistema se vuelve importante. Esta región define un cono donde a partir de $t > t_*$ el efecto del operador \hat{W} empieza a tener relevancia como se puede ver en la Figura 3.6.

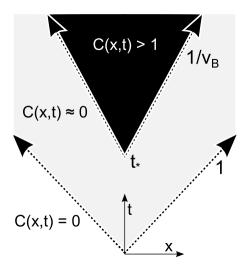


Figura 3.6: Regiones donde $C(t, \vec{x})$ es diferente de cero. Imagen tomada de [32].

3.4. Caos y holografía

Cuando la teoría de campos en la que calculamos C(t) tiene un dual gravitacional es posible calcular el coeficiente de Lyapunov, la velocidad de la mariposa y el tiempo de mezcla para teorías fuertemente acopladas mediante cálculos en gravedad clásica. El primer sistema donde se estudiaron estas cantidades de manera holográfica fue en el estado termo doble de campos (TFD por sus siglas en inglés)[42]. Este estado está formado por dos copias de una teoría, L y R, y se construye con el objetivo de tener una matriz de densidad reducida, $\rho_A = tr_B \rho$, que corresponde a una teoría a temperatura $T = 1/\beta$ en cada copia de la teoría

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{Z^{1/2}} \sum_{n} e^{-\beta E_n/2} |n\rangle_L |n\rangle_R,$$

$$\rho_L = \operatorname{tr}_B(|\Psi\rangle \langle \Psi|) = \frac{1}{Z} \sum_{n} e^{-\beta E_n} |n\rangle \langle n|,$$
(3.28)

donde Z es la función de partición de una de las copias de la teoría. El estado $|\Psi\rangle$ es puro y a pesar de que las dos copias de las teorías no pueden interactuar el entrelazamiento entre sus regiones es diferente de cero. Maldacena estudió en [47] el estado TFD concluyendo que su dual gravitacional es un agujero negro eterno en AdS, ver Figura 3.7, donde la región UV de la teoría L(R) corresponde a la frontera izquierda (derecha) del espacio-tiempo y ambas fronteras estan separada entre sí por el horizonte del agujero negro. El estado $|\Psi\rangle$ es invariante ante evolución temporal del Hamiltoniano $H = H_L - H_R$, esta simetría se ve realizada en el espacio-tiempo a través de un vector de Killing temporal que va hacia adelante en la parte derecha y hacia atrás en la parte izquierda [47].

Es posible construir la estructura causal del agujero negro eterno partiendo de un agujero negro con una sola frontera extendiendo el espacio-tiempo mediante la construcción de Kruskal como vimos en la sección 2.1.1. Para ilustrar el cálculo holográfico consideramos un agujero negro descrito por

$$ds^{2} = -F(r)dt^{2} + \frac{dr^{2}}{F(r)} + h_{ij}dx^{i}dx^{j},$$
(3.29)

donde h_{ij} es la métrica que define la topología del horizonte del agujero negro y en nuestro caso será siempre la de una esfera o la plana. El espacio-tiempo que resulta de la extensión de Kruskal se define a través del elemento de línea:

$$ds_{BH}^2 = 2A(u,v)dudv + g(u,v)h_{ij}(x)dx^idx^j.$$

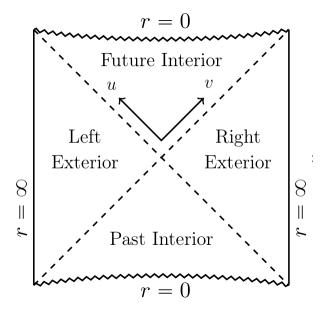


Figura 3.7: Diagrama de Penrose de la extensión de Kruskal de un agujero negro que es asintóticamente AdS. Imagen tomada de [32].

Para estudiar el comportamiento caótico de la teoría de campos se coloca un operador $\hat{V}(t_w)$ que crea una partícula nula con energía E en la frontera izquierda a un tiempo t_w en el pasado. Mientras más grande es t_w la trayectoria de la partícula comienza más cercana al horizonte inferior de modo que sigue cada vez más a la geodésica nula parametrizada por u=0. Cerca del horizonte la métrica del agujero negro se ve como la del espacio-tiempo de Rindler con una aceleración dada por su gravedad superficial

$$ds^{2} = -\kappa^{2} \rho^{2} dt^{2} + d\rho^{2} + h_{ij} dx^{i} dx^{j} = -\rho^{2} d\xi^{2} + d\rho^{2} + h_{ij} dx^{i} dx^{j},$$
(3.30)

de modo que el tiempo de Rindler está asociado con el tiempo de Rindler cerca del agujero negro mediante $\xi = \frac{2\pi}{\beta}t$. El tiempo de Rindler parametriza transformaciones de Lorentz en el espacio-tiempo de Minkowski ya que $\xi = \kappa^{-1} \operatorname{Arctanh}(v(t))$, donde v(t) es la rapidez del observador acelerado. Así, el hacer una traslación en el tiempo del espacio-tiempo del agujero negro tiene como efecto cambiar la energía de la partícula mediante una transformación de Lorentz con parámetro $\xi = \frac{2\pi}{\beta}t$, de tal forma que, para tiempos grandes, la energía de la partícula creada por V vista por un observador a tiempo t=0 está dada por $E_{t=0}\approx Ee^{2\pi t/\beta}$. Así, al mandar la partícula suficientemente hacia el pasado su energía crece exponencialmente cerca del horizonte y llega al punto donde tenemos que tomar en cuenta cómo deforma la geometría. La forma de esta solución fue dada primero en [49] para una partícula sin masa moviéndose en Minkowski. Si se escribe la contribución de la onda de choque de manera general como

$$ds^{2} = ds_{BH}^{2} + h_{uu}du^{2}, \quad H_{uu} = \delta(U)H(x), \tag{3.31}$$

podemos seguir la trayectoria de una geodésica nula que se mueve en la dirección U, ortogonal a la dirección de la partícula creada por \hat{V} , para obtener [48]

$$\int 2A(0)dV = \int H_{uu}dU \to H(x) = 2A(0)\Delta V \equiv f(x). \tag{3.32}$$

Es decir, el efecto de la partícula cayendo corresponde a un corrimiento en la dirección nula en la que cae la partícula $v \to v + \Theta(u) f(x)$ de modo que el espacio-tiempo resultante está formado por dos copias de un agujero negro pegadas a través de la región u=0, ver Figura 3.8. La parte izquierda corresponde a la geometría de un agujero negro con masa M+E mientras que la parte derecha sigue siendo la solución original con masa M. Dicha perturbación genera lo que se denominó en [48] como una onda de choque.

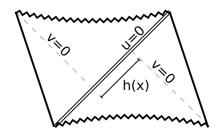


Figura 3.8: Diagrama de Penrose correpondiente a la geometría de onda de choque, el salto en la coordenada v corresponde a f(x). Imagen tomada de [56].

Tomando este ansatz basado en argumentos físicos se calculó en [50] cómo cambia la forma de la métrica y el tensor de energía-momento cuando imponemos que la métrica en la parte derecha tenga la misma métrica que antes de la onda de choque sólo que ahora recorrida por una función dependiente de las coordenadas transversales f(x) en la dirección nula v:

$$T = 2T_{uv}(u, v + \Theta(u)f(x)) du \left(dv + \Theta(u)\partial_i f dx^i\right) + T_{uu}(u, v + \Theta(u)f(x)) du^2$$

+
$$T_{vv}(u, v + \Theta(u)f(x)) \left(dv + \Theta(u)\partial_i f(x)dx^i\right)^2 + T_{ij}(u, v + \Theta(u)f(x)) dx^i dx^j,$$

$$ds^2 = 2A(u, v + \theta f(x)) du \left(dv + \Theta(u)\partial_i f dx^i\right) + g(u, v + \Theta(u)f(x)) h_{ij}(x) dx^i dx^j.$$
(3.33)

Resulta más fácil trabajar en coordenadas que ya toman en cuenta el corrimiento debido a la onda de choque así que cambiamos a las coordenadas

$$\hat{u} = u, \quad \hat{v} = v + \Theta(u)f(x), \quad \hat{x}^i = x^i,$$

 $dv + \Theta(u)\partial_i f dx^i = d\hat{v} - \delta(\hat{u})d\hat{u},$

así se obtiene la métrica y el tensor de energía momento que usamos en las ecuaciones de Einstein,

$$ds^{2} = 2\hat{A}d\hat{u}\hat{v} - 2\hat{A}\hat{f}\hat{\delta}d\hat{u}^{2} + \hat{g}\hat{h}_{ij}d\hat{x}^{i}d\hat{x}^{j},$$

$$T = 2\left(\hat{T}_{uv} - \hat{T}_{vv}\right)d\hat{u}d\hat{v} + \left(\hat{T}_{uu} + \hat{T}_{vv}\hat{f}^{2}\hat{\delta}^{2} - 2\hat{T}_{uv}\hat{f}\hat{\delta}\right)d\hat{u}^{2} + \hat{T}_{uv}d\hat{v}^{2} + \hat{T}_{ij}d\hat{x}^{i}d\hat{x}^{j},$$

$$(3.34)$$

donde el gorro indica que la cantidad está evaluada en las nuevas coordenadas. Además de este contenido de materia que agregamos de forma general hay que sumar la contribución de la partícula que cae hacia la singularidad moviéndose a través de la geodésica con u=0, localizada en las direcciones transversales x,

$$\hat{T}_{uu}^{\text{shock}} = Ee^{2\pi t/\beta} \delta(\hat{u}) \delta(x). \tag{3.36}$$

Nos interesa ver la solución de las ecuaciones de movimiento para f(x) en distintas teorías de gravedad por lo que no escribiremos explícitamente la parte gravitacional y

la dejaremos como G_{ab} . Uno de los resultados importantes de [50] es que el espaciotiempo con métrica (3.33) tiene $G_{\hat{v}\hat{v}}^{(0)} = 0$, donde el superíndice de G indica su orden en la función f(x) de modo que $G^{(0)}$ corresponde a la parte gravitacional de la ecuación de movimiento del epacio-tiempo sin perturbar, (3.33). Tomando ésto en cuenta y juntando (3.35) y (3.36) obtenemos para la componente $G_{\hat{u}\hat{u}}$,

$$G_{\hat{u}\hat{u}} = G_{\hat{u}\hat{u}}^{(0)} + G_{\hat{u}\hat{u}}^{(1)} = \hat{T}_{uu} + Ee^{2\pi t\beta} f(x)\delta(u) - 2\hat{T}_{uv}f(x)\delta(u),$$

$$G_{\hat{u}\hat{u}}^{(1)} + 2\hat{T}_{uv}f(x)\delta(u) = Ee^{2\pi t\beta}\delta(u)\delta(x),$$

$$G_{\hat{u}\hat{u}}^{(1)} + 2G_{\hat{u}\hat{v}}^{(0)}f(x)\delta(u) = Ee^{2\pi t\beta}\delta(u)\delta(x),$$
(3.37)

Para pasar de (3.37) a(3.38) notamos que \hat{T}_{uv} no es el tensor de energía momento escrito en la nueva base, $T_{\hat{u}\hat{v}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \hat{u}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \hat{v}} T_{\alpha\beta}$, sino es el tensor en las viejas coordenadas evaluado en las nuevas, $\hat{T}_{uv} = T_{uv}(u, v + \Theta(u)f(x))$, de manera que sigue siendo solución de la ecuación de movimiento sin perturbar: $T_{uv}(u, v + \Theta(u)f(x)) = G_{uv}^{(0)}(u, v + \Theta(u)f(x))$. Notamos también que en (3.38) no aparece el tensor de energíamomento explícitamente, la dependencia del contenido de materia se encuentra de manera implícita en la función F(r) de la métrica (3.29).

Debido a la presencia de $\delta(u)$ en (3.38), la solución para el corrimiento f(x) sólo depende de su comportamiento cercano al horizonte, u=0. Con fines de calcular la velocidad de mariposa en diferentes teorías es útil escribir las funciones A(uv) y B(uv) de (3.33) en términos de una serie de Taylor cerca del horizonte. Siguiendo [53] consideramos el espacio-tiempo definido por

$$ds^{2} = -h(\rho)dt^{2} + \frac{d\rho^{2}}{F(\rho)} + \rho^{2}dx^{i}dx_{i},$$
(3.39)

este espacio es asintóticamente AdS, es decir, para ρ grande tenemos $h, F = g^2 \rho^2 + \cdots$, donde L = 1/g es el radio de AdS. Si el horizonte se encuentra en $\rho = \rho_0$ entonces la serie de Taylor alrededor de ρ_0 toma la forma

$$h = h_1(\rho - \rho_0) + h_2(\rho - \rho_0)^2 + \cdots, \quad F = F_1(\rho - \rho_0) + F_2(\rho - \rho_0) + \cdots,$$

de la construcción de Kruskal se obtiene que cerca del horizonte

$$uv = (\rho - \rho_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{F_2}{F_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) (\rho - \rho_0)^2$$
$$\rho - \rho_0 = uv + \frac{1}{2} \left(\frac{F_2}{F_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) u^2 v^2 + \cdots,$$

expandiendo A(uv) y B(uv) se obtiene

$$A = A_0 + A_1(uv) + A_2(uv)^2 + \cdots, \quad B(uv) = B_0 + B_1(uv) + A_2(uv)^2 + \cdots,$$

$$A_0 = \frac{4}{F_1}, \quad A_1 = \left(\frac{2F_2}{F_1} + \frac{6h_2}{h_1}\right) \frac{1}{F_1}, \quad A_2 = \left(\frac{3F_2^2}{4F_1^2} + \frac{F_3}{F_1} + \frac{13}{2} \frac{F_2 h_2}{F_1 h_1} + \frac{19}{4} \frac{h_2^2}{h_1^2} + 5\frac{h_3}{h_1}\right) \frac{1}{F_1}$$

$$B_0 = g^2 \rho_0^2, \quad B_1 = 2g^2 \rho_0^2, B_2 = g^2 \left(1 + \frac{F_2}{F_1} \rho_0 + \frac{h_2}{h_1} \rho_0\right).$$

Con esta expansión podemos escribir la velocidad de mariposa y su dependencia en F y h. Para gravedad de Einstein la ecuación de movimiento que determina el corrimiento f(x) está dada por

$$\nabla^2 f(x) - \mu^2 f(x) = c\delta(x) \tag{3.40}$$

donde $\mu^2=3\frac{B'(0)}{A(0)}=\frac{6r_0^2}{L^2}, \nabla^2=\frac{1}{\sqrt{h}}\partial_i\left(\sqrt{h}h^{ij}\partial_j\right)$ y $c=64\pi GEe^{\frac{2\pi tw}{\beta}}$. Si pasamos esta ecuación a coordenadas esféricas (en la dirección de la teoría de campo) obtenemos

$$\frac{1}{R^2}\partial_R(R^2\partial_R f(R))P_l(\theta,\phi)) - (l(l+1) + \mu^2)f(R)P_l(\cos(\theta)) = c\delta(\vec{R})$$
(3.41)

La solución a esta ecuación, para R>0, está dada por las funciones modificadas esféricas de Bessel [54]

$$b_n(\mu R) = K_n(\mu R) + J_n(\mu R),$$
 (3.42)

 $J_n(\mu R)$ diverge cuando $\mu R \to \infty$ así que nos quedamos sólo con $K_n(\mu R)$. Estas funciones tienen la forma

$$K_l(\mu R) = \frac{e^{-\mu R}}{\mu R} + e^{-\mu R} O(\mu^- 2R^{-2}), \tag{3.43}$$

de modo que al tomar el límite de μR grande podemos aproximar $K_l \approx \frac{e^{-\mu R}}{R}$. Tomando la solución general como $f(R) = \sum_l A_l P_l(\cos(\theta)) K_l(\mu R)$ la ecuación diferencial (3.40) se satisface para R > 0. En R = 0, análogo a lo que sucede en la ecuación de Poisson para una carga puntual, tenemos ahora la contribución de un término que era cero para R > 0, $\nabla^2(\frac{1}{R}) = \delta(\vec{R})$. Es decir, sólo en R = 0, $\nabla^2(\frac{1}{R})$ da la contribución de la $\delta(R)$ así que $f(R) = \sum_l A_l P_l(\cos(\theta)) K_l(\mu R)$ es la solución general de (3.40).

Para obtener los coeficientes A_l sustituimos $f(r,\theta)$ en la ecuación diferencial

$$\frac{e^{-\mu R}}{\mu} \sum_{l} A_l P_l(\cos(\theta)) \nabla^2 \frac{1}{R} = e^{-\mu R} \sum_{l} A_l P_l(\cos(\theta)) \delta(\vec{R}) = c\delta(\vec{R}), \tag{3.44}$$

$$\sum_{l} \frac{A_{l}}{\mu} P_{l}(\cos(\theta)) = c \tag{3.45}$$

Como el lado derecho no depende de θ se obtiene $A_0 = \mu c$ y $A_{l>0} = 0$. Así, tenemos que para $R\mu = |\vec{x}|\mu >> 1$ la solución de (3.40) toma la forma [56]

$$f(x) = \frac{e^{\frac{2\pi}{\beta}(t_w - t_*) - \mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|^{\frac{D-3}{2}}},$$
(3.46)

donde $t_* = \frac{\beta}{2\pi} \log \frac{c_1}{G_N} \approx \frac{\beta}{2\pi} \log N^2$, c_1 es una constante y usamos el hecho de que estamos en el límite de N grande para ignorar su contribución al tiempo de mezcla.

La geometría de onda de choque sólo captura la influencia del operador $\hat{W}_x(t_w)$, sin embargo, para observar el caos cuántico es necesario pesar este efecto con otro

operador $\hat{W}_y(0)$ a través del conmutador (3.24). Este cálculo se realizó en el dual gravitacional por primera vez en [55, 56]. Al tomar dos operadores en diferentes posiciones el conmutador C(t) adquiere una dependencia de esta separación por lo que toma la forma

$$C(t_w, |x-y|) = \langle \Psi | \left[\hat{W}_x(t_w), \hat{W}_y \right]^{\dagger} \left[\hat{W}_x(t_w), \hat{W}_y \right]$$
$$= 2 - 2\operatorname{Re} \langle \Phi | \Phi' \rangle$$
(3.47)

donde $|\Phi\rangle = \hat{W}_x(t_w)\hat{W}_y |\Psi\rangle$ y $|\Phi'\rangle = \hat{W}_y\hat{W}_x(t_w) |\Psi\rangle$ son los análogos de $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ en (3.26) para diferentes posiciones espaciales. Si suponemos que $\hat{W}_x(t_w)$ tiene energía suficiente para provocar la onda de choque entonces el segundo término de (3.47) hace a $C(t_w, |x-y|)$ una medida del traslape entre el estado con la perturbación \hat{W}_y en las coordenadas originales y la perturbación \hat{W}_y después de hacer el corrimiento de f(x-y) en u=0. Definiendo $t_*=\frac{\beta}{2\pi}\log(G_N^{-1})$ se puede ver [56] que el radio de crecimiento del operador está dado por

$$r\left[\hat{W}_x(t_w)\right] = v_B(t_w - t_*) - O(\log t_w), \tag{3.48}$$

de modo que estudiando la geometría de una onda de choque f(x) podemos obtener cantidades relacionadas con el caos. Además de este resultado, en [51] se calculó la forma explícita del correlador (3.24) usando la aproximación Eikonal que consiste en escribir la fase de la amplitud de dispersión como la acción evaluada en la solución clásica $e^{i\delta(s,b)} = e^{iS_{cl}}$, donde s es una variable tipo Mandelstam y b es el parámetro de impacto dado por la separación espacial de los operadores \hat{V}, \hat{W} .

El cálculo de este correlador de cuatro puntos depende de la forma explícita de los propagadores bulto-frontera² correspondientes a los operadores \hat{V}, \hat{W} . En el espaciotiempo de Rindler AdS₃ estos correladores se conocen de forma explícita de modo que usando la aproximación Eikonal y en el límite de $G_N e^{\frac{2\pi}{\beta} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{v_B}\right)} << 1$ se obtiene [51]

$$OTO(t) = 1 - 8\pi i G_N \frac{\Delta_V \Delta_W}{c} e^{\frac{2\pi}{\beta} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{v_B}\right)}, \tag{3.49}$$

donde Δ_V, Δ_W son las dimensiones conformes de los operadores \hat{V}, \hat{W} y c es una constante. Así, regresando a la fórmula (3.26) y dado que $f(t, \vec{x}) \propto G_N e^{\frac{2\pi}{\beta} \left(t - \frac{|\vec{x}|}{v_B}\right)}$ se obtiene

$$C(t,x) \propto f(t,x)$$
 (3.50)

este resultado confirma que para G_N pequeño o para un tiempo en el rango $t_d << t_*$ es posible leer las cantidades caóticas resolviendo la ecuación diferencial de f(t,x).

²Los propagadores bulto-frontera $\mathcal{P}_{\Delta}(x-x',z)$ relacionan el valor del campo en la frontera de AdS con el de su interior tal que si la el campo actúa como fuente J(x) en la frontera el propagador está dado por $\phi(x,z) = \int d^4x' \mathcal{P}_{\Delta}(x-x',z)J(x')$.

Además del ejemplo de Rindler AdS, el cálculo de (3.50) se extiende a agujeros negros con horizontes compactos cuando la distancia entre los operadores \hat{V}, \hat{W} es muy grande. Así, aunque la forma explícita de los propagadores bulto-frontera de la teoría gravitacional es necesaria para dar los detalles precisos del correlador de cuatro puntos es posible hacer una aproximación para puntos lejanos en el espacio compacto [51]

$$C(t) \propto e^{-2i\omega\left(t - t_* - \frac{R}{v_B}\right)}, \quad \text{Im}(\omega) < 0,$$
 (3.51)

donde R es el diámetro (distancia más grande entre puntos en la variedad) del espacio compacto y ω es la menor frecuencia cuasi-normal³ del sistema. En el próximo capítulo trataremos con horizontes de topología esférica de modo que aunque los resultados en este tipo de espacios-tiempos no tengan una interpretación tan clara para puntos diferentes a los antipodales, la ecuación (3.51) nos dice la relación que tiene el cálculo gravitacional con las cantidades caóticas de la teoría de campos.

Los resultados (3.50), (3.48) indican que es correcto leer las cantidades relacionadas con el caos a partir de la solución (3.46). Así, el coeficiente de Lyapunov y la velocidad de mariposa están dados por

$$\lambda_L = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\sqrt{h_1 F_1}}{2}, \quad v_b = \frac{2\pi}{\beta m} = \sqrt{\frac{h_1}{2g^2 \rho_0^2 (D - 2)}}.$$
 (3.52)

Para el caso más sencillo de la brana negra sin contenido de materia, $F(r) = h(r) = \frac{r^2}{L^2} - \frac{M}{r^2}$, la velocidad de mariposa es [42]

$$v_b^{(S)} = \sqrt{\frac{d}{2(d-1)}}. (3.53)$$

Una característica importante de (3.53) es que es una cota superior para teorías duales a agujeros negros en gravedad de Einstein con horizonte planar que satisfacen la condición de energía nula [57], $T_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \geq 0$ con k^{μ} un vector nulo. Es decir, cualquier contenido de materia que se agregue a la teoría tiene como efecto disminuir la velocidad de la mariposa $v_b^{(M)}$ de la teoría dual

$$v_b^{(M)} \le v_b^{(S)}. (3.54)$$

En el siguiente capítulo mostraremos la deducción del análogo de este resultado para horizontes con topología esférica, en este caso la cota superior corresponde también a la solución sin materia con horizonte esférico, es decir, AdS-Schwarzchild.

Regresando a la topología planar mencionaremos en lo que resta de esta sección algunos resultados del efecto mariposa con diferentes contenidos de materia en gravedad

³Los modos cuasi-normales dictan la manera en la que los campos decrecen en un agujero negro $\phi \approx e^{-i\omega(t+r_*)}$ [52], donde ω puede tomar valores imaginarios.

de Einstein-Hilbert. Uno de los casos más sencillos está dado por la teoría de Einstein-Maxwell con un contenido de campos dado por

$$A^{\mu} = \frac{\sqrt{3}q}{2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) dt,$$

$$F(r) = \frac{r^2}{L^2} - \frac{m}{r^2} + \frac{q^2}{r^4},$$
(3.55)

repitiendo el procedimiento que se describió anteriormente se obtiene la velocidad de mariposa [44]

$$v_b^{EH-Max} = \sqrt{\frac{2r_0^6 - L^2q^2}{3r_0^6}} \approx v_{EH}^{(k=0)} - \frac{L^2q^2}{\sqrt{24}r_0^6}$$
 (3.56)

vemos que a diferencia de (3.53) esta velocidad si depende del tamaño del agujero negro y el efecto del campo electromagnético es el de disminuir v_b como era de esperarse de acuerdo a la cota (3.54). La velocidad se hace cero cuando ambos valores de r donde f(r) = 0 coinciden.

Otro caso que resulta interesante es el de un espacio-tiempo anisotrópico [45], dicha teoría tiene una métrica dada por

$$ds^{2} = -G_{tt}(u)dt^{2} + G_{uu}(u)du^{2} + G_{xx}(u)(dx^{2} + dy^{2}) + G_{zz}(u)dz^{2},$$
(3.57)

donde el horizonte está localizado en $u = u_h$. Debido a la anisotropía en las direcciones transversales la velocidad de mariposa va a cambiar dependiendo de en qué dirección se localice la perturbación. Así, para la métrica general (3.57) se obtiene [45]

$$v_b^{\parallel^2} = \frac{G'_{tt}}{G_{zz} \left(2\frac{G'_{xx}}{G_{xx}} + \frac{G'_{zz}}{G_{zz}} \right)} \bigg|_{u=u_h}, \quad v_b^{\perp^2} = \frac{G'_{tt}}{G_{xx} \left(2\frac{G'_{xx}}{G_{xx}} + \frac{G'_{zz}}{G_{zz}} \right)} \bigg|_{u=u_h}. \tag{3.58}$$

Tomando en particular la solución de brana negra anisotrópica de [46] se obtienen los resultados de la figura 3.9.

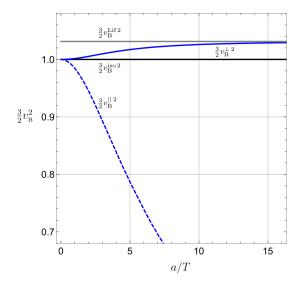


Figura 3.9: Velocidad de mariposa perpendicular y paralela a la anisotropía, a es un factor que mide la anisotropía. El modelo [46] interpola entre una solución tipo Lifshitz en el infrarrojo y una geometría AdS en el ultravioleta mientras que los puntos intermedios se obtienen numéricamente. Podemos ver este comportamiento tomando el límite de temperaturas pequeñas o anisotropías grandes $\frac{a}{T} >> 1$ donde la solución fluye a la geometría tipo Lifshitz y se acerca a su velocidad de mariposa mientras que para $\frac{a}{T} >> 1$ se recupera el valor de AdS $v_b^2 = \frac{2}{3}$. Imagen tomada de [45]

.

Además de describir el carácter caótico de la teoría de campo dual el efecto mariposa tiene conexiones con diferentes propiedades termodinámicas de los agujeros negros. En particular, recientemente [33, 34] se ha encontrado una relación entre los coeficientes de transporte de un sistema y la velocidad de mariposa en un sistema holográfico. Debido a que las propiedades de transporte parecen ser constantes en muchas teorías holográficas 4 se exploró en [33] como se relacionan las constantes de difusión D para una teoría con simetría partícula-agujero con la velocidad de mariposa. Se propuso en [36] que las constantes de difusión están acotadas por

$$D \ge \frac{\hbar v^2}{k_B T},\tag{3.59}$$

donde v es una velocidad característica de la teoría. En el caso de la teoría con simetría partícula-agujero se encontró

$$D_C = C \frac{v_B^2}{2\pi T},\tag{3.60}$$

donde C es una constante que sólo depende de las teoría infrarroja.

⁴El ejemplo más conocido de esto es la cota de viscosidad KSS [35] $\frac{\eta}{s} \approx \frac{1}{4\pi} \frac{\hbar}{k_B}$ donde η es la viscosidad y s la densidad de entropía.

Independientemente de este resultado se encontró en [37, 38] una manera de relacionar los correladores que normalmente se usan para calcular los coeficientes de transporte de la teoría con la velocidad de mariposa. Al permitir que la frecuencia de los correladores de densidad de energía en el límite hidrodinámico tomen valores imaginarios se encuentran "saltos de polos" cuando las frecuencias toman valores relacionados con el comportamiento caótico. Para ver esto el correlador retardado de dos puntos se escribe de manera general como

$$G_{T^{00}T^{00}}^{R}(\omega, k) = \frac{b(\omega, k)}{a(\omega, k)},$$
 (3.61)

donde $a(\omega, k)$ queda definida por el hecho de que las constantes de difusión se encuentran los polos de G^R , es decir, los ceros de la función $a(\omega, k)$. Al continuar analíticamente ω, k a los números imaginarios tanto $a(\omega, k)$ como $b(\omega, k)$ se vuelven cero en los valores

$$\omega_0 = i\lambda_L, \ k_0 = i\frac{\lambda}{v_B},\tag{3.62}$$

de este modo el polo que hubiera estado en $a(\omega_0, k_0)$ se salta ya que $b(\omega_0, k_0)$ también se hace cero. Del lado gravitacional la manifestación de dicho salto de polo se encuentra en la reducción del número de ecuaciones de Einstein cerca del horizonte, de esta manera se tiene que encontrar un modo extra que pasa por (3.62). Las conexiones (3.60) y (3.62) se unen a casos como el paradigma de la membrana [39] dando más información acerca de la relación entre el horizonte, donde aparece el efecto mariposa, y la frontera, donde se calculan las constantes de transporte, en el límite hidrodinámico.

Si se generaliza el espacio termodinámico del agujero negro para incluir un término de presión asociado a la constante cosmológica $P=-\frac{\Lambda}{8\pi}$, la primera ley de los agujeros negros toma la forma

$$dM = TdS + \Phi_{\alpha}dQ_{\alpha} + V_{th}dP + \cdots, \qquad (3.63)$$

donde V_{th} es la variable conjugada a P llamada el volumen termodinámico y Φ_{α} respresenta el contenido de materia. Esta extensión permite escribir a la velocidad de mariposa en términos de cantidades termodinámicas a través de [53]

$$v_b^2 = \frac{1}{2} \frac{TS}{V_{th}P},\tag{3.64}$$

dicha igualdad sirve para agujeros negros planares con métrica (3.39). Usando la condición de energía nula los mismos autores probaron una cota para la velocidad de mariposa en agujeros negros estáticos

$$v_b^2 \le \frac{2\pi L^2 T}{(D-2)\rho_0}. (3.65)$$

En el próximo capítulo hablaremos más de estas relacionas y porqué dejan de funcionar en el caso de horizontes con topología esférica en teorías de gravedad de Lovelock. Finalmente, además de los resultados mencionados anteriormente se ha encontrado [41] que la velocidad de mariposa sirve caracterizar transiciones de fase cuánticas en teorías anisotrópicas que presentan transiciones de metal-aislante.

3.4.1. Efecto mariposa para teorías de orden superior en la curvatura

Para teorías de orden superior en la curvatura la ecuación de movimiento cambia su forma ya que el tensor $G_{\mu\nu}$ contiene más términos. Para ejemplificar el efecto de estos términos seguimos el análisis realizado en [59] y tomamos una teoría con términos de orden $O(R^2)$ cuya acción está dada por

$$S = \frac{1}{\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} \left[R + \frac{(D-1)(D-2)}{l_0^2} + \alpha_1 R^2 + \alpha_2 R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right], \tag{3.66}$$

donde l_0 es una escala de longitud y α_1,α_2 son acoplamientos. Esta teoría admite una solución de agujero negro asintóticamente AdS de la forma

$$ds^{2} = -f(r)dt^{2} + f^{-1}(r)dr^{2} + \frac{r^{2}}{l^{2}}d\vec{x}^{2}, \quad f(r) = \frac{r^{2}}{l^{2}}\left(1 - \frac{r_{h}^{D-1}}{r^{D-1}}\right),$$

como sucede frecuentemente en teorías de gravedad superior las escalas de longitudes están relacionadas por el polinomio

$$l^{2}(l^{2} - l_{0}^{2}) + \frac{(D-4)(D-1)}{D-2} (D\alpha_{1} + \alpha_{2}) l_{0}^{2} = 0.$$

Para encontrar v_B pasamos esta métrica a coordenadas de Kruskal e imponemos el ansatz de la onda de choque, la componente uu de las ecuaciones de movimiento toma la forma (3.39) con $f(r) = h(r) = \frac{r^2}{l^2} \left(1 - \frac{r_0^{D-1}}{r^{D-1}}\right)$. Expandiendo el tensor G explícitamente se obtiene

$$\begin{split} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{(D-1)(D-2)}{2l_0^2} g_{\mu\nu} + 2\alpha_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Box - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \right) R \\ &+ \alpha_2 \left[(g_{\mu\nu} \Box - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu}) R + \Box \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + 2 \left(R_{\mu\sigma\nu\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\sigma\rho} \right) \right) R^{\sigma\rho} \right], \end{split}$$

pasando a coordenadas de Kruskal y usando el ansatz de la onda de choque la componente $\hat{u}\hat{u}$ ecuación de movimiento toma la forma

$$\left(\frac{l^2}{r_h^2}\partial_i\partial^i - \frac{(D-1)(4D\alpha_1 + (D+2)\alpha_2) - 2l^2}{2\alpha_2l^2}\right) \left(\frac{l^2}{r_h^2}\partial_i\partial^i - \frac{(D-1)(D-2)}{2l^2}\right) h(x),
\propto -\frac{(D-1)}{4\alpha_2} \frac{1}{l^2} lEe^{2\pi t_w/\beta} \delta^{D-2}(x),$$
(3.67)

Para resolver esta ecuación separamos los dos factores en dos ecuaciones diferenciales distintas

$$(\partial_i \partial^i) q(x) = \eta \delta^{D-2}(x),$$

$$(\partial_i \partial^i - a_2^2) h(x) = q(x),$$

donde η , a_1 y a_2 se pueden leer de (3.67). Notando que la ecuación de q es la ecuación de la función de Green de h se obtiene

$$q(x) = -\frac{\eta}{2a_1} e^{-a_1|x|},$$

$$h(x) = \frac{\eta}{4a_1 a_2} \int_{-\infty}^{\infty} dy \,\Theta(y) e^{-a_1 y - a_2|x - y|} = -\frac{\eta}{2a_1 a_2} \frac{a_1 e^{-a_2 x} - a_2 e^{-a_1 x}}{a_1^2 - a_2^2}.$$
 (3.68)

El resultado (3.68) nos dice que al tener ecuaciones de movimiento con cuatro derivadas la solución del perfil de la onda de choque incluye dos exponenciales. Siguiendo la interpretación del dual gravitacional se concluye que en este caso tenemos dos velocidades de mariposa distintas

$$v_B^{(1)} = \sqrt{\frac{D-1}{2(D-2)}},\tag{3.69}$$

$$v_B^{(2)} = \sqrt{\frac{D-1}{2(D-2)}} \sqrt{\frac{(D-1)(D-2)\alpha_2}{(D-1)(2(D\alpha_1 + (D+2)\alpha_2) - 2l^2}},$$
 (3.70)

la ecuación (3.69) es la que se obtiene en la teoría de Einstein-Hilbert, (3.53), mientras que (3.70) proviene de aumentar el orden en las derivadas de la métrica.

Las teorías de orden superior en la curvatura normalmente tienen más modos de espín 2 propagándose además del gravitón, en el caso de la teoría (3.66) aparece un modo adicional de espín 2 con masa $M = \frac{2(D-1)(D\alpha_1 + \alpha_2) - l^2}{\alpha_2 l^2}$. En términos de dicha masa se puede reescribir la velocidad de mariposa (3.70) como [59]

$$v_B^{(2)} = \sqrt{\frac{D-1}{2(D-2)}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2l^2}{(D-1)(D-2)}M^2}},$$

esto hace claro que la nueva velocidad es menor que aquella de la teoría de Einstein. Así, el cono creado por (3.53) sigue siendo el que define la cota del caos y tenemos que cuando M=0 ambas velocidades coinciden. Para entender el significado de las dos velocidades de la mariposa conviene regresar a la correspondencia campo-operador. Sabemos que la métrica en AdS funciona como la fuente del tensor energía momento en la teoría de campos, sin embargo, cuando las ecuaciones de movimiento de un campo en la teoría de gravedad tienen mayores derivadas dicho campo podría ser fuente de distintos operadores en la teoría dual. En este caso tanto el gravitón como el modo masivo de espín 2 excitan operadores en la frontera a través de la métrica y obtenemos dos velocidades de mariposa distintas. Cuando M=0 los dos modos excitan un sólo campo con la misma dimensión conforme en la teoría de campos y la velocidad de mariposa coincide.

La teoría de Gauss-Bonnet, que revisamos en la sección 2.2, es un caso especial de teorías de orden superior en la curvatura ya que aunque contiene términos de $O(R^2)$

las ecuaciones de movimiento son de segundo orden. Así, sólo hay una velocidad de la mariposa que difiere de la de Einstein por un factor

$$v_b^{(GB)} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{GB}}}{2}} \sqrt{\frac{D - 1}{2(D - 2)}},$$
 (3.71)

donde λ_{GB} es la constante que aparece multiplicando al término de Gauss-Bonnet (2.22). Para D=4 (3.71) excede la velocidad de la luz cuando $\lambda_{GB}<-\frac{3}{4}$, sin embargo, se ha mostrado usando argumentos de conservación de energía que la teoría de Gauss-Bonnet viola causalidad en la frontera en la región $\lambda_{GB}<-0.36$ [13].

Otra teoría donde resulta interesante calcular estas cantidades es en gravedad cuasitopológica, que revisamos en la sección 2.2.1. Desde el punto de vista holográfico esta teoría se desarrolló en [12] con la intención de tener términos cúbicos en R (esto da lugar a un dual no supersimétrico) mientras las ecuaciones de movimiento linealizadas son iguales a las de Einstein en un fondo de agujero negro asintóticamente AdS. La presencia de términos de orden $O(R^3)$ afecta la propagación de la onda de choque aunque las ecuaciones linealizadas coincidan con las de Einstein y el efecto de la curvatura mayor se manifiesta otra vez en las dos velocidades de mariposa. El cálculo de v_B se realizó en [60, 61] donde se concluyó que

$$v_B^{(1)} = \frac{1}{3f_\infty} \left(1 - \sqrt{1 + 144(8\lambda - 3)\mu} \right),$$

$$v_B^{(2)} = \frac{1}{3f_\infty} \left(1 + \sqrt{1 + 144(8\lambda - 3)\mu} \right),$$

donde μ es el acoplamiento del término de orden $O(R^3)$ (2.27).

A lo largo de este capítulo enunciamos resultados ya establecidos acerca del efecto mariposa y la correspondencia holográfica de modo que en el siguiente capítulo podamos usarlos para explicar los cálculos de este trabajo.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo comenzaremos revisando la teoría analizada en [18] que contiene un campo escalar conformalmente acoplado a gravedad de Lovelock y un campo de Maxwell. Esta teoría cuenta con pelo secundario debido al campo escalar y nos permite estudiar la velocidad de mariposa para una teoría dual a una CFT que vive en una esfera. En la sección 4.2 probaremos una generalización del resultado de [57] para la cota a la velocidad de mariposa en teorías duales a agujeros negros con horizontes esféricos que respetan la condición de energía nula. En la última sección 4.3 revisaremos los resultados de estudiar el caos holográfico en la teoría que revisamos en la primera sección, además haremos un análisis de la termodinámica extendida de los agujeros negros en las diferentes teorías para hacer una comparación con los resultados de [53]. Por último en la sección 4.4 concluimos el trabajo y mencionamos algunas direcciones para trabajo futuro.

4.1. Materia Conforme

En los capítulos anteriores hemos revisado geometrías que son solución de un espaciotiempo cuya materia se acopla mínimamente a la gravedad. En esta sección revisaremos la teoría, desarrollada en [15], que resulta de acoplar un campo escalar de manera conforme a una teoría de gravedad de Lovelock.

La manera más sencilla de acoplar un campo escalar a una teoría de gravedad es mediante el acoplamiento mínimo, $\int d^4x \sqrt{-g} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x)$. Sin embargo, este término no agrega pelo extra al agujero negro, la forma de acoplar el campo escalar que veremos a continuación nos permite ir más allá del teorema de no-pelo y así introducir más parámetros al agujero negro. Esta teoría fue desarrollada en [15] y consiste en acoplar el campo escalar de manera que el término del acoplamiento tenga simetría conforme. La construcción de la acción para el campo escalar sigue una forma similar a la de los términos de Lovelock que vimos en la sección 2.2. Comenzamos definiendo

un tensor construido en base al campo escalar $\phi(x)$ que conserva las simetrías del tensor de Riemann

$$S_{ab}^{cd} = \phi^2 R_{ab}^{cd} + \frac{4}{s} \delta_{[a}^{[c} \nabla_{b]} \nabla^{d]} \phi + \frac{4(1-s)}{s^2} \delta_{[a}^{[c} \nabla_{b]} \phi \nabla^{d]} \phi - \frac{2}{s^2} \delta_{[a}^{[c} \delta_{b]}^{d]} \nabla_e \phi \nabla^e \phi, \tag{4.1}$$

como hemos visto las transformaciones de Weyl cambian a la métrica mediante $g_{ab} \rightarrow e^{2\Omega} g_{ab}$. Al pedir que el campo escalar tenga un peso conforme s de modo que $\phi \rightarrow e^{s\Omega} \phi$ se obtiene $S_{ab}^{cd} \rightarrow e^{2(s-1)\Omega} S_{ab}^{cd}$ [14] y podemos construir una acción tal que la parte en la que aparece el campo escalar tenga invariancia conforme con la combinación:

$$\mathcal{I}_{\phi} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^{d}x \sqrt{-g} \sum_{k=0}^{\left[\frac{D-1}{2}\right]} \frac{1}{2^{k}} \delta_{\alpha_{1}\beta_{1}\cdots\alpha_{k}\beta_{k}}^{\mu_{1}\nu_{1}\cdots\mu_{k}\nu_{k}} \left[a_{k} R_{\mu_{1}\nu_{1}}^{\alpha_{1}\beta_{1}} \cdots R_{\alpha_{k}\beta_{k}}^{\mu_{k}\nu_{k}} + b_{k} \phi^{m_{k}} S_{\mu_{1}\nu_{1}}^{\alpha_{1}\beta_{1}} \cdots S_{\alpha_{k}\beta_{k}}^{\mu_{k}\nu_{k}} \right],$$
(4.2)

donde $m_k = \frac{2k(1-s)-D}{s}$. Además de este contenido de campos es posible agregar un término electromagnético dado por

$$\mathcal{I}_A = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\phi} + \mathcal{I}_{A} + \mathcal{I}_{B},\tag{4.4}$$

donde \mathcal{I}_B denota el término que se tiene que agregar para tener un problema variacional bien definido [14] de la misma forma que el término de Gibbons-Hawking (2.4) en gravedad de Einstein. La parte gravitacional de la acción (4.2) es el término de Lovelock, (2.20), mientras que el segundo término consiste en potencias de $S^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ que se combinan de la misma forma que lo hace R en la acción de Lovelock salvo un factor de ϕ^{m_k} que es necesario para conservar la invariancia conforme.

Para estudiar de manera más clara esta teoría se pueden poner valores a las constantes de modo que se obtenga la acción de un campo escalar conformalmente acoplado [20]

$$s = 1 - \frac{d}{2} \quad , \quad a_0 = -2\Lambda \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad b_0 = -16\pi G \frac{\lambda}{d!} \quad , \quad b_1 = -16\pi G,$$

$$I[g, \phi] = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} - \frac{\Lambda}{8\pi G} - \partial_\mu \partial^\mu \phi - \frac{D-2}{4(D-1)} \phi^2 R - \frac{\lambda}{D!} \phi^{\frac{2D}{D-2}} + O[R^2] \right]$$

Desarrollando de manera similar el término cuadrático de la acción se obtiene $(a_2 + b_2\phi^{D-4})(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}) + O[(\phi''^2]]$, este término es similar a uno que aparece como la segunda corrección a la acción efectiva de bajas energías en teoría de cuerdas [15].

Algunas soluciones a esta teoría fueron estudiadas en [15, 16, 17], en este trabajo nos interesan aquellas que tengan en su espacio de soluciones agujeros negros asintóticamente AdS ya que son un buen escenario para ser estudiadas en el contexto de la correspondencia holográfica. En lo que resta de esta sección seguimos el análisis de

[18] de modo que fijamos el peso conforme a s = -1. Así, se obtiene una solución de agujero negro cuya métrica está dada por

$$ds^{2} = -F(r)dt^{2} + \frac{dr^{2}}{F(r)} + r^{2}d\Sigma_{D-2,\sigma}$$
 , $\phi(r) = \frac{N}{r}$,

donde $\sigma \in \{-1,0,1\}$ corresponde a un horizonte con topología hiperbólica, plana y esférica respectivamente. Es conveniente reescalar las constantes de acoplamiento gravitacionales de la forma

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{(d-1)(d-2)}, \quad \alpha_1 = a_1, \quad \alpha_k = a_k \prod_{n=3}^{2k} (d-n) \text{ Para } k \ge 2.$$

Así, de manera similar que en gravedad de Lovelock (2.24), la función F(r) queda determinada por un polinomio dado por

$$\sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k \left(\frac{\sigma - F(r)}{r^2} \right)^k = \frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_{d-2}^{\sigma} r^{d-1}} + \frac{H}{r^d} - \frac{8\pi G}{(d-2)(d-3)} \frac{Q^2}{r^{2d-4}}, \tag{4.5}$$

donde las constantes H y Q miden la intensidad de los campos y se definen a través de las siguientes relaciones

$$F = \frac{Q}{r^{d-2}}dt \wedge dr, \quad H = \sum_{k=0}^{k_{max}} \frac{(d-3)!}{(d-2(k+1))!} b_k \sigma^k N^{d-2k}. \tag{4.6}$$

Otras condiciones que surgen de las ecuaciones de movimiento son:

$$\sum_{k=1}^{k_{max}} k b_k \frac{(d-1)!}{(d-2k-1)!} \sigma^{k-1} N^{2-2k} = 0, \tag{4.7}$$

$$\sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{(d-1)!(d(d-1)+4k^2)}{(d-2k-1)!} \sigma^{k-1} N^{2-2k} = 0, \tag{4.8}$$

al ser N la única incógnita, estas ecuaciones dan constricciones sobre los valores permitidos de las constantes de acoplamiento b_k . Cabe notar que la constante H puede tomar valores positivos o negativos para horizontes con topología esférica. El análisis de [19] nos dice que la configuración termodinámicamente estable para agujeros negros en 5-dimensiones con calor específico positivo es aquella que tiene H < 0.

Para horizontes planos, $\sigma = 0$, la ecuación (4.6) implica que recuperamos la solución que teníamos desde gravedad de Lovelock por lo que de aquí en adelante cuando tomemos en cuenta el efecto del campo escalar nos enfocaremos sólo en el caso donde $\sigma = 1$. La ecuación (4.5) tiene (D-1)/2 raíces reales aunque sólo una de ellas da lugar a una solución que tiene sentido físico y lleva a la solución de Einstein-Hilbert con simetría esférica cuando apagamos las constantes $a_{k>1}$. Este comportamiento es análogo a la rama de Einstein-Hilbert en gravedad de Lovelock.

4.1.1. Termodinámica

La termodinámica de la familia de agujeros negros definidos por (4.5) tiene masa, temperatura y entropía dadas por [18]

$$M = \frac{\sum_{d-2}^{\sigma} Q^{2}}{2(d-3)r_{0}^{d-3}} - \frac{(d-2)\sum_{d-2}^{\sigma} H}{r_{0}^{d-2}} + \frac{(d-2)\sum_{d-2}^{\sigma}}{16\pi G} \sum_{k=0}^{k_{m}ax} \alpha_{k} \sigma^{k} r_{0}^{d-2k-1},$$

$$T = \frac{1}{4\pi r_{0} D(r_{0})} \left[\frac{H}{r_{0}^{d-2}} - \frac{8\pi G Q^{2}}{(d-2)r_{0}^{2(d-3)}} + \sum_{k=0}^{k_{m}ax} \sigma \alpha_{k} (d-2k-1) \left(\frac{\sigma}{r_{0}^{2}} \right)^{k-1} \right],$$

$$S = \frac{\sum_{d-2}^{\sigma}}{4G} \left[\sum_{k=1}^{k_{m}ax} \frac{(d-2)k\sigma^{k-1}\alpha_{k}}{d-2k} r_{0}^{d-2k} - \frac{d}{2\sigma(d-4)} H \right], \tag{4.9}$$

donde

$$D(r_0) = \sum_{k=1}^{k_{\text{máx}}} k \alpha_k \left(\frac{\sigma}{r_0^2}\right)^{k-1}, \quad \Phi = \frac{\sum_{d=2}^{\sigma}}{(d-3)r_0^{d-3}}.$$
 (4.10)

Tomando en cuenta la forma de la acción del campo escalar la entropía del agujero negro se calcula usando la fórmula de Wald (2.26). Podemos ver de (4.9) que el término electromagnético no da ninguna contribución extra a la entropía mientras que el campo escalar si la modifica debido a la presencia de productos de $R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ en la construcción del tensor $S_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ (4.1).

Al analizar el conjunto de teorías descritas por (4.5) usando la primera ley extendida, donde la masa se entiende como la entalpía en lugar de la energía [40], se identifica la constante cosmológica con la presión y su variable conjugada con el volumen termodinámico. De la misma forma, para gravedad de Lovelock, se le asocia a la constante de acoplamiento $\alpha_{k>1}$ una variable termodinámica $\Psi^{(k)}$. Tomando en cuenta estas contribuciones, así como las del campo escalar, se obtiene la primera ley [18]

$$\delta M = T\delta S + \Phi \delta Q + \sum_{k} \Psi^{(k)} \delta \alpha_k + \sum_{k} K^{(k)} \delta b_k, \tag{4.11}$$

donde se define

$$\psi^{(k)} = \frac{\sum_{d=2}^{\sigma} (d-2)}{16\pi G} \sigma^{k-1} r_0^{d-2k} \left[\frac{\sigma}{r_0} - \frac{4\pi kT}{d-2k} \right], \tag{4.12}$$

$$\mathcal{K}^{(k)} = -\frac{\sum_{d=2}^{\sigma} (d-2)!}{16\pi G} \sigma^{k-1} N^{d-2k} \left[\frac{\sigma}{(d-2(k+1)!r_0)} + \frac{4\pi kT}{(d-2k)!} \right]. \tag{4.13}$$

Además de la primera ley se puede obtener el análogo a la relación de Euler en termodinámica observando como escalan las diferentes constantes de acoplamiento en la acción. Esto da lugar a la relación de Smarr dada por [18]

$$(d-3)M = (d-2)TS + (d-3)\Phi Q + \sum_{k} 2(k-1)\psi^{(k)}\alpha_k + (d-2)\sum_{k} \mathcal{K}^{(k)}b_k, (4.14)$$

En la sección 4.1 calcularemos las velocidades de mariposa de las diferentes configuraciones de los campos en (4.5). Dado que el campo conforme sólo tiene efecto para $\sigma \neq 0$ en lo que resta de este capítulo nos enfocaremos en el caso del horizonte con simetría esférica $\sigma = 1$. Enfocándonos en esta familia de agujeros negros en la siguiente sección encontraremos una cota para la velocidad de mariposa.

4.2. Cota a la velocidad de mariposa en una esfera

Como vimos en el capítulo anterior, existen otras dualidades además de la que hay entre AdS en coordenadas de Poincaré y la teoría conforme en Minkowski. En particular la teoría de cuerdas IIB en AdS Global es dual a una CFT en un el universo estático de Einstein, $\mathbb{R} \times S^3$. Este último caso también tiene su generalización a temperatura finita cuando colocamos un agujero negro con horizonte esférico en AdS global. Así, el comportamiento caótico que estudiaremos en horizontes con topología esférica corresponde al de una teoría de campos a temperatura finita en una 3-esfera. El espacio-tiempo más sencillo donde podemos calcular la velocidad de mariposa considerando la topología esférica en gravedad de Einstein es el de AdS-Schwarszchild¹

$$ds^{2} = -\left(1 + \frac{r^{2}}{L^{2}} - \frac{M}{r^{2}}\right)dt^{2} + \frac{dr^{2}}{1 + \frac{r^{2}}{L^{2}} - \frac{M}{r^{2}}} + r^{2}d\Omega_{3}^{2},\tag{4.15}$$

donde $d\Omega_3^2 = d\theta_1^2 + \sin^2(\theta_1)d\theta_2 + \sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)d\theta_3^2$ es el elemento de línea de una esfera unitaria 3-dimensional. Siguiendo el procedimiento del capítulo anterior obtenemos la misma ecuación de movimiento (3.40) excepto que esta vez el operador \square es el correspondiente en coordenadas esféricas. Usando la fórmula (3.52) obtenemos la velocidad de mariposa

$$v_b^{(Schw)^2} = \frac{1}{3r_0^2} (2r_0^2 + L^2). \tag{4.16}$$

Usando la ecuación (3.64) con las respectivas cantidades termodinámicas obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{TS}{PV} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2\pi r_0} + \frac{r_0}{L^2\pi}\right)\left(\frac{\pi r_0^3}{3G}\right)}{\left(\frac{1}{L^2}\right)\left(\frac{r_0^4}{4G}\right)} = v_b^{(Schw)^2},\tag{4.17}$$

este resultado sirve para apuntar hacia un comportamiento parecido entre el caso del horizonte planar y el horizonte esférico a pesar de la ambigüedad de la interpretación en este último caso. Al igual que en agujeros negros con horizonte plano, el espaciotiempo del agujero negro no es la configuración termodinámicamente estable de la teoría para cualquier valor de la temperatura debido a que su energía libre no corresponde a un mínimo, como revisamos en la ecuación (2.19). En el caso del horizonte

 $^{^1}$ Cambiamos de notación con respecto a la sección anterior sustituyendo $4GM \to M$ para facilitar los cálculos, el procedimiento y resultado sigue siendo el mismo.

con topología esférica para tener un agujero negro estable es necesario que $\frac{L^2}{2} \leq r_0^2$ [62]. Por otro lado, la ecuación (4.16) impone restricciones en el valor del radio del horizonte ya que para respetar causalidad v_b no puede ser mayor a uno: $L \leq r_o$ por lo que no hay velocidades de mariposa mayores a uno que correspondan a una solución de agujero negro estable.

Siguiendo los pasos de [57] probaremos que para teorías con horizonte esférico que respetan la condición de energía nula la velocidad de mariposa está acotada por aquella del espacio-tiempo de AdS-Schwarzchild en gravedad de Einstein (4.16). Para esto, tomamos una métrica general de agujero negro asintóticamente AdS con horizonte cuya topología es esférica

$$ds^{2} = -\left(1 + \frac{r^{2}}{L^{2}}\right)f(r)dt^{2} + \frac{dr^{2}}{\left(1 + \frac{r^{2}}{L^{2}}\right)f(r)} + r^{2}d\Omega_{3}^{2},$$

donde f(r) contiene la información del contenido de materia de la teoría. Factorizar la métrica de la forma $\left(1+\frac{r^2}{L^2}\right)f(r)$ nos permite imponer las condiciones de frontera a AdS global

$$\lim_{r \to \infty} f(r) = 1 \ , \ f(r_0) = 0.$$

Para simplificar el cálculo cambiamos las coordenadas a $z=\frac{L^2}{r}$ y obtenemos la métrica

$$ds^{2} = -F(z)dt^{2} + \frac{L^{4}}{z^{4}}\frac{dz^{2}}{F(z)} + \frac{L^{4}}{z^{4}}d\Omega_{3}^{2}$$
(4.18)

$$= -\left(1 + \frac{L^2}{z^2}\right)f(z)dt^2 + \frac{L^4}{z^4}\frac{dr^2}{\left(1 + \frac{L^2}{z^2}\right)f(z)} + \frac{L^4}{z^4}d\Omega_3^2,\tag{4.19}$$

donde vamos a considerar funciones de la forma

$$F(z) = 1 + \frac{L^2}{z^2} - \frac{Mz^2}{L^2} + O(z^3).$$
 (4.20)

la frontera en estas coordenadas está en z=0 y las condiciones de frontera se vuelven $f(0)=1, f(z_0)=0$. La condición de energía nula (NEC por sus siglas en inglés) establece que para cualquier vector nulo k^{μ}

$$T_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} \ge 0$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía momento de la teoría. Usando la ecuación de Einstein y que el vector k^{μ} es nulo $k^{\mu}k_{\mu}=0$ podemos reescribir la NEC como

$$k^{\mu}k^{\nu}(T_{\mu\nu}) = k^{\mu}k^{\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{R}) = k^{\mu}k^{\nu}R_{\mu\nu} \ge 0$$
 (4.21)

Para simplificar el cálculo es útil definir el vector k con la siguiente expresión

$$k = \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \left(\frac{L^2}{z^2}, 0, \sqrt{f(z) \left(1 + \frac{L^2}{z^2} \right)}, 0, 0 \right).$$

sustituyendo esta expresión en (4.21) y haciendo el cálculo explícito obtenemos²

$$R_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} = \frac{(L^2 + z^2)}{2z^3} \left(f''(z)(z^2 + L^2)z + 4z + (z^3 - 3L^2)f'(z) - 4zf(z) \right) \ge 0$$

el término entre paréntesis es igual a

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^5 \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{1}{z^2} + \frac{L^2}{z^4} \right) f(z) \right] + 2z^2 \right\} = b(z) \ge 0, \tag{4.22}$$

donde definimos la función b(z) para expresar a f(z) en términos de sus integrales. Notamos que la derivada del término entre corchetes se puede escribir como

$$\frac{d}{dz} \left[\left(\frac{1}{z^2} + \frac{L^2}{z^4} \right) f(z) \right] = \frac{d}{dz} \left(\frac{F(z)}{z^2} \right) \tag{4.23}$$

con F(z) dado por (4.20). Integrando una vez se obtiene

$$\int_{\epsilon}^{z} b(z')dz' = z^{5} \frac{d}{dz} \left(\frac{F(z)}{z^{2}} \right) - c_{1} + 2z^{2}, \tag{4.24}$$

donde

$$c_1 = z^5 \frac{d}{dz} \left(\frac{F(z)}{z^2} \right) \bigg|_{z=0} = z^5 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{L^2}{z^2} - \frac{M}{L^2} + O(z) \right) \bigg|_{z=0}$$
(4.25)

$$= z^{5} \left(\frac{-2}{z^{3}} - \frac{4L^{2}}{z^{5}} + O(z^{0}) \right) \Big|_{z=0} = -4L^{2}.$$
 (4.26)

Al despejar z^5 se obtiene

$$\frac{1}{z^5} \int_{\epsilon}^{z} b(z')dz' = \frac{d}{dz} \left(\frac{F(z)}{z^2} \right) + \frac{4L^2}{z^5} + \frac{2}{z^3},\tag{4.27}$$

Integramos una vez más ahora con un corte inferior que llamamos ϵ

$$\int_{\epsilon}^{z} \int_{0}^{z'} \frac{b(z'')}{z'^{5}} dz' dz'' = \int_{\epsilon}^{z} B(z') dz' = \frac{F(z)}{z^{2}} - c_{2} - \frac{L^{2}}{z^{4}} + \frac{L^{2}}{\epsilon^{4}} - \frac{1}{z^{2}} + \frac{1}{\epsilon^{2}}$$
(4.28)

²Esta ecuación es la única que se obtiene de la NEC. Aunque tomemos vectores nulos en las otras direcciones obtenemos la misma ecuación diferencial salvo un factor global de $sen^2(\theta_i)$ así que no tenemos nueva información porque $sen^2(\theta_i) \geq 0$.

donde definimos $B(z') = \int_0^{z'} \frac{bz''}{z'^5} dz''$ y c_2 está dado por

$$c_2 = \frac{F(\epsilon)}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{L^2}{\epsilon^4} - \frac{M}{L^2} + O(\epsilon),$$

sustituyendo vemos que los términos divergentes cuando $\epsilon \to 0$ se cancelan

$$\int_{\epsilon}^{z} B(z')dz' = \frac{F(z)}{z^{2}} + \frac{M}{L^{2}} - \frac{L^{2}}{z^{4}} - \frac{1}{z^{2}} + O(\epsilon). \tag{4.29}$$

Mandamos $\epsilon \to 0$ y despejamos F(z) en términos de la función $f_1(z) = \frac{z^2}{L^2}F(z)$ ya que la la velocidad de mariposa está dada por $v_b^2 = \frac{-z_0}{6}f_1'(z_0)$.

$$f_1(z) = 1 + \frac{z^2}{L^2} - \frac{M}{L^4} z^4 + \frac{z^4}{L^4} \int_0^z B(z') dz'.$$
 (4.30)

Usando la condición de frontera $f_1(z_0) = 0$ se puede despejar el valor de M para obtener.

$$f_1(z) = 1 + \frac{z^2}{L^2} + \frac{z^4}{L^4} \int_0^z B(z')dz' - \frac{z^4}{z_0^4} \left(1 + \frac{z_0^2}{L^2} + \frac{z_0^4}{L^4} \int_0^{z_0} B(z')dz' \right). \tag{4.31}$$

Escribiendo $z_0 = \frac{L^2}{r_0}$, la velocidad de mariposa se vuelve

$$v_b^2 = \frac{-z_0}{6} f_1'(z_0) = \frac{1}{r_0^2} \left(2r_0^2 + L^2 - \frac{r_0}{2} \int_0^{z_0} b(z') dz' \right). \tag{4.32}$$

Como b(z) es una función positiva, la ecuación anterior da una cota a la velocidad de mariposa cuyo valor máximo corresponde al caso de AdS-Schwarzchild

$$v_b^2 = -\frac{z_0}{6} f_1'(z_0) = \frac{1}{r_0^2} \left(2r_0^2 + L^2 - \frac{r_0}{2} \int_0^{z_0} b(z') dz' \right) \le \frac{1}{r_0^2} \left(2r_0^2 + L^2 \right) = v_b^{2(Schw)}. \tag{4.33}$$

donde $v_b^{(Schw)}$ es la velodidad de mariposa del espacio-tiempo de AdS-Schwarzchild (4.16). De acuerdo a esta cota el efecto de agregar materia a un agujero negro esférico es el de disminuir la velocidad de mariposa de la teoría dual. Este resultado es análogo al que Mezei llegó en [57] donde sólo se enfocó en el caso plano.

Para teorías con mayores derivadas en la curvatura la deducción de esta sección se tiene que modificar ya que en la ecuación donde usamos la condición de energía nula (4.21) aparecería el tensor G_{mn} correspondiente. Incluso al tomar el siguiente paso considerando gravedad de Gauss-Bonnet el desarrollo de esta sección no arroja automáticamente una cota relacionada con la velocidad de mariposa.

4.3. Velocidad de mariposa en acoplamiento conforme

Dadas las soluciones de la teoría, sólo falta hacer el cálculo de la velocidad de mariposa en los distintos contenidos de materia de Einstien-Hilbert y Gauss-Bonnet para horizontes con topología esférica. En las tablas 4.1, 4.2 vemos los resultados de este cálculo así como la temperatura y entropía del agujero negro.

Einstein-Hilbert $\sigma = 1$	Q = 0, H = 0	$Q \neq 0, H = 0$	$Q = 0, H \neq 0$	$Q \neq 0, H \neq 0$
	$1 - 4GM \perp r^2$	$E(m)(\sigma=1) + 4G\pi Q^2$	$E(-)(\sigma=1)$ H	$F(r)^{(\sigma=1)}$ $H + 4G\pi Q^2$
F(r)	$r^2 + \overline{L^2}$	$F(r)_{EH}^{(\sigma=1)} + \frac{4G\pi Q^2}{3r^4}$	$\begin{array}{c c} F(r)_{EH}^{(\sigma=1)} - \frac{H}{r^3} \\ T^{(\sigma=1)} + H \end{array}$	$ F(r)_{EH}^{(\sigma=1)} - \frac{H}{r^3} + \frac{4G\pi Q^2}{3r^4} $ $ T^{(\sigma=1)} + H = \frac{2GQ^2}{2GQ^2} $
T	$\frac{1}{2\pi r_0} + \frac{r_0}{L^2\pi}$	$T_{EH}^{(6-1)} - \frac{2GQ}{3r_0^5}$	$T_{EH}^{(6-1)} + \frac{H}{4\pi r_0^4}$	$T_{EH}^{(0-1)} + \frac{H}{4\pi r_0^4} - \frac{2GQ}{3r_0^5}$
S	$\frac{\pi r_0^3}{3G}$	$S_{EH}^{(\sigma=1)}$	$S_{EH}^{(\sigma=1)} - \frac{5\pi H}{2G}$	$S_{EH}^{(\sigma=1)} - \frac{5\pi H}{2G}$
v_b^2	$\frac{1}{3}\left(2+\frac{L^2}{r_0^2}\right)$	$v_{EH}^{(\sigma=1)^2} - \frac{4GL^2\pi Q^2}{3r_0^6}$	$v_{EH}^{(\sigma=1)^2} + \frac{L^2H}{6r_0^5}$	$v_{EH}^{(\sigma=1)^2} + \frac{L^2H}{6r_0^5} - \frac{4GL^2\pi Q^2}{3r_0^6}$

Tabla 4.1: Temperatura, entropía y velocidad de mariposa para diferentes contenidos de materia en gravedad de Einstein-Hilbert ($\alpha_0 = \frac{1}{L^2}, \alpha_1 = 1, \alpha_{k>1} = 0$), expresiones obtenidas de (3.38), (4.5) y (4.9). La notación $A_{EH}^{(\sigma=1)}$ se refiere a que la cantidad A está calculada en el vacío de Einstein-Hilbert con $\sigma = 1$.

Vemos que las contribuciones de los campos a (el cuadrado de) la velocidad de mariposa son aditivas de la misma forma que para las cantidades termodinámicas. En particular, el efecto tanto del campo electromagnético como del campo escalar, para H<0, es de disminuir la velocidad de mariposa como esperábamos dado que su espacio-tiempo cumple la condición de energía nula.

En gravedad de Gauss-Bonnet es necesario cambiar la forma de la métrica a

$$ds^{2} = -N^{2}F(r) + F(r)^{-1}dr^{2} + r^{2}d\Sigma_{D-2,\sigma},$$

donde la constante N fija la velocidad de la luz en la frontera del espacio-tiempo. En particular, dicha velocidad se fija a uno cuando la constante toma el valor $N^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1-4\lambda}\right)$ [43]. Este cambio se ve reflejado en la temperatura y la velocidad de mariposa del agujero negro que adquieren un factor de N.

$F(r) \qquad 1 + \frac{r^2}{2L^2\lambda} - \frac{\sqrt{r^2 + 16GL^2\lambda M}}{2L^2\lambda} \qquad 1 + \frac{r^2}{2L^2\lambda} - \frac{\sqrt{3r^6 - 16GL^2\pi Q^2\lambda + 48GL^2Mr}}{2\sqrt{3}L^2r\lambda}$	
T/N $\frac{r_0}{r_0} + \frac{r_0^3}{r_0^3 r_0^3 r_0^3}$ $T_{GP}^{(\sigma=1)} - \frac{2GQ^2}{r_0^3 r_0^3 r_0^3 r_0^3}$	$2\lambda - 12r^6\lambda$
$S = \begin{bmatrix} 2\pi(r_0^2 + 2L^2\lambda) & L^2\pi(r_0^2 + 2L^2\lambda) \\ \frac{\pi r_0^3}{3G} + \frac{2\pi L^2 r_0\lambda}{G} \end{bmatrix} \qquad GB = \begin{cases} 3r_0^3 + 6L^2 r_0^3\lambda \\ S_{GB} \end{cases}$	
M	

Gauss-Bonnet $\sigma = 1$	$Q=0, H\neq 0$	$Q \neq 0, H \neq 0$
F(r)	$\frac{1 + \frac{r^2}{2L^2\lambda} - \sqrt{3r^6 + 12HL^2\lambda r + 48GL^2M\lambda r - 12\lambda r^6 - 16\pi GL^2\lambda Q^2}}$	$\frac{1 + \frac{r^2}{2L^2\lambda} - \sqrt{3r^6 + 12HL^2\lambda r + 48GL^2M\lambda r - 12\lambda r^6 - 16\pi GL^2\lambda Q^2}}$
T/N	$T_{GB}^{(\sigma=1)} + \frac{2L^2\lambda\sqrt{3}r}{4L^2\pi r_0^4 + 8\pi L^4\lambda r_0^2}$	$T_{GB}^{(\sigma=1)} + \frac{\frac{2L^2\lambda\sqrt{3}r}{L^2H}}{4L^2\pi r_0^4 + 8\pi L^4\lambda r_0^2} - \frac{2GQ^2}{3r_0^5 + 6L^2r_0^3\lambda}$
S	$S_{GB}^{(\sigma=1)} - rac{5\pi H}{2G}$	$S_{GB}^{(\sigma=1)} - \frac{5\pi H}{2G}$
M	$M_{GB}^{(\sigma=1)} - \frac{1}{H}$	$M_{GB}^{(\sigma=1)} - \frac{H}{4Gr_0} + \frac{\pi Q^2}{3r_0^2}$
v_b^2	$v_{GB}^{(\sigma=1)^2} + N^2 \frac{L^2 H}{6r_0^3 (r_0^2 + 2L^2 \lambda)}$	$v_{GB}^{(\sigma=1)^2} + N^2 \frac{L^2 H}{6r_0^3 (r_0^2 + 2L^2 \lambda)} - N^2 \frac{4GL^2 \pi Q^2}{9r_0^4 (r_0^2 + 2L^2 \lambda)}$

Tabla 4.2: Temperatura, entropía y velocidad de mariposa para diferentes contenidos de materia en gravedad de Gauss-Bonnet ($\alpha_0 = \frac{1}{L^2}, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \lambda L^2, \alpha_{k>2} = 0$), expresiones obtenidas de (3.38), (4.5)y (4.9).

En este caso sólo la función F(r) no cambia aditivamente al agregar los campos de materia mientras que el resto de las cantidades termodinámicas si lo hacen. Dado que es necesario que $1-4\lambda_{GB}>0$ para obtener un espacio asintóticamente AdS el efecto de pasar a gravedad de Gauss-Bonnet es el de disminuir la velocidad de mariposa ya que N<1, esto parece ser un comportamiento que continúa al tomar más términos de la acción de Lovelock [65]. Cabe notar que en el límite de $\lambda\to 0$ se recupera el resultado de Einstein-Hilbert para todas las cantidades de la tabla 4.2.

Una diferencia notable del caso planar al esférico es que cuando $\sigma=0$ la velocidad de mariposa sólo cambia adquiriendo el factor de N^2 al cambiar de gravedad de Einstein a Gauss-Bonnet, es decir $v_{GB}^{\sigma=0}=Nv_{GB}^{\sigma=0}$, mientras que podemos ver que desde el espacio-tiempo de AdS-Schwarzchild esto no es el caso en $\sigma=1$ ya que el denominador adquiere también una dependencia del acoplamiento λ mediante el término $2L^2\lambda$.

Podemos explicar este cambio de comportamiento regresando a la fórmula propuesta en [53]

$$v_b^2 = \frac{TS}{2PV}. (4.34)$$

Dicha fórmula sólo es válida para horizontes planares y la motivación original para encontrarla se basó en que la expresión para la velocidad de mariposa, usando la notación de la sección 3.4, está dada por

$$v_B^2 = \sqrt{\frac{h_1}{f_1}} \frac{2\pi L^2}{(D-2)\rho_0} T. \tag{4.35}$$

Así, para escribir la velocidad en términos de cantidades termodinámicas basta con encontrar una combinación que sea igual al factor $\sqrt{\frac{h_1}{F_1}} \frac{2\pi L^2}{(D-2)\rho_0}$ y multiplicarla por la temperatura. En teorías donde la entropía es proporcional al área del horizonte

basta con dividir entre el volumen multiplicado por la presión para obtener (4.35). Sin embargo, en el caso esférico la entropía comienza a tener contribuciones diferentes al área del horizonte en gravedad de Gauss-Bonnet mediante el término $\frac{2\pi L^2 r_0 \lambda}{G}$ de la ecuación (4.9) que, aún con la termodinámica extendida, no puede ser cancelado por una combinación evidente de cantidades termodinámicas de modo que se conserve el término de h_1 en el numerador de (4.35) con el factor apropiado. Este mismo comportamiento se observa aún en gravedad de Einstein-Hilbert donde la contribución extra a la entropía viene de la acción del campo escalar. Así, vemos que aunque los términos de orden superior en la curvatura contenidos en la acción del campo escalar no tienen un efecto en la ecuación del perfil de onda (3.38), estos sí cambian la ecuación (4.35) y resultan en que no se pueda cumplir.

4.4. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo nos enfocamos en estudiar el efecto mariposa en la teoría conformalmente acoplada (4.2) como un escenario de partida para calcular cantidades caóticas en un contexto que no sea ha estudiado antes y que permite comparar teorías de gravedad de orden superior con un contenido de materia similar. La motivación original para estudiar esta teoría fue el hecho de que la parte de la acción que tiene al campo escalar contiene combinaciones del tensor de Riemann que pueden dar lugar a términos de orden superior en derivadas de la curvatura. Dado que la forma de la onda de choque está basada en argumentos físicos, la parte de materia sólo sufre el corrimiento f(x) de modo que dichos términos se agrupan en el tensor de energía momento y no se toman en cuenta en el tensor G_{ab} (3.38). Aún sin contribuciones extra a la solución de la ecuación diferencial f(x) encontramos que la velocidad de mariposa se comporta de manera diferente a las que previamente se habían calculado. Concretamente esta no admite una expresión en términos de la fórmula (4.35) y puede exceder la velocidad de AdS-Schwarzchild para cargas positivas del campo escalar. Basado en este resultado deducimos una cota a la velocidad de mariposa para horizontes con topología esférica en espacios-tiempos donde se respeta la condición de energía nula. Existen diversos resultados de caos holográfico donde aparece la condición de energía nula, por una parte aparece en la cota análoga a la de este trabajo en espacio-tiempo plano. Además de ésta la condición de energía nula surge como una cota distinta dada en términos de cantidades termodinámicas en [53], y por último en un resultado reciente [63] se usa la NEC para tratar las transiciones de fase cuánticas en teorías de conductores-aislantes. Sería interesante explorar en trabajos futuros si alguna de estas conexiones tiene su análogo en el caso esférico.

El estudio del efecto mariposa en agujeros negros con horizontes de topología esférica no es muy abundante. Esto se debe en parte a que, como mencionamos alrededor de la ecuación (3.51), su interpretación no es tan clara como en el caso plano ya que no existe una deducción en términos de correladores de 4-puntos. La necesidad de ir al

límite $|\vec{x}| >> 1$ restringe el estudio a los puntos antipodales. Aún con esta restricción el paralelo que existe entre el comportamiento planar y el esférico, por ejemplo en la cota de velocidad de mariposa (??), sugiere que el estudio de esta topología vale la pena. El hecho de que aparezca la frecuencia del modos cuasi-normales (3.51) nos indica que puede haber una conexión más directa entre el tiempo de disipación y el de mezcla. En particular para un trabajo futuro se podría calcular el correlador de cuatro puntos siguiendo la deducción de [51] para obtener la forma explícita en la que se relaciona la onda de choque con el crecimiento exponencial de C(t,x), esto daría información acerca de la validez de las cantidades λ_L, v_b para puntos intermedios. Para realizar este cálculo es necesario saber la forma explícita de los propagadores bulto-frontera para campos escalares de manera similar a [51].

Sería interesante estudiar todas las diferentes conexiones que se conocen en el caso de horizonte planar y explorar si son válidas o no en el horizonte esférico. En el límite hidrodinámico se podría calcular la cota que se encontró en [33] para las constantes de difusión en términos de la velocidad de mariposa (3.60). El caso esférico se complica ya que la expansión de modos hidrodinámicos no puede realizarse de la misma forma. Siguiendo en el límite hidrodinámico, el cálculo del salto de polo encontrado en [37, 38] debería poder trasladarse al caso esférico, de coincidir daría información más profunda de la naturaleza de la transmisión de información en una teoría fuerte acoplada en un espacio compacto.

La teoría de acoplamiento conforme no sólo funciona con Lovelock sino que también se puede acoplar a un término gravitacional conocido como gravedad cuasi-topológica, que revisamos en la sección 2.2.1, en este caso la ecuación gravitacional si cambia su forma por lo que esperaríamos el comportamiento de dos velocidades de mariposa distintas que surge cuando se consideran teorías de orden superior en la curvatura. La velocidad de mariposa para estas teorías sólo se ha estudiado en el vacío de modo que sería útil tener resultados de cómo responde la nueva velocidad a la presencia de materia.

Además de estas conexiones en [64] se calculó la velocidad de mariposa viendo que sucede con la cuña de entrelazamiento (entanglement wedge) de una región muy grande en la frontera. Para la teoría (4.2) el cálculo de las superficies de Ryu-Takayanagi no es trivial de modo que de coincidir estos resultados apuntaría a una deducción razonable de ambos problemas.

Bibliografía

- [1] "An Introduction to Quantum Field Theory", Peskin, M.E. and Schroeder, D.V., Advanced book classics, 1995, Addison-Wesley Publishing Company
- [2] Wald, Robert M, General relativity, Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1984,
- [3] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, "Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity," Phys. Rev. D 15, 2752 (1977). doi:10.1103/PhysRevD.15.2752
- [4] Zhao, Peng. "Black Holes in Anti-de Sitter Spacetime." Lent term Part III Seminar Series, Essay. 2008.
- [5] https:jila.colorado.eduajshinsidebhpenrose.html
- [6] A. Dabholkar and S. Nampuri, "Lectures on Quantum black holes," Lect. Notes Phys. 165 (2012) [arXiv:1208.4814 [hep-th]].
- [7] Misner, C.W. and Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. *Gravitation*, W. H. Freeman 1973
- [8] S. W. Hawking "Path Integral Derivation of Black Hole Radiance," Phys. Rev. D 13, 2188 (1976).
- [9] D. Lovelock, "The Einstein tensor and its generalizations," J. Math. Phys. 12, 498 (1971). doi:10.1063/1.1665613
- [10] X. O. Camanho, "Lovelock gravity, black holes and holography," ar-Xiv:1509.08129 [hep-th].
- [11] R. M. Wald, "Black hole entropy is the Noether charge," Phys. Rev. D **48**, no. 8, R3427 (1993) doi:10.1103/PhysRevD.48.R3427 [gr-qc/9307038].
- [12] R. C. Myers and B. Robinson, "Black Holes in Quasi-topological Gravity," JHEP **1008**, 067 (2010) doi:10.1007/JHEP08(2010)067 [arXiv:1003.5357 [gr-qc]].
- [13] D. M. Hofman and J. Maldacena, "Conformal collider physics: Energy and charge correlations," JHEP 0805, 012 (2008) doi:10.1088/1126-6708/2008/05/012 [arXiv:0803.1467 [hep-th]].

- [14] M. Chernicoff, M. Galante, G. Giribet, A. Goya, M. Leoni, J. Oliva and G. Perez-Nadal, "Black hole thermodynamics, conformal couplings, and R² terms," JHEP 1606, 159 (2016) doi:10.1007/JHEP06(2016)159 [arXiv:1604.08203 [hep-th]].
- [15] G. Giribet, M. Leoni, J. Oliva and S. Ray, "Hairy black holes sourced by a conformally coupled scalar field in D dimensions," Phys. Rev. D 89, no. 8, 085040 (2014) doi:10.1103/PhysRevD.89.085040 [arXiv:1401.4987 [hep-th]].
- [16] M. Galante, G. Giribet, A. Goya and J. Oliva, "Chemical potential driven phase transition of black holes in anti–de Sitter space," Phys. Rev. D 92, no. 10, 104039 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.92.104039 [arXiv:1508.03780 [hep-th]].
- [17] J. Oliva and S. Ray, "Conformal couplings of a scalar field to higher curvature terms," Class. Quant. Grav. 29, 205008 (2012) doi:10.1088/0264-9381/29/20/205008 [arXiv:1112.4112 [gr-qc]].
- [18] R. A. Hennigar, E. Tjoa and R. B. Mann, "Thermodynamics of hairy black holes in Lovelock gravity," JHEP 1702, 070 (2017) doi:10.1007/JHEP02(2017)070 [arXiv:1612.06852 [hep-th]].
- [19] G. Giribet, A. Goya and J. Oliva, "Different phases of hairy black holes in AdS5 space," Phys. Rev. D 91, no. 4, 045031 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.045031 [arXiv:1501.00184 [hep-th]].
- [20] C. Xanthopoulos, Basilis & E. Dialynas, Thanassis. Einstein gravity coupled to a massless conformal scalar field in arbitrary space-time dimensions. Journal of Mathematical Physics. 33. 1463-1471. 10.1063/1.529723. (1992).
- [21] https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2004/popular.html
- [22] J. Cardy, "Conformal Field Theory and Statistical Mechanics," arXiv:0807.3472 [cond-mat.stat-mech].
- [23] G. 't Hooft, "A Planar Diagram Theory for Strong Interactions," Nucl. Phys. B 72 (1974) 461.
- [24] "A First Course in String Theory", Zwiebach, B., A First Course in String Theory, 2004 Cambridge University Press
- [25] S. W. Hawking and W. Israel, "General Relativity: An Einstein Centenary Survey,"
- [26] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. 38, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
- [27] http://www.damtp.cam.ac.ukusertongstring.html

- [28] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, "Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions," arXiv:1101.0618 [hep-th].
- [29] M. Natsuume, "AdS/CFT Duality User Guide," Lect. Notes Phys. 903, pp.1 (2015) doi:10.1007/978-4-431-55441-7 [arXiv:1409.3575 [hep-th]].
- [30] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from noncritical string theory," Phys. Lett. B 428, 105 (1998) doi:10.1016/S0370-2693(98)00377-3 [hep-th/9802109].
- [31] Larkin, A. I. and Ovchinnikov, Y. N., "Quasiclassical Method in the Theory of Superconductivity", Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics, 1969,
- [32] V. Jahnke, "Recent developments in the holographic description of quantum chaos," arXiv:1811.06949 [hep-th].
- [33] M. Blake, "Universal Charge Diffusion and the Butterfly Effect in Holographic Theories," Phys. Rev. Lett. **117**, no. 9, 091601 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.117.091601 [arXiv:1603.08510 [hep-th]].
- [34] M. Blake, R. A. Davison and S. Sachdev, "Thermal diffusivity and chaos in metals without quasiparticles," Phys. Rev. D 96, no. 10, 106008 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.106008 [arXiv:1705.07896 [hep-th]].
- [35] P. Kovtun, D. T. Son and A. O. Starinets, "Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics," Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005) doi:10.1103/PhysRevLett.94.111601 [hep-th/0405231].
- [36] S. A. Hartnoll, "Theory of universal incoherent metallic transport," Nature Phys. 11, 54 (2015) doi:10.1038/nphys3174 [arXiv:1405.3651 [cond-mat.str-el]].
- [37] M. Blake, H. Lee and H. Liu, "A quantum hydrodynamical description for scrambling and many-body chaos," JHEP **1810**, 127 (2018) doi:10.1007/JHEP10(2018)127 [arXiv:1801.00010 [hep-th]].
- [38] M. Blake, R. A. Davison, S. Grozdanov and H. Liu, "Many-body chaos and energy dynamics in holography," JHEP **1810**, 035 (2018) doi:10.1007/JHEP10(2018)035 [arXiv:1809.01169 [hep-th]].
- [39] N. Iqbal and H. Liu, "Universality of the hydrodynamic limit in AdS/CFT and the membrane paradigm," Phys. Rev. D **79**, 025023 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.79.025023 [arXiv:0809.3808 [hep-th]].
- [40] D. Kastor, S. Ray and J. Traschen, "Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes," Class. Quant. Grav. 26, 195011 (2009) doi:10.1088/0264-9381/26/19/195011 [arXiv:0904.2765 [hep-th]].

- [41] Y. Ling, P. Liu and J. P. Wu, "Holographic Butterfly Effect at Quantum Critical Points," JHEP 1710, 025 (2017) doi:10.1007/JHEP10(2017)025 [ar-Xiv:1610.02669 [hep-th]].
- [42] S. H. Shenker and D. Stanford, "Black holes and the butterfly effect," JHEP **1403**, 067 (2014) doi:10.1007/JHEP03(2014)067 [arXiv:1306.0622 [hep-th]].
- [43] M. Brigante, H. Liu, R. C. Myers, S. Shenker and S. Yaida, "Viscosity Bound Violation in Higher Derivative Gravity," Phys. Rev. D 77, 126006 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.77.126006 [arXiv:0712.0805 [hep-th]].
- [44] W. H. Huang, "Holographic Butterfly Velocities in Brane Geometry and Einstein-Gauss-Bonnet Gravity with Matters," Phys. Rev. D **97**, no. 6, 066020 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.97.066020 [arXiv:1710.05765 [hep-th]].
- [45] V. Jahnke, "Delocalizing entanglement of anisotropic black branes," JHEP **1801**, 102 (2018) doi:10.1007/JHEP01(2018)102 [arXiv:1708.07243 [hep-th]].
- [46] D. Mateos and D. Trancanelli, "Thermodynamics and Instabilities of a Strongly Coupled Anisotropic Plasma," JHEP **1107**, 054 (2011) doi:10.1007/JHEP07(2011)054 [arXiv:1106.1637 [hep-th]].
- [47] J. M. Maldacena, "Eternal black holes in anti-de Sitter," JHEP 0304, 021 (2003) doi:10.1088/1126-6708/2003/04/021 [hep-th/0106112].
- [48] T. Dray and G. 't Hooft, "The Gravitational Shock Wave of a Massless Particle," Nucl. Phys. B 253, 173 (1985). doi:10.1016/0550-3213(85)90525-5
- [49] P.C. Aichelburg and R.U. Sexl, J. Gen. Rel. Gray. 2 (1971) 303.
- [50] K. Sfetsos, "On gravitational shock waves in curved space-times," Nucl. Phys. B **436**, 721 (1995) doi:10.1016/0550-3213(94)00573-W [hep-th/9408169].
- [51] S. H. Shenker and D. Stanford, "Stringy effects in scrambling," JHEP 1505, 132 (2015) doi:10.1007/JHEP05(2015)132 [arXiv:1412.6087 [hep-th]].
- [52] G. T. Horowitz and V. E. Hubeny, "Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium," Phys. Rev. D 62, 024027 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.024027 [hep-th/9909056].
- [53] X. H. Feng and H. Lu, "Butterfly Velocity Bound and Reverse Isoperimetric Inequality," Phys. Rev. D **95**, no. 6, 066001 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.95.066001 [arXiv:1701.05204 [hep-th]].
- $[54] \ http://mathworld.wolfram.com/ModifiedSphericalBesselDifferentialEquation.html \\$
- [55] S. H. Shenker and D. Stanford, "Multiple Shocks," JHEP 1412, 046 (2014) doi:10.1007/JHEP12(2014)046 [arXiv:1312.3296 [hep-th]].
- [56] D. A. Roberts, D. Stanford and L. Susskind, "Localized shocks," JHEP 1503, 051 (2015) doi:10.1007/JHEP03(2015)051 [arXiv:1409.8180 [hep-th]].

- [57] M. Mezei, "On entanglement spreading from holography," JHEP **1705**, 064 (2017) doi:10.1007/JHEP05(2017)064 [arXiv:1612.00082 [hep-th]].
- [58] D. A. Roberts and B. Swingle, "Lieb-Robinson Bound and the Butterfly Effect in Quantum Field Theories," Phys. Rev. Lett. **117**, no. 9, 091602 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.117.091602 [arXiv:1603.09298 [hep-th]].
- [59] M. Alishahiha, A. Davody, A. Naseh and S. F. Taghavi, "On Butterfly effect in Higher Derivative Gravities," JHEP 1611, 032 (2016) doi:10.1007/JHEP11(2016)032 [arXiv:1610.02890 [hep-th]].
- [60] Y. Z. Li, H. S. Liu and H. Lu, "Quasi-Topological Ricci Polynomial Gravities," JHEP 1802, 166 (2018) doi:10.1007/JHEP02(2018)166 [arXiv:1708.07198 [hep-th]].
- [61] J. Peng and X. H. Feng, "Holographic Aspects of Quasi-topological Gravity," arXiv:1802.00697 [hep-th].
- [62] N. Jokela, A. Pönni and A. Vuorinen, "Small black holes in global AdS space-time," Phys. Rev. D 93, no. 8, 086004 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.086004 [arXiv:1508.00859 [hep-th]].
- [63] M. Baggioli, B. Padhi, P. W. Phillips and C. Setty, "Conjecture on the Butterfly Velocity across a Quantum Phase Transition," JHEP 1807, 049 (2018) doi:10.1007/JHEP07(2018)049 [arXiv:1805.01470 [hep-th]].
- [64] M. Mezei and D. Stanford, "On entanglement spreading in chaotic systems," JHEP 1705, 065 (2017) doi:10.1007/JHEP05(2017)065 [arXiv:1608.05101 [hep-th]].
- [65] M. M. Qaemmaqami, "Criticality in third order lovelock gravity and butterfly effect," Eur. Phys. J. C 78, no. 1, 47 (2018) doi:10.1140/epjc/s10052-018-5541-6 [arXiv:1705.05235 [hep-th]].