



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LOS CICLOS  
COMPLEMENTARIOS EN TORNEOS  
BIPARTITOS REGULARES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
VÍCTOR SÁNCHEZ FLORES

TUTOR:  
DR. ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTIZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX.

2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Hoja de Datos del Jurado**

1. Datos del alumno Sánchez Flores Víctor 55 52 13 36 62 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 413032355
2. Datos del tutor Dr. Ilán Abraham Goldfeder Ortiz
3. Datos del sinodal 1 Dra. Rita Esther Zuazua Vega
4. Datos del sinodal 2 Dra. María del Rocío Sánchez López
5. Datos del sinodal 3 Mat. Laura Pastrana Ramírez
6. Datos del sinodal 4 Dr. Julián Alberto Fresán Figuroa
7. Datos del trabajo escrito Sobre los ciclos complementarios en torneos bipartitos regulares 44 p 2019

# Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN104717 Operaciones en gráficas y digráficas II. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Esta tesis fue realizada bajo la supervisión del Dr. Ilán Goldfeder, a quien me gustaría agradecer por su infinita paciencia, su tiempo, su dedicación, y su constante apoyo desde un principio. Que en conjunto hicieron posibles la culminación de este trabajo. Gracias por creer en mí.

Agradezco a mi hermano y a mis padres por su apoyo y cariño, pero, especialmente a mi mamá por ser mi ejemplo a seguir.

Agradezco a mis dos abuelos, Gloria y Enrique por ser un apoyo fundamental durante toda mi educación.

Agradezco a mis amigos, Abraham y Cristian, por estar conmigo apoyándome en los buenos y malos momentos.

Agradezco a los sinodales: Dra. Rita Zuazua, Dr. Rocío Sánchez, Mat. Laura Pastrana y el Dr. Julián Fresán, que me hicieron el inmerecido favor de revisar y corregir este trabajo.

Por último, doy gracias a Dios por todas las bendiciones que me ha dado y por guiarme en el camino que él ha trazado para mí.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Definiciones y resultados previos en gráficas . . . . .	1
1.2. Definiciones y resultados previos en digráficas . . . . .	4
<b>2. Resultados principales</b>	<b>11</b>
2.1. Resultados en torneos . . . . .	11
2.2. Resultados en torneos bipartitos . . . . .	12
2.3. Herramientas para la prueba de la conjetura de Manoussakis, Song y Zhang . . . . .	25
2.4. Resultados en torneos $k$ -partitos . . . . .	32
<b>Conclusión</b>	<b>35</b>
<b>Apéndices</b>	<b>37</b>
<b>Apéndice A. Uso de herramientas computacionales</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>43</b>



# Introducción

Desde la introducción del juego del dodecaedro de William Rowan Hamilton en 1856, cuyo objetivo es encontrar un ciclo a lo largo de las aristas del dodecaedro de tal suerte en que todos sus vértices fueran visitados una sola vez, el problema de encontrar ciclos<sup>1</sup> en gráficas y digráficas que cumplan esta propiedad ha interesado a varias generaciones de matemáticos. En la actualidad sabemos que el problema de determinar si cierta gráfica o digráfica es hamiltoniana es un problema NP-completo lo que vuelve extremadamente difícil dar una clasificación satisfactoria de estas.

Un primer resultado fue propuesto por Dirac en 1952, en el cual establece que para toda gráfica  $G$  de orden  $n \geq 3$  tal que el grado mínimo es al menos  $n/2$  es hamiltoniana. Posteriormente Ore en 1960 propone un resultado aún más fuerte, que toda gráfica  $G$  de orden  $n \geq 3$  tal que todo par de vértices no adyacentes  $x, y$  cumplen que la suma de sus grados es mayor o igual que  $n$ , entonces  $G$  es hamiltoniana. Como podemos ver estos resultados tratan principalmente con los grados de los vértices.

Por otro lado, para digráficas tenemos el resultado de Camion [4] publicado en 1959. El cual demostró que en el caso de los torneos basta que estos sean fuertemente conexos para que sean hamiltonianos. Para 1966, Moon [10] publica un resultado aún más fuerte, si  $T$  es un torneo fuertemente conexo de orden  $n \geq 3$ , entonces para cualquiera de sus vértices se cumple que estos pertenecen a ciclos dirigidos de todas las longitudes desde 3 hasta  $n$ . Así, podemos notar que los torneos gozan de amplias propiedades de hamiltonicidad.

Hablando de torneos, Gutin [5], Häggkvist y Manoussakis [6] introducen el problema anterior en torneos bipartitos. Ellos demuestran que basta que un torneo bipartito sea fuertemente conexo y que además tenga un factor de ciclos, es decir una partición del conjunto de vértices en ciclos ajenos, para garantizar que este es hamiltoniano.

Hasta aquí queda estudiado el problema de determinar que torneos, bipartitos o no, son hamiltonianos. Ahora, queremos ver cuales torneos, bipartitos o no, tienen ciclos complementarios; es decir, dos ciclos ajenos por vértices. El problema fue inicialmente resuelto para torneos bipartitos en 1994 por Song, Zhang y Manoussakis [14]. Los cuales mostraron condiciones necesarias para que un torneo bipartito  $B$  tenga dos ciclos complementarios de longitudes 4 y

---

<sup>1</sup>llamados ciclos hamiltonianos en honor a Sir William Rowan Hamilton(1805-1865)



$|V(B)| - 4$  respectivamente. Siguiendo esta línea, el presente trabajo hará una revisión de los resultados sobre ciclos complementarios en torneos bipartitos mostrando una traducción al ámbito de los torneos. Por último veremos algunos resultados para torneos  $k$ -partitos. Cabe destacar que todos estos resultados arrojan ciertas familias de digráficas que no contienen ciclos complementarios.

Como veremos más adelante, el problema de ciclos complementarios en torneos bipartitos aún no está del todo resuelto así, veremos algunas conjeturas y estudiaremos una especialmente. En el primer capítulo daremos definiciones y resultados previos que serán ampliamente utilizados en el segundo capítulo, el cual tratará el problema de ciclos complementarios tanto en torneos usuales como en torneos bipartitos. Para terminar, analizaremos este problema en torneos  $k$ -partitos. Cabe destacar que los resultados entre torneos y torneos bipartitos no aparecieron uno después del otro, lo que muestra que la investigación matemática, en contra de la percepción general, no se comporta de manera lineal.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Definiciones y resultados previos en gráficas

Una **gráfica**  $G$  es un par ordenado  $(V(G), E(G))$ , donde  $V(G)$  es un conjunto finito y no vacío, a cuyos elementos los llamamos los **vértices** de  $G$ , y  $E(G)$  es un conjunto de pares no ordenados de vértices, a cuyos elementos los llamamos las **aristas** de  $G$ , las cuales denotamos como  $\{u, v\}$  con  $u, v \in V(G)$ .<sup>1</sup> El **orden** de la gráfica  $G$  es  $|V(G)|$ . El **tamaño** de  $G$  es  $|E(G)|$ .

Dada una gráfica  $G$ , dos vértices  $u, v \in V(G)$  son **adyacentes** si  $\{u, v\} \in E(G)$ . Definimos la **vecindad** de  $v \in V(G)$  como:

$$N_G(v) = \{x \in V(G) \mid \{x, v\} \in E(G)\}.$$

El **grado** del vértice  $v \in V(G)$  se define como:  $d(v) = |N_G(v)|$ . Decimos que una gráfica  $G$  es  **$k$ -regular**, con  $k \in \mathbb{N}$ , si para todo  $v \in V(G)$  y  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que  $d_G(v) = k$ .

Sea  $S \subseteq V(G)$ , definimos la **vecindad del subconjunto**  $S$ , denotado como  $N_G(S)$ , como la unión de las vecindades de los vértices pertenecientes a  $S$ .

El **complemento** de una gráfica  $G$ , denotado por  $\bar{G}$ , corresponde a la gráfica cuyos vértices son  $V(G)$  y sus aristas son:

$$E(\bar{G}) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G) \text{ y } \{u, v\} \notin E(G)\}.$$

Una **subgráfica**  $H$  de una gráfica  $G$  es una gráfica tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ . Una **subgráfica generadora**  $H'$  de  $G$  es una subgráfica tal que  $V(H') = V(G)$ . Una **subgráfica inducida** por el conjunto  $S$  de una gráfica  $G$ , denotada por  $G[S]$ , es una gráfica tal que  $S \subseteq V(G)$  y  $E(G[S]) = \{\{u, v\} \in E(G) \mid u, v \in S\}$ .

Una gráfica  $G$  es  **$k$ -partita** si el conjunto  $V(G)$  puede ser separado en  $k$

---

<sup>1</sup>En esta tesis únicamente trataremos con gráficas simples; es decir, no se admiten multiaristas ni lazos.

subconjuntos  $A_1, \dots, A_k$  tales que:

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

y para todos  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  tales que  $i \neq j$ , se cumple que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ . Y toda  $e \in E(G)$  es de la forma  $\{a_i, a_j\}$  con  $a_i \in A_i$  y  $a_j \in A_j$  con  $i \neq j$ . Llamaremos **partes** de la gráfica a los conjuntos  $A_1, \dots, A_k$ . Decimos que una gráfica  $G$  es **bipartita** si es una gráfica 2-partita. Un **apareamiento**  $M$  de una gráfica  $G$  es un subconjunto de aristas que no tienen vértices en común. Sea  $M \subseteq E(G)$  un apareamiento y  $\{v, u\} \in M$ , entonces decimos que  $M$  **satura** a  $u$  y a  $v$ . Decimos que  $M$  es un **apareamiento perfecto** de  $G$  si este satura todo  $v \in V(G)$ .

El siguiente es un resultado fundamental en la teoría de gráficas, el cual fue publicado en 1935 por P. Hall. Este será usado ampliamente a lo largo de esta tesis como se podrá ver más adelante en las siguientes páginas.

**Teorema 1** (Teorema de Hall [7]). *Sea  $G$  una gráfica bipartita con partes  $A$  y  $B$ .  $G$  tiene un apareamiento que satura a todo  $v \in V(A)$  si y solo si para todo  $S \subseteq A$ , no vacío, se cumple que  $|N_G(S)| \geq |S|$ .*

*Demostración.* Primero probaremos la necesidad. Supongamos que  $G$  tiene un apareamiento que satura a todo  $v \in A$ , llamémoslo  $M$ . Ahora definimos la siguiente función  $f$  que corresponde al apareamiento  $M$ :

$$f: A \rightarrow B, \text{ tal que } f(a) = b \text{ siempre que } \{a, b\} \in M,$$

además  $f$  es inyectiva, ya que si  $\{a, b\} \in E(M)$  y  $\{a', b\} \in E(M)$ , entonces  $a = a'$ . Luego para todo  $S \subseteq A$  tenemos que  $|S| \leq |N_G(S)| \leq |N_G(A)| \leq |B|$ , pues  $f$  es inyectiva.

Ahora demostraremos que si  $G$  cumple que para todo

$$S \subseteq A, |N(S)| \geq |S| \quad (1),$$

entonces  $G$  tiene un apareamiento que satura a todo  $v \in V(A)$ . A (1) la llamaremos la condición de Hall. Lo haremos por inducción sobre  $|A|$ .

**Base inductiva.**  $|A| = 1$ . Así,  $|\{v\}| = |S| = |A| = 1$  pues  $S$  es no vacío. Por hipótesis  $1 = |S| \leq |N_G(S)|$ . Luego, existe  $u \in B$  tal que  $\{v, u\} \in E(G)$ . Así,  $M = \{\{v, u\}\}$  es un apareamiento que satura a todo  $v \in V(A)$ .

**Hipótesis de inducción.** Supongamos que para cada gráfica bipartita  $G'$  con partes  $A', B'$  tal que  $|A'| < |A|$  la condición de Hall, es suficiente para garantizar que  $G'$  tiene un apareamiento perfecto  $M'$ .

**Paso inductivo.** Probaremos dos casos. El primero es cuando la desigualdad es estricta mientras que el segundo caso será cuando la igualdad se cumple.

**Caso 1.** Sea  $S \subset A$ , propio y no vacío, tal que  $|N_G(S)| > |S|$ . Sean  $b \in B$  y sea  $a \in N_G(b)$ . Luego para cualquier subconjunto no vacío  $S' \subseteq A \setminus \{a\}$  tenemos que  $|S'| \leq |N_G(S')| - 1 \leq |N_G(S') \setminus \{b\}|$ . Así, la subgráfica inducida

$G'[G \setminus \{a, b\}]$  satisface la condición de Hall. Luego por la hipótesis de inducción, existe un apareamiento perfecto  $M_{G'}$  en  $G'$  que satura a todo  $v \in V(A \setminus \{a\})$ . Así,  $M_{G'} \cup \{\{a, b\}\}$  es un apareamiento que satura a todo  $v \in V(A)$ .

**Caso 2.** Sea  $S' \subset A$ , propio y no vacío, tal que  $|S'| = |N_G(S')|$ . Así, por la hipótesis de inducción, la subgráfica inducida  $G_1 = G[S' \cup N_G(S)]$  tiene un apareamiento  $M_1$  que satura a todo  $v \in S$ . Por otro lado, para cada  $S' \subseteq A \setminus S$  tenemos que  $|S'| = |S' \cup S| - |S| \leq |N_G(S' \cup S)| - |N_G(S)| = |N_G(S') \setminus N_G(S)|$ . Así, la subgráfica inducida  $G_2 = G[(A \setminus S) \cup (B \setminus N_G(S))]$  también satisface la condición de Hall. Por lo tanto, existe un apareamiento  $M_2$  que satura a todo  $v \in V(A \setminus S)$ . Así,  $M_1 \cup M_2$  es un apareamiento que satura a todo  $v \in A$ .  $\square$

**Corolario 2.** *Toda gráfica bipartita  $k$ -regular con  $k \geq 1$  tiene un apareamiento perfecto.*

*Demostración.* Sean  $G$  como en la hipótesis y  $A, B$  las partes de  $G$  y  $X \subseteq A$  arbitrario. Sean  $E_X = \{\{u, v\} \in E(G) \mid u \in X, v \in N_G(X)\}$  y  $E_{N(X)} = \{\{u, v\} \in E(G) \mid u \in N_G(X), v \in A\}$ . Así, tenemos que  $E_X \subseteq E_{N(X)}$  pues el conjunto de aristas de  $A$  hacia  $N_G(X)$  contiene a las aristas de  $X$  hacia  $N_G(X)$ . Luego, como  $G$  es  $k$ -regular tenemos que  $|E_X| = k|X|$  y  $|E_{N(X)}| = k|N_G(X)|$ . Por monotonía, tenemos que  $|X| \leq |N_G(X)|$  lo que cumple la condición del teorema de Hall. Por lo tanto,  $G$  tiene un apareamiento perfecto.  $\square$

Para concluir esta sección definimos las siguientes operaciones en gráficas.

**Definición 3.** Dada una gráfica  $G$ , la **contracción de una arista**  $e = \{u, v\}$  es el reemplazo de  $u$  y  $v$  por un solo vértice  $v'$  tal que  $N_G(v') = N_G(u) \cup N_G(v)$ . La gráfica resultante, que denotamos por  $G/e$ , tiene una arista menos que  $G$  (véase la figura 1.1).

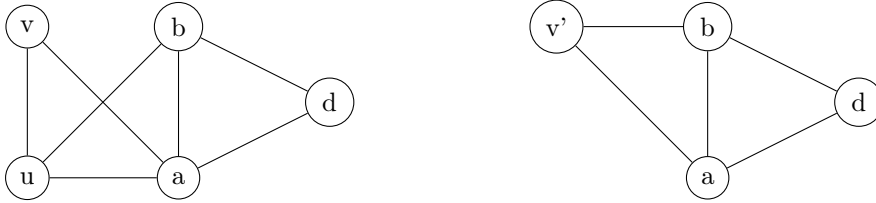


Figura 1.1: Ejemplo de la contracción de la arista  $\{u, v\}$

**Definición 4.** El resultado de la **resta** de una subgráfica  $S$  de una gráfica  $G$ , denotada por  $G - S$ , es una gráfica  $G'$  tal que  $V(G') = V(G) \setminus V(S)$  y  $E(G') = \{\{u, v\} \in E(G) \mid u, v \in V(G) \setminus V(S)\}$ . Si  $S$  es un subconjunto de  $V(G)$ ,  $G - S$  es  $G - (S, \emptyset)$ ; es decir, la subgráfica vacía de  $G$  con ese conjunto de vértices.

## 1.2. Definiciones y resultados previos en digráficas

Una **digráfica**  $D$  es un par ordenado  $(V(D), A(D))$ , donde  $V(D)$  es un conjunto finito y no vacío, a cuyos elementos los llamamos los **vértices** de  $D$ , y  $A(D)$  es un conjunto de pares ordenados de vértices distintos, a cuyos elementos los llamamos las **flechas** de  $D$ . Denotamos a las flechas de  $D$  como  $(u, v)$  con  $u, v \in V(D)$ .<sup>2</sup> El **orden** de la digráfica  $D$  es  $|V(D)|$ . El **tamaño** de  $D$  es  $|A(D)|$ .

Dada una digráfica  $D$ , dos vértices  $u, v \in V(D)$  son **adyacentes** si  $(u, v)$  o  $(v, u) \in A(D)$ . Si  $(u, v) \in A(D)$  decimos que  $u$  **domina** a  $v$  o bien  $v$  es **dominado** por  $u$ . También, podemos expresar la flecha  $(u, v)$  como  $u \rightarrow v$ . Decimos que  $(u, v), (u', v') \in A(D)$  son **flechas paralelas** si  $u = u'$  y  $v = v'$ .

Dada una digráfica  $D$  sin flechas paralelas, la **invecindad** de  $v \in V(D)$  se define como:  $N_D^-(v) = \{x \in V(D) \mid (x, v) \in A(D)\}$ . Y la **exvecindad** de  $v \in V(D)$  se define como:  $N_D^+(v) = \{x \in V(D) \mid (v, x) \in A(D)\}$ .

El **ingrado** de  $v \in V(D)$  se define como:  $d_D^-(v) = |N_D^-(v)|$ . Definimos  $\delta^-(D) = \min_{v \in V(D)} \{d^-(v)\}$ . El **exgrado** de  $v \in V(D)$  se define como:  $d_D^+(v) = |N_D^+(v)|$ . Definimos  $\delta^+(D) = \min_{v \in V(D)} \{d^+(v)\}$ . Decimos que una digráfica  $D$  es  **$k$ -regular**, con  $k \in \mathbb{N}$ , si para todo  $v \in V(D)$  y  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que  $d_D^+(v) = d_D^-(v) = k$ .

Dada una digráfica  $D$  y  $S \subseteq V(D)$ , definimos la **exvecindad del conjunto**  $S$ , denotado como  $N_D^+(S)$ , como la unión de las exvecindades de los vértices pertenecientes a  $S$ . Para la **invecindad del conjunto**  $S$ , denotada por  $N_D^-(S)$ , la definición es análoga.

Una **subdigráfica**  $S$  de una digráfica  $D$ , es una digráfica tal que  $V(S) \subseteq V(D)$  y  $A(S) \subseteq A(D)$ . Una **subdigráfica generadora**  $H$  de  $D$  es una subdigráfica tal que  $V(H) = V(D)$ . Una **subdigráfica inducida** por el conjunto  $S$  de vértices de una digráfica  $D$ , denotada por  $D[S]$ , es una digráfica tal que  $S \subseteq V(D)$  y  $A(D[S]) = \{(u, v) \in A(D) \mid u, v \in S\}$ . El **complemento** de una digráfica  $D$ , denotado por  $\bar{D}$ , corresponde a la digráfica cuyos vértices son  $V(D)$  y flechas  $A(\bar{D}) = \{(u, v) \mid u, v \in V(D) \text{ y } (u, v) \notin A(D)\}$ .

Una digráfica  $D$  es **semicompleta** si entre cualquier par de vértices existe al menos una flecha. Una digráfica  $D$  es  **$k$ -partita** si el conjunto  $V(D)$  puede ser separado en  $k$  subconjuntos  $A_1, \dots, A_k$  tales que:

$$V(D) = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

y para toda  $i \neq j$  se cumple que  $A_i \cap A_j = \emptyset$  con  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ . Y toda  $a \in A(D)$  es de la forma  $(a_i, a_j)$  o  $(a_j, a_i)$  con  $a_i \in A_i$  y  $a_j \in A_j$  con  $i \neq j$ . Llamaremos **partes** de la digráfica a los conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . En particular, una digráfica 2-partita es también llamada **bipartita**.

<sup>2</sup>En esta tesis únicamente trataremos con digráficas simples; es decir, no se admiten multiflechas ni lazos.

Para  $A, B$  subconjuntos ajenos de vértices que pertenecen a una digráfica  $D$ , denotamos por  $A \rightarrow^P B$  si existen todas las flechas de cualquier vértice  $a \in A$  a cualquier vértice  $b \in B$ , siempre que  $a$  y  $b$  estén en partes distintas. Por otro lado, denotamos por  $A \mapsto^P B$  si  $A \rightarrow^P B$  y no hay flechas de  $B$  hacia  $A$ .

Dada una digráfica  $D$ , definimos una **trayectoria**<sup>3</sup> de  $u$  hacia  $v$  como una sucesión de vértices distintos  $(v_1, v_2, \dots, v_p)$  tales que  $(v_i, v_{i+1}) \in A(D)$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Si tenemos una trayectoria que empieza en  $x$  y termina en  $y$ , diremos que es una  $(x, y)$ -trayectoria. La **longitud** de una trayectoria  $T$  corresponde al número de flechas que forman dicha trayectoria. Un **ciclo**  $C$  es una sucesión de vértices  $C = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal que:  $(v_i, v_{i+1}) \in A(D)$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  y  $v_1 = v_n$ . La **longitud** de un ciclo  $C$  corresponde al número de flechas que forman dicho ciclo. Sea  $C$  un ciclo en  $D$ ,  $C$  es un **ciclo hamiltoniano** si  $V(C) = V(D)$ . Una digráfica  $D$  es **hamiltoniana** si contiene un ciclo hamiltoniano.

Dada una digráfica  $D$ , decimos que dos ciclos  $C$  y  $C'$  de  $D$  son ajenos si no comparten vértices. Un par de ciclos ajenos son llamados **complementarios** si  $V(C) \cup V(C') = V(D)$  (véase la figura 1.2).

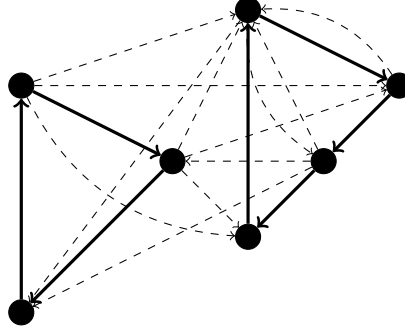


Figura 1.2: Dos ciclos complementarios de una digráfica  $D$  en negritas

Una digráfica  $D$  es **fuertemente conexa** si para todo  $x, y \in V(D)$ , existe una  $(x, y)$ -trayectoria y una  $(y, x)$ -trayectoria. Una digráfica  $D$  es **inconexa** si existen  $x, y \in V(D)$  tales que no existe una  $(x, y)$ -trayectoria ni una  $(y, x)$ -trayectoria. Decimos que una digráfica  $D$  es **k-fuerte**, con  $k \in \mathbb{N}$ , si no existe  $A \subseteq V(D)$ ,  $|A| = k - 1$ , tal que si removemos  $A$  de  $D$  la digráfica resultante es inconexa.

Sea  $D$  una digráfica, la **gráfica subyacente** de  $D$ , es una gráfica  $G$  tal que  $V(G) = V(D)$  y  $E(G) = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in A(D) \text{ o } (v, u) \in A(D)\}$ .

Un **torneo**  $T$  es una digráfica tal que si  $u, v \in V(T)$ , entonces existe una de las flechas  $(u, v)$  o  $(v, u)$ , pero no ambas. Dado un torneo  $T$ , un **subtorneo**  $T'$  de  $T$  es un torneo tal que  $V(T') \subseteq V(T)$  y  $A(T') \subseteq A(T)$ . Decimos que un torneo  $T$  es **transitivo** si para todo  $a, b, c \in V(T)$  distintos, si  $(a, b), (b, c) \in A(T)$  entonces  $(a, c) \in A(T)$ . Un **torneo bipartito**  $B$  es una digráfica bipartita con

<sup>3</sup>Aunque se omite, siempre que se refiera a trayectorias en digráficas, se entiende que estas son dirigidas. Lo mismo sucede para ciclos.

partes  $X$  y  $Y$  tal que si  $u \in X$  y  $v \in Y$ , entonces existe una de las flechas  $(u, v)$  o  $(v, u)$ , pero no ambas. Un **torneo  $k$ -partito**  $D$  es una digráfica  $k$ -partita tal que si  $u \in V_i$  y  $v \in V_j$  y  $V_i, V_j$  dos partes distintas de  $D$ , entonces existe una de las flechas  $(u, v)$  o  $(v, u)$ , pero no ambas.

Decimos que una digráfica  $D$  tiene un **factor de ciclos** si existen ciclos  $C_1, C_2, \dots, C_k$  en  $D$  tales que:

$$V(D) = \bigcup_{i=1}^k V(C_i)$$

y  $V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$  para  $1 \leq i < j \leq k$ .

Decimos que una digráfica  $D$  tiene un  **$t$ -factor** si  $D$  tiene subdigráficas generadoras 1-regulares  $C_1, C_2, \dots, C_t$ . Así, si todas estas subdigráficas son fuertemente conexas, tenemos que un ciclo hamiltoniano en una digráfica  $D$  equivale a un 1-factor. Un par de ciclos complementarios en  $D$  son equivalentes a un 2-factor. Por otro lado, decimos que una digráfica  $D$  tiene un  $(n_1, n_2, \dots, n_t)$ -**factor** si  $D$  tiene un  $t$ -factor cuyos ciclos son de longitud  $n_1, n_2, \dots, n_t$  respectivamente. Véase la figura 1.3.

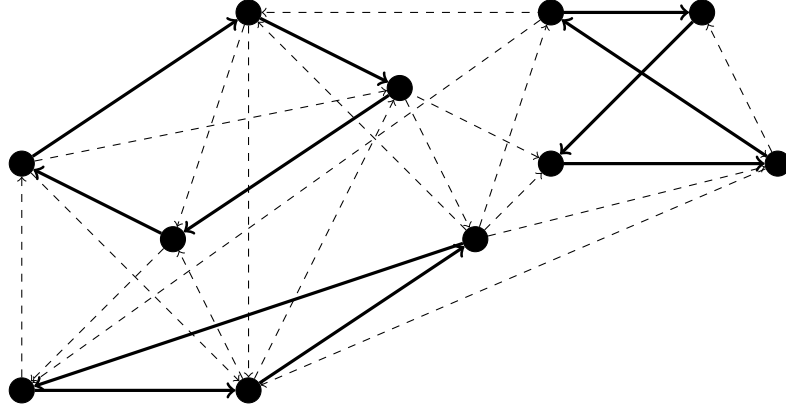


Figura 1.3: En negritas un ejemplo de un 3-factor en una digráfica  $D$ , pues tenemos 3 ciclos ajenos. Además, este 3-factor corresponde con un  $(4, 4, 3)$ -factor.

Dada una digráfica  $D$  y  $\{u_1, u_2, \dots, u_t\} \subseteq V(D)$ , decimos que la sucesión de vértices  $(u_1, u_2, \dots, u_t)$  es una **antitrayectoria** si  $(u_i, u_{i+1}) \notin A(D)$  para todo  $1 \leq i \leq t-1$ . Si  $(u_t, u_1) \notin A(D)$ , entonces tenemos un **anticiclo**. La longitud de una antitrayectoria es el número de vértices que la conforman menos uno, mientras que la longitud de un anticiclo es el número de vértices que lo conforman. Véase la figura 1.4.

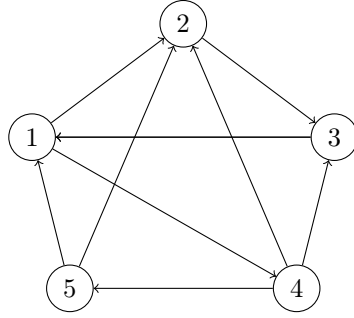


Figura 1.4: Una antitrayectoria  $(3, 2, 1, 5, 4)$  y un anticiclo  $(1, 3, 4, 1)$  de una digráfica

A continuación definimos las siguientes operaciones en digráficas.

**Definición 5.** Dada una digráfica  $D$ , la **contracción de una flecha**  $a = (u, v)$  es el reemplazo de  $u$  y  $v$  por un solo vértice  $v'$  tal que  $N_D^+(v') = N_D^+(u) \cup N_D^+(v)$  y  $N_D^-(v') = N_D^-(u) \cup N_D^-(v)$ . La digráfica resultante, que denotamos por  $D/a$ , tiene una flecha menos que  $D$  (véase la figura 1.5).

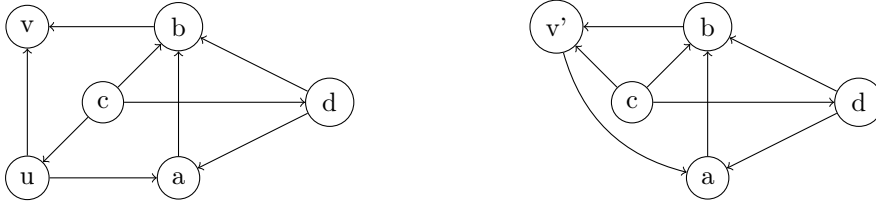


Figura 1.5: Ejemplo de la contracción de la flecha  $(u, v)$

**Definición 6.** El resultado de la **resta** de una subdigráfica  $S$  de una digráfica  $D$ , denotada por  $D - S$ , es una digráfica  $D'$  tal que  $V(D') = V(D) \setminus V(S)$  y  $A(D') = \{(u, v) \in A(D) \mid u, v \in V(D) \setminus V(S)\}$ . Si  $S$  es un subconjunto de  $V(D)$ ,  $D - S$  es  $D - (S, \emptyset)$ ; es decir, la subdigráfica vacía de  $D$  con ese conjunto de vértices.

Antes de comenzar con los resultados de esta sección, enlistamos algunas digráficas prohibidas en los lemas y teoremas que analizaremos más adelante.

**Definición 7.**  $F_{4k}$  denota al torneo bipartito  $k$ -regular formado por cuatro conjuntos:  $K, L, M$  y  $N$ . Cada uno de ellos de cardinalidad  $k$  tales que  $K \rightarrow^{\mathcal{P}} L$ ,  $L \rightarrow^{\mathcal{P}} M$ ,  $M \rightarrow^{\mathcal{P}} N$  y  $N \rightarrow^{\mathcal{P}} K$ . Véase la figura 1.6.



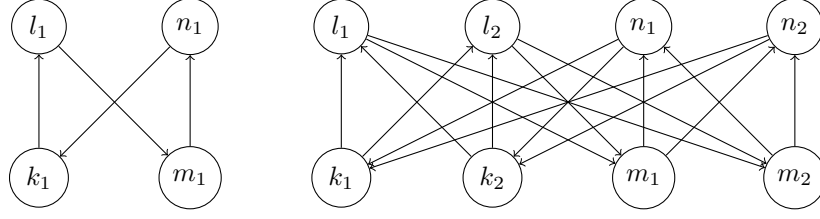


Figura 1.6: Representación gráfica de  $F_{4k}$  para  $k = 1$  (izquierda) y  $k = 2$  (derecha) tal que  $k_i \in K$ ,  $l_i \in L$ ,  $M_i \in M$  y  $n_i \in N$  para  $i \in \{1, 2\}$

**Definición 8.**  $P_7$  denota al torneo de orden siete tal que este no contiene ningún subtorneo transitivo de orden cuatro.

Utilizando la herramienta gentourng [9] comprobamos que existen 456 torneos de orden siete no isomorfos y 353 de ellos son fuertemente conexos. De los cuales, solo tres son 3-regulares. Véase la figura 1.7.

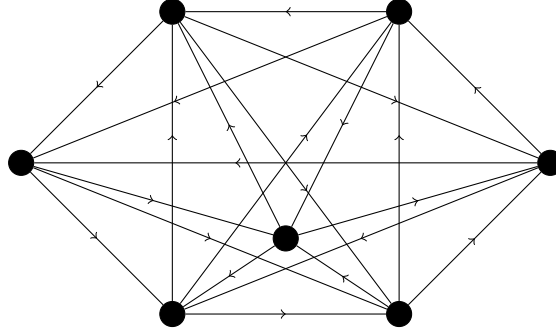


Figura 1.7: Representación gráfica de  $P_7$

**Definición 9.** Denotamos como  $D_{3,2}$  al torneo 3-partito 2-regular con exactamente dos vértices en cada parte. Véase la figura 1.8.

**Proposición 10.** Si en una digráfica  $D$  tenemos que para todo  $v \in V(D)$   $d_D^-(v) \geq 1$  o  $d_D^+(v) \geq 1$ , entonces  $D$  tiene un ciclo.

*Demostración.* Para todo  $v \in V(D)$  tenemos que  $d_D^-(v) \geq 1$ , entonces consideramos  $T$  una trayectoria de longitud máxima,  $T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Tomamos  $v_1$ , por hipótesis  $d_D^-(v_1) \geq 1$ ; es decir, existe  $v \in V(D)$  tal que  $(v, v_1) \in A(D)$ . Si  $v \notin V(T)$ , entonces tenemos que  $(v, v_1, \dots, v_n)$  es una trayectoria cuya longitud es mayor que  $T$ . Por lo tanto,  $v \in V(T)$ ; es decir, existe  $j \in \{2, \dots, n\}$  tal que  $v_j = v$ . Así, tenemos un ciclo  $C = (v_j, v_1, \dots, v_j)$ . La prueba es análoga para  $d_D^+(v) \geq 1$ .  $\square$

**Corolario 11.** Toda digráfica acíclica tiene un vértice de ingrado cero, que llamaremos fuente, y un vértice de exgrado cero, que llamaremos pozo.

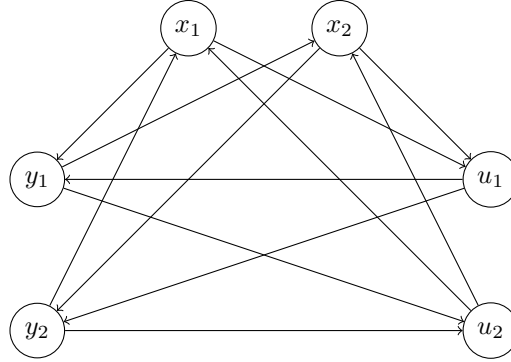


Figura 1.8: Representación gráfica de  $D_{3,2}$  con partes  $V_1 = \{x_1, x_2\}$ ,  $V_2 = \{y_1, y_2\}$  y  $V_3 = \{u_1, u_2\}$

**Proposición 12.** Sea  $B$  un torneo bipartito  $k$ -regular cuyas partes son  $X$  y  $Y$ , entonces  $|X| = 2k = |Y|$ .

*Demostración.* Sea  $B$  como en la hipótesis, luego para cada  $v \in X$  (análogamente para  $u \in Y$ ) tenemos que:

$$\begin{aligned} |N_B^+(v)| &= |N_B^-(v)| = k \\ N_B^+(v) \cap N_B^-(v) &= \emptyset \text{ y} \\ N_B^+(v) \cup N_B^-(v) &= Y. \end{aligned}$$

La igualdad anterior se cumple ya que  $B$  es un torneo bipartito. Así por definición, entre todo par de vértices  $v' \in X$  y  $u' \in Y$  existe una y solo una flecha entre ellos. Por lo tanto,

$$|Y| = |N_B^+(v) \cup N_B^-(v)| = |N_B^+(v)| + |N_B^-(v)| = k + k = 2k.$$

Por lo tanto,  $|Y| = 2k$ . La prueba es análoga para  $Y$ .  $\square$

**Lema 13.** Sean  $B$  un torneo bipartito  $k$ -regular y  $(x, y) \in A(B)$ , entonces  $B$  contiene un ciclo de longitud cuatro que pasa por  $(x, y)$ .

*Demostración.* Sean  $B$  y  $(x, y)$  como en la hipótesis. Sean  $X$  y  $Y$  las partes del torneo  $B$ , tales que  $x \in X$  y  $y \in Y$ . Como  $|N_B^+(y)| = k$ , entonces existe  $x' \in X$ ,  $x' \neq x$  tal que  $(y, x') \in A(B)$ . Por otro lado tenemos que  $|N_B^-(x)| = k$ . Así, existe  $y' \in Y$ ,  $y' \neq y$  tal que  $(y', x) \in A(B)$ . Falta ver que  $(x', y') \in A(B)$ . Supongamos que no es cierto y lleguemos a una contradicción. Tenemos por la proposición anterior que  $Y = N_B^+(x) \cup N_B^-(x)$  y  $X = N_B^+(y) \cup N_B^-(y)$ . Si para todo  $x'' \in N_B^+(y)$  y para todo  $y'' \in N_B^-(x)$  se tiene que  $(x'', y'') \notin A(B)$ , entonces  $N_B^+(x) = N_B^+(x'')$ . Así,  $(x'', y) \in A(B)$ . En particular, como  $x' \in N_B^+(y)$  tenemos que  $(x', y) \in A(B)$  lo que es una contradicción pues teníamos que  $(y, x') \in A(B)$  y  $B$  no tiene flechas paralelas. Así,  $C = (x, y, x', y', x)$  es un ciclo de longitud cuatro que pasa por  $(x, y)$ .  $\square$

**Proposición 14.** *Todo torneo bipartito  $k$ -regular con  $k \geq 1$  tiene un apareamiento perfecto.*

*Demostración.* Sea  $D$  como en la hipótesis con partes  $A, B$ . Sea  $D'$  la subdigráfica obtenida al considerar exclusivamente las flechas de  $A$  hacia  $B$ ; es decir, toda flecha de  $D'$  es de la forma  $(a, b)$  tal que  $a \in A$  y  $b \in B$ . Si consideramos toda  $(a, b) \in A(D')$  como si fueran aristas (es decir,  $\{a, b\}$  tal que  $a \in A$  y  $b \in B$ ), entonces obtenemos una gráfica  $G$  a partir de  $D'$ , la cual es bipartita  $k$ -regular. Así, por el resultado anterior tenemos que esta tiene un apareamiento perfecto. Análogamente se cumple el resultado si consideramos exclusivamente las flechas  $B$  hacia  $A$ .  $\square$

Veamos que, dado un torneo bipartito  $k$ -regular en los casos  $k = 1$  y  $k = 2$ , obtenemos una digráfica isomorfa a  $F_{4k}$ . En el caso  $k = 1$  es evidente como se puede ver en la figura 1.6. Para el caso  $k = 2$  tenemos que, dado  $B$  un torneo bipartito 2-regular con partes  $X$  y  $Y$ , si tomamos únicamente las exvecindades de los vértices de  $X$  (análogamente para  $N_B^-(X)$ ,  $N_B^-(Y)$  y  $N_B^+(Y)$ ) obtenemos una digráfica  $B'$  cuya gráfica subyacente es una gráfica bipartita 2-regular de ocho vértices. Así, utilizando la herramienta “genbg” [9], se verifica que existe una y solo una gráfica conexa bipartita 2-regular de ocho vértices salvo isomorfismos. Ya que  $F_{4k}$  es un torneo bipartito 2-regular, se sigue que este es el único torneo bipartito 2-regular por lo que los resultados que serán expuestos, al descartar los posibles isomorfismos con  $F_{4k}$ , serán considerados a partir de  $k \geq 3$ . Utilizando la misma herramienta podemos constatar como la cantidad de torneos bipartitos  $k$ -regulares no isomorfos crece rápidamente como se puede observar en el cuadro 1.1.

$k$	Torneos bipartitos no isomorfos
1	1
2	1
3	6
4	193
5	601054

Cuadro 1.1: Cantidad de torneos bipartitos  $k$ -regulares no isomorfos

## Capítulo 2

# Resultados principales

Empezamos este capítulo presentando resultados sobre  $k$ -factores en torneos para  $k = 1$  (ciclo hamiltoniano),  $k = 2$  (ciclos complementarios) y  $k \geq 3$ . Después, presentaremos una interpretación de estos mismos resultados en el ámbito de torneos bipartitos los cuales arrojan varias conjeturas. Por último, discutiremos este mismo problema en el caso de torneos  $k$ -partitos.

### 2.1. Resultados en torneos

**Teorema 15** (Moon [10]). *Sea  $T$  un torneo fuertemente conexo de orden  $n$ ,  $n \geq 3$ . Para cualquier  $v \in V(T)$  y cualquier  $3 \leq k \leq n$  existe un ciclo de longitud  $k$  que pasa por  $v$  en  $T$ .*

*Demostración.* Sea  $T$  como en la hipótesis y  $v \in V(T)$ . Haremos la demostración por inducción sobre  $k$ . Veamos primero que  $v \in V(T)$  pertenece a un ciclo de longitud  $k = 3$  en  $T$ . Como  $T$  es un torneo fuertemente conexo tenemos que:  $N_T^+(v) \neq \emptyset$  y  $N_T^-(v) \neq \emptyset$ . Supongamos que  $T$  no tiene un ciclo de longitud 3 que pasa por  $v$ . Así,  $N_T^-(v) \xrightarrow{\mathcal{P}} N_T^+(v)$ , entonces no existe una  $(u, w)$ -trayectoria,  $u \in N_T^+(v)$  y  $w \in N_T^-(v)$ , lo que contradice que  $T$  sea fuerte. Por lo tanto, existen  $u'$  y  $w'$  tales que  $(u', w') \in A(T)$ , con  $u' \in N_T^+(v)$  y  $w' \in N_T^-(v)$ . Así,  $(v, u', w', v)$  es un ciclo de longitud 3 que pasa por  $v$ .

Ahora, sea  $C = (v = v_1, v_2, \dots, v_t = v)$  un ciclo en  $T$  con  $3 \leq t < n$ . Probaremos que  $T$  tiene un ciclo de longitud  $t + 1$  que pasa por  $v$ . Si existe un  $u \in V(T) \setminus V(C)$  que domina a un vértice en  $C$  y que es dominado por otro vértice en  $C$ , entonces existe un índice  $i$  tal que  $(v_i, u), (u, v_{i+1}) \in A(T)$ . Por lo tanto,  $C' = (v = v_1, v_2, \dots, v_i, u, v_{i+1}, \dots, v_t = v)$  es un ciclo de longitud  $t + 1$  que pasa por  $v$ .

Ahora bien, supongamos que todo  $u \in V(T) \setminus V(C)$  domina a todo vértice en  $C$  o es dominado por todo vértice de  $C$ . Sea  $R = \{u \in V(T) \setminus V(C) \mid (u, v) \in A(T), v \in V(C)\}$  y  $S = (V(T) \setminus V(C)) \setminus R$ . Como  $T$  es fuerte, tenemos que  $R$  y  $S$  no son vacíos y  $B = \{(s, r) \in A(T) \mid r \in R, s \in S\} \neq \emptyset$ . Por lo tanto, si

tomamos un  $(s, r) \in B$  tenemos que  $C'' = (v, s, r, v_3, v_4, \dots, v_t = v)$  es un ciclo de longitud  $t + 1$  en  $T$  que pasa por  $v$ .  $\square$

**Teorema 16** (Camion [4]). *Todo torneo es fuertemente conexo si y solo si tiene un ciclo hamiltoniano; es decir, un 1-factor.*

*Demostración.* Si  $T$  es un torneo fuertemente conexo de orden  $n$ , entonces por el teorema de Moon, tenemos que  $T$  tiene un ciclo  $C$  de longitud  $n$ .

Así,  $C$  es hamiltoniano. Por otro lado, si  $T$  tiene un ciclo hamiltoniano  $C$ , entonces para todo  $u, v \in V(C) = V(T)$  existe una  $(u, v)$ -trayectoria y una  $(v, u)$ -trayectoria. Por lo tanto,  $T$  es fuertemente conexo.  $\square$

Los siguientes teoremas son resultados sobre ciclos complementarios en torneos. El primer teorema expone las condiciones necesarias para que un torneo tenga un 2-factor, mientras que el segundo estudia la longitud de cada uno de los ciclos complementarios.

**Teorema 17** (Li y Shu [8]). *Sea  $T$  un torneo fuertemente conexo. Si*

$$\max\{\delta^+(T), \delta^-(T)\} \geq 3,$$

*$|V(T)| \geq 6$  y  $T \neq P_7$ , entonces  $T$  tiene un factor de 2 ciclos; es decir, un 2-factor.*

**Teorema 18** (Reid [11] y Song [12]). *Sea  $T$  un torneo 2-fuerte. Si  $|V(T)| \geq 6$  y  $T \neq P_7$ , entonces para cualquier  $3 \leq p \leq n - 3$ ,  $T$  tiene dos ciclos complementarios, uno de tamaño  $p$  y otro de tamaño  $n - p$ ; es decir, un  $(p, n - p)$ -factor.*

En la siguiente sección, veremos que el teorema de Camion encontrará una traducción en el ámbito de los torneos bipartitos en el teorema 19, el teorema 17 encontrará su traducción en el teorema 21, mientras que el teorema 18 encontrará su traducción en la conjetura propuesta por Song, Zhang y Manoussakis.

## 2.2. Resultados en torneos bipartitos

**Teorema 19** (Gutin [5], Häggkvist y Manoussakis [6]). *Todo torneo bipartito es hamiltoniano si y solo si este tiene un  $t$ -factor,  $t \geq 1$ , y es fuertemente conexo.*

*Demostración.* Sea  $B$  un torneo bipartito con un ciclo hamiltoniano  $C$ . Para todo  $u, v \in V(C) = V(B)$  tenemos una  $(u, v)$ -trayectoria y una  $(v, u)$ -trayectoria así,  $B$  es fuertemente conexo. Y claramente tiene un  $t$ -factor.

Para probar la suficiencia, supongamos que  $B$ , con  $V(B) = \{X, Y\}$ , es fuertemente conexo y tiene un  $t$ -factor. Haremos la demostración por inducción sobre  $k$ .

**Base inductiva.** Para  $k = 1$ ,  $B$  es hamiltoniano.

**Hipótesis de inducción.** Supongamos ahora que el enunciado es válido para  $k = t - 1$ .

**Paso inductivo.** Lo que haremos para probar que es válido para  $k = t$ , es encontrar un ciclo  $C$  que contenga los vértices de dos o más ciclos del  $t$ -factor obteniendo así, un  $(t - 1)$ -factor sobre el cual podemos aplicar la hipótesis de inducción. Así, distinguimos dos casos.

**Caso 1.** Dado un  $t$ -factor en  $B$ , existen dos ciclos  $C_i$  y  $C_j$ , con  $i \neq j$ , tales que  $C_i \rightarrow C_j$  y  $C_j \rightarrow C_i$ .

Sin pérdida de generalidad, sean

$$C_1 = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_1) \text{ y } C_2 = (y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, y_n)$$

estos ciclos. Distinguimos dos subcasos.

**Caso 1.1.**  $n = km$  con  $k \in \mathbb{N}$ .

Etiquetamos los vértices de estos ciclos de la siguiente manera:  $x_i$  y  $y_j$ , con  $1 \leq i, j \leq 2m_i$ , donde  $2m_i$  es la longitud del ciclo  $C_i$ ,  $i = \{1, 2\}$ .

**Caso 1.1.1**  $k = 1$ .

Si  $k = 1$ , entonces ambos ciclos tienen la misma cardinalidad (véase la figura 2.1). Primero, veamos que si para todo  $y_j \in C_2$  se tiene que si  $(y_j, x_i) \in A(B)$ , entonces

$$(y_{j+1}, x_{i+1}) \in A(B) \quad (2.1)$$

Pues, en caso contrario, si existe un  $y_j \in C_2$  tal que  $(x_{i+1}, y_{j+1}) \in A(B)$ , bastaría considerar el ciclo

$$C' = (x_{i+1}, y_{j+1}, C_2, y_{j+2}, x_{j+2}, C_1, x_{i+1})$$

el cual cumple que  $V(C') = V(C_1) \cup V(C_2)$ . Obteniendo así un factor con  $t - 1$  ciclos. Ahora veamos que para todo  $x_i \in C_1$  tal que  $(x_i, y_{j+2}) \in A(B)$ , entonces

$$(x_{i+1}, y_{j+3}) \in A(B) \quad (2.2)$$

Pues, en caso contrario, si existe  $x_i \in C_1$  tal que  $(y_{j+3}, x_{i+1}) \in A(B)$ , bastaría considerar el ciclo

$$C'' = (y_{j+3}, x_{i+1}, C_1, x_i, y_{j+2}, C_2, y_{j+3})$$

el cual cumple que  $V(C'') = V(C_1) \cup V(C_2)$ . Obteniendo así un factor con  $t - 1$  ciclos. De 2.1 y 2.2, consideremos el ciclo

$$C^* = (y_1, x_1, y_3, y_2, x_2, x_3, \dots, y_j, x_i, x_{i+1}, y_{j+3}, y_{j+2}, x_{i+2}, \dots, x_{m-2}, y_1)$$

Obteniendo como resultado un factor con  $t - 1$  ciclos. Sobre el cual podemos aplicar la hipótesis de inducción.

**Caso 1.1.2**  $k \geq 2$ .

Sean

$$C_1 = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_1) \text{ y } C_2 = (y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, y_n),$$

con  $n = km$ . Veamos primero que para todo  $y_j$  tenemos que

$$(y_j, x_i) \in A(B) \text{ con } i \equiv j \pmod{m} \quad (2.3)$$

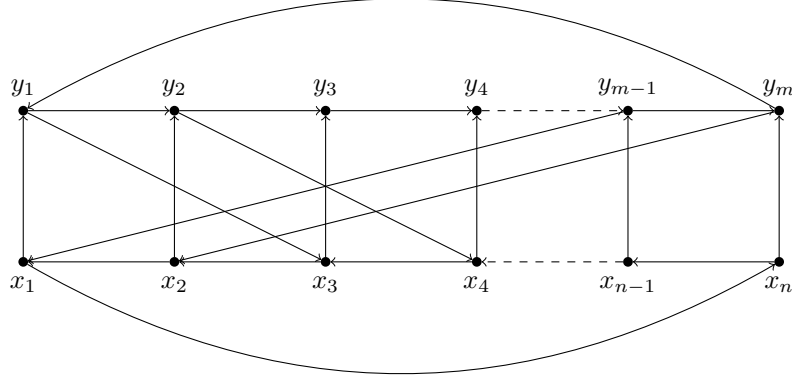


Figura 2.1: Imagen de  $C_1$  y  $C_2$  descritos en el caso 1.1.1 del teorema 19

Pues en caso contrario, si existe un  $y_j \in V(C_2)$  tal que  $(x_i, y_j) \in A(B)$  tendríamos un ciclo

$$C' = (x_i, y_j, C_2, y_{j+1}, x_{i+1}, C_1, x_i)$$

tal que  $V(C') = V(C_1) \cup V(C_2)$ . Por otro lado, tenemos que para todo  $x_i \in C_1$  tenemos que

$$(x_i, y_{j+1}) \in A(B) \text{ con } i \equiv j \pmod{m} \quad (2.4)$$

pues en caso contrario tendríamos un ciclo

$$C'' = (y_{j+1}, x_i, C_1, x_{i-1}, y_j, C_2, y_{j+1})$$

como en el caso anterior.

Luego de 2.3 y 2.4 consideremos el ciclo

$$C^* = (y_1, x_1, y_2, x_2, \dots, x_{m-1}, y_n, y_{n-1}, \dots, y_j, x_m, y_1)$$

el cual cumple que  $V(C^*) = V(C_1) \cup V(C_2)$  obteniendo así como resultado un  $(t-1)$ -factor. Sobre el cual podemos aplicar la hipótesis de inducción.

**Caso 1.2.**  $(m, n) = 2^k$  con  $k \in \mathbb{N}$ .

Sean  $C_1$  y  $C_2$  como en el caso anterior así, distinguimos dos subcasos.

**Caso 1.2.1**  $k = 1$ .

En este caso tenemos que para todo  $x_i \in C_1$  tenemos que si  $(x_i, y_j) \in A(B)$ , entonces  $(x_{i+1}, y_{j+1}) \in A(B)$  con  $1 \geq i, j \geq m_i$ , donde  $m_i$  es la longitud del ciclo  $C_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Pues en caso contrario bastaría considerar el ciclo:

$$C' = (y_{j+1}, x_{i+1}, C_1, x_i, y_j, C_2, y_{j+1})$$

el cual cumple que  $V(C') = V(C_1) \cup V(C_2)$ , obteniendo así un factor con  $t-1$  ciclos. Además, el número total de flechas entre  $C_1$  y  $C_2$  es igual a  $(nm)/2$ . Por

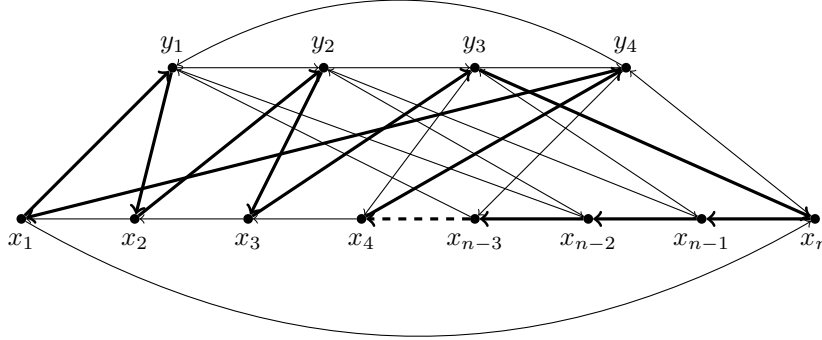


Figura 2.2: Imagen de  $C_1$  y  $C_2$  descritos en el caso 1.2.2 del teorema 19 cuando  $|V(C_1)| = 4$  y  $|V(C_2)| = 4k$  y el ciclo hamiltoniano  $C^*$  en negritas

lo tanto, tenemos que  $C_1 \mapsto^{\mathcal{P}} C_2$  lo que contradice que  $B$  sea fuerte, pues no tendríamos una  $(y_j, x_i)$ -trayectoria.

**Caso 1.2.2**  $k \geq 2$ .

En este caso se tiene que para todo  $y_j \in C_2$  si  $(y_j, x_i) \in A(B)$ , entonces

$$(x_i, y_{j+1}) \in A(B) \quad (2.5)$$

con  $i \equiv j \pmod{q} = m/2^{k-1}$ . Ya que en caso contrario podemos considerar el ciclo

$$C' = (y_{j+1}, x_i, C_1, x_{i-1}, y_{j-1}, C_2, v_{j+1})$$

el cual cumple que  $V(C') = V(C_1) \cup V(C_2)$  obteniendo como resultado un factor con  $t - 1$  ciclos.

También se cumple que si  $(y_j, x_i) \in A(B)$ , entonces

$$(y_{j+1}, x_{i+1}) \text{ para todo } y_j \in C_2 \quad (2.6)$$

con  $i \equiv j \pmod{m/2^{k-1}}$ . Pues en caso contrario bastaría considerar el ciclo

$$C'' = (x_{i+1}, y_{j+1}, C_2, y_{j+2}, x_{i+2}, C_1, u_{i+1})$$

el cual cumple que  $V(C') = V(C_1) \cup V(C_2)$  obteniendo como resultado un factor con  $t - 1$  ciclos. De 2.5 y 2.6 podemos obtener el siguiente ciclo,

$$C'' = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_q, y_{q+1}, x_{q+1}, \dots, y_m, x_1)$$

tal que  $V(C'') = V(C_1) \cup V(C_2)$ , obteniendo así un factor con  $t - 1$  ciclos. Véase la figura 2.2.

**Caso 2.** Entre cualesquiera dos ciclos  $C_r, C_s$  del  $t$ -factor tenemos que  $C_r \mapsto^{\mathcal{P}} C_s$  o  $C_s \mapsto^{\mathcal{P}} C_r$ , pero no ambos. Sean  $C_1, C_2, \dots, C_t$  los ciclos del factor. Si consideramos la digráfica de ciclos  $D^C$ , definida por:

$$V(D^C) = \{C_i \mid C_i \text{ es un ciclo del } t\text{-factor de } B, 1 \leq i \leq t\},$$



$$A(D^C) = \{(v_i, v_j) \mid C_i \rightarrow C_j \text{ en el } t\text{-factor de } B\}.$$

Así, para todo  $u, v \in V(D^C)$  se cumple que  $(u, v) \in A(D^C)$  o  $(v, u) \in A(D^C)$ , pero no ambas. Como el torneo original era fuertemente conexo, luego  $D^C$  es un torneo fuertemente conexo. Así, por el teorema de Moon, todo vértice en  $D^C$  pertenece a un triángulo.

Luego, en  $B$  este triángulo representa, sin pérdida de generalidad, tres ciclos  $C_1, C_2, C_3$  tales que  $C_1 \mapsto^P C_2$ ,  $C_2 \mapsto^P C_3$  y  $C_3 \mapsto^P C_1$ . Etiquetamos los vértices de estos ciclos de la siguiente manera:  $u_j^i$ . Donde el superíndice  $i$  representa el ciclo al que pertenece el vértice así,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Mientras que el subíndice  $j$  representa la posición que ocupa el vértice dentro del ciclo así, tenemos que  $1 \leq j \leq 2m_i$ , donde  $2m_i$  es la longitud del ciclo  $C_i$ . Además, suponemos sin pérdida de generalidad que los vértices con subíndice impar pertenecen a  $X$ , mientras que los vértices con un subíndice par pertenecen a  $Y$ .

Como  $C_1 \rightarrow C_2$ , entonces todo vértice impar de  $C_1$  domina a todo vértice par de  $C_2$ , pues viven en partes distintas de  $B$ . Así, tenemos que existe  $(u_1^1, u_2^2) \in A(B)$ . Como  $C_2 \rightarrow C_3$ , entonces tenemos que existe  $(u_2^2, u_3^3) \in A(B)$ , pues todo vértice impar de  $C_2$  domina a todo vértice par de  $C_3$ . Por último, existe  $(u_3^3, u_1^1) \in A(B)$  ya que todo vértice impar de  $C_3$  domina a todo vértice par de  $C_1$ . Con estas tres flechas formamos el siguiente ciclo:

$$C = (u_1^1, u_2^2, u_3^3, \dots, u_1^2, u_2^3, u_3^3, \dots, u_1^3, u_2^1, u_3^1, \dots, u_1^1).$$

Así,  $C, C_4, C_5, \dots, C_t$  es un  $(t-2)$ -factor en  $B$ , el cual por hipótesis de inducción tiene un ciclo hamiltoniano. Véase la figura 2.3. □

**Lema 20** (Häggkvist y Manoussakis [6]). *Sea  $B$  un torneo bipartito con un factor de ciclos,  $B$  no es fuerte si y solo si existe un  $m$ -factor que consiste de  $C_1, C_2, \dots, C_m$ ,  $m \geq 2$ , ciclos tales que,  $C_i \mapsto^P C_j$  si  $i < j$ .*

*Demostración.* Primero probemos la necesidad. Sea  $B$  como en la hipótesis así, este tiene un  $m$ -factor  $C_1, C_2, \dots, C_m$  tal que  $m \geq 2$  es mínimo. Como  $B$  no es fuerte, entonces  $B$  no es hamiltoniano como consecuencia del teorema anterior. Consideremos la digráfica de ciclos  $D^C$  formada por este  $m$ -factor. Como  $B$  no es hamiltoniano,  $D^C$  es acíclica. Así, por el corolario 11,  $D^C$  tiene una fuente que llamaremos  $v_1$  y un pozo  $v_m$ . Al retirar  $v_1$  de  $D^C$  obtenemos nuevamente una digráfica acíclica la cual también tiene una fuente que llamaremos  $v_2$ , así al retirar  $v_2$  obtenemos nuevamente una digráfica acíclica que también tiene una fuente, llamémosla  $v_3$ . Procedemos así hasta llegar a  $v_m$ . Ahora, consideremos este orden de vértices:  $v_1, v_2, \dots, v_m$  donde cada vértice corresponde a un ciclo del torneo bipartito  $B$ .

Luego, supongamos que existen  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq m$ , tales que  $C_i \rightarrow C_j$ . Así, existen  $u_i \in V(C_i)$  y  $v_j \in V(C_j)$  tales que  $(v_j, u_i) \in A(B)$ . Consideremos el ciclo

$$C' = (v_j, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i-1}, v_{j+1}, v_{j-1}, v_j).$$

Así, obtenemos un  $(m-1)$ -factor en  $B$  lo que contradice la minimalidad de  $m$ .

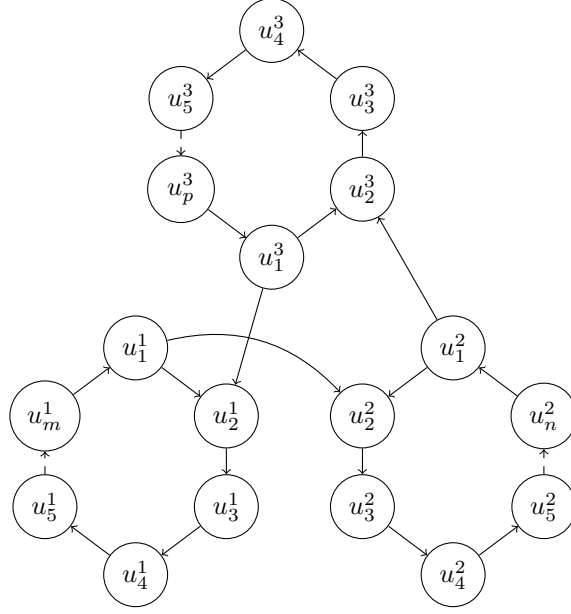


Figura 2.3: Imagen de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  descritos en el segundo caso del teorema 19

Para probar la suficiencia, basta notar que para cualquier  $u_i \in V(C_i)$  y cualquier  $v_j \in V(C_j)$  con  $1 \leq i < j \leq m$  no existe una  $(v_j, u_i)$ -trayectoria.  $\square$

Así, hemos visto en el primer teorema de esta sección que basta que un torneo bipartito, con un factor de ciclos, sea fuerte para asegurar que este tiene un 1-factor. En el segundo lema vimos qué sucede si nuestro torneo bipartito no es fuerte. Ahora veremos que condiciones son necesarias para que un torneo bipartito  $B$  tenga un 2-factor.

**Teorema 21** (Zhang, Manoussakis y Song [14]). *Sean  $B$  un torneo bipartito  $k$ -regular no isomorfo a  $F_{4k}$  y  $(x, y) \in A(B)$ . Existe un ciclo  $C$  de longitud cuatro que contiene a  $(x, y)$  tal que,  $B - C$  es hamiltoniano. Es decir,  $B$  tiene un 2-factor.*

*Demostración.* Sean  $B$  con partes  $X, Y$  como en la hipótesis y  $C = (x, y, w, z, x)$  un ciclo cualquiera de  $B$  que contiene a  $(x, y)$  y de longitud cuatro. Este ciclo existe por el lema 13. Recordemos que  $B$  no es isomorfo a  $F_{4k}$  así, tenemos que  $k \geq 3$ . Sea  $R = B - C$ .

**Afirmación.** Existe un ciclo  $C$  de longitud cuatro que contiene a  $(x, y)$  tal que  $R$  tiene un 1-factor.

Si suponemos que  $R$  tiene un 1-factor y consideramos únicamente las flechas de  $X$  a  $Y$  de este 1-factor, entonces este puede ser visto como un apareamiento que satura a todos los vértices de  $R$ . Considérese la gráfica subyacente de  $R$ .

Ahora, supongamos que para todo ciclo  $C$  de longitud cuatro que contiene a  $(x, y)$ ,  $R$  no tiene un 1-factor. Así, como negación del teorema de Hall (teorema 1), tenemos que existe  $P \subseteq X \setminus \{x, w\}$  o bien  $P \subseteq Y \setminus \{y, z\}$  tal que,  $|P| > |N_R^+(P)|$ .

Tomemos  $P \subseteq X \setminus \{x, w\}$  ahora, llamemos

$$\begin{aligned} Q &= N_R^+(P), \\ M &= X \setminus (P \cup \{x, w\}) \text{ y} \\ L &= Y \setminus (Q \cup \{y, z\}). \end{aligned}$$

Tenemos que  $k \geq |P| > |Q| \geq k - 2$ . La cota inferior se debe a que estamos quitando a lo más dos vértices  $y$  y  $z$  de  $N_B^+(P)$ , mientras que la cota superior se debe a que para todo  $S \subseteq X$ ,  $N_B^+(S) \subseteq N_B^+(X)$  así,  $|N_B^+(S)| \leq |N_B^+(X)| = k$  pues  $B$  es  $k$ -regular. Luego, consideramos los siguientes tres casos:

**Caso 1.**  $|P| = k$  y  $|Q| = k - 2$ .

Como  $P \mapsto^{\mathcal{P}} Q$ , tenemos que  $Q \mapsto^{\mathcal{P}} M$ ,  $M \mapsto^{\mathcal{P}} L$  y  $L \mapsto^{\mathcal{P}} P$  tal como se aprecia en la figura 2.4. Como  $B$  es  $k$ -regular  $|N_B^-(y)| = k$ , además como la cardinalidad de  $Q$  es  $k - 2$ , entonces  $N_B^+(P) = Q \cup \{y, z\}$ , ya que  $k = |N_B^+(P)| = |Q| + |\{y, z\}| = k - 2 + 2$ . Así,  $N_B^-(y) = P \cup \{x\}$ , entonces  $|N_B^-(y)| = |P| + |\{x\}| = k + 1$ , lo que es una contradicción.

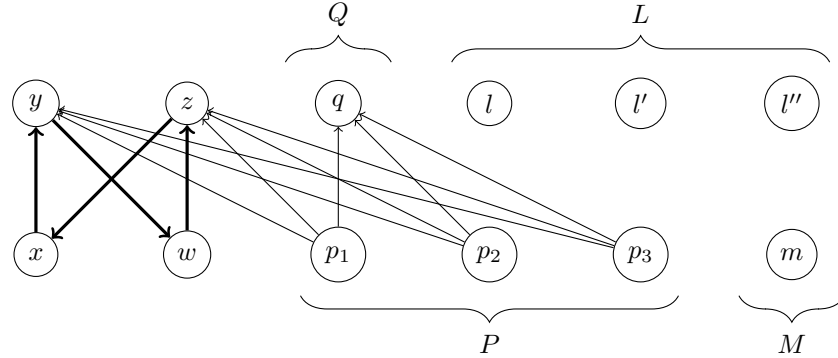


Figura 2.4: Representación gráfica del caso 1 para  $k = 3$ , con  $\{p_1, p_2, p_3\} \in P$ ,  $q \in Q$ ,  $m \in M$ ,  $\{l, l', l''\} \in L$ . Nótese que en este caso  $|Q| = 1$

**Caso 2.**  $|P| = k$  y  $|N^+(P)| = k - 1$ .

En este caso,  $|M| = k - 2$  y  $|L| = k - 1$  por la proposición 12. Si  $z \mapsto^{\mathcal{P}} P$ , entonces  $d_B^+(z) = |P| + |\{x\}| = k + 1$ , lo que es una contradicción. Luego, existe  $p \in P$  tal que  $(p, z) \in A(B)$ . Por otro lado, si  $p \mapsto^{\mathcal{P}} \{y, z\}$ , luego se tiene que  $d_B^+(p) = |Q| + |\{y, z\}| = k + 1$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe  $(y, p) \in A(B)$ . Así, tenemos el ciclo:

$$C' = (x, y, p, z, x)$$

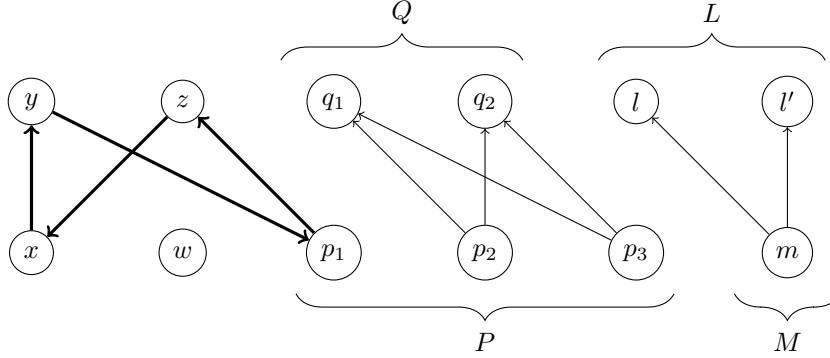


Figura 2.5: Caso 2.1 con  $P' = \{p_2, p_3, m\}$  y  $k = 3$ , incluyo el ciclo  $C'$  así como las exvecindades de  $P \setminus \{p\}$  y  $M$ , nótese que ambas condiciones (1) y (2) se cumplen

y sea  $R' = B - C'$ . Veamos que  $R'$  tiene un 1-factor. Supongamos que no, así, como negación del teorema de Hall, tenemos que existe  $P' \subseteq (X \setminus \{x, p\})$  o bien  $P' \subseteq (Y \setminus \{y, z\})$ , tal que  $|N_B^+(P')| < |P'|$ .

**Caso 2.1**  $P' \subseteq (X \setminus \{x, p\})$ .

Si  $|P'| = k$ , entonces  $P' \cap (P \setminus \{p\}) \neq \emptyset$  (1), pues en caso contrario tendríamos que:

$$|X| = |P \setminus \{p\}| + |P'| + |\{x, p\}| = (k - 1) + k + 2 = 2k + 1,$$

lo que es una contradicción (proposición 12), y  $P' \cap (M \cup \{w\}) \neq \emptyset$  (2), pues en caso contrario tendríamos que:

$$|X| = |P'| + |M \cup \{w\}| + |\{x, p\}| = k + (k - 1) + 2 = 2k + 1$$

lo que también contradice a la proposición 12. Así, tenemos que:

$$|N_{R'}^+(P')| = |Q| + |L| = (k - 1) + (k - 1) = 2k - 2 \geq k \text{ para } k \geq 2,$$

ya que las exvecindades de  $P$  y de  $M$  son ajenas (figura 2.5). Ahora bien, si  $|P'| = k - 1$ , entonces se cumple que  $P' \cap (P \setminus \{p\}) \neq \emptyset$  o bien,  $P' \cap (M \cup \{w\}) \neq \emptyset$  pero no ambas como vimos anteriormente. Así, tenemos que:

$$|N_{R'}^+(P')| = \min \{|Q|, |L|\} = k - 1.$$

Lo que contradice la suposición inicial, por lo tanto,  $R'$  tiene un 1-factor.

**Caso 2.2**  $P' \subseteq (Y \setminus \{y, z\})$ .

Si  $|P'| = k$ , entonces  $P' \cap Q \neq \emptyset$ , pues en caso contrario tendríamos que:

$$|Y| = |P'| + |Q| + |\{y, z\}| = k + (k - 1) + 2 = 2k + 1$$

lo que es una contradicción (proposición 12) y  $P' \cap L \neq \emptyset$ , pues en caso contrario tendríamos que:

$$|Y| = |P'| + |L| + |\{y, z\}| = k + (k - 1) + 2 = 2k + 1$$

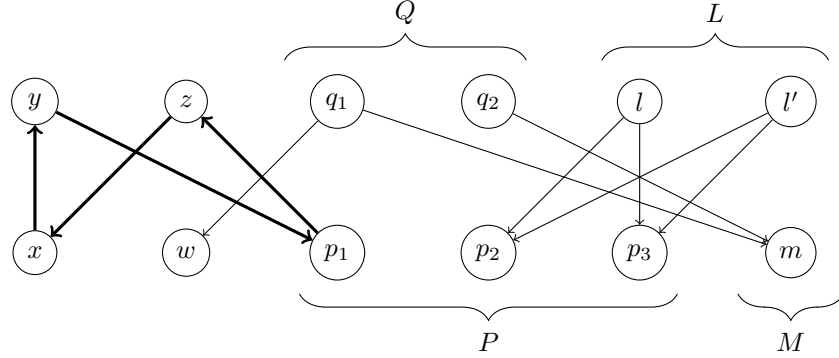


Figura 2.6: Caso 2.2, para  $k = 3$  incluyo el ciclo  $C'$  y las exvecindades de  $Q$  y de  $L$  en  $R'$

lo que también contradice a la proposición 12. Así, tenemos que:

$$|N_{R'}^+(P')| = |M| + |(P \setminus \{p_1\})| = (k-2) + (k-1) = 2k-3 \geq k \text{ para } k \geq 3.$$

Ahora bien, si  $|P'| = k-1$ , entonces tenemos los siguientes casos:

- 1).  $P' = Q$ . Si  $w \mapsto^P Q$ , entonces para todo  $q \in Q$  se tiene que  $d_B^-(q) = |P| + |\{w\}| = k+1$ , lo que es una contradicción. Así, existe  $q \in Q$  tal que  $(q, w) \in A(B)$ . Así,  $|N_{R'}^+(P')| = |N_{R'}^+(Q)| = |M| + |\{w\}| = (k-2) + 1 = k-1$ .
- 2).  $P' = L$ . Así,  $|N_{R'}^+(P')| = |N_{R'}^+(L)| = |(P \setminus \{p\})| = k-1$ .
- 3).  $P' \cap Q \neq \emptyset$  y  $P' \cap L \neq \emptyset$ . Así, tenemos que:

$$|N_{R'}^+(P')| = |N_{R'}^+(L)| + |N_{R'}^+(Q)| = |(P \setminus \{p\})| + |M| + |\{w\}| \geq k-1.$$

Lo que contradice la suposición inicial, por lo tanto,  $R'$  tiene un 1-factor.

**Caso 3.**  $|P| = k-1$  y  $|N^+(P)| = k-2$ .

En este caso,  $|M| = k-1$  y  $|L| = k$  por la proposición 12. Si  $x \mapsto^P L$ , entonces  $d_B^+(x) = |L| + |\{y\}| = k+1$  lo que es una contradicción. Así, existe  $l \in L$  tal que  $(l, x) \in A(B)$ . Ahora bien, si para todo  $l \in L$  se tiene que  $l \mapsto^P \{x, w\}$ , entonces  $d_B^+(l) = |P| + |\{x, w\}| = (k-1) + 2 = k+1$ , lo que es una contradicción. Así, existe  $(x, l) \in A(B)$ . Por lo tanto, consideremos el ciclo:

$$C'' = (x, y, w, l, x)$$

y sea  $R'' = B - C''$ . Veamos que  $R''$  tiene un 1-factor. Así, para  $P' \subseteq X \setminus \{x, w\}$  o bien  $P' \subseteq Y \setminus \{y, l\}$  tenemos que  $|P'| \leq |N_{R''}^+(P')|$ . Si  $|P'| = k$  tenemos los casos 1 y 2. Así, supongamos que  $|P'| = k-1$ .

**Caso 3.1**  $P' \subseteq (X \setminus \{x, w\})$ .

Así, tenemos los siguientes casos:

- 1).  $P' = P$ . Si  $z \mapsto^P P$ , entonces para todo  $p \in P$  tenemos que,  $d_B^-(p) = |L| + |\{z\}| = k+1$ , lo que es una contradicción. Así, para todo  $p \in P$ ,  $(p, z) \in A(B)$ . Por lo tanto,  $|N_{R'}^+(P')| = |N_{R'}^+(P)| = |Q| + |\{z\}| = (k-2) + 1 = k-1$ .

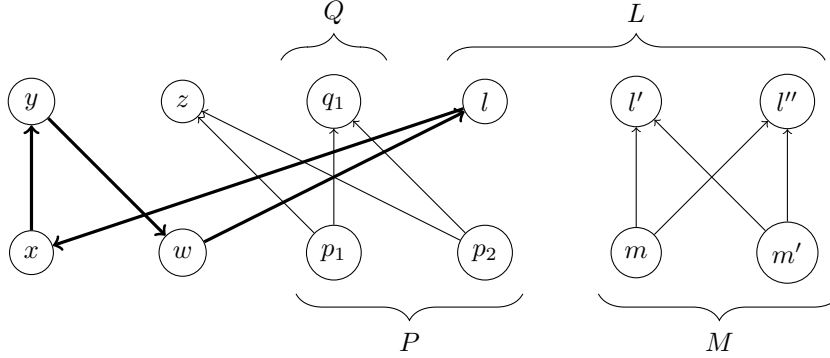


Figura 2.7: Caso 3.1, para  $k = 3$  incluyo el ciclo  $C''$  las exvecindades de  $M$  y de  $P$  en  $R''$

2).  $P' = M$ . Así,  $|N_{R''}^+(P')| = |N_{R''}^+(M)| = |L \setminus \{l\}| = k - 1$ .

3).  $P' \cap P \neq \emptyset$  y  $P' \cap M \neq \emptyset$ . Así,  $|N_{R''}^+(P')| = |N_{R''}^+(M)| + |N_{R''}^+(P)| = |(L \setminus \{l\})| + |Q| + |\{z\}| \geq k - 1$ .

**Caso 3.2**  $P' \subseteq (Y \setminus \{y, l\})$ .

Así, tenemos los siguientes casos:

1).  $P' = L \setminus \{l\}$ . Así,  $|N_{R'}^+(P')| = |N_{R'}^+(L \setminus \{l\})| = |P| = k - 1$ .

2).  $P' = Q \cup \{z\}$ . Así,  $|N_{R'}^+(P')| = |N_{R'}^+(Q \cup \{z\})| = |M| = k - 1$ .

3).  $P' \cap (Q \cup \{z\}) \neq \emptyset$  y  $P' \cap (L \setminus \{l\}) \neq \emptyset$ . Así, tenemos que:

$$|N_{R'}^+(P')| = |N_{R'}^+(L \setminus \{l\})| + |N_{R'}^+(Q \cup \{z\})| = |P| + |M| \geq k - 1,$$

lo que es también una contradicción.

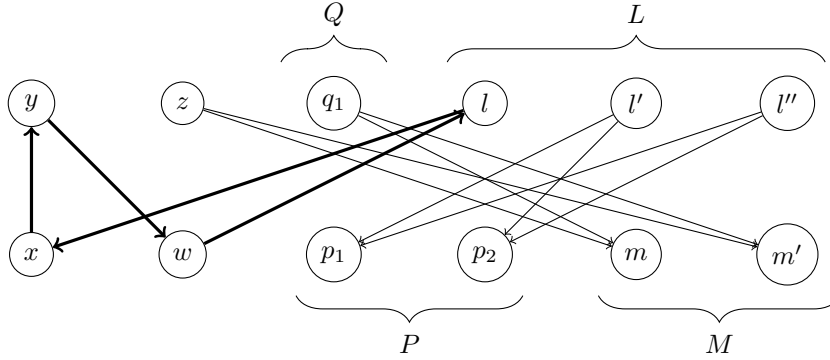


Figura 2.8: Caso 3.2, para  $k = 3$  incluyo el ciclo  $C''$  así como las exvecindades de  $L \setminus \{l\}$  y de  $(Q \cup \{z\})$  en  $R''$

Luego, por la afirmación anterior,  $R$  tiene un 1-factor. Sean  $C$  y  $R$  como en la afirmación anterior. Si  $R$  es fuerte, terminamos por el teorema 19. Supongamos

que no es fuerte. Si  $k = 3$ , entonces  $R$  consiste de dos ciclos  $C_1 = (1, 2, 3, 4, 1)$  y  $C_2 = (5, 6, 7, 8, 5)$ , cada uno de longitud cuatro, tal que  $C_2 \mapsto^{\mathcal{P}} C_1$  por el lema 20. Además, por la regularidad de grados tenemos que  $C_2 \mapsto^{\mathcal{P}} C$  y  $C \mapsto^{\mathcal{P}} C_1$  en  $B$ . Así, los ciclos:  $C' = (x, y, 1, 8, x)$  y  $C'' = (z, 3, 4, 5, 6, w, 2, 7, z)$  satisfacen el teorema.

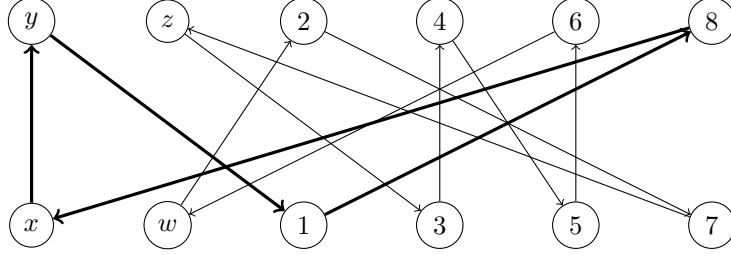


Figura 2.9: Para  $k = 3$  tenemos los ciclos  $C'$  y  $C''$

Ahora supongamos que  $k \geq 4$ . Sean  $C_1, C_2, \dots, C_m$ ,  $m \geq 2$ , ciclos de  $R$  dados por el lema 20. Sea  $n_i$  la longitud del ciclo  $C_i$ . Si  $n_1 \leq n_2 + n_3 + \dots + n_m$  existe un vértice  $v \in C_1$  tal que:

$$\begin{aligned} k = |N^+(v)| &\geq \frac{n_1}{4} + \frac{n_2 + \dots + n_m}{2} \\ &\geq \frac{n_1 + \dots + n_m}{4} + \frac{n_2 + \dots + n_m}{4} \\ &\geq \frac{n-4}{4} + \frac{n-4}{8} \end{aligned} \tag{2.7}$$

lo que es una contradicción para  $k \geq 4$  pues  $n = 4k$ . De manera análoga, si  $n_1 \geq n_2 + \dots + n_m$  llegamos a una contradicción al tomar  $u \in C_m$  y considerar  $|N_R^-(u)|$ .

Así, queda demostrado este teorema.  $\square$

La siguiente conjetura fue planteada en 1994 por Song, Zhang y Manoussakis en este mismo artículo.

**Conjetura 22** (Manoussakis, Song y Zhang [14]). *Si  $B$  es un torneo bipartito  $k$ -regular no isomorfo a  $F_{4k}$ , entonces  $B$  tiene un 2-factor. Este consiste de dos ciclos uno de longitud  $t$ ,  $4 \geq t \geq |V(B)| - 4$ , y el otro de longitud  $|V(B)| - t$ . Es decir,  $B$  tiene un  $(t, n-t)$ -factor.*

En el 2014, Bai, Li y He extendieron el resultado para dos ciclos complementarios en un torneo bipartito  $k$ -regular no isomorfo a  $F_{4k}$ , llamémoslo  $B$ . El primer ciclo de longitud 6 y el segundo de longitud  $|V(B)| - 6$ . Ellos utilizaron un razonamiento análogo al utilizado por Manoussakis, Song y Zhang.

**Lema 23** (Bai, Li y He [1]). *Sea  $B$  un torneo bipartito  $k$ -regular no isomorfo a  $F_{4k}$  y  $k \geq 3$ . Entonces,  $B$  tiene un ciclo  $C$  de longitud 6 tal que  $B - C$  tiene un 1-factor.*

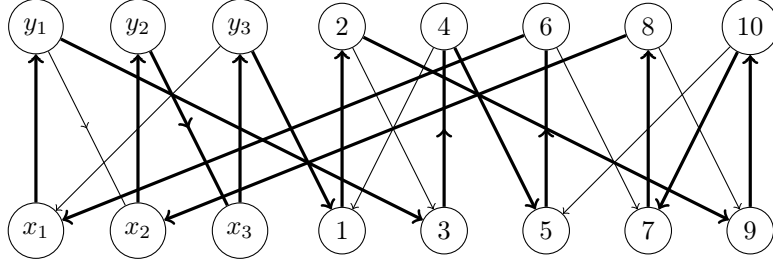


Figura 2.10: Los ciclos  $C'$  y  $C^*$ , del caso 1 del teorema 24, en negritas

Recordemos que un 1-factor de una digráfica  $D$  es una subdigráfica generadora 1-regular. Luego, en el siguiente teorema verificamos que el 1-factor de  $B - C$  obtenido en el lema anterior, es un ciclo.

**Teorema 24** (Bai, Li y He [1]). *Si  $B$  es un torneo bipartito  $k$ -regular no isomorfo a  $F_{4k}$  con  $k \geq 3$ .  $B$  tiene un  $(|V(B)| - 6, 6)$ -factor.*

*Demostración.* Por el lema anterior,  $B$  tiene un ciclo  $C$  de longitud 6 tal que  $R = B - C$  tiene un 1-factor. Basta demostrar que  $R$  es hamiltoniano o bien que, existe un ciclo  $C^* \neq C$  tal que  $|C^*| = 6$  y  $B - C^*$  es hamiltoniano. Si  $R$  es fuerte, entonces  $R$  es hamiltoniano para toda  $k$  por el teorema 19. Si  $k = 3$ , entonces  $|R| = 6$  y  $R$  tiene un factor de ciclos, en el que cada ciclo tiene longitud al menos cuatro. Así, este factor de ciclos es un ciclo hamiltoniano. Ahora supongamos que  $R$  no es fuerte y  $k \geq 4$ .

**Caso 1.**  $k = 4$ .

Sea  $B = (X, Y, A)$  y sea

$$C = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_2, x_1)$$

con  $\{x_1, x_2, x_3\} \subseteq X$  y  $\{y_1, y_2, y_3\} \subseteq Y$ . Nótese que  $R$  no es fuerte y  $|R| = 10$ . Por el lema 20 sabemos que  $R$  tiene un factor de dos ciclos, digamos  $C_1$  y  $C_2$  tal que,  $C_1 \mapsto^P C_2$ . Además, uno de los ciclos tiene longitud 4 y el otro tiene longitud 6. Ahora sea:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$$

$$5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 5$$

los dos ciclos del factor de ciclos,  $\{1, 3, 5, 7, 9\} \subseteq X$  y  $\{2, 4, 6, 8, 10\} \subseteq Y$ . Primero supongamos que  $|C_1| = 4$  y  $|C_2| = 6$ . Cada vértice de  $C_1$  domina a un vértice de  $C_1$  y a tres vértices de  $C_2$ , pues  $k = 4$ . Como  $B$  es 4-regular se tiene que  $C \mapsto^P C_1$  y que todo vértice de  $C_2$  tiene al menos dos exvecinos en  $C$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $6 \rightarrow x_1$ . Sea:

$$C' = (x_1, y_1, 3, 4, 5, 6, x_1).$$

Nótese que  $|C'| = 6$ . Si  $10 \rightarrow x_2$ , entonces  $B - C'$  tiene un ciclo hamiltoniano:

$$C^* = (x_2, y_2, x_3, y_3, 1, 2, 9, 10, 7, 8, x_2).$$



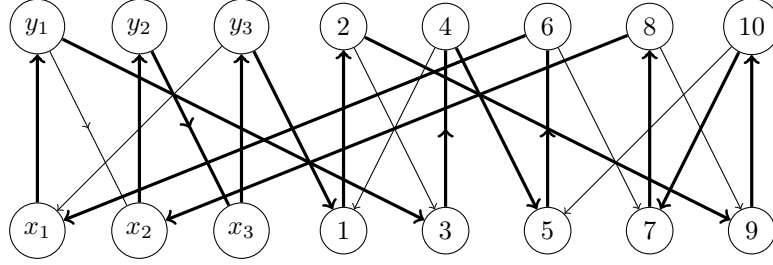


Figura 2.11: Los ciclos  $C'$  y  $C^{**}$ , del caso 1 del teorema 24, en negritas

Si  $x_2 \rightarrow 10$ , como  $\{1, 3, 9\} \mapsto^{\mathcal{P}} 10$  y  $x_2 \mapsto^{\mathcal{P}} \{y_2, 2, 4\}$ , entonces tenemos que  $10 \rightarrow 7$  y  $8 \rightarrow x_2$ . Así,  $B - C'$  tiene un ciclo hamiltoniano:

$$C^{**} = (x_2, y_2, x_3, y_3, 1, 2, 9, 10, 7, 8, x_2).$$

Ahora supongamos que  $|C_1| = 6$  y  $|C_2| = 4$ . Cada vértice de  $C_2$  es dominado por un vértice de  $C_2$  y tres vértices de  $C_1$ , pues  $k = 4$ . Como  $B$  es 4-regular tenemos que  $C_2 \mapsto^{\mathcal{P}} C$  y que todo vértice de  $C_1$  tiene un vecino en  $C$ . Asumamos sin pérdida de generalidad que  $y_1 \rightarrow 5$ . De manera análoga al subcaso anterior tenemos que  $C''' = (x_1, y_1, 5, 6, 4, x_1)$  es un ciclo de longitud 6 tal que  $B - C'''$  es hamiltoniano.

**Caso 2.**  $k \geq 5$ .

Sean  $C_1, C_2, \dots, C_m$ ,  $m \geq 2$ , ciclos de  $R$  dados como en el lema 20. Sea  $|C_i| = n_i$  para  $i = 1, \dots, m$ . Nótese que:

$$|V(B)| = 4k = \sum_{i=1}^m n_i + 6.$$

Si  $n_1 \leq n_2 + \dots + n_m$ , entonces para todo vértice  $v \in C_1$  tal que  $d_{C_1}^+(v)$  es máximo tenemos que:

$$\begin{aligned} k \geq d_{C_1}^+(v) &\geq \frac{n_1}{4} + \frac{n_2 + \dots + n_m}{2} \\ &= \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_m}{4} + \frac{n_2 + \dots + n_m}{4} \\ &\geq \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_m}{4} + \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_m}{8} \\ &= \frac{4k - 6}{4} + \frac{4k - 6}{8} \\ &= k + \left( \frac{k}{2} - \frac{9}{4} \right) \end{aligned}$$

lo que es una contradicción para  $k \geq 5$ . Por otro lado, si  $n_1 \geq n_2 + \dots + n_m$ ,

entonces tomamos  $|N_R^-(v)|$  con  $v \in C_m$  tal que  $d_{C_m}^-(v)$  es máximo. Así,

$$\begin{aligned} k \geq d_{C_m}^-(v) &\geq \frac{n_1}{4} + \frac{n_2 + \cdots + n_m}{2} \\ &= \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}{4} + \frac{n_2 + \cdots + n_m}{4} \\ &\geq \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}{4} + \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}{8} \\ &= \frac{4k - 6}{4} + \frac{4k - 6}{8} \\ &= k + \left(\frac{k}{2} - \frac{9}{4}\right) \end{aligned}$$

lo que es también una contradicción para  $k \geq 5$ . □

### 2.3. Herramientas para la prueba de la conjetura de Manoussakis, Song y Zhang

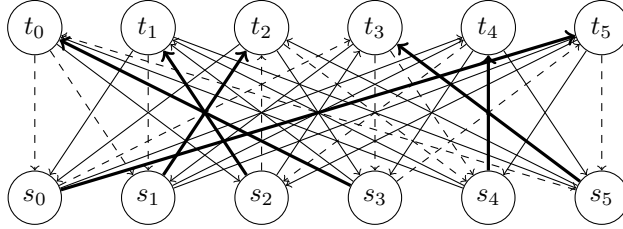


Figura 2.12: Torneo bipartito 3-regular no isomorfo a  $F_{4k}$

En esta penúltima parte, daremos algunas de las herramientas que Bessy y Thiebaut utilizan para su demostración de la conjetura de Manoussakis, Song y Zhang, que se obtuvieron del artículo [3] publicado en el 2017. Sin embargo, la prueba completa, a la fecha de creación de esta tesis, no es pública.

Sea  $D$  un torneo bipartito  $k$ -regular, con partes  $S$  y  $T$ , y sea  $D'$  una subgráfica de  $D$  tal que  $V(D') = V(D)$  y  $A(D') = \{(u, v) \in A(D) \mid u \in S, v \in T\}$ . Notemos que  $D'$ , la gráfica subyacente de  $D$ , es una digráfica bipartita  $k$ -regular y por lo tanto, tiene un apareamiento perfecto  $M$ , como consecuencia del teorema de Hall (teorema 1). Para cada vértice  $u \in S$ , el vértice  $M(u)$  denota al único vértice en  $T$  tal que  $(u, M(u)) \in M$ . Recíprocamente, para todo  $v \in T$ ,  $M^{-1}(v)$  denota al único vértice en  $S$  tal que  $(M^{-1}(v), v) \in M$ .

$D^M$  denota a la **digráfica contraída por el apareamiento**  $M$  obtenida al contraer el apareamiento  $M$  (definición 5) y mantener únicamente las flechas de  $T$  a  $S$ ; es decir,  $V(D^M) = \{u \in S \mid (u, M(u)) \in M, M(u) \in T\}$  y  $A(D^M) = \{(u, v) \mid u \in S, v \in S, (M(u), v) \in A(D)\}$ .

En las figuras 2.13-2.19 ilustraremos paso a paso la construcción de  $D^M$ . Tomando como ejemplo el torneo  $D$  de la figura 2.12, y  $M$  el apareamiento en negritas.

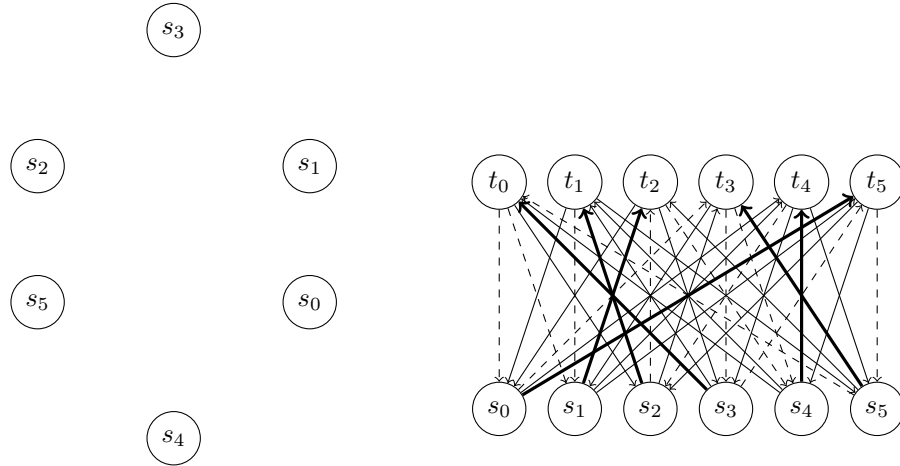


Figura 2.13: Tomamos los vértices de  $S$  para que estos sean los vértices de  $D^M$

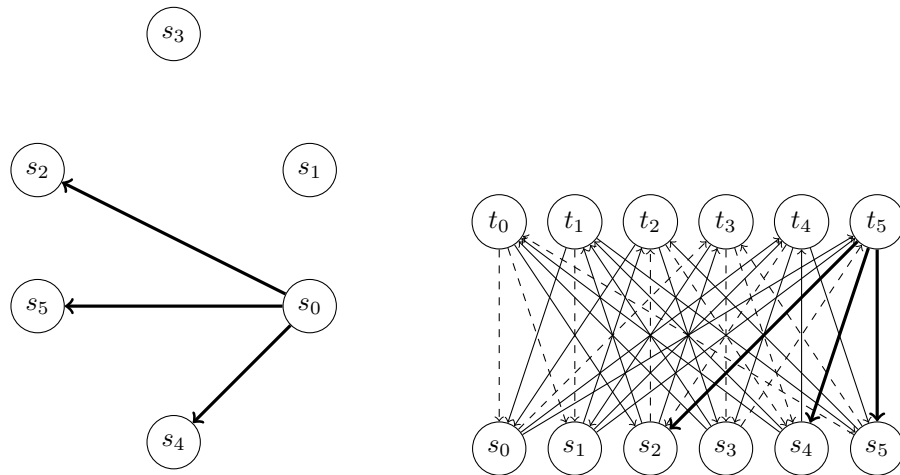


Figura 2.14: Empezamos por  $s_0$ , este vértice está apareado con  $t_5$  en  $M$ . Así, trazamos flechas con cola en  $s_0$  y punta en alguno de los vértices en  $N_D^+(t_5) = \{s_2, s_4, s_5\}$ .

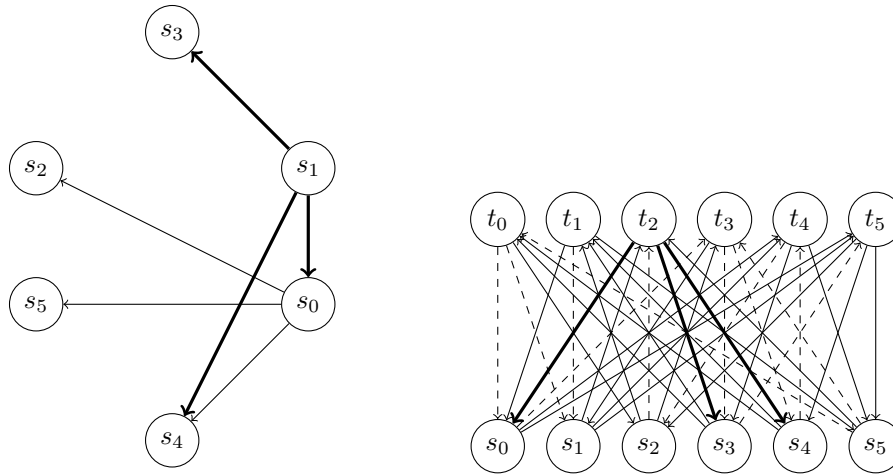


Figura 2.15: Seguimos con  $s_1$ , este vértice está apareado con  $t_2$  en  $M$ . Así, trazamos flechas con cola en  $s_1$  y punta en los vértices  $N_D^+(t_2) = \{s_0, s_3, s_4\}$ .

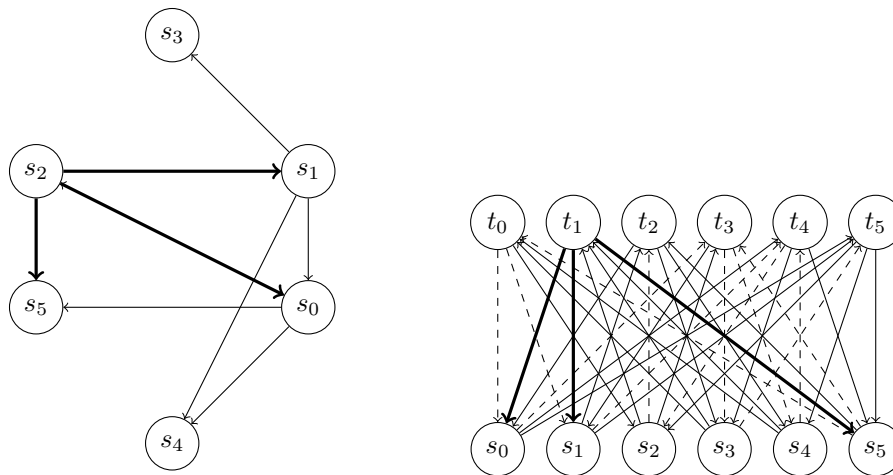


Figura 2.16: Seguimos con  $s_2$ , este vértice está apareado con  $t_1$  en  $M$ . Así, trazamos flechas con cola en  $s_2$  y punta en los vértices  $N_D^+(t_1) = \{s_0, s_1, s_5\}$ .

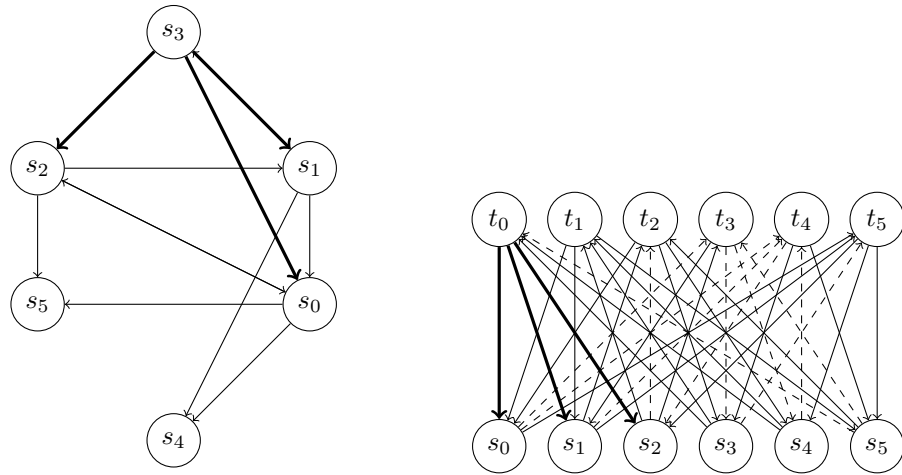


Figura 2.17: Seguimos con  $s_3$ , este vértice está apareado con  $t_0$  en  $M$ . Así, trazamos flechas con cola en  $s_3$  y punta en los vértices  $N_D^+(t_1) = \{s_0, s_1, s_2\}$ .

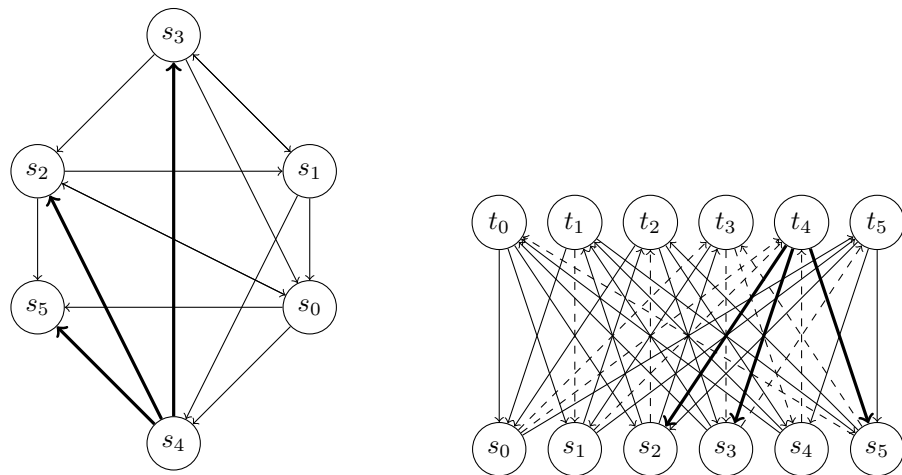


Figura 2.18: Seguimos con  $s_4$ , este vértice está apareado con  $t_4$  en  $M$ . Así, trazamos flechas con cola en  $s_4$  y punta en los vértices  $N_D^+(t_1) = \{s_2, s_3, s_5\}$ .

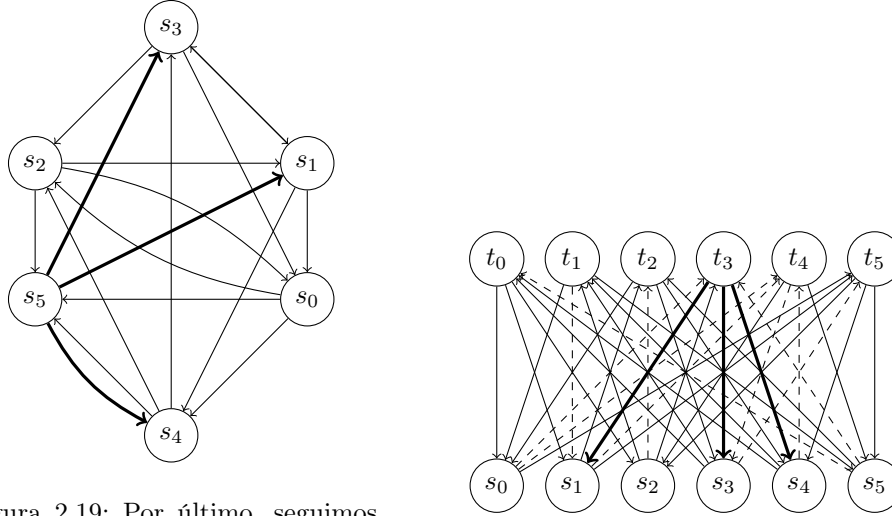


Figura 2.19: Por último, seguimos con  $s_5$ , este vértice está apareado con  $t_3$  en  $M$ . Así, trazamos flechas con cola en  $s_5$  y punta en los vértices  $N_D^+(t_1) = \{s_2, s_3, s_5\}$ . Obteniendo así la contracción del torneo  $D$  de acuerdo al apareamiento perfecto  $M$ .

Vemos que  $|V(D^M)| = 2k$  (proposición 12). Para todo  $u \in V(D^M)$  tenemos que  $|N_{D^M}^+(u)| = |N_D^+(M(u))| = k$  y  $|N_{D^M}^-(u)| = |N_D^-(u)| = k$ . Notemos que  $D^M$  no contiene flechas paralelas. Además,  $D^M$  tiene un factor de ciclos. Véase la figura 2.20

**Proposición 25** (Bessy y Thiebaut [3]). *Si  $C_{D^M} = (u_1, u_2, \dots, u_t, u_1)$  es un ciclo en  $D^M$ , entonces  $C = (u_1, M(u_1), \dots, u_t, M(u_t), u_1)$  es un ciclo en  $D$ .*

*Demostración.* Sea  $C = (u_1, u_2, \dots, u_t, u_1)$  un ciclo en  $D^M$ . Por definición para todo  $u_i, u_j \in D^M$  se cumple que  $(u_i, M(u_i)), (M(u_i), u_j) \in A(D)$  con  $1 \leq i, j \leq t$ . Por otro lado, como  $(u_t, u_1) \in A(D^M)$ , entonces  $(u_t, M(u_t)), (M(u_t), u_1) \in A(D)$ . Luego  $C' = (u_1, M(u_1), \dots, u_i, M(u_i), u_j, M(u_t), u_1)$  es un ciclo de  $D$ . Notemos que la longitud de  $C'$  es igual a dos veces la longitud de  $C$ , pues por cada flecha en  $C$  tenemos dos en  $C'$ .  $\square$

**Proposición 26.** *Si  $D$  es un torneo bipartito y  $M$  un apareamiento perfecto en  $D$ , entonces  $D^M$  es una digráfica semicompleta.*

*Demostración.* Sea  $D$  con partes  $X, Y$  como en la hipótesis. Supongamos que existen  $u, v \in V(D^M)$  tales que  $(u, v) \notin A(D^M)$  y  $(v, u) \notin A(D^M)$ , con  $\{u, v\} \subseteq X$ . Luego, tenemos que no existen

$$M(u), M(v) \in Y, \text{ con } (u, M(u)), (v, M(v)) \in A(D)$$

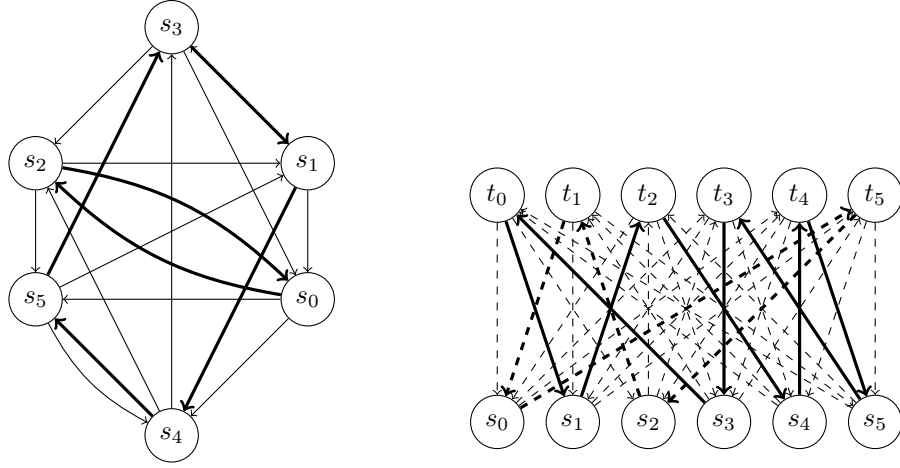


Figura 2.20: En negritas dos ciclos ajenos de un factor de ciclos en  $D^M$ . Notemos que los ciclos en  $D^M$  también son ciclos en el torneo original  $D$ .

tales que  $(M(u), v) \in A(D)$  o  $(M(v), u) \in A(D)$ . Lo anterior contradice que  $D$  sea un torneo bipartito.  $\square$

**Lema 27** (Bessy y Thiebaut [3]). *Si  $D^M$  tiene un anticiclo  $u_1, \dots, u_t$  con  $t \geq 2$ , entonces*

$$M' = \left( M \setminus \bigcup_{i=1}^t (u_i, M(u_i)) \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^{t-1} (u_{i+1}, M(u_i)) \right) \cup \{(u_t, M(u_t))\}$$

es un apareamiento perfecto de  $D$ . Además, para todo  $v \notin \{u_1, \dots, u_t\}$  tenemos que  $N_{D^{M'}}^+(v) = N_{D^M}^+(v)$  y para todo  $i$  con  $2 \leq i \leq t$  tenemos que  $N_{D^{M'}}^+(u_i) = N_{D^M}^+(u_{i-1})$  y  $N_{D^{M'}}^+(u_1) = N_{D^M}^+(u_t)$ .

*Demostración.* Sea  $u_1, \dots, u_t$  un anticiclo de  $D^M$  así, por definición tenemos que  $(u_{i+1}, M(u_i)) \in A(D)$  para todo  $1 \leq i \leq t-1$  y  $(u_t, M(u_1)) \in A(D)$ .

Ya que si existe un vértice  $u_i$  tal que  $(M(u_i), u_{i+1}) \in A(D)$  esta flecha representaría una flecha en  $D^M$  lo que contradice que  $u_1, \dots, u_t$  sea un anticiclo de  $D^M$ . Por lo tanto,  $M'$  es también un apareamiento perfecto de  $D$ .

Luego, para todo  $i$  con  $1 \leq i \leq t-1$  tenemos que  $M'(u_{i+1}) = M(u_i)$  y  $M'(u_1) = M(u_t)$  en  $D$  así,  $N_{D^{M'}}^+(u_i) = N_{D^M}^+(u_{i-1})$ . La exvecindad de los demás vértices permanece constante.  $\square$

**Corolario 28** (Bessy y Thiebaut [3]). *Si  $D^M$  tiene un factor de ciclos y contiene un anticiclo  $u_1, \dots, u_t$  con  $t \geq 2$ , entonces la digráfica obtenida después del cambio a lo largo del anticiclo  $u_1, \dots, u_t$  tiene también un factor de ciclos.*

El cambio entre los apareamientos  $M$  y  $M'$  en el lema anterior se llama **cambio a lo largo del anticiclo**  $u_1, \dots, u_t$ . Esta operación mantiene la existencia de ciclos. Sin embargo, los ciclos pueden variar. Ilustremos los resultados anteriores con un ejemplo. En las figuras 2.21-2.24 ilustramos el cambio a lo largo de un anticiclo en la digráfica  $D^M$  previamente construida.

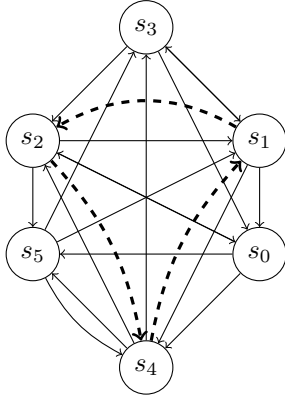


Figura 2.21: Un anticiclo  $C^*$  en  $D^M$

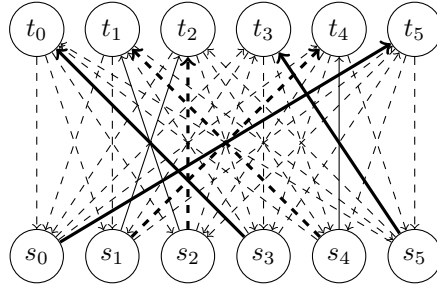


Figura 2.22: Las flechas punteadas del anticiclo  $C^*$  en  $D^M$  generan otro apareamiento  $M'$  en  $D$

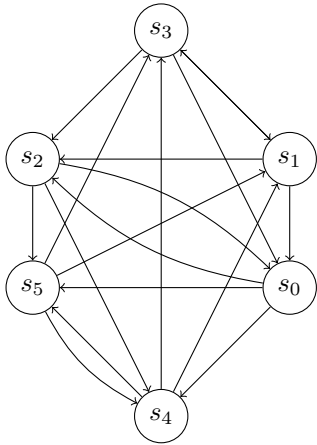


Figura 2.23: Análogamente al procedimiento utilizado para generar a  $D^M$ , obtenemos  $D^{M'}$  con las flechas de  $M'$  que se muestran en la figura anterior obtenidas a partir del anticiclo  $C^*$

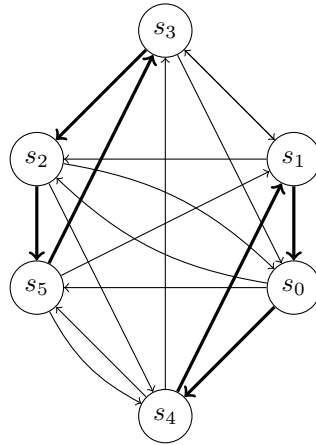


Figura 2.24: En negritas dos nuevos ciclos generados por el cambio a lo largo del anticiclo  $C^*$  en  $D^{M'}$ . Notemos que aunque existen ciclos en  $D^{M'}$  estos son completamente distintos a los ciclos en  $D^M$ .

Así, queda concluida la exposición de las herramientas, propuestas por Bessy y Thiebaut en [3], para la demostración de la conjetura 22.



## 2.4. Resultados en torneos $k$ -partitos

Como hemos visto, el problema de encontrar ciclos complementarios en torneos bipartitos resulta ser más difícil de estudiar que en los torneos usuales. Así, este problema es aún mayor en el caso de torneos  $k$ -partitos, para  $k > 2$ . En general, sabemos que ser fuerte y tener un factor de ciclos caracteriza la existencia de ciclos hamiltonianos en torneos bipartitos, pero en torneos  $k$ -partitos, con  $k > 2$ , esas dos condiciones ni siquiera aseguran la existencia de un ciclo hamiltoniano. Los siguientes dos ejemplos nos mostrarán que existen torneos  $k$ -partitos regulares que no tienen ciclos complementarios.

*Ejemplo 1* (Reid [11]).  $P_7$  no contiene ciclos complementarios  $C_3$  y  $C_4$ , uno de longitud 3 y el otro de longitud 4, tal que  $V(P_7) = V(C_3) \cup V(C_4)$  (figura 2.25):

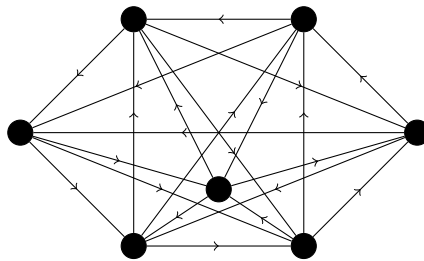


Figura 2.25: Representación gráfica de  $P_7$

*Ejemplo 2* (Volkman [13]).  $D_{3,2}$  no contiene dos ciclos complementarios de longitud 3 (figura 2.26).

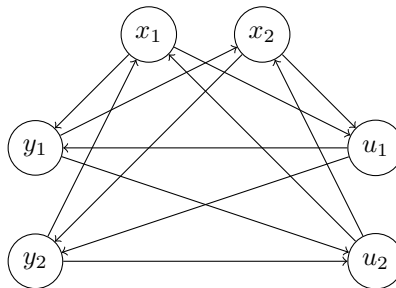


Figura 2.26: Representación gráfica de  $D_{3,2}$  con partes  $V_1 = \{x_1, x_2\}$ ,  $V_2 = \{y_1, y_2\}$  y  $V_3 = \{u_1, u_2\}$

Así, en este mismo artículo Volkman demostró el siguiente resultado sobre ciclos complementarios en torneos 3-partitos.

**Teorema 29** (Volkman [13]). *Sea  $D$  un torneo 3-partito regular,  $V(D) \geq 6$ , entonces  $D$  tiene dos ciclos complementarios con longitudes 3 y  $|V(D)| - 3$ , a menos que  $D$  sea isomorfo a  $D_{3,2}$ .*

Así, de la unión del teorema 21, junto con el teorema anterior, se obtienen los siguiente resultados.

**Teorema 30** (Volkman [13]). *Sea  $D$  un torneo  $k$ -partito regular. Si  $k = 2$  y  $|V(D)| \geq 8$  o  $k = 3$  y  $|V(D)| \geq 6$ , entonces  $D$  tiene dos ciclos complementarios, a menos que  $D$  sea isomorfo a  $P_7$  o a  $D_{3,2}$ .*

**Corolario 31** (Volkman [13]). *Todo torneo  $k$ -partito regular  $D$  de orden  $|V(D)| \geq 8$  tiene dos ciclos complementarios.*



# Conclusión

El problema de determinar las condiciones para que un torneo  $T$  tenga un  $(p, |V(T)| - p)$ -factor,  $p \geq 3$ , queda resuelto. El mismo problema solo se ha logrado extender hasta un  $(6, |V(T)| - 6)$ -factor en el caso de torneo bipartitos. La prueba para un  $(p, |V(T)| - p)$ -factor,  $p \geq 2k$  con  $k > 3$ , queda pendiente su publicación completa. El último adelanto sobre la prueba de esta conjetura 22 es de noviembre del 2017<sup>1</sup>. Por otro lado, en el artículo original de Song, Zhang y Manoussakis [14] se propusieron las siguientes dos conjeturas. La primera de ellas fija una flecha del torneo.

**Conjetura 32** (Manoussakis, Song y Zhang [14]). *Sea  $B$  un torneo bipartito  $k$ -regular,  $k \geq 2$ . Sea  $(u, v) \in A(B)$  fijo. Si  $B$  no es isomorfa a  $F_{4k}$  ni a otra familia de digráficas específicas, entonces para todo  $p$  par con  $4 \geq p \geq |V(B)| - 4$ ,  $B$  tiene un ciclo  $C$  de longitud  $p$  tal que  $D - C$  es hamiltoniano con  $(u, v)$  una flecha de  $C$ .*

Mientras que la segunda conjetura añade la hipótesis de fijar ciertos vértices.

**Conjetura 33** (Manoussakis, Song y Zhang [14]). *Sea  $D$  un torneo bipartito  $k$ -regular,  $k \geq 2$ . Sean  $u, v \in V(D)$  fijos. Si  $D$  no es isomorfa a  $F_{4k}$  ni a otra familia de digráficas específicas, entonces para todo  $p$  par con  $4 \geq p \geq |V(B)| - 4$ ,  $B$  tiene un ciclo  $C$  de longitud  $p$  tal que  $D - C$  es hamiltoniano y tales que  $u \in V(C)$  y  $v \in V(D - C)$ .*

Como podemos ver, estas últimas dos conjeturas son más fuertes que la conjetura 22. Además, estas últimas dos no se implican una a la otra.

Por último, en el caso de torneos  $k$ -partitos, basta que estos sean regulares y de orden mayor o igual que 8 para asegurar que tienen dos ciclos complementarios. En trabajos posteriores, se pueden extender los resultados sobre  $(p, |T| - p)$ -factores para cualquier  $p$  a este tipo de torneos, que por el momento tampoco se ha probado.

---

<sup>1</sup><http://www.lirmm.fr/~thiebaut/data/slides/jga17.pdf>



# Apéndices



## Apéndice A

# Uso de herramientas computacionales

Para encontrar la cantidad de torneos bipartitos no isomorfos de orden  $k$  utilizamos el programa *genbg* el cual pertenece al paquete *nauty and Traces*. Este programa puede ser descargado en la siguiente dirección:

```
https://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/nauty/
```

El programa encuentra todas las gráficas con características específicas. En el caso particular de  $k = 2$  utilizamos el siguiente código:

```
./genbg 4 4 -d2 -D2 -c -g
```

Los números 4 4 representan la cantidad de vértices en cada parte, mientras que los comandos `-d2` y `-D2` especifican el ingrado mínimo y el exgrado máximo de la gráfica respectivamente. Como se buscaba una gráfica 2-regular, ambos valores son iguales. Por último, el comando `-c` sirve para buscar únicamente gráficas conexas. Arrojando el siguiente resultado:

```
>A ./genbg n=4+4 e=8:8 d=2:2 D=2:2 c  
G?otA_
```

El cual está dado en un formato conocido como graph6 <sup>1</sup> el cual puede ser interpretado por *Sagemath* para obtener la imagen de la gráfica. Utilizamos el siguiente código:

```
G = Graph("G?otA_"); G.show()
```

Obteniendo así la gráfica de la figura A.1.

Para encontrar el número de torneos bipartitos 3-regulares no isomorfos, utilizamos el siguiente código:

---

<sup>1</sup><http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/formats.html>  
<https://reference.wolfram.com/language/ref/format/Graph6.html>



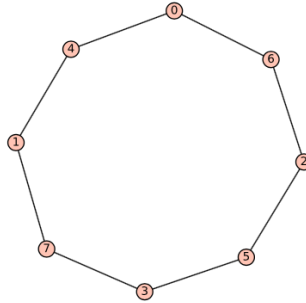


Figura A.1:

```
./genbg 6 6 -d3 -D3 -c -u
```

Donde el comando `-u` solo genera y cuenta el número de gráficas no isomorfas sin arrojar ningún resultado más que la cantidad de estas. Obtenemos así el siguiente resultado:

```
>A ./genbg n=6+6 e=18:18 d=3:3 D=3:3 c
>Z 6 graphs generated in 0.00 sec
```

Análogamente para los casos  $k = 4$ :

```
./genbg 8 8 -d4 -D4 -c -u
```

```
>A ./genbg n=8+8 e=32:32 d=4:4 D=4:4 c
>Z 193 graphs generated in 0.03 sec
```

y  $k = 5$ :

```
./genbg 10 10 -d5 -D5 -c -u
```

```
>A ./genbg n=10+10 e=50:50 d=5:5 D=5:5 c
>Z 601054 graphs generated in 223.22 sec
```

En el caso  $k = 6$ , el programa permaneció más de tres horas contando sin arrojar ningún resultado. Por lo que se detuvo su ejecución.

Para encontrar a  $P_7$  utilizamos el programa *gentourng* el cual también pertenece al paquete de *nauty and Traces*. Este programa genera todos los torneos con características determinadas. Así, empezamos generando torneos fuertemente conexos de orden 7 con el siguiente código:

```
./gentourng 7 -c -z
```

el 7 representa el número de vértices, `-c` es el comando que busca solamente torneos fuertemente conexos y `-z` arroja los resultados en formato `digraph6`<sup>2</sup>,

<sup>2</sup>véase el pie de página sobre `graph6`

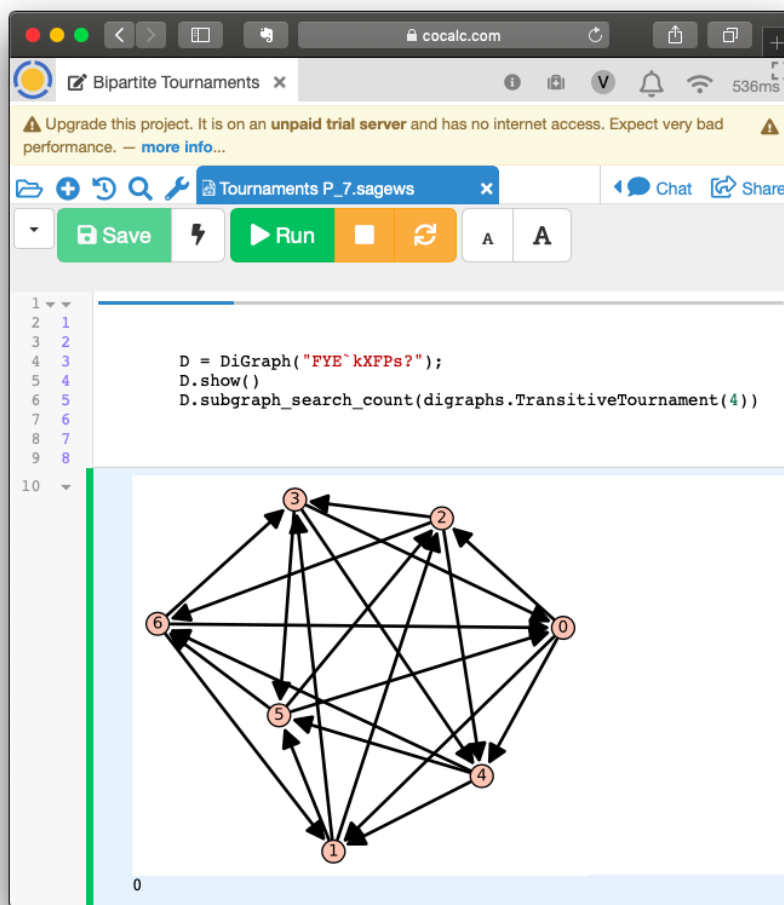


Figura A.2: Captura de pantalla que muestra la manera en que se obtuvo a  $P_7$  usando *SageMath*

el cual puede ser interpretado por *Sagemath* para ser evaluado. Así, evaluamos cada uno de estos torneos en *Sagemath* hasta encontrar uno que satisfaga con los requisitos para ser  $P_7$ ; es decir, un torneo 7-regular que no contiene como subdigráfica a ningún torneo transitivo de orden 4. Para lo anterior usamos el siguiente código en *Sagemath*:

```
D = DiGraph("FYE'kXFPs?");
D.show()
D.subgraph_search_count(digraphs.TransitiveTournament(4))
```

La primera línea especifica la digráfica  $D$  que va a ser evaluada. La segunda línea grafica esta digráfica. Mientras que la tercera línea cuenta cuantas veces aparece el torneo transitivo de orden cuatro como subdigráfica de  $D$ . Así, paramos una vez que este número sea 0. Este código corresponde a la digráfica  $P_7$  que estábamos buscando (figura A.2).

# Bibliografía

- [1] Y. Bai, H. Li, W. He. Complementary cycles in regular bipartite tournaments. *Discrete Mathematics* **133** (2014) 14-27. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.06.008>
- [2] J. Bang-Jensen y G. Z. Gutin. Digraphs. Theory, Algorithms and Applications. Second edition. Springer. (2010) <https://doi.org/10.1007/978-1-84800-998-1>
- [3] S. Bessy y J. Thiebaut. Complementary cycles in regular bipartite tournaments: a proof of Manoussakis, Song, Zhang Conjecture. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **61** (2017) 115-121. <https://doi.org/10.1016/j.endm.2017.06.028>
- [4] P. Camion. Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *C. R. Acad. Sci. Paris* **249** (1959) 2151-2152.
- [5] G. Gutin. A criterion for complete bipartite digraphs to be Hamiltonian. *Vestsi Acad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk* **1** (1984) 99-100.
- [6] R. Häggkvist y Y. Manoussakis. Cycles in bipartite tournaments with spanning configurations. *Combinatorica* **9** (1989) 33-38. <https://doi.org/10.1007/BF02122681>
- [7] P. Hall. On representation of subsets. *J. London Math. Soc.* **10** (1935) 26-30. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-10.37.26>
- [8] H. Li y J. Shu. The partition of a strong tournament. *Discrete Mathematics* **290** (2005) 211-220. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.10.011>
- [9] B. D. McKay y A. Piperno. Practical Graph Isomorphism, II. *J. Symbolic Computation* **60** (2013) 94-112. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2013.09.003>
- [10] J. W. Moon. On subtournaments of a tournament. *Can. Math. Bull.* **9** (1966) 297-301. <https://doi.org/10.4153/CMB-1966-038-7>
- [11] B. R. Alspach y C. D. Godsil. Cycles in Graphs. En K. B. Reid. Two Complementary Circuits in Two-Connected Tournaments *North-Holland Mathematics Studies* **115** (1985) 321-334.

- 
- [12] Z. M. Song. Complementary Cycles of All Lengths in Tournaments. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **57** (1993) 18-25. <https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1002>
- [13] L. Volkmann. All regular multipartite tournaments that are cycle complementary. *Discrete Mathematics* **281** (2004) 255–266. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.09.012>
- [14] K. M. Zhang, Y. Manoussakis, Z.M. Song. Complementary cycles containing a fixed arc in diregular bipartite tournaments. *Discrete Mathematics* **133** (1994) 325-328. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(94\)90042-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)90042-6)