UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Conjuntos absorbentes en digráficas finitas e infinitas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Alberto Rincón Galeana

TUTORA

Dra. Loiret Alejandría Dosal Trujillo

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. 2019

Dedicatoria.

A mi mamá, mi papá y mi hermano, es un orgullo y una rareza que tu familia pueda efectivamente leer y comprender el total del contenido de tu tésis.

≪ ¿Con qué he de irme?
¿Nada dejaré en pos de mi sobre la tierra?
¿Cómo ha de actuar mi corazón?
¿Acaso en vano venimos a vivir,
a brotar sobre la tierra?
Dejemos al menos flores,
Dejemos al menos cantos≫

Nezahualcóyotl

≪ Entre cualquier número natural mayor que uno y el doble de este, existe al menos un número primo.≫

Pafnuty Chebyshev.

8								
		3	**6**					
	7			**9**		**2**		
	5				**7**			
				4	**5**	**7**		
			1				**3**	
		1					**6**	**8**
		8	**5**				**1**	
	9					**4**		

Agradecimientos.

A mi mamá por querernos a mi y a mi hermano Hugo de una manera completamente abnegada, tanto así que me da la impresión de que nunca piensa en ella misma, durante 29 años nos ha procurado lo mejor que sus posibilidades en todos los sentidos le han permitido y varias veces se ha quitado el pan de la boca para dárnoslo. El área de este trabajo es debido a la inspiración que encuentro en su amor por su trabajo y es por lo mismo que he podido enfocar mis estudios a la teoría de las gráficas y las digráficas. Es por esto también que pude cómodamente realizar mi servicio social y haber sido ayudante de profesor de asignatura en más de 10 cursos a la fecha. ¿Puede el afecto alguna vez ser tanto que sea 'demasiado'? Mi mamá me ha querido tanto que no podría responder. Herrera, en tu casa hay un azadón de hierro.

A mi papá por el sustento, por haberme enseñado entre una cantidad incontable cosas, álgebra lineal y álgebra moderna, por habernos proporcionado a través de esta larga trayectoria toda una biblioteca de libros que durante toda mi formación he ocupado, ocupo y seguiré ocupando. Un resultado de esta generosidad y cariño es que yo nunca ocupé ningún libro de la biblioteca de la facultad de ciencias ni de ninguna otra virtual o de cualquier otra índole a pesar de que mis apuntes nunca fueron buenos. Compañero de 10,000 batallas, me llena de orgullo que seas algebrista.

A Hugo por ser como un mejor amigo de tiempo completo, por haberme apoyado a más no poder en cálculo 4. Hemos sido compañeros en varios cursos y siempre recordaré con mucho cariño las ocasiones en que nos poníamos de acuerdo y nos íbamos de pinta a almorzar hamburguesas o jugar videojuegos '¡vamos a vencer vaguitos!'. En ocasiones en que mi estado de ánimo se ha encontrado por los suelos siempre pude contar con su invaluable tiempo y compañía. Que te lleven a comer algo delicioso a algún lugar que no conocías es un verdadero consuelo para un alma atormentada. Escudero, soy tu escudero y por lejos que te encuentres sé que siempre te acordarás de mí como lo has demostrado en numerosas ocasiones.

A César Alejandro porque cuando fuimos sus alumnos nos enseñó a jugar al bridge con toda la paciencia que puede pedirse para aprender tan bello pero difícil juego, por haber confiado en mí y permitirme ser su ayudante en sus últimos cursos de la facultad. Su confianza en mí es tal que estoy seguro que seguiría yo siendo su ayudante si él siguiera dando clases. Trabajar en conjunto con una leyenda me enalteció y me honró.

A Alejandría por su paciencia infinita, por haberme apoyado con geometría moderna tan desinteresadamente, por haberme tenido como su ayudante cuando más lo he necesitado, por su influencia en varios gustos que tengo y también por haber dirigido la realización de este trabajo.

A Lilia por haber compartido conmigo dos años intensos, llenos de emociones y sentimientos, durante mi primer amor conocí el taller de matemáticas y fui introducido a la historia de las matemáticas donde encontré estudios fascinantes sobre la geometría que desarrollaban los antiguos

griegos. Eventualmente cuando mis ocupaciones me lo permitan, me encantaría profundizar en este tema. Gracias también por haberme apoyado tanto en variable compleja y análisis 2 y por los libros y tareas que me compartió, sin su ayuda me habría tomado mínimamente un semestre más en acabar los créditos. Me ha inspirado a superarme en diversas ocasiones en que he querido impresionarla y aunque no me queda claro si logré mi objetivo sí me queda claro que me superé. La solución del sudoku que aparece a continuación es un ejemplo. Tu humilde caricia es como el cariño primero y querido que nunca olvidé.

A Julio César por haber sido un amigo incondicional al que conocí en la carrera, aprendimos juntos cálculo 1 y en cálculo 2 con el mismo maestro fuimos rebasados, si esto se sintió frustrante sin él como compañero lo hubiera sido incomparablemente más. Durante gran parte de mi carrera fue el único y verdadero amigo que tuve. Aunque alguna vez leí que las amistades que se encuentran en el bachillerato son las más duraderas durante la vida, a Julio lo pude haber conocido en la preparatoria y aunque no fue así, la perpetuidad de su valiosa amistad me resulta evidente.

A mi tía María de Lourdes y su familia por tenernos siempre presentes y compartir las celebraciones. Invariablemente es una de las personas que nunca se olvida de mi cumpleaños y nunca se olvidará, para mí este es un detalle de trascendental importancia.

A los doctores Gerardo Heinze y Julio Velázquez. Gerardo me rescató en la carrera de una depresión que comenzaba a hacer estragos en mi desempeño. Gracias a su ayuda ha sido posible el resto de mi carrera y muchas notables mejorías en mi personalidad. A Julio siempre le ha preocupado mi bienestar emocional de una manera desinteresada y aprecio mucho la gran confianza mútua. Su contacto me hace percibir distintas perspectivas de vida, comprender y ser más humano.

A Miguel Ángel Córdoba y César Jullien López por haber sido los mejores ayudantes con quienes tomé clases, Miguel Ángel en teoría de números 1 y 2 y César en introducción a la topología. Ayudantes como estos enseñan y dan más que los mismos profesores de quienes son ayudantes.

A Laura Pastrana por ser una buena amiga y amiga de mi familia.

A Rocío Sánchez por haberme tenido de su ayudante y por ser una buena amiga.

A Julieta y Vince por su valiosa compañía, porque compartimos gustos en ciertos géneros de cine y porque cuando convivimos siento que hay alguien por quien puedo hacer algo.

A Melissa Romero por compartirme su amplia guía de estudio con numerosos ejercicios resueltos por ella para el examen de admisión a la maestría en matemáticas.

A mis sinodales Mucuy, Narda, Norma, Germán por haberse tomado la molestia de revisar a consciencia este trabajo y por sus valiosas aportaciones. Narda y todos fueron muy profesionales en su revisión.

A Leonardo Espinosa por su apoyo en una parte de la tipografía de este trabajo.

Introducción.

En el presente trabajo, se exponen los resultados más relevantes sobre la existencia de conjuntos absorbentes en digráficas finitas e infinitas. En la parte final de este trabajo se enuncian y demuestran dos resultados originales sobre la existencia de conjuntos absorbentes en digráficas semicompletas, obteniendo con ellos una generalización de un resultado clásico de Pierre Duchet demostrado en 1981 que afirma que toda digráfica semicompleta en la que cada ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica posee un vértice que absorbe a todos los demás.

Índice general

1. Conceptos y resultados preliminares

En este capítulo, se presentarán las definiciones básicas de Teoría de Gráficas que se utilizarán en el siguiente capítulo y los resultados preliminares para poder abordar los resultados principales que aparecerán en el siguiente capítulo.

1.1. Definiciones básicas.

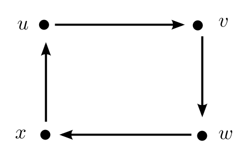
Definición 1.1. Una **digráfica** D consiste en un conjunto no vacío llamado el conjunto de vértices, denotado por $V(D)$, y un conjunto $F(D)$ de parejas ordenadas (u, v) de vértices distintos, a los que llamaremos flechas. Si el conjunto de vértices de la digráfica es finito, decimos que la digráfica es **finita**; en otro caso, decimos que D es una digráfica **infinita**.

Digráficas Finitas

D_1:

$V(D_1) = \{u, v, w, x\}$

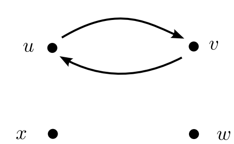
$F(D_1) = \{(u, v), (v, w), (w, x), (x, u)\}$



D_2:

$V(D_2) = \{u, v, w, x\}$

$F(D_2) = \{(u, v), (v, w)\}$

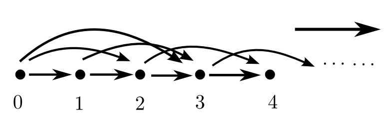


Digráficas Infinitas

D_1:

$V(D_1) = \mathbf{N} \cup \{0\}$

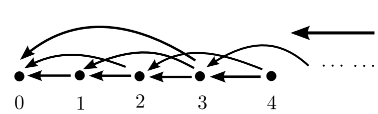
$F(D_1) = \{(i, j) \mid i < j\}$



D_2:

$V(D_2) = \mathbf{N} \cup \{0\}$

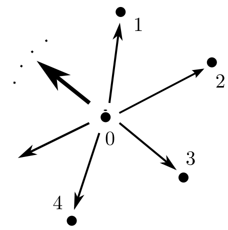
$F(D_2) = \{(i, j) \mid i > j\}$



D_3:

$V(D_3) = \mathbf{N} \cup \{0\}$

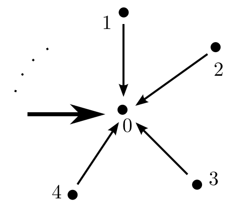
$F(D_3) = \{(0,i) \mid i \in \mathbf{N}\}$



D_4:

$V(D_4) = \mathbf{N} \cup \{0\}$

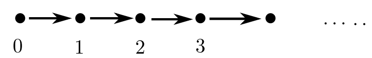
$F(D_4) = \{(i,0) \mid i \in \mathbf{N}\}$



D_5:

$V(D_5) = \mathbf{N} \cup \{0\}$

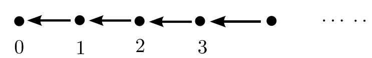
$F(D_5) = \{(i,i+1) \mid i \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$



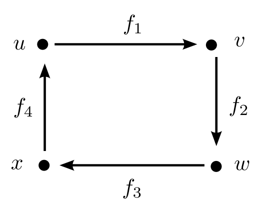
D_6:

$V(D_6) = \mathbf{N} \cup \{0\}$

$F(D_6) = \{(i+1,i) \mid i \in \mathbf{N}\}$



Definición 1.2. Si f es una flecha de D y $f = (u,v)$ con u y v vértices de D decimos que u y v son los **extremos** de f; donde u es el **extremo inicial** de f y v el **extremo final**. También decimos que f se dirige de u a v y que u es adyacente hacia v y v es adyacente desde u.



$$f_1 = (u,v) = \begin{array}{ll} u & \text{es el extremo inicial de } f_1 \\ v & \text{es el extremo final de } f_1 \end{array}$$

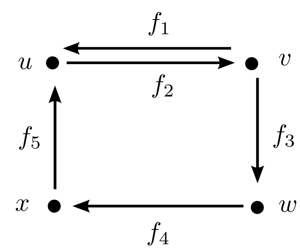
u es adyacente hacia v

$$f_3 = (w,x) = \begin{array}{ll} w & \text{es el extremo inicial de } f_3 \\ x & \text{es el extremo final de } f_3 \end{array}$$

x es adyacente desde v

Definición 1.3. Si D es una digráfica y $f = (u,v)$ es una flecha de D, decimos que f es una flecha **simétrica** si (v,u) también es una flecha de D.

D:

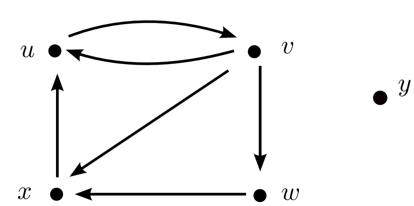


f_1 es una flecha simétrica de D

f_2 es una flecha simétrica de D

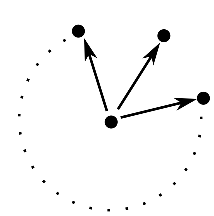
Definición 1.4. Dada una digráfica D y v un vértice de D, definimos el **exgrado** o **grado exterior** de v en D como el número de flechas de D que tienen a v como extremo inicial. Denotamos por $g_D^+(v)$ al exgrado de v en la digráfica D, en el caso en que sólo trabajemos con una digráfica, podemos omitir el subíndice en la notación.

D_1:



$$\begin{array}{lll} g^+(u) = 1, & g^-(u) = 2, & g(u) = 3 \\ g^+(v) = 3, & g^-(v) = 1, & g(v) = 4 \\ g^+(w) = 1, & g^-(w) = 1, & g(w) = 2 \\ g^+(x) = 1, & g^-(x) = 2, & g(x) = 3 \\ g^+(y) = 0, & g^-(y) = 0, & g(y) = 0 \end{array}$$

D_2:



$$g^+(0) = \aleph_0 \qquad g^-(0) = 0.$$

$$g^+(i) = 0 \quad \forall\, i \in \mathbf{N}\,.$$
$$g^-(i) = 1 \quad \forall\, i \in \mathbf{N}\,.$$

Definición 1.5. Dada una digráfica D y v un vértice de D, definimos el **ingrado** o **grado interior**

de v en D como el número de flechas de D que tienen a v como extremo final. Denotamos por $g_D^-(v)$ al ingrado de v en la digráfica D.

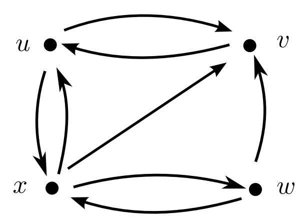
En el caso en que sólo trabajemos con una digráfica, podemos omitir el subíndice en la notación.

Definición 1.6. En una digráfica D, decimos que el **grado total** de un vértice v es igual a la suma de su exgrado y su ingrado y es denotado por $g_D(v)$.

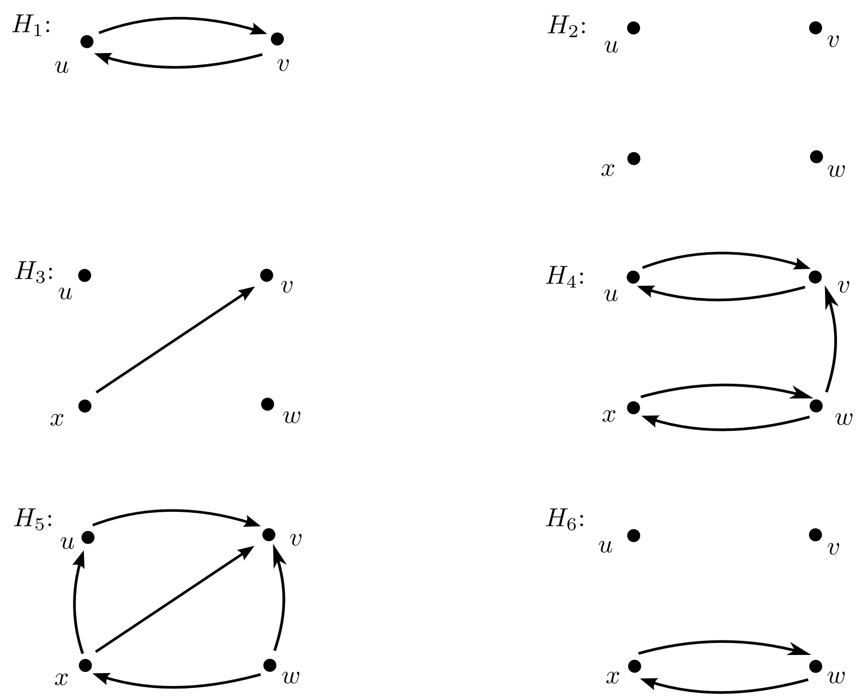
Para algunos resultados de la tesis, será útil analizar las subdigráficas de una digráfica D, es por eso que es necesario definir lo que es una subdigráfica y los diferentes tipos de subdigráficas.

Definición 1.7. Una **subdigráfica** H de una digráfica D es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $F(H) \subseteq F(D)$. Decimos que H es una **subdigráfica propia** si $V(H) \subsetneq V(D)$ o $F(H) \subsetneq F(D)$.

D_1:

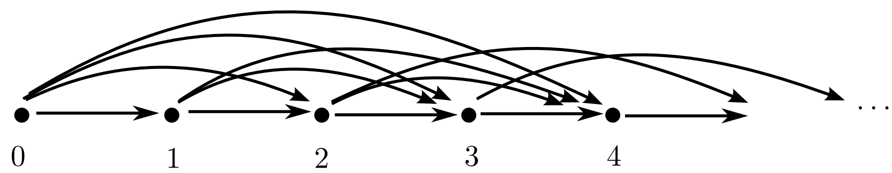


Algunas subdigráficas de D_1



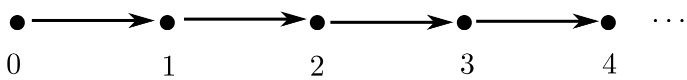
Definición 1.8. Una subdigráfica H de una digráfica D es una **subdigráfica generadora** de D si $V(H) = V(D)$

D_2:

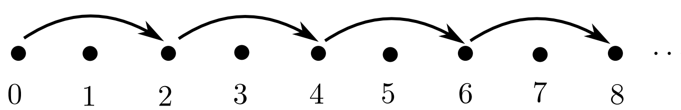


Algunas subdigráficas de D_2

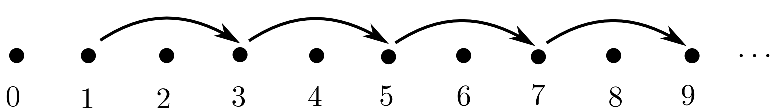
F_1:



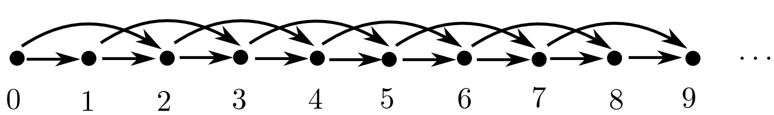
F_2:



F_3:

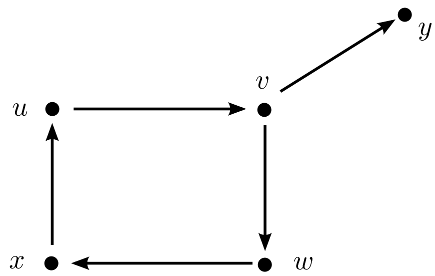


F_4:

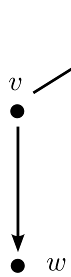


Definición 1.9. Sea D una digráfica, si $B \subseteq F(D)$, definimos la subdigráfica de D **inducida** por B y denotada por $D\langle B\rangle$ como la digráfica que tiene como conjunto de vértices a los extremos de las flechas en B y a B como conjunto de flechas.

D_1:

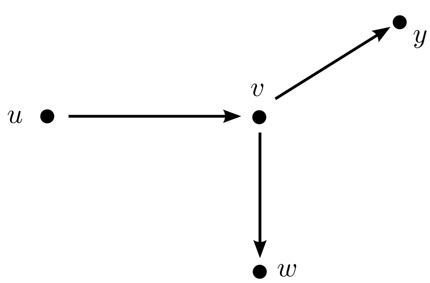


H_1: Subdigráfica de D_1 inducida por $\{w, v, y\}$



H_2: Subdigráfica de D_1 inducida por $\{u, w\}$

H_3: Subdigráfica de D_1 inducida por $\{u, w, v, y\}$



D_2:

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \quad \cdots\cdots$

H_1: Subdigráficas de D_1 inducida por $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$

$n \to n+1 \to n+2 \to n+3 \to n+4 \quad \cdots$

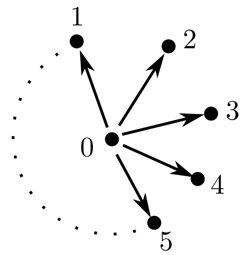
H_2: Subdigráficas de D_1 inducida por $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$

$0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \cdots$

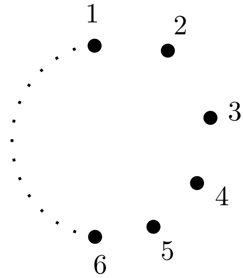
H_3: Subdigráficas de D_1 inducida por $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \quad \cdots \quad n-1 \to n$

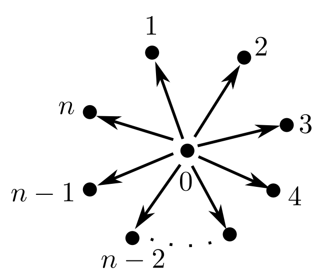
D_3:



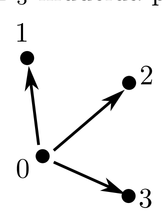
Subdigráfica de D_3 inducida por $\mathbf{N}$



Subdigráfica de D_3 inducida por $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$



Subdigráfica de D_3 inducida por $\{0, 1, 2, 3\}$



Definición 1.10. Sea D una digráfica, si $U \subseteq V(D)$, definimos la subgráfica de D **inducida** por U como la digráfica que tiene a U como conjunto de vértices y como conjunto de flechas a todas las flechas de D que tienen ambos extremos en U. Denotamos a la subdigráfica de D inducida por U como $D[U]$.

En capítulos posteriores, llamaremos subdigráficas inducidas exclusivamente a las digráficas inducidas por un conjunto de vértices.

Definición 1.11. Un **camino** en una digráfica D es una sucesión de vértices $W = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ tal que para cada $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ se tiene $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ o $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$. En este caso, decimos que u_1 y u_n son los **extremos** del camino y que el camino W es un u_1u_n**-camino** de la digráfica.

Definición 1.12. Dada una digráfica D y $C = (u_0, u_1, u_2, \ldots u_n)$ un camino en D, decimos que n es la **longitud** de C y la denotamos por $\ell(C)$.

Definición 1.13. Un **camino cerrado** en una digráfica es un camino $(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ tal que $u_1 = u_n$.

Un **camino abierto** en una digráfica es un camino $(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ tal que $u_1 \neq u_n$.

Definición 1.14. Una **trayectoria** en una digráfica es un camino $(u_1, u_2, u_3, \ldots u_n)$ tal que $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$.

Definición 1.15. Un **ciclo** en una digráfica es un camino cerrado $(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_1)$ tal que $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$ y $n \geq 2$.

Definición 1.16. Un **camino dirigido** en una digráfica es un camino $(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ tal que para cada $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ se tiene $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$.

Definición 1.17. Un **camino dirigido cerrado** en una digráfica es un camino dirigido que además es un camino cerrado.

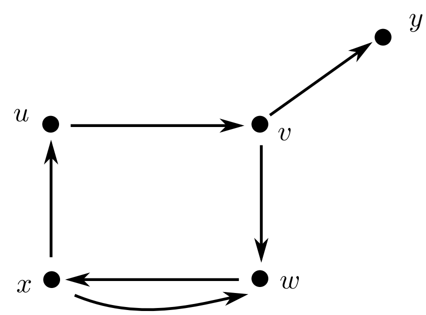
Análogamente, un **camino dirigido abierto** es un camino dirigido que además es un camino abierto.

Definición 1.18. Una **trayectoria dirigida** en una digráfica es un camino dirigido que además es una trayectoria.

Definición 1.19. En una digráfica D, decimos que un vértice u **alcanza** a otro vértice v si en la digráfica existe una uv-trayectoria dirigia

Definición 1.20. Un **ciclo dirigido** en una digráfica es un camino cerrado dirigido que además es un ciclo.

Sea D_1:



$C_1 = (y, v, u, v, y, v, u, x, u)$ es un camino en D_1

$C_2 = (u, v, y)$ es un camino dirigido en D_1

$C_3 = (u, x, w, v, u)$ es un camino cerrado en D_1

$C_4 = (u, v, w, x, u)$ es un camino dirigido cerrado en D_1

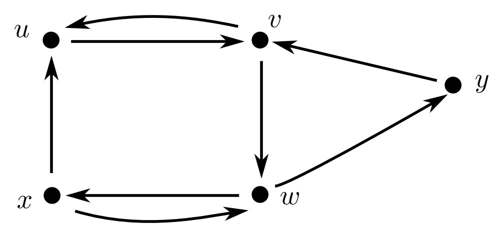
$T_1 = (u, x, w, v, y)$ es una trayectoria en D_1

$T_2 = (u, v, y)$ es una trayectoria dirigida en D_1

$C_5 = (u, x, w, v, u)$ es un cíclo en D_1

$C_6 = (u, v, w, x, u)$ es un cíclo dirigido en D_1

D_2:



$C_1 = (u, x, w, y, w, v)$ es un camino en D_2

$C_2 = (u, v, x, w, y, v, w, x)$ es un camino dirigido en D_2

$C_3 = (u, x, w, v, u)$ es un camino cerrado en D_2

$C_4 = (u, w, y, v, w, y, v, u)$ es un camino dirigido cerrado en D_2

$T_1 = (v, w, x, u)$ es una trayectoria en D_2

$T_2 = (u, x, w, y, v)$ es una trayectoria dirigida en D_2

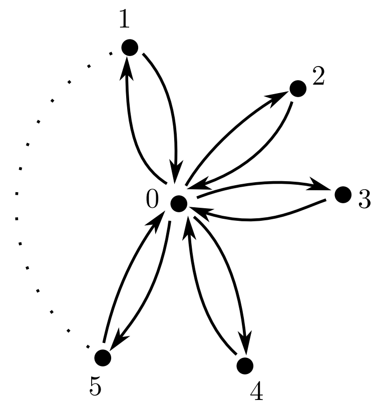
$C_5 = (u, v, w, x, u)$ es un cíclo en D_2

$C_6 = (u, x, w, y, v, u)$ es un cíclo dirigido en D_2

Sea D definida como sigue :

$V(D) = \{0\} \cup \mathbf{N}$

$F(D) = \{(0,i),(i,0) \mid i \in \mathbf{N}\}$



$C_1 = (0,1,0,2,0,3,0,2,0,1,0)$ es un camino en D

$C_2 = (0,1,0,2,0,3,0,4,0,5)$ es un camino dirigido en D

$C_3 = (0,5,0,4,0,3,0,2,0,1,0)$ es un camino cerrado en D

$C_1 = (0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,0)$ es un camino dirigido cerrado en D

$T_1 = (2,0,1)$ es una trayectoria en D

$T_2 = (1,0,2)$ es una trayectoria dirigida en D

$C_1 = (0,1,0)$ es un cíclo en D

$C_2 = (0,1,0)$ es un cíclo dirigido en D

Denotamos por C_n al ciclo dirigido que consta de n vértices.

Definición 1.21. Una digráfica D, se dice que es **débilmente conexa** si para cualquier par de vértices u, v existe un uv-camino en D.

Definición 1.22. Se dice que una digráfica D es **fuertemente conexa** si para cualquier par de vértices u, v existen uv y vu caminos dirigidos en D.

Definición 1.23. Sea D una digráfica, la flecha $(u,v) \in F(D)$ se dice que es simétrica si $(v,u) \in F(D)$ y asimétrica si $(v,u) \notin F(D)$. La parte asimétrica de D, denotada por $Asym(D)$ es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas de D.

2. Relaciones de equivalencia y órdenes

En este capítulo presentaremos la definición de una relación binaria, así como algunas definiciones y teoremas sobre relaciones de equivalencia. Además, como trabajeremos con digráficas infinitas, veremos lo que es un conjunto parcialmente ordenado junto con algunos conceptos necesarios para enunciar el Lema de Zorn.

Definición 2.1. Dado un conjunto A, un conjunto R es una **relación binaria** en A si los elementos de R son pares ordenados de elementos de A, es decir, si para cualquier $z \in R$, existen a y b elementos de A tales que $z = (a,b)$.

Se acostumbra escribir aRb en lugar de $(a,b) \in R$. Decimos que a está en la relación R con b si se cumple que aRb.

Definición 2.2. Una relación binaria R en A es **reflexiva** si para todo $a \in A$, aRa.

Definición 2.3. Una relación binaria en A es **simétrica** si para cualesquiera $a,b \in A$, cada vez que aRb, bRa.

Definición 2.4. Una relación binaria R en A es **transitiva** si para cualesquiera $a,b,c \in A$, cada vez que aRb y bRc entonces aRc.

Definición 2.5. Una relación binaria R en A es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 2.6. Dado un número natural n, la congruencia módulo n es una relación de equivalencia.

Ejemplo 2.7. En una digráfica D, se puede definir una relación de equivalencia en su conjunto de vértices como las parejas de vértices (u,v) para las que existe tanto un $u-v$ camino dirigido como un $v-u$ camino dirigido.

Definición 2.8. Sea R una relación de equivalencia en A y sea $a \in A$. La **clase de equivalencia módulo** E es el conjunto

$$[a]_R = \{x \in A | xRa\}$$

y si aRb, decimos que a es **equivalente** a b módulo R.

Obsérvese que en vista de la reflexividad, dado $a \in A$ y R una relación de equivalencia en A, $[a]_R \neq \emptyset$.

Definición 2.9. Una familia $\mathscr{F} = \{B | B \subseteq A\}$ de conjuntos es llamada una **partición** de A si:

I Cada elemento de $\mathscr{F}$ es no vacío; es decir, $\forall B \in \mathscr{F}, B \neq \emptyset$.

II Cualesquiera dos elementos distintos de $\mathscr{F}$ son ajenos dos a dos; es decir, $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{F}, B_1 \neq B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

III La unión de todos los elementos de $\mathscr{F}$ es $\mathscr{F}$; es decir,

$$\bigcup_{B \in \mathscr{F}} B = A$$

Notación. Sea R una relación de equivalencia en A. El conjunto de las clases de equivalencia de A módulo R se denota por A/R; es decir,

$$A/R = \{[a]_R | a \in A\}.$$

Proposición 2.10. *Sean a y $b \in A$ y R una relación de equivalencia en A, a es equivalente a b si y sólo si $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos primero que $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Sea $x \in [a]_R \cap [b]_R$. Como R es de equivalencia, tenemos aRx y xRb y por transitividad de R, aRb. Lo que significa que a es equivalente a b módulo R.

Recíprocamente, supongamos que a es equivalente a b módulo R. Por lo tanto, $a \in [b]_R$ y como evidentemente, $a \in [a]_R$, se sigue que $a \in [a]_R \cap [b]_R$ y por lo tanto, $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$. □

Lema 2.11. *Sean a y $b \in A$ y R una relación de equivalencia en A, a es equivalente a b si y sólo si $[a]_R = [b]_R$*

Demostración. Sea $x \in [a]_R$. Entonces por definición, xRa; además como a es equivalente a b módulo R, se tiene aRb, por lo tanto, por la transitividad de R, se sigue que xRb, es decir, $x \in [b]_R$, lo que demuestra que $[a]_R \subseteq [b]_R$.

Ahora, sea $y \in [b]_R$; entonces yRb y como a es equivalente a b (y por lo tanto b es equivalente a a), se tiene bRa; por lo tanto yRa, lo que demuestra que $[b]_R \subseteq [a]_R$ y por doble contención, se concluye que $[a]_R = [b]_R$. □

Teorema 2.12. *Sea R una relación de equivalencia en A; entonces A/R es una partición de A.*

Demostración. Primero, A/R es una colección de conjuntos no vacíos ya que $A \neq \emptyset$. Por lema 2.11, se tiene que si $[a]_R \neq [b]_R$, entonces a no es equivalente a b módulo R, y por , se tiene $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$, de esta manera, se cumple que la intersección de las partes es ajena.

Ahora, para demostrar que la unión de las partes es el total, tómese $a \in A$. Evidentemente, $a \in [a]_R \subseteq \cup(A/R)$; de esta manera, $a \in \cup(A/R)$, y por lo tanto, $A \subseteq \cup(A/R)$.

Ahora, evidentemente $[a]_R \subseteq A$ para cada $a \in A$ y por lo tanto $\cup(A/R) = \cup[a]_R \subseteq A$; de donde $A = \cup(A/R)$. Por doble contención, se concluye que A/R es una partición de A. □

Definición 2.13. Sea P una partición de A. Se define la relación R_P en A como $R_P = \{(a,b) \in A \times A|$ existe $C \in P$ tal que $a \in C$ y $b \in C\}$

Teorema 2.14. *Sea P una partición de A. Entonces*

I *R_P es una relación de equivalencia en A.*

II *Si S es una relación de equivalencia en A, y $R = A/S$, entonces $S_P = R$.*

III *Si P es una partición de A y R_P es la correspondiente relación de equivalencia, entonces $A/R_P = P$*

Demostración. (i) Veamos que la relación R_P es una relación de equivalencia en A.

Primero, R_P es reflexiva en A porque como P es una partición en A, entonces para $a \in A$ existe $C \in P$ tal que $a \in C$ y por lo tanto, $(a,a) \in R_P$.

Para ver que es simétrica, sean $a,b \in A$ tales que $(a,b) \in R_P$. Entonces existe $C \in S$ tal que $a \in C$ y $b \in C$ y de esta manera, $b \in C$ y $a \in C$, y por lo tanto, $(b,a) \in R_P$.

Para la transitividad, sean $a,b,c \in A$ tales que $(a,b) \in R_P$ y $(b,c) \in R_P$. Como $(a,b) \in R_P$, existe $C \in P$ tal que $a \in C$ y $b \in C$, y como $(b,c) \in R_P$, existe $M \in P$ tal que $b \in M$ y $c \in M$, pero entonces, $b \in C$ y $b \in M$, con lo cual se tiene que $C \cap M \neq \emptyset$, pero como P es una partición de A, entonces $C = M$ y así existe $C \in S$ tal que $a,c \in C$ de donde $(a,c) \in R_P$.

Por lo tanto, podemos concluir que R_P es una relación de equivalencia.

(ii) Probaremos que si R es una relación de equivalencia en A y $P = A/R$, entonces $R_P = R$. Probaremos la igualdad por doble contención:

Primero, sea $(a,b) \in R_P$; como $P = A/R$, existe $[c]_R \in A/R$ tal que $a \in [c]_R$ y $b \in [c]_R$ y con esto, tenemos que aRc y bRc y así, por ser R una relación de equivalencia, se tiene que $(a,b) \in R$.

Ahora, para la otra contención, tómese $(a,b) \in R$; entonces aRb y así $a \in [b]_R$ y $b \in [b]_R$ por lo que $(a,b) \in R_P$, de donde se concluye que $R_P = R$.

(iii) Probaremos que si P es una partición de A y R_P es la correspondiente relación de equivalencia, entonces $A/R_P = P$. De nuevo, procede por doble contención:

Para ver que $A/R_P \subseteq P$, tómese $[a]_{R_P} \in A/R_P$, donde $[a]_{R_P} = \{x \in a | xR_Pa\}$, entonces para todo $x \in [a]_{R_P}$, existe $C \in S$ tal que $x \in C$ y $a \in C$, es decir, $[a]_{R_P} \subseteq C$. Sólo falta mostrar que $C \subseteq [a]_{R_P}$:

Sea $x \in C$, como $a \in C$ y $C \in P$, entonces xR_Pa por lo que $x \in [a]_{R_P}$ y $[a]_{R_P} \subseteq C$; con esto se concluye que $[a]_{R_P} = C$. Por lo tanto, $A/R_P \subseteq P$. Para la otra contención, sea $C \in P$. $C \neq \emptyset$, pues P es una partición de A.

Sean $y,a \in C$ no necesariamente distintos. Entonces yR_Pa y $y \in [a]_{R_P}$. Como y es cualquier elemento de C, tenemos que $C \subseteq [a]_{R_P}$. Sólo falta mostrar que $[a]_{R_P} \subseteq C$. Tómese $z \in [a]_{R_P}$, entonces zR_Pa, es decir, existe $M \in P$ tal que $a,y \in M$, pero con esto tendríamos que $a \in C \cap M$, por lo tanto $M = C$ y $z \in C$, con esto obtenemos que $[a]_{R_P} \subseteq C$ y entonces $C = [a]_{R_P} \in A/R_P$. Así $S \subseteq A/R_P$ y $A/R_P = S$. □

Definición 2.15. Un conjunto $X \subseteq A$ es llamado un *conjunto de representantes* de la relación de equivalencia R_P (o de la partición P de A) si para todo $C \in P$, $X \cap C = \{a\}$ para algún a ∈ C.

Definición 2.16. Una relación binaria R en A es *antisimétrica* si para cualesquiera $a,b \in A$, cada vez que aRb y bRa, se tiene $a = b$.

Definición 2.17. Una relación binaria R en A reflexiva, antisimétrica y transitiva es llamada un *orden parcial* de A. La pareja (A,R) es llamado un *conjunto parcialmente ordenado*.

Para denotar relaciones de orden, usualmente se usan los símbolos '$\leq$' o '$\preceq$'.

Ejemplo 2.18. Como ejemplo, podría considerarse una familia $\mathscr{F}$ no vacía de conjuntos y la relación de contención '$\subseteq$' en $\mathscr{F}$. Tenemos entonces que la pareja $(\mathscr{F}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 2.19. Una relación binaria R en A es *asimétrica* si para cualesquiera $a, b \in A, aRb$ implica que no sucede que bRa en A. Es decir, nunca pasa que aRb y bRa.

Definición 2.20. Una relación binaria S en A es un *orden estricto* si es asimétrica y transitiva.

El siguiente teorema relaciona los órdenes parciales y los órdenes estrictos:

Teorema 2.21.

1. *Sea R un orden parcial de A; entonces la relación S definida en A por aSb si y sólo si aRb y $a \neq b$ es un orden estricto en A.*

2. *Sea S un orden estricto en A; entonces la relación R definida en A por aRb si y sólo si aSb o $a = b$ es un orden parcial en A.*

Demostración. 1. Sea R un orden parcial en A; entonces la relación S definida en A por aSb si y sólo si aRb y $a \neq b$ es un orden estricto en A:

Para ver que es asimétrica, sean $a, b \in A$ tales que aSb y bSa. Entonces, aRb y bRa; y como R es un orden parcial $a = b$, lo que contradice la definición de la relación S, pues $a \neq b$ y por lo tanto, S es asimétrica.

S también es transitiva, porque si $a, b, c \in A$ son tales que aSb y bSc, entonces aRb y bRc y como R es transitiva, se sigue que aRc y además, $a \neq c$, ya que en otro caso, se tendría cSb y bSc, que sería una contradicción de que S es asimétrica y por lo tanto, se concluye que aSc. $\square$

2. Sea S un orden estricto de A; entonces la relación R definida en A por aRb si y sólo si aSa o $a = b$ es un orden parcial en A: Es reflexiva, porque si $a \in A$, como $a = a$, se sigue que aRa.

Es antisimétrica, ya que si $a, b \in A$ son tales que aRb y bRa, entonces se tienen los siguientes casos:

a) aSb y $a = b$.

b) bSa y $a = b$.

c) $a = b$.

d) aSb y bSa.

En los tres primeros casos, ya se tiene $a = b$ y el útlimo caso sería una contradicción para la asimetría.

Finalmente, la relación es transitiva porque si $a, b, c \in A$ son tales que aRb y bRc, entonces tenemos los siguientes casos:

a) aSb y $b = c$

b) $a = b$ y bSc

c) $a = b$ y $b = c$

d) aSb y bSc

Por la definición de R, y como S es transitiva, en cualquier caso se tiene aSc o $a = c$ y por lo tanto, aRc. □

Es importante tener en consideración las siguientes definiciones para el lema de Zorn:

Definición 2.22. Sean $a, b \in A$ y sea $\leq$ un orden parcial en A. Se dice que a y b son *comparables* en el orden $\leq$ si $a \leq b$ o $b \leq a$. Decimos que a y b son *incomparables* si no son comparables (es decir, si no se cumple $a \leq b$ ni $b \leq a$.

Definición 2.23. Sea $B \subseteq A$, donde A está ordenado parcialmente por $\leq$. B es una *cadena* si cualesquiera dos elementos de B son comparables.

Definición 2.24. Sea $\leq$ un orden parcial de A, y sea $B \subseteq A$.

$b \in B$ es el *elemento mínimo* de B en el orden parcial $\leq$ si $b \leq x$ para cualquier $x \in B$.

$b \in B$ es un *elemento menor* de B en el orden parcial $\leq$ si no existe $x \in B$ tal que $x \leq b$ y $x \neq b$.

$b \in B$ es el *elemento máximo* de B en el orden parcial $\leq$ si $x \leq b$ para cualquier $x \in B$.

$b \in B$ es un *elemento mayor* de B en el orden parcial $\leq$ si no existe $x \in B$ tal que $b \leq x$ y $x \neq b$.

Definición 2.25. Sea $\leq$ un orden parcial de A, y sea $B \subseteq A$.

$a \in A$ es una *cota inferior* de B en el conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ si $a \leq x$ para todo $x \in B$.

$a \in A$ es llamado *ínfimo* de B en el conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ (o la máxima cota inferior de B), si es el elemento máximo del conjunto de todas las cotas inferiores de B en $(A, \leq)$.

$a \in A$ es una *cota superior* de B en el conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ si $x \leq a$ para todo $x \in B$.

$a \in A$ es llamado el *supremo* de B en $(A, \leq)$ (o la mínima cota superior de B) si es el elemento mínimo del conjunto de todas las cotas superiores de B en $(A, \leq)$.

Para nuestro trabajo, supondremos cierto el Lema de Zorn, que enunciaremos abajo. Es equivalente al axioma de elección y nos será útil tanto para conjuntos finitos como infinitos.

Lema de Zorn. *Si toda cadena en un conjunto parcialmente ordenado tiene una cota superior, entonces el conjunto parcialmente ordenado tiene al menos un elemento mayor.*

Teorema 2.26. *Sea (X, $\leq$) un conjunto parcialmente ordenado, tal que toda cadena en X está acotada superiormente en X. Entonces para toda $x \in X$ existe $y \in X$ maximal de X tal que $x \leq y$.*

Demostración. Sea $x \in X$ y consideremos a $F = \{y \in X | x \leq y\}$ y obsérvese que como $x \in F$, $F \neq \emptyset$. Defínase un orden en F de la siguiente manera: sean $y_1, y_2 \in F, y_1 \preceq y_2$ si y sólo si $y_1 \leq y_2$. Obsérseve que la relación $\preceq$ es un orden parcial en F:

Primero, $\preceq$ es reflexiva porque como evidentemente, $y_1 = y_1$, entonces $y_1 \leq y_1$ y por lo tanto $y_1 \preceq y_1$.

Es antisimétrica, ya que si $y_1, y_2 \in F$ son tales que $y_1 \preceq y_2$ y $y_2 \preceq y_1$, tenemos que $y_1 \leq y_2$ y también, $y_2 \leq y_1$, de donde, como $\leq$ es un orden parcial, se sigue que $y_1 = y_2$.

Además es transitiva, pues sean $y_1, y_2, y_3 \in F$ tales que $y_1 \preceq y_2$ y $y_2 \preceq y_3$. Por lo tanto, tenemos $y_1 \leq y_2$ y $y_2 \leq y_3$, y como $\leq$ es un orden parcial, se sigue que $y_1 \leq y_3$; es decir, $y_1 \preceq y_3$.

Ahora, obsérvese que toda cadena del conjunto parcialmente ordenado $(F, \preceq)$ está acotada superiormente:

Sea $B \subseteq F$ una cadena. B es una cadena en X pues $F \subseteq X$ y para toda $b_1, b_2 \in B$, se tiene que $b_1 \preceq b_2$ o $b_2 \preceq b_1$, entonces por definición, $b_1 \leq b_2$ o $b_2 \leq b_1$, lo que por definición, demuestra que cualesquiera dos elementos de B son comparables con el orden parcial $\leq$ de X, y por lo tanto, por hipótesis, B está acotada superiormente en X.

Ahora, sea $y \in X$ una cota superior de B. Entonces por definición, $b \leq y$ para toda $b \in B$, además, dado $b \in B$ como $x \leq b(\leq y)$, siendo $\leq$ un orden parcial, se sigue que $x \leq y$ y también $b \preceq y$; así toda cadena de F está acotada superiormente en F, y por el Lema de Zorn, $(F, \preceq)$ tiene al menos un elemento mayor M tal que $x \leq M$. Demostramos a continuación que M es también mayor de X:

Por reducción al absurdo, supóngase que M no es mayor de X. Entonces debe existir $z \in X$ tal que $M < z$, y como $x \leq M$, tenemos $x < z$ y por lo tanto $z \in F$ y $M \prec z$ que es una contradicción, pues $z \in F$ y M era elemento mayor de F.

Por lo tanto, M es mayor en X. $\square$

3. Núcleos

En este capítulo, presentaremos la definición de conjunto independiente, conjunto absorbente y núcleo junto con algunos resultados relacionados con ellos.

La definición de núcleo fue introducida por John von Neumann y Morgenstern en 1944.

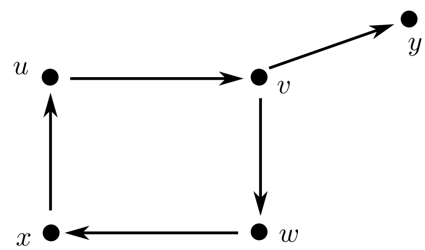
El problema de establecer condiciones para la existencia de núcleos en digráficas infinitas es más complicado que para digráficas finitas, como se mostrará en este capítulo y los siguientes. Con respecto a lo anterior, presentaremos un ejemplo de una digráfica infinita sin núcleo, la cual no cumple con algunas afirmaciones y teoremas para digráficas finitas, sobre la existencia de núcleos.

3.1. Conjuntos independientes

Definición 3.1. En una digráfica D, un conjunto $I \subseteq V(D)$ se dice que es *independiente* si para cualesquiera dos vértices $u, v \in I$ se cumple que $(u,v) \notin F(D)$ y $(v,u) \notin F(D)$.

Obsérvese que dada cualquier digráfica D, para cualquier $u \in V(D)$, se tiene que $\{u\}$ es un conjunto independiente, ya que no existe otro vértice en el conjunto con el que pueda haber una flecha hacia o desde u. Así, como el conjunto de vértices de una digráfica es diferente del vacío, podemos decir que toda digráfica D tiene al menos un conjunto independiente.

D_1:

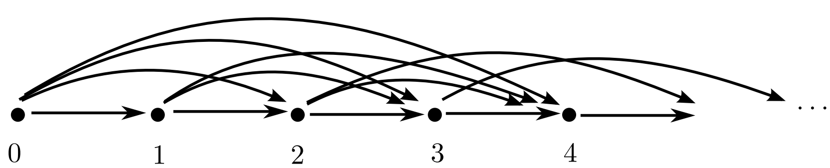


$I_1 = \{u\}\,, I_2 = \{v\}\,, I_3 = \{w\}\,, I_4 = \{x\}\,, I_5 = \{y\}$

$I_6 = \{u, w\}\,, I_7 = \{x, v\}\,, I_8 = \{y, u\}\,, I_9 = \{y, w\}\,, I_{10} = \{y, x\}\,, I_{11} = \{y, u, w\}$

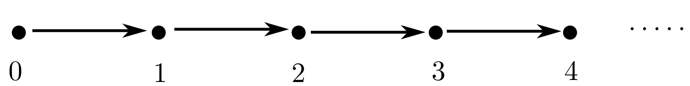
Son los conjuntos independientes de D_1

D_2:



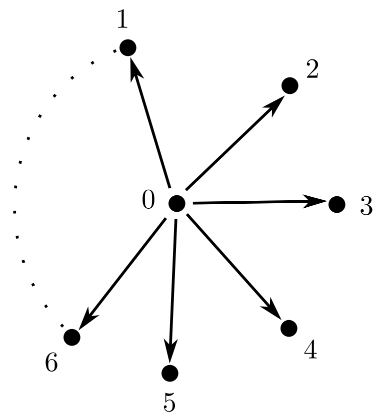
En D_2 los únicos conjuntos independientes son los singuletos $\{i\}$
para cada $i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

D_3:



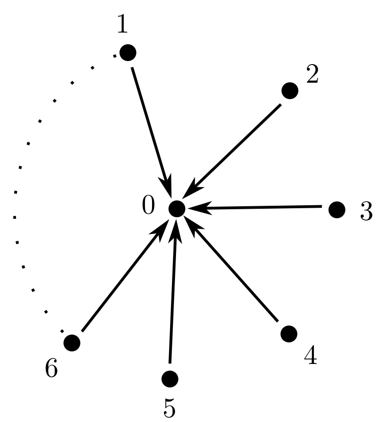
$I_k = \{nk \,|\, n \in \mathbf{N}\}$ es independiente para $k \geq 2$

D_3:



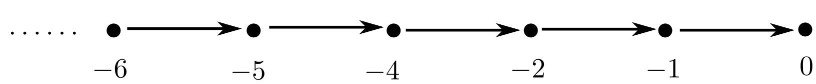
Cualquier subconjunto de $\mathbf{N}$ es un conjunto independiente en D_3 y también $\{0\}$ es un conjunto independiente en D_3

D_4:



Cualquier subconjunto de $\mathbf{N}$ es independiente en D_4

D_5



Cualquier subconjunto del tipo $F_k = \{-nk \mid n \in \mathbf{N}\}$ es independiente en D_5 para cada $k > 2$

Como puede observarse, se pueden tener varios conjuntos independientes en una sola digráfica, a menos que el conjunto de vértices en la digráfica conste de un sólo vértice.

Ahora, consideraremos a la familia de conjuntos independientes de una digráfica D y probaremos que en cualquier digráfica, esta familia siempre tiene al menos un elemento mayor. Para el caso de digráficas infinitas, emplearemos el Lema de Zorn.

Recordemos que una familia de conjuntos con la relación de contención forma un conjunto parcialmente ordenado; de esta manera, si J_D es la familia de conjuntos independientes de una digráfica D, tenemos que $(J_D, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Lema 3.2. *Toda digráfica finita o infinita D tiene al menos un conjunto independiente mayor.*

Demostración. Demostraremos que el conjunto parcialmente ordenado $(J_D, \subseteq)$ tiene al menos un elemento mayor.

Sea D una digráfica finita o infinita y sea $\mathscr{B} \subseteq J_D$ una cadena, y $M = \cup_{B \in \mathscr{B}} B$. Para demostrar que M es una cota superior de $\mathscr{B}$, se demostrarán primero las siguientes afirmaciones:

M es un conjunto independiente.

Sean $u, v \in M$, entonces $u \in B_i$ para algún $B_i \in \mathscr{B}$ y $v \in B_j$ para algún $B_j \in \mathscr{B}$. Si $i = j, u$ y $v \in B_i$, y como B_i es un conjunto independiente, entre u y v no hay flechas. En otro caso, si $i \neq j$. Suponemos sin perdida de generalidad $i < j$, como $\mathscr{B}$ es una cadena, $u, v \in B_j$ y por lo tanto, entre u y v no existen flechas en D.

Además, como M es la unión de todos los elementos de $\mathscr{B}$, tenemos que $B \subseteq M$ para todo $B \in \mathscr{B}$, lo que demuestra que M es una cota superior de $\mathscr{B}$.

Por lo tanto, aplicando el Lema de Zorn, tenemos que el conjunto parcialmente ordenado $(J_D, \subseteq\ )$ tiene al menos un elemento mayor. □

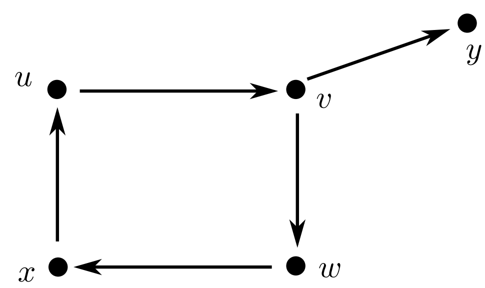
3.2. Conjuntos absorbentes

Definición 3.3. En una digráfica D, un conjunto $A \subseteq V(D)$ se dice que es *absorbente* si para cualquier $u \in V(D) \setminus A$, existe una flecha que inicia en u y termina el algún elemento de A.

Nótese que toda digráfica D tiene al menos un conjunto absorbente, pues el conjunto de todos los vértices de D es un conjunto absorbente.

En este ejemplo se ilustra que en un digráfica pueden existir varios conjuntos absorbentes y que cuando una digráfica sólo tiene un conjunto absorbente es sólo cuando la digráfica no tiene flechas (en cuyo caso, como ya se observó, el conjunto absorbente es el formado por todos los vértices de la digráfica).

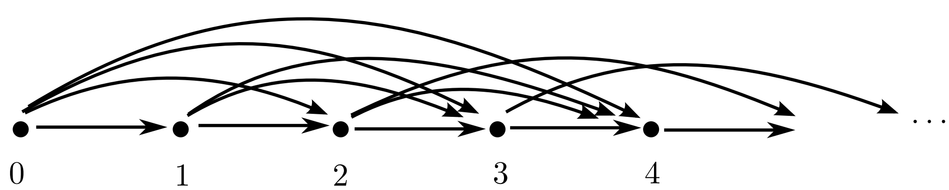
D_1:



$A_1 = \{y, v, x\}\,, A_2 = \{y, v, u, w, x\}$

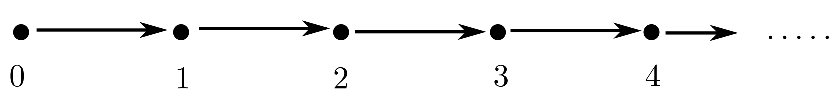
Son los conjuntos absorbentes de D_1

D_2:



$A_k = \{nk \mid n \in \mathbf{N}\}$ es absorbente en D_2 para cada $k \geq 2$

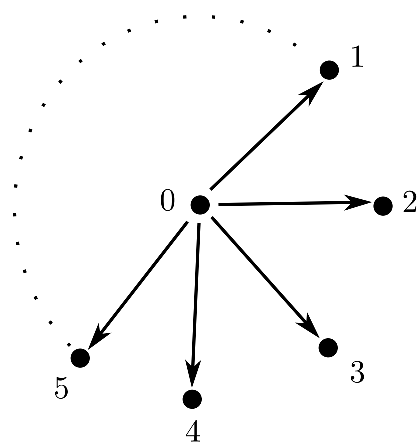
D_3:



$\mathbf{N}$ es un conjunto absorbente de D_3

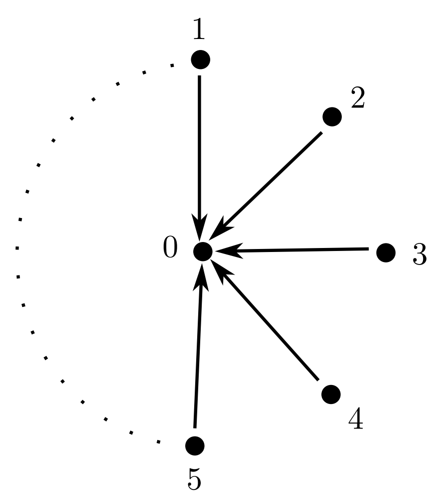
$\{2r + 1 \mid r \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ es un conjunto absorbente de $D_3\}$

D_5:



$\mathbf{N}$ y $\mathbf{N} \cup \{0\}$ son los únicos conjuntos absorbentes de D_4

D_5:



Cualquier conjunto que contenga a $\{0\}$ es absorbente en D_5 y

Todo conjunto absorbente de D_5 contiene a $\{0\}$

Continuamos con la definición de la familia de conjuntos absorbentes de una digráfica y un lema que afirma la existencia de conjuntos absorbentes menores en digráficas finitas, ya que las digráficas infinitas no siempre tienen conjuntos absorbentes menores, como es el caso de la digráfia infinita que se analizará en la última sección de este capítulo.

Nuevamente, recordemos que como una familia de conjuntos con la relación de contención forman un conjunto parcialmente ordenado, la pareja $(A_D, \subseteq)$ forma un conjunto parcialmente ordenado, si A_D es la familia de conjuntos absorbentes de una digráfica D.

Lema 3.4. *Si D es una digráfica finita, entonces D tiene conjuntos absorbentes menores.*

Demostración. Sea D una digráfica finita de orden n; entonces, evidentemente, D tiene a lo más $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}$ conjuntos absorbentes. Por lo tanto, la familia de conjuntos absorbentes A_D tiene un número finito de elementos y así, es posible encontrar al menos un $A \in A_D$ tal que no existe $A' \in A_D$ que cumpla con que $A' \subsetneq A$, de donde se concluye que A_D tiene al menos un elemento menor. $\square$

En el siguiente ejemplo, se ilustra la familia de conjuntos absorbentes de una digráfica D y sus elementos menores.

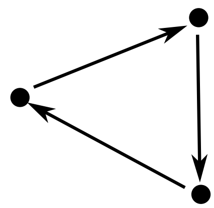
Nótese que aunque en el ejemplo anterior sólo existe un elemento menor de la familia A_D, no significa que el elemento menor de la familia de conjuntos absorbentes sea único para todas las digráficas, como se puede observar a continuación.

3.3. Núcleos

Definición 3.5. En una digráfica D, se dice que un conjunto de vértices de D es *núcleo* de D si N $(N \subset V(D))$ es un conjunto absorbente e independiente.

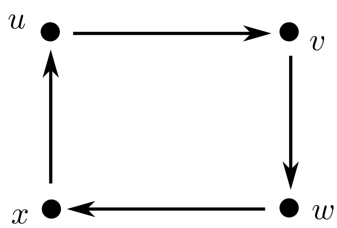
Sin embargo, no todas las digráficas tienen núcleo, como puede observarse a continuación.

D_1:



Digráfica sin núcleo

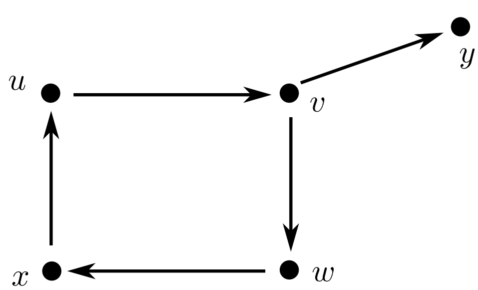
D_2:



Digráfica con al menos dos núcleos

$N_1 \{u, w\}$, $\quad N_2 = \{x, v\}$ son los núcleos de D_2

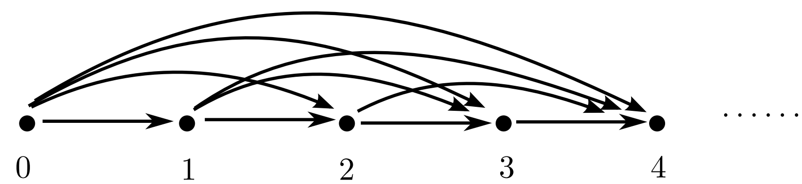
D_3:



Todo núcleo de D_3 contiene a y

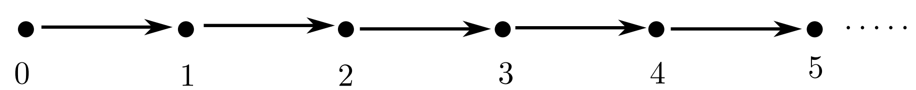
$N = \{y, u, w\}$ es el núcleo de D_3

D_4:



Digráfica infinita sin núcleo

D_5:

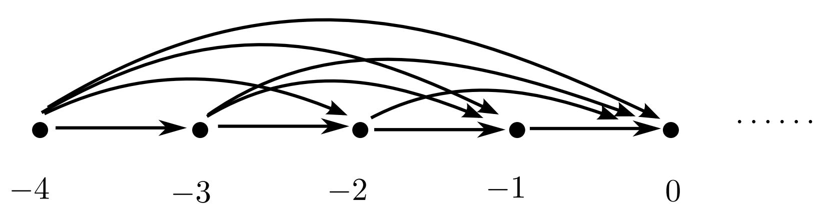


Digráfica infinita con dos núcleos

$N_1 = \{2n \mid n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ es núcleo de D_5

$N_2 = \{2n+1 \mid n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ es núcleo de D_5

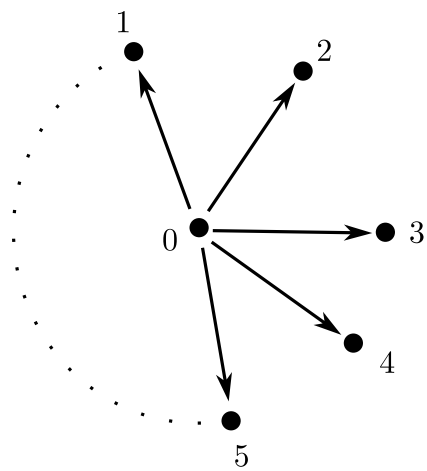
D_6:



Digráfica infinita con un único núcleo

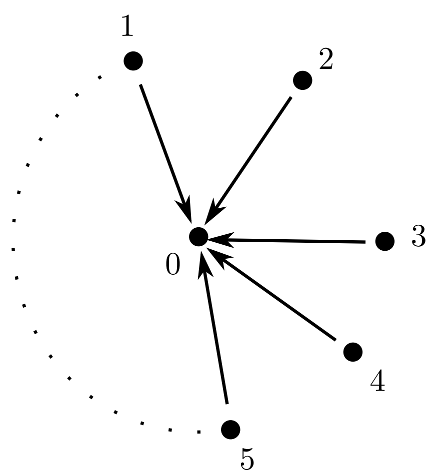
$N = \{0\}$ es el único núcleo de D_6

D_7:



El único núcleo de D_7 es $\mathbf{N}$

D_8:



El único núcleo de D_8 es $\{0\}$

El siguiente teorema relaciona a los conjuntos independientes mayores y el núcleo de una digráfica.

Teorema 3.6. *Sea D una digráfica con núcleo. Entonces el núcleo es un conjunto independiente mayor (máximo por contención).*

Demostración. Sea N un núcleo de la digráfica D. Por definición, N es independiente y demostraremos que es independiente mayor con esta propiedad.

Supóngase por reducción al absurdo que $N' \subseteq V(D)$ es un conjunto independiente tal que $N \subsetneq N'$. Entonces existe por lo menos un vértice $u \in D$ tal que $u \in N'$ y $u \notin N$; es decir, $u \notin V(D) \setminus N$. Entonces debe existir una flecha en D de u a v, con $v \in N$; y como $N \subsetneq N'$, tenemos que $v \in N'$ y por lo tanto N' no es un conjunto independiente, lo que contradice las hipótesis.

Por lo tanto, N es un conjunto independiente mayor. □

La siguiente proposición establece una relación entre los conjuntos absorbentes menores y el núcleo de una digráfica.

Proposición 3.7. *En toda digráfica, un núcleo es un cojunto absorbente menor de D.*

Demostración. Sea D una digráfica y N un núcleo de D. Entonces N es absorbente y sólo resta demostrar que es menor en el sentido de la contención con esta propiedad:

Como N es núcleo, entonces $N \in A_D$. Ahora, por reducción al absurdo, supóngase que existe $A \in A_D$ tal que $A \subsetneq N$. Entonces hay un vértice $u \in V(D)$ con $u \in N$ y $u \notin A$, pero como A es absorbente, existe $v \in A$ tal que $(u, v) \in F(D)$; así como $v \in A$ y $A \subsetneq N$, se tiene que $v \in N$ y por lo tanto N no es independiente, lo que contradice las hipótesis.

Con esto se concluye que N es un conjunto absorbente menor. □

3.4. Un ejemplo importante en digráficas infinitas

El ejemplo que se presenta en esta sección será de gran utilidad en capítulos posteriores como ejemplo de que ciertos teoremas para digráficas finitas no necesariamente se siguen cumpliendo para digráficas infinitas.

Primero, se demostrará que la digráfica de este ejemplo no tiene conjuntos absorbentes menores ni tampoco núcleo.

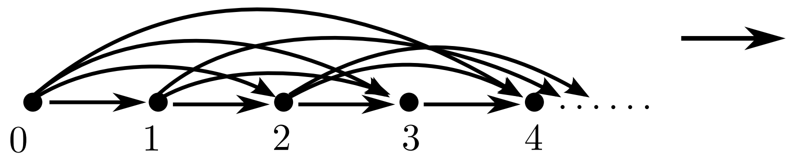
Ejemplo 3.8. En la figura se muestra la digráfica D^* que se define de la siguiente manera:

Sea D^* la digráfica tal que $V(D^*) = \{u_i | i \in \mathbb{N}$ se tiene que $(u_i, u_j) \in F(D^*)$ si y sólo si $i < j$.

La digráfica D*

$$V(\ \mathrm{D}^*\ ) = \mathbf{N} \cup \{0\}$$

$$F(\ \mathrm{D}^*\ ) = \{(i,j)\,|\, i < j, \{i,j\} \subseteq \mathbf{N} \cup \{0\}\}$$



Proposición 3.9. *La digráfica D^* satisface lo siguiente:*

1. *El conjunto $\Delta = \{u_j, u_{j+1}, \ldots\}$, con $j \in \mathbb{N}$ es un conjunto absorbente de D^*.*

2. *Para todo $A \in A_{D^*}$, se tiene que $|A| = \infty$*

3. *La digráfica D^* no tiene conjuntos absorbente menores*

Demostración. 1. El conjunto $\Delta = \{u_j, u_{j+1}, \ldots,\}$ con $j \in \mathbb{N}$ es un conjunto absorbente de D^*. Sea $u_t \in V(D^*)$ con $t \in \mathbb{N}$, tomemos a $j \in \mathbb{N}$, tal que $t < j$, entonces, por definición de D^*, u_t es absorbido por u_j, por lo tanto, el conjunto Δ es un conjunto absorbente.

2. Para todo $A \in A_{D^*}$ se tiene que $|A| = \infty$. Por reducción al absurdo, supóngase que existe $A' \in A_{D^*}$ tal que $|A'| = n < \infty$, donde $A' = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, entonces $a_1 = u_{k_1}, a_2 = u_{k_2}, a_3 = u_{k_3}, \ldots, a_n = u_{k_n}$, para $u_{k_i} \in V(D^*)$ como A' tiene un número finito de vértices, entonces el conjunto de subíndices $\{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n\}$ es finito y podemos encontrar el elemento máximo.

Sea $\max\{k_1, k_2, \ldots, k_m, \ldots, k_n\} = k_m$, con $1 \leq m \leq n$, entonces $k_i \leq k_m$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por lo tanto, por definición de D^*, u_{k_m+1} no es absorbido por A', lo cual es una contradicción y por lo tanto, para todo $A \in A_{D^*}$, se tiene que $|A| = \infty$.

3. La digráfica D^* no tiene conjuntos absorbentes menores: sea A cualquier elemento de A_{D^*} y $A' = A \setminus \{u_k\}$, con $u_k \in A$, entonces tenemos que $A' \subsetneq A$. Veamos que $A' \in A_{D^*}$: basta con ver que los vértices que absorbe u_k siguen siendo absorbidos por A'. Por lo anterior, tenemos que $|A| = \infty$; entonces para u_k, con $k \in \mathbb{N}$, existe $m > k$ tal que $u_m \in A$ y además, como $A' = A \setminus \{u_k\}$ y $u_m \neq u_k$ entonces $u_m \in A'$. Por otro lado, u_k absorbía a los vértices u_i tales que $i < k$, pero como $i < k < m$

entonces $i < m$ y por definición de D^*, u_m absorbe a todos los u_i que absorbía u_k, por lo tanto $A' \in A_{D^*}$, y como esto se cumple para todo $A \in A_{D^*}$, entonces se tiene que para cualquier conjunto absorbente de D^* siempre se encontrará otro conjunto absorbente más pequeño, lo que significa que D^* no tiene conjuntos absorbentes menores. □

Proposición 3.10. *La digráfica D^* no tiene núcleo.*

Demostración. Por definición de la digráfica, tenemos que cuealesquiera dos vértices de D^* tienen flecha entre sí y por lo tanto el núcleo tendría que constar de un sólo vértice; además como para todo $u_n \in V(D^*)$ se tiene $(u_m, u_n) \notin F(D^*)$ cuando $n < m$, entonces $\{u_n\}$ no es un conjunto absorbente y por lo tanto no puede ser núcleo de D^*. □

4. Seminúcleos y digráficas núcleo perfectas.

En este capítulo presentaremos las definiciones de seminúcleo y de digráfica núcleo perfecta junto con algunos teoremas que establecen relaciones entre el seminúcleo y el núcleo de una digráfica. También se demostrará que cualquier digráfica posee un seminúcleo mayor, y la relación que existe entre este y un núcleo.

Estos resultados fueron una contribución a la Teoría de digráficas, debida a Victor Neumann Lara. Además, presentamos unu resultado dado por Pierre Duchet, sobre digráficas finitas núcleo perfectas.

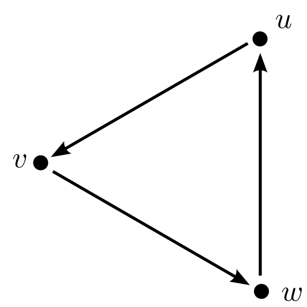
Por último establecemos condiciones a las digráficas infinitas para que estas sean núcleo perfectas, generalizando así el teorema dado por Duchet.

4.1. Seminúcleos

Definición 4.1. Sea D una digráfica. Se dice que $S \subseteq V(D)$ es un *seminúcleo* de D si:

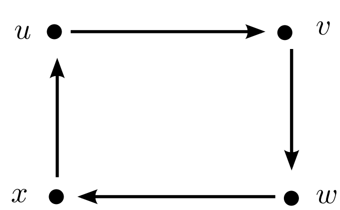
1. S es independiente
2. Para cada flecha f que va de S a x, existe una flecha f' que va de x a S.

D_1:



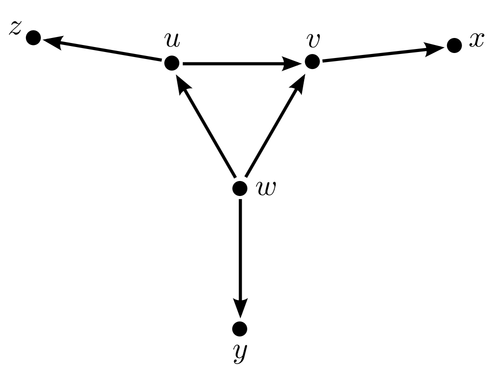
Digráfica sin seminúcleo no vacío.

D_2:



$S_1 = \{u, w\}$ y $S_2 = \{x, v\}$ son dos seminúcleos no vacíos de D_2.

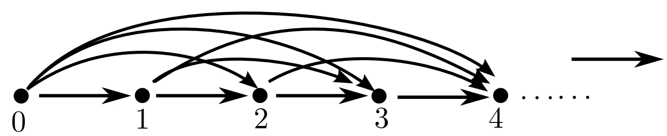
D_3:



Digráfica con tres seminúcleos

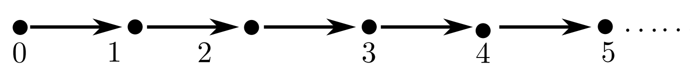
$$S_1 = \{z\}, S_2 = \{x\}$$
$$\text{y } S_3 = \{y\}.$$

D_4:



Digráfica infinita sin seminúcleo.

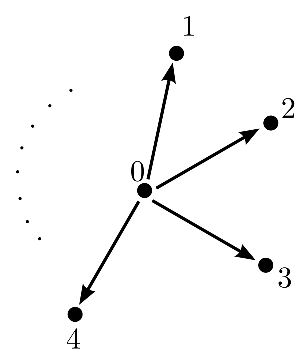
D_5:



$$S_k = \{2r \mid r \geq k\} = \{2k, 2k+2, 2k+4, 2k+6, 2k+8, ...\}$$

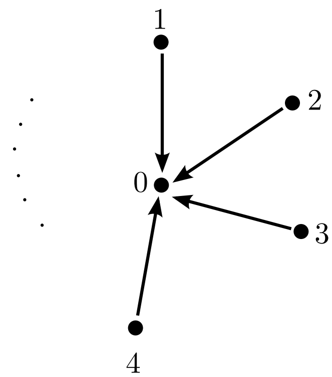
es un seminúcleo no vacío de D_5. Así, D_5 es una digráfica infinita con una infinidad de seminúcleos no vacíos.

D_6:



$S_i = \{\ i \mid i \in \mathbf{N}\}$ es seminúcleo no vacío de D_6.

D_7:



$S = \{0\}$ es el único seminúcleo no vacío de D_7.

Obsérvese que en cualquier digráfica D, $\emptyset$ es un seminúcleo de D.

Proposición 4.2. *Todo núcleo N de una digráfica D es un seminúcleo.*

Demostración. Por definición, N es un conjunto independiente. Ahora sea f una flecha que va de u a x, con $u \in N$ y $x \in V(D) \setminus N$.

Entonces como N es un núcleo,existe la flecha que va de x a algún elemento de N. Por lo tanto, N es seminúcleo. □

Ahora se definiran familias de seminúcleos en una digráfica y se demostrará que para digráficas infinitas que tales familias tienen elemento mayor.

Lema 4.3. *Sea D una digráfica y denotemos por M_D a la familia de seminúcleos de la digráfica. La contención de conjuntos es un orden parcial en la familia de seminúcleos M_D y por lo tanto, la pareja $(M_D, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

Lema 4.4. *Sea E una cadena de seminúcleos de una digráfica D. Entonces $X = \cup_{E_i \in E} E_i$ es un seminúcleo de D.*

Demostración. Demostraremos que X es un conjunto independiente y que cada flecha f que va de X a u, con $u \in V(D) \setminus X$, existe una flecha f' que va de u a X.

X es un conjunto independiente en D: Como cada $E_i \in E$, existe una flecha f_1 que va de u hacia algún vértice $v \in E_i$, pero como $E_i \subseteq X$ entonces $v \in X$ y por lo tanto $f' = f_1$ es una flecha que va de u hacia un vértice de X. Por lo tanto, una vez demostradas las dos condiciones anteriores, tenemos que X es seminúcleo. □

Teorema 4.5 (V. Neumann Lara, 1971)**.** *Toda digráfica D tiene al menos un seminúcleo mayor.*

Demostración. Probar que toda digráfica D tiene al menos un seminúcleo mayor es equivalente a demostrar que el conjunto parcialmente ordenado $(M_D, \subseteq)$ tiene al menos un elemento mayor.

Sea D una digráfica. Ocuparemos el Lema de Zorn para demostrar que el conjunto parcialmente ordenado $(M_D, \subseteq)$ tiene al menos un elemento mayor:

Sea $\mathscr{B} \subseteq M_D$ una cadena y $X = \cup_{B \in \mathscr{B}} B$.

Demostraremos que X es una cota superior de $\mathscr{B}$; es decir que X es un seminúcleo de D y que $B \subseteq X$ para todo $B \in \mathscr{B}$. Por el Lema 4.4, X es un seminúcleo de D y por definición de X, $B \subseteq X$ para todo $B \in \mathscr{B}$. Por lo tanto, por el Lema de Zorn, el conjunto parcialmente ordenado $(M_D, \subseteq)$ tiene al menos un elemento mayor. □

La siguiente afirmación establece una relación entre el núcleo y el seminúcleo mayor de una digráfica.

Teorema 4.6 (V. Neumann Lara, 1971)**.** *Todo núcleo de una digráfica D es un seminúcleo mayor.*

Demostración. Sea N un núcleo de la digráfica D. Por la Proposición 4.2, N es un seminúcleo de D, es decir $N \in M_D$; por otra parte, en el capítulo 3 se demostró que todo núcleo N es un conjunto independiente mayor, es decir que no es posible encontrar otro conjunto independiente que contenga propiamente a N y por lo tanto N es un seminúcleo mayor. □

Observación 4.7. Como la pareja $(M_D, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y toda cadena está acotada superiormente en la familia de seminúcleos M_D; por el Teorema 2.26 del capítulo 2, se tiene que todo seminúcleo está contenido en un seminúcleo mayor.

El siguiente lema también es un resultado sobre seminúcleos dado por V. Neumann Lara en 1971, que será de utilidad en la siguiente sección.

Lema 4.8. *Sea M un seminúcleo de D, sean* $B = \{v \in V(D) - M \mid$ *no existe flecha de* v *a* $M\}$ *y* M' *un seminúcleo de la digráfica* $D[B]$*. Entonces* $M \cup M'$ *es un seminúcleo de D.*

Demostración. Sea M un seminúcleo de la digráfica D, y M' un seminúcleo de la digráfica $D[B]$, con B como se describe en el enunciado del lema. Para ver que $M \cup M'$ es un seminúcleo de D, demostrearemos las siguientes afirmaciones:

$M \cup M'$ es un conjunto independiente: sean $u, v \in M \cup M'$, entonces tenemos los siguientes casos:

1. $u, v \in M$ o

2. $u, v \in M'$ o

3. $u \in M$ y $v \in M'$.

Para los dos primeros casos, tenemos que como M y M' son seminúcleos, entonces entre u y v no hay flechas. Para el último caso, en donde $u \in M$ y $v \in M'$, como $M' \subseteq B$, no existe en D la flecha (v, u) y consecuentemente como M es un seminúcleo, tampoco podría existir la flecha (u, v). Por lo tanto, $M \cup M'$ es un conjunto independiente.

Ahora, supóngase que f es una flecha que sale de algún vértice de $M \cup M'$ a otro vértice $x \in V(D) - (M \cup M')$: si $x \in V(D) - (M \cup B)$, entonces existe una flecha f' que va de x a algún vértice de M, y por lo tanto,existe una flecha que va de x a algún vértice de $M \cup M'$. Y si $x \in B - M'$, entonces como M' es un seminúcleo de $D[B]$, existe la f' flecha que va de x a algún vértice de M', y por lo tanto existe una flecha que va de x a un vértice de $M \cup M'$. Así, en cualquier caso existe la flecha f' que va de x a un vértice de $M \cup M'$.

Con lo anterior, queda demostrado que $M \cup M'$ es un seminúcleo □

Aplicando el lema anterior varias veces, pueden encontrarse seminúcleos cada vez más grandes en una digráfica; es decir, se toma una digráfica D y un seminúcleo no vacío de ella, se quitan los vértices que absorbe el seminúcleo y al seminúcleo; después con los vértices que quedan se toma la subgráfica inducida por ellos y a un seminúcleo no vacío de esta, si existe. Nuevamente, se quitan los vértices que absorbe el seminúcleo junto con éste y se quedan los vértices que no son absorbidos. Otra vez, se toma la digráfica inducida por estos y a un seminúcleo no vacío si existe, repitinedo el mismo proceso que en las subdigráficas anteriores. Si es posible continuear con este procedimiento hasta que se agoten los vértices. La unión de los seminúcleos resulta ser un núcleo, como se muestra en el siguiente lema:

Lema 4.9. *Sea D una digráfica, sean $B_0, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1}$ y $S_0, S_1, \ldots, S_k$ dos sucesiones de subconjuntos de $V(D)$ tales que:*

1. *$B_0 = V(D)$, $B_k \neq \emptyset$, $B_{k+1} = \emptyset$*

2. *S_i es un seminúcleo de la subdigráfica inducida de D por B_i para $i \in \{0, \ldots, k\}$*

3. *$B_{i+1} = \{x \in B_i |$ no existe flecha de x a $S_i\}, i \in \{0, \ldots, k\}$*

Entonces $\cup_{i=0}^{k} S_i$ es un núcleo de D.

Demostración. Para probar que $\cup_{i=0}^{k} S_i$ es un conjunto independiente, se demuestra primero que $\cup_{i=0}^{k} S_i$ es un seminúcleo de D: por inducción sobre el número de seminúcleos.

1. *Base.* Para un sólo seminúcleo, ya tenemos que S_0 es un seminúcleo de D.

   Para dos seminúcleos, S_0 y S_1, como S_0 es seminúcleo de D y S_1 es seminúcleo de B_1, por el lema anterior, $S_0 \cup S_1$ es seminúcleo de D.

2. *Hipótesis de inducción.* Sean $S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}$, k seminúcleos tales que cada S_i es un seminúcleo de la digráfica inducida de D por B_i, para $i = 0, \ldots, k-1$; supóngase que $\cup_{i=0}^{k-1} S_i$ es un seminúcleo de D.

3. Queda por demostrar que $\cup_{i=0}^{k} S_i$ es un seminúcleo de D, donde S_i es un seminúcleo de la subdigráfica inducida de D por B_i, para $i = 0, \ldots, k$. Tenemos que $\cup_{i=0}^{k} S_i = \cup_{i=0}^{k-1} S_i \cup S_k$; sea $S = \cup_{i=0}^{k-1} S_i$, por hipótesis de inducción, se tiene que S es un seminúcleo de D, y como S_k es seminúcleo de B_k entonces por el lema anterior, $S \cup S_k$ es un seminúcleo de D. Por lo tanto, $\cup_{i=0}^{k} S_i$ es un seminúcleo de D.

Con esto tenemos que $\cup_{i=0}^{k} S_i$ es un conjunto independiente, por lo que únicamente resta probar que se trata también de un conjunto absorbente.

Por reducción al absurdo, supóngase que existe $v \in V(D) - \cup S_i$ tal que no hay flecha de v hacia ningún vértice de $\cup_{i=0}^{k} S_i$, entonces no existe flecha de v hacia ningún vértice de S_i, para $i = 0, 1, \ldots, k$, esto implica que $v \in B_i$ para $i = 0, 1, \ldots, k+1$ lo que contradice que $B_{k+1} = \emptyset$ y por lo tanto, $\cup_{i=0}^{k} S_i$ es un conjunto absorbente y un núcleo de la digráfica D. □

4.2. Digráficas núcleo perfectas

La definición de R-digráfica fue dada por V. Neumann Lara en 1971.

Definición 4.10. Se dice que D es una R-digráfica si toda subdigráfica inducida de D posee un seminúcleo no vacío.

Ejemplo 4.11. La siguiente digráfica es una R-digráfica, pues cualquier subdigráfica inducida de ella tiene al menos un vértice de exgrado igual a cero y por lo tanto este vértice es un seminúcleo no vacío de la digráfica.

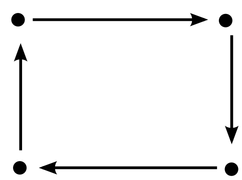
Teorema 4.12. *Toda R-digráfica posee al menos un núcleo.*

Demostración. Sea D una R-digráfica núcleo perfecta y M un seminúcleo mayor, y considérese $B = \{v \in V(D) - M|$ no existe flecha de v a $M\}$, donde $B = \emptyset$, ya que en otro caso, existiría un seminúcleo $M' \neq \emptyset$ de la subdigráfica $D[B]$, y por el Lema 4.8, $M \cup M'$ sería un seminúcleo de D que contendría propiamente a M, lo que contradice que M es un seminúcleo mayor.

Por lo tanto, toda R-digráfica posee al menos un núcleo. $\square$

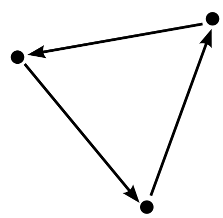
Definición 4.13 (C. Berge)**.** Se dice que D es una *digráfica núcleo perfecta* si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

D_1:



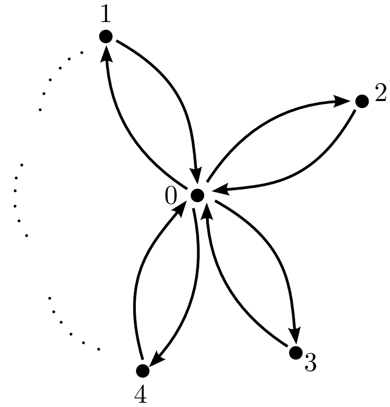
Digráfica núcleo perfecta finita.

D_2:

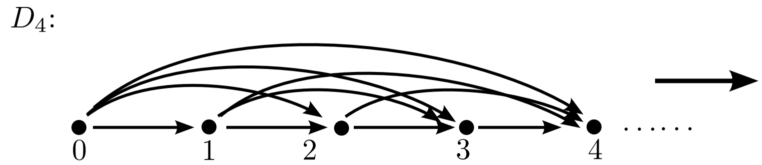


Digráfica no núcleo perfecta finita.

D_3:



Digráfica infinita tal que toda subdigráfica inducida tiene núcleo,
es decir, digráfica núcleo perfecta infinita.



Digráfica infinita no núcleo perfecta, tal que
toda subdigráfica inducida finita tiene núcleo.

Observación 4.14. Si D es una digráfica núcleo perfecta y D' es una subdigráfica inducida de D, entonces D' es también una digráfica núcleo perfecta.

Análogamante, si D es una R-digráfica y D' es una subdigráfica inducida de D, entonces D' también es una R-digráfica.

Demostración. Por reducción al absurdo, supóngase que D', una subdigráfica inducida de D no es núcleo perfecta (respectivamente, R-digráfica), entonces existe una H subdigráfica inducida de D' tal que H no tiene núcleo (respectivamente, seminúcleo), y como H también es subdigráfica inducida de D, entonces se tendría que D no es núcleo perfecta (R-digráfica, respectivamente), lo que es una contradicción, y por lo tanto, D' es núcleo perfecta. □

En el siguiente teorema, se demuestra que las digráficas núcleo perfectas y las R-digráficas son las mismas.

Teorema 4.15. *Una digráfica D es R-digráfica si y sólo si es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D una R-digráfica y H una subdigráfica inducida de D. Por la observación anterior, H es una R-digráfica, y por el último teorema, posee al menos un núcleo, y por lo tanto D es núcleo perfecta.

Ahora, sea D una digráfica núcleo perfecta, es decir, que toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo, y como el núcleo es seminúcleo, se concluye que D es una R-digráfica. □

El siguiente resultado, debido a P. Duchet, es de gran utilidad para demostrar algunos resultados relativos a núcleos.

Teorema 4.16. *Sea D una digráfica finita. Si todo ciclo dirigido de D tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene seminúcleo no vacío.*

Demostración. Se demostrará que existe $u \in V(D)$, tal que el conjunto $\{u\}$ es un seminúcleo de D.

Claramente para todo $u \in V(D)$, el conjunto $\{u\}$ es independiente.

Ahora, supóngase que en D no existe ningún vértice tal que cumpla con la segunda condición de seminúcleo, es decir que para cualquier vértice $u \in V(D)$ existe $v \in V(D)$ tal que $(u,v) \in F(D)$, pero $(u,v) \notin F(D)$. Con las hipótesis anteriores, se construye la siguiente sucesión de vértices:

Tómese $u_1 \in V(D)$. Entonces existe $u_2 \in V(D)$ tal que $(u_1,u_2) \in F(D)$, pero $(u_2,u_1) \notin F(D)$. Análogamente, para u_2, existe $u_3 \in V(D)$ tal que $(u_2,u_3) \in F(D)$, pero $(u_3,u_2) \notin F(D)$. Nuevamente, para u_3, existe $u_4 \in V(D)$ tal que $(u_3,u_4) \in F(D)$, pero $(u_4,u_3) \notin F(D)$.

Continuando de esta manera, como D es finita, vamos a llegar a que $u_i = u_j$ para algunos $i \neq j$, y así $C = (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_{j-1}, u_j = u_i)$ es un camino dirigido cerrado que contiene al menos un ciclo, que por construcción no tiene flechas simétricas, lo cual contradice la hipótesis del teorema, y por lo tanto, se sigue que existe $u \in V(D)$ tal que el conjunto $\{u\}$ es un seminúcleo de D. □

En el siguiente ejemplo, se muestra que el ciclo dirigido de longitud tres no tiene ninguna flecha simétrica y el teorema no se cumple:

Ejemplo 4.17. La siguiente digráfica, que es el ciclo dirigido de longitud tres, denotado por C_3 no tiene ninguna flecha simétrica y no tiene seminúcleo no vacío, ya que es una digráfica semicompleta, y por lo tanto el seminúcleo tendría que estar formado por un sólo vértice, pero puede verificarse fácilmente que un sólo vértice no satisface la segunda condición de seminúcleo.

Teorema 4.18. *Sea D una gráfica finita. Si todo ciclo dirigido de D tiene al menos un flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea H una subdigráfica inducida de D. Entonces evidentemente, H es finita y además, todo ciclo dirigido en H tiene al menos una flecha simétrica; de donde por el teorema anterior, H tiene seminúcleo no vacío, y por lo tanto D es núcleo perfecta. □

Obsérvese que el recíproco del Teorema 4.15 no siempre se satisface, es decir que para D una digráfica finita, si D es núcleo perfecta, entonces no necesariamente todo ciclo dirigido de D tiene al menos una flecha simétrica. Tómese por ejemplo, los ciclos dirigidos de longitud par, que son digráficas núcleo perfectas y sin embargo no tienen ninguna flecha simétrica.

Obśervese también que en cambio, el recíproco sí se satisface para digráficas semicompletas.

Definición 4.19. Se dice que una digráfica D es *semicompleta* si para cualquier par de vértices $u, v \in V(D), (u,v) \in F(D)$ o $(v,u) \in F(D)$.

Es decir, una digráfica D es semicompleta si entre cualesquiera dos vértices hay al menos una flecha.

Definición 4.20. Una digráfica D es *completa* si para cada $u, v \in V(D)$, $(u,v) \in F(D)$ y $(v,u) \in F(D)$

Nótese que evidentemente, cualquier gráfica completa es semicompleta más no al revés.

Teorema 4.21. *Sea D una digráfica finita y semicompleta. Entonces D es núcleo perfecta si y sólo si todo ciclo dirigido de D tiene al menos una flecha simétrica.*

Demostración. Sea D una digráfica núcleo perfecta y $C = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n = u_0)$ un ciclo dirigido de D.

Entonces $D[V(C)]$ tiene seminúcleo no vacío y además, como D es semicompleta, $D[V(C)]$ también lo es; es decir que cualquier par de vértices de $D[V(C)]$ son adyacentes, por lo que el seminúcleo de $D[V(C)]$ consta de un sólo vértice.

Sea $u_i \in V(C)$ tal que el conjunto $\{u_i\}$ es un seminúcleo de $D[V(C)]$. Entonces, como $(u_i, u_{i+1}) \in F(C)$, debe existir $(u_{i+1}, u_i) \in F(C)$ y por lo tanto en C existe al menos una flecha simétrica.

□

A continuación introducimos el concepto de *trayectoria infinita exterior*; éste será de gran utilidad en este y capítulos posteriores para establecer condiciones en digráficas infinitas para la existencia de núcleos.

Definición 4.22. Sea D una digráfica infinita. Una *trayectoria infinita exterior* de D es una sucesión de vértices $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de D tales que:

1. $u_i \neq u_j$ si $i \neq j$ y

2. $(u_n, u_{n+1}) \in F(D)$ para toda $n \in \mathbb{N}$

En los siguientes teoremas, se establecerán condiciones para determinar cuando una digráfica infinita es núcleo perfecta.

Teorema 4.23. [9] *Sea D una digráfica infinita. Si todo ciclo dirigido de D y toda trayectoria infinita exterior tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene seminúcleo no vacío.*

Demostración. Se demostrará que existe $u \in V(D)$, tal que el conjunto $\{u\}$ es un seminúcleo de D.

Claramente, se tiene que para todo $u \in V(D)$, el conjunto $\{u\}$ es independiente.

Ahora supóngase que en D no existe ningún vértice tal que cumpla con la segunda condición de seminúcleo, es decir que para cualquier vértice $u \in V(D)$ existe $v \in V(D)$ tal que $(u,v) \in F(D)$, pero $(v,u) \notin F(D)$.

Suponiendo lo anterior, se construye la siguiente sucesión de vértices: tómese $u_1 \in V(D)$. Entonces existe $u_2 \in V(D)$ tal que $(u_1, u_2) \in F(D)$, pero $(u_2, u_1) \notin F(D)$; para u_2 existe $u_3 \in V(D)$ tal que $(u_2, u_3) \in F(D)$, pero $(u_3, u_2) \notin F(D)$. Análogamente, para u_3 existe u_4 tal que $(u_3, u_4) \in F(D)$ pero $(u_4, u_3) \notin F(D)$, y continuando de esta manera, se construye una sucesión de vértices $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de D tal que para cada u_n, existe $u_{n+1} \in V(D)$ con $(u_n, u_{n+1}) \in F(D)$, pero $(u_{n+1}, u_n) \notin F(D)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. En esta sucesión de vértices, se presentan dos posibles casos:

1. En la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existe $u_i = u_j$ para $i \neq j$. Entonces la subsucesión

$$(u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j = u_i)$$

es un camino dirigido cerrado, el cual contiene un ciclo dirigido que por construcción no tiene ninguna flecha simétrica; lo que contradice la hipótesis del teorema.

2. Si la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una trayectoria infinita exterior que, por contrucción, no tiene flechas simétricas, lo que contradice la hipótesis del teorema.

Por lo tanto, como en cualquiera de los dos casos se da una contradicción, se concluye que existe $u \in V(D)$ tal que el conjunto $\{u\}$ es un seminúcleo de D. $\square$

Este teorema es justo, porque si omitimos la hipótesis de que todo ciclo dirigido tenga al meos una flecha simétrica, el teorema ya no se cumple: tómese como ejemplo la siguiente digráfica infinita:

Ejemplo 4.24. Sea D_{C_3} la digráfica definida por $V(D_{C_3}) = \{u_i, v_i, w_i | i \in \mathbb{N}\}$ y

$$F(D_{C_3}) = \{(u_i, u_{i+1}), (u_{i+1}, u_i), (v_i, u_i), (w_i, v_i), (u_i, w_i) | i \in \mathbb{N}\}$$

Obsérvese que la digráfica D_{C_3} no tiene seminúcleo no vacío, pues si (por contradicción), suponemos que la digráfica sí tuviera seminúcleo no vacío, un elemento de este tendría que pertenecer a algún ciclo dirigido de longitud tres, por lo que tendría que ser seminúcleo de dicho ciclo dirigido, lo cual no es posible, y por lo tanto, D_{C_3} no tiene seminúcleo no vacío.

Tambień, el teorema es justo en el sentido de que si eliminamos la hipótesis de que toda trayectoria infinita exterior tenga al menos una flecha simétrica, el teorema tampoco se cumple, como es en el caso de la digráfica D^*, la cual, como es una digráfica semicompleta, el seminúcleo tendría que constar de un sólo vértice; pero por la deifinición de D^*, para cualquier $u_n \in V(D^*), (u_n, u_m) \in F(D^*)$ si $m > n$ y $(u_m, u_n) \notin F(D^*)$, es decir, $\{u_n\}$ no es seminúcleo de D^*, y por lo tanto, esta no tiene seminúcleo distinto del vacío.

Teorema 4.25. [9] *Sea D una digráfica infinita. Si todo ciclo dirigido de longitud* 5 *y toda trayectoria infinita exterior tiene al menos una flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea H una subdigráfica inducida de D, entonces se tiene que:

1. H es una subdigráfica finita o
2. H es una subdigráfica infinita

Para el primer caso, como en D todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, entonces en H todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, y por lo tanto, por el teorema 4.15, H tiene seminúcleo no vacío.

Para el segundo caso, como en D todo ciclo y trayectoria infinita exterior tienen al menos una flecha simétrica, entonces en H se cumplen las mismas condiciones y se tiene que por el teorema anterior, H tiene seminúcleo no vacío. Por lo tanto, D es núcleo perfecta. □

El teorema es justo, porque si eliminamos la hipótesis de que todo ciclo tenga al menos una flecha simétrica, la digráfica D_{C_3} es un ejemplo de que el teorema ya no se cumple; pues en D_{C_3} hay ciclos dirigidos de longitud tres, los cuales como ya vimos, no tienen seminúcleo distinto del vacío, y por lo tanto, D_{C_3} no es núcleo perfecta.

Adicionalmente, si en este mismo teorema, eliminaramos la hipótesis de que toda trayectoria infinita exterior tenga al menos una flecha simétrica, D^* sigue siendo un ejemplo de que el teorema ya no se cumple, pues como ya se mencionó anteriormente, la misma no tiene seminúcleo no vacío, y por lo tanto, D^* no es núcleo perfecta.

Teorema 4.26. [9] *Sea D una digráfica infinita y semicompleta. Entonces D es núcleo perfecta si y sólo si todo ciclo dirigido de D y toda trayectoria infinita exterior tiene al menos una flecha simétrica.*

Demostración. Supóngase que D es núcleo perfecta y sea $C = (u_1, u_1, u_2, \ldots, u_m = u_0)$ un ciclo dirigido de D.

Entonces $D[V(C)]$ también lo es, es decir que cualquier par de vértices de $D[V(C)]$ son adyacentes, por lo que el seminúcleo de $D[V(C)]$ consta de un sólo vértice.

Sea $u_i \in V(C)$ tal que el conjunto $\{u_i\}$ es un seminúcleo de $D[V(C)]$. Entonces, como $(u_i, u_{i+1}) \in F(C)$, debe existir $(u_{i+1}, u_i) \in F(C)$ y por lo tanto en C existe al menos una flecha simétrica.

Análogamente, sea la sucesión de vértices $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una trayectoria infinita exterior. Llámese T^∞ dicha trayectoria infinita exterior, y tómese $D[V(T^\infty)]$. Como D es núcleo perfecta, $D[V(T^\infty)]$ tiene seminúcleo no vacío y además también es semicompleta, por lo que su seminúcleo debe constar de un sólo vértice.

Sea $u_i \in V(T^\infty)$ tal que el conjunto $\{u_i\}$ es un seminúcleo de $D[V(T^\infty)]$. Entonces como $(u_i, u_{i+1}) \in F(T^\infty)$, debe existir $(u_{i+1}, u_i) \in F(T^\infty)$ y por lo tanto, en T^∞ existe al menos una flecha simétrica.

Recíprocamente, si todo ciclo dirigido de D y toda trayectoria infinita exterior tiene al menos una flecha simétrica, por el teorema anterior, D es núcleo perfecta. $\square$

La siguiente digráfica es un ejemplo de que si en el teorema se elimina la hipótesis de que todo ciclo dirigido tenga al menos una flecha simétrica, el resultado ya no se cumple:

Ejemplo 4.27. Sea D_C una digráfica tal que $V(D_C) = \{u_i | i \in \mathbb{N}\}$ y

$$F(D_C) = \{(u_i, u_{i+1}, (u_3, u_1), (u_k u_j) | i, k, j \in \mathbb{N} \text{ tales que } 3 < k < n\},$$

como se muestra en la siguiente figura.

La digráfica D_C es semicompleta, donde toda trayectoria infinita exterior tiene al menos una flecha simétrica, pero tiene el ciclo de longitud tres (u_1, u_2, u_3, u_1), el cual no tiene flecha simétrica, y como ya se vió anteriormente, no tiene seminúcleo. Por lo tanto, D_C no es núcleo perfecta.

Finalmente, si se elimina la hipótesis de que toda trayectoria infinita exterior tenga al menos una flecha simétrica, la misma digráfica D^* es un ejemplo de que el teorema ya no se cumple.

5. Una generalización del Teorema de Duchet

En este capítulo daremos a conocer un resultado nuevo que prueba la existencia de conjuntos absorbentes de tamaño a lo más k en digráficas semicompletas.

Se dice que una digráfica D es m-coloreada en flechas si existe una coloración de sus flechas con a lo más m-colores. Sea D una digráfica m-coloreada, una trayectoria es monocromática en D si todas sus flechas tienen el mismo color. Diremos que un conjunto $S \subset V(D)$ es independiente por trayectorias monocromáticas si para cualesquiera $u, v \in S$ no existe una trayectoria dirigida monocromática entre ellos. Diremos que un conjunto $S \subset V(D)$ es absorbente por trayectorias monocromáticas siempre que para cada $x \in V(D) \backslash S$ existe una xw-trayectoria monocromática para algún $w \in S$. Y diremos que un conjunto $K \subset V(D)$ es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D si K es independiente y absorbente por trayectorias monocromáticas.

Dada una digráfica D m-coloreada en flechas, la cerradura de D se define como la digráfica $C(D)$ que tiene como conjunto de vértices $V(C(D)) = V(D)$ y uv es una flecha de color i en $C(D)$ si y sólo si existe una uv-trayectoria dirigida monocromática de color i en D.

La siguiente observación es útil para los propósitos de este capítulo.

Observación 5.1. Sea D una digráfica m- coloreada. D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si $C(D)$ tiene núcleo. Sólamente obsérvese que existe $uv-$ flecha en $C(D)$ si y sólo si existe uv- trayectoria monocromática dirigida en D.

Definición 5.2. Sean D y H digráficas, D una digráfica sin lazos, H posiblemente con lazos. Una H-coloración de D es una coloración de las flechas de D con los vértices de H, es decir, los vértices de H son colores, y a cada flecha de D le asignamos un color de los vértices de H. Sea $\zeta : F(D) \to V(H)$ una H-coloració n de D; un camino dirigido C = $(x_0, x_1, \ldots x_n)$ es un H-camino (H-trayectoria, H-ciclo) si $(\zeta(x_0, x_1,), \zeta(x_1, x_2) \ldots, \zeta(x_{n-1}, x_n))$ es un camino en H. Un conjunto $K \subseteq V(D)$ es H-independiente por trayectorias (por caminos) si para cualesquiera vértices $x, y \in K$, no existe una H-trayectoria (H-camino) entre ellos. Diremos que $K \subseteq V(D)$ es H-absorbente por trayectorias (por caminos) si para cada $x \in V(D) \backslash K$ existe $z \in K$ y una H-trayectoria (H-camino) de x a z. Y diremos que K es un H-núcleo por trayectorias (por caminos) si K es H-independiente y H-absorbente por trayectorias (por caminos).

La H-cerradura por trayectorias (por caminos) de D denotada por $\zeta_H(D)$ se define como sigue: $V(\zeta_H(D)) = V(D)$ y $(u,v) \in F(\zeta_H(D))$ si y sólo si existe una $uv - H$ trayectoria (H - camino)

La siguiente observación será de gran utilidad en el resto del capítulo, y se usará sin necesidad de mencionarla.

Observación 5.3. Sean D y H digráficas, donde D es una digráfica H-coloreada; D tiene H-núcleo por trayectorias (por caminos) si y sólo si su H-cerradura por trayectorias (por caminos) tiene núcleo.

Denotaremos por $T_{k+1(1,2,\ldots,k)} = T$ la digráfica definida como sigue: $V(T) = \{1,2,\ldots k+1\}$, y para $i < j$, $(i,j) \in F(T)$ si y sólo si $j - i \leq k$, y $T_{\infty(1,2,\ldots k)} = T$ se define como sigue:
$V(T) = \{1,2,\ldots\} = \mathbb{N}$ y para $(u,v) \in F(T)$ si y sólo si $u < v$ y $v - u \leq k$
El siguiente lema será útil para la prueba del teorema principal.

Lema 5.4. *Sea D una digráfica semicompleta, posiblemente infinita. Si D no posee conjuntos absorbentes de tamaño a lo más k, entonces $Asym(D)$ posee una subdigráfica isomorfa a $T_{k+1(1,2,\ldots,k)} = T$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre k. Si $k = 1$, entonces D no posee absorbentes de tamaño 1, por lo que para todo $v \in V(D)$, existe $u \in V(D) \setminus \{v\}$ tal que $uv \in F(Asym(D))$. Así $T = (v,u)$ es isomorfo a $T_{2(1)}$ es la subdigráfica que buscamos. Supongamos ahora que toda digráfica semicompleta (infinita) sin absorbentes de tamaño a lo más k posee una $T_{k+1(1,2,\ldots,k)}$ como subdigráfica inducida en $Asym(D)$.

Sea D como en las hipótesis, sin conjuntos absorbentes de tamaño a lo más $k+1$. Por hipótesis de inducción, sabemos que $Asym(D)$ posee una subdigráfica inducida isomorfa a $T_{k+1(1,2,\ldots,k)}$, digamos $T = (v_1, v_2, \ldots, v_{k+1})$. Como $S = \{v_1, v_2, \ldots v_{k+1}\}$ no puede ser absorbente y D es semicompleta, existe $w \in V(D) \setminus S$ tal que $v_i w \in F(Asym(D))$. Así $T' = D[S \cup \{w\}] \subseteq Asym(D)$ y $T' \cong T_{k+2(1,2,\ldots,k+1)}$ □

Teorema 5.5. *Si D es una digráfica semicompleta, posiblemente infinita, y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que todo ciclo dirigido de longitud $l \geq 2k+1$ y toda subdigráfica isomorfa a $T_{\infty(1,2,\ldots k)}$ poseen una flecha simétrica, entonces D contiene un conjunto absorbente S con $|S| \leq k$.*

Demostración. Sea D semicompleta (infinita) sin conjuntos absorbentes de tamaño a lo más k. Supongamos que D no posee una subdigráfica isomorfa a $T_{\infty(1,2,\ldots k)}$ sin flechas simétricas.

Sea m el mayor entero tal que $Asym(D)$ contiene una subdigráfica H isomorfa a $T_{m(1,2,...k)}$. Por el lema anterior, sabemos que $m \geq k+1$. Sean $x_1, x_2, \ldots x_m$ los vértices de H en el orden dado por $T_{m(1,2,...k)}$. Como el conjunto $S = \{x_{m-k+1}, \ldots, x_m\}$ no puede ser absorbente en D, existe $y \in V(D) \setminus S$ tal que $(x_i y) \in F(Asym(D))$ para toda $i \in \{m-k+1, \ldots, m\}$. Notemos que por la elección de m, $y \in V(H)$. Y como $(x_j x_{m-k+1}) \in F(D)$ para toda $j \in \{m-2k+1, \ldots, m-k\}$; lo que implica que $y \in V(H) \setminus \{x_{m-2k+1}, \ldots x_m\}$ por lo que $y = x_j$ con $j \in \{1, 2, \ldots m-2k\}$.

Por lo tanto $C = (y = x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m, y)$ es un ciclo de longitud $l \geq 2k+1$ sin flechas simétricas.

$\square$

Teorema 5.6. *Sean D y H digráficas, si D es una digráfica semicompleta posiblemente infinita H-coloreada tal que todo ciclo de longitud $l = 2k+1$ es H-coloreado y toda subdigráfica isomorfa a $T_{\infty(1,2,...,k)}$ posee una flecha simétrica, entonces D tiene un conjunto H-absorbente por trayectorias (caminos) de cardinalidad a lo más k.*

Demostración. Afirmamos que $C_H(D)$, la H-cerradura por trayectorias (por caminos) de D posee un conjunto absorbente de cardinalidad a lo más k.

Primero veamos que todo ciclo en $C_H(D)$ de longitud $l \geq 2k+1$ posee una flecha simétrica.

Supongamos por contradicción que existe C un ciclo de longitud $l \geq 2k+1$ tal que $C \subseteq Asym(C_H(D))$.

Observemos que C es un ciclo en D. Sea $C = (x_1, x_2, \ldots, x_l, x_1)$, por definición de $C_H(D)$, como $x_i x_{i+1} \in F(Asym(C_H(D))$, existe una $x_i x_{i+1}$ H-trayectoria (camino) en D, pero no hay una $x_{i+1} x_i$ H-trayectoria (camino) en D; en particular la flecha $x_{i+1} x_i \notin F(D)$ y dado que D es semicompleta $x_i x_{i+1} \in F(D)$, Así, $C \subseteq D$. En [7] H. Galeana y S. Rajsbaum demostraron que si T es un torneo hamiltoniano, con ciclo hamiltoniano C, para cada $3 \leq m \leq n-1$ existe un ciclo de longitud m que intersecta a C en al menos una arista.

Consideremos T un torneo en D generado por C.

Si $l = 2k+1$ ya que $C \subseteq D$ y por hipótesis C es un H-ciclo, se sigue que $C_H(D)[\{x_1, x_2, \ldots x_l\}]$ es una digráfica completa y por lo tanto, C posee una flecha simétrica.

Si $l > 2k+1$, de la observación anterior sabemos que existe un ciclo $C\prime$ de longitud $2k+1$ que intersecta a C en al menos una flecha, digamos uv. Como C' $\subseteq D$ y por lo tanto es un H-ciclo, $C_H(D)[V(C')]$ es una digráfica completa; por lo tanto, uv es una flecha simétrica en $C_H(D)$, lo que contradice que $C \subseteq Asym(C_H(D))$.

Ahora veamos que si $C_H(D)$ contiene una subdigráfica $T \cong T_{\infty(1,2,\ldots,k)}$, T tiene una flecha simétrica en $C_H(D)$.

Supongamos por contradicción que $T \subseteq Asym(C_H(D))$. Observemos que si $uv \in F(AsymC_H(D))$, entonces $uv \in F(Asym(D))$ ya que $uv \in F(Asym\, C_H(D))$ si y sólo si hay una uv H- trayectoria (camino) en D y no hay una vu-trayectoria (camino) en D, en particular $vu \notin F(D)$; y como D es semicompleta, tenemos que $uv \in F(Asym(D))$. Por lo tanto $T \subseteq Asym(D)$ lo cual es una contradicción, por lo que todo ciclo dirigido de longitud $l \geq 2k+1$ y toda subdigráfica isomorfa a $T_{\infty(1,2,\ldots k)}$ en $C_H(D)$ poseen una flecha simétrica. Se sigue del Teorema 5.5 que $C_H(D)$ contiene un conjunto absorbente S con $|S| \leq k$.

Finalmente, de la definición de $C_H(D)$, podemos concluir que S es un conjunto H-absorbente por trayectorias (caminos) de cardinalidad a lo más k. □

Corolario 5.7. *Si D es una digráfica semicompleta finita, m-coloreada tal que todo ciclo de longitud $l = 2k+1$ es monocromático, entonces D tiene un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas de cardinalidad a lo más k.*

Demostración. Consideremos H la digráfica de orden m, con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ y conjunto de flechas $F = \{v_iv_i : i \in \{1, \ldots m\}\}$ y sea ζ una H-coloración de D. Observemos que toda H-trayectoria (camino) en D es una trayectoria monocromática. Del teorema anterior, se sigue que D posee un conjunto H-absorbente S de cardinalidad a lo más k, y por tanto lo S es absorbente por trayectorias monocromáticas. □

Conclusión

En este trabajo expusimos un resumen de resultados sobre la existencia de conjuntos absorbentes en digráficas, principalmente en digráficas semicompletas. También presentamos y demostramos resultados nuevos que obtuvimos sobre la existencia de conjuntos absorbentes de tamaño a lo más k, tanto en digráficas como en digráficas H-coloreadas.

	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4			8	2	1	7	5
6		5	4		1		8	3
1		4	2	3		8	9	6
3	6	9	8				2	1
2	8	7		6	9	5		4
5	2		9	7	4	3		
4	3			2	6	9		7
7		6	3	1	8		5	2

Bibliografía

[1] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs: theory, algorithms, and applications*. Monographs in Mathematics. Springer, 2010.

[2] C. Berge, *Graphs and hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam (1985).

[3] V. Chvátal, *On the computational complexity of finding a kernel*, Report no. CRM-300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.

[4] Y. Dimopoulos, V. Magirou, C.H. Papadimitriuou, *On kernels, defaults and even graphs*. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. **20**, (1997), 1–12.

[5] P. Duchet, H. Meyniel, *A note on kernel-critical graphs*, Discrete Math. **33**, 103–105 (1981).

[6] A. S. Fraenkel, *Combinatorial game theory foundations applied to digraph kernels*. Electron. J. Combin. **4**, 2 (1997), Research Paper #R10.

[7] H. Galeana and S. Rajsbaum, *Cycle-pancyclism in tournaments II*. Graphs and Combinatorics. **12**, (1996), 9–16.

[8] H. Galeana and V. Neumann, *On Kernel-perfect critical digraphs*. Discrete Math. **32**, 1873–1879 (2016).

[9] R. Rojas-Monroy, J.Imelda Villarreal-Valdés, *Kernels in infinite digraphs*, AKCE Int. J. Graphs and Combinatorics **7** (1), (2010), 103–111.

[10] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge coloured digraphs*. Journal of Combinatorial Theory (B) **33**, (1982), 271–275.

[11] T. W. Haynes, T. Hedetniemi y P. J. Slater, editors, *Domination in Graphs, Advanced Topics*. Marcel Dekker Inc.,(1998).