UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TRAYECTORIAS RUGOSAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
SALVADOR CESAR ESQUIVEL CALZADA

DIRECTOR
DR. GERÓNIMO URIBE BRAVO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2019.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por el apoyo incondicional que me han dado a lo largo de mi vida. A mis amigos y compañeros, fuera y dentro de la universidad. A todos los profesores con los que tuve la oportunidad de tomar curso y especialmente al Dr. Gerónimo Uribe por todo su apoyo y confianza al permitirme realizar esta tesis.

Tesis apoyada por el Proyecto CoNaCyT-Fronteras de la Ciencia 2016-1946 y por el Proyecto UNAM-DGAPA-PAPIIT IN 115217.

Índice general

Introducción

En este trabajo se busca dar una introducción, por medio de una exposición clara y completa, a la teoría de las trayectorias rugosas, principalmente como extensión a la integral de Riemann-Stieltjes (teoría con la cual suponemos que el lector es familiar) para funciones cuya regularidad es menor a aquellas que son Lipschitz. De particular interés serán las trayectorias del Movimiento Browniano y la generalización de su integración estocástica a una familia de integrandos mucho más amplia. La familia de procesos a los cuales se les podrá definir su integral no estará determinada por propiedades estocásticas, como la adaptabilidad, sino que éstas condiciones serán únicamente con respecto a la regularidad de sus trayectorias.

En el primer capítulo se define la firma de una trayectoria, el cual es un objeto que resume la información sobre las integrales iteradas de una trayectoria de variación acotada con respecto a sí misma y para lo cual no se utiliza más que la teoría clásica de integración de Riemann-Stieltjes. La forma de representar este objeto es por medio de tensores por lo que se estudian algunas propiedades de estos. Para caracterizar el espacio donde viven las firmas será necesario trabajar con grupos de Lie y álgebras de Lie, aunque en nuestro caso particular estos conceptos se simplifican bastante comparado con la teoría general. Posteriormente se introduce en nuestro espacio un concepto similar al de la norma en un espacio vectorial, con el fin de metrizarlo. Por último se caracteriza la firma, considerada como un operador, como el único levantamiento que preserva normas 1-variación en los espacios introducidos.

Dado que no es posible definir la firma de una trayectoria α-Hölder con $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ por medio de la integración de Riemann-Stieltjes en el segundo capítulo se introduce el concepto de una trayectoria rugosa, el cual reemplazará el papel de una firma de nivel 2. Posteriormente se define la integral con respecto de una trayectoria rugosa para cierta clase de integrandos. Se estudia la estabilidad de esta integración con respecto a sus integrandos y sus integradores con lo cual se obtiene una especie de continuidad del operador integral. Por último se compara la integral de Riemann-Stieltjes con esta nueva noción de integral introducida. Aunque es posible generalizar esta teoría para incluir los casos de trayectorias α-Hölder con $\alpha \in \left(0, \frac{1}{3}\right]$ y con valores en un espacio de dimensión infinita en lugar de $\mathbb{R}^d$ decidimos no incluirlos para mantener claridad en nuestra exposición de los temas.

Por último, en el tercer capítulo, se extiende el concepto de movimiento Browniano al de movimiento Brownianos rugoso de Itô y de Stratonovich por medio de las integrales estocásticas de Itô y de Stratonovich. Se estudia la convergencia de las aproximaciones lineales al movimiento Browniano y el porque sus firmas convergen al movimiento Browniano rugoso de Stratonovich y no al de Itô. Con la teoría de integración introducida en el capítulo anterior se generalizan las integrales estocásticas de Itô y de Stratonovich a un espacio de integrandos más grande caracterizado por propiedades deterministas. Más aún, se ve que estás integrales se pueden resolver de manera trayectorial a cambio de trabajar con movimiento Brownianos rugoso. Se estudia una generalización a la fórmula de Itô para integración rugosa lo cual aclara la aparición de un término de segundo orden en ésta. Por último se ve que también se puede tratar a la integral reversa de Itô como una integral rugosa.

1 Firma de trayectorias de variación acotada

En este capítulo se define la firma de una trayectoria, el cual es un objeto que resume la información sobre las integrales iteradas de una trayectoria de variación acotada con respecto a sí misma y para lo cual no se utiliza más que la teoría clásica de integración de Riemann-Stieltjes. La forma de representar este objeto es por medio de tensores por lo que se estudian algunas propiedades de estos. Para caracterizar el espacio donde viven las firmas será necesario trabajar con grupos de Lie y álgebras de Lie, aunque en nuestro caso particular estos conceptos se simplifican bastante comparado con la teoría general. Posteriormente se introduce en nuestro espacio un concepto similar al de la norma en un espacio vectorial, con el fin de metrizarlo. Por último se caracteriza la firma, considerada como un operador, como el único levantamiento que preserva normas 1-variación en los espacios introducidos.

1.1. Firma de una trayectoria

Sea $[0,T] \subset \mathbb{R}$ un intervalo y consideremos una trayectoria $x : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ continua. Recordemos que x es de variación finita si existe una constante $M > 0$ tal que para toda $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \ldots < t_n = T\}$ partición de $[0,T]$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \left| x_{t_i} - x_{t_{i-1}} \right| \leq M$$

y en este caso se define $|x|_{1-var:[0,T]}$, su norma 1-variación en el intervalo $[0,T]$, como el supremo de las sumas anteriores sobre todas las particiones de $[0,T]$. Al espacio de trayectorias continuas y de variación finita lo denotaremos por $C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$.

Si $x \in C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$, continua y de variación finita, podemos definir las integrales iteradas del tipo

$$\int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_k}^{i_k} = \int_s^t \cdots \int_s^{u_2} dx_{u_1}^{i_1} \cdots dx_{u_k}^{i_k},$$

donde $x^i \in C^{1-var}([0,T], \mathbb{R})$ denota la i-ésima coordenada de x y estas integrales se entienden en el sentido de Riemann-Stieltjes.

Para simplificar la notación en los índices resulta útil hacer las siguientes convenciones. A la colección de integrales de primer orden

$$\left(\int_{s<u<t} dx_u^i \right)_{i=1,\ldots,d},$$

que no son otra cosa mas que los incrementos $x_t^i - x_s^i$ de las coordenadas, se les asocia el vector

$$\sum_{i=1}^{d} \left(\int_{s<u<t} dx_u^i \right) e_i \in \mathbb{R}^d,$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^d$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^d$. Más aún, se define

$$\int_{s<u<t} dx := \sum_{i=1}^{d} \left(\int_{s<u<t} dx_u^i \right) e_i \in \mathbb{R}^d.$$

La colección de integrales iteradas de segundo orden

$$\left(\int_{s<u_1<u_2<t} dx_{u_1}^i dx_{u_2}^j \right)_{i,j=1,\ldots,d}$$

involucra dos índices por lo cual se les identifica con el siguiente 2-tensor (o matriz):

$$\sum_{i,j=1}^{d} \left(\int_{s<u_1<u_2<t} dx_{u_1}^i dx_{u_2}^j \right) e_i \otimes e_j \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

y se define

$$\int_{s<u_1<u_2<t} dx_{u_1} \otimes dx_{u_2} := \sum_{i,j=1}^{d} \left(\int_{s<u_1<u_2<t} dx_{u_1}^i dx_{u_2}^j \right) e_i \otimes e_j \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

como el 2-tensor (o matriz) que contiene todas las iteradas integrales de orden 2 de x en el intervalo $[s,t]$.

En el caso general se identifica a la colección

$$\left(\int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_k}^{i_k} \right)_{i_1,\ldots,i_k=1}^{d}$$

con el k-tensor

$$\int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_k} := \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{d} \left(\int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_k}^{i_k} \right) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$$

donde $\left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$ es el espacio de k-tensores sobre $\mathbb{R}^d$ con $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}\}_{i_1,\ldots,i_k=1}^d$ su base canónica.

Se tiene que como espacios vectoriales $\left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$ y $\mathbb{R}^{d^k}$ son isomorfos por lo que es conveniente definir $\left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes 0} := \mathbb{R}$. Con estas notaciones en mente tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1. *Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ y $x \in C^{1-var}([0,T], \mathbb{R}^d)$, se define la firma de nivel N de x en el subintervalo $[s,t] \subset [0,T]$ como*

$$S_N(x)_{s,t} := \left(1, \int_{s<u<t} dx, \ldots, \int_{s<u_1<\ldots<u_N<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_N} \right) \in \bigoplus_{k=0}^N \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$$

la cual contiene toda la información sobre las integrales iteradas hasta orden N.

1.2. Álgebra tensorial truncada

Dado $N \in \mathbb{Z}^+$ definimos $T^N(\mathbb{R}^d)$ como la suma directa de los espacios vectoriales $\mathbb{R}, \mathbb{R}^d, \ldots, \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes N}$, es decir,

$$T^N(\mathbb{R}^d) := \oplus_{k=0}^N \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}.$$

Tenemos que una base para $T^N(\mathbb{R}^d)$ esta dada por

$$\{\otimes_{k=1}^n e_{i_k} \mid n \in \{1, \ldots, N\}, (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, N\}^n\} \cup \{1\}$$

y a esta nos referimos como la base canónica. Utilizaremos de manera intercambiable para $a = (a_0, \ldots, a_N) \in T^N(\mathbb{R}^d)$ con $a_k \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$ la notación $a = \sum_{k=0}^N a_k$ recordando que las sumas se hacen término término en los respectivos espacios $\left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$. Denotaremos la proyección en el k-ésimo factor por $\pi_k : T^N(\mathbb{R}^d) \to \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$ y a la proyección en los primeros k factores como $\pi_{0,k} : T^N(\mathbb{R}^d) \to T^k(\mathbb{R}^d)$ para $k \leq N$. Para $a \in T^N(\mathbb{R}^d)$ a $\pi_k(a)$ se le llama el nivel k de a y con la notación anteriormente introducida se tiene que $a = \sum_{k=0}^N \pi_k(a)$.

Queremos darle a $T^N(\mathbb{R}^d)$ una estructura de álgebra para lo cual definiremos el producto tensorial. Observemos que tenemos definida en la base canónica una operación no conmutativa $\otimes$ la cual mapea el par $(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l})$ al elemento $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}$. Observemos que si $k + l > N$ este elemento ya no pertenece a $T^N(\mathbb{R}^d)$ por lo cual definimos este producto como $0 = (0, \ldots, 0) \in T^N\left(\mathbb{R}^d\right)$ si $k + l > N$, es decir, truncamos el producto.

Extendemos este producto de forma única a todo el espacio de forma bilineal por lo cual dados $k, l \leq N$ y elementos $a \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}, b \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes l}$ los cuales tienen una representación canónica de la forma

$$a = \sum_{i_1,\ldots,i_k} a^{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}, \qquad b = \sum_{j_1,\ldots,j_l} b^{j_1,\ldots,j_l} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}$$

tienen como producto tensorial si $k + l > N$ al elemento 0 o si $k + l \leq N$

$$a \otimes b = \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1\ldots,j_l} a^{i_1,\ldots,i_k} b^{j_1,\ldots,j_l} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l} \in \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes(k+l)} \subset T^N(\mathbb{R}^d).$$

Más aún, por linealidad de la proyección tenemos para $k \leq N$ que y $a, b \in T^N(\mathbb{R}^d)$

$$\pi_k(a \otimes b) = \sum_{i=0}^k \pi_{k-i}(a) \otimes \pi_i(b).$$

Lema 1.2. *El espacio $(T^N(\mathbb{R}^d), +, \cdot, \otimes)$ es un álgebra asociativa no conmutativa con elemento neutro para $\otimes$ dado por $1 = (1, 0, \ldots, 0)$. A este espacio se le llama el álgebra tensorial truncada de nivel N.*

Demostración. Por la definición de $\otimes$ en la base se tiene que este producto es asociativo, es no conmutativo ya que $e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1$ y la distributividad con la suma es gracias a la bilinealidad. Observemos que para todo $k \leq N$

$$\pi_k(1 \otimes a) = \sum_{i=0}^k \pi_{k-i}(1) \otimes \pi_i(a) = \pi_0(1) \otimes \pi_k(a) = 1 \otimes \pi_k(a) = \pi_k(a)$$

por lo cual $a = 1 \otimes a$. De la misma forma se tiene que $a = a \otimes 1$. y por lo tanto 1 es el elemento neutro para $\otimes$ y se concluye el resultado. $\square$

Ahora definiremos una norma en $T^N(\mathbb{R}^d)$. Para esto primero dotemos a $\left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$ con un producto interno para el cual una base ortonormal esta dado por los elementos canónicos, es decir, $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}\}_{i_1,\ldots,i_k=1}^d$ por lo cual un elemento de la forma

$$a = \sum_{i_1,\ldots,i_k} a^{i_1,\ldots,i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$$

tiene una norma inducida por este producto interno dada por

$$|a|^2_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}} = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \left|a^{i_1,\ldots,i_k}\right|^2.$$

Más aún, si $b = \sum_{j_1,\ldots,j_l} b^{j_1,\ldots,j_l} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}$, entonces se tiene la siguiente relación de compatibilidad:

$$\begin{aligned}
|a \otimes b|^2_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes(k+l)}} &= \sum_{i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l} \left|a^{i_1,\ldots,i_k}\right|^2 \left|b^{j_1,\ldots,j_l}\right|^2 \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k} \left|a^{i_1,\ldots,i_k}\right|^2 \sum_{j_1,\ldots,j_l} \left|b^{j_1,\ldots,j_l}\right|^2 \\
&= |a|^2_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}} \, |b|^2_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes l}}.
\end{aligned}$$

Por último para $a \in T^N(\mathbb{R}^d)$ definimos

$$|a|_{T^N(\mathbb{R}^d)} = \max_{k=0,\ldots,N} |\pi_k(a)|_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}}$$

lo cual define una norma en $T^N(\mathbb{R}^d)$ y este último se convierte en un espacio de Banach por ser de dimensión finita (igual a $1 + d + \cdots + d^N$). Cuando no genere confusión se denotará esta norma simplemente por $|a|$.

Introducimos el operador dilatación que, como veremos más adelante, reemplazará el producto escalar de una manera más adecuada para nuestras necesidades.

Definición 1.3. *Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\delta_\lambda : T^N(\mathbb{R}^d) \to T^N(\mathbb{R}^d)$ el operador dilatación como $\pi_k(\delta_\lambda(a)) = \lambda^k \pi_k(a)$, es decir, si $a = \sum_{k=0}^N \pi_k(a)$ entonces $\delta_\lambda(a) = \sum_{k=0}^N \lambda^k \pi_k(a)$.*

1.3. Propiedades básicas de la firma de nivel N

En esta sección veremos que la firma de un trayectoria se puede ver como solución a una ecuación diferencial. Para esto observemos que dada una trayectoria $x \in C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ y un punto $t \in [0,T]$, la firma de nivel N dada por $S_N(x)_{0,t}$ es un elemento del espacio $T^N(\mathbb{R}^d)$, el cual es un espacio vectorial normado isomorfo al espacio euclidiano $\mathbb{R}^{1+d+\cdots+d^N}$. Escribamos a $x(t)$ en sus coordenadas, es decir,

$$x(t) = \sum_{i=1}^d x^i(t) e_i$$

y definamos los siguientes operadores $U_i : T^N(\mathbb{R}^d) \to T^N(\mathbb{R}^d)$ dados por $g \mapsto g \otimes e_i$, los cuales se pueden considerarar como campos vectoriales en $\mathbb{R}^{1+d+\cdots+d^N}$. Con esta notación y recordando que al elemento $(1, 0, \ldots, 0) \in T^N(\mathbb{R}^d)$ lo denotamos por 1 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.4. *Si $x \in C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ entonces para cualquier $s \in [0,T)$ fija tenemos que $S_N(x)_{s,\cdot} : [s,T] \to T^N(\mathbb{R}^d)$ satisface la siguiente ecuación diferencial.*

$$\begin{cases} dS_N(x)_{s,t} = \sum_{i=1}^d U_i\left(S_N(x)_{s,t}\right) dx_t^i \\ S_N(x)_{s,s} = 1 \end{cases}$$

la cual reescribiremos de manera mas compacta como

$$\begin{cases} dS_N(x)_{s,t} = S_N(x)_{s,t} \otimes dx_t^i \\ S_N(x)_{s,s} = 1. \end{cases}$$

Demostración. Por definición de $\int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_k}$ (ver sección 1.1) se tiene que el nivel $k \in \{1, \ldots, N\}$ de $S_N(x)_{s,t}$ esta dado por:

$$\begin{aligned}
&\pi_k(S_N(x)_{s,t}) = \int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_k} \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k} \left(\int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_k}^{i_k} \right) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \\
&= \sum_{i_k=1}^d \int_{s<u_k<t} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}} \left(\int_{s<u_1<\ldots<u_{k-1}<u_k} dx_{u_1}^{i_1} \ldots dx_{u_{k-1}}^{i_{k-1}} \right) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{k-1}} \right) \otimes e_{i_k}\, dx_{u_k}^{i_k} \\
&= \sum_{i=1}^d \int_{s<r<t} \pi_{k-1}(S_N(x)_{s,r}) \otimes e_i\, dx_r^i
\end{aligned}$$

Como $\pi_k(g \otimes e_i) = \pi_{k-1}(g) \otimes e_i$, la integración se realiza coordenada a coordenada y las proyecciones son lineales, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^d \int_{s<r<t} \pi_{k-1}(S_N(x)_{s,r}) \otimes e_i\, dx_r^i &= \sum_{i=1}^d \int_{s<r<t} \pi_k(S_N(x)_{s,r} \otimes e_i)\, dx_r^i \\
&= \sum_{i=1}^d \int_{s<r<t} \pi_k(U_i(S_N(x)_{s,r}))\, dx_r^i \\
&= \pi_k \left(\sum_{i=1}^d \int_{s<r<t} U_i(S_N(x)_{s,r})\, dx_r^i \right).
\end{aligned}$$

De esta manera see tiene igualdad en todos los niveles $1 \leq k \leq N$ y como en el nivel cero se tiene que $\pi_0(U_i(g)) = 0$ obtenemos que

$$S_N(x)_{s,t} = 1 + \sum_{i=1}^d \int_{s<r<t} U_i(S_N(x)_{s,r})\, dx_r^i$$

y con lo cual se concluye el resultado. $\square$

Gracias a ésta representación de la firma de una trayectoria como solución a una ecuación diferencial podemos deducir propiedades de ésta directamente de resultados sobre ecuaciones diferenciales. Estos resultados se pueden consultar en [Lyons and Qian, 2002, Capítulo 2]. Como primer consecuencia se tiene el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 1.5. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *con* $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|_{1-var;[0,T]} < +\infty$ *y la cual converge uniformemente a* $x \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$*, entonces se tiene que la trayectoria* $S_N(x_n)_{0,\cdot}$ *converge uniformemente a la trayectoria* $S_N(x)_{0,\cdot}$ *y en particular se tiene que* $\lim_{n\to\infty} S_N(x_n)_{0,T} = S_N(x)_{0,T}$.

De particular interés para el resultado anterior son las sucesiones formadas por las aproximaciones lineales por pedazos de x inducidas por particiones cuya norma se va 0, pues en este caso se tienen las hipótesis del teorema anterior y por lo tanto la convergencia de las firmas. Más aún, como veremos más adelante, la firma de trayectorias lineales tienen una representación bastante simple.

El siguiente resultado, consecuencia de su análogo para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, ver [Lyons and Qian, 2002, Capítulo 2], nos permite ver que la firma es una propiedad intrínseca de la trayectoria, en el sentido de que no depende de la parametrización que se utilice.

Teorema 1.6. *Sea* $x \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *y* $\phi : [T_1,T_2] \to [0,T]$ *continua, no decreciente y suprayectiva, entonces* $x\circ\phi \in C^{1-var}([T_1,T_2],\mathbb{R}^d)$ *y*

$$S_N(x)_{\phi(s),\phi(t)} = S_N(x\circ\phi)_{s,t}.$$

Recordemos que dadas dos trayectorias podemos definir una operación entre estas, la concatenación. Para esto sean $\gamma \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ y $\eta \in C^{1-var}\left([T,2T],\mathbb{R}^d\right)$ (sin perdida de generalidad por el resultado anterior podemos utilizar estos intervalos en su parametrización) y definimos su concatenación como $\gamma \sqcup \eta \in C^{1-var}\left([0,2T],\mathbb{R}^d\right)$ como

$$(\gamma\sqcup\eta)(t) := \begin{cases} \gamma(t) & t\in[0,T] \\ \eta(t)-\eta(T)+\gamma(T) & t\in[T,2T] \end{cases}$$

Observemos que si $x \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ y $0 \le s < u < t \le T$ entonces x coincide con la concatenación de sus restricciones a los intervalos $[s,u]$ y $[u,t]$, es decir,

$$x = x|_{[s,u]} \sqcup x|_{[u,t]}.$$

Con esta notación podemos enunciar el siguiente resultado, el cual relaciona las operaciones de concatenar trayectorias y el producto tensorial en firmas.

Teorema 1.7 (Teorema de Chen). *Sean* $\gamma \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *y* $\eta \in C^{1-var}([T,2T],\mathbb{R}^d)$*, entonces*

$$S_N(\gamma\sqcup\eta)_{0,2T} = S_N(\gamma)_{0,T}\otimes S_N(\eta)_{T,2T}.$$

Equivalentemente, si $x \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *y* $0 \le s < u < t \le T$ *entonces*

$$S_N(x)_{s,u} = S_N(x)_{s,u}\otimes S_N(x)_{u,t}.$$

Demostración. Demostraremos por inducción la segunda parte del Teorema. Para $N=1$ y $0 \leq s < u < t \leq T$ tenemos que

$$\begin{aligned} S_1(x)_{s,t} &= \left(1, \int_{s<r<t} dx_r\right) = (1, x_t - x_s) \\ &= (1, x_u - x_s + x_t - x_u) = (1, x_u - x_s) \otimes (1, x_t - x_s) \\ &= S_1(x)_{s,u} \otimes S_1(x)_{u,t} \end{aligned}$$

lo cual solo expresa la aditividad entre incrementos consecutivos. Supongamos el resultado cierto para algún $N \in \mathbb{Z}^+$. Observemos que en $T^{N+1}(\mathbb{R}^d)$ al integrar el nivel $N+1$ de $S_{N+1}(x)$ este aumenta de nivel, recordar los operadores U_i introducidos en 1.4, y debido al truncamiento desaparece. Con esto y por el Teorema 1.4.

$$\begin{aligned} S_{N+1}(x)_{s,u} &= 1 + \int_s^u S_{N+1}(x)_{s,r} \otimes dx_r \\ &= 1 + \int_s^u (S_N(x)_{s,r} + \pi_{N+1}(S_{N+1}(x)_{s,r})) \otimes dx_r \\ &= 1 + \int_s^u S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r + \int_s^u \pi_{N+1}(S_{N+1}(x)_{s,r}) \otimes dx_r \\ &= 1 + \int_s^u S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r. \end{aligned}$$

Observemos que en $T^{N+1}(\mathbb{R}^d)$ este último termino **no** es igual a $S_N(x)_{s,u} \in T^N(\mathbb{R}^d)$.

Por otro lado, como el nivel 0 de $\int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r$ es nulo y para todo $i \in \{0, \dots, N\}$ tenemos $\pi_i(S_N(x)_{s,t}) = \pi_i(S_{N+1}(x)_{s,t})$, entonces para $k \leq N+1$

$$\begin{aligned} \pi_k\left(S_N(x)_{s,t} \otimes \left(\int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r\right)\right) &= \sum_{i=0}^{k} \pi_i(S_N(x)_{s,t}) \otimes \pi_{k-i}\left(\int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i(S_N(x)_{s,t}) \otimes \pi_{k-i}\left(\int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i(S_{N+1}(x)_{s,t}) \otimes \pi_{k-i}\left(\int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \pi_i(S_{N+1}(x)_{s,t}) \otimes \pi_{k-i}\left(\int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r\right) \\ &= \pi_k\left(S_{N+1}(x)_{s,t} \otimes \left(\int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r\right)\right), \end{aligned}$$

por lo cual se tiene la igualdad en $T^{N+1}(\mathbb{R}^d)$:

$$S_N(x)_{s,t} \otimes \left(\int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r\right) = S_{N+1}(x)_{s,t} \otimes \left(\int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r\right).$$

Con lo anterior y la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned}
S_{N+1}(x)_{s,t} &= 1 + \int_s^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r \\
&= 1 + \int_s^u S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r + \int_u^t S_N(x)_{s,r} \otimes dx_r \\
&= S_{N+1}(x)_{s,u} + \int_u^t S_N(x)_{s,u} \otimes S_N(s)_{u,r} \otimes dx_r \\
&= S_{N+1}(x)_{s,u} + S_N(x)_{s,u} \otimes \int_u^t S_N(s)_{u,r} \otimes dx_r \\
&= S_{N+1}(x)_{s,u} + S_{N+1}(x)_{s,u} \otimes \int_u^t S_N(s)_{u,r} \otimes dx_r \\
&= S_{N+1}(x)_{s,u} \otimes \left(1 + \int_u^t S_N(s)_{u,r} \otimes dx_r\right) \\
&= S_{N+1}(x)_{s,u} \otimes S_{N+1}(x)_{u,t},
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado el resultado. □

Otra resultado que se deriva de su análogo de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, ver [Lyons and Qian, 2002, Capítulo 2], es el siguiente:

Teorema 1.8. *Sea $x \in C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ y denotemos por $\overleftarrow{x} \in C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ a la trayectoria de x recorrida en sentido opuesto, es decir, $\overleftarrow{x}(t) = x(T-t)$. Entonces*

$$S_N(x)_{0,T} \otimes S_N(\overleftarrow{x})_{0,T} = 1.$$

Demostración. Sin perdida de generalidad supongamos que $\overleftarrow{x}$ esta parametrizada en $[T, 2T]$ entonces por el Teorema de Chen

$$S_N(x)_{0,T} \otimes S_N(\overleftarrow{x})_{T,2T} = S_N(x \sqcup \overleftarrow{x})_{0,2T}.$$

Por otro lado $S_N(x \sqcup \overleftarrow{x})_{0,2T}$ es solución a una ecuación diferencial conducida por $x \sqcup \overleftarrow{x}$ y por lo cual es igual a su condición inicial, lo cual concluye el resultado. □

Por último un resultado que nos relaciona la firma con el operador dilatación (introducido en la definición 1.3) el cual nos dice que este operador resume la forma en que responde la firma ante dilataciones de las trayectorias.

Lema 1.9. *Sea $x \in C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\delta_\lambda : T^N(\mathbb{R}^d) \to T^N(\mathbb{R}^d)$ el operador dilatación, entonces*

$$S_N(\lambda x)_{s,t} = \delta_\lambda(S_N(x)_{s,t}).$$

Demostración. Sea $x \in C^{1-var}\left([0,1], \mathbb{R}^d\right)$, entonces $\lambda x \in C^{1-var}\left([0,1], \mathbb{R}^d\right)$ y $d(\lambda x) = \lambda dx$, por lo cual para $0 \leq s < t \leq 1$

$$\int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} d(\lambda x_1) \otimes \cdots \otimes d(\lambda x_k) = \lambda^k \int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_k,$$

es decir,

$$S_N(\lambda x)_{s,t} = \delta_\lambda(S_N(x)_{s,t}).$$

$\square$

1.4. Estructuras de Lie en $T^N(\mathbb{R}^d)$

Con los resultados de la sección anterior, en particular el Teorema de Chen (Teorema 1.7) y el Teorema 1.8, hemos notado la estructura de grupo que tiene el espacio de firmas. Para caracterizar este espacio serán necesarios introducir estructuras de grupos de Lie y álgebras de Lie en algunos subespacios de $T^N(\mathbb{R}^d)$.

Por defininición del operador S_N, tenemos que la primer coordenada de esta siempre es 1 por lo cual son de interés los siguientes conjuntos,

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) &:= \left\{ g \in T^N(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \pi_0(g) = 0 \right\} \\ 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) &:= \left\{ g \in T^N(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \pi_0(g) = 1 \right\}, \end{aligned}$$

los cuales son un subespacio lineal y un subespacio afín respectivamente.

Teorema 1.10. $(1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d), \otimes)$ *es un grupo de Lie.*

Demostración. Por definición en la base $\otimes$ es asociativo. Dados $g, h \in 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ tenemos que $\pi_0(g \otimes h) = \pi_0(g)\pi_0(h) = 1$ por lo cual

$$\otimes : 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) \times 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) \to 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d).$$

En el Lema 1.2 habiamos visto que el elemento 1 actua como neutro para $\otimes$. Ahora, si $g = 1 + a \in 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ con $a \in \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ entonces $g^{-1} = (1+a)^{-1} = \sum_{k=0}^N (-1)^k a^{\otimes k}$, esto pues

$$(1+a) \otimes \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k a^{\otimes k} \right) = \sum_{k=0}^N \left((-1)^k a^{\otimes k} + (-1)^k a^{\otimes (k+1)} \right) = 1 + (-1)^N a^{\otimes (N+1)}$$

y debido a nuestra definición en $T^N(\mathbb{R}^d)$ de $\otimes$ se truncan los tensores de niveles más alto que N y como $a \in \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ es un tensor al menos de nivel 1, entonces a^{N+1} es de nivel $N+1$ al menos y por lo tanto nulo, es decir

$$(1+a) \otimes \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k a^{\otimes k} \right) = 1 + (-1)^N a^{\otimes (N+1)} = 1.$$

La igualdad

$$\left(\sum_{k=0}^N (-1)^k a^{\otimes k} \right) \otimes (1+a) = 1$$

se obtiene de forma análoga. Por todo lo anterior obtenemos que $(1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d), \otimes)$ es un grupo.

Recordemos que la topología de $1+\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ esta inducida por la restricción de la métrica

$$\rho(g,h) = |g-h|_{T^N(\mathbb{R}^d)} = \max_{i=0,\dots,N} |\pi_i(g-h)|\,.$$

Más aún, $1+\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ es una variedad pues es un subespacio afín y por lo tanto es difeomorfo a un espacio vectorial real (de dimensión $d+d^2+\cdots+d^N$). Por otro lado si escribimos $a\otimes b$ en coordenadas este se reduce a sumas de productos de las coordenadas de a y b, es decir, polinomios de segundo grado de las coordenadas por lo cual $\otimes$ es diferenciable. Como vimos anteriormente la inversión de elementos en este grupo, $\cdot^{-1}$, visto como operador es combinación lineal de composiciones de $\otimes$ entonces es diferenciable (de hecho polinomial en las coordenadas) y con esto concluimos que $(1+\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d),\otimes)$ es un grupo de Lie. □

Todo grupo de Lie tiene asociado un álgebra de Lie y un mapeo exponencial que los relaciona (Ver [Warner, 2013, Capítulo 3]). En nuestro caso particular veremos que estos tienen una representación bastante simple. Primero observemos que $\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ al ser un subespacio vectorial es también un álgebra con respecto a $\otimes$ y en el cual podemos definir el conmutador

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)\times\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)\to\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) \quad \text{como} \quad [g,h]=g\otimes h-h\otimes g.$$

Teorema 1.11. $(\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d),[\cdot,\cdot])$ *es un álgebra de Lie.*

Demostración. Recordemos que un espacio vectorial dotado con un mapeo bilineal, antisimétrico que satisface la identidad de Jacobi es a lo que llamamos un álgebra de Lie. Claramente $[\,,]$ es bilineal pues $\otimes$ lo es. Como

$$[g,h]=g\otimes h-h\otimes g=-(h\otimes g-g\otimes h)=-[h,g]$$

entonces $[\,,]$ es antisimétrico. Por último, denotando a $g\otimes k$ como gk,

$$[g,[h,k]]=[g,hk-kh]=g(hk-kh)-(hk-kh)g=ghk-gkh-hkg+khg$$

y por lo cual

$$\begin{aligned}[g,[h,k]]+[h,[k,g]]+[k,[g,h]] =& ghk-gkh-hkg+khg\\ &+hkg-hgk-kgh+gkh\\ &+kgh-khg-ghk+hgk\\ &=0\end{aligned}$$

la cual es precisamente la identidad de Jacobi. □

Recordemos que el inverso de un elemento $1+a\in 1+\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ esta dado por el truncamiento en N de la serie de potencias asociada a la función real $t\mapsto(1+t)^{-1}$, lo cual nos motiva a definir los mapeos exponencial y logaritmo truncando sus representaciones en series de potencias y reemplazando las potencias por tensores, es decir,

$$\exp:\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)\to 1+\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) \qquad a\mapsto 1+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}a^{\otimes k}$$

$$\log:1+\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)\to\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d) \qquad 1+a\mapsto\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k+1}}{k}a^{\otimes k}$$

Observemos que podemos tratar a exp y log como series formales de potencias agregando los términos nulos que fueron truncados, es decir,

$$\exp(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^{\otimes k} \qquad \log(1+a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} a^{\otimes k}.$$

Para ver que una es inversa de otra es suficiente ver que las series formales de potencias

$$f[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \qquad g[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} X^k$$

son inversas, lo cual se sigue de que en el caso real $\exp : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y $\log : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ son inversas y el logaritmo tiene esta representación en serie de potencia en una vecindad de 1 por lo cual la composición de ambos lados de estas series formales es necesariamente la serie formal X, es decir,

$$(f \circ g)[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} X^k \right)^k = X$$

$$(g \circ f)[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right)^k = X.$$

Por último, como log consta de una suma finita no se tienen problemas de convergencia por lo que $\exp : t^N(\mathbb{R}^d) \to 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ y $\log : 1 + t^N(\mathbb{R}^d) \to \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ son inversas. Más aún, al ser funciones polinomiales de tensores son continuos (de hecho diferenciables) y por lo tanto homeomorfismos.

Se tiene que exp no es un homomorfismo de grupos ya que para el caso $N = 2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\exp(a) \otimes \exp(b) &= \left(1 + a + \frac{1}{2} a \otimes a\right) \otimes \left(1 + b + \frac{1}{2} b \otimes b\right) \\
&= 1 + (a+b) + \left(a \otimes b + \frac{1}{2}(a \otimes a + b \otimes b)\right) \\
&= 1 + (a+b) + \left(\frac{1}{2} a \otimes b + \frac{1}{2}(a+b)^{\otimes 2} - \frac{1}{2} b \otimes a\right) \\
&= 1 + \left(a + b + \frac{1}{2}[a,b]\right) + \frac{1}{2}(a+b)^{\otimes 2}
\end{aligned}$$

y por truncación al nivel 2 tenemos que $a \otimes [a,b], b \otimes [a,b], [a,b] \otimes [a,b]$ son todos nulos y por lo cual

$$\frac{1}{2}(a+b)^{\otimes 2} = \frac{1}{2}\left(a + b + \frac{1}{2}[a,b]\right)^{\otimes 2}$$

y

$$\exp(a) \otimes \exp(b) = \exp\left(a + b + \frac{1}{2}[a,b]\right).$$

Una forma cualitativa de escribir este resultado es la siguiente. Denotemos por $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ a la subálgebra de Lie generada por $\mathbb{R}^d \subseteq \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$, la cual se puede representar como

$$\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d) = \{0\} \oplus \mathbb{R}^d \oplus [\mathbb{R}^d]_2 \oplus \cdots \oplus [\mathbb{R}^2]_N$$

donde definimos recursivamente $[\mathbb{R}^d]_2 = [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]$ y $[\mathbb{R}^d]_{k+1} = [\mathbb{R}^d, [\mathbb{R}]_k]$. A $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ se le llama el álgebra de Lie libre nilpotente de nivel N y con esta notación la fórmula anterior nos dice que $\log(\exp(a) \otimes \exp(b)) \in \mathfrak{g}^2(\mathbb{R}^d)$ si $a, b \in \mathfrak{g}^2(\mathbb{R}^d)$.

Para demostrar el caso general es necesario utilizar un argumento diferente basado en ecuaciones diferenciales. La prueba de este resultado se puede consultar en [Friz and Victoir, 2010, p. 138]

Teorema 1.12. *(Fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff) Sean $a, b \in \mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ entonces*

$$\log\left(\exp(a) \otimes \exp(b)\right) = a + b + \sum_{k=2}^{N} g_k$$

donde $\{g_k\}_{k=2,\dots,N} \subseteq \mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ son universales en el sentido en que no dependen de el nivel de truncación N y cada g_k es combinación lineal de iteraciones de corchetes de la forma $[c_1, \dots, [c_{k-1}, c_k]]$ con $c_i \in \{a, b\}$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. En particular se tiene que $\log\left(\exp(a) \otimes \exp(b)\right) \in \mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$.

Como consecuencia directa tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.13. $\left(\exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right), \otimes\right)$ *es un subgrupo de* $(1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d), \otimes)$.

1.5. Teorema de Chow y $G^N(\mathbb{R}^d)$

El objetivo de esta sección es relacionar los conceptos introducidos en la sección anterior, con el operador S_N. Los conceptos introducidos anteriormente nos permitirán dar una caracterización del espacio de firmas. Como primer paso el operador exponencial nos ayudará a representar la firma de una trayectoria lineal.

Lema 1.14. *Sea $a \in \mathbb{R}^d \subset \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ y definamos $x : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ como $x(t) = ta$, entonces* $S_N(x)_{0,1} = \exp(a) \in 1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Observemos que $\int_s^t dx_r = \int_s^t a \otimes dr = a \otimes \int_s^t dr$ donde esta última no es mas que una integral de Riemann. Entonces

$$\begin{aligned} S_N(x)_{0,1} &= 1 + \sum_{k=1}^{N} \int_{0<r_1<\ldots<r_k<1} dx_{r_1} \otimes \cdots \otimes dx_{r_k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N} a^{\otimes k} \int_{0<r_1<\ldots<r_k<1} dr_1 \ldots dr_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} a^{\otimes k} = \exp(a) \end{aligned}$$

□

Por el Teorema 1.7 sabemos que la concatenación de trayectorias se traduce en producto tensorial de las firmas, por lo cual tenemos que si $x \in C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ es lineal por pedazos esta se puede ver como la concatenación de trayectorias de la forma del Lema 1.14 para algunos $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^d$ y por lo tanto la firma de x esta dada por

$$S_N(x)_{0,T} = \exp(v_1) \otimes \cdots \otimes \exp(v_m).$$

Reciprocamente cualquier elemento de la forma $\exp(v_1) \otimes \cdots \otimes \exp(v_m)$ con $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^d$ se puede expresar como la firma de una trayectoria lineal por pedazos la cual tiene incrementos entre los tramos lineales dados por los v_i. Nuestro siguiente resultado nos dice que cualquier elemento $g \in \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$ se puede obtener de esta forma.

Teorema 1.15 (Teorema de Chow). *Sea $g \in \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$, entonces existen $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^d$ tales que*

$$g = \exp(v_1) \otimes \cdots \otimes \exp(v_m).$$

Equivalentemente existe $x : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ lineal por pedazos tal que $g = S_N(x)_{0,1}$.

Demostración. Consideremos a $\{e_i \mid i \in \{1, \ldots, d\}\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^d$, y definamos para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$ la trayectoria

$$\phi^i_\cdot : \mathbb{R} \to \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right) \qquad t \mapsto \phi^i_t = \exp(te_i).$$

Para cada pareja ordenada de índices $(i,j) \in \{1, \ldots, d\}^2$ definimos $\phi^{(i,j)}_t : \mathbb{R} \to \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$ como

$$\phi^{(i,j)}_t = \exp(-te_j) \otimes \exp(-te_i) \otimes \exp(te_j) \otimes \exp(te_i) = \phi^j_{-t} \otimes \exp(-te_i) \otimes \phi^j_t \otimes \exp(te_i).$$

Observemos que el corchete $[te_j, te_i] = t^2[e_i, e_j] = O(t^2)$ (de aqui en adelante supondremos que la notación $O(f(t))$ y $o(f(t))$ es considerada cuando $t \to 0$) y de manera análoga se puede ver que cualquier iteración de corchetes de orden $m > 2$

$$[te_{k_m}, [\cdots, [te_{k_2}, te_{k_1}]]] = t^m[e_{k_m}, [\cdots, [e_{k_2}, e_{k_1}]]] \in [\mathbb{R}^d]_m$$

es de orden $O(t^m) = o(t^2)$ (cuando $t \to 0$) para cualesquiera $(k_1, \ldots, k_m) \in \{1, j\}^m$. Por la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (Teorema 1.12) tenemos que

$$\exp(-te_j) \otimes \exp(-te_i) = \exp\left(-te_j - te_i + \frac{1}{2}[-te_j, -te_i] + g^{i,j}_t\right)$$

donde $g^{i,j}_t \in [\mathbb{R}^d]_3 \oplus \cdots \oplus [\mathbb{R}^d]_N$ es combinación lineal de corchetes iterados de e_i y e_j de orden mayor a 2 y por lo anterior $g^{i,j}_t = o(t^2)$, es decir,

$$\exp(-te_j) \otimes \exp(-te_i) = \exp\left(-te_j - te_i + \frac{1}{2}[-te_j, -te_i] + o(t^2)\right).$$

De manera análoga se tiene que

$$\exp(te_j) \otimes \exp(te_i) = \exp\left(te_j + te_i + \frac{1}{2}[te_j, te_i] + o(t^2)\right).$$

Sean

$$a = -te_j - te_i + \frac{1}{2}[-te_j, -te_i] + o(t^2) = -te_j - te_i + O(t^2),$$

$$b = te_j + te_i + \frac{1}{2}[te_j, te_i] + o(t^2) = te_j + te_i + O(t^2),$$

entonces tenemos que $a + b = [te_j, te_i] + o(t^2) = t^2[e_i, e_j] + o(t^2)$ y utilizando la bilinealidad del conmutador, la antisimetría y que $[e_j, e_j] = 0 = [e_i, e_i]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[a, b] &= [-te_j - te_i + O(t^2), te_j + te_i + O(t^2)] \\
&= [-te_j, te_i] + [-te_i, te_j] + [-te_j - te_i, O(t^2)] + [O(t^2), te_j + te_i] + [O(t^2), O(t^2)] \\
&= [-te_j, te_i] - [te_j, -te_i] + o(t^2) = [-te_j, te_i] - [-te_j, te_i] + o(t^2) = o(t^2)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\phi_t^{(i,j)} &= \exp(-te_j) \otimes \exp(-te_i) \otimes \exp(te_j) \otimes \exp(te_i) \\
&= \exp\left(-te_j - te_i + \frac{1}{2}[-te_j, -te_i] + o(t^2)\right) \otimes \exp\left(te_j + te_i + \frac{1}{2}[te_j, te_i] + o(t^2)\right) \\
&= \exp(a) \otimes \exp(b) = \exp\left(a + b + \frac{1}{2}[a, b] + o(t^2)\right) \\
&= \exp\left(t^2[e_j, e_i] + o(t^2)\right).
\end{aligned}$$

De manera análoga se ve que si para $J = (i_1, \ldots, i_m) \in \{1, \ldots, d\}^m$ tenemos definida la trayectoria $\phi_\cdot^J : \mathbb{R} \to \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$ de tal manera que

$$\phi_t^J = \exp(t^{|J|} e_J + o(t^{|J|}))$$

donde $e_J := [e_{i_1}, [\ldots, [e_{i_{m-1}}, e_{i_m}]]]$ y para $I \in \{1, \ldots, d\}^{m+1}$ dado por $I = (i, J)$ definimos la trayectoria

$$\phi_\cdot^I : \mathbb{R} \to \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right) \qquad t \mapsto \phi_t^I = \phi_{-t}^J \otimes \exp(-te_i) \otimes \phi_t^J \otimes \exp(te_i),$$

entonces

$$\phi_t^I = \exp(t^{|I|} e_I + o(t^{|I|})).$$

Definimos $\psi_\cdot^I : \mathbb{R} \to \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$ como $\psi_t^I = \phi^I_{|t|^{1/|I|}}$ si $t \geq 0$ y para $t < 0$ como

$$\psi_t^J = \begin{cases} \phi^I_{-|t|^{1/|I|}} & \text{si } |I| \text{ es par} \\ \phi^J_{-|t|^{1/|I|}} \otimes \exp\left(-|t|^{1/|I|} e_i\right) \otimes \phi^J_{|t|^{1/|I|}} \otimes \exp\left(|t|^{1/|I|} e_i\right) & \text{si } |I| \text{ es impar} \end{cases}.$$

Es cuestión de verificar los signos para obtener que

$$\psi_t^I = \exp(te_I + o(t)).$$

De esta forma obtenemos que $\log(\psi_t^I) = te_I + o(t)$ es continuamente diferenciable y como exp tambien lo es (pues es polinomial en sus coordenadas) entonces concluimos que ψ_t^I es de clase C^1.

Fijemos una base $\{e_{I_k} \mid k \in \{1, \ldots, n\}\}$ de $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ y observemos que tenemos el isomorfismo de espacios vectoriales normados $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d) \cong \mathbb{R}^n$. Definamos $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ como

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = \log\left(\psi_{t_n}^{I_n} \otimes \cdots \otimes \psi_{t_1}^{I_1}\right).$$

Como el producto tensorial $\otimes$ y log son de clase C^1 (tambien son polinomiales en sus coordenadas), entonces φ es de clase C^1. Por otro lado, para $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\varphi(t_1,\dots,t_n) &= \log\left((1+t_ne_{I_n}+o(t_1))\otimes\cdots\otimes(1+t_1e_{I_1}+o(t_n))\right)\\
&= \log\left(1+t_ne_{I_n}+\cdots+t_1e_{I_1}+o(|t|)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(t_ne_{I_n}+\cdots+t_1e_{I_1}+o(|t|)\right)^{\otimes k}\\
&= t_ne_{I_n}+\cdots+t_1e_{I_1}+o(|t|).
\end{aligned}$$

Como

$$\varphi(0)=\log\left(\psi_0^{I_n}\otimes\cdots\otimes\psi_0^{I_1}\right)=\log\left(\exp(0)\otimes\cdots\otimes\exp(0)\right)=\log(1)=0$$

y el mapeo $A(t)=t_ne_{I_n}+\cdots+t_1e_{I_1}$ es lineal lo anterior implica que la derivada en 0 de φ es A. Como $\{e_{I_k}\mid k\in\{1,\dots,n\}\}$ es una base de $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$, entonces A es un operador lineal biyectivo y por el teorema de la función inversa concluimos que existe $r>0$ tal que φ^{-1} esta definida en la vecindad $B_r(0)\subseteq\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$.

Observemos que por construcción $\phi_t^{I_n}$ es la firma de una trayectoria lineal por pedazos con incrementos en las direcciones canónicas $\{e_1,\dots,e_d\}$. De igual manera $\psi_t^{I_n}$ es la firma de una trayectoria lineal por pedazos y por lo tanto $\exp(\varphi(t))$ también es la firma de una trayectoria lineal por pedazos.

Como exp es un difeomorfismo, entonces $\exp(B_r(0))$ es vecindad de $1=\exp(0)$ y por lo tanto existe $r'>0$ tal que $B_{r'}(1)\subseteq\exp(B_r(0))$. Dada $g\in\exp\left(\mathfrak{g}(\mathbb{R}^d)\right)$ existe $\epsilon>0$ tal que $\delta_\epsilon(g-1)\in B_{r'}(0)$, donde δ_ϵ es el operador dilatación, y como $\delta_\epsilon(g-1)=\delta_\epsilon(g)-1$ entonces $\delta_\epsilon(g)\in B_{r'}(1)\subseteq\exp(B_r(0))$. De esta forma $\log(\delta_\epsilon(g))\in B_r(0)$ en donde φ es invertible y por lo tanto existe $t\in\mathbb{R}^d$ tal que $\log(\delta_\epsilon(g))=\varphi(t)$ o equivalentemente $\delta_\epsilon(g)=\exp(\varphi(t))$, pero $\exp(\varphi(t))$ es la firma de una trayectoria lineal por pedazos, es decir, existe $x:[0,1]\to\mathbb{R}^d$ lineal por pedazos tal que $\delta_\epsilon(g)=S_N(x)_{0,1}$. Más aún, $y=\frac{1}{\epsilon}x:[0,1]\to\mathbb{R}^d$ es lineal por pedazos y por el Lema 1.9 tenemos que

$$S_N(y)_{0,1}=\delta_{\frac{1}{\epsilon}}S_N(x)_{0,1}=\delta_{\frac{1}{\epsilon}}(\delta_\epsilon(g))=g$$

con lo cual se concluye el resultado. □

El siguiente corolario nos da una especie de continuidad respecto a la longitud de las trayectorias encontradas en el teorema anterior.

Corolario 1.16. *Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\subset\exp(\mathfrak{g}(\mathbb{R}^d))$ convergente a $1\in\exp\left(\mathfrak{g}(\mathbb{R}^d)\right)$ en la topología inducida por la norma $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$. Sea x_k la trayectoria lineal por pedazos con firma g_k construida en el Teorema de Chow (Teorema 1.15). Entonces $\int_0^1|dx_k|$, que es la longitud de x_k, converge a 0 cuando $k\to\infty$.*

Demostración. Con la notación como en el Teorema 1.15 sean $\{I_k\mid k\in\{1,\dots,n\}\}$ multiíndices tales que $\{e_{I_k}\mid k\in\{1,\dots,n\}\}$ es la base para $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$. Más aaúnun, recordemos que por construcción, para cada $t\in\mathbb{R}$ fija, $\phi_t^{I_k}$ es la firma de una trayectoria lineal por pedazos con $2|I_k|$ incrementos de longitud $|t|$ en las direcciones canónicas $\{e_1,\dots,e_d\}$. De igual manera $\psi_t^{I_k}$ es la firma de una trayectoria lineal por pedazos, la cual depende de t y de

I_k y denotaremos por $y^{t,k}$, con $2|I_k|$ incrementos en las direcciones canónicas $\{e_1,\ldots,e_d\}$ pero ahora de longitud $|t|^{\frac{1}{|I_k|}}$ y por lo tanto

$$\int_0^1 \left|dy^{t,k}\right| \leq 2\,|I_k|\,|t|^{\frac{1}{|I_k|}}\,.$$

Por último para cada $t=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ tenemos que $\exp(\varphi(t))$ también es la firma de una trayectoria lineal, la cual depende de $t\in\mathbb{R}^d$ y denotaremos por y^t , que consta de la concatenación de las trayectorias $y^{t_k,k}$ asociadas a $\psi_{t_k}^{I_k}$ y por lo tanto

$$\int_0^1 \left|dy^t\right| \leq \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left|dy^{t_k,k}\right| \leq \sum_{k=1}^n 2\,|I_k|\,|t_k|^{\frac{1}{|I_k|}} \leq \sum_{k=1}^n 2\,|I_k|\,|t|^{\frac{1}{|I_k|}}\,.$$

Si $g_m\to 1$, entonces eventualmente $g_n\in B_{r'}(1)\subseteq\exp(B_r(0))$ y por lo tanto existe $t^{(n)}\in\mathbb{R}^d$ tal que $g_n=\exp(\varphi(t^{(n)}))$. Más aún, por continuidad y biyectividad de exp y φ, al menos en $B_r(0)$ para φ, tenemos que $t^{(n)}\to 0$. Sea $x_n=y^{t^{(n)}}$ donde $y^{t^{(n)}}$ es la trayectoria definida por $\exp(\varphi(t^{(n)}))$ entonces tenemos que

$$\int_0^1 |dx_n| \leq \int_0^1 \left|dy^{t^{(n)}}\right| \leq \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left|dy^{t^{(n)},k}\right| \leq \sum_{k=1}^n 2\,|I_k|\left|t^{(n)}\right|^{\frac{1}{|I_k|}} \to 0$$

pues tanto $n\in\mathbb{Z}^+$ como $\{I_k \mid k\in\{1,\ldots,n\}\}$ son fijos y $t^{(n)}\to 0$. $\square$

El Teorema de Chow es la herramienta principal que nos permitirá caracterizar el espacio de firmas.

Teorema 1.17. *Sean*

$$G^N(\mathbb{R}^d)=\left\{S_N(x)_{0,1}\,\middle|\, x\in C^{1-var}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)\right\}$$

el espacio de firmas de nivel N de trayectorias continuas con variación finita,

$$\exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)\subset 1+t^N(\mathbb{R}^d)$$

la imagen bajo el mapeo exponencial de la subálgebra de Lie $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\subseteq\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ y

$$\left\langle\exp(\mathbb{R}^d)\right\rangle=\left\{\exp(v_1)\otimes\cdots\otimes\exp(v_m)\,\middle|\, m\in\mathbb{Z}^+, v_1,\ldots,v_m\in\mathbb{R}^d\right\}$$

el subgrupo de $1+\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ generado por $\exp(\mathbb{R}^d)$. Entonces tenemos que

$$G^N(\mathbb{R}^d)=\exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)=\left\langle\exp(\mathbb{R}^d)\right\rangle$$

y por lo tanto $G^N(\mathbb{R}^d)$ es un subgrupo de Lie cerrado de $(1+\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d),\otimes)$, llamado el grupo libre nilpotente de nivel N sobre $\mathbb{R}^d$.

Demostración. Observemos que por el Teorema 1.6 el espacio de firmas no depende del intervalo en el que se consideren definidas las trayectorias.

i) Como $\mathbb{R}^d \subset \mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ entonces $\exp(\mathbb{R}^d) \subseteq \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$. Más aún, por el Corolario 1.13 $\exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$ es un grupo y por lo tanto

$$\left\langle \exp(\mathbb{R}^d)\right\rangle \subseteq \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right),$$

mientras que el Teorema de Chow (Teorema 1.15) nos da la otra contención y por lo tanto

$$\exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right) = \left\langle \exp(\mathbb{R}^d)\right\rangle.$$

ii) Por el Lema 1.14 tenemos que cualquier elemento de la forma $\exp(a)$ con $a \in \mathbb{R}^d$ es la firma de una trayectoria y por el Teorema de Chen (Teorema 1.7) tenemos que el producto de estos elementos es la firma de la concatención de las trayectorias respectivas (la cual podemos reparametrizar con dominio [0,1]) y por lo cual cualquier elemento de la forma $\exp(v_1) \otimes \cdots \otimes \exp(v_m)$ con $m \in \mathbb{Z}^+$ y $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^d$ pertenece a $G^N(\mathbb{R}^d)$, es decir,

$$\left\langle \exp(\mathbb{R}^d)\right\rangle \subset G^N(\mathbb{R}^d).$$

iii) Al ser $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ un subálgebra de Lie de $\mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d)$ es en particular un subespacio vectorial de dimensión finita y por lo tanto cerrado. Al ser exp un homeomorfismo entonces $\exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$ es tambien cerrado. Por otro lado, dado $x \in C^{1-var}\left([0,1], \mathbb{R}^d\right)$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^{1-var}\left([0,1], \mathbb{R}^d\right)$ de aproximaciones lineales por pedazos de x tales que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|_{1-var;[0,1]} \leq |x|_{1-var;[0,1]} < +\infty$$

y las cuales convergen uniformemente a x. Al ser x_n lineal por pedazos tenemos que $S_N(x_n)_{0,1} \in \left\langle \exp(\mathbb{R}^d)\right\rangle = \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$. Por el Teorema 1.4 tenemos que $S_N(x_n)_{0,1}$ converge a $S_N(x)_{0,1}$ y como $\exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$ es cerrado, entonces $S_N(x)_{0,1} \in \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right)$, es decir,

$$G^N(\mathbb{R}^d) \subset \exp\left(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)\right) = \left\langle \exp(\mathbb{R}^d)\right\rangle$$

y por lo tanto se tiene la igualdad deseada de los conjuntos.

Por último como $\left\langle \exp(\mathbb{R}^d)\right\rangle$ es un subgrupo cerrado $(1 + \mathfrak{t}^N(\mathbb{R}^d), \otimes)$ y por un teorema clásico de grupos de Lie (ver [Warner, 2013, p. 110]) tenemos que $\left\langle \exp(\mathbb{R}^d)\right\rangle$ es un subgrupo de Lie.

□

1.6. Métrica de Carnot-Carathéodory

EL Teorema de Chow nos garantiza para todo $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$ la existencia de una trayectoria continua x de longitud finita, es decir, $x \in C^{1-var}\left([0,1], \mathbb{R}^d\right)$ tal que $S_N(x)_{0,1} = g$. Esto nos permite preguntarnos sobre la existencia de trayectorias continuas cuyas firmas sean g y que tengan longitud mínima. Para esto primero necesitaremos reparametrizar las trayectorias de variación acotada para que sean Lipschitz.

Lema 1.18. *Dado $x \in C^{1-var}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ entonces x se puede reparametrizar de tal manera que sea Lipschitz continua (1-Hölder), es decir, $y \in C^{1-Höl}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ o equivalentemente*

$$|y|_{1-Höl;[0,1]} := \sup_{s,t\in[0,1]} \frac{|y_s - y_t|}{|s-t|} < +\infty.$$

Más aún, esto se puede hacer manteniendo la velocidad de y constante, es decir, que y sea la integral indefinida de algún $\dot{y} \in L^\infty\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ y $|\dot{y}(t)|$ sea constante casi dondequiera para $t \in [0,1]$ relativo a la medida de Lebesgue.

Demostración. Sea $\phi : [0,1] \to [0,1]$ dada por $\phi_t = \frac{|x|_{1-var;[0,t]}}{|x|_{1-var;[0,1]}}$ entonces ϕ es continua, no decreciente, constante en los mismos intervalos donde x lo es y suprayectiva en $[0,1]$, por lo cual se puede definir y de tal manera que $y \circ \phi = x$. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ s\neq t}} \frac{|y_s - y_t|}{|s-t|} &= \sup_{\substack{u,v\in[0,1]\\ u\neq v}} \frac{|(y\circ\phi)_u - (y\circ\phi)_v|}{|\phi_u - \phi_v|} = \sup_{\substack{u,v\in[0,1]\\ v<u}} \frac{|x_u - x_v|}{|\phi_u - \phi_v|} \\
&\leq \sup_{\substack{u,v\in[0,1]\\ v<u}} \frac{|x|_{1-var;[v,u]}}{|\phi_u - \phi_v|} = |x|_{1-var;[0,1]} \sup_{\substack{u,v\in[0,1]\\ v<u}} \frac{|x|_{1-var;[u,v]}}{\left||x|_{1-var;[0,u]} - |x|_{1-var;[0,v]}\right|} \\
&= |x|_{1-var;[0,1]} \sup_{\substack{u,v\in[0,1]\\ v<u}} \frac{|x|_{1-var;[u,v]}}{\left||x|_{1-var;[v,u]}\right|} = |x|_{1-var;[0,1]} < +\infty
\end{aligned}$$

por lo cual $y \in C^{1\text{-}Höl}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$. Observemos que de hecho en lo anterior lo que tenemos es una igualdad, pues como

$$|y_t - y_s| \leq ||y||_{1-Höl;[s,t]} \leq ||y||_{1-Höl;[0,1]} |t-s|$$

entonces

$$|y|_{1-var;[0,1]} \leq |y|_{1-Höl;[0,1]}.$$

Más aún, por la invarianza bajo reparametrizaciones de la variación tenemos que

$$|y|_{1-var;[0,1]} = |x|_{1-var;[0,1]},$$

por lo que concluimos que

$$|x|_{1-var;[0,1]} = |y|_{1-Höl;[0,1]}.$$

Por otro lado, recordemos que el mapeo $y \mapsto \int_0^t y dt$ es un isomorfismo entre los espacios de Banach $L^\infty\left([0,1],\mathbb{R}^d\right) \to C_0^{1-Höl}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ (ver [Friz and Victoir, 2010, p. 37]) por lo cual para $y \in C^{1-Höl}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ definida anteriormente, para la cual podemos suponer sin perdida de generalidad que $y_0 = 0$ y por lo tanto $y \in C_0^{1-Höl}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$, existe $\dot{y} \in L^\infty\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ de tal manera que $y_t = \int_0^t \dot{y}_s ds$.

Gracias a la invarianza de la norma 1-variación tenemos que

$$|y|_{1-var;[0,\phi(t)]} = |x|_{1-var;[0,t]} = |x|_{1-var;[0,1]}\, \phi(t) = \int_0^{\phi(t)} |x|_{1-var;[0,1]}\, ds.$$

Por otro lado, como $C^{1-H\ddot{o}l}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right) \subset C^{1-var}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$, tenemos que

$$\int_0^{\phi(t)} |x|_{1-var;[0,1]}\, ds = |y|_{1-var;[0,\phi(t)]} = \int_0^{\phi(t)} |dy| = \int_0^{\phi(t)} |\dot{y}_s|\, ds$$

por lo cual $|\dot{y}_s|$ es igual a la constante a $|x|_{1-var;[0,1]}$ c.d. en $[0,1]$. $\square$

Teorema 1.19. *Sea $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$, definimos su "norma Carnot-Carathéodory" como*

$$||g||_C = \inf\left\{ \int_0^1 |d\gamma| \;\middle|\; \gamma \in C^{1-var}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right) \text{ y } S_N(\gamma)_{0,1} = g \right\}.$$

Entonces $||g||_C < +\infty$ y existe $\gamma^* \in C^{1-var}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ que minimiza esta cantidad, es decir, $S_N(\gamma^*)_{0,1} = g$ y $||g||_C = \int_0^1 |d\gamma^*|$. Más aún, γ^* se puede parametrizar de tal forma que sea Lipschitz continua y con velocidad constante, es decir, $|\dot{\gamma}^*(r)|$ es constante c.d $r \in [0,1]$ y cuando se elija esta γ^* que minimiza se supondra de esta forma.

Demostración. Por el Teorema de Chow $||g||_C < +\infty$ para todo $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$. Consideremos $\{\gamma^n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset C^{1-var}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ tal que $S_N(x)_{0,1} = g$ y $c_n := |\gamma^n|_{1-var;[0,1]} \downarrow ||g||_C$. Por el Lema 1.18 podemos elegir $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subset C^{1-H\ddot{o}l}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ con velocidad constante y

$$c_n = |\gamma_n|_{1-H\ddot{o}l;[0,1]} \equiv |\dot{\gamma}_n|.$$

Observemos que como $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es convergente entonces $\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} c_n < +\infty$, lo cual implica la equicontinuidad de $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ya que para $s,t \in [0,1]$ con $s < t$

$$|\gamma_n(s) - \gamma_n(t)| \le |\gamma_n|_{1-H\ddot{o}l;[0,1]} |t-s| \le \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} c_n |t-s| < +\infty.$$

Más aún, como la firma no depende del punto inicial de la trayectoria podemos suponer que $\gamma_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ por lo cual tenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y $t \in [0,1]$

$$|\gamma_n(t)| \le |\gamma_n(t) - \gamma_n(0)| \le |\gamma_n|_{1-var;[0,1]} \le \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} c_n < +\infty$$

por lo cual la sucesión es uniformemente acotada.

Por el Teorema de Arzelá-Ascoli $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ contiene una subsucesión uniformemente convergente, la cual sin perdida de generalidad la tomaremos como la sucesión original, es decir existe $\gamma^* \in C\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ tal que $\gamma_n \to \gamma$ uniformemente en $[0,1]$.

Recordemos que, como consecuencia del Lema de Fatou, si $\gamma_n \to \gamma^*$ puntualmente en $[s,t]$ entonces

$$|\gamma^*|_{1-var;[s,t]} \le \liminf_{n\in\mathbb{Z}^+} |\gamma_n|_{1-var;[s,t]}$$

por lo cual para $s,t \in [0,1]$ con $s < t$:

$$|\gamma^*(s) - \gamma^*(t)| \le |\gamma|_{1-var;[s,t]} \le \liminf_{n\in\mathbb{Z}^+} |\gamma_n|_{1-var;[s,t]} \le |t-s| \liminf_{n\in\mathbb{Z}^+} |\gamma_n|_{1-H\ddot{o}l;[0,1]},$$

y por lo tanto

$$|\gamma^*|_{1-H\ddot{o}l;[s,t]} \le \liminf_{n\in\mathbb{Z}^+} |\gamma_n|_{1-H\ddot{o}l;[s,t]} = \lim_{n\in\mathbb{Z}^+} c_n = ||g||_C < +\infty$$

lo cual muestra que $\gamma^* \in C^{1-Höl}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$. Más aún, al ser 1-Hölder es absolutamente continua por lo cual existe $\dot{\gamma}^* \in L^\infty\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ tal que γ^* es la integral indefinida de $\dot{\gamma}^*$ y $|\gamma^*|_{1-Höl;[0,1]} = \int_0^1 |\dot{\gamma}^*(t)|\, dt$.

Por continuidad de la firma (Teorema 1.5) tenemos que

$$S_N(\gamma)_{0,1} = \lim_{n\to\infty} S_N(\gamma_n)_{0,1} = \lim_{n\to\infty} g = g.$$

Por útlimo nos falta ver que $\int_0^1 |d\gamma^*| = ||g||_C$. Observemos que por definición de $||g||_C$ como ínfimo tenemos la desigualdad

$$||g||_C \leq \int_0^1 |d\gamma^*|\,.$$

Por otro lado, como $|\gamma^*|_{1-Höl;[0,1]} \leq ||g||_C$ y $\int_0^1 |d\gamma^*| = \int_0^1 |\dot{\gamma}^*(t)|\, dt = |\gamma^*|_{1-Höl;[0,1]}$ tenemos

$$\int_0^1 |d\gamma^*| \leq ||g||_C$$

lo cual concluye la prueba. □

Recordemos que $G^N(\mathbb{R}^d)$ no tiene estructura de espacio vectorial sino de grupo de Lie, a pesar de esto podemos definir gracias al operador dilatación una noción similar a la de una norma en un espacio vectorial a la cual le llamaremos simplemente una norma homogénea en $G^N(\mathbb{R}^d)$.

Definición 1.20. *Una función continua $|||\cdot||| : G^N(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^+$ que satisface:*

i) $|||g||| = 0$ si y solamente si $g = 1$ el elemento neutro en $G^N(\mathbb{R}^d)$,

ii) es homogénea respecto al operador dilatación, es decir, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$

$$|||\delta_\lambda(g)||| = |\lambda|\, |||g|||,$$

se dice una norma homogénea. Más aún, se dice que esta es simétrica si $|||g||| = |||g^{-1}|||$ para todo $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$ y subaditiva si $|||g \otimes h||| \leq |||g||| + |||h|||$ para todo $g, h \in G^N(\mathbb{R}^d)$.

Esta noción de norma homogénea nos induce, de manera análoga al caso de espacios vectoriales, una métrica.

Teorema 1.21. *Sea $|||\cdot|||$ una norma homogénea en $G^N(\mathbb{R}^d)$ simétrica y subaditiva y definamos $d : G^N(\mathbb{R}^d) \times G^N(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^+$ como $d(g,h) = \left|\left|\left|g^{-1} \otimes h\right|\right|\right|$, entonces d es una métrica en $G^N(\mathbb{R}^d)$ la cual es invariante por la izquierda, es decir, $d(k \otimes g, k \otimes h) = d(g,h)$ para todo $g, h, k \in G^N(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Tenemos que

$$d(g,h) = 0 \iff \left|\left|\left|g^{-1} \otimes h\right|\right|\right| = 0 \iff g^{-1} \otimes h = 1 \iff g = h.$$

Por otro lado, por la subaditividad tenemos

$$\left|\left|\left|g^{-1} \otimes h\right|\right|\right| = \left|\left|\left|g^{-1} \otimes k \otimes k^{-1} \otimes h\right|\right|\right| \leq \left|\left|g^{-1} \otimes k\right|\right| + \left|\left|\left|k^{-1} \otimes h\right|\right|\right|,$$

es decir, d satisface la desigualdad del triangulo. La simetría de d es consecuencia de la simetría de $|||\cdot|||$ ya que

$$d(g,h) = \left|\left|\left|g^{-1} \otimes h\right|\right|\right| = \left|\left|\left|(g^{-1} \otimes h)^{-1}\right|\right|\right| = \left|\left|\left|h^{-1} \otimes g\right|\right|\right| = d(h,g).$$

Por lo anterior tenemos que d define una métrica en $G^N(\mathbb{R}^d)$ y por último tenemos que dados $g, h, k \in G^N(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} d(k \otimes g, k \otimes h) &= \left|\left|\left|(k \otimes g)^{-1} \otimes k \otimes h\right|\right|\right| \\ &= \left|\left|\left|g^{-1} \otimes k^{-1} \otimes k \otimes h\right|\right|\right| \\ &= \left|\left|\left|g^{-1} \otimes h\right|\right|\right| = d(g,h) \end{aligned}$$

□

Ahora veremos que $||\cdot||_C$, la "norma de Carnot-Carathéodory", es efectivamente una norma homogénea simétrica y subaditiva en $G^N(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 1.22. *$||\cdot||_C$ es una norma homogenea, simétrica y subaditiva en $G^N(\mathbb{R}^d)$. Más aún, es una función continua con la topología que $G^N(\mathbb{R}^d)$ hereda como subespacio de $T^N(\mathbb{R}^d)$, la cual recordemos que esta inducida por la norma de espacio vectorial $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$ y esta dada por $d(g,h) = |g-h|_{T^N(\mathbb{R}^d)} = \text{máx}_{k=1,\ldots,N} |\pi_k(g-h)|_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}}$ para todo $g, h \in \mathbb{R}^d$.*

Demostración. Por el Teorema 1.19 para cada $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$ existe una trayectoria, la cual denotaremos por γ_g^*, la cual satisface:

$$\gamma_g^* \in C^{1-var}\left([0,1], \mathbb{R}^d\right), \; S_N(\gamma_g^*)_{0,1} = g \;\text{ y }\; \int_0^1 \left|d\gamma_g^*\right| = ||g||_C \,.$$

Si $g = 0$, entonces cualquier trayectoria constante tiene como firma a g y su longitud es nula, por lo cual $||g||_C = 0$. Si $||g||_C = 0$ entonces

$$\left|\gamma_g^*\right|_{1-var;[0,1]} = \int_0^1 \left|d\gamma_g^*\right| = ||g||_C = 0,$$

por lo cual γ_g^* es constante y

$$g = S_N(\gamma_g^*)_{0,1} = 1.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces por el Lema 1.9 $S_N(\lambda\gamma_g^*)_{0,1} = \delta_\lambda(S_N(\gamma_g^*)) = \delta_\lambda(g)$ y por definición de $||\cdot||_C$ como ínfimo, tenemos que

$$||\delta_\lambda(g)||_C \leq \left|\lambda\gamma_g^*\right|_{1-var;[0,1]} = |\lambda| \left|\gamma_g^*\right|_{1-var;[0,1]} = |\lambda| \, ||g||_C \,.$$

Por el argumento anterior obtenemos que

$$||g||_C = ||\delta_{\lambda^{-1}}(\delta_\lambda(g))||_C \leq \frac{1}{|\lambda|} \, ||\delta_\lambda(g)||_C \,,$$

es decir,

$$|\lambda| \, ||g||_C \leq ||\delta_\lambda(g)||_C$$

y $||\cdot||_C$ es homogénea en $G^N(\mathbb{R}^d)$.

Por el Teorema 1.8 tenemos que $g^{-1} = \left(S^N(\gamma_g^*)_{0,1}\right)^{-1} = S_N(\overleftarrow{\gamma_g^*})_{0,1}$ donde $\overleftarrow{\gamma_g^*}$ es la trayectoria γ_g^* recorrida en sentido opuesto y, sin perdida de generalidad, parametrizada en [0,1]. Con esto obtenemos que

$$||g^{-1}||_C \leq \left|\overleftarrow{\gamma_g^*}\right|_{1-var;[0,1]} = \left|\gamma_g^*\right|_{1-var;[0,1]} = ||g||_C \,.$$

Intercambiando $g = (g^{-1})^{-1}$ por g^{-1} se obtiene la otra desigualdad con lo cual se concluye que $||\cdot||_C$ es simétrica.

Sean $g, h \in G^N(\mathbb{R}^d)$ y supongamos que la concatenación $\gamma_g^* \sqcup \gamma_h^*$ esta parametrizada en [0,1] entonces por el Teorema de Chen (Teorema 1.7)

$$g \otimes h = S_N(\gamma_g^*)_{0,1} \otimes S_N(\gamma_h^*)_{0,1} = S_N(\gamma_g^* \sqcup \gamma_h^*)_{0,1}$$

y por definición de $||\cdot||_C$

$$||g \otimes h||_C \leq \left|\gamma_g^* \sqcup \gamma_h^*\right|_{1-var;[0,1]} = \left|\gamma_g^*\right|_{1-var;[0,1]} + |\gamma_h^*|_{1-var;[0,1]} = ||g||_C + ||h||_C \,,$$

por lo que $||\cdot||_c$ es subaditiva.

Si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq G^N(\mathbb{R}^d)$ converge a g, es decir, $|g_n - g|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \to 0$, entonces por continuidad de $\otimes$ y $^{-1}$ tenemos que $g_n^{-1} \otimes g$ converge a 1 y por subaditividad tenemos que

$$||g||_C = \left|\left|g_n \otimes g_n^{-1} \otimes g\right|\right|_C \leq ||g_n||_C + \left|\left|g_n^{-1} \otimes g\right|\right|_C \,,$$

de igual forma utilizando la subaditividad y la simetría

$$||g_n||_C = \left|\left|g_n^{-1}\right|\right|_C = \left|\left|g_n^{-1} \otimes g \otimes g^{-1}\right|\right|_C \leq \left|\left|g^{-1}\right|\right|_C + \left|\left|g_n^{-1} \otimes g\right|\right|_C = ||g||_C + \left|\left|g_n^{-1} \otimes g\right|\right|_C \,,$$

por lo cual se cumple

$$|\ ||g_n||_C - ||g||_C\ | \leq \left|\left|g_n^{-1} \otimes g\right|\right|_C \,.$$

Por definición $||\cdot||_C$ esta dominada por la longitud de cualquier trayectoria que tenga la firma adecuada. Como $g_n^{-1} \otimes g$ converge a 1 en $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$ por el Corolario 1.16 existen trayectorias lineales por pedazos x_n cuya firma es $g_n^{-1} \otimes g$ y tales que su longitud converge a 0, con lo cual tenemos que

$$|\ ||g_n||_C - ||g||_C\ | \leq \left|\left|g_n^{-1} \otimes g\right|\right|_C \leq \int_0^1 |dx_k| \to 0$$

y por lo tanto $||g_n||_C \to ||g||_C$ cuando $k \to \infty$, es decir, $||\cdot||_C$ es continua y por lo tanto una norma homogénea simétrica y subaditiva. ☐

Por los Teoremas 1.21 y 1.22 la norma de Carnot-Carathéodory define un métrica en $G^N(\mathbb{R}^d)$, la cual llamaremos métrica de Carnot-Carathéodory y denotaremos por d_C. Esta métrica es invariante por la izquierda y continua con respecto a la topología original de $G^N(\mathbb{R}^d)$, es decir, convergencia en $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$ implica convergencia en la topología inducida por d_C. Nuestro siguiente objetivo será demostrar que estas topologías son la misma.

Lema 1.23. *La función* $\max_{i=1,\ldots,N} |\pi_i(g)|^{\frac{1}{i}}$ *define una norma homogénea en* $G^N(\mathbb{R}^d)$.

Demostración. Denotemos por $|||g||| = \text{máx}_{k=1,\dots,N}\{|\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}}\}$ para $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$.

Sea $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$, entonces $\pi_0(g) = 1$, por lo que $|||g||| = 0$ si y solamente si $\pi_k(g) = 0$ para todo $k \in \{1, \dots, N\}$ si y solamente si $g = 1$.

Dados $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que $\pi_k(\delta_\lambda(g)) = \lambda^k \pi_k(g)$ por lo cual

$$|||\delta_\lambda(g)||| = \underset{k=1,\dots,N}{\text{máx}}\{|\pi_k(\delta_\lambda(g))|^{\frac{1}{k}}\} = \underset{k=1,\dots,N}{\text{máx}}\{\lambda^k\,|\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}}\} = |\lambda|\underset{k=1,\dots,N}{\text{máx}}\{|\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}}\},$$

es decir,

$$|||\delta_\lambda(g)||| = |\lambda|\,|||g|||\,.$$

Por último veamos que $|||\cdot|||$ es continua. Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G^N(\mathbb{R}^d)$ convergente con límite $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$ bajo $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$, es decir

$$|g_n - g|_{T^N(\mathbb{R}^d)} = \underset{k=0,\dots,N}{\text{máx}}\{|\pi_k(g_n - g)|\} \to 0.$$

Como $|\cdot|$ denota la norma euclideana en el respectivo espacio y π_k es lineal, entonces se satisface para todo $k \in \{1, \dots, N\}$ que

$$||\pi_k(g_n)| - |\pi_k(g)|| \leq |\pi_k(g_n - g)| \leq |g_n - g|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \to 0,$$

es decir, $|\pi_k(g_n)| \to |\pi_k(g)|$ lo cual a su vez implica que $|\pi_k(g_n)|^{\frac{1}{k}} \to |\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}}$ para todo $k \in \{1, \dots, N\}$. Por continuidad del máximo en un número finito de argumentos tenemos que

$$|||g_n||| = \underset{k=1,\dots,N}{\text{máx}}\{|\pi_k(g_n)|^{\frac{1}{k}}\} \to \underset{k=1,\dots,N}{\text{máx}}\{|\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}}\} = |||g|||$$

y por lo tanto $|||\cdot|||$ es continua. □

Recordemos que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes. En nuestro caso $G^N(\mathbb{R}^d) \subset T^N(\mathbb{R}^d)$ y este último es un espacio vectorial de dimensión finita por lo cual no es de sorprenderse que se tenga el resultado análogo, la equivalencia entre normas homogéneas.

Teorema 1.24. *Todas las normas homogéneas en $G^N(\mathbb{R}^d)$ son equivalentes, es decir, si $|||\cdot|||_1$ y $|||\cdot|||_2$ son dos normas homogéneas, entonces existe $C > 0$ tal que para todo $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$ se cumple*

$$\frac{1}{C}\,|||g|||_1 \leq |||g|||_2 \leq C\,|||g|||_1\,.$$

Demostración. Como la equivalencia de normas es una relación de equivalencias basta ver el caso en que $|||\cdot|||_1$ esta dada por aquella del Lema 1.23 y $|||\cdot|||_2$ es cualquier otra norma.

Sea $B = \left\{g \in G^N(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, |||g|||_1 = 1\right\}$, entonces B es cerrado en $G^N(\mathbb{R}^d)$ por continuidad de $|||\cdot|||_1$. Por el Teorema 1.17 $G^N(\mathbb{R}^d)$ es cerrado en $T^N(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto B es cerrado en $T^N(\mathbb{R}^d)$. Por otro lado, si $|||g|||_1 = 1$, entonces para todo $k \in \{1, \dots, N\}$ tenemos que $|\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}} \leq 1$ por lo cual $|\pi_k(g)| \leq 1$ y $|g - 1|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \leq 1$, es decir

$$B \subset B_1^{|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}}(1) = \left\{g \in T^N(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, |g - 1|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \leq 1\right\}.$$

Al $B_1^{|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}}(1)$ ser una bola cerrada con respecto a la norma $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$ del espacio vectorial de dimensión finita $T^N(\mathbb{R}^d)$ esta es compacta por el teorema de Heine-Borel por lo cual B es un cerrado dentro de un compacto y por lo tanto compacto.

Por definición de norma homogénea $|||\cdot|||_2$ es continua y por lo tanto alcanza su máximo y su mínimo en el compacto B, es decir, existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leq |||g|||_2 \leq M$$

para todo $g \in B$ y como $g \neq 1$ para todo $g \in B$, ya que $|||g|||_1 = 0$ si y solo si $g = 1$, entonces $|||g|||_2 > 0$ para todo $g \in B$ y por lo cual $m > 0$.

Como $1 \in G^N(\mathbb{R}^d)$ satisface trivialmente la desiguldad deseada para toda $C > 0$ basta probarla en el caso que $g \in G^N(\mathbb{R}^d) \setminus \{1\}$. Sea $\lambda = \frac{1}{|||g|||_1}$ con lo cual $|||\delta_\lambda(g)|||_1 = 1$ y por lo tanto

$$m \leq |||\delta_\lambda(g)|||_2 \leq M.$$

Por homogeneidad de las normas, esto implica que

$$|||g|||_1 \, m = \frac{1}{\lambda} m \leq |||g|||_2 \leq \frac{1}{\lambda} M = |||g|||_1 \, M,$$

con lo que basta tomar $C \geq \text{máx}\{M, \frac{1}{m}\} > 0$ para obtener el resultado. □

El siguiente resultado nos proporciona una manera de relacionar una norma homogénea y la norma $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$, la cual no permitirá probar la equivalencia de las convergencias.

Teorema 1.25. *Sea $|||\cdot|||$ una norma homogénea en $G^N(\mathbb{R}^d)$. Entonces existe $C > 0$ tal que para todo $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$:*

$$\frac{1}{C} \text{mín}\{|||g|||\,, |||g|||^N\} \leq |g-1|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \leq C \, \text{máx}\{|||g|||\,, |||g|||^N\}$$

y

$$\frac{1}{C} \text{mín}\{|g-1|_{T^N(\mathbb{R}^d)}\,, |g-1|^{\frac{1}{N}}_{T^N(\mathbb{R}^d)}\} \leq |||g||| \leq C \, \text{máx}\{|g-1|_{T^N(\mathbb{R}^d)}\,, |g-1|^{\frac{1}{N}}_{T^N(\mathbb{R}^d)}\}.$$

Demostración. Primero observemos que las dos desigualdades son equivalentes por lo que basta probar una de ellas. Más aún, por la equivalencia de normas (Teorema 1.25) es suficiente probar el resultado para la norma definida en el Lema 1.23 la cual esta dada para $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$ por

$$|||g||| = \max_{k=1,\ldots,N} |\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}}.$$

Recordemos que para $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$ tenemos que $\pi_0(g-1) = 0$ y $\pi_k(g-1) = \pi_k(g)$ para $k \in \{1, \ldots, N\}$ por lo que

$$|g-1|_{T^N(\mathbb{R}^d)} = \max_{k=1,\ldots,N} |\pi_k(g)|.$$

Por otro lado, si $|g-1|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \leq 1$, entonces para $k \in \{1\ldots, N\}$ tenemos que $\pi_k(g) \leq 1$ y por lo tanto

$$|\pi_k(g)|^{\frac{N}{k}} \leq |\pi_k(g)| \leq |\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}}.$$

Tomando máximos sobre $k \in \{1 \ldots, N\}$ concluimos que

$$|||g|||^N \leq |g-1|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \leq |||g||| \, .$$

Si $|g-1|_{T^N(\mathbb{R}^d)} > 1$ definimos $J = \{k \in \{1, \ldots, N\} \mid |\pi_k(g)| > 1\} \neq \emptyset$ y podemos escribir

$$|g-1| = \max_{k \in J} |\pi_k(g)|$$

Como $|\pi_k(g)| > 1$ ocurre si y solo si $|\pi_k(g)|^y > 1$ para cualquier $y > 0$, entonces tenemos que

$$|||g||| = \max_{k \in J} |\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}} \, .$$

Observemos que si $|\pi_k(g)| > 1$, entonces

$$|\pi_k(g)|^{\frac{1}{k}} \leq |\pi_k(g)| \leq |\pi_k(g)|^{\frac{N}{k}}$$

por lo cual tomando máximos sobre $k \in J$ concluimos que

$$|||g||| \leq |g-1|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \leq |||g|||^N \, .$$

En cualquiera de los dos casos obtenemos que

$$\min\{|||g||| \, , |||g|||^N\} \leq |g-1|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \leq \min\{|||g||| \, , |||g|||^N\}.$$

$\square$

Corolario 1.26. *La topología inducida por la métrica de Carnot-Carathéodory coincide con la topología que $G^N(\mathbb{R}^d)$ hereda como subespacio de $\left(T^N(\mathbb{R}^d), |\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}\right)$.*

Demostración. Sea $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+} \subset G^N(\mathbb{R}^d)$ y $g \in G^N(\mathbb{R}^d)$.

Observemos que al ser $(G^N(\mathbb{R}^d), \otimes)$ un grupo de Lie $\otimes$ y $^{-1}$ son continuas y por lo tanto $g_n \to g$ en $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$ si y solo si $g_n^{-1} \otimes g \to 1$ en $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$, es decir,

$$|g_n - g|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \to 0 \iff \left|g_n^{-1} \otimes g - 1\right|_{T^N(\mathbb{R}^d)} .$$

Por otro lado, recordemos que la metrica de Carnot-Carathoédory esta dada por

$$d_C(g,h) = \left|\left|g^{-1} \otimes h\right|\right|_C$$

donde $||\cdot||_C$ es la norma homogénea de Carnot-Carathéodory en $G^N(\mathbb{R}^d)$ a la cual le podemos aplicar el Teorema 1.25 para ver que

$$\left|g_n^{-1} \otimes g - 1\right|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \to 0 \iff d_C(g_n, g) = \left|\left|g_n^{-1} \otimes g\right|\right|_C \to 0$$

y concluir que

$$|g_n - g|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \to 0 \iff d_C(g_n, g) \to 0$$

con lo cual que se concluye el resultado. $\square$

1.7. Levantamiento de $C^{1-var}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$

El objetivo de esta sección es caracterizar al operador S_N como levantamiento de $C^{1-var}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ a $C^{1-var}\left([0,1],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$, en el cual la variación en este espacio se entiende con respecto a la métrica de Carnot-Carathéodory. De hecho por la equivalencia de normas homogéneas (Teorema 1.24) se tiene que el conjunto $C^{1-var}\left([0,1],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$ es el mismo para cualquier distancia inducida por una norma homogénea, aunque el valor de la variación de una función cambia en función de la norma homogénea que se considera.

Primero un poco de notación, dado $x \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ (en general una trayectoria cualquiera que tome valores en un espacio vectorial) definimos para $0 \leq s < t \leq T$ a $x_{s,t} := x_t - x_s$ el incremento de s a t.

Gracias al Teorema de Chen (Teorema 1.15) tenemos que para $0 \leq s < t \leq T$

$$S_N(x)_{0,t} = S_N(x)_{0,s} \otimes S_N(x)_{s,t}$$

y por la estructura de grupo en $G^N(\mathbb{R}^d)$ podemos escribir

$$S_N(x)_{s,t} = S_N(x)_{0,s}^{-1} \otimes S_N(x)_{0,t}.$$

Esto quiere decir que la firma se puede ver como una trayectoria y no como una función de dos parámetros puesto que la trayectoria dada por $S_N(x)_{0,\cdot} : [0,T] \to G^N(\mathbb{R}^d)$ nos permite recuperar cualquier valor $S_N(x)_{s,t}$ y en correspondencia con la notación de incrementos $x_{s,t}$ se puede interpretar a $S_N(x)_{s,t}$ como el incremento de la firma de s a t.

Formalizamos la noción de variación en $G^N(\mathbb{R}^d)$.

Definición 1.27. *Sea $y : [0,t] \to G^N(\mathbb{R}^d)$ continua (por el Corolario 1.26 puede ser con respecto a $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$ o cualquier norma homogénea). Decimos que $y \in C^{1-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$ si existe $M > 0$ tal que para toda partición $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{n} d_C(y_{t_{i-1}}, y_{t_i}) = \sum_{i=1}^{n} \left|\left|y_{t_{i-1}}^{-1} \otimes y_{t_i}\right|\right|_C = \sum_{i=1}^{n} \left|\left|y_{t_{i-1},t_i}\right|\right|_C \leq M$$

y en este caso se denota por $||y||_{1-var;[0,T]} < +\infty$ al supremo sobre todas las particiones de estas sumas.

Teorema 1.28. *Sea $x \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$, entonces $S_N(x) \in C^{1-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$ y*

$$||S_N(x)||_{1-var;[0,T]} = |x|_{1-var;[0,T]}.$$

Demostración. Sean $0 \leq s < t \leq T$ y $x \in C^{1-var}([0,T],\mathbb{R}^d)$. Como $\pi_1\left(S_N(x)_{s,t}\right) = x_{s,t}$ entonces cualquier trayectoria $y \in C^{1-var}\left([0,1],\mathbb{R}^d\right)$ que satisfaga $S_N(x)_{s,t} = S_N(y)_{0,1}$ cumple que $x_{s,t} = y_{0,1}$. Más aún,

$$|x_{s,t}| = |y_{0,1}| \leq |y|_{1-var;[0,1]}$$

y por la definición de $||S_N(x)_{s,t}||_C$ como el ínfimo de las longitudes de estas y's tenemos que para todo $0 \leq s < t \leq T$

$$|x_{s,t}| \leq ||S_N(x)_{s,t}||_C$$

lo cual a su vez implica que

$$|x|_{1-var;[0,T]} \leq ||S_N(x)||_{1-var;[0,T]}\,.$$

Por otro lado, ya que x restringido a $[s,t]$ es una trayectoria cuya firma coincide con $S_N(x)_{s,t}$ la definición de $||S_N(x)_{s,t}||_C$ nos garantiza que

$$||S_N(x)_{s,t}||_C \leq \int_s^t |dx| = |x|_{1-var;[s,t]}\,.$$

Como la función $(s,t) \to |x|_{1-var;[s,t]}$ es aditiva, es decir, para $0 \leq s < r < t \leq T$

$$|x|_{1-var;[s,r]} + |x|_{1-var;[r,t]} = |x|_{1-var;[s,t]}$$

dada cualquier partición $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left|S_N(x)_{t_{i-1},t_i}\right|\right|_C \leq \sum_{i=1}^{n} |x|_{1-var;[t_{i-1},t_i]} = |x|_{1-var;[0,T]}$$

por lo cual

$$||S_N(x)||_{1-var;[0,T]} \leq |x|_{1-var;[0,T]}$$

y lo cual concluye el resultado. □

Introducimos otra norma homogénea la cual nos será de utilidad más adelante.

Lema 1.29. *Definimos* $||\cdot||_{\log} : G^N(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ *como* $||g||_{\log} = \max_{i=1,\ldots,N} |\pi_i(\log(g))|^{\frac{1}{i}}$. *Entonces* $||\cdot||_{\log}$ *define una norma homogénea simétrica.*

Demostración. Como $\log(1) = 0$ entonces $||1||_{\log} = 0$. Reciprocamente, si $||g||_{\log} = 0$, entonces $\pi_k(\log(g)) = 0$ para todo $k \in \{1,\ldots,N\}$. Por lo tanto $\log(g) = 0$ y esto implica que $g = \exp(0) = 1$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, observemos que para $k \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que

$$\delta_\lambda(g)^{\otimes k} = \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda^j \pi_k(g)\right)^{\otimes k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{N} \lambda^{\sum_{j=1}^k i_j} \otimes_{j=1}^k \pi_{i_j}(g),$$

como el nivel $\sum_{j=1}^k i_j$ de este tensor es $\otimes_{j=1}^k \pi_{i_j}(g)$ tenemos que para $m \in \{1,\ldots,N\}$

$$\pi_m(\delta_\lambda(g)^{\otimes k}) = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ \sum_{j=1}^k i_j = m}} \lambda^m \otimes_{j=1}^k \pi_{i_j}(g) = \lambda^m \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ \sum_{j=1}^k i_j = m}} \otimes_{j=1}^k \pi_{i_j}(g) = \lambda^m \pi_m(g^{\otimes k}).$$

Gracias a lo anterior y a la linealidad de las proyecciones podemos ver que

$$\begin{aligned}
\pi_m(\log(\delta_\lambda(g))) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \pi_m(\delta_\lambda(g)^{\otimes k}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \lambda^m \pi_m(g^{\otimes k}) \\
&= \lambda^m \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \pi_m(g^{\otimes k}) = \lambda^m \pi_m(\log(g))
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}||\delta_\lambda(g)||_{\log} &= \max_{m=1,\ldots,N} |\pi_m(\log(\delta_\lambda(g)))|^{\frac{1}{m}} = \max_{m=1,\ldots,N} |\lambda^m \pi_m(\log(g))|^{\frac{1}{m}} \\ &= |\lambda| \max_{m=1,\ldots,N} |\pi_m(\log(g))|^{\frac{1}{m}} = |\lambda| \, ||g||_{\log}\end{aligned}$$

Para la simetría observemos que como el conmutador $[g, g^{-1}] = 0$, entonces se tiene que $\log(g^{-1}) = -\log(g)$ por lo que

$$\left|\left|g^{-1}\right|\right|_{\log} = \max_{i=1,\ldots,N} |\pi_i(-\log(g))|^{\frac{1}{i}} = \max_{i=1,\ldots,N} |\pi_i(\log(g))|^{\frac{1}{i}} = ||g||_{\log}.$$

Por último falta probar que $||\cdot||_{\log}$ es una función continua. Recordemos que en el Lema 1.23 se probo que la función $g \to \max_{i=1,\ldots,N} |\pi_i(g)|^{\frac{1}{i}}$ definida en $G^N(\mathbb{R}^d)$ es continua pero el mismo argumento muestra que si esta función la definimos con dominio en $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ entonces esta es continua y basta observar que $||\cdot||_{\log}$ es la composición de esta función con la función continua $\log : G^N(\mathbb{R}^d) \to \mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$. □

El siguiente lema nos permitirá comparar trayectorias en $G^N(\mathbb{R}^d)$ cuyos primeros $N-1$ niveles coinciden.

Lema 1.30. *Sean $x, y : [0,T] \to G^N(\mathbb{R}^d)$ trayectorias continuas tales que $x_0 = y_0 = 1$ y $\pi_{0,N-1}(x) = \pi_{0,N-1}(y)$, es decir, sus coordenadas son iguales excepto quizá la última. Definimos*

$$h : [0,T] \to \mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d) \qquad h_t = \log(x_t^{-1} \otimes y_t),$$

entonces existe $C > 0$ que depende solo de N tal que para todo $0 \le s < t \le T$

$$|h_{s,t}|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \le C(||x_{s,t}||_C + ||y_{s,t}||_C)^N$$

Demostración. Primero veamos que el elemento $\pi_{0,N-1}(x_t^{-1})$ es el inverso de $\pi_{0,N-1}(x_t)$ en $G^{N-1}(\mathbb{R}^d)$, esto ya que en $G^N(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}\pi_{0,N-1}(x_t^{-1}) \otimes \pi_{0,N-1}(x_t) &= \left(x_t^{-1} - \pi_N(x_t^{-1})\right) \otimes (x_t - \pi_N(x_t)) \\ &= x_t^{-1} \otimes x_t - \pi_N(x_t^{-1}) \otimes x_t - x_t^{-1} \otimes \pi_N(x_t) + \pi_N(x_t^{-1}) \otimes \pi_N(x_t) \\ &= 1 - \pi_N(x_t^{-1}) \otimes x_t - x_t^{-1} \otimes \pi_N(x_t),\end{aligned}$$

pues $\pi_N(x_t^{-1}) \otimes \pi_N(x_t)$ es un tensor de nivel $2N$ y se trunca. Más aún, como

$$\begin{aligned}\pi_N(x_t^{-1}) \otimes x_t =& \pi_N(x_t^{-1}) \otimes \left(1 + \sum_{k=1}^N \pi_k(x_t)\right) \\ =& \left(\pi_N(x_t^{-1}) + \sum_{k=1}^N \pi_N(x_t^{-1}) \otimes \pi_k(x_t)\right) \\ =& \pi_N(x_t^{-1})\end{aligned}$$

pues $\pi_N(x_t^{-1})\otimes\pi_k(x_t)$ es un tensor de nivel $N+k>N$ para $k\in\{1,\dots,N\}$ y por lo tanto nulo en $G^N(\mathbb{R}^d)$. De la misma manera

$$x_t^{-1}\otimes\pi_N(x_t)=\pi_N(x_t)$$

por lo que si el producto $\pi_{0,N-1}(x_t^{-1})\otimes\pi_{0,N-1}(x_t)$ anterior lo consideramos en $G^{N-1}(\mathbb{R}^d)$, entonces se tiene que

$$\pi_{0,N-1}(x_t^{-1})\otimes\pi_{0,N-1}(x_t)=1 \text{ en } G^{N-1}(\mathbb{R}^d).$$

Gracias a lo anterior podemos escribir para $k\in\{0,\dots,N-1\}$

$$\begin{aligned}\pi_k(x_t^{-1}\otimes y_t)&=\sum_{i=0}^{k}\pi_i(x_t^{-1})\otimes\pi_{k-i}(y_t)\\&=\sum_{i=0}^{k}\pi_i(\pi_{0,N-1}(x_t^{-1}))\otimes\pi_{k-i}(\pi_{0,N-1}(y_t))\\&=\sum_{i=0}^{k}\pi_i(\pi_{0,N-1}(x_t^{-1}))\otimes\pi_{k-i}(\pi_{0,N-1}(y_t))\\&=\pi_k(\pi_{0,N-1}(x_t^{-1})\otimes\pi_{0,N-1}(y_t))=\begin{cases}1 \text{ si } k=0\\0 \text{ si } k\in\{1,\dots,N-1\}\end{cases}\end{aligned}$$

y por lo cual tenemos la igualdad en $G^N(\mathbb{R}^d)$

$$\exp(h_t)=x_t^{-1}\otimes y_t=1+\pi_N(x_t^{-1}\otimes y_t)$$

y por lo cual $\exp(h_t)$ solo tiene la entrada de nivel N como termino no trivial.

Sea $z_t=\pi_N(x_t^{-1}\otimes y_t)$. Dado $g\in G^N(\mathbb{R}^d)$ tenemos que $g=1+\sum_{k=1}^N\pi_k(g)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}g\otimes\exp(h_t)&=\left(1+\sum_{k=1}^{N}\pi_k(g)\right)\otimes(1+z_t)\\&=1+\sum_{k=1}^{N}\pi_k(g)+z_t+\sum_{k=1}^{N}\pi_k(g)\otimes z_t\end{aligned}$$

pero los términos $\pi_k(g)\otimes z_t\in(\mathbb{R}^d)^{\otimes(N+k)}$ y por lo tanto se truncan en $G^N(\mathbb{R}^d)$ y tenemos la igualdad

$$g\otimes\exp(h_t)=1+\sum_{k=1}^{N}\pi_k(g)+z_t$$

de manera análoga se tiene que

$$\begin{aligned}
\exp(h_t) \otimes g &= (1 + z_t) \otimes \left(1 + \sum_{k=1}^{N} \pi_k(g)\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N} \pi_k(g) + z_t + \sum_{k=1}^{N} z_t \otimes \pi_k(g) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{N} \pi_k(g) + z_t \\
&= g \otimes \exp(h_t)
\end{aligned}$$

y por lo tanto se concluye que $\exp(h_t)$ (y a su vez $\exp(h_t)^{-1} = \exp(-h_t)$) conmuta con todos los elementos de $G^N(\mathbb{R}^d)$. En particular tenemos:

$$\begin{aligned}
y_{s,t} = y_s^{-1} \otimes y_t &= x_s^{-1} \otimes x_s \otimes y_s^{-1} \otimes x_t \otimes x_t^{-1} \otimes y_t \\
&= x_s^{-1} \otimes (x_s^{-1} \otimes y_s)^{-1} \otimes x_t \otimes \exp(h_t) \\
&= x_s^{-1} \otimes \exp(h_s)^{-1} \otimes x_s \otimes \exp(h_t) \\
&= x_s^{-1} \otimes \exp(-h_s) \otimes x_t \otimes \exp(h_t) \\
&= x_s^{-1} \otimes x_t \otimes \exp(-h_s) \otimes \exp(h_t).
\end{aligned}$$

Para juntar este producto dentro de la exponencial necesitamos ver, por la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (Teorema 1.12) que h_s y h_t conmutan. Para esto recordemos que $\exp(h_t) = 1 + z_t$ con $z_t \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$ por lo cual $z_t^{\otimes k} \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes kN}$ y $z_t^{\otimes k} = 0$ en $G^N(\mathbb{R}^d)$ para $k > 1$. Por lo tanto podemos escribir

$$h_t = \log(1 + z_t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z_t^{\otimes k} = z_t \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes N},$$

es decir, h_t solo tiene la entrada de nivel N y por lo tanto $h_t \otimes h_s \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes 2N}$ y $h_t \otimes h_s = 0$ en $G^N(\mathbb{R}^d)$. De manera análoga $h_s \otimes h_t = 0$ y por lo tanto estos conmutan, esto implica que

$$\exp(-h_s) \otimes \exp(h_t) = \exp(h_t - h_s) = \exp(h_{s,t})$$

y por lo tanto

$$y_{s,t} = x_s^{-1} \otimes x_t \otimes \exp(-h_s) \otimes \exp(h_t) = x_{s,t} \otimes \exp(h_{s,t}),$$

o equivalentemente

$$x_{s,t}^{-1} \otimes y_{s,t} = \exp(h_{s,t})$$

lo cual nos da una compatibilidad entre los incrementos en el grupo $G^N(\mathbb{R}^d)$ del lado izquierdo y los incrementos en el espacio vectorial $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ bajo el mapeo exponencial en el lado derecho.

Como h_t y h_s solo tienen la entrada de nivel N como termino no trivial, entonces $\pi_k(h_{s,t}) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, N-1\}$ y

$$|h_{s,t}|_{T^N(\mathbb{R}^d)} = \max_{k=0,\dots,N} |\pi_k(h_{s,t})| = |\pi_N(h_{s,t})| .$$

Utilizando la norma homogénea definida en el Lema 1.29 para $\exp(h_{s,t}) \in G^N(\mathbb{R}^d)$ obtenemos que

$$||\exp(h_{s,t})||_{\log} = \max_{k=1,\ldots,N} |\pi_k(\log(\exp(h_{s,t})))|^{\frac{1}{k}} = \max_{k=1,\ldots,N} |\pi_k(h_{s,t})|^{\frac{1}{k}} = |\pi_N(h_{s,t})|^{\frac{1}{N}} ,$$

por lo cual obtenemos la identidad

$$|h_{s,t}|_{T^N(\mathbb{R}^d)} = |\pi_N(h_{s,t})| = ||\exp(h_{s,t})||_{\log}^N$$

Recordando que $\exp(h_{s,t}) = x_{s,t}^{-1} \otimes y_{s,t}$, utilizando la equivalencia de normas homogéneas (Teorema 1.24) entre $||\cdot||_{\log}$ y la norma de Carnot-Carathéodory $||\cdot||_C$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$|h_{s,t}|_{T^N(\mathbb{R}^d)} = ||\exp(h_{s,t})||_{\log}^N \leq C\,||\exp(h_{s,t})||_C^N = C\left|\left|x_{s,t}^{-1} \otimes y_{s,t}\right|\right|_C^N .$$

Por la subaditividad y simetría de la norma de Carnot-Carathéodory (Teorema 1.22) tenemos que

$$|h_{s,t}|_{T^N(\mathbb{R}^d)} \leq C\left|\left|x_{s,t}^{-1} \otimes y_{s,t}\right|\right|_C^N \leq C\left(\left|\left|x_{s,t}^{-1}\right|\right|_C + ||y_{s,t}||_C\right)^N \leq C\left(||x_{s,t}||_C + ||y_{s,t}||_C\right)^N ,$$

con lo cual se concluye el resultado. □

Para evitar trivialidades por el punto inicial de una trayectoria definimos los conjuntos

$$C_0^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right) = \left\{x \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right) \,\middle|\, x(0) = 0\right\}$$

y

$$C_o^{1-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right) = \left\{x \in C^{1-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right) \,\middle|\, x(0) = 1\right\}.$$

Teorema 1.31. *Para $N \geq 1$ tenemos que $S_N : C_0^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right) \to C_o^{1-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$ es una biyección con inversa π_1 la cual satisface para todo $0 \leq s < t \leq T$:*

$$||S_N(x)||_{1-var;[s,t]} = |x|_{1-var;[s,t]} .$$

Demostración. Sea $x \in C_0^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. Recordemos que podemos considerar $S_N(x)$ como una trayectoria definiendo $S_N(x)_t = S_N(x)_{0,t}$. Por el Teorema 1.28 y como $S_N(x)_{0,0} = 1$ entonces $S_N(x) \in C_o^{1-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$. Más aún,

$$\pi_1(S_N(x)_t) = \pi_1(S_N(x)_{0,t}) = x_{0,t} = x_t - x_0 = x_t$$

por lo que $\pi_1 \circ S_N$ es la identidad en $C_o^{1-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$.

Mostremos por inducción sobre N que $S_N \circ \pi_1$ es la identidad en $C_o^{1-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$.

Consideremos el caso $N = 1$ y sea $y \in C_o^{1-var}\left([0,T],G^1(\mathbb{R}^d)\right)$. Definamos $x : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ como $x_t = \pi_1(y_t)$ por lo que $y_t = 1 + x_t = (1, x_t)$, entonces tenemos para $0 \leq s < t \leq T$ que

$$y_{s,t} = y_s^{-1} \otimes y_t = 1 + \pi_1(y_t) - \pi_1(y_s) = 1 + x_{s,t}$$

por lo cual

$$x_{s,t} = \pi_1(y_t) - \pi_1(y_s) = \pi_1(y_{s,t}).$$

Si consideramos la norma homogénea $|||\cdot|||$ definida en el Lema 1.23 obtenemos que

$$|x_{s,t}| = |||y_{s,t}||| \,.$$

Utilizando la equivalencia entre normas homogéneas obtenemos la existencia de $C > 0$ tal que para toda $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \ldots < t_n = T\}$ partición se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \left|x_{t_{i-1},t_i}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\left|\left|y_{t_{i-1},t_i}\right|\right|\right| \leq C \sum_{i=1}^{n} \left|\left|y_{t_{i-1},t_i}\right|\right|_C \leq C \left|\left|y\right|\right|_{1-var;[0,T]}$$

por lo que $x \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ y como $y_0 = 1 = (1,0)$, entonces $x_0 = \pi_1(y_0) = 0$ por lo que $x \in C_0^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. Basta observar que

$$S_N(\pi_1(y))_t = S_N(x)_t = 1 + x_t - x_0 = 1 + x_t = y_t$$

por lo que $S_n \circ \pi_1$ es la identidad en $C_o^{1-var}\left([0,T], G^1(\mathbb{R}^d)\right)$.

Supongamos para $N \geq 2$ que $S_{N-1} \circ \pi_1$ es la identidad en $C_o^{1-var}\left([0,T], G^{N-1}(\mathbb{R}^d)\right)$. Dado $x \in C_o^{1-var}\left([0,T], G^N(\mathbb{R}^d)\right)$ definimos $y_t = S_N(\pi_1(x))_t$, por lo que debemos probar es que $x_t = y_t$ para todo $t \in [0,T]$. Por hipótesis de inducción tenemos que $S_{N-1} \circ \pi_1$ es la identidad por lo que aplicado al elemento $\pi_{0,N-1}(x)$ obtenemos que

$$\pi_{0,N-1}(x) = S_{N-1}(\pi_1(\pi_{0,N-1}(x))) = S_{N-1}(\pi_1(x))$$

y como $S_{N-1} = \pi_{0,N-1} \circ S_N$ obtenemos que

$$\pi_{0,N-1}(x) = S_{N-1}(\pi_1(x)) = \pi_{0,N-1}(S_N(\pi_1(x))) = \pi_{0,N-1}(y).$$

Como $x \in C_0^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ entonces $x_0 = 1$ y como y es la firma de la trayectoria $\pi_1(x)$ entonces $y_0 = 1$ por lo que podemos utilizar el Lema 1.30 para concluir que existe $C > 0$ tal que si $h_t = \log(x_t^{-1} \otimes y_t) \in \mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$ entonces para todo $0 \leq s < t \leq T$

$$|h_{s,t}| \leq C(||x_{s,t}||_C + ||y_{s,t}||_C)^N.$$

Si definimos $w : \left\{(s,t) \in [0,T]^2 \,\middle|\, s < t\right\} \to \mathbb{R}^+$ como $w(s,t) = ||x||_{1-var;[s,t]} + ||y||_{1-var;[s,t]}$ tenemos que w es aditiva, es decir, $w(s,u) + w(u,t) = w(s,t)$ para $0 \leq s < u < t \leq T$ y que

$$|h_{s,t}| \leq Cw(s,t)^N.$$

Dada cualquier partición $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \ldots < t_n = T\}$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \left|h_{t_{i-1},t_i}\right|^{\frac{1}{N}} \leq C \sum_{i=1}^{n} w(t_{i-1},t_i) = Cw(0,T)$$

por lo que la función h es de $\frac{1}{N}$-variación finita en $[0,T]$ y como $\frac{1}{N} < 1$ entonces h debe de ser constante (Ver Lema 2.3). Como $h_0 = \log(x_0^{-1} \otimes y_0) = \log(1^{-1} \otimes 1) = \log(1) = 0$ entonces $h_t = 0$ para toda $t \in [0,T]$, es decir, para toda $t \in [0,T]$

$$1 = \exp(0) = \exp(h_t) = x_t^{-1} \otimes y_t$$

y por lo tanto $x = y = S_N \circ \pi_1\,(x)$, es decir, $S_N \circ \pi_1$ es la identidad en $C_o^{1-var}\left([0,T], G^N(\mathbb{R}^d)\right)$.

Por último el Teorema 1.28 nos garantiza que

$$||S_N(x)||_{1-var;[0,T]} = |x|_{1-var;[0,T]} \,.$$

$\square$

La importancia de este resultado es que nos dice que S_N es el único levantamiento de $C_0^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ a $C_o^{1-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$ por lo que es equivalente hablar de una función de variación finita en $\mathbb{R}^d$ a hablar de la trayectoria en el grupo $G^N(\mathbb{R}^d)$ de variación finita dada por su firma. En el caso de trayectorias en $\mathbb{R}^d$ con p-variación finita para $p \in (1,2)$ se pueden definir las integrales que constituyen la firma

$$\int_{s<u_1<\ldots<u_k<t} dx_{u_1} \otimes \cdots \otimes dx_{u_k}$$

como límite de sumas de Riemann-Stieltjes por medio de la integral de Young (Ver sección 2.6). Sin embargo en el caso de trayectorias con p-variación finita para $p > 2$ no se puede definir la integración con respecto a esta de igual manera, es decir, el valor

$$\int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r$$

no tiene sentido como límite de sumas de Riemann-Stieltejes. Sin embargo una generalización al Teorema 1.31 (Consultar [Friz and Victoir, 2010, Capítulo 9]) nos dice que existe una biyección canónica entre $C_o^{p-var}\left([0,T],G^N(\mathbb{R}^d)\right)$ y $C_o^{p-var}\left([0,T],G^{\lfloor p\rfloor}(\mathbb{R}^d)\right)$ para $N \geq \lfloor p\rfloor$, la parte entera de p, por lo que para poder definir una noción equivalente a la de firma para trayectorias con p-variación finita no basta con la información que nos da los incrementos de la trayectoria sino que necesitamos más información, para lo cual podemos proponer los valores de las primeras $\lfloor p\rfloor$ integrales iteradas. Esta idea es la que nos permitirá en el siguiente capítulo definir una trayectoria rugosa y una teoría de integración con respecto a este objeto.

2 | Trayectorias Rugosas

En este capítulo se introduce el concepto de una trayectoria rugosa, el cual reemplazará el papel de una firma de nivel 2. Posteriormente se define la integral con respecto de una trayectoria rugosa para cierta clase de integrandos. Se estudia la estabilidad de esta integración con respecto a sus integrandos y sus integradores con lo cual se obtiene una especie de continuidad del operador integral. Por último se compara la integral de Riemann-Stieltjes con esta nueva noción de integral introducida.

2.1. Definición de una Trayectoria Rugosa

Sabemos que si $x : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ es una trayectoria de p-variación finita con $p > 2$ entonces la expresión

$$\int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r$$

no tiene sentido como integral de Riemann-Stieltjes. La integral de Young, que consideraremos en la sección 2.6, generaliza esta integral de Riemann-Stieltjes al caso $p \in (1, 2]$. Sin embargo, para $p > 2$, nosotros podemos proponer una función continua $\mathbb{X} : [0, T]^2 \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ la cual tenga propiedades similares a aquellas de estas integrales iteradas. Primero observemos que el objeto $\mathbf{X} : \{(s,t) \in [0,T]^2 \mid s < t\} \to T^2(\mathbb{R}^d)$ dado por

$$\mathbf{X}_{s,t} := (1, x_t - x_s, \mathbb{X}_{s,t}) = (1, x_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t})$$

jugaría el papel de una firma de nivel dos y debería de satisfacer la relación de Chen (Teorema 1.7) la cual resume las propiedades de aditividad de las integrales iteradas y se lee para $0 \leq s < u < t \leq T$ como:

$$(1, x_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) = \mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{s,u} \otimes \mathbf{X}_{u,t} = (1, x_{s,u} + x_{u,t}, \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + x_{s,u} \otimes x_{u,t}).$$

Dado que la igualdad en la segunda coordenada es una propiedad de los incremento, es decir,

$$x_{s,t} = x_t - x_s = x_u - x_s + x_t - x_u = x_{s,u} + x_{u,t},$$

la relación de Chen es equivalente a pedir que el proceso $\mathbb{X}$ satisfaga

$$\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = x_{s,u} \otimes x_{u,t}.$$

Definición 2.1. *Una trayectoria rugosa en el intervalo $[0, T]$ con valores en $\mathbb{R}^d$ es un par $(x, \mathbb{X})$ donde $x : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ y $\mathbb{X} : [0, T] \times [0, T] \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ son funciones continuas que satisfacen la relación*

$$\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = x_{s,u} \otimes x_{u,t}$$

para todo $0 \leq s < u < t \leq T$.

Observemos que al satisfacer la relación de Chen es equivalente definir una trayectoria rugosa como una trayectoria, y no como un proceso de dos parámetros, como:

$$\mathbf{X} : [0,T] \to T^2(\mathbb{R}^d) \qquad \mathbf{X}_t = (1, x_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t})$$

y a partir de esto, por la relación de Chen, tenemos que para $0 \leq s < t \leq T$:

$$\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t \qquad \text{y} \qquad \mathbb{X}_{s,t} = \pi_2(\mathbf{X}_{s,t}),$$

por lo cual el proceso $\mathbb{X}$ de dos parámetros esta completamente determinado por la trayectoria $\mathbf{X}$. y entonces la trayectoria rugosa $(x, \mathbb{X})$ se puede pensar efectivamente como una trayectoria. En general usaremos de forma intercambiable la notación $\mathbf{X} = (x, \mathbb{X})$ y $\mathbf{X} = (1, x, \mathbb{X})$ para referirnos a la misma trayectoria rugosa.

Recordemos que cualquier trayectoria continua de p-variación finita se puede reparametrizar de tal forma que la función resultante sea $\frac{1}{p}$-Hölder continua, la demostración de este resultado es análoga al Lema 1.18 pero puede consultarse en [Friz and Victoir, 2010, p. 85]. Mientras que la p-variación es invariante bajo reparametrizaciones la norma Hölder no lo es, lo cual nos permitira un poco más de generalidad al diferenciar entre parametrizaciones y es por esto que trabajaremos con trayectorias α-Hölder.

Por otro lado, recordemos que en el espacio $G^2(\mathbb{R}^d)$ tenemos definida una norma homogénea dada por

$$|||g||| = |\pi_1(g)| \vee |\pi_2(g)|^{\frac{1}{2}} = \text{máx}\{|\pi_1(g)|, |\pi_2(g)|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Más aún, se tiene que $S_2(x) \in C^{1\text{-}var}\left([0,T], G^2(\mathbb{R}^d)\right)$ para todo $x \in C^{1\text{-}var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ bajo la norma Carnot-Carathéodory (Teorema 1.28), pero por la equivalencia de normas homogéneas, Teorema 1.24, también bajo cualquier norma homogénea. Módulo la reparametrización podemos suponer que $S_2(x)$ es Lipschitz considerando los incrementos $S_2(x)_{s,t} = S_2(x)_{0,s}^{-1} \otimes S_2(x)_{0,t}$ en el grupo $G^2(\mathbb{R}^d)$ y la norma Lipschitz definida como

$$||S_2(x)||_{1-H\ddot{o}l} = \sup_{s \neq t} \frac{|||S_2(x)_{s,t}|||}{|t-s|}$$

(de hecho por los Teoremas 1.28 y 1.6 y el Lema 1.18 la misma reparametrización hace Lipschitz a x y a $S_n(x)$). Esto quiere decir que para todo $0 \leq s < t \leq T$

$$\left| \int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r \right|^{\frac{1}{2}} \leq |||S_2(x)_{s,t}||| \leq C \, ||S_n(x)||_{1-H\ddot{o}l} |t-s|$$

y por lo tanto

$$\sup_{s \neq t} \frac{\left| \int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r \right|}{|t-s|^2} \leq C^2 \, ||S_2(x)||_{1-H\ddot{o}l}^2 < +\infty.$$

Observemos que esto no es una norma Hölder, pues para esto tendría que estar definida como

$$\sup_{(s,t) \neq (u,v)} \frac{\left| \int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r - \int_u^v x_{u,r} \otimes dx_r \right|}{|(t,s) - (u,v)|^2}.$$

Más aún, por la relación de Chen $\int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r$ no es aditiva y por lo tanto no representa los incrementos de alguna función por lo que el ser finito este supremo **no** nos implica que $\int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r$ sea 2-Hölder y por lo tanto, por el Lema 2.3, constante. Motivados por esto tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2. *Dado $\alpha \in (\frac{1}{3},1]$ se dice que $(x,\mathbb{X})$ es una trayectoria rugosa α-Hölder si $(x,\mathbb{X})$ es una trayectoria rugosa en el sentido de la Definición 2.1 y se satisface que*

$$||x||_\alpha := \sup_{s\neq t}\frac{|x_t - x_s|}{|t-s|^\alpha} < +\infty, \qquad ||\mathbb{X}||_{2\alpha} := \sup_{s\neq t}\frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < +\infty.$$

Más aún, este espacio se denota por $\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$

Observemos que, de forma análoga a los espacio de Hölder, se tiene que si $0<\alpha<\beta\leq 1$, entonces $\mathscr{C}^{\beta}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right) \subset \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$, por lo cual para todo $\alpha \in \left(\frac{1}{3},1\right]$ se tiene que $S_2(x) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ si $x \in C^{1-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. La restricción $\alpha \leq 1$ es consecuencia del siguiente lema ya que para $\alpha > 1$ las trayectorias en $C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ son constantes.

Lema 2.3. *Si $\alpha > 1$ y $x \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ entonces x es constante. De manera análoga si $x \in C^{p-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ para algún $p\in(0,1)$ entonces x es constante.*

Demostración. Fijemos $0 \leq s < t \leq T$. Dado $N \in \mathbb{N}$ definimos $t_k = s + \frac{k}{N}(t-s)$ para $k \in \{0,\ldots,N\}$ entonces

$$\begin{aligned}
|x_t - x_s| &\leq \sum_{i=1}^{N}\left|x_{t_i} - x_{t_{i-1}}\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}|x|_{\alpha-H\ddot{o}l}\,|t_i - t_{i-1}|^\alpha \\
&= N\,|x|_{\alpha-H\ddot{o}l}\frac{1}{N^\alpha} \\
&= |x|_{\alpha-H\ddot{o}l}\frac{1}{N^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

Como $N \in \mathbb{Z}^+$ es arbitraria y $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{\alpha-1}} = 0$ al $\alpha - 1 > 0$ tenemos que $|x_t - x_s| = 0$ y por lo tanto $x_t = x_s$ para todo $0 \leq s < t \leq T$.

Si $x \in C^{p-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ con $p<1$ entonces reparametrizamos x para que sea $\frac{1}{p}$-Hölder (lo cual se prueba de manera análoga al Teorema 1.18) y aplicamos lo anterior. □

2.2. Métrica en $\mathscr{C}^{\alpha-\boldsymbol{H\ddot{o}l}}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$

Motivados por las normas y métricas definidas en el capítulo anterior, en particular la norma $|\cdot|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$ y la norma homogénea definida en el Lema 1.23, introducimos lo siguiente

Definición 2.4. *Definimos la "métrica no homogénea" α-Hölder*

$$\rho_\alpha : \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right) \times \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}$$

como

$$\rho_\alpha((x,\mathbb{X}),(y,\mathbb{Y})) = \max\{||x-y||_\alpha, ||\mathbb{X}-\mathbb{Y}||_{2\alpha}\}.$$

Definición 2.5. *Dada* $\mathbf{X} = (x, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\big([0,T], \mathbb{R}^d\big)$ *definimos su* α*-Hölder norma homogénea como*

$$||\mathbf{X}||_\alpha := \text{máx}\{||x||_\alpha, ||\mathbb{X}||_{2\alpha}^{\frac{1}{2}}\}$$

Debemos tomar esta definición como algo nuevo y no pensar que esta satisface las propiedades de la Definición 1.20.

Una pregunta natural es de que manera la trayectoria x determina al proceso $\mathbb{X}$ con la condición de que $(x, \mathbb{X})$ sea una trayectoria rugosa.

Teorema 2.6. *Sea* $x \in C^{\alpha-Höl}\big([0,T], \mathbb{R}^d\big)$ *y* $(x, \mathbb{X}^1), (x, \mathbb{X}^2) \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\big([0,T], \mathbb{R}^d\big)$ *para algún* $\alpha \in \big(\frac{1}{3}, 1\big]$. *Entonces existe* $F \in C^{2\alpha-Höl}\big([0,T], \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\big)$ *tal que para todo* $0 \leq s < t \leq T$

$$\mathbb{X}^1_{s,t} - \mathbb{X}^2_{s,t} = F_t - F_s = F_{s,t}.$$

Reciprocamente si $(x, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\big([0,T], \mathbb{R}^d\big)$, $F \in C^{2\alpha-Höl}\big([0,T], \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\big)$ *y definimos*

$$\mathbb{X}^2_{s,t} := \mathbb{X}_{s,t} + F_t - F_s = \mathbb{X}_{s,t} + F_{s,t}$$

entonces $(x, \mathbb{X}^2) \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\big([0,T], \mathbb{R}^d\big)$.

Demostración. Para la primera parte definamos para $0 \leq s < t \leq T$:

$$G_{s,t} := \mathbb{X}^1_{s,t} - \mathbb{X}^2_{s,t}.$$

Dados $0 \leq s < u < t \leq T$ tenemos por la relación de Chen que para $i \in \{1, 2\}$

$$\mathbb{X}^i_{s,t} = \mathbb{X}^i_{s,u} + \mathbb{X}^i_{u,t} + x_{s,u} \otimes x_{u,t}$$

por lo que

$$\begin{aligned} G_{s,t} &= \mathbb{X}^1_{s,u} + \mathbb{X}^1_{u,t} + x_{s,u} \otimes x_{u,t} - \big(\mathbb{X}^2_{s,u} + \mathbb{X}^2_{u,t} + x_{s,u} \otimes x_{u,t}\big) \\ &= \mathbb{X}^1_{s,u} - \mathbb{X}^2_{s,u} + \mathbb{X}^1_{u,t} - \mathbb{X}^2_{u,t} = G_{s,u} + G_{u,t}, \end{aligned}$$

en particular obtenemos que

$$G_{0,s} + G_{s,t} = G_{0,t}$$

y por lo tanto

$$G_{s,t} = G_{0,t} - G_{0,s}.$$

Definimos $F : [0,T] \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ como $F_t = G_{0,t}$ y obtenemos que

$$G_{s,t} = F_t - F_s.$$

Por último, tenemos que

$$\sup_{s \neq t} \frac{|F_t - F_s|}{|t-s|^{2\alpha}} = \sup_{s \neq t} \frac{\big|\mathbb{X}^1_{s,t} - \mathbb{X}^2_{s,t}\big|}{|t-s|^{2\alpha}} \leq \sup_{s \neq t} \frac{\big|\mathbb{X}^1_{s,t}\big|}{|t-s|^{2\alpha}} + \sup_{s \neq t} \frac{\big|\mathbb{X}^2_{s,t}\big|}{|t-s|^{2\alpha}} < +\infty$$

por lo que $F \in C^{2\alpha-Höl}\big([0,T], \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\big)$.

Para la segunda parte tenemos que como $(x,\mathbb{X}^1)$ cumple la relación de Chen, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^2_{s,t} &= \mathbb{X}^1_{s,t} + F_{s,t} = \mathbb{X}^1_{s,u} + \mathbb{X}^1_{u,t} + x_{s,u}\otimes x_{u,t} + F_{s,u} + F_{u,t}\\ &= \mathbb{X}^1_{s,u} + F_{s,u} + \mathbb{X}^1_{u,t} + F_{u,t} + x_{s,u}\otimes x_{u,t}\\ &= \mathbb{X}^2_{s,u} + \mathbb{X}^2_{u,t} + x_{s,u}\otimes x_{u,t}\end{aligned}$$

que es precisamente la relación de Chen. Por otro lado,

$$\sup_{s\neq t}\frac{\left|\mathbb{X}^2_{s,t}\right|}{|t-s|^{2\alpha}} = \sup_{s\neq t}\frac{\left|\mathbb{X}^1_{s,t}-F_{s,t}\right|}{|t-s|^{2\alpha}} \leq \sup_{s\neq t}\frac{\left|\mathbb{X}^1_{s,t}\right|}{|t-s|^{2\alpha}} + \sup_{s\neq t}\frac{|F_t-F_s|}{|t-s|^{2\alpha}} < +\infty$$

por lo que $(x,\mathbb{X}^2)\in\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. □

El resultado anterior nos dice que el proceso $\mathbb{X}$ esta determinado de manera única por x módulo el incremento de una función y nos dice la Hölder regularidad de esta función en base a la Hölder regularidad de x.

Hemos definido el espacio $\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ para $\alpha\in\left(\frac{1}{3},1\right]$, sin embargo si $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, por el Teorema 2.6 y el Lema 2.3, para cada $x\in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ existe a lo más un proceso $\mathbb{X}:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ tal que $(x,\mathbb{X})$ satisface la Definición 2.2. De hecho si x es Lipschitz entonces $S_2(x)$ es la única trayectoria rugosa con trayectoria base x. Más aún, en la sección 2.6 veremos que para $x\in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ con $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ este proceso $\mathbb{X}$ esta dado por la integral de Young $\int_s^t x_s, r\otimes dx_r$ la cual es una generalización de la integral de Riemann-Stieltjes a una clase más grande de integrandos e integradores. Es por esto que de aqui en adelante consideraremos el espacio $\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ unicamente para $\alpha\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

Sin embargo lo anterior no implica que una trayectoria suave determine de manera única una trayectoria rugosa, para esto basta observar que si

$$x\in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)\cap C^{\infty}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right),$$

por ejemplo una trayectoria constante, entonces la firma de nivel 2 de x, $S_2(x)$, es una trayectoria rugosa y sin embargo para cualesquiera $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ y $F\in C^{2\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d\right)$ el par $S_2(x)_{s,t}+(0,F_{s,t})$ define otra α-Hölder trayectoria rugosa por el Teorema 2.6.

El motivo por el cual nos restringimos al caso $\alpha\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$, y el cual sera más evidente conforme avancemos con el desarrollo, es que para $\alpha\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$ necesitamos proponer más información en la trayectoria rugosa, de hecho lo que necesitamos es una trayectoria en el espacio $T^N(\mathbb{R}^d)$ con $N=\left\lfloor\frac{1}{\alpha}\right\rfloor>2$, o equivalentemente proponer los valores para las integrales

$$\int_{s<t_1<\ldots<t_k<t} dx_{t_1}\otimes\cdots\otimes dx_{t_k}$$

mediante procesos $\mathbb{X}^{(k)}:[0,T]^2\to\left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes k}$ continuos para $k\in\{2,\ldots,N\}$, de manera que $\mathbf{X}_{s,t}=(1,x_{s,t},\mathbb{X}_{s,t},\ldots,\mathbb{X}^{(N)}_{s,t})$ satisfaga la relación de Chen y una condición equivalente a la Definición 2.2 dada por

$$\sup_{s\neq t}\frac{\mathbb{X}^{(k)}_{s,t}}{|t-s|^{k\alpha}}<+\infty.$$

Retomando nuestro caso $\alpha\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ recordemos que hemos definido una “métrica no homogénea” en la definición 2.4, veamos que efectivamente esta define una métrica y que de hecho hace a $\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ un espacio métrico completo.

Teorema 2.7. $\left(\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right),\rho'_\alpha\right)$ *es un espacio métrico completo no separable donde*

$$\rho'_\alpha((x,\mathbb{X}),(y,\mathbb{Y})) = |x_0-y_0| + \rho_\alpha((x,\mathbb{X}),(y,\mathbb{Y})).$$

Demostración. Primero observemos que apesar de la similitud en la definición de $||\cdot||_{2\alpha}$ esta no coincide con la norma 2α-Hölder en el espacio $C^{2\alpha\text{-}H\ddot{o}l}([0,T]^2,\mathbb{R}^d)$ pues esta esta dada como

$$||\mathbb{X}||_{2\alpha-H\ddot{o}l} := \sup_{(s,t)\neq(s',t')} \frac{|\mathbb{X}_{s,t}-\mathbb{X}_{s',t'}|}{|(s,t)-(s',t'))|^{2\alpha}},$$

sin embargo es sencillo ver que el conjunto

$$\left\{\mathbb{X}\in C([0,T]^2,\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d)\;\middle|\; ||\mathbb{X}||_{2\alpha} = \sup_{s\neq t}\frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < +\infty\right\}$$

es un espacio vectorial, $||\cdot||_{2\alpha}$ es una seminorma en este espacio y $||\mathbb{X}||_{2\alpha}=0$ implica que $\mathbb{X}_{s,t}=0$ para todo $s\neq t$, es decir, esta seminorma se anula en las funciones diagonales.

Por otro lado $||x||_\alpha$ coincide con la seminorma $||x||_{\alpha-H\ddot{o}l}$, por lo que podemos considerar la seminorma en el espacio producto

$$||\cdot||_{\text{máx}} : C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)\times\left\{\mathbb{X}\in C([0,T]^2,\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d)\;\middle|\; ||\mathbb{X}||_{2\alpha}<+\infty\right\}$$

dada por

$$||(x,\mathbb{X})||_{\text{máx}} = \text{máx}\{||x||_\alpha, ||\mathbb{X}||_{2\alpha}\}.$$

De esta forma se tiene que ρ_α coincide con la restricccción de la pseudométrica que induce la seminorma $||\cdot||_{\text{máx}}$ al conjunto $\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. Veamos que agregar el termino $|x_0-y_0|$ la convierte en una métrica. Dados $(x,\mathbb{X}),(y,\mathbb{Y})\in\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ tales que

$$|x_0-y_0| + \rho_\alpha((x,\mathbb{X}),(y,\mathbb{Y})) = 0$$

tenemos que $|x_0-y_0| + ||x-y||_{\alpha-H\ddot{o}l}=0$, lo cual es una métrica en $C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ y por lo que $x=y$. Por otro lado como $||\mathbb{X}-\mathbb{Y}||_{2\alpha}=0$, entonces $\mathbb{X}_{s,t}-\mathbb{Y}_{s,t}=0$ para todo $s\neq t$ por lo que basta ver que esto también se cumple en la diagonal, pero por la relación de Chen aplicada en $s=t=u$, tenemos que

$$-\mathbb{X}_{t,t} = \mathbb{X}_{t,t}-\mathbb{X}_{t,t}-\mathbb{X}_{t,t} = x_{t,t}\otimes x_{t,t} = 0\otimes 0 = 0,$$

de manera análoga $\mathbb{Y}_{t,t}=0$ y por lo tanto $\mathbb{X}_{t,t}-\mathbb{Y}_{t,t}=0$ y $\mathbb{X}=\mathbb{Y}$.

Veamos que este espacio es completo. Sea $\{(x^n,\mathbb{X}^n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+}\subseteq\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ una sucesión ρ'_α-Cauchy, entonces

$$|x_0^n-x_0^m| + ||x^n-x^m||_{\alpha-H\ddot{o}l} \leq \rho'_\alpha((x^n,\mathbb{X}^n),(x^m,\mathbb{X}^m))$$

y $\{x^n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es de Cauchy en $C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$, por lo que existe $x\in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ a la cual converge esta sucesión. Por otra parte tenemos que para todo $s\neq t$ fijos

$$\left|\mathbb{X}^n_{s,t}-\mathbb{X}^m_{s,t}\right| \leq ||\mathbb{X}^n-\mathbb{X}^m||_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha}$$

y cuando $s=t$ hemos visto que, como consecuencia de la relación de Chen, $\mathbb{X}^n_{t,t}=0$ por lo que para todo $s,t\in[0,T]$

$$\left|\mathbb{X}^n_{s,t}-\mathbb{X}^m_{s,t}\right|\leq ||\mathbb{X}^n-\mathbb{X}^m||_{2\alpha}\,|t-s|^{2\alpha}\leq ||\mathbb{X}^n-\mathbb{X}^m||_{2\alpha}\,T^{2\alpha},$$

lo cual implica que

$$||\mathbb{X}^n-\mathbb{X}^m||_\infty=\sup_{(s,t)\in[0,T]^2}\left|\mathbb{X}^n_{s,t}-\mathbb{X}^m_{s,t}\right|\leq ||\mathbb{X}^n-\mathbb{X}^m||_{2\alpha}\,T^{2\alpha}$$

y por lo tanto $\{\mathbb{X}^n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es $||\cdot||_\infty$-Cauchy y existe $\mathbb{X}\in C([0,T]^2,\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d)$ a la cual converge uniformemente. Veamos que $||\mathbb{X}||_{2\alpha}<+\infty$ y que $||\mathbb{X}^n-\mathbb{X}||_{2\alpha}\to 0$ cuando $n\to\infty$. Para lo primero observemos que al $\{\mathbb{X}^n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ ser de $||\cdot||_{2\alpha}$-Cauchy entonces es $||\cdot||_{2\alpha}$-acotada, digamos por $C>0$, y por lo tanto para todo $(s,t)\in[0,T]^2$

$$|\mathbb{X}_{s,t}|=\lim_{n\to\infty}\left|\mathbb{X}^n_{s,t}\right|\leq\limsup_{n\to\infty}||\mathbb{X}^n||_{2\alpha}\,|t-s|^{2\alpha}\leq C\,|t-s|^{2\alpha}$$

por lo cual $||\mathbb{X}||_{2\alpha}<+\infty$. Como $\mathbb{X}^n$ converge uniformemente a $\mathbb{X}$ tenemos que

$$||\mathbb{X}-\mathbb{X}^n||_{2\alpha}=\sup_{s\neq t}\frac{\left|\mathbb{X}_{s,t}-\mathbb{X}^n_{s,t}\right|}{|t-s|^{2\alpha}}=\lim_{m\to\infty}\sup_{s\neq t}\frac{\left|\mathbb{X}^m_{s,t}-\mathbb{X}^n_{s,t}\right|}{|t-s|^{2\alpha}}=\lim_{m\to\infty}||\mathbb{X}^m-\mathbb{X}^n||_{2\alpha}\,.$$

Por la condición de Cauchy dada $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{Z}^+$ tal que $||\mathbb{X}^m-\mathbb{X}^n||_{2\alpha}<\epsilon$ para todo $n,m\geq N$ y por lo tanto para $n\geq N$

$$||\mathbb{X}-\mathbb{X}^n||_{2\alpha}=\lim_{m\to\infty}||\mathbb{X}^m-\mathbb{X}^n||_{2\alpha}\leq\epsilon,$$

es decir, $\{\mathbb{X}^n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ converge a $\mathbb{X}$ en $||\cdot||_{2\alpha}$.

Juntando ambos casos vemos que

$$\lim_{n\to\infty}\rho'_\alpha((x,\mathbb{X}),(x^n,\mathbb{X}^n))=0$$

por lo que basta ver que $(x,\mathbb{X})\in\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. Para esto unicamente nos falta verificar la relación de Chen pero como $(x,\mathbb{X})$ es límite puntual de $(x^n,\mathbb{X}^n)$, las cuales satisfacen la relación de Chen, entonces para todo $0\leq s<u<t\leq T$

$$\mathbb{X}_{s,t}-\mathbb{X}_{s,u}-\mathbb{X}_{u,t}=\lim_{n\to\infty}\mathbb{X}^n_{s,t}-\mathbb{X}^n_{s,u}-\mathbb{X}^n_{u,t}=\lim_{n\to\infty}x^n_{s,u}\otimes x^n_{u,t}=x_{s,t}\otimes x_{s,t},$$

con lo cual se concluye que este espacio métrico es completo.

Para ver que no es separable definamos para cada $a\in(0,1)$ la función $F^a:[0,T]\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d$ dada para $i,j\in\{1,\ldots,d\}$ por $(F^a)^{i,j}_t=\mathbb{1}_{[a,T]}(t)(t-a)^{2\alpha}$, con $\mathbb{1}_{[a,T]}$ la función indicadora del conjunto $[a,T]$, la cual es 2α-Hölder continua. Definamos $\mathbb{X}^a_{s,t}=F^a_t-F^a_s$ entonces por el

Teorema 2.6 $(0, \mathbb{X}^a) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$. Más aún, para $0 \leq a < b \leq 1$ se satisface que

$$\begin{aligned}
\rho'_\alpha((0,\mathbb{X}^a),(0,\mathbb{X}^b)) &= |0-0| + \max\{||0-0||_\alpha, \left|\left|\mathbb{X}^a - \mathbb{X}^b\right|\right|_{2\alpha}\} \\
&= \sup_{s\neq t} \frac{\left|\mathbb{X}^a_{s,t} - \mathbb{X}^b_{s,t}\right|}{|t-s|^{2\alpha}} \\
&= \sup_{s\neq t} \frac{\left|F^a_t - F^a_s - (F^b_t - F^b_s)\right|}{|t-s|^{2\alpha}} \\
&\geq \frac{\left|F^a_b - F^a_a - (F^b_b - F^b_a)\right|}{|b-a|^{2\alpha}} \\
&= \frac{\left|(b-a)^{2\alpha} - (a-a)^{2\alpha} - ((b-b^{2\alpha})-0)\right|}{|b-a|^{2\alpha}} \\
&= \frac{\left|(b-a)^{2\alpha}\right|}{|b-a|^{2\alpha}} = 1
\end{aligned}$$

y como la familia $\{(0, \mathbb{X}^a)\}_{a\in(0,T)}$ es no numerable se concluye que $(\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right), \rho'_\alpha)$ no es separable. □

El siguiente resultado nos da una forma más sencilla de mostrar convergencia con respecto a la métrica ρ_α.

Teorema 2.8. *Sean* $\frac{1}{3} < \beta$ *y* $\{(x^n, \mathbb{X}^n)\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq \mathscr{C}^{\beta-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *una sucesión tal que*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} ||x^n||_\beta < +\infty \qquad y \qquad \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} ||\mathbb{X}^n||_{2\beta} < +\infty.$$

Si $x^n_\cdot$ *converge puntualmente a* $x_\cdot$ *en* $[0,T]$ *y* $\mathbb{X}^n_{0,\cdot}$ *converge puntualmente a* $\mathbb{X}_{0,\cdot}$ *en* $[0,T]$, *entonces esta convergencia también es uniforme,* $(x,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\beta-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_\alpha((x^n,\mathbb{X}^n),(x,\mathbb{X})) = 0$$

para toda $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta)$.

Demostración. Nuestra hipótesis de convergencia puntual implica que $\mathbf{X}^n_{0,t} = (1, x^n_{0,t}, \mathbb{X}^n_{0,t})$ converge puntualmente a $\mathbf{X}_{0,t} = (1, x_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t})$. Por la relación de Chen tenemos que

$$\mathbf{X}^n_{s,t} = \left(\mathbf{X}^n_{0,s}\right)^{-1} \otimes \mathbf{X}^n_{0,t},$$

por lo que $\mathbf{X}^n_{s,t}$ converge puntualmente a $\mathbf{X}_{s,t}$. Más aún, tomando límites puntuales se puede ver que $\mathbf{X}$ satisface la relación de Chen. Sea $C = \sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\{||x^n||_\beta, ||\mathbb{X}^n||_{2\beta}\} < +\infty$, entonces por la convergencia puntual tenemos para todo $0 \leq s < t \leq T$:

$$|x_{s,t}| = \lim_{n\to\infty} \left|x^n_{s,t}\right| \leq \limsup ||x^n||_\beta |t-s|^\beta \leq C|t-s|^\beta$$

$$|\mathbb{X}_{s,t}| = \lim_{n\to\infty} \left|\mathbb{X}^n_{s,t}\right| \leq \limsup ||\mathbb{X}^n||_{2\beta} |t-s|^{2\beta} \leq C|t-s|^{2\beta}$$

y en particular obtenemos que $(x,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$.

Veamos la convergencia uniforme de x. Sea $\epsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \ldots < t_n = T\}$ tal que $|\mathcal{P}| = \sup_{k=1,\ldots,n} |t_k - t_{k-1}| < \left(\frac{\epsilon}{8C}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Para $s \in [0,T]$ denotemos por $\hat{s} \in \mathcal{P}$ al punto más cercano a s en $\mathcal{P}$, por ejemplo $\hat{s} = \min\{r \in \mathcal{P} \mid |r-s| < |\mathcal{P}|\}$. De esta forma tenemos por la aditividad de los incrementos que para $0 \leq s < t \leq T$ que

$$\begin{aligned}\left|x_{s,t} - x^n_{s,t}\right| &\leq \left|x_{\hat{s},\hat{t}} - x^n_{\hat{s},\hat{t}}\right| + |x_{\hat{s},s}| + \left|x^n_{\hat{s},s}\right| + \left|x_{\hat{t},t}\right| + \left|x^n_{\hat{t},t}\right| \\ &\leq \left|x_{\hat{s},\hat{t}} - x^n_{\hat{s},\hat{t}}\right| + C\left(2\left|s-\hat{s}\right|^\beta + 2\left|t-\hat{t}\right|^\beta\right) \\ &\leq \left|x_{\hat{s},\hat{t}} - x^n_{\hat{s},\hat{t}}\right| + 4C\left|\mathcal{P}\right|^\beta \\ &< \left|x_{\hat{s},\hat{t}} - x^n_{\hat{s},\hat{t}}\right| + \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

mientras que por la convergencia puntual y dado que hay un número finito de puntos en $\mathcal{P}$ podemos garantizar que existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $n > N$ y todo $r, r' \in \mathcal{P}$ se tiene que

$$\left|x_{r,r'} - x^n_{r,r'}\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado que para todo $0 \leq s < t \leq T$ se tiene que $\hat{s}, \hat{t} \in \mathcal{P}$ concluimos que para todo $n > N$

$$\left|x_{s,t} - x^n_{s,t}\right| < \left|x_{\hat{s},\hat{t}} - x^n_{\hat{s},\hat{t}}\right| + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

y por lo tanto $x^n_{s,t}$ converge uniformemente a $x_{s,t}$.

Para la convergencia uniforme de $\mathbb{X}$ la idea es la misma, solo hay que tener cuidado con la no aditividad de $\mathbb{X}_{s,t}$. Sea $\epsilon > 0$ y $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \ldots < t_n = T\}$ tal que $|\mathcal{P}| < \left(\frac{\epsilon}{16C}\right)^{\frac{1}{2\beta}}$, entonces por la convergencia puntual existe $N_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $n > N$ y todo $r, r' \in \mathcal{P}$ se tiene que

$$\left|\mathbb{X}_{r,r'} - \mathbb{X}^n_{r,r'}\right| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Como consecuencia de la relación de Chen tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^n_{s,t} &= \mathbb{X}^n_{s,\hat{s}} + \mathbb{X}^n_{\hat{s},t} + x^n_{s,\hat{s}} \otimes x^n_{\hat{s},t} \\ \mathbb{X}^n_{\hat{s},t} &= \mathbb{X}^n_{\hat{s},\hat{t}} + \mathbb{X}^n_{\hat{t},t} + x^n_{\hat{s},\hat{t}} \otimes x^n_{\hat{t},t} \\ x^n_{\hat{s},t} &= x^n_{\hat{s},\hat{t}} + x^n_{\hat{t},t}\end{aligned}$$

las cuales, por la convergencia puntual, son válidas tambien para $(x, \mathbb{X})$. Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}^n_{s,t}\right| \leq& \left|\mathbb{X}_{s,\hat{s}}\right| + \left|\mathbb{X}^n_{s,\hat{s}}\right| + \left|\mathbb{X}_{\hat{s},t} - \mathbb{X}^n_{\hat{s},t}\right| + \left|x_{s,\hat{s}} \otimes x_{\hat{s},t} - x^n_{s,\hat{s}} \otimes x^n_{\hat{s},t}\right| \\ \leq& \left|\mathbb{X}_{s,\hat{s}}\right| + \left|\mathbb{X}^n_{s,\hat{s}}\right| + \left|\mathbb{X}_{\hat{s},\hat{t}} - \mathbb{X}^n_{\hat{s},\hat{t}}\right| + \left|\mathbb{X}_{\hat{t},t}\right| + \left|\mathbb{X}^n_{\hat{t},t}\right| \\ &+ \left|x_{\hat{s},\hat{t}} \otimes x_{\hat{t},t} - x^n_{\hat{s},\hat{t}} \otimes x^n_{\hat{t},t}\right| + \left|x_{s,\hat{s}} \otimes x_{\hat{s},t} - x^n_{s,\hat{s}} \otimes x^n_{\hat{s},t}\right| \\ \leq& C\left(2\left|s-\hat{s}\right|^{2\beta} + 2\left|t-\hat{t}\right|^{2\beta}\right) + \frac{\epsilon}{4} \\ &+ \left|x_{\hat{s},\hat{t}} \otimes x_{\hat{t},t} - x^n_{\hat{s},\hat{t}} \otimes x^n_{\hat{t},t}\right| + \left|x_{s,\hat{s}} \otimes x_{\hat{s},t} - x^n_{s,\hat{s}} \otimes x^n_{\hat{s},t}\right| \\ \leq& \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \left|x_{\hat{s},\hat{t}} \otimes x_{\hat{t},t} - x^n_{\hat{s},\hat{t}} \otimes x^n_{\hat{t},t}\right| + \left|x_{s,\hat{s}} \otimes x_{\hat{s},t} - x^n_{s,\hat{s}} \otimes x^n_{\hat{s},t}\right|\end{aligned}$$

Observemos que podemos escribir

$$x_{s,\hat{s}} \otimes x_{\hat{s},t} - x^n_{s,\hat{s}} \otimes x^n_{\hat{s},t} = x_{s,\hat{s}} \otimes \left(x_{\hat{s},t} - x^n_{\hat{s},t}\right) - \left(x^n_{s,\hat{s}} - x_{s,\hat{s}}\right) \otimes x^n_{\hat{s},t}$$
$$x_{\hat{s},\hat{t}} \otimes x_{\hat{t},t} - x^n_{\hat{s},\hat{t}} \otimes x^n_{\hat{t},t} = x_{\hat{s},\hat{t}} \otimes \left(x_{\hat{t},t} - x^n_{\hat{t},t}\right) - \left(x^n_{\hat{s},\hat{t}} - x_{\hat{s},\hat{t}}\right) \otimes x^n_{\hat{t},t}$$

y por la convergencia uniforme de $x^n_{s,t}$ a $x_{s,t}$ existe $N_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $r, r' \in [0,T]$

$$\left|x_{r,r'} - x^n_{r,r'}\right| < \frac{\epsilon}{8CT^\beta}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left|x_{s,\hat{s}} \otimes \left(x_{\hat{s},t} - x^n_{\hat{s},t}\right) - \left(x^n_{s,\hat{s}} - x_{s,\hat{s}}\right) \otimes x^n_{\hat{s},t}\right| &\leq \left|x_{s,\hat{s}}\right| \left|x_{\hat{s},t} - x^n_{\hat{s},t}\right| + \left|x^n_{s,\hat{s}} - x_{s,\hat{s}}\right| \left|x^n_{\hat{s},t}\right| \\
&\leq C\left|s - \hat{s}\right|^\beta \left|x_{\hat{s},t} - x^n_{\hat{s},t}\right| + \left|x^n_{s,\hat{s}} - x_{s,\hat{s}}\right| C\left|\hat{s} - t\right|^\beta \\
&\leq CT^\beta \left(\frac{\epsilon}{8CT^\beta} + \frac{\epsilon}{8CT^\beta}\right) = \frac{\epsilon}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|x_{\hat{s},\hat{t}} \otimes \left(x_{\hat{t},t} - x^n_{\hat{t},t}\right) - \left(x^n_{\hat{s},\hat{t}} - x_{\hat{s},\hat{t}}\right) \otimes x^n_{\hat{t},t}\right| &\leq \left|x_{\hat{s},\hat{t}}\right| \left|x_{\hat{t},t} - x^n_{\hat{t},t}\right| + \left|x^n_{\hat{s},\hat{t}} - x_{\hat{s},\hat{t}}\right| \left|x^n_{\hat{t},t}\right| \\
&\leq C\left|\hat{s} - \hat{t}\right|^\beta \left|x_{\hat{t},t} - x^n_{\hat{t},t}\right| + \left|x^n_{\hat{s},\hat{t}} - x_{\hat{s},\hat{t}}\right| C\left|\hat{t} - t\right|^\beta \\
&\leq CT^\beta \left(\frac{\epsilon}{8CT^\beta} + \frac{\epsilon}{8CT^\beta}\right) = \frac{\epsilon}{4},
\end{aligned}$$

con lo cual se concluye que para toda $n \geq \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y $0 \leq s < t \leq T$

$$\left|\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}^n_{s,t}\right| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

y por lo tanto $\mathbb{X}^n$ converge uniformemente a $\mathbb{X}$.

Sea $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \beta\right)$ y $\epsilon > 0$. Por la convergencia uniforme existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $0 \leq s < t \leq T$ se tiene que para todo $n \geq N$

$$\left|x_{s,t} - x^n_{s,t}\right| < \epsilon^{\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}} \qquad \text{y} \qquad \left|\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}^n_{s,t}\right| < \epsilon^{\left(1-\frac{\alpha}{2\beta}\right)^{-1}}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\left|x_{s,t} - x^n_{s,t}\right| \leq \left|x_{s,t}\right| + \left|x_{s,t}\right| \leq 2C\left|t - s\right|^\beta$$

y

$$\left|\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}^n_{s,t}\right| \leq \left|\mathbb{X}_{s,t}\right| + \left|\mathbb{X}_{s,t}\right| \leq 2C\left|t - s\right|^{2\beta}$$

Recordemo que para $a, b > 0$ y $\theta \in (0,1)$ se tiene la desigualdad $a \wedge b = \text{mín}\{a, b\} \leq a^{1-\theta} b^\theta$ y utilizando las desigualdades anteriores con $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$ obtenemos que para todo $0 \leq s < t \leq T$:

$$\left|x_{s,t} - x^n_{s,t}\right| \leq \left(\epsilon^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \left(\left|t - s\right|^\beta\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \epsilon\left|t - s\right|^\alpha$$

y

$$\left|\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}^n_{s,t}\right| \leq \left(\epsilon^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \left(\left|t - s\right|^{2\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \epsilon\left|t - s\right|^{2\alpha}$$

lo cual implica, tomando supremos, que

$$\rho_\alpha((x, \mathbb{X}), (x^n, \mathbb{X}^n)) = \text{máx}\{\left\|x - x^n\right\|_\alpha, \left\|\mathbb{X} - \mathbb{X}^n\right\|_{2\alpha}\} \leq \epsilon$$

y por lo tanto $(x^n, \mathbb{X}^n)$ es ρ_α convergente a $(x, \mathbb{X})$ para toda $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \beta\right)$. $\square$

2.3. Trayectorias rugosas geométricas

La relación de Chen resume algunas propiedades de aditividad que debe satisfacer como mínimo una teoría de integración, sin embargo esta no incluye información sobre alguna forma de integración por partes. Denotemos por $\mathbb{X}_{s,t}^{i,j}$ la coordenada (i,j) del 2-tensor (matriz) $\mathbb{X}_{s,t}$ y recordemos que $\mathbb{X}_{s,t}^{i,j}$ se interpreta como el valor propuesto de $\int_s^t x_{s,r}^i dx_r^j$ por lo que si quisiéramos una fórmula de integración por partes entonces, manipulando informalmente las expresiones, necesitariamos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mathbb{X}_{s,t}^{i,j} + \mathbb{X}_{s,t}^{j,i} &= \int_s^t x_{s,r}^i dx_r^j + \int_s^t x_{s,r}^j dx_r^i \\
&= \int_s^t x_r^i dx_r^j - x_s^i x_{s,t}^j + \int_s^t x_r^j dx_r^i - x_s^j x_{s,t}^i \\
&= \int_s^t d(x^i x^j)_r - x_s^i x_{s,t}^j - x_s^j x_{s,t}^i \\
&= (x^i x^j)_{s,t} - x_s^i x_{s,t}^j - x_s^j x_{s,t}^i \\
&= x_t^i x_t^j - x_s^i x_s^j - x_s^i (x_t^j - x_s^j) - x_s^j (x_t^i - x_s^i) \\
&= x_t^i x_t^j - x_s^i x_s^j - x_s^i x_t^j + x_s^i x_s^j - x_t^i x_s^j + x_s^i x_s^j \\
&= x_t^i x_t^j - x_s^i x_t^j - x_t^i x_s^j + x_s^i x_s^j \\
&= (x_t^i - x_s^i)(x_t^j - x_s^j) = x_{s,t}^i x_{s,t}^j \\
&= (x_{s,t} \otimes x_{s,t})^{i,j},
\end{aligned}$$

es decir, la parte simétrica de $\mathbb{X}$ esta determinada completamente por la trayectoria x.

Definición 2.9. *Dada $(x, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ esta se dice que es una trayectoria rugosa geométrica si para todo $0 \leq s < t \leq T$ se cumple que*

$$\mathrm{Sim}(\mathbb{X}_{s,t}) := \frac{1}{2}(\mathbb{X}_{s,t} + \mathbb{X}_{s,t}^T) = \frac{1}{2} x_{s,t} \otimes x_{s,t}$$

donde $\mathbb{X}_{s,t}^T$ denota el 2-tensor, o matriz, con coordenada (i,j) dada por $\mathbb{X}_{s,t}^{j,i}$. Más aún, este espacio se denota por $\mathscr{C}_g^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$.

Observemos que si x es Lipschitz, entonces la trayectoria rugosa $S_2(x)$ es geométrica pues las integrales de Riemann-Stieltjes satisfacen la integración por partes.

Recordemos que en el espacio $T^2(\mathbb{R}^d)$ tenemos definidos los mapeos exp y log. Más aún, la firma de una trayectoria toma valores en el espacio $G^2(\mathbb{R}^d) = \exp(\mathfrak{g}^2(\mathbb{R}^2))$ por lo que es natural pensar en tomar el logaritmo de una trayectoria rugosa

$$\mathbf{X}_{s,t} = (1, x_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) = 1 + x_t - x_s + \mathbb{X}_{s,t} \in 1 + \mathfrak{t}^2(\mathbb{R}^d) \subset T^2(\mathbb{R}^d),$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
\log(\mathbf{X}_{s,t}) &= (\mathbf{X}_{s,t} - 1) - \frac{1}{2}(\mathbf{X}_{s,t} - 1)^{\otimes 2} \\
&= x_{s,t} + \mathbb{X}_{s,t} - \frac{1}{2}\left(x_{s,t} + \mathbb{X}_{s,t}\right) \otimes \left(x_{s,t} + \mathbb{X}_{s,t}\right) \\
&= x_{s,t} + \mathbb{X}_{s,t} - \frac{1}{2} x_{s,t} \otimes x_{s,t} \\
&= \left(0, x_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t} - \frac{1}{2} x_{s,t} \otimes x_{s,t}\right)
\end{aligned}$$

pues los terminos $x_{s,t} \otimes \mathbb{X}_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t} \otimes x_{s,t}$ y $\mathbb{X}_{s,t} \otimes \mathbb{X}_{s,t}$ son tensores de nivel mayor a 2 y por el truncamiento en $T^2(\mathbb{R}^d)$ son nulos. Observemos que la condición de que $(x, \mathbb{X})$ sea geometrica nos dice que:

$$\mathbb{X}_{s,t} - \frac{1}{2} x_{s,t} \otimes x_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} - \mathrm{Sim}(\mathbb{X}_{s,t}) = \mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t}).$$

Más aún, en este caso $\mathfrak{g}^2(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d + [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]$ y $[\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d] = \mathfrak{so}(\mathbb{R}^d)$ es el espacio de matrices antisimétricas, por lo cual la condición de que una trayectoria rugosa sea geométrica nos implica que la trayectoria

$$\mathbf{X} : [0, T] \to G^2(\mathbb{R}^d) \qquad \mathbf{X}_t := (1, x_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t})$$

efectivamente toma valores en el grupo de Lie $G^2(\mathbb{R}^d)$ y, por la relación de Chen, tambien los incrementos

$$X_{s,t} := (1, x_{s,t}, \mathbb{X}_{s,t}) = X_{0,s}^{-1} \otimes X_{0,t}.$$

Por otro lado, recordemos que en $G^2(\mathbb{R}^d)$ tenemos definidas normas homogéneas, entre las cuales esta la norma de Carnot-Carathéodory $||\cdot||_C$ y la norma $||\cdot||_{\log}$ definida en 1.29. Por la equivalencia entre normas homogéneas (Teorema 1.24) se tiene que existe $C > 0$ talque para todo $g = \exp(b + c) \in G^2(\mathbb{R}^d)$ con $b \in \mathbb{R}^d$ y $c \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, entonces

$$\frac{1}{C} \max\{|b|, |c|^{\frac{1}{2}}\} = \frac{1}{C} ||g||_{\log} \leq ||g||_C \leq C\, ||g||_{\log} = C \max\{|b|, |c|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Como $(x, \mathbb{X})$ es geométrica tenemos que

$$\mathbf{X}_{s,t} = \exp\left(x_{s,t} + \mathbb{X}_{s,t} - \frac{1}{2} x_{s,t} \otimes x_{s,t}\right) = \exp\left(x_{s,t} + \mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})\right)$$

por lo que

$$\frac{1}{C} \max\{|x_{s,t}|, |\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})|^{\frac{1}{2}}\} \leq ||\mathbf{X}_{s,t}||_C \leq C \max\{|x_{s,t}|, |\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Veamos que podemos sustituir $|\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})|$ por $|\mathbb{X}_{s,t}|$ en lo anterior módulo el cambio de constante, esto ya que

$$|\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})| \leq \frac{1}{2}(|\mathbb{X}_{s,t}| + |\mathbb{X}_{s,t}^T|) = |\mathbb{X}_{s,t}|,$$

con lo que obtenemos que

$$||\mathbf{X}_{s,t}||_C \leq C \max\{|x_{s,t}|, |\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})|^{\frac{1}{2}}\} \leq C \max\{|x_{s,t}|, |\mathbb{X}_{s,t}|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Por otro lado,

$$|\mathbb{X}_{s,t}| \leq |\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})| + |\mathrm{Sim}(\mathbb{X}_{s,t})| = |\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})| + \frac{1}{2}\,|x_{s,t} \otimes x_{s,t}|$$

y por la compatibilidad de normas euclidianas (ver sección 1.2) tenemos que $|x \otimes x| = |x|^2$ se tiene que

$$|\mathbb{X}_{s,t}| \leq \frac{3}{2}\,\mathrm{máx}\{|x_{s,t}|^2, |\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})|\}$$

lo cual a su vez implica que

$$\mathrm{máx}\{|x_{s,t}|, |\mathbb{X}_{s,t}|^{\frac{1}{2}}\} \leq C'\,\mathrm{máx}\{|x_{s,t}|, |\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})|^{\frac{1}{2}}\}\} \leq C'C\,||\mathbf{X}_{s,t}||_C$$

y por lo tanto existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C}\,\mathrm{máx}\{|x_{s,t}|, |\mathbb{X}_{s,t}|^{\frac{1}{2}}\} \leq ||\mathbf{X}_{s,t}||_C \leq C\,\mathrm{máx}\{|x_{s,t}|, |\mathbb{X}_{s,t}|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Esta desigualdad implica, dividiendo por $|t-s|^\alpha$ y tomando supremos sobre $s \neq t$, que

$$\frac{1}{C}\,||(x,\mathbb{X})||_\alpha \leq ||\mathbf{X}||_{C;\alpha-Höl} \leq C\,||(x,\mathbb{X})||_\alpha$$

Con lo cual tenemos que para una trayectoria rugosa geométrica es equivalente ser α-Hölder continua en el sentido de la Definición 2.2 o que la trayectoria

$$\mathbf{X} : [0,T] \to G^2(\mathbb{R}^d) \;\; \text{dada por} \;\; \mathbf{X}_t := (1, x_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t})$$

sea α-Hölder continua con respecto a la métrica Carnot-Carathéodory, es decir,

$$||\mathbf{X}||_{\alpha-Höl;[0,T]} := \sup_{s\neq t} \frac{d_C(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_t)}{|t-s|^\alpha} = \sup_{s\neq t} \frac{||\mathbf{X}_{s,t}||_C}{|t-s|^\alpha} < +\infty.$$

2.4. Integral rugosa de 1-formas

Recordemos que la integración de Riemann-Stieltjes se puede pensar como una funcíon bilineal y continua del espacio producto

$$C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right) \times C^{1-var}\left([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\right) \longrightarrow C^{1-var}\left([0,T], \mathbb{R}^e\right),$$

donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ denota al espacio de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}^e$ considerado con su norma de operadores lineales, es decir, se integran 1-formas con respecto de trayectorias, de tal manera que

$$(x,y) \longmapsto \int_0^{\cdot} y\,dx := \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0 \\ P\subset[s,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} y_u(x_{u,v}),$$

donde para una partición $\mathcal{P}$ la notación $\mathcal{P} \subset [s,t]$ se refiere a que $\mathcal{P}$ es partición de $[s,t]$ y por lo tanto de la forma $\mathcal{P} = \{s = t_0 < \ldots < t_n = t\}$. Más aún, la notación $[u,v] \in \mathcal{P}$ significa que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $u = t_{i-1}$ y $v = t_i$.

Por medio de la desigualdad de Young, la cual mostraremos en la sección 2.6,

$$\left|\int_s^t y_{s,r}\,dx_r\right| = \left|\int_s^t y_r\,dx_r - y_s(x_{s,t})\right| \leq \frac{1}{1-2^{1-\theta}}\,||x||_{p-var;[s,t]}\,||y||_{q-var;[s,t]}\,,$$

la cual es válida para funciones $x \in C^{1-var}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$, $y \in C^{1-var}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right)$, $p,q>1$ tales que $\theta = \frac{1}{q}+\frac{1}{p} > 1$ y $[s,t] \subset [0,T]$, la integral de Young extiende esta definición de integral como límite de sumas de Riemann-Stieltjes para a un espacio mas grandes de integradores e integrandos. En resumen (ver [Friz and Victoir, 2010, Capítulo 6]) la integración de Young es un mapeo continuo bilineal del espacio producto

$$C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right) \times C^{\beta-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right) \longrightarrow C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^e\right)$$

de tal manera que

$$(x,y) \longmapsto \int_0^{\cdot} y\,dx := \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0\\ \mathcal{P}\subset[s,t]}} \sum_{[t_{i-1},t_i]\in\mathcal{P}} y_{t_i}(x_{t_{i-1},t_i})$$

bajo la condición $\alpha+\beta>1$.

El objetivo de las trayectorias rugosas es definir una noción de integral para el caso $\alpha = \beta \in \left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ añadiendo información, es decir, considerar como integrador no solo a la trayectoria x sino a la trayectoria rugosa $\mathbf{X} = (x,\mathbb{X})$. Para esto necesitaremos encontrar una clase de intengrandos a los cuales les podamos definir de forma consistente su integral de tal forma que esta sea continua en las topologías correspondientes.

Para $\mathbf{X} = (x,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ fijo el conjunto de integrandos a considerar esta dado por funciones de la forma $y = F(x) \in C\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right)$ donde $F \in C_b^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e))$. Observemos que la idea de las sumas de Riemann-Stieltjes es aproximar a la función y en el subintervalo $[s,t]$ por la constante y_s y evaluar esta en el incremento $x_{s,t}$, en nuestro caso particular esto significa el considerar que $F(x_r) \approx F(x_s)$ para todo $r \in [s,t]$. Sin embargo nuestra hipótesis en F nos permite considerar una mejor aproximación dada por la expansión de Taylor, es decir considerar que, como tranformaciones lineales,

$$F(x_r) \approx F(x_s) + DF(x_s)x_{s,r},$$

donde $DF : \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e))$ es la derivada de F y el termino $DF(x_s)x_{s,r} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)$ ya que es la evaluación de $DF(x_s) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e))$ en el elemento $x_{s,r} \in \mathbb{R}^d$.

Recordemos que como espacios vectoriales se tiene el isomorfismo

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)$$

los cuales a su vez son isomorfos al espacio de funciones bilineales de $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}^e$, por lo que D^2F, la segunda derivada de F, se puede considerar de cualquiera de las siguientes maneras:

- un mapeo de $\mathbb{R}^d$ a las tranfomaciones lineales de $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}^e$
- un mapeo bilineal con dos entradas en $\mathbb{R}^d$ y que toma valores en $\mathbb{R}^e$
- un mapeo lineal que manda tensores de nivel 2 a vectores en $\mathbb{R}^e$

y en particular evaluar $D^2F(x_s)$ en un par $(a,b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ es lo mismo que evaluarla en el tensor $a \otimes b \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, es decir, $D^2F(x_s)(a,b) = D^2F(x_s)a \otimes b$.

Esta aproximación de Taylor nos motiva a definir la suma de Riemann-Stieltjes compensada en una partición $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \ldots < t_n = T\}$ como

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F(x_{t_{i-1}})x_{t_{i-1},t_i} + DF(x_{t_{i-1}})\mathbb{X}_{t_{i-1},t_i} \right) \in \mathbb{R}^e.$$

Dado $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ la información proporcionada por el par $(x, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ debería ser suficiente para determinar un posible límite en estas sumas ya que el agregar más información en la forma de $\mathbb{X}^{(3)} : [0,T]^2 \to \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes 3}$ que satisfaga una condición de la forma

$$\sup_{s \neq t} \frac{\mathbb{X}^{(3)}_{s,t}}{|t-s|^{3\alpha}}$$

tendriamos, por las condiciones Hölder, que conforme $|t-s| \to 0$

$$x_{s,t} = O(|t-s|^{\alpha}),\ \mathbb{X}_{s,t} = O(|t-s|^{2\alpha}) \text{ y } \mathbb{X}^{(3)}_{s,t} = O(|t-s|^{3\alpha}) = o(|t-s|)$$

ya que $3\alpha > 1$, por lo que agregar un termino más en la aproximación de Taylor y por lo tanto, ya que D^2F la suponemos acotada, el agregar el termino $D^2F(x_s)\mathbb{X}^{(3)}_{s,t} = o(|t-s|)$ en la suma compensada de Riemann-Stieltjes no debería modificar el límite de estas sumas en caso de que este límite exista.

El siguiente lema nos resume las propiedades que nos importarán F y DF, las cuales nos permitiran dar una generalización en la siguiente sección.

Lema 2.10. *Sea $F \in C_b^2\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\right)$, dos veces diferenciable con segunda derivada continua y acotada, y una trayectoria rugosa $(x, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ para $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Definamos para $s,t \in [0,T]$*

$$y_s := F(x_s), \qquad y'_s := DF(x_s) \qquad R^y_{s,t} := y_{s,t} - y'_s x_{s,t} = y_t - y_s - y'_s(x_{s,t}),$$

entonces se tiene que

$$||y||_{\alpha} \leq ||DF||_{\infty} ||x||_{\alpha}, \quad ||y'||_{\alpha} \leq \left|\left|D^2F\right|\right|_{\infty} ||x||_{\alpha} \quad y \quad ||R^y||_{2\alpha} \leq \frac{1}{2} \left|\left|D^2F\right|\right|_{\infty} ||x||^2_{\alpha}.$$

y todas estas cantidades son finitas.

Demostración. Como $F \in C_b^2\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\right)$ entonces F y DF son Lipschitz con constantes Lipschitz $||DF||_{\infty}$ y $\left|\left|D^2F\right|\right|_{\infty}$ respectivamente y por lo tanto

$$|y_t - y_s| = |F(x_t) - F(x_s)| \leq ||DF||_{\infty} |x_t - x_s|$$

y

$$|y'_t - y'_s| = |DF(x_t) - DF(x_s)| \leq \left|\left|D^2F\right|\right|_{\infty} |x_t - x_s|$$

por lo que dividiendo por $|t-s|^{\alpha}$ y tomando sumpremos se obtiene

$$||y||_{\alpha} \leq ||DF||_{\infty} ||x||_{\alpha} \quad \text{y} \quad ||y'||_{\alpha} \leq \left|\left|D^2F\right|\right|_{\infty} ||x||_{\alpha}.$$

Por otro lado, para $0 \leq s < t \leq T$ consideremos una expansión en serie de Taylor de la forma

$$F(x_t) = F(x_s) + DF(x_s)x_{s,t} + \frac{1}{2}D^2F(z)x_{s,t} \otimes x_{s,t}$$

donde z se encuentra en el interior del segmento determinado por x_t y x_s, es decir, existe $\xi \in (0,1)$ tal que $z = x_s + \xi x_{s,t}$ y por lo tanto

$$R^y_{s,t} = y_{s,t} - y'_{s,t} = F(x_t) - F(x_s) - DF(x_s)x_{s,t} = \frac{1}{2}D^2F(x_s + \xi x_{s,t})x_{s,t} \otimes x_{s,t}$$

con lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} \left|R^y_{s,t}\right| &\leq \frac{1}{2}\left|D^2F(z)x_{s,t} \otimes x_{s,t}\right| \leq \frac{1}{2}\left|D^F(z)\right|_{op}\left|x_{s,t} \otimes x_{s,t}\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|\left|D^2F\right|\right|_\infty \left|x_{s,t} \otimes x_{s,t}\right| = \frac{1}{2}\left|\left|D^2F\right|\right|_\infty \left|x_{s,t}\right|^2 \end{aligned}$$

y dividiendo por $|t-s|^{2\alpha}$ y tomando supremos concluimos que

$$||R^y||_{2\alpha} \leq \frac{1}{2}\left|\left|D^2F\right|\right|_\infty ||x||^2_\alpha .$$

□

Para formalizar nuestra idea sobre la aproximación de las sumas de Riemann-Stieltjes compensadas introducimos lo siguiente:

Definición 2.11. *Sean $\alpha, \beta > 0$ y $\Xi : \left\{(s,t) \in [0,T]^2 \;\middle|\; s \leq t\right\} \to \mathbb{R}^d$. Para $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ definimos*

$$\delta\Xi_{s,u,t} := \Xi_{s,t} - \Xi_{s,u} - \Xi_{u,t} \quad y \quad ||\delta\Xi||'_\beta := \sup_{s<u<t} \frac{|\delta\Xi_{s,u,t}|}{|t-s|^\beta}$$

y

$$||\Xi||_{\alpha,\beta} := ||\Xi||_\alpha + ||\delta\Xi||'_\beta = \sup_{s<t}\frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} + \sup_{s<u<t}\frac{|\delta\Xi_{s,u,t}|}{|t-s|^\beta}.$$

Más aún, definimos el espacio $C_2^{\alpha,\beta}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ como el conjunto de estas funciones Ξ tales que $\Xi_{t,t} = 0$ para todo $t \in [0,T]$ y $||\Xi||_{\alpha,\beta} < +\infty$.

Es fácil ver que $||\cdot||'_\beta$ cumple la desigualdad del triangulo y gracias a la linealidad de δ es sencillo ver que $C_2^{\alpha,\beta}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ es un espacio vectorial y $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ define una seminorma. De hecho la condición $||\Xi||_\alpha = 0$ nos implica que $\Xi_{s,t} = 0$ para todo $s < t$, pero por definición $\Xi_{t,t} = 0$ para todo $t \in [0,T]$ por lo que de hecho $||\cdot||_{\alpha,\beta}$ define una norma. Observemos que si Ξ esta dada por los incrementos de una función, entonces por la aditividad de los incrementos $\delta\Xi = 0$ por lo que $||\delta\Xi||'_\beta$ es una forma de cuantificar que tan no aditiva es Ξ.

Como veremos mas adelante, los elementos $\Xi_{s,t}$ jugarán el papel de nuestros términos $F(x_s)x_{s,t} + DF(x_s)\mathbb{X}_{s,t}$. El siguiente resultado nos da una forma de integración abstracta con respecto a estas aproximaciones Ξ.

Teorema 2.12 (Lema del pegado). *Sean $0 < \alpha \leq 1 < \beta$, entonces existe un único operador lineal continuo*

$$\mathcal{I} : (C_2^{\alpha,\beta}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right), ||\cdot||_{\alpha,\beta}) \to (C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right), ||\cdot||_{\alpha-H\ddot{o}l})$$

tal que $(\mathcal{I}\Xi)_0 = 0$ y

$$|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| \leq C\,||\delta\Xi||'_\beta\,|t-s|^\beta,$$

donde $(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}$ es el incremento de la trayectoria $\mathcal{I}\Xi$ y C es una constante que depende de β.

Demostración. Primero veamos la unicidad, sean $\mathcal{I}^1$ y $\mathcal{I}^2$ dos mapeos que satisfacen lo anterior, entonces para $i \in \{1,2\}$

$$\left|(\mathcal{I}^i\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}\right| \leq C_i\,|t-s|^\beta.$$

Utilizando la desigualdad del triangulo tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\mathcal{I}^1\Xi - \mathcal{I}^2\Xi\right|\right|_{\beta\text{-Höl}} &= \sup_{s\neq t}\frac{\left|(\mathcal{I}^1\Xi)_{s,t} - (\mathcal{I}^2\Xi)_{s,t}\right|}{|t-s|^\beta} \\
&\leq \sup_{s\neq t}\frac{\left|(\mathcal{I}^1\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}\right|}{|t-s|^\beta} + \sup_{s\neq t}\frac{\left|(\mathcal{I}^2\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}\right|}{|t-s|^\beta} \\
&\leq C_1 + C_2 < +\infty
\end{aligned}$$

y como $\beta > 1$ concluimos por el Lema 2.3 que $\mathcal{I}^1\Xi - \mathcal{I}^2\Xi$ es constante. Por hipótesis, $(\mathcal{I}^i\Xi)_0 = 0$ para $i \in \{1,2\}$ por lo que concluimos que $\mathcal{I}^1\Xi - \mathcal{I}^2\Xi = 0$ y por lo tanto $\mathcal{I}$ es único.

Definamos para una partición $\mathcal{P} = \{s = t_0 < \ldots < t_n = t\}$ la notación

$$\int_{\mathcal{P}} \Xi := \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \Xi_{u,v} = \sum_{i=1}^n \Xi_{t_{i-1},t_i},$$

entonces nuestro objetivo es demostrar que si $s < t$ entonces

$$(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0\\ \mathcal{P}\subset[s,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \Xi_{u,v} = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0\\ \mathcal{P}\subset[s,t]}} \int_{\mathcal{P}} \Xi.$$

Dada $\mathcal{P} = \{s = t_0 < \ldots < t_n = t\}$ una partición del intervalo $[s,t] \subseteq [0,T]$, entonces existe $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ tal que

$$|t_{i+1} - t_{i-1}| \leq \frac{2}{n-1}\,|t-s|,$$

esto ya que en caso contrario, sumando todas las desigualdes, se tendría que

$$\begin{aligned}
2\,|t-s| = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{n-1}\,|t-s| &< \sum_{i=1}^{n-1}|t_{i+1} - t_{i-1}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1}|t_i - t_{i-1}| + \sum_{i=1}^{n-1}|t_{i+1} - t_i| \\
&\leq 2\,|t-s|.
\end{aligned}$$

Dado que las particiones $\mathcal{P}^{(0)} := \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}^{(1)} := \mathcal{P} \setminus \{t_i\}$ solo difieren en que la primera separa el intervalo $[t_{i-1}, t_{i+1}] \in \mathcal{P}^{(1)}$ en dos subintervalos $[t_{i-1}, t_i], [t_i, t_{i+1}] \in \mathcal{P}^{(0)}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathcal{P}\setminus\{t_i\}} \Xi - \int_{\mathcal{P}} \Xi \right| &= \left| \Xi_{t_{i+1}, t_{i-1}} - \Xi_{t_{i-1}, t_i} - \Xi_{t_i, t_{i+1}} \right| \\
&= \left| \delta \Xi_{t_{i-1}, t, t_{i+1}} \right| \\
&\leq ||\delta\Xi||'_\beta \left| t_{i+1} - t_{i-1} \right|^\beta \\
&\leq ||\delta\Xi||'_\beta \left(\frac{2\left|t-s\right|}{n-1} \right)^\beta .
\end{aligned}$$

Iterando este proceso $n-1$ veces, definimos para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ particiones $\mathcal{P}^{(k)}$ tales que $\mathcal{P}^{(k)} \subset \mathcal{P}^{(k-1)} \subseteq \mathcal{P}$,

$$\left| \int_{\mathcal{P}^{(k-1)}} \Xi - \int_{\mathcal{P}^{(k)}} \Xi \right| \leq ||\delta\Xi||'_\beta \left(\frac{2\left|t-s\right|}{n-k-1} \right)^\beta ,$$

concluyendo con $\mathcal{P}^{(n-1)} = \{s < t\}$ la partición trivial de $[s,t]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left| \Xi_{s,t} - \int_{\mathcal{P}} \Xi \right| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \left| \int_{\mathcal{P}^{(k)}} \Xi - \int_{\mathcal{P}^{(k-1)}} \Xi \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} ||\delta\Xi||'_\beta \left(\frac{2\left|t-s\right|}{n-k} \right)^\beta \\
&\leq 2^\beta \, ||\delta\Xi||'_\beta \, \zeta(\beta) \left| t-s \right|^\beta
\end{aligned}$$

donde $\zeta(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta}$ es la función zeta de Riemann. Observemos que el último termino de esta desigualdad no depende de la partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[s,t]$ por lo que tomando el supremo sobre todas las particiones de $[s,t]$ obtenemos la desigualdad máxima

$$\sup_{\mathcal{P} \subset [s,t]} \left| \Xi_{s,t} - \int_{\mathcal{P}} \Xi \right| \leq 2^\beta \, ||\delta\Xi||'_\beta \, \zeta(\beta) \left| t-s \right|^\beta .$$

Sean $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ particiones de $[s,t]$ tales que $\mathcal{P}'$ refina a $\mathcal{P}$. Si para $[u,v] \in \mathcal{P}$ denotamos por $\mathcal{P}' \cap [u,v]$ a la partición de $[u,v]$ definida por la restricción de $\mathcal{P}'$ al intervalo $[u,v]$ la cual esta bien definida pues $[u,v] \in \mathcal{P}'$. Entonces $[u',v'] \in \mathcal{P}'$ si y solo si existe $[u,v] \in \mathcal{P}$ tal que $[u',v'] \in \mathcal{P}' \cap [u,v]$ y por lo tanto

$$\int_{\mathcal{P}} \Xi - \int_{\mathcal{P}'} \Xi = \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \left(\Xi_{u,v} - \int_{\mathcal{P}' \cap [u,v]} \Xi \right) .$$

Utilizando la desigualdad máxima obtenida anteriormente a los subintervalos $[u,v] \in \mathcal{P}$

obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathcal{P}} \Xi - \int_{\mathcal{P}'} \Xi\right| &\leq \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left|\Xi_{u,v} - \int_{\mathcal{P}'\cap[u,v]} \Xi\right| \\ &\leq 2^{\beta} \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_{\beta} \zeta(\beta) \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} |v-u|^{\beta} \\ &\leq 2^{\beta} \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_{\beta} \zeta(\beta) \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} |\mathcal{P}|^{\beta}\end{aligned}$$

dado que la partición $\mathcal{P}$ tiene a lo más $\left\lfloor \frac{1}{|\mathcal{P}|} \right\rfloor$ subintervalos tenemos que

$$\left|\int_{\mathcal{P}} \Xi - \int_{\mathcal{P}'} \Xi\right| \leq 2^{\beta} \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_{\beta} \zeta(\beta) \frac{1}{|\mathcal{P}|} |\mathcal{P}|^{\beta} = O\left(|\mathcal{P}|^{\beta-1}\right).$$

Ahora, dadas $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ particiones de $[s,t]$ arbitrarias, denotamos por $\mathcal{P}\vee\mathcal{P}'$ a la partición definida por el conjunto de puntos $\mathcal{P}\cup\mathcal{P}'$, entonces $\mathcal{P}\vee\mathcal{P}'$ refina a $\mathcal{P},\mathcal{P}'$ y $|\mathcal{P}\vee\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|\vee|\mathcal{P}'|$ por lo tanto obtenemos

$$\left|\int_{\mathcal{P}} \Xi - \int_{\mathcal{P}'} \Xi\right| \leq \left|\int_{\mathcal{P}\vee\mathcal{P}'} \Xi - \int_{\mathcal{P}} \Xi\right| + \left|\int_{\mathcal{P}\vee\mathcal{P}'} \Xi - \int_{\mathcal{P}'} \Xi\right| = O((|\mathcal{P}|\vee|\mathcal{P}|)^{\beta-1}).$$

Como $|\mathcal{P}\vee\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|\vee|\mathcal{P}'|$, tomando supremos obtenemos que

$$\sup_{\substack{|\mathcal{P}|\vee|\mathcal{P}'|\leq\epsilon \\ \mathcal{P},\mathcal{P}'\subset[s,t]}} \left|\int_{\mathcal{P}} \Xi - \int_{\mathcal{P}'} \Xi\right| = O(\epsilon^{\beta-1}).$$

Como $\beta > 1$ esto nos dice que la red $\left\{\int_{\mathcal{P}} \Xi \,\middle|\, \mathcal{P} \subset [s,t]\right\}$ es de Cauchy y por lo tanto es convergente. De esta manera podemos definir $(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}$ como este límite y para cualquier sucesión $\{\mathcal{P}^n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de particiones de $[s,t]$ tales que $|\mathcal{P}^n| \to 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{P}^n} \Xi = (\mathcal{I}\Xi)_{s,t}.$$

Más aún, utilizando la desigualdad máxima obtenemos que

$$|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \left|\int_{\mathcal{P}} \Xi - \Xi_{s,t}\right| \leq 2^{\beta} \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_{\beta} \zeta(\beta) |t-s|^{\beta} = C \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_{\beta} |t-s|^{\beta},$$

con lo que se obtiene la desigualdad deseada. Observemos que podemos extender la definición de $\mathcal{I}\Xi$ haciendo $(\mathcal{I}\Xi)_{t,t} = 0$ para todo $t \in [0,T]$ y como $\Xi_{t,t} = 0$ entonces trivialmente se cumple esta desigualdad máximal para $s = t$.

Veamos que podemos definir $\mathcal{I}\Xi : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ de tal manera que $(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}$ son los incrementos de esta función. Para este fin basta ver que

$$(\mathcal{I}\Xi)_{0,t} = (\mathcal{I}\Xi)_{0,s} + (\mathcal{I}\Xi)_{s,t}.$$

Sea $\{\mathcal{P}^{1,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión de particiones de $[0,s]$ tales que $\left|\mathcal{P}^{1,n}\right| \to 0$ y $\{\mathcal{P}^{2,n}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión de particiones de $[s,t]$ tales que $\left|\mathcal{P}^{2,n}\right| \to 0$ De esta forma tenemos que

$$(\mathcal{I}\Xi)_{0,s} + (\mathcal{I}\Xi)_{s,t} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{P}^{1,n}} \Xi + \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{P}^{2,n}} \Xi.$$

Más aún, si $\mathcal{P}^n$ denota a la partición de $[0,t]$ definida por lo puntos $\mathcal{P}^{1,n} \cup \mathcal{P}^{2,n}$, entonces

$$\int_{\mathcal{P}^n} \Xi = \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^n} \Xi_{u,v} = \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{1,n}} \Xi_{u,v} + \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{2,n}} \Xi_{u,v} = \int_{\mathcal{P}^{1,n}} \Xi + \int_{\mathcal{P}^{2,n}} \Xi.$$

Tenemos que $|\mathcal{P}^n| = \left|\mathcal{P}^{1,n}\right| \vee \left|\mathcal{P}^{2,n}\right| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}\Xi)_{0,t} &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{P}^n} \Xi = \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathcal{P}^{1,n}} \Xi + \int_{\mathcal{P}^{2,n}} \Xi \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{P}^{1,n}} \Xi + \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{P}^{2,n}} \Xi = (\mathcal{I}\Xi)_{0,s} + (\mathcal{I}\Xi)_{s,t}.\end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{I}\Xi \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. Para esto observemos que

$$|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}| \leq |(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| + |\Xi_{s,t}| \leq 2^\beta \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_\beta \zeta(\beta) \left|t-s\right|^\beta + \left|\left|\Xi\right|\right|_\alpha \left|t-s\right|^\alpha,$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} &\leq 2^\beta \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_\beta \zeta(\beta) \left|t-s\right|^{\beta-\alpha} + \left|\left|\Xi\right|\right|_\alpha \\ &\leq 2^\beta \zeta(\beta) T^{\beta-\alpha} \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_\beta + \left|\left|\Xi\right|\right|_\alpha\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sup_{s\neq t} \frac{|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \leq 2^\beta \zeta(\beta) T^{\beta-\alpha} \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_\beta + \left|\left|\Xi\right|\right|_\alpha < +\infty.$$

Por último, como la función $\int_{\mathcal{P}} \Xi$ es lineal en Ξ, pues esta definida como una suma, entonces por la linealidad del límite se tiene que $\mathcal{I}$ es lineal y por lo tanto para ver que es continua basta ver que es acotada, pero utilizando la desigualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|\left|\mathcal{I}\Xi\right|\right|_{\alpha-H\ddot{o}l} &= \frac{|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \\ &\leq 2^\beta \zeta(\beta) T^{\beta-\alpha} \left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_\beta + \left|\left|\Xi\right|\right|_\alpha \\ &\leq (2^\beta \zeta(\beta) T^{\beta-\alpha} + 1)(\left|\left|\delta\Xi\right|\right|'_\beta + \left|\left|\Xi\right|\right|_\alpha) \\ &= (2^\beta \zeta(\beta) T^{\beta-\alpha} + 1) \left|\left|\Xi\right|\right|_{\alpha,\beta}\end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{I} : \left(C_2^{\alpha,\beta}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right), ||\cdot||_{\alpha,\beta}\right) \to \left(C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right), ||\cdot||_{\alpha-H\ddot{o}l}\right)$ es un operador lineal y continuo. $\square$

Ahora apliquemos este resultado a nuestras sumas de Riemann-Stieltjes compensadas.

Teorema 2.13 (Lyons). *Sea* $\mathbf{X} = (x, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ *para algún* $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ *y sea* $F \in C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$. *Entonces para todo* $0 \leq s < t \leq T$ *la red*

$$\left\{ \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} (F(x_u)x_{u,v} + DF(x_u)\mathbb{X}_{u,v}) \,\middle|\, \mathcal{P} \subset [s,t] \right\}$$

es convergente conforme $|\mathcal{P}| \to 0$ *y a este límite le llamamos la integral rugosa en* $[s,t]$ *de la 1-forma* $F \circ x$ *con respecto a la trayectoria rugosa* $\mathbf{X}$ *y se denota por* $\int_s^t F(x_r)\, d\mathbf{X}_r$. *Más aún, se tiene la siguiente cota*

$$\left| \int_s^t F(x_r)\, d\mathbf{X}_r - F(x_s)x_{s,t} - DF(x_s)\mathbb{X}_{s,t} \right| \leq C\, ||F||_{C_b^2} \left(||x||_\alpha^3 + ||x||_\alpha\, ||\mathbb{X}||_{2\alpha} \right) |t-s|^{3\alpha}$$

donde C *es una constante que solo depende de* α *y* $||F||_{C_b^2} := ||F||_\infty + ||DF||_\infty + \left|\left|D^2F\right|\right|_\infty$.

Definimos la integral indefinida $z : [0,T] \to \mathbb{R}^e$ *como* $z_t = \int_0^t F(x_r)\, d\mathbf{X}_r$, *entonces* $z \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}([0,T], \mathbb{R}^e)$ *y su norma satisface*

$$||z||_\alpha \leq C\, ||F||_{C_b^2} (||\mathbf{X}||_\alpha \vee ||\mathbf{X}||_\alpha^{\frac{1}{\alpha}})$$

donde, recordemos, $||\mathbf{X}||_\alpha = \text{máx}\{||x||_\alpha, ||\mathbb{X}||_{2\alpha}^{\frac{1}{2}}\}$ *es la* α*-Hölder norma homogénea en el espacio* $\mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ *y* C *es una constante que solo depende de* T *y* α, *la cual puede elegirse de tal forma que sea uniforme para todo* $T \leq 1$.

Demostración. Sean $y = F \circ x$, $y' = DF \circ x$ y $R^y_{s,t} = y_{s,t} - y'_s x_{s,t}$.

Para $0 \leq s \leq t \leq T$ definimos $\Xi_{s,t} = y_s x_{s,t} + y'_s \mathbb{X}_{s,t}$. Como $x_{t,t} = 0$, $\mathbb{X}_{t,t} = 0$ y y_t, y'_t son lineales, entonces $\Xi_{t,t} = 0$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
|\Xi_{s,t}| &\leq |y_s(x_{s,t})| + |y'_s(\mathbb{X}_{s,t})| \\
&\leq |y_s|_{op} |x_{s,t}| + |y'_s|_{op} |\mathbb{X}_{s,t}| \\
&\leq \sup_{r\in[0,T]} |y_r|_{op} ||x||_\alpha |t-s|^\alpha + \sup_{r\in[0,T]} |y'_r|_{op} ||\mathbb{X}||_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} \\
&\leq ||y||_\infty ||x||_\alpha |t-s|^\alpha + ||y'||_\infty ||\mathbb{X}||_{2\alpha} T^\alpha |t-s|^\alpha \\
&\leq (||y||_\infty ||x||_\alpha + ||y'||_\infty ||\mathbb{X}||_{2\alpha} T^\alpha) |t-s|^\alpha .
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ esta dotado con la norma de operadores $|\cdot|_{op}$ y $y : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ es lineal y continua, entonces es acotada , es decir,

$$||y||_\infty := \sup_{r\in[0,T]} |y_r|_{op} < +\infty.$$

Por el mismo motivo

$$||y'||_\infty := \sup_{r\in[0,T]} |y'_r|_{op} < +\infty.$$

Más aún, como $(x, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ se concluye que existe $C > 0$ tal que

$$||\Xi||_\alpha \leq C(||x||_\alpha + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} T^\alpha) < +\infty.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
\delta\Xi_{s,u,t} &= \Xi_{s,t} - \Xi_{s,u} - \Xi_{u,t} \\
&= y_s(x_{s,t}) - y_s(x_{s,u}) - y_u(x_{u,t}) + y_s'(\mathbb{X}_{s,t}) - y_s'(\mathbb{X}_{s,u}) - y_u'(\mathbb{X}_{u,t}) \\
&= y_s(x_{u,t}) - y_u(x_{u,t}) + y_s'\left(\mathbb{X}_{u,t} + x_{s,u} \otimes x_{u,t}\right) - y_u'(\mathbb{X}_{u,t}) \\
&= -y_{s,u}(x_{u,t}) - y_{s,u}'(\mathbb{X}_{u,t}) + y_s'(x_{s,u} \otimes x_{u,t}) \\
&= -y_{s,u}(x_{u,t}) - y_{s,u}'(\mathbb{X}_{u,t}) + (y_s'(x_{s,u}))(x_{u,t}) \\
&= -(y_{s,u} - y'(x_{s,u}))(x_{u,t}) - y_{s,u}'(\mathbb{X}_{u,t}) \\
&= -R^y_{s,u}(x_{u,t}) - y_{s,u}'(\mathbb{X}_{u,t})
\end{aligned}$$

y por lo tanto para $0 \leq s < u < t \leq T$:

$$\begin{aligned}
\left|\delta_{\Xi_{s,u,t}}\right| &\leq \left|R^y_{s,t}(x_{u,t})\right| + \left|y_{s,u}'(\mathbb{X}_{u,t})\right| \\
&\leq \left|R^y_{s,u}\right|_{op} |x_{u,t}| + \left|y_{s,u}'\right|_{op} |\mathbb{X}_{u,t}| \\
&\leq ||R^y||_{2\alpha} |s-u|^{2\alpha} ||x||_\alpha |t-u|^\alpha + ||y'||_\alpha |s-u|^\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha} |t-u|^{2\alpha} \\
&\leq (||R^y||_{2\alpha} ||x||_\alpha + ||y'||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha}) |t-s|^{3\alpha},
\end{aligned}$$

Por el Lema 2.10 $||y'||_\alpha < +\infty, ||R^y||_{2\alpha} < +\infty$ y por lo tanto

$$||\delta\Xi||_{3\alpha}' \leq ||R^y||_{2\alpha} ||x||_\alpha + ||y'||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha} < +\infty.$$

Lo anterior nos dice que $\Xi \in C_2^{\alpha,3\alpha}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$, y como $3\alpha > 1$ el Teorema 2.12 nos garantiza la existencia de $\mathcal{I}\Xi \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}([0,T], \mathbb{R}^e)$ y $C > 0$ (la cual depende solo de 3α y por lo tanto solo de α) tal que se satisface

$$|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t}| \leq C\, ||\delta\Xi||_{3\alpha}' |t-s|^{3\alpha} \leq C\,(||R^y||_{2\alpha} ||x||_\alpha + ||y'||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha}) |t-s|^{3\alpha}.$$

Definimos

$$\int_s^t y_r\, d\mathbf{X}_r := (\mathcal{I}\Xi)_{s,t} = (\mathcal{I}\Xi)_t - (\mathcal{I}\Xi)_s,$$

entonces $z = \int_0^\cdot y_r\, d\mathbf{X}_r = \mathcal{I}\Xi \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}([0,T], \mathbb{R}^e)$ y como

$$\Xi_{s,t} = y_s x_{s,t} + y_s' \mathbb{X}_{s,t}$$

entonces se satisface

$$\left|\int_s^t y_r\, d\mathbf{X}_r - y_s x_{s,t} - y_s'\mathbb{X}_{s,t}\right| \leq C\,(||R^y||_{2\alpha} ||x||_\alpha + ||y'||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha}) |t-s|^{3\alpha}$$

Observemos que hasta aquí solo hemos utilizado que $y \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\right)$, $y' \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\right)$, $y_{s,t} + y_s'(x_{s,t}) = R^y_{s,t}$ y

$$||R^y||_{2\alpha} = \sup_{s\neq t} \frac{\left|R^y_{s,t}\right|_{op}}{|s-t|^{2\alpha}} < +\infty$$

y no hemos utilizado el que $y = F \circ x$, $y' = DF \circ x$, por lo que hasta aqui este argumento servira para el Teorema 2.17.

A partir de aqui utilizaremos que $y = F \circ x$, $y' = DF \circ x$. Entonces por el Teorema 2.10 tenemos que

$$\begin{aligned} ||R^y||_{2\alpha} ||x||_\alpha + ||y'||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha} &\leq \frac{1}{2} \left|\left|D^2 F\right|\right|_\infty ||x||_\alpha^2 ||x||_\alpha + \left|\left|D^2 F\right|\right|_\infty ||\mathbb{X}||_{2\alpha} ||x||_\alpha \\ &\leq C' ||F||_{C_b^2} \left(||x||_\alpha^3 + ||x||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha}\right) \end{aligned}$$

con lo cual se tiene la cota

$$\left| \int_s^t F(x_r)\, d\mathbf{X}_r - F(x_s)x_{s,t} - DF(x_s)\mathbb{X}_{s,t} \right| \leq C ||F||_{C_b^2} \left(||x||_\alpha^3 + ||x||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha}\right) |t-s|^{3\alpha}$$

donde C es una constante que solo depende de α.

Por último, para mostrar la cota sobre $||z||_\alpha$ observemos que

$$\begin{aligned} |z_{s,t}| &\leq |z_{s,t} - \Xi_{s,t}| + |\Xi_{s,t}| \\ &\leq \left| \int_s^t F(x_r)\, d\mathbf{X}_r - F(x_s)x_{s,t} - DF(x_s)\mathbb{X}_{s,t} \right| + |F(x_s)(x_{s,t}) + DF(x_s)\mathbb{X}_{s,t}| \\ &\leq C ||F||_{C_b^2} \left(||x||_\alpha^3 + ||x||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha}\right) |t-s|^{3\alpha} + ||DF||_\infty |x_{s,t}| + \left|\left|D^2 F\right|\right|_\infty |\mathbb{X}_{s,t}| \\ &\leq C ||F||_{C_b^2} \left(||x||_\alpha^3 + ||x||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha}\right) |t-s|^{3\alpha} + ||DF||_\infty ||x||_\alpha |t-s|^\alpha \\ &\quad + \left|\left|D^2 F\right|\right|_\infty ||\mathbb{X}||_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} \\ &\leq C' ||F||_{C_b^2} \left(\left(||x||_\alpha^3 + ||x||_\alpha ||\mathbb{X}||_{2\alpha}\right) |t-s|^{3\alpha} + ||x||_\alpha |t-s|^\alpha + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha}\right) \\ &\leq C' ||F||_{C_b^2} \left((||\mathbf{X}||_\alpha^3 + ||\mathbf{X}||_\alpha ||\mathbf{X}||_\alpha^2) |t-s|^{3\alpha} + ||\mathbf{X}||_\alpha |t-s|^\alpha + ||\mathbf{X}||_\alpha^2 |t-s|^{2\alpha}\right) \\ &\leq C'' ||F||_{C_b^2} \left(||\mathbf{X}||_\alpha^3 |t-s|^{2\alpha} + ||\mathbf{X}||_\alpha + ||\mathbf{X}||_\alpha^2 |t-s|^\alpha\right) |t-s|^\alpha \\ &\leq C'' ||F||_{C_b^2} \left(||\mathbf{X}||_\alpha^3 T^{2\alpha} + ||\mathbf{X}||_\alpha + ||\mathbf{X}||_\alpha^2 T^\alpha\right) |t-s|^\alpha \\ &\leq K ||F||_{C_b^2} \left(||\mathbf{X}||_\alpha^3 + ||\mathbf{X}||_\alpha + ||\mathbf{X}||_\alpha^2\right) |t-s|^\alpha \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$||z||_\alpha \leq K ||F||_{C_b^2} \left(||\mathbf{X}||_\alpha^3 + ||\mathbf{X}||_\alpha^2 + ||\mathbf{X}||_\alpha\right)$$

en donde K es una constante que depende de α y T la cual puede ser uniforme si $T \leq 1$.

Ahora consideremos dos casos. Si $||\mathbf{X}||_\alpha \leq 1$, entonces $||\mathbf{X}||_\alpha^3 \leq ||\mathbf{X}||_\alpha^2 \leq ||\mathbf{X}||_\alpha$ y por lo tanto

$$||z||_\alpha \leq 3K ||F||_{C_b^2} ||\mathbf{X}|| \leq 3K ||F||_{C_b^2} \left(||\mathbf{X}|| \vee ||\mathbf{X}||^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Mientras que si $||\mathbf{X}||_\alpha > 1$, como $\frac{1}{\alpha} > 3$, tenemos que $||\mathbf{X}||_\alpha < ||\mathbf{X}||_\alpha^2 < ||\mathbf{X}||_\alpha^3 < ||\mathbf{X}||_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ y por lo tanto

$$||z||_\alpha \leq 3K ||F||_{C_b^2} ||\mathbf{X}||^{\frac{1}{\alpha}} \leq 3K ||F||_{C_b^2} \left(||\mathbf{X}|| \vee ||\mathbf{X}||^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

con lo cual se concluye el resultado. $\square$

Por último veamos que para trayectorias rugosas geométricas se tiene un resultado equivalente al Teorema fundamental del cálculo. El caso de trayectorias no geométricas lo trataremos en el siguiente capítulo por medio de la fórmula de Itô y Föllmer.

Teorema 2.14. *Sea* $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$, $G \in C_b^3([0,T],\mathbb{R}^d)$. *Si* $\mathbf{X} \in \mathscr{C}_g^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$, *es decir* $\mathbf{X}$ *es geométrica, entonces*

$$\int_s^t DG(X)d\mathbf{X} = G(x_t) - G(x_s),$$

es decir, la integral de 1-formas gradientes es trivial para trayectorias rugosas geométricas.

Demostración. Para demostrar esto utilizaremos la unicidad de la integral abstracta en el Teorema 2.12. Consideremos $\Xi_{s,t} = DG(x_s)x_{s,t} + D^2G(x_s)\mathbb{X}_{s,t}$, entonces $\Xi \in C_2^{\alpha,3\alpha}([0,T],\mathbb{R}^d)$. Por otro lado, definimos $\bar{\Xi}_{s,t} = G(X_t) - G(X_s)$ el cual tiene incrementos aditivos y por lo tanto $\delta\bar{\Xi} = 0$. Más aún,

$$\left|\left|\bar{\Xi}\right|\right|_{\alpha,3\alpha} = \left|\left|\bar{\Xi}\right|\right|_{\alpha} + \left|\left|\delta\bar{\Xi}\right|\right|_{3\alpha} = \left|\left|\bar{\Xi}\right|\right|_{\alpha} \leq \left|\left|DG\right|\right|_{\infty} \left|\left|x\right|\right|_{\alpha} < +\infty$$

por lo cual $\bar{\Xi} \in C_2^{\alpha,3\alpha}([0,T],\mathbb{R}^d)$.

Por el Teorema 2.12 existen $\mathcal{I}\Xi$ y $\mathcal{I}\bar{\Xi}$. Más aún, $\mathcal{I}\Xi$ esta caracterizado por $(\mathcal{I}\Xi)_0 = 0$ y

$$|\mathcal{I}\Xi - \Xi_{s,t}| \leq C\,|t-s|^{3\alpha} = o(|t-s|).$$

Por ser una integración abstracta tenemos que $\left(\mathcal{I}\bar{\Xi}\right)_0 = 0$.

Observemos que

$$\left(\mathcal{I}\bar{\Xi}\right)_{s,t} = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0\\ \mathcal{P}\subset[s,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} G(x_u) - G(x_v) = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0\\ \mathcal{P}\subset[s,t]}} G(x_t) - G(x_s) = G(x_t) - G(x_s).$$

Por otro lado tenemos que como $\mathbf{X}$ es geométrica, entonces

$$\begin{aligned}\Xi_{s,t} &= DG(x_s)x_{s,t} + D^2G(x_s)\,\mathrm{Sim}(\mathbb{X}_{s,t}) + D^2G(x_s)\,\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})\\ &= DG(x_s)x_{s,t} + \frac{1}{2}D^2G(x_s)x_{s,t}\otimes x_{s,t} + D^2G(x_s)\,\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t}).\end{aligned}$$

Veamos que $D^2G(x_s)\,\mathrm{Asim}(\mathbb{X}_{s,t}) = 0$. Para esto observemos que como D^2G es la hessiana de G entonces es simétrica, es decir, para todo $i,j \in \{1,\ldots,d\}$

$$D^2G(x_s)(e_i\otimes e_j) = \left(D^2G\right)^{i,j} = \left(D^2G\right)^{j,i} = D^2G(x_s)(e_j\otimes e_i)$$

y por lo tanto $D^2G(x_s)\left([e_i,e_j]\right) = 0$. Como $\{[e_i,e_j] \mid i\neq j\}$ es una base para las matrices antisimétricas se extiende por linealidad que $D^2G(x_s)A = 0$ para toda A antisimétrica.

De esta forma obtenemos que

$$\Xi_{s,t} = DG(x_s)x_{s,t} + \frac{1}{2}D^2G(x_s)x_{s,t}\otimes x_{s,t}.$$

Por el Teorema de Taylor tenemos que

$$G(x_t) - G(x_s) = DG(x_s)x_{s,t} + \frac{1}{2}D^2G(x_s)x_{s,t}\otimes x_{s,t} + O(|x_{s,t}|^3).$$

Como $|x_{s,t}| \leq ||x||_\alpha |t-s|^\alpha$ y $3\alpha > 1$ tenemos que $O(|x_{s,t}|) = O(|t-s|^{3\alpha}) = o(|t-s|)$. Reescribiendo todo lo anterior tenemos que

$$\left|\left(\mathcal{I}\bar{\Xi}\right)_{s,t} - \Xi_{s,t}\right| = \left|G(x_t) - G(x_s) - DG(x_s)x_{s,t} - \frac{1}{2}D^2G(x_s)x_{s,t} \otimes x_{s,t}\right| \leq o(|t-s|).$$

Por unicidad de la integración abstracta tenemos que $\mathcal{I}\Xi = \mathcal{I}\bar{\Xi}$, es decir, para todo $s, t \in [0, T]$

$$\int_s^t DG(X)d\mathbf{X} = (\mathcal{I}\Xi)_{s,t} = \left(\mathcal{I}\bar{\Xi}\right)_{s,t} = G(x_t) - G(x_s)$$

con lo cual termina la prueba. □

2.5. Trayectorias controladas y derivada de Gubinelli

Para generalizar nuestra integral rugosa a una clase más grande de integrandos introducimos la noción de una trayectoria controlada y con respecto a una trayectoria de referencia x.

Definición 2.15. *Dada $x \in C^{\alpha-Höl}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$, V un espacio vectorial $(V, |\cdot|)$ normado de dimensión finita y $y \in C^{\alpha-Höl}([0,T], V)$ decimos que y es controlada por x si existe $y' \in C^{\alpha-Höl}\left([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, V)\right)$ tal que el "residuo" R^y definido implicitamente por la relación*

$$y_{s,t} = y'_s(x_{s,t}) + R^y_{s,t}$$

satisface

$$||Ry||_{2\alpha} = \sup_{s \neq t} \frac{\left|R^y_{s,t}\right|}{|s-t|^{2\alpha}} < +\infty.$$

Estas condiciones definen el espacio $(y, y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_x([0,T], V)$.

Más aún, decimos que y' es una derivada de Gubinelli de y si $(y, y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_x([0,T], V)$ aunque esta no sea necesariamente única.

Observemos que por el Lema 2.10 si $F \in C^2_b(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$ y $x \in C^{\alpha-Höl}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ entonces $(F(x), DF(x)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_x\left([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\right)$, es decir, $F(x)$ es controlada por x.

Teorema 2.16. *Para cada $x \in C^{\alpha-Höl}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ se tiene que $\mathscr{D}^{2\alpha}_x([0,T], V)$ es un espacio vectorial. Más aún,*

$$||(y, y')||_{x,2\alpha} := ||y'||_\alpha + ||R^y||_{2\alpha}$$

define una seminorma tal que $(y, y') \to |y_0| + |y'_0| + ||(y, y')||_{x,2\alpha}$ es una norma y hace a $\mathscr{D}^{2\alpha}_x([0,T], V)$ un espacio de Banach. Por último se tiene la cota

$$||y||_\alpha \leq ||R^y||_\alpha + ||x||_\alpha ||y'||_\infty \leq C(1 + ||x||_\alpha)(|y'_0| + ||(y, y')||_{x,2\alpha}),$$

donde $C > 0$ es una constante que solo depende de α y T y puede elegirse de manera uniforme para $T \leq 1$

Demostración. Si $(y,\hat{y}),(y',\hat{y}') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}([0,T],V)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $y+\lambda\hat{y} \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}([0,T],V)$ y $y'+\lambda\hat{y}' \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,V)\right)$. Más aún, $R^{y+\lambda\hat{y}} = R^y+\lambda R^{\hat{y}}$ por lo que $\left|\left|R^{y+\lambda\hat{y}}\right|\right| < +\infty$ y por lo tanto $\mathscr{D}_x^{2\alpha}([0,T],V)$ es un espacio vectorial.

Como $||\cdot||_\alpha$ y $||\cdot||_{2\alpha}$ son seminormas es sus respectivos espacios, entonces $||\cdot||_{x,2\alpha}$ es una seminorma en $\mathscr{D}_x^{2\alpha}([0,T],V)$ y de manera análoga al Teorema 2.7 se puede ver que $(y,y') \to |y_0| + |y_0'| + ||(y,y')||_{x,2\alpha}$ es una norma bajo la cual $\mathscr{D}_x^{2\alpha}([0,T],V)$ es de Banach.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
|y_{s,t}| &\leq |y_s'(x_{s,t})| + \left|R^y_{s,t}\right| \leq |y_s|_{op}\,|x_{s,t}| + ||R^y||_{2\alpha}\,|t-s|^{2\alpha} \\
&\leq (||y||_\infty\,||x||_\alpha + ||R^y||_{2\alpha}\,T^\alpha)\,|t-s|^\alpha
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$||y||_\alpha \leq ||R^y||_{2\alpha}\,T^\alpha + ||x||_\alpha\,||y'||_\infty\,.$$

Por último, observemos que

$$|y_s'| \leq \left|y_{0,s}'\right| + |y_0'| \leq ||y||_\alpha\,|s|^\alpha + |y_0'| \leq ||y'||_\alpha\,T^\alpha + |y_0'|$$

por lo que

$$||y'||_\infty \leq ||y'||_\alpha\,T^\alpha + |y_0'|$$

y entonces,

$$\begin{aligned}
||y||_\alpha &\leq ||R^y||_{2\alpha}\,T^\alpha + ||x||_\alpha\,||y'||_\infty \\
&\leq ||R^y||_{2\alpha}\,T^\alpha + ||x||_\alpha\,(||y'||_\alpha\,T^\alpha + |y_0'|) \\
&\leq C(1+||x||_\alpha)(||R^y||_{2\alpha} + ||y'||_\alpha + |y_0'|) \\
&= C(1+||x||_\alpha)(||(y,y')||_{x,2\alpha} + |y_0'|)
\end{aligned}$$

donde C es una constante que solo depende de T y α la cual puede hacerse uniforme para $T \leq 1$. $\square$

Teorema 2.17 (Gubinelli)**.** *Sea* $\mathbf{X} = (x,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *para algún* $\alpha \in \left(\frac{1}{3},1\right]$ *y sea* $(y,y') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right)$*. Entonces para todo* $0 \leq s < t \leq T$ *la red*

$$\left\{ \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} (y_u(x_{u,v}) + y_u'(\mathbb{X}_{u,v})) \;\middle|\; \mathcal{P} \subset [s,t] \right\}$$

es convergente conforme $|\mathcal{P}| \to 0$ *y a este límite le llamamos la integral rugosa con respecto a la trayectoria rugosa* $\mathbf{X}$ *en* $[s,t]$ *de la 1-forma* $y \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right)$ *y se denota por* $\int_s^t y_r\,d\mathbf{X}_r$*. Más aún, se tiene la siguiente cota*

$$\left|\int_s^t y_r\,d\mathbf{X}_r - y_s(x_{s,t}) - y_s'(\mathbb{X}_{s,t})\right| \leq C\,(||x||_\alpha\,||R^y||_{2\alpha} + ||\mathbb{X}||_{2\alpha}\,||y'||_\alpha)\,|t-s|^{3\alpha}$$

donde C *es una constante que solo depende de* T *y* α*, la cual puede elegirse de tal forma que sea uniforme para todo* $T \leq 1$*.*

Más aún, el mapeo

$$\mathscr{D}_x^{2\alpha}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right) \to \mathscr{D}_x^{2\alpha}\left([0,T],\mathbb{R}^e\right) \quad \textit{dado por} \quad (y,y') \mapsto (z,z') := \left(\int_0^{\cdot} y_r \, d\mathbf{X}_r, y\right)$$

es un operador lineal acotado que satisface

$$||(z,z')||_{x,2\alpha} \leq ||y||_\alpha + ||y'||_\infty ||x||_{2\alpha} + C\left(||x||_\alpha ||R^y||_{2\alpha} + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} ||y'||_\alpha\right)$$

Demostración. La primer parte del resultado es análoga a la primer parte del Teorema 2.13, es decir, la existencia de $\int_0^{\cdot} y_r \, d\mathbf{X}_r \in C^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^e\right)$ como límite de estas sumas de Riemann-Stieltjes compensadas y la cota

$$\left|\int_s^t y_r \, d\mathbf{X}_r - y_s(x_{s,t}) - y'_s(\mathbb{X}_{s,t})\right| \leq C\left(||x||_\alpha ||R^y||_{2\alpha} + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} ||y'||_\alpha\right) |t-s|^{3\alpha}.$$

Para la segunda parte primero veamos que $(z,z') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}\left([0,T],\mathbb{R}^e\right)$. Por lo anterior $z \in C^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^e\right)$ y por definición $z' = y \in C^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right)$. Más aún,

$$R^z_{s,t} = z_{s,t} - z'_s(x_{s,t}) = \int_s^t y_r \, d\mathbf{X}_r - y_s(x_{s,t})$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\left|R^z_{s,t}\right| &\leq \left|\int_s^t y_r \, d\mathbf{X}_r - y_s(x_{s,t}) - y'_s(\mathbb{X}_{s,t})\right| + |y'_s(\mathbb{X}_{s,t})| \\
&\leq C\left(||x||_\alpha ||R^y||_{2\alpha} + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} ||y'||_\alpha\right) |t-s|^{3\alpha} + ||y'||_\infty ||\mathbb{X}||_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} \\
&\leq \left(C\left(\left(||x||_\alpha ||R^y||_{2\alpha} + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} ||y'||_\alpha\right)T^\alpha\right) + ||y'||_\infty ||\mathbb{X}||_{2\alpha}\right) |t-s|^{2\alpha} \\
&= \left(C\left(||x||_\alpha ||R^y||_{2\alpha} + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} ||y'||_\alpha\right) + ||y'||_\infty ||\mathbb{X}||_{2\alpha}\right) |t-s|^{\alpha}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$||R^z||_{2\alpha} \leq C\left(||x||_\alpha ||R^y||_{2\alpha} + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} ||y'||_\alpha\right) + ||y'||_\infty ||\mathbb{X}||_{2\alpha} < +\infty,$$

es decir, y es una derivada de Gubinelli de $z = \int_0^{\cdot} y_r \, d\mathbf{X}_r$ y por lo tanto $(z,z') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}\left([0,T],\mathbb{R}^e\right)$ y con lo cual, por el Teorema 2.16 obtenemos la cota

$$\begin{aligned}
||(z,z')||_{x,2\alpha} &= ||z'||_\alpha + ||R^z||_{2\alpha} = ||y||_\alpha + ||R^z||_{2\alpha} \\
&\leq ||y||_\alpha + C\left(||x||_\alpha ||R^y||_{2\alpha} + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} ||y'||_\alpha\right) + ||y'||_\infty ||\mathbb{X}||_{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Por la linealidad del operador de integración abstracta $\mathcal{I}$ (Teorema 2.12) se sigue la linealidad de $\int \cdot \, d\mathbf{X}_r$ y a su vez la linealidad de $(y,y') \mapsto (z,z')$.

Para ver la continuidad, por el Teorema 2.16

$$||y||_\alpha \leq C(1 + ||x||_\alpha)(|y'_0| + ||R^y||_{2\alpha})$$

por lo que se tiene, considerando C constantes que dependan de $\mathbf{X}, T$ y α

$$\begin{aligned}
||(z,z')||_{x,2\alpha} &= ||z'||_\alpha + ||R^z||_{2\alpha} = ||y||_\alpha + ||R^z||_{2\alpha} \\
&\le C(|y_0'| + ||R^y||_{2\alpha}) + C(||R^y||_{2\alpha} + ||y'||_\alpha + ||y'||_\infty) \\
&\le C(|y_0'| + ||R^y||_{2\alpha}) + C(||R^y||_{2\alpha} + ||y'||_\alpha + ||y'||_\alpha T^\alpha + |y_0'|) \\
&\le C\left(|y_0'| + ||R^y||_{2\alpha} + ||y'||_\alpha\right) \\
&= C(|y_0'| + ||(y,y')||_{x,2\alpha}).
\end{aligned}$$

Recordemos que la norma en estos espacios esta dada por

$$(y,y') \mapsto |y_0| + |y_0'| + ||(y,y')||_{x,2\alpha}$$

por lo que, como $z_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
|z_0| + |z_0'| + ||(z,z')||_{x,2\alpha} &= |y_0| + ||(z,z')||_{x,2\alpha} \\
&\le |y_0| + C(|y_0'| + ||(y,y')||_{x,2\alpha}) \\
&\le C(|y_0| + |y_0'| + ||(y,y')||_{x,2\alpha}),
\end{aligned}$$

con lo cual se ve que este operador lineal es acotado y por lo tanto continuo. □

2.6. Estabilidad de la integral rugosa

Sean $(x,\mathbb{X})$, $(\bar{x},\bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ trayectorias rugosas, $(y,y') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}([0,T],V)$ y $(\bar{y},\bar{y}') \in \mathscr{D}_{\bar{x}}^{2\alpha}([0,T],V)$ trayectorias controladas por x y $\bar{x}$ respectivamente. En general tenemos que $\mathscr{D}_x^{2\alpha}([0,T],V)$ es un espacio de Banach diferente a $\mathscr{D}_{\bar{x}}^{2\alpha}([0,T],V)$ si $x \neq \bar{x}$, sin embargo, como $y', \bar{y}' \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,V)\right)$ y $R^y, R^{\bar{y}} : [0,T]^2 \to V$ viven en los mismos espacios y satisfacen que

$$||R^y||_{2\alpha}, \left|\left|R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha} < +\infty,$$

podemos definir una “distancia” como

$$d_{x,\bar{x},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}')) := ||y' - \bar{y}'||_\alpha + \left|\left|R^y - R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}.$$

Si $(\hat{x},\hat{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ es otra trayectoria rugosa y $(\hat{y},\hat{y}') \in \mathscr{D}_{\hat{x}}^{2\alpha}([0,T],V)$ una trayectoria controlada por esta entonces d satisface

$$d_{x,\bar{x},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}')) \le d_{x,\hat{x},2\alpha}((y,y'),(\hat{y},\hat{y}')) + d_{\hat{x},\bar{x},2\alpha}((\hat{y},\hat{y}'),(\bar{y},\bar{y}'))$$

que es una especie de desigualdad del triangulo.

A parte del dominio, el problema de estas “distancias” es que no separan puntos ya que el que esta distancia sea nula no implica que “$(y,y') = (\bar{y},\bar{y}')$” pues estos elementos viven en espacios diferentes $\mathscr{D}_x^{2\alpha}([0,T],V), \mathscr{D}_{\hat{x}}^{2\alpha}([0,T],V)$ ni tampoco que estas sean la misma trayectoria controlada por x (o $\bar{x}$) con misma derivada de Gubinelli. Inclusive en el caso $x = \bar{x}$ se tiene que si $c, \hat{c} \in \mathbb{R}$ entonces $(y + cx + \hat{c}, y' + c) \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}([0,T],V)$ pues $y + cx + \hat{c}, y' + c$ son α-Holder y

$$R_{s,t}^{y+cx+\hat{c}} = y_{s,t} + cx_{s,t} + \hat{c}_{s,t} - (y_s' + c_s)(x_{s,t}) = y_{s,t} + cx_{s,t} - y_s'(x_{s,t}) - cx_{s,t} = R_{s,t}^y.$$

Más aún,

$$d_{x,x,2\alpha}((y,y'),(y+cx+\hat{c},y'+c)) = ||y'-(y'+c)||_\alpha + \left|\left|R^y - R^{y+cx+\hat{c}}\right|\right| 0,$$

por lo que esta "distancia" no separa los puntos $(y,y'),(y+cx+\hat{c},y'+c)$.

A pesar de todo esto esta distancia nos será de utilidad pues nos ayudara a controlar el valor de la seminorma $||y-\bar{y}||_\alpha$.

Lema 2.18. *Si* $(x,\mathbb{X}),(\bar{x},\bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *y* $(y,y'),(\bar{y},\bar{y}') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right)$, *entonces se tiene la cota para la seminorma* $||\cdot||_\alpha$

$$||y-\bar{y}||_\alpha \leq C\left(||x-\bar{x}||_\alpha + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op} + d_{x,\bar{x},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))\right),$$

y por lo tanto para la norma asociada

$$|y_0-\bar{y}_0| + ||y-\bar{y}||_\alpha \leq C\left(|y_0-\bar{y}_0| + ||x-\bar{x}||_\alpha + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op} + d_{x,\bar{x},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))\right)$$

donde C *solo depende de* α, M *y* T *la cual puede elegirse uniforme para* $T \leq 1$.

Demostración. Utilizaremos desigualdades de la forma $\left|ab-\bar{a}\bar{b}\right| \leq |a|\left|b-\bar{b}\right| + |a-\bar{a}|\left|\bar{b}\right|$. Como $y_{s,t} = y_s'(x_{s,t}) + R_{s,t}^y = (y_{0,s}'+y_0')(x_{s,t}) + R_{s,t}^y$ por lo que

$$\begin{aligned}
|y_{s,t}-\bar{y}_{s,t}| \leq& \left|(y_{0,s}'+y_0')(x_{s,t}) + R_{s,t}^y - (\bar{y}_{0,s}'+\bar{y}_0')(\bar{x}_{s,t}) + R_{s,t}^{\bar{y}}\right| \\
\leq& \left|y_{0,s}'(x_{s,t}) - \bar{y}_{0,s}'(\bar{x}_{s,t})\right| + \left|R_{s,t}^y - R_{s,t}^{\bar{y}}\right| + |y_0'(x_{s,t}) - \bar{y}_0'(\bar{x}_{s,t})| \\
\leq& \left|y_{0,s}'\right|_{op}|x_{s,t}-\bar{x}_{s,t}| + \left|y_{0,s}'-\bar{y}_{0,s}'\right|_{op}|\bar{x}_{s,t}| + \left|\left|R^y-R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha} \\
&+ |y_0'|_{op}|x_{s,t}-\bar{x}_{s,t}| + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op}|\bar{x}_{s,t}| \\
\leq& \left|y_{0,s}'\right|_{op}||x-\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha + \left|y_{0,s}'-\bar{y}_{0,s}'\right|_{op}||\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha \\
&+ |y_0'|_{op}||x-\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op}||\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha \\
&+ \left|\left|R^y-R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}|t-s|^\alpha T^\alpha \\
\leq& ||y'||_\alpha|s-0|^\alpha||x-\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha + ||y'-\bar{y}'||_\alpha|s-0|^\alpha||\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha \\
&+ |y_0'|_{op}||x-\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op}||\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha \\
&+ \left|\left|R^y-R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}|t-s|^\alpha T^\alpha \\
\leq& ||y'||_\alpha T^\alpha||x-\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha + ||y'-\bar{y}'||_\alpha T^\alpha||\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha \\
&+ |y_0'|_{op}||x-\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op}||\bar{x}||_\alpha|t-s|^\alpha \\
&+ \left|\left|R^y-R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}|t-s|^\alpha T^\alpha \\
\leq& C|t-s|^\alpha\left(||x-\bar{x}||_{op} + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op} + \left|\left|y'-\bar{y'}\right|\right|_\alpha + \left|\left|R^y-R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}\right) \\
=& C|t-s|^\alpha\left(||x-\bar{x}||_{op} + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op} + d_{x,\bar{x},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))\right)
\end{aligned}$$

donde C es una constante que depende de M y T para alguna constante M que acota a los terminos $||y'||_\alpha, ||\bar{x}||_\alpha, |y_0'|_{op}, ||x||_\alpha$. Más aún, C puede hacerse uniforme para $T \leq 1$. □

Teorema 2.19. *Sean* $(x,\mathbb{X}),(\bar{x},\bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$, $(y,y') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right)$, $(\bar{y},\bar{y}') \in \mathscr{D}_{\bar{x}}^{2\alpha}\left([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)\right)$ *y* $M>0$ *tal que*

$$|y_0'|_{op} + ||y'||_\alpha + ||R^y||_{2\alpha} \leq M, \qquad \rho_\alpha(0,\mathbf{X}) = ||x||_\alpha + ||\mathbb{X}||_{2\alpha} \leq M$$

y

$$|\bar{y}_0'|_{op} + ||\bar{y}'||_\alpha + \left|\left|R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha} \leq M, \qquad \rho_\alpha(0,\bar{\mathbf{X}}) = ||\bar{x}||_\alpha + \left|\left|\bar{\mathbb{X}}\right|\right|_{2\alpha} \leq M.$$

Si $\mathbf{X}=(x,\mathbb{X})$ *y* $\bar{\mathbf{X}}=(\bar{x},\bar{\mathbb{X}})$, *entonces podemos definir por el Teorema 2.17*

$$(z,z') = \left(\int_0^t y_r\, d\mathbf{X}_r, y\right) \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}\left([0,T],\mathbb{R}^e\right), \qquad (\bar{z},\bar{z}') = \left(\int_0^t \bar{y}_r\, d\bar{\mathbf{X}}_r, \bar{y}\right) \in \mathscr{D}_{\bar{x}}^{2\alpha}\left([0,T],\mathbb{R}^e\right)$$

y se satisface

$$d_{x,\bar{x},2\alpha}((z,z'),(\bar{z},\bar{z}')) \leq C_M\left(\rho_\alpha(\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}}) + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op} + d_{x,\bar{x},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))\right)$$

y

$$||z-\bar{z}|| \leq C_M\left(\rho_\alpha(\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}}) + |y_0-\bar{y}_0| + |y_0'-\bar{y}_0'|_{op} + d_{x,\bar{x},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))\right)$$

donde C_M *es una constante que solo depende de* α, M *y* T *la cual puede elegirse uniforme para* $T \leq 1$.

Demostración. Por definción tenemos que

$$d_{x,\bar{x},2\alpha}((z,z'),(\bar{z},\bar{z}')) = ||z'-\bar{z}'||_\alpha + \left|\left|R^z - T^{\bar{z}}\right|\right|_{2\alpha} = ||y-\bar{y}|| + \left|\left|R^z - R^{\bar{z}}\right|\right|_{2\alpha}.$$

Observemos que

$$R_{s,t}^z = z_{s,t} - z_s'(x_{s,t}) = \int_s^t y_r\, d\mathbf{X}_r - y_s(x_{s,t}) = (\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - \Xi_{s,t} + y_s'(\mathbb{X}_{s,t})$$

donde, recordemos, $\Xi_{s,t} = y_s(x_{s,t}) + y_s'(\mathbb{X}_{s,t})$. De manera análoga para $R_{s,t}^{\bar{z}}$ tenemos que

$$R_{s,t}^{\bar{z}} = (\mathcal{I}\bar{\Xi})_{s,t} - \bar{\Xi}_{s,t} + \bar{y}_s'(\bar{\mathbb{X}}_{s,t}).$$

Como $\Xi,\bar{\Xi} \in C_2^{\alpha,3\alpha}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$, entonces $\Xi - \bar{\Xi} \in C_2^{\alpha,3\alpha}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ por lo que por el Teorema 2.12 tenemos que

$$\left|(\mathcal{I}(\Xi-\bar{\Xi}))_{s,t} - (\Xi-\bar{\Xi})_{s,t}\right| \leq C\left|\left|\delta(\Xi-\bar{\Xi})\right|\right|_{3\alpha}' |t-s|^{3\alpha}.$$

Más aún, como se vio en el Teorema de Lyons (Teorema 2.13) tenemos que

$$(\delta\Xi)_{s,u,t} = -R_{s,u}^y(x_{u,t}) - y_{s,u}'(\mathbb{X}_{u,t})$$

y por lo tanto

$$(\delta(\Xi-\bar{\Xi}))_{s,u,t} = R_{s,u}^{\bar{y}}(\bar{x}_{u,t}) - R_{s,u}^y(x_{u,t}) - (\bar{y}_{s,u}'(\bar{\mathbb{X}}_{u,t}) - y_{s,u}'(\mathbb{X}_{u,t}))$$

con lo que obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|(\delta(\Xi-\bar{\Xi}))_{s,u,t}\right| &\leq \left|R^{\bar{y}}_{s,u}(\bar{x}_{u,t})-R^{y}_{s,u}(x_{u,t})\right|+\left|(\bar{y}'_{s,u}(\bar{\mathbb{X}}_{u,t})-y'_{s,u}(\mathbb{X}_{u,t}))\right| \\
&\leq \left|R^{\bar{y}}_{s,u}\right|_{op}|x_{u,t}-\bar{x}_{u,t}|+\left|R^{y}_{s,u}-R^{\bar{y}}_{s,u}\right|_{op}|x_{u,t}| \\
&\quad +\left|\bar{y}'_{s,u}\right|_{op}\left|\mathbb{X}_{u,t}-\bar{\mathbb{X}}_{u,t}\right|+\left|y'_{s,u}-\bar{y}'_{s,u}\right|_{op}|\mathbb{X}_{u,t}| \\
&\leq \left(\left|\left|R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}||x-\bar{x}||_{\alpha}+\left|\left|R^{y}-R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}||x||_{\alpha}\right. \\
&\quad \left.+||\bar{y}'||_{\alpha}\left|\left|\mathbb{X}-\bar{\mathbb{X}}\right|\right|_{2\alpha}+||y'-\bar{y}'||_{\alpha}\left|\left|\bar{\mathbb{X}}\right|\right|_{2\alpha}\right)|t-s|^{3\alpha} \\
&\leq M\left(\rho_{\alpha}(\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}})+\left|\left|R^{y}-R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}+||y'-\bar{y}'||_{\alpha}\right)|t-s|^{3\alpha} \\
&= M\left(\rho_{\alpha}(\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}})+d_{y,\bar{y},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))\right)|t-s|^{3\alpha}
\end{aligned}$$

y concluimos que

$$\left|\left|\delta(\Xi-\bar{\Xi})\right|\right|'_{3\alpha}\leq M\left(\rho_{\alpha}(\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}})+d_{y,\bar{y},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))\right)<+\infty.$$

De esta manera tenemos:

$$\begin{aligned}
\left|R^{z}_{s,t}-R^{\bar{z}}_{s,t}\right| &\leq \left|(\mathcal{I}(\Xi-\bar{\Xi}))_{s,t}-(\Xi-\bar{\Xi})_{s,t}\right|+\left|y'_{s}(\mathbb{X}_{s,t})-\bar{y}'_{s}(\bar{\mathbb{X}}_{s,t})\right| \\
&\leq C\left|\left|\delta(\Xi-\bar{\Xi})\right|\right|'_{3\alpha}|t-s|^{3\alpha}+|y'_{s}|_{op}\left|\mathbb{X}_{s,t}-\bar{\mathbb{X}}_{s,t}\right|+|y'_{s}-\bar{y}'_{s}|_{op}\left|\bar{\mathbb{X}}_{s,t}\right| \\
&\leq C\left|\left|\delta(\Xi-\bar{\Xi})\right|\right|'_{3\alpha}T^{\alpha}|t-s|^{2\alpha}+|y'_{s}|_{op}\left|\left|\mathbb{X}-\bar{\mathbb{X}}\right|\right|_{2\alpha} \\
&\quad +||y-\bar{y}||_{op}|s-0|^{\alpha}\left|\left|\bar{\mathbb{X}}\right|\right|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha} \\
&\leq C\left|\left|\delta(\Xi-\bar{\Xi})\right|\right|'_{3\alpha}T^{\alpha}|t-s|^{2\alpha}+|y'_{s}|_{op}\left|\left|\mathbb{X}-\bar{\mathbb{X}}\right|\right|_{2\alpha} \\
&\quad +||y-\bar{y}||_{\alpha}T^{\alpha}\left|\left|\bar{\mathbb{X}}\right|\right|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha} \\
&\leq C|t-s|^{2\alpha}\left(\left|\left|\delta(\Xi-\bar{\Xi})\right|\right|'_{3\alpha}+\left|\left|\mathbb{X}-\bar{\mathbb{X}}\right|\right|_{2\alpha}+||y-\bar{y}||_{\alpha}\right) \\
&\leq C'|t-s|^{2\alpha}\left(\rho_{\alpha}(\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}})+\left|\left|R^{y}-R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}+||y'-\bar{y}'||_{\alpha}+||y-\bar{y}||_{\alpha}\right) \\
&= C'|t-s|^{2\alpha}\left(\rho_{\alpha}(\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}})+d_{x,\bar{x},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))+||y-\bar{y}||_{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\left|\left|R^{y}-R^{\bar{y}}\right|\right|_{2\alpha}\leq C'\left(\rho_{\alpha}(\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}})+d_{y,\bar{y},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))+||y-\bar{y}||_{\alpha}\right).$$

Por defineión tenemos que

$$d_{x,\bar{x},2\alpha}((z,z'),(\bar{z},\bar{z}'))=||z'-\bar{z}'||_{\alpha}+\left|\left|R^{z}-T^{\bar{z}}\right|\right|_{2\alpha}=||y-\bar{y}||+\left|\left|R^{z}-R^{\bar{z}}\right|\right|_{2\alpha}$$

y por el Lema 2.18 aplicado a $(y,y'),(\bar{y},\bar{y}')$ nos da

$$||y-\bar{y}||_{\alpha}\leq C''\left(||x-\bar{x}||_{\alpha}+|y'_0-\bar{y}'_0|_{op}+d_{x,\bar{x},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))\right)$$

con lo que concluimos que

$$d_{x,\bar{x},2\alpha}((z,z'),(\bar{z},\bar{z}'))\leq K\left(\rho_{\alpha}(\mathbf{X},\bar{\mathbf{X}})+|y'_0-\bar{y}'_0|_{op}+d_{y,\bar{y},2\alpha}((y,y'),(\bar{y},\bar{y}'))\right)$$

donde K es una constante que depende de α, T y M la cual se puede elegir uniforme para $T \leq 1$.

Por último, el Teorema 2.17 aplicado a $(z, z'), (\bar{z}, \bar{z}')$ y recordando que $z' = y$, $\bar{z}' = \bar{y}$ tenemos

$$\begin{aligned} ||z - \bar{z}||_\alpha &\leq C \left(||x - \bar{x}||_\alpha + |z'_0 - \bar{z}'_0|_{op} + d_{x,\bar{x},2\alpha}((z, z'), (\bar{z}, \bar{z}')) \right) \\ &\leq K' \left(\rho_\alpha(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}}) + |y_0 - \bar{y}_0| + |y'_0 - \bar{y}'_0|_{op} + d_{x,\bar{x},2\alpha}((y, y'), (\bar{y}, \bar{y}')) \right) \end{aligned}$$

con lo que se concluye el resultado. □

2.7. Relación con la integral de Riemann-Stieltjes

Hemos definido para $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ y $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$ la integral rugosa con respecto a esta para cierta clase de integrandos, sin embargo en el caso de trayectorias Lipschitz (caso $\alpha = 1$), ya teníamos definida nuestra noción de integral por medio de la integral de Riemann-Stieltjes, la cual como veremos se puede extender a la integral de Young, que corresponde al caso $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. El objetivo de esta sección es relacionar ambas nociones de integración.

Para esto primero observemos que si $x \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$, $y \in C^{\beta-H\ddot{o}l}\left([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\right)$ con $\alpha + \beta > 1$ y definimos $\bar{\Xi}_{s,t} = y_s x_{s,t}$,entonces

$$\left|\bar{\Xi}_{s,t}\right| \leq |y_s|_{op} |x_{s,t}| \leq ||y||_\infty ||x||_\alpha |t - s|^\alpha$$

por lo que $\left|\left|\bar{\Xi}\right|\right|_\alpha < +\infty$.Más aún, en este caso tenemos que

$$\delta\bar{\Xi}_{s,u,t} = y_s(x_{s,t}) - y_s(x_{s,u}) - y_u(x_{u,t}) = y_s(x_{u,t}) - y_u(x_{u,t}) = y_{s,u}(x_{u,t})$$

por lo que

$$\left|\delta\bar{\Xi}_{s,u,t}\right| \leq |y_{s,u}|_{op} ||x_{u,t}|| \leq ||y||_\alpha |s - u|^\beta ||x||_\alpha |t - u|^\alpha \leq ||y||_\beta ||x||_\alpha |t - s|^{\alpha+\beta},$$

es decir, $\left|\left|\delta\bar{\Xi}\right|\right|'_{\alpha+\beta} < +\infty$ y por lo tanto $\bar{\Xi} \in C_2^{\alpha,\alpha+\beta}\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$. Como $\alpha + \beta > 1$ tenemos por el Teorema 2.12 que existe

$$(\mathcal{I}\bar{\Xi})_{s,t} = \lim_{\substack{|\mathcal{P}| \to 0 \\ \mathcal{P} \subset [s,t]}} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \bar{\Xi}_{s,t} = \lim_{\substack{|\mathcal{P}| \to 0 \\ \mathcal{P} \subset [s,t]}} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} y_u(x_{u,v}) = \int_s^t y_r \, dx_r$$

en donde esta última integral corresponde con la integral de Young pero nosotros tomaremos esta como su definición. Más aún, se tiene que

$$\left| \int_s^t y_r \, dx_r - y_s(x_{s,t}) \right| = \left|(\mathcal{I}\bar{\Xi})_{s,t} - \bar{\Xi}_{s,t}\right| \leq C \left|\left|\delta\bar{\Xi}\right|\right|'_{\alpha+\beta} |t - s|^{\alpha+\beta} \leq C ||y||_\beta ||x||_\alpha |t - s|^{\alpha+\beta}$$

que es precisamente la desigualdad de Young. En particular este método de integración abstracta nos permite recuperar la integral de Riemann-Stieltjes para funciones Lipschitz.

Caracterizemos las trayectorias rugosas con base $x \in C^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ para $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right]$. Consideremos la 1-forma $y : [0,T] \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\right)$ dada por $y_s = x_s \otimes \cdot$. Es sencillo ver que $|y_s|_{op} = |x_s|$ por lo cual y es tambien α-Hölder y como $\alpha + \alpha > 1$ tenemos por lo anterior que existe

$$\int_s^t y_r dx_r = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0 \\ \mathcal{P}\subset[s,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} y_u(x_{u,v}) = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0 \\ \mathcal{P}\subset[s,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} x_u \otimes x_{u,v} = \int_s^t x_r \otimes dx_r$$

la cual satisface

$$\left|\int_s^t x_r \otimes dx_r - x_s \otimes x_{s,t}\right| \le C\,||x||_\alpha^2\,|t-s|^{2\alpha}$$

por lo que si definimos

$$\mathbb{X}_{s,t} := \int_s^t x_r \otimes dx_r - x_s \otimes x_{s,t} = \int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r$$

entonces $||\mathbb{X}||_{2\alpha} < +\infty$ por lo que para ver que $(x,\mathbb{X})$ es una α-Hölder trayectoria rugosa para $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right]$ basta ver que se satisface la relación de Chen. Utilizando la linealidad de la integral de Young, la cual es consecuencia de la linealidad de la integral abstracta, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{X}_{s,t} &= \int_s^t x_{s,r} \otimes dx_r \\
&= \int_s^u x_{s,r} \otimes dx_r + \int_u^t x_{s,r} \otimes dx_r \\
&= \mathbb{X}_{s,u} + \int_u^t (x_{u,r} + x_{s,u}) \otimes dx_r \\
&= \mathbb{X}_{s,u} + \int_u^t x_{u,r} \otimes dx_r + x_{s,u} \otimes \int_u^t dx_r \\
&= \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + x_{s,u} \otimes x_{u,t},
\end{aligned}$$

y por lo tanto $(x,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. Más aún, por el Teorema 2.6 esta es la única α-Hölder trayectoria rugosa para $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right]$ con trayectoria base x. Observemos que en el caso $\alpha = 1$ el par $(x,\mathbb{X})$ coincide con la firma $S_2(x)$.

Ahora comparemos las integrales rugosas con las integrales de Young (Riemann-Stieltjes). Sean Ξ, $\bar{\Xi} \in C_2^{\alpha,\beta}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ para $0 < \alpha \le 1 < \beta$ satisfacen que

$$\left|\Xi_{s,t} - \bar{\Xi}_{s,t}\right| \le C\,|t-s|^\beta = O(|t-s|^\beta) = o(|t-s|),$$

entonces, dado que hay a lo más $\left\lfloor \frac{1}{|\mathcal{P}|} \right\rfloor$ sumandos de longitud a lo más $o\left(|\mathcal{P}|\right)$, se tiene que

$$|(\mathcal{I}\Xi)_{s,t} - (\mathcal{I}\Xi)_{s,t}| = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0 \\ \mathcal{P}\subset[s,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left|\Xi - \bar{\Xi}_{s,t}\right| = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0 \\ \mathcal{P}\subset[s,t]}} \frac{o(|\mathcal{P}|)}{|\mathcal{P}|} = 0$$

y por lo tanto $\mathcal{I}\Xi = \mathcal{I}\bar{\Xi}$, es decir, las integrales abstractas coinciden. Para $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right]$ sean $x \in C^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ y $\mathbf{X} = (x,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ la única α-Hölder trayectoria rugosa con trayectoria base x. Para $y \in C_b^2\left([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\right)$, tenemos asociado dos conceptos de integrales, primero la integral de Young dada por

$$\int_s^t y_r\, dx_r = \lim_{|P|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} y_u(x_{u,v})$$

que, como acabamos de ver, es la integración abstracta de $\bar{\Xi}_{s,t} = y_s(x_{s,t})$. Por otro lado tenemos la integral rugosa dada por

$$\int_s^t y_r\, d\mathbf{X}_r = \lim_{|P|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} (y_u(x_{u,v}) + Dy_u(\mathbb{X}_{s,t}))$$

que es la integración abstracta de $\Xi_{s,t} = y_s(x_{s,t}) + Dy_u(\mathbb{X}_{s,t})$. Como $\bar{\Xi}_{s,t} - \Xi_{s,t} = Dy_u(\mathbb{X}_{s,t})$ y $\mathbb{X}$ es una integral de Young tenemos por la desigualdad de Young, considerando a $x_s \otimes \cdot$ como una 1-forma,

$$\begin{aligned}
|Dy_u(\mathbb{X}_{s,t})| &\leq \|Dy\|_\infty |\mathbb{X}_{s,t}| \\
&= \|Dy\|_\infty \left| \int_s^t x_r \otimes dx_r - x_s \otimes x_{s,t} \right| \\
&\leq C \|Dy\|_\infty \|x\|_\alpha^2 |t-s|^{2\alpha} = o(|t-s|)
\end{aligned}$$

por lo que las integrales abstractas coinciden, es decir,

$$\int_s^t y_r\, d\mathbf{X}_r = (\mathcal{I}\Xi)_{s,t} = (\mathcal{I}\bar{\Xi})_{s,t} = \int_s^t y_r\, dx_r$$

y por lo tanto, como $(x, \mathbb{X})$ es la única trayectoria rugosa con trayectoria base x, la noción de integral rugosa y la integral de Young coinciden en este caso. En particular para $\alpha = 1$ la noción de integral rugosa y la integral de Riemann-Stieltjes coinciden.

Por otro lado si $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, $\mathbf{X} = (x, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$, $f \in C^{2\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ y definimos $\bar{\mathbb{X}}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + f_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + f_t - f_s$ entonces $\hat{\mathbf{X}} = (x, \hat{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ por el Teorema 2.6 (de hecho las trayectorias rugosas con trayectoria base x estan caracterizadas de esta forma). Sea $(y, y') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}$ y observemos que este espacio solo depende de la trayectoria base x y no de la trayectoria rugosa en si por lo que podemos integrar y con respecto a ambas trayectorias rugosas. Más aún, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_s^t y_r\, d\bar{\mathbf{X}}_r &= \lim_{|P|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} (y_u(x_{u,v}) + y'_u(\bar{\mathbb{X}}_{u,v})) \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} (y_u(x_{u,v}) + y'_u(\mathbb{X}_{u,v}) + y'(u)(f_{s,t})) \\
&= \lim_{|P|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} (y_u(x_{u,v}) + y'_u(\mathbb{X}_{u,v}) + \lim_{|P|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} y'(u)(f_{s,t})) \\
&= \int_s^t y_r\, d\mathbf{X}_r + \int_s^t y'_r df_r
\end{aligned}$$

donde esta última es una integral de Young ya que $y' \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\big([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\big)$, $f \in C^{2\alpha-H\ddot{o}l}\big([0,T],\mathbb{R}^d\big)$ y $\alpha + 2\alpha = 3\alpha > 1$. En el siguiente capítulo veremos la relación de este resultado y la relación que existe entre las integrales estocásticas de Itô y de Stratonovich, por lo cual resumimos lo anterior en el siguiente lema.

Lema 2.20. *Sean* $\mathbf{X} = (x, \mathbb{X}), \bar{\mathbf{X}} = (x, \bar{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\big([0,T],\mathbb{R}^d\big)$ *dos trayectorias rugosas con trayectoria base* x *y sea* $f \in C^{2\alpha-H\ddot{o}l}\big([0,T],\mathbb{R}^d\big)$ *la única función tal que* $\mathbb{X}_{s,t} = \bar{\mathbb{X}}_{s,t} + f_{s,t}$*, entonces para todo* $(y, y') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}$ *se tiene*

$$\int_s^t y_r \, d\bar{\mathbf{X}}_r = \int_s^t y_r \, d\mathbf{X}_r + \int_s^t y'_r df_r,$$

donde el término $\int_s^t y'_r df_r$ *tiene sentido como una integral de Young.*

3 | Movimiento Browniano Rugoso

En este capítulo se extiende el concepto de movimiento Browniano al de movimiento Browniano rugoso de Itô y de Stratonovich por medio de las integrales estocásticas de Itô y de Stratonovich. Se estudia la convergencia de las aproximaciones lineales al movimiento Browniano y él porque sus firmas convergen al movimiento Browniano rugoso de Stratonovich y no al de Itô. Con la teoría de integración introducida en el capítulo anterior se generalizan las integrales estocásticas de Itô y de Stratonovich a un espacio de integrandos más grande caracterizado por propiedades deterministas. Más aún, se ve que estás integrales se pueden resolver de manera trayectorial a cambio de trabajar con movimiento Browniano rugoso. Se estudia una generalización a la fórmula de Itô para integración rugosa lo cual aclara la aparición de un término de segundo orden en esta. Por último se ve que también se puede tratar a la integral reversa de Itô como una integral rugosa.

3.1. Movimiento Browniano Rugoso de Itô y de Stratonovich

Consideremos B un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sabemos que las trayectorias de B, continuas casi seguramente (c.s.), tienen p-variación infinita c.s. para $p \leq 2$ (Ver [Taylor et al., 1972]) y por lo cual no se puede definir para cada $\omega \in \Omega$

$$\int_s^t B_{s,r}(\omega) \otimes dB_r(\omega)$$

como integral de Young, es decir, definir la integral trayectorialmente. Sin embargo podemos considerar las integrales estocásticas de Itô para $i, j \in \{1, \dots, d\}$

$$\int_s^\cdot B^i_{s,r}\, dB^j_r$$

las cuales por construcción son martingalas continuas c.s. y a partir de éstas definir el proceso estocástico $\mathbb{B}^{\text{Itô}} : \Omega \times [0,T]^2 \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ dado por

$$\mathbb{B}^{\text{Itô}}(\omega)_{s,t} = \left(\int_0^t B_r\, dB_r(\omega) - \int_0^s B_r\, dB_r(\omega) - B_s(\omega) \otimes B_{s,t}(\omega) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

el cual definido de esta manera es continuo c.s. y no es otra cosa más que una versión continua c.s. del proceso

$$(s,t) \longmapsto \int_s^t B_{s,r} \otimes B_r = \left(\int_s^t B^i_{s,r}\, dB^j_r \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

y por lo cual se tiene que $\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} = \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r$ c.s. para todo $0 \leq s < t \leq T$. Más aún, gracias a las propiedades de aditividad de la integral de Itô se tiene para todo $0 \leq s < u < t \leq T$ que c.s.

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} &= \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r = \int_s^u B_{s,r} \otimes dB_r + \int_u^t B_{s,r} \otimes dB_r \\
&= \int_s^u B_{s,r} \otimes dB_r + \int_u^t B_{u,r} \otimes dB_r + \int B_{s,u} \otimes dB_r \\
&= \int_s^u B_{s,r} \otimes dB_r + \int_u^t B_{u,r} \otimes dB_r + B_{s,u} \otimes B_{u,t} \\
&= \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,u} + \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,t} + B_{s,u} \otimes B_{u,t},
\end{aligned}$$

es decir, c.s. $(B, \mathbb{B}^{\text{Itô}})$ satisface la relación de Chen.

Definición 3.1. *Definimos el movimiento Browniano rugoso de Itô*

$$\mathbf{B}^{\text{Itô}} : \Omega \times [0,T] \to T^2(\mathbb{R}^d) \quad \textit{como} \quad \mathbf{B}^{\text{Itô}}_t(\omega) = \left(1, B_t(\omega), \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,t}(\omega)\right),$$

el cual satisface ser c.s. una trayectoria rugosa.

De manera similar podemos definir el movimiento Browniano rugoso de Stratonovich. Recordemos que para M, N martingalas continuas la integral de Stratonovich esta definida como

$$\int_0^t M \circ dN := \int_0^t M\, dN + \frac{1}{2}[M,N]_t$$

donde $\int_0^t M\, dN$ es la integral de Itô y $[M,N]$ es la covariación cuadrática de M y N. Como caso particular obtenemos que

$$\int_s^t B_{s,r} \otimes \circ dB_r = \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r + \frac{1}{2}[B,B]_{s,t} = \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r + (t-s)I,$$

donde I es la matrix identidad de dimensión d.

A partir de esto definimos $\mathbb{B}^{\text{Strat}} : \Omega \times [0,T]^2 \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ como la versión continua de

$$\left(\int_s^t B^i_{s,r} \circ dB^j_r\right)_{i,j=1,\ldots,n},$$

es decir,

$$\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \left(\int_0^t B_r \circ dB_r - \int_0^s B_r \circ dB_r - B_s \otimes B_{s,t}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

el cual por propiedades de aditividad de la integral de Stratonovich (que a su vez son consecuencias de la aditividad de la integral de Itô y la bilinealidad de la covariación cuadrática) se tiene que c.s. $(B, \mathbb{B}^{\text{Strat}})$ satisaface la relación de Chen.

Definición 3.2. *Definimos el movimiento Browniano rugoso de Stratonovich*

$$\mathbf{B}^{\text{Strat}} : \Omega \times [0,T] \to T^2(\mathbb{R}^d) \quad \textit{como} \quad \mathbf{B}^{\text{Strat}}_t(\omega) = \left(1, B_t(\omega), \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{0,t}(\omega)\right),$$

el cual satisface ser una trayectoria rugosa c.s.

Para ver la Hölder regularidad de estas trayectorias rugosas necesitamos la siguiente generalización del criterio de Kolmogorov.

Teorema 3.3 (Criterio de Kolmogorov)**.** *Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $q \geq 2$, $\beta > \frac{1}{q}$ *y* $X : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, $\mathbb{X} : \Omega \times [0,T]^2 \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ *un par de procesos que c.s. satisfacen la relación de Chen. Supongamos que existe* $C \in \mathbb{R}^+$ *tal que para todo* $s, t \in [0,T]$

$$|X_{s,t}|_{L^q} := \mathbb{E}\left[|X_{s,t}|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq C\,|t-s|^{\beta}, \qquad |\mathbb{X}_{s,t}|_{L^{\frac{q}{2}}} := \mathbb{E}\left[|\mathbb{X}_{s,t}|^{\frac{q}{2}}\right]^{\frac{2}{q}} \leq C\,|t-s|^{2\beta},$$

entonces para todo $\alpha \in \left[0, \beta - \frac{1}{q}\right)$ *existe una modificación de* $(X, \mathbb{X})$*, denotada igualmente como* $(X, \mathbb{X})$*, y variables aleatorias* $K_\alpha \in L^q$, $\mathbb{K}_\alpha \in L^{\frac{q}{2}}$ *tales que para todo* $s, t \in [0,T]$ *c.s.*

$$|X_{s,t}| \leq K_\alpha\,|t-s|^{\alpha}, \qquad |\mathbb{X}_{s,t}| \leq \mathbb{K}_\alpha\,|t-s|^{2\alpha}.$$

En particular si $\beta - \frac{1}{q} > \frac{1}{3}$ *entonces casi seguramente* $(X(\omega)), \mathbb{X}(\omega)) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$.

Demostración. Supongamos sin perdida de generalidad que $T = 1$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ sea $D_n = \{k2^{-n} \mid k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}\}$ y $|D_n| = 2^{-n}$. Basta mostrar el resultado cierto para $s, t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} D_n$ y extender por continuidad uniforme el resultado a una modificación de $(X, \mathbb{X})$ y a todo $s, t \in [0,1]$. Definimos

$$K_n = \sup_{t \in D_n} \left|X_{t,t+2^{-n}}\right|, \qquad \mathbb{K}_n = \sup_{t \in D_n} \left|\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}\right|$$

y entonces por nuestra hipótesis y dado que $\# D_n = 2^n = \frac{1}{|D_n|}$

$$|K_n|_{L^q}^q \leq \sum_{t\in D_n} \mathbb{E}\left[\left|X_{t,t+2^{-n}}\right|^q\right] \leq \sum_{t \in D_n} C^q \left|t + 2^{-n} - t\right|^{\beta q} \leq \frac{1}{|D_n|} C^q\,|D_n|^{\beta q} = C^q\,|D_n|^{\beta q - 1}$$

$$|\mathbb{K}_n|_{L^{\frac{q}{2}}}^{\frac{q}{2}} \leq \sum_{t\in D_n} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}\right|^{\frac{q}{2}}\right] \leq \sum_{t\in D_n} C^{\frac{q}{2}}\,|D_n|^{\frac{2\beta q}{2}} = C^{\frac{q}{2}}\,|D_n|^{\beta q - 1}.$$

Fijemos $s, t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} D_n$, $s < t$ y sea $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|D_{m+1}| < t - s = |D_m|$. Entonces el intervalo $[s,t)$ se puede expresar como unión finita de intervalos $[u,v)$ donde $u, v \in \bigcup_{n \geq m+1} D_n$ y no hay tres intervalos con la misma longitud, equivalentemente existe

$$\mathcal{P} = \{s = t_0 < \ldots < t_N = t\}$$

una partición de $[s,t]$ donde para todo $i \in \{0, \ldots, N-1\}$ existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $t_i, t_{i+1} \in D_n$ y para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ fija existen a lo más dos subintervalos $[u,v] \in \mathcal{P}$ tal que $u, v \in D_n$. De esta manera obtenemos que

$$|X_{s,t}| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left|X_{t_i,t_{i+1}}\right| \leq 2 \sum_{n \geq m+1} K_n$$

y por lo tanto

$$\frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^{\alpha}} \leq \sum_{n\geq m+1} \frac{2K_n}{|t-s|^{\alpha}} \leq \sum_{n \geq m+1} \frac{2K_n}{|D_n|^{\alpha}} \leq K_\alpha$$

donde $K_\alpha := \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{2K_n}{|D_n|^\alpha}$. Veamos que $K_\alpha \in L^q$, para esto tenemos por la desigualdad del triángulo en L^q que

$$|K_\alpha|_{L^q} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{2}{|D_n|^\alpha} |K_n|_{L^q} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{2C\,|D_n|^{\beta-\frac{1}{q}}}{|D_n|^\alpha} \leq 2C \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |D_n|^\theta < +\infty,$$

donde esta última serie es finita pues $\theta = \beta - \frac{1}{q} - \alpha > 0$ y $|D_n| = 2^{-n}$, por lo que $\{|D_n|^\theta\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es sumable ya que esta termina siendo una serie geométrica y concluimos que $K_\alpha \in L^q$.

Para el caso de $\mathbb{X}$ observemos que iterando la relación de Chen y utilizando que $X_{s,t_0} = 0$ obtenemos que

$$\mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{t_0,t_{N-1}} + \mathbb{X}_{t_{N-1},t_N} + X_{s,t_{N-1}} \otimes X_{t_{N-1},t_N} = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\mathbb{X}_{t_i,t_{i+1}} + X_{s,t_i} \otimes X_{t_i,t_{i+1}}\right)$$

y como para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ fija existen a lo más dos subintervalos $[u,v] \in \mathcal{P}$ tal que $u,v \in D_n$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|\mathbb{X}_{s,t}| &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \left(\left|\mathbb{X}_{t_i,t_{i+1}}\right| + |X_{s,t_i}|\left|X_{t_i,t_{i+1}}\right|\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} \left|\mathbb{X}_{t_i,t_{i+1}}\right| + \max_{i=1,\ldots,N-1} |X_{s,t_i}| \sum_{i=0}^{N-1} \left|X_{t_i,t_{i+1}}\right| \\
&\leq 2\sum_{n\geq m+1} \mathbb{K}_n + \left(2\sum_{n\geq m+1} K_n\right)^2
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} \leq \sum_{n\geq m+1} \frac{2\mathbb{K}_n}{|D_n|^{2\alpha}} + \left(\sum_{n\geq m+1} \frac{2K_n}{|D_n|^\alpha}\right)^2 \leq \mathbb{K}_\alpha + K_\alpha^2$$

donde $\mathbb{K}_\alpha := \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{2\mathbb{K}_n}{|D_n|^{2\alpha}}$. Veamos que $\mathbb{K}_\alpha \in L^{\frac{q}{2}}$, para esto tenemos por la desigualdad del triángulo en $L^{\frac{q}{2}}$ que

$$|\mathbb{K}_\alpha|_{L^{\frac{q}{2}}} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{2}{|D_n|^{2\alpha}} |\mathbb{K}_n|_{L^{\frac{q}{2}}} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{2C\,|D_n|^{2\beta-\frac{2}{q}}}{|D_n|^{2\alpha}} \leq 2C \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |D_n|^{\theta'} < +\infty,$$

donde esta última serie es finita pues $\theta' = 2\beta - \frac{2}{q} - 2\alpha > 0$ y $\{|D_n|^{\theta'}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es sumable ya que esta termina siendo una serie geométrica y concluimos que $\mathbb{K}_\alpha \in L^{\frac{q}{2}}$. $\square$

Consideremos $\beta = \frac{1}{2}$ y $q \geq 2$. Como $(t-s)^{\frac{1}{2}} B_1$ tiene la misma distribución que $B_{s,t}$, entonces

$$\mathbb{E}\left[|B_{s,t}|^q\right] = \mathbb{E}\left[|t-s|^{\frac{q}{2}} |B_1|^q\right] = \mathbb{E}\left[|B_1|^q\right] |t-s|^{\frac{q}{2}}.$$

Como B_1 es un vector gaussiano entonces tiene momentos finitos de todos los ordenes, es decir, $\mathbb{E}\left[|B_1|^q\right] < +\infty$ y se tiene que

$$|B_{s,t}|_{L^q} = C\,|t-s|^{\frac{1}{2}} = C\,|t-s|^{\beta}.$$

Observemos que con esto obtenemos por el Teorema de Kolmogorov clásico que B tiene una modificación α-Hölder continua para todo $\alpha \in (0, \beta - \frac{1}{q})$ y como $q \geq 2$ es arbitraria esto es cierto para toda $\alpha \in (0,\beta) = (0, \frac{1}{2})$. Para aplicar nuestro Criterio de Kolmogorov (Teorema 3.3) necesitamos encontrar la cota equivalente para los procesos $\mathbb{B}^{\text{Itô}}$ y $\mathbb{B}^{\text{Strat}}$, es decir,

$$|\mathbb{B}_{s,t}|_{L^{\frac{q}{2}}} \leq C\,|t-s|^{2\beta}.$$

Como $q \geq 2$ es arbitraria basta ver que

$$|\mathbb{B}_{s,t}|_{L^q} \leq C\,|t-s|^{2\beta}$$

para toda $q \geq 1$. Si tuvieramos que $\mathbb{B}_{s,t} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (t-s)\mathbb{B}_{0,1}$, es decir, igualdad en distribución, de manera análoga a B tendríamos que

$$|\mathbb{B}_{s,t}|_{L^q} = \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{B}_{s,t}^q\right|\right]^{\frac{1}{q}} = \mathbb{E}\left[(t-s)^q \left|\mathbb{B}_{0,1}^q\right|\right]^{\frac{1}{q}} = |\mathbb{B}_{0,1}|_{L_p}\,|t-s| = |\mathbb{B}_{0,1}|_{L_p}\,|t-s|^{2\beta}.$$

Mostremos que $\mathbb{B}_{s,t} \stackrel{\mathcal{D}}{=} (t-s)\mathbb{B}_{0,1}$ y que $\mathbb{E}\left[|\mathbb{B}_{0,1}|^q\right] < +\infty$ para todo $q \geq 1$.

Lema 3.4. *$\mathbb{B}_{s,t}^{Itô}$ tiene la misma distribución que $(t-s)\mathbb{B}_{0,1}^{Itô}$.*

Demostración. Como la distribución de la integral de Itô

$$\int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r$$

solo depende de la distribución de $\{B_r \mid r \in [s,t]\}$ tenemos para s fija que $dB_r = d(B_r - B_s)$, $\{B_r - B_s \mid r \in [s,t]\}$ tiene la misma distribución que $\{B_r \mid r \in [0, t-s]\}$ y por lo tanto

$$\int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r = \int_s^t (B_r - B_s) \otimes d(B_r - B_s) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^{t-s} B_r \otimes dB_r.$$

Como $\{B_r \mid r \in [0,t-s]\}$ tiene la misma distribución que $\left\{B'_r := (t-s)^{\frac{1}{2}} B_r \,\middle|\, r \in [0,1]\right\}$ entonces

$$\int_0^{t-s} B_r \otimes dB_r \stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 B'_r \otimes dB'_r,$$

y como $dB'_r = (t-s)^{\frac{1}{2}} dB_r$ entonces

$$\int_0^1 B'_r \otimes dB'_r = \int_0^1 (t-s)^{\frac{1}{2}} B_r \otimes (t-s)^{\frac{1}{2}} dB_r = (t-s) \int_0^1 B_r \otimes dB_r$$

con lo cual concluimos que

$$\int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r \stackrel{\mathcal{D}}{=} (t-s) \int_0^1 B_r \otimes dB_r.$$

$\square$

Corolario 3.5. *$\mathbb{B}^{Strat}_{s,t}$ tiene la misma distribución que $(t-s)\mathbb{B}^{Strat}_{0,1}$.*

Demostración. Por definición de $\mathbb{B}^{\mathrm{Strat}}$ y el Lema 3.4 tenemos que

$$\mathbb{B}^{\mathrm{Strat}}_{s,t} = \mathbb{B}^{\mathrm{Itô}}_{s,t} + \frac{(t-s)}{2} I \overset{\mathcal{D}}{=} (t-s)\mathbb{B}^{\mathrm{Itô}}_{0,1} + \frac{(t-s)}{2} I = (t-s)\left(\mathbb{B}^{\mathrm{Itô}}_{0,1} + \frac{1}{2} I\right) = (t-s)\mathbb{B}^{\mathrm{Strat}}_{0,1}.$$

□

Lema 3.6. *$\mathbb{B}^{Itô}_{0,1}$ tiene momentos finitos de todos los ordenes.*

Demostración. Basta probar que para todo $i,j \in \{1,\dots,d\}$ la integral de Itô $\int_0^1 B^i_r dB^j_r$ tiene momentos finitos de todos los ordenes. Si $i=j$ entonces

$$\int_0^1 B^i_r dB^j_r = \frac{1}{2}(B^i_1)^2 - \frac{1}{2}$$

y el resultado se sigue pues $(B^i_1)^2$ tiene momentos finitos ya que B^i_1 es normal.

Sea $i \neq j$ y $\mathscr{F} = \sigma(\{B^i_s \mid s \in [0,1]\})$. Condicionalmente a $\mathcal{F}$ tenemos por independencia en las coordenadas que B^j sigue siendo un movimiento Browniano y podemos tratar la integral $\int_0^1 B^i_r dB^j_r$ considerando el integrando B^i como una función determinista. Por la isometría de Itô tenemos que, condicionalmente a $\mathscr{F}$,

$$\int_0^1 B^i_r dB^j_r \sim N\left(0, \int_0^1 (B^i_r)^2 dr\right)$$

y por lo tanto si denotamos $Z = \int_0^1 B^i_r dB^j_r$ entonces tenemos para toda $\eta \in \mathbb{R}$ que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\left(\eta\left|\int_0^1 B^i_r dB^j_r\right|\right)} \,\middle|\, \mathscr{F}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{(\eta|Z|)} \,\middle|\, \mathscr{F}\right] \leq 2\mathbb{E}\left[e^{(\eta Z)} \,\middle|\, \mathscr{F}\right] \\
&= 2\exp\left(\frac{\eta^2}{2}\int_0^1 (B^i_r)^2 dr\right) \\
&\leq 2\exp\left(\frac{\eta^2}{2}\,|B|^2_{\infty;[0,1]}\right)
\end{aligned}$$

donde $|B|^2_{\infty;[0,1]} = \sup_{s\in[0,1]} |B_s|$ y por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[e^{\left(\eta\left|\int_0^1 B^i_r dB^j_r\right|\right)}\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\eta^2}{2}\,|B|^2_{\infty;[0,1]}\right)\right].$$

Utilizando que $B \overset{\mathcal{D}}{=} -B$ y el principio de reflexión se tiene que

$$\mathbb{P}\left(|B|^2_{\infty;[0,1]} \geq M\right) \leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,1]} B_s\right) \leq 4\mathbb{P}\left(B_1 \geq M\right),$$

es decir, $|B|^2_{\infty;[0,1]}$ tiene el mismo comportamiento de colas ligeras que una normal y por lo tanto para η suficientemente pequeña se tiene

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\eta^2}{2}\,|B|^2_{\infty;[0,1]}\right)\right] < +\infty,$$

pues esto mismo ocurre para B_1 al ser normal. Esto a su vez implica que

$$\mathbb{E}\left[e^{\left(\eta\left|\int_0^1 B_r^i dB_r^j\right|\right)}\right] < +\infty$$

para η suficientemente pequeña y por lo tanto $\int_0^1 B_r^i dB_r^j$ tiene momentos finitos de todos los ordenes. $\square$

Corolario 3.7. $\mathbb{B}_{0,1}^{Strat}$ *tiene momentos finitos de todos los ordenes.*

Demostración. Basta ver que $\mathbb{B}^{\text{Strat}} = \mathbb{B}^{\text{Itô}} + I$ donde I es la matriz identidad y como $\mathbb{B}^{\text{Itô}}$ tiene momentos finitos de todos los ordenes e I es determinista entonces $\mathbb{B}^{\text{Strat}}$ tiene momentos finitos de todos los ordenes. $\square$

Por todo lo discutido anteriormente tenemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 3.8. *Para cada* $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ *se tiene que c.s.* $\mathbf{B}^{It\hat{o}}(\omega), \mathbf{B}^{Strat}(\omega) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$.

Por otro lado, la fórmula de Ito nos dice que c.s.

$$B_{s,t}^i B_{s,t}^j = \int_s^t B_r^i dB_r^j + \int_s^t B_r^j dB_r^i + [B^i, B^j]_{s,t}$$

y como $[B^i, B^j]_{s,t} = \delta_{i,j}(t-s)$ entonces tenemos que

$$\text{Sim}(\mathbb{B}_{s,t}^{\text{Itô}}) = \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t} - \frac{1}{2}(t-s)I$$

por lo que casi seguramente $\mathbf{B}^{\text{Itô}}(\omega)$ **no** es una trayectoria rugosa geométrica, sin embargo para el caso de Stratonovich tenemos que

$$\int_s^t B_r^i \circ dB_r^j = \int_s^t B_r^i dB_r^j + \frac{1}{2}[B^i, B^j]_{s,t}$$

y por lo tanto

$$B_{s,t}^i B_{s,t}^j = \int_s^t B_r^i \circ dB_r^j + \int_s^t B_r^j \circ dB_r^i,$$

es decir,

$$\text{Sim}(\mathbb{B}_{s,t}^{\text{Strat}}) = \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t}$$

y por lo tanto $\mathbf{B}^{\text{Strat}}(\omega) \in \mathscr{C}_g^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ casi seguramente.

3.2. Una aproximación al MBR de Stratonovich

Recordemos que una trayectoria rugosa geométrica $\mathbf{X} = (x, \mathbb{X})$ esta caracterizada por la trayectoria base x y la parte antisimétrica de $\mathbb{X}$, esto ya que

$$\mathbf{X}_{s,t} = \exp(x_{s,t} + \text{Asim}(\mathbb{X}_{s,t})).$$

En el caso de $\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ y $\mathbf{B}^{\text{Strat}}$ tenemos que $\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} - \mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \frac{1}{2}I$, es decir, su diferencia es simétrica y por lo tanto sus partes antisimétricas son iguales. Esto quiere decir que para todo $i, j \in \{1, \ldots, d\}$

$$\frac{1}{2}\left(\int_s^t B^i_{s,r} dB^j_r - \int_s^t B^j_{s,r} dB^i_r\right) = \frac{1}{2}\left(\int_s^t B^i_{s,r} \circ dB^j_r - \int_s^t B^j_{s,r} \circ dB^i_r\right).$$

Definición 3.9. *Al proceso de dós parametros*

$$A_{s,t} = \frac{1}{2}\left(\int_s^t B^i_{s,r} dB^j_r - \int_s^t B^j_{s,r} B^i_r\right)_{i,j\in\{1,\ldots,d\}}$$

se le conoce como el proceso de área de Lévy.

Por lo discutido anteriormente tenemos que c.s.

$$\mathbf{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \exp(B_{s,t} + A_{s,t}).$$

Tomando la parte antisimétrica de la relación de Chen que c.s. satisface $\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ (o $\mathbf{B}^{\text{Strat}}$) obtenemos que A satisface c.s.

$$A_{s,t} = A_{s,u} + A_{u,t} + \operatorname{Asim}\left(B_{s,u} \otimes B_{u,t}\right),$$

es decir, para cada $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ se tiene que c.s.

$$A^{i,j}_{s,t} = A^{i,j}_{s,u} + A^{i,j}_{s,u} + \frac{1}{2}\left(B^i_{s,u} B^i_{u,t} - B^j_{s,u} B^i_{u,t}\right)$$

y en particular obtenemos que c.s.

$$A_{s,t} = A_{0,t} - A_{0,s} - \frac{1}{2}\left(B^i_s B^i_{s,t} - B^j_s B^i_{s,t}\right).$$

Este proceso de area de Lévy nos ayudará a ver que $\mathbf{B}^{\text{Strat}}$ no solo es una trayectoria rugosa geométrica sino que más aún casi seguramente esta es el límite bajo ρ_α (ver definición 2.4) de las firmas de trayectorias suaves por pedazos, las cuales son geométricas. Para esto consideremos las particiones diádicas del intervalo $[0, T]$ las cuales están dadas por $\mathcal{P}^{(n)} = \left\{\frac{iT}{2^n} \,\middle|\, i \in \{0, \ldots, 2^n\}\right\}$ y consideremos $B^{(n)}$ la aproximación lineal por pedazos de B inducida por $\mathcal{P}^{(n)}$, es decir,

$$B^{(n)}_t = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} B_{t_i} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} B_{t_{i+1}}$$

si $t \in [t_i, t_{i+1}]$ y $[t_i, t_{i+1}] \in \mathcal{P}^{(n)}$. Observemos que para cada $\omega \in \Omega$ fija la trayectoria $B^{(n)}_\cdot(\omega) \in C^{1-var}\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$ por lo cual la expresión

$$\mathbb{B}^{(n)}_{s,t}(\omega) := \int_s^t B^{(n)}_{s,r}(\omega) \otimes d(B^{(n)}_r(\omega))$$

tiene sentido como integral de Riemann-Stieltjes y con esta definición se tiene que para toda $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ casi seguramente la firma de $B^{(n)}$ es una trayectoria rugosa geométrica α-Hölder, es decir, $\left(B^{(n)}, \mathbb{B}^{(n)}\right) \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}_g\left([0, T], \mathbb{R}^d\right)$. Más aún, si consideramos los procesos

$$A^{(n)}_{s,t} := \operatorname{Asim}\left(\mathbb{B}^{(n)}_{s,t}\right)$$

para las cuales se tiene que

$$\left(A_{s,t}^{(n)}\right)^{i,j} = \frac{1}{2}\left(\int_s^t \left(B^{(n)}\right)^i d\left(B_r^{(n)}\right)^j - \int_s^t \left(B^{(n)}\right)^j d\left(B_r^{(n)}\right)^i\right),$$

se tiene que

$$\left(1, B_{s,t}^{(n)}, \mathbb{B}_{s,t}^{(n)}\right) = \exp(B_{s,t}^{(n)} + A_{s,t}^{(n)})$$

Con esta notación procedemos a probar el siguiente lema que nos relacionara los procesos $B^{(n)}$ y $A^{(n)}$ a los procesos B y A por medio de una esperanza condicional.

Lema 3.10. *Para todo $s,t \in [0,T]$ se tiene que*

$$B_{s,t}^{(n)} = \mathbb{E}\left[B_{s,t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] \qquad y \qquad A_{s,t}^{(n)} = \mathbb{E}\left[A_{s,t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right]$$

donde $\mathscr{F}^{(n)} = \sigma\left(\left\{B_t \,\middle|\, t \in \mathcal{P}^{(n)}\right\}\right)$.

Demostración. Observemos que basta probar que

$$B_t^{(n)} = \mathbb{E}\left[B_t \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] \qquad \text{y} \qquad A_{0,t}^{(n)} = \mathbb{E}\left[A_{0,t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right]$$

ya que para B el resultado se extiende por linealidad, mientras que para que A basta usar la relación de Chen

$$A_{s,t} = A_{0,t} - A_{0,s} - \frac{1}{2}\left(B_s^i B_{s,t}^i - B_s^j B_{s,t}^i\right)$$

y la independencia de B_s y $B_{s,t}$ para extender el resultado.

Consideremos $[t_i, t_{i+1}] \in \mathcal{P}^{(n)}$ y $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Por la propiedad de Markov tenemos que B_t condicionado a $\mathcal{F}^{(n)}$ solo depende del tiempo inmediato pasado y el tiempo inmediato futuro, es decir,

$$\mathbb{E}\left[B_t \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] = \mathbb{E}\left[B_t \,\middle|\, B_{t_i}, B_{t_{i+1}}\right].$$

Más aún, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_t \,\middle|\, B_{t_i}, B_{t_{i+1}}\right] &= \mathbb{E}\left[B_t - B_{t_i} \,\middle|\, B_{t_i}, B_{t_{i+1}}\right] + \mathbb{E}\left[B_{t_i} \,\middle|\, B_{t_i}, B_{t_{i+1}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[B_t - B_{t_i} \,\middle|\, B_{t_i}, B_{t_{i+1}}\right] + B_{t_i} \\
&= \mathbb{E}\left[B_t - B_{t_i} \,\middle|\, B_{t_i}, B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right] + B_{t_{i+1}}.
\end{aligned}$$

Como $B_t - B_{t_i}$ es independiente de B_{t_i} tenemos

$$\mathbb{E}\left[B_t - B_{t_i} \,\middle|\, B_{t_i}, B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_{t_i} \,\middle|\, B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right].$$

Recordemos que dado un vector (X,Y) con distribución normal bivariada se tiene que

$$\mathbb{E}\left[X \,|\, Y\right] = \mathbb{E}\left[X_1\right] + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - \mathbb{E}\left[Y\right])$$

donde σ_X^2, σ_Y^2 son las varianzas de X y Y respectivamente y ρ es la covariación de estas. Con esto obtenemos que

$$\mathbb{E}\left[B_t - B_{t_i} \,\middle|\, B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right] = \rho\frac{(t - t_i)^{\frac{1}{2}}}{(t_{i+1} - t_i)^{\frac{1}{2}}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

donde

$$\rho = \frac{Cov(B_t - B_{t_i}, B_{t_{i+1}} - B_{t_i})}{(t-t_i)^{\frac{1}{2}}(t_{i+1}-t_i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\text{mín}\{t-t_i, t_{i+1}-t_i\}}{(t-t_i)^{\frac{1}{2}}(t_{i+1}-t_i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(t-t_i)^{\frac{1}{2}}}{(t_{i+1}-t_i)^{\frac{1}{2}}}$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[B_t - B_{t_i} \,\middle|\, B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right] = \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Con esto concluimos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[B_t \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] &= \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + B_{t_i} \\
&= \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}B_{t_{i+1}} + \left(1 - \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)B_{t_i} \\
&= \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}B_{t_{i+1}} + \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}B_{t_i} \\
&= B_t^{(n)}.
\end{aligned}$$

Lo cual muestra la primera afirmación.

Para la segunda parte observemos que al $A_{0,t}$ y $A_{0,t}^{(n)}$ ser antisimétricas sus entradas diagonales son nulas y por lo tanto trivialmente las diagonales de $A_{0,t}^{(n)}$ y $\mathbb{E}\left[A_{0,t} \,\middle|\, \mathcal{F}^{(n)}\right]$ coinciden. Consideremos $i \neq j$ y denotemos por $\beta = B^i$ y $\hat{\beta} = B^j$ a las coordenadas de B. Entonces β y $\bar{\beta}$ son movimientos Brownianos independientes. Más aún, denotemos por $\beta^{(n)}$ y $\bar{\beta}^{(n)}$ a las aproximaciones lineales por pedazos dadas para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ por

$$\beta_t^{(n)} = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}\beta_{t_i} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\beta_{t_{i+1}}, \qquad \bar{\beta}^{(n)} = \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}\bar{\beta}_{t_i} + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\bar{\beta}_{t_{i+1}}.$$

Veamos que c.s.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \beta_r d\bar{\beta}_r \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] = \int_0^t \beta_r^{(n)} d\bar{\beta}_r^{(n)}$$

en donde la integral del lado izquierdo es una integral de Itô y en el lado derecho se tiene una integral de Riemann-Stieltjes. Recordemos que la integral de Itô $\int_0^t \beta_r d\bar{\beta}_r$ es el límite en L^2 de la sucesión de sumas parciales de Riemann-Stieltjes, es decir, conforme $k \to \infty$, dado que $\left|\mathcal{P}^{(k)}\right| = 2^{-k} \to 0$, tenemos que

$$\sum_{[t_i,t_{i+1}]\in\mathcal{P}^{(k)}} \beta_{t_i\wedge t}\bar{\beta}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t} \xrightarrow{L^2} \int_0^t \beta_r d\bar{\beta}_r.$$

Por linealidad y continuidad el operador $\mathbb{E}\left[\cdot \,\middle|\, \mathcal{F}^{(n)}\right]$ en L^2 tenemos en L^2 que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \beta_r d\bar{\beta}_r \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] = L^2 - \lim_{k\to\infty} \sum_{[t_i,t_{i+1}]\in\mathcal{P}^{(k)}} \mathbb{E}\left[\beta_{t_i\wedge t}\bar{\beta}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right].$$

Como β y $\bar{\beta}$ son independientes y considerando la primer parte de este resultado obtenemos que

$$\mathbb{E}\left[\beta_{t_i\wedge t}\bar{\beta}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] = \mathbb{E}\left[\beta_{t_i\wedge t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right]\mathbb{E}\left[\bar{\beta}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] = \beta_{t_i\wedge t}^{(n)}\bar{\beta}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t}^{(n)}$$

y por lo tanto

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \beta_r d\bar{\beta}_r \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] = L^2 - \lim_{k\to\infty} \sum_{[t_i,t_{i+1}]\in\mathcal{P}^{(k)}} \beta^{(n)}_{t_i\wedge t}\bar{\beta}^{(n)}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t}.$$

Por otro lado, casi seguramente para cada $\omega \in \Omega$ fija

$$\sum_{[t_i,t_{i+1}]\in\mathcal{P}^{(n)}} \beta^{(n)}_{t_i}(\omega)\bar{\beta}^{(n)}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t}(\omega)$$

representa las sumas de Riemann-Stieltjes de las funciones de variación acotada $\beta^{(n)}(\omega)$ y $\bar{\beta}^{(n)}(\omega)$ por lo que como límite puntual se tiene que

$$\left(\int_0^t \beta^{(n)}_r d\bar{\beta}^{(n)}_r\right)(\omega) = \int_0^t \beta^{(n)}_r(\omega) d(\bar{\beta}^{(n)}(\omega))_r = \lim_{k\to\infty} \sum_{[t_i,t_{i+1}]\in\mathcal{P}^{(k)}} \beta^{(n)}_{t_i}(\omega)\bar{\beta}^{(n)}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t}(\omega).$$

Veamos que podemos dominar esta sucesión en L^2, para esto tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{[t_i,t_{i+1}]\in\mathcal{P}^{(k)}} \beta^{(n)}_{t_i\wedge t}\bar{\beta}^{(n)}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t}\right| &\leq \sum_{[t_i,t_{i+1}]\in\mathcal{P}^{(k)}} \left|\beta^{(n)}_{t_i\wedge t}\right| \left|\bar{\beta}^{(n)}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t}\right| \\ &\leq \left|\left|\beta^{(n)}\right|\right|_{\infty;[0,T]} \left|\left|\bar{\beta}^{(n)}\right|\right|_{1-var;[0,T]}.\end{aligned}$$

Como $\beta^{(n)}$ y $\bar{\beta}^{(n)}$ son, respectivamente las interpolaciones lineales por pedazos de los puntos $\left\{\beta_{t_i} \,\middle|\, t_i \in \mathcal{P}^{(n)}\right\}$ y $\left\{\bar{\beta}_{t_i} \,\middle|\, t_i \in \mathcal{P}^{(n)}\right\}$ tenemos que

$$\left|\left|\beta^{(n)}\right|\right|_{\infty;[0,T]} = \max_{t_i\in\mathcal{P}^{(n)}} \{|\beta_{t_i}|\}, \qquad \left|\left|\bar{\beta}^{(n)}\right|\right|_{1-var;[0,T]} = \sum_{[t_i,t_{i+1}]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left|\bar{\beta}_{t_i,t_{i+1}}\right|.$$

Como $\beta_{t_i}, \bar{\beta}_{t_{i+1}}$ son variables aleatorias gaussianas estas pertenecen a L^4 y como $\mathcal{P}^{(n)}$ es finito tenemos que

$$\left|\left|\beta^{(n)}\right|\right|_{\infty;[0,T]}, \left|\left|\bar{\beta}^{(n)}\right|\right|_{1-var;[0,T]} \in L^4.$$

Por la desigualdad de Hölder

$$\left|\left|\beta^{(n)}\right|\right|_{\infty;[0,T]} \left|\left|\bar{\beta}^{(n)}\right|\right|_{1-var;[0,T]} \in L^2$$

y por lo tanto esta sucesión de sumas parciales esta dominada en L^2. Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue y la convergencia puntual obtenemos que este límite tambien ocurre en L^2, es decir, cuando $k \to \infty$

$$\sum_{[t_i,t_{i+1}]\in\mathcal{P}^{(k)}} \beta^{(n)}_{t_i\wedge t}\bar{\beta}^{(n)}_{t_i\wedge t, t_{i+1}\wedge t} \xrightarrow{L^2} \int_0^t \beta^{(n)}_r d\bar{\beta}^{(n)}_r$$

y por unicidad del límite en L^2 obtenemos que c.s.

$$\int_0^t \beta^{(n)}_r d\bar{\beta}^{(n)}_r = \mathbb{E}\left[\int_0^t \beta_r d\bar{\beta}_r \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right].$$

Utilizando lo anterior podemos concluir por linealidad que para toda $i \neq j$

$$\left(A_{0,t}^{(n)}\right)_{i,j} = \left(\mathbb{E}\left[A_{0,t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right]\right)_{i,j}$$

con lo cual se concluye el resultado. $\square$

Por el Teorema de Convergencia de Martingalas de Levy tenemos que c.s

$$\mathbb{E}\left[B_{s,t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] \to \mathbb{E}\left[B_{s,t} \,|\, \mathscr{F}^{\infty}\right] \ \text{ y } \ \mathbb{E}\left[A_{s,t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] \to \mathbb{E}\left[A_{s,t} \,|\, \mathscr{F}^{\infty}\right]$$

donde $\mathscr{F}^{\infty} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}^+} \mathscr{F}^{(n)}$. Como $D = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left\{\frac{iT}{2^n} \,\middle|\, i \in \{1, \ldots, 2^n\}\right\}$ es denso, B y A son continuos c.s. entonces para toda $s, t \in [0, T]$ se tiene que B_t y $A_{s,t}$ estań determinado por lo valores en el denso D por lo que son $\mathscr{F}^{\infty}$-medibles y $A_{s,t} = \mathbb{E}\left[A_{s,t} \,|\, \mathscr{F}^{\infty}\right]$ y $B_t = \mathbb{E}\left[B_t \,|\, \mathscr{F}^{\infty}\right]$. De esta manera tenemos que cuando $n \to \infty$ c.s.

$$\begin{aligned} B_t^{(n)} &= \mathbb{E}\left[B_t \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[B_t \,|\, \mathscr{F}^{\infty}\right] = B_t \\ A_{s,t}^{(n)} &= \mathbb{E}\left[A_{s,t} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[A_{s,t} \,|\, \mathscr{F}^{\infty}\right] = A_{s,t}. \end{aligned}$$

Por la continuidad del mapeo exponencial y la proyección π_2 también tenemos c.s. que cuando $n \to \infty$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(n)} = \pi_2\left(\exp\left(B_{s,t}^{(n)} + A_{s,t}^{(n)}\right)\right) \longrightarrow \pi_2\left(\exp\left(B_{s,t} + A_{s,t}\right)\right) = \mathbb{B}_{s,t}^{\text{Strat}}$$

Con lo anterior hemos mostrado la convergencia puntual c.s. de estas trayectorias rugosas. Ahora nuestro objetivo es utilizar el criterio del Lema 2.8 para traducir esta convergencia a convergencia de trayectorias rugosas, es decir, convergencia bajo ρ_α para $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Para obtener las cotas necesarias sobre las normas necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.11. *Para todo $s, t \in [0, T]$ se tiene que fuera de la diagonal $\mathbb{B}_{s,t}^{(n)}$ coincide con $\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_{s,t}^{Strat} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right]$, es decir, para todo $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ tal que $i \neq j$ se tiene que*

$$\left(\mathbb{B}_{s,t}^{(n)}\right)^{i,j} = \left(\mathbb{E}\left[\mathbb{B}_{s,t}^{Strat} \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right]\right)^{i,j}.$$

Demostración. Recordemos que al tratarse de trayectorias rugosas geométricas podemos recuperar $\mathbb{B}_{s,t}^{\text{Strat}}$ y $\mathbb{B}_{s,t}^{(n)}$ por medio del mapeo exponencial como

$$\mathbb{B}_{s,t}^{\text{Strat}} = \pi_2\left(\exp(B_{s,t} + A_{s,t})\right) = A_{s,t} + \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t}$$

y

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(n)} = \pi_2\left(\exp\left(B_{s,t}^{(n)} + A_{s,t}^{(n)}\right)\right) = A_{s,t}^{(n)} + \frac{1}{2} B_{s,t}^{(n)} \otimes B_{s,t}^{(n)}.$$

Si $i \neq j$ entonces B^i es independiente de B^j y por lo tanto tenemos que

$$\mathbb{E}\left[B_{s,t}^i B_{s,t}^j \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] = \mathbb{E}\left[B_{s,t}^i \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] \mathbb{E}\left[B_{s,t}^j \,\middle|\, \mathscr{F}^{(n)}\right] = \left(B^{(n)}\right)_{s,t}^i \left(B^{(n)}\right)_{s,t}^j.$$

Por el Lema 3.10

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left[\mathbb{B}^{\mathrm{Strat}}_{s,t}\,\middle|\,\mathscr{F}^{(n)}\right]\right)^{i,j} &= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{B}^{\mathrm{Strat}}_{s,t}\right)^{i,j}\,\middle|\,\mathscr{F}^{(n)}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[A^{i,j}_{s,t}\,\middle|\,\mathscr{F}^{(n)}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[B^i_{s,t}B^j_{s,t}\,\middle|\,\mathscr{F}^{(n)}\right] \\ &= \left(A^{(n)}\right)^{i,j}_{s,t} + \frac{1}{2}\left(B^{(n)}\right)^i_{s,t}\left(B^{(n)}\right)^j_{s,t} \\ &= \left(\mathbb{B}^{(n)}_{s,t}\right)^{i,j}\end{aligned}$$

lo cual muestra el resultado. □

Teorema 3.12. *Para toda* $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ *se tiene que c.s.*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left\|B^{(n)}\right\|_\alpha < +\infty \quad y \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left\|\mathbb{B}^{(n)}\right\|_{2\alpha} < +\infty$$

Demostración. Recordemos que por el Criterio de Kolmogorov (Teorema 3.3) para todo $q \geq 2$ y $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ existen $K_\alpha \in L^q$ y $\mathbb{K}_\alpha \in L^{\frac{q}{2}}$ tales que c.s.

$$|B_{s,t}| \leq K_\alpha |t-s|^\alpha \qquad \text{y} \qquad \left|\mathbb{B}^{\mathrm{Strat}}_{s,t}\right| \leq \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Condicionando sobre $\mathscr{F}^{(n)}$ obtenemos por el Lema 3.10 que c.s.

$$\left|B^{(n)}_{s,t}\right| = \left|\mathbb{E}\left[B_{s,t}\,\middle|\,\mathscr{F}^{(n)}\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[|B_{s,t}|\,\middle|\,\mathscr{F}^{(n)}\right] \leq \mathbb{E}\left[K_\alpha\,\middle|\,\mathscr{F}^{(n)}\right]|t-s|^\alpha \leq K_\alpha |t-s|^\alpha$$

pues K_α se puede suponer no negativa. Con esto obtenemos que para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ c.s.

$$\left\|B^{(n)}\right\|_\alpha = \sup_{s\neq t}\frac{\left|B^{(n)}_{s,t}\right|}{|t-s|^\alpha} \leq K_\alpha$$

y por lo tanto, como $K_\alpha \in L^q$,

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left\|B^{(n)}\right\|_\alpha \leq K_\alpha < +\infty \quad \text{c.s.}$$

Por otro lado, para todo $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ $i \neq j$ tenemos de manera análoga (condicionando sobre $\mathscr{F}^{(n)}$ y utilizando el Lema 3.11) que c.s.

$$\left|\left(\mathbb{B}^{(n)}_{s,t}\right)^{i,j}\right| \leq \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha}.$$

Para los términos diagonales observemos que al ser integrales de Riemann-Stieltjes tenemos por el caso anterior que c.s.

$$\left|\left(\mathbb{B}^{(n)}_{s,t}\right)^{i,i}\right| = \left|\int_s^t \left(B^{(n)}_{s,r}\right)^i d\left(B^{(n)}_r\right)^i\right| = \left|\left(B^{(n)}_{s,t}\right)^i\right|^2 \leq K^2_\alpha |t-s|^2.$$

Como $K_\alpha^2 \in L^{\frac{q}{2}}$ podemos concluir que existe $\mathbb{K}'_\alpha \in L^{\frac{q}{2}}$ tal que c.s.

$$\left|\mathbb{B}^{(n)}_{s,t}\right| = \left|\int_s^t B^{(n)}_{s,r} \otimes dB^{(n)}_r\right| \leq \mathbb{K}'_\alpha \left|t-s\right|^{2\alpha}.$$

Concluyendo de manera análoga al caso anterior obtenemos que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left|\left|\mathbb{B}^{(n)}\right|\right|_{2\alpha} \leq \mathbb{K}'_\alpha < +\infty \text{ c.s.}$$

y como $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ y $q \geq 2$ es arbitraria se concluye el resultado. □

Corolario 3.13. *Para toda $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ casi seguramente la sucesión de trayectorias rugosas geométricas aleatorias $\{\left(B^{(n)}, \mathbb{B}^{(n)}\right)(\omega)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathscr{C}_g^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ converge bajo la métrica ρ_α a la trayectoria rugosa geométrica $(B, \mathbb{B}^{Strat})(\omega)$, es decir, casi seguramente*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_\alpha\left(\left(B^{(n)}, \mathbb{B}^{(n)}\right), \left(B, \mathbb{B}^{Strat}\right)\right) = 0.$$

Demostración. Dado $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ sea $\beta \in \left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$, entonces por el Teorema 3.12 c.s.

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left|\left|B^{(n)}\right|\right|_{\beta} < +\infty \text{ y } \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left|\left|\mathbb{B}^{(n)}\right|\right|_{2\beta} < +\infty.$$

Como c.s. se tienen las convergencias puntuales $B^{(n)}_{s,t} \to B_{s,t}$ y $\mathbb{B}^{(n)}_{s,t} \to \mathbb{B}^{\mathrm{Strat}}_{s,t}$ basta utilizar el Teorema 2.8 para concluir el resultado. □

Observemos que fue necesario tratar el proceso

$$A_{s,t} = \frac{1}{2}\left(\int_s^t B^i_{s,r} dB^j_r - \int_s^t B^j_{s,r} B^i_r\right)_{i,j\in\{1,\ldots,d\}}$$

como integrales de Itô y no de Stratonovich, a pesar de que en este caso el resultado coincide, pues la integral de Itô se puede ver como límite de las sumas de Riemann-Stieltjes evaluadas en el extremo izquierdo mientras que para la integral de Stratonovich habría que considerar la evaluación en el punto intermedio. A pesar de esto la convergencia de las aproximaciones lineales es a la integral de Stratonovich y no a la de Itô.

Cabe mencionar que a pesar de que se tiene esta aproximación a $\mathbf{B}^{\mathrm{Strat}}$ por medio de firmas de trayectorias lineales por pedazos que aproximan a B **no** se tiene cualquier aproximación a B induce una aproximación a $\mathbf{B}^{\mathrm{Strat}}$, de hecho, como se puede consultar en [Friz and Hairer, 2014, p.34] existen trayectorias suaves por pedazos que aproximan a B y cuyas firmas convergen como trayectorias rugosas a

$$(B_{s,t}, \mathbb{B}^{\mathrm{Strat}}_{s,t} + (t-s)A) \in \mathscr{C}_g^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$$

donde A es una matriz antisimétrica.

3.3. Integración rugosa e Integración estocástica

En la sección 3.1 hemos visto que podemos extender un movimiento Browniano B a la trayectorias rugosa (aleatoria) α-Hölder no geométrica $\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ para $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, es decir, existe N_1 un conjunto nulo tal que para todo $\omega \in N_1^c$ se tiene que $\mathbf{B}^{\text{Itô}}(\omega) \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$. Con esto tenemos dos teorías de integración, la integral estocástica de Itô y la integral rugosa con respecto a la trayectoria rugosa $\mathbf{B}^{\text{Itô}}$. El siguiente resultado nos dice que si para un integrando ambas integrales están bien definidas entonces estas coinciden. En lo subsecuente N_i para $i \in \mathbb{Z}^+$ denotarán conjuntos nulos.

Teorema 3.14. *Sean Y, Y' procesos estocásticos tales que $(Y(\omega), Y'(\omega)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{B(\omega)}$ para todo $\omega \in N_2^c$, es decir, la trayectoria $Y(\omega)$ es controlada por la trayectoria $B(\omega)$ con derivada de Gubinelli $Y'(\omega)$. Entonces la integral rugosa*

$$\int_0^T Y d\mathbf{B}^{It\hat{o}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} \left(Y_u B_{u,v} + Y'_u \mathbb{B}^{It\hat{o}}_{u,v}\right)$$

esta definida, trayectorialmente, para todo $\omega \in N_3^c$ donde $N_3 = N_1 \cup N_2$ y cualquier sucesión $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de particiones de $[0,T]$ tal que $|\mathcal{P}_n| \downarrow 0$. Más aún, si Y, Y' son procesos estocásticos adaptados entonces la integral estocástica de Itô $\int_0^T Y dB$ existe y se tiene la igualdad casi segura de las variables aleatorias

$$\int_0^T Y dB = \int_0^T Y d\mathbf{B}^{It\hat{o}}.$$

Demostración. Con estas hipótesis la existencia casi segura de la integral rugosa $\int_0^T Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ es consecuencia del Teorema 2.17 . Por otro lado observemos que Y es c.s. un proceso continuo pues $(Y(\omega), Y'(\omega)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{B(\omega)}$ para $\omega \in N_2^c$ y como Y es adaptado, entonces la integral de Itô existe y tiene la representación como límite en L^2

$$\int_0^T Y dB = L^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} Y_u B_{u,v}$$

pues $|\mathcal{P}_n| \downarrow 0$. Sin perdida de generalidad, pasando a una subsucesión de ser necesario, podemos suponer que esta convergencia es casi segura, es decir, para todo $\omega \in N_4^c$

$$\int_0^T Y dB(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} Y_u(\omega) B_{u,v}(\omega).$$

De esta manera obtenemos que si $N_5 = N_3 \cup N_4$, entonces para todo $\omega \in N_5^c$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^T Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}}(\omega) - \int_0^T Y dB(\omega) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} \left(Y_u(\omega) B_{u,v}(\omega) + Y'_u(\omega) \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}(\omega)\right) \\
&\quad - \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} Y_u(\omega) B_{u,v}(\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} Y'_u(\omega) \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}(\omega),
\end{aligned}$$

es decir, casi seguramente

$$\int_0^T Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}} - \int_0^T Y dB = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} Y'_u \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}.$$

Veamos que c.s. este último termino es igual a cero. Para esto fijemos una partición $\mathcal{P}_n$ y supongamos que esta tiene representación $\mathcal{P}_n = \{0 = t_0 < \ldots < t_N = T\}$ para alguna $N \in \mathbb{Z}^+$. Más aún supongamos que existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{\omega\in N_5^c} |Y'(\omega)|_\infty \leq M < +\infty.$$

Si Y, Y' son de la forma $Y = F(B)$, $Y' = DF(B)$ con $F \in C_b^2\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e\right)\right)$, que es el caso estudiado en la sección 2.4 entonces trivialmente se tiene la cota anterior. Con la suposición anterior podemos definir una martingala $\{S_k\}_{k=0,\ldots,n}$ (utilizando como filtración la inducida por B) haciendo $S_0 =$ y $S_{k+1} - S_k = Y'_{t_k}\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}$ ya que en este caso tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\left|Y'_{t_k}\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}\right|\right] \leq M\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}\right|\right] = M\left|t_{k+1} - t_k\right| \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|\right] < +\infty$$

por los Corolarios 3.5 y 3.7 de lo cual se sigue la integrabilidad de $\{S_k\}_{k=0,\ldots,N}$. Para ver que efectivamente es una martingala sea $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración inducida por B y observemos que en este caso al ser Y' adaptado

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{k+1} - S_k \mid \mathscr{F}_{t_k}\right] &= Y'_{t_k}\mathbb{E}\left[\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k}\right] \\
&= Y'_{t_k}\mathbb{E}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_{t_k,r} \otimes dB_r \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_k}\right] \\
&= Y'_{t_k}\int_{t_k}^{t_k} B_{t_k,r} \otimes dB_r = 0,
\end{aligned}$$

ya que $\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_{t_k,r} \otimes dB_r$ es una integral de Itô y por lo tanto una martingala. Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} Y'_u\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right|_{L^2}^2 &= \left|\sum_{k=0}^{N-1}(S_{k+1} - S_k)\right|_{L^2}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |S_{k+1} - S_k|_{L^2}^2 \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left|Y'_u\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}\right|_{L^2}^2 \leq M^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}\right|_{L^2}^2 \\
&= M^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left|(t_{k+1} - t_k)\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|_{L^2}^2 \\
&= M^2 \left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|_{L^2}^2 \sum_{k=0}^{N-1} |t_{k+1} - t_k|^2 \\
&\leq M^2 \left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|_{L^2}^2 |\mathcal{P}_n| \sum_{k=0}^{N-1} |t_{k+1} - t_k| \\
&\leq M^2 \left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|_{L^2}^2 |\mathcal{P}_n| T = O(|\mathcal{P}_n|)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^T Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}} - \int_0^T Y dB\right|_{L^2} &= \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} Y'_u \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right|_{L^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} Y'_u \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right|_{L^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} O(|\mathcal{P}_n|^{\frac{1}{2}}) = 0
\end{aligned}
$$

y por lo tanto casi seguramente

$$\int_0^T Y dB = \int_0^T Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}}.$$

Utilizemos un argumento de localización para el caso en que

$$\sup_{\omega\in N_5^c} |Y'(\omega)|_\infty = \infty.$$

Definimos para $n \in \mathbb{Z}^+$ los tiempos de paro $\tau_n = \inf\{t \in [0,T] \mid Y_t \geq n\}$, entonces por hipótesis c.s. $\tau_n \to T$. Observemos que

$$(\mathbf{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n}_t := (B^{\tau_n}_t, (\mathbb{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n}_t) = (B_{t\wedge\tau_n}, (\mathbb{B}^{\text{Itô}})_{0,t\wedge\tau_n})$$

define c.s. una trayectoria rugosa en $[0,T]$ la cual coincide con $\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ en el intervalo (aleatorio) $[0,\tau_n]$ y es constante en $[\tau_n, T]$. Por otro lado sean $Y^{\tau_n}_t = Y_{t\wedge\tau_n}$ y $Y'^{\tau_n}_t = Y'_{t\wedge\tau_n}$, entonces utilizando notación de la definición 2.15 tenemos que $R^{Y^{\tau_n}} := Y^{\tau_n} - Y'^{\tau_n}_s\left((\mathbb{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n}_{s,t}\right)$ coincide con R^Y en el intervalo $[0,\tau_n]$ y

$$\left|\left|R^{Y^{\tau_n}}\right|\right|_{2\alpha} = \sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,T]}} \frac{\left|R^{Y^{\tau_n}}_{s,t}\right|}{|t-s|^{2\alpha}} = \sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,\tau_n]}} \frac{\left|R^{Y^{\tau_n}}_{s,t}\right|}{|t-s|^{2\alpha}} = \sup_{\substack{s\neq t\\ s,t\in[0,\tau_n]}} \frac{\left|R^{Y}_{s,t}\right|}{|t-s|^{2\alpha}} \leq \left|\left|R^Y\right|\right|_{2\alpha} < +\infty$$

por lo cual c.s. $(Y^{\tau_n}(\omega), Y'^{\tau_n}(\omega)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{B^{\tau_n}(\omega)}$. De esta manera tenemos definidas la integral rugosa $\int_0^T Y^{\tau_n} d(\mathbf{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n}$ y la integral de Itô $\int_0^T Y^{\tau_n} dB^{\tau_n}$ y como $\sup_{\omega\in N_5^c} \left|Y'^{\tau_n}(\omega)\right|_\infty \leq n$ tenemos que c.s.

$$\int_0^T Y^{\tau_n} d(\mathbf{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n} = \int_0^T Y^{\tau_n} dB^{\tau_n}.$$

Por otro lado, como $(\mathbf{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n}$ es constante en $[0,\tau_n]$

$$\int_0^T Y^{\tau_n} d(\mathbf{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n} = \int_0^{\tau_n} Y^{\tau_n} d(\mathbf{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n}$$

y como en $[0,\tau_n]$ tenemos que $(\mathbf{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n}$ coinicide con $\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ en $[0,\tau_n]$ y $(Y^{\tau_n}, Y'^{\tau_n})$ coincide con (Y, Y') entonces

$$\int_0^{\tau_n} Y^{\tau_n} d(\mathbf{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n} = \int_0^{\tau_n} Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}}.$$

Como τ_n es tiempo de paro sabemos que la integral de Itô satisface

$$\int_0^T Y^{\tau_n} dB^{\tau_n} = \int_0^{\tau_n} Y dB$$

con lo cual concluimos que c.s.

$$\int_0^{\tau_n} Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}} = \int_0^T Y^{\tau_n} d(\mathbf{B}^{\text{Itô}})^{\tau_n} = \int_0^T Y^{\tau_n} dB^{\tau_n} = \int_0^{\tau_n} Y dB.$$

Por último, el Teorema 2.17 nos garantiza la continuidad de la trayectoria $\int_0^{\cdot} Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}}(\omega)$ para $\omega \in N_3^c$ mientras que la integral de Itô $\int_0^{\cdot} Y dB_r$ es por definición un proceso continuo c.s., por lo que como c.s. $\tau_n \to T$ concluimos que c.s.

$$\int_0^T Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_n} Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}} = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_n} Y dB = \int_0^T Y dB$$

lo cual concluye el resultado. □

De manera análoga podemos considerar extender el movimiento Browniano a la trayectoria rugosa (aleatoria) α-Hölder geométrica $\mathbf{B}^{\text{Strat}}$ para $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Por otro lado, recordemos que para un proceso estocástico Y su integral estocástica de Stratonovich esta dada por

$$\int_0^T Y \circ dB := \int_0^T Y dB + \frac{1}{2}[Y, B]_T$$

siempre que la integral esotcástica de Itô $\int_0^T Y dB$ este bien definida y la covariación $[Y, B]_T$ exista como límite en probabilidad, es decir,

$$[Y, B]_T = \mathbb{P} - \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0 \\ \mathcal{P}\subset[0,T]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y_{u,v} B_{u,v}.$$

De manera análoga al caso de Itô se tiene que la integral rugosa con respecto a $\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ y la integral estocástica de Stratonovich coinciden cuando ambas estan bien definidas.

Teorema 3.15. *Sean Y, Y' procesos estocásticos tales que $(Y(\omega), Y'(\omega)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{B(\omega)}$ para todo $\omega \in N_2^c$, es decir, la trayectoria $Y(\omega)$ es controlada por la trayectoria $B(\omega)$ con derivada de Gubinelli $Y'(\omega)$. Entonces la integral rugosa*

$$\int_0^T Y d\mathbf{B}^{Strat} = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}_n} \left(Y_u B_{u,v} + Y'_u \mathbb{B}^{Strat}_{u,v}\right)$$

esta definida, trayectorialmente, para todo $\omega \in N_3^c$ donde $N_3 = N_1 \cup N_2$ y cualquier sucesión $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ de particiones de $[0, T]$ tal que $|\mathcal{P}_n| \downarrow 0$. Más aún, si Y, Y' son procesos estocásticos adaptados entonces la variación cuadrática $[Y, B]_T$ esta bien definida, la integral estocástica de Stratonovich $\int_0^T Y \circ dB$ existe y se tiene casi seguramente la igualdad

$$\int_0^T Y \circ dB = \int_0^T Y d\mathbf{B}^{Strat}.$$

Demostración. Recordemos que $\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{s,t} + f_{s,t}$ donde f es determinista y dada por $f_t = \frac{1}{2}tI$ con $I \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ la matriz identidad. Por el Teorema 2.20 tenemos que

$$\int_0^T Y d\mathbf{B}^{\text{Strat}} = \int_0^T Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}} + \int_0^T Y' df$$

en donde el término $\int_0^T Y' df$ es una integral de Young. De hecho en este caso particular $\int_0^T Y' df$ es un integral de Riemann-Stieltjes y por linealidad de los operadores Y'_s

$$\int_0^T Y' df = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u \left(\frac{1}{2}(v-u)I\right) = \frac{1}{2} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u (I) (v-u) = \frac{1}{2}\int_0^T Y'_s(I)ds.$$

Dado que $\int_0^T Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}} = \int_0^T Y dB$ c.s. por el Teorema 3.14 basta mostrar que

$$\frac{1}{2}\int_0^T Y'_s(I)ds = \frac{1}{2}[Y,B]_T.$$

Para esto consideremos el residuo R^Y (ver definición 2.15) con lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y_{u,v}(B_{u,v}) &= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \big((Y'_u(B_{u,v}))(B_{u,v}) + R^Y_{u,v}(B_{u,v})\big)\\ &= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(B_{u,v}\otimes B_{u,v}) + \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} R^Y_{u,v}(B_{u,v}).\end{aligned}$$

Más aún,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} R^Y_{u,v}(B_{u,v})\right| &\le \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left|R^Y_{u,v}\right|_{op} |B_{u,v}|\\ &\le \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left|\left|R^Y\right|\right|_{2\alpha} |v-u|^{2\alpha} \left|\left|B\right|\right|_{\alpha} |v-u|^{\alpha}\\ &\le \left|\left|R^Y\right|\right|_{2\alpha} \left|\left|B\right|\right|_{\alpha} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} |\mathcal{P}|^{3\alpha}\\ &\le \left|\left|R^Y\right|\right|_{2\alpha} \left|\left|B\right|\right|_{\alpha} \frac{|\mathcal{P}|^{3\alpha}}{|\mathcal{P}|} = O\left(|\mathcal{P}|^{3\alpha-1}\right)\end{aligned}$$

por lo que

$$\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y_{u,v}(B_{u,v}) = \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(B_{u,v}\otimes B_{u,v}) + O\left(|\mathcal{P}|^{3\alpha-1}\right).$$

Por otro lado, tenemos que

$$B_{u,v}\otimes B_{u,v} = 2\,\mathrm{Sim}\left(\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{u,v}\right) = 2\,\mathrm{Sim}\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right) + (v-u)I$$

y por lo tanto

$$\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(B_{u,v}\otimes B_{u,v}) = 2\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u\left(\mathrm{Sim}\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right)\right) + \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(I)(v-u).$$

En el Teorema 3.14 se vio que bajo la condición $\sup_{\omega\in N_5^c} |Y'(\omega)|_\infty < +\infty$ se concluye que

$$L^2 - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right) = 0$$

y reemplazando $\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}$ por su transpuesta $(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v})^T$ con el mismo argumento obtenemos que

$$L^2 - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u\left(\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right)^T\right) = 0.$$

Por la linealidad de los operadores Y'_u tenemos que

$$L^2 - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u\left(\text{Sim}\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right)\right) = 0$$

y por lo tanto este límite tambien se tiene en probabilidad, es decir,

$$\mathbb{P} - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u\left(\text{Sim}\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right)\right) = 0.$$

Al quitar la condición $\sup_{\omega\in N_5^c} |Y'(\omega)|_\infty < +\infty$ con un argumento de localización podemos concluir que

$$\mathbb{P} - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u\left(\text{Sim}\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right)\right) = 0.$$

Como casi seguramente

$$\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(I)(v-u) \to \int_0^T Y'_t(I)dt$$

y convergencia c.s. implica convergencia en probabilidad tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T Y'_t(I)dt &= \mathbb{P} - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(I)(v-u) \\
&= \mathbb{P} - \lim_{|P|\to 0} \left(2 \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u\left(\text{Sim}\left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right)\right) + \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(I)(v-u) \right) \\
&= \mathbb{P} - \lim_{|P|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(B_{u,v}\otimes B_{u,v}).
\end{aligned}$$

Más aún, tenemos que

$$\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y_{u,v}(B_{u,v}) = \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(B_{u,v}\otimes B_{u,v}) + O(|\mathcal{P}|^{3\alpha-1})$$

y como $3\alpha > 1$ entonces

$$\int_0^T Y'_t(I)dt = \mathbb{P} - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(B_{u,v}\otimes B_{u,v}) = \mathbb{P} - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y_{u,v}(B_{u,v}),$$

es decir, la covariación cuadrática $[Y,B]_T$ de Y y B existe y

$$[Y,B]_T = \int_0^T Y'_t(I)dt$$

con lo cual se concluye el resultado. □

3.4. Fórmula de Itô y Föllmer

En el Teorema 2.14 vimos que para trayectorias rugosas geométricas $\mathbf{X} = (x, \mathbb{X})$ y ciertas condiciones en F se satisface la regla de cálculo de "primer orden", es decir, que involucran la primer derivada, dada por

$$F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t DF(X_s)d\mathbf{X}_s.$$

Más aún, en el Teorema 2.20 hemos visto que la diferencia en la integración entre dos integrales rugosas con la misma trayectoria base involucra un término de "segundo orden"

$$\int_s^t y'_r df_r,$$

por lo que es de esperarse que en el caso de trayectorias rugosas no geométricas la fórmula anterior involucre un termino de "segundo orden" como en el caso de la fórmula de Ito para el cálculo estocástico.

Recordemos que en el Teorema 2.14 la técnica utilizada fue separar $\mathbb{X}_{s,t}$ en su parte simétrica y antisimétrica, las cuales denotaremos por $\mathbb{S}_{s,t}$ y $\mathbb{A}_{s,t}$ respectivamente, y en el caso de 1-formas gradientes $G = DF$ se tiene que

$$DF(x_s)\mathbb{X}_{s,t} = D^2G(x_s)\mathbb{S}_{s,t} + D^2G(x_s)\mathbb{A}_{s,t} = D^2G(x_s)\mathbb{S}_{s,t},$$

pues como vimos en el Teorema 2.14 el término $D^2G(x_s)\mathbb{A}_{s,t}$ es la contracción de un tensor simétrico, $D^2G(x_s)$, con uno antisimétrico, $\mathbb{A}_{s,t}$, y por lo tanto nulo.

En el caso de trayectorias rugosas geométricas tenemos que

$$\mathbb{S}_{s,t} = \frac{1}{2}x_{s,t} \otimes x_{s,t}.$$

Más aún, si consideramos el movimiento Browniano Rugoso de Itô tenemos por la fómula de Integración por partes para la integral de Itô que

$$\mathbb{S}^{i,j}_{s,t} = \frac{1}{2}\left(\int_s^t B^i_{s,r}dB^j_r + \int_s^t B^j_{s,r}dB^i_r\right) = \frac{1}{2}B^i_{s,t}B^j_{s,t} - \frac{1}{2}[B^i, B^j]_{s,t}$$

y por lo tanto

$$\mathbb{S}_{s,t} = \frac{1}{2}B_{s,t} \otimes B_{s,t} - \frac{1}{2}(t-s)I.$$

Como veremos más adelante en general el proceso $\mathbb{S}$ tiene una representación más sencilla que el proceso (de área) $\mathbb{A}$.

Definición 3.16. *Decimos que* $(x, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ *es una* α*-Hölder trayectoria rugosa reducida si* $x \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ *y* $\mathbb{S} : [0,T]^2 \to \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ *satisface la relación de Chen reducida, la cual para* $0 \leq s < u < t \leq T$ *esta dada por*

$$\mathbb{S}_{s,t} = \mathbb{S}_{s,u} + \mathbb{S}_{u,t} + \mathrm{Sim}(x_{s,u} \otimes x_{u,t})$$

y la condición analítica

$$||\mathbb{S}||_{2\alpha} = \sup_{s \neq t} \frac{|\mathbb{S}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < +\infty.$$

Observemos que cualquier trayectoria rugosa $(x, \mathbb{X})$ induce una trayectoria rugosa reducida simplemente al ignorar el proceso de área $\mathbb{A}$ pues la identidad de Chen reducida se recupera al aplicar el operador Sim a la identidad de Chen. Por otro lado, el leventamiento de una trayectoria $x \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ a una trayectoria rugosa reducida es trivial pues basta definir

$$\mathbb{S}_{s,t} = \frac{1}{2} x_{s,t} \otimes x_{s,t}.$$

De manera análoga al Teorema 2.6 se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.17. *Dada* $x \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ *con* $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ *y definiendo* $\bar{\mathbb{S}}_{s,t} = \frac{1}{2} x_{s,t} \otimes x_{s,t}$ *tenemos que* $(x, \bar{\mathbb{S}}) \in \mathscr{C}_r^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ *y a esta se le llama la elección geométrica. Más aún, toda* $\gamma \in C^{2\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathrm{Sim}\left(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\right)\right)$ *define una trayectoria rugosa reducida haciendo* $(x, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ *donde*

$$\mathbb{S}_{s,t} := \bar{\mathbb{S}}_{s,t} + \frac{1}{2}\left(\gamma_t - \gamma_s\right) = \frac{1}{2}\left(x_{s,t} \otimes x_{s,t} + \gamma_{s,t}\right)$$

y cualquier trayectoria rugosa reducida se obtiene de esta forma.

Demostración. Veamos que $(x, \bar{\mathbb{S}}_{s,t}) \in \mathscr{C}_r^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$. Dados $0 \leq s < u < t \leq T$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_{s,u} + \mathbb{S}_{u,t} + \mathrm{Sim}(x_{s,u} \otimes x_{u,t}) &= \frac{1}{2}\left(x_{s,u} \otimes x_{s,u} + x_{u,t} \otimes x_{u,t} + x_{s,u} \otimes x_{u,t} + x_{u,t} \otimes x_{s,u}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((x_{s,u} + x_{u,t}) \otimes x_{s,u} + (x_{u,t} + x_{s,u}) \otimes x_{u,t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_{s,t} \otimes x_{s,u} + x_{s,t} \otimes x_{u,t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_{s,t} \otimes (x_{s,u} + x_{u,t})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x_{s,t} \otimes x_{s,t}\right) = \bar{\mathbb{S}}_{s,t}
\end{aligned}$$

y

$$\left|\bar{\mathbb{S}}_{s,t}\right| = \frac{1}{2}\left|x_{s,t} \otimes x_{s,t}\right| = \frac{1}{2}\left|x_{s,t}\right|^2 \leq \frac{1}{2}\left|\left|x\right|\right|_{\alpha}^2 \left|t-s\right|^{2\alpha}$$

por lo cual $(x, \bar{\mathbb{S}}_{s,t}) \in \mathscr{C}_r^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$.

La otra parte del resultado es análoga al Teorema 2.6. ☐

Motivados por el resultado anterior tenemos la siguiente definición.

Definición 3.18. *Dado* $\mathbf{X} = (x, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *definimos su corchete*

$$[\mathbf{X}] : [0,T] \longrightarrow \mathrm{Sim}\left(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\right), \qquad t \longmapsto [\mathbf{X}]_t = x_{0,t} \otimes x_{0,t} - 2\mathbb{S}_{0,t}.$$

Entonces $[\mathbf{X}] \in C^{2\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathrm{Sim}\left(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d\right)\right)$ *por el Teorema 3.17. Más aún, si definimos*

$$[\mathbf{X}]_{s,t} := x_{s,t} \otimes x_{s,t} - 2\mathbb{S}_{s,t},$$

entonces $[\mathbf{X}]_{s,t} = [\mathbf{X}]_t - [\mathbf{X}]_s$.

Teorema 3.19 (Fórmula de Itô para $\mathscr{C}_r^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$)**.** *Consideremos* $F \in C_b^3\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e\right)$ *y* $\mathbf{X} = (x, \mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *con* $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$. *Entonces*

$$F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t DF(x_s)d\mathbf{X}_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(x_s)d[\mathbf{X}]_s$$

donde el término $\int_0^t D^2F(x_s)d[\mathbf{X}]_s$ *esta bien definido como una integral de Young y definimos el término*

$$\int_0^t DF(x_s)d\mathbf{X}_s := \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0\\ \mathcal{P}\subset[0,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\mathbb{S}_{u,v}\right)$$

como la integral rugosa reducida. Más aún, si $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ *es una trayectoria rugosa (no reducida) entonces esta última integral coincide con la integral rugosa de la Definición 2.13.*

Demostración. Observemos que en el caso geométrico, es decir, $\mathbf{X} = (x, \bar{\mathbb{S}})$ donde $\bar{\mathbb{S}}_{s,t} = \frac{1}{2}x_{s,t} \otimes x_{s,t}$ tenemos que $[X] \equiv 0$, por lo que el término $\int_0^t D^2F(x_s)d[\mathbf{X}]_s$ es nulo. Por otro lado, tenemos por el Teorema de Taylor que

$$\begin{aligned}
F(x_t) - F(x_s) &= DF(x_s)x_s + \frac{1}{2}D^2F(x_s)x_{s,t} \otimes x_{s,t} + O\left(|x_{s,t}|^3\right)\\
&= DF(x_s)x_s + \frac{1}{2}D^2F(x_s)x_{s,t} \otimes x_{s,t} + O\left(|t-s|^{3\alpha}\right)\\
&= DF(x_s)x_{s,t} + D^2F(x_s)\bar{\mathbb{S}}_{s,t} + o(|t-s|)
\end{aligned}$$

por lo que para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[0,t]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
F(x_t) - F(x_0) &= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(F(x_v) - F(x_u)\right)\\
&= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\bar{\mathbb{S}}_{u,v} + o(|v-u|)\right)\\
&= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\bar{\mathbb{S}}_{u,v}\right) + \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} o(|P|)\\
&= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\bar{\mathbb{S}}_{u,v}\right) + \frac{o(|\mathcal{P}|)}{|\mathcal{P}|}
\end{aligned}$$

por lo cual se concluye que

$$\int_0^t DF(x_s)d\mathbf{X}_s := \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0 \\ \mathcal{P}\subset[0,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\bar{\mathbb{S}}_{u,v}\right)$$

esta bien definido y

$$F(x_t) - F(x_0) = \int_0^t DF(x_s)d\mathbf{X}_s.$$

Para el caso no geométrico recordemos que

$$\bar{\mathbb{S}}_{s,t} = \frac{1}{2}x_{s,t}\otimes x_{s,t} = \mathbb{S}_{s,t} + \frac{1}{2}[\mathbf{X}]_{s,t}$$

y entonces por lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} F(x_t) - F(x_s) &= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} (F(x_v) - F(x_u)) \\ &= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\bar{\mathbb{S}}_{u,v}\right) + \frac{o(|\mathcal{P}|)}{|\mathcal{P}|} \\ &= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\mathbb{S}_{u,v} + \frac{1}{2}D^2F(x_u)[\mathbf{X}]_{u,v}\right) + \frac{o(|\mathcal{P}|)}{|\mathcal{P}|} \\ &= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\mathbb{S}_{u,v}\right) + \frac{1}{2}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} D^2F(x_u)[\mathbf{X}]_{u,v} + \frac{o(|\mathcal{P}|)}{|\mathcal{P}|}. \end{aligned}$$

Como $F \in C_b^3\left(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e\right)$ tenemos que

$$\left|D^2F(x_t) - D^2F(x_s)\right| \le \left|\left|D_F^3\right|\right|_\infty |x_t - x_s| \le \left|\left|D^3F\right|\right|_\infty ||x||_\alpha |t-s|^\alpha,$$

$D^2F(x.) \in C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)\right)$ y $[\mathbf{X}] \in C^{2\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathrm{Sim}\left(\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d\right)\right)$ y como $\alpha + 2\alpha = 3\alpha > 1$ entonces su integral de Young existe y

$$\int_0^t D^2F(x_s)d[\mathbf{X}]_s = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0 \\ \mathcal{P}\subset[0,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} D^2F(x_u)[\mathbf{X}]_{u,v}.$$

Más aún, como $\frac{o(|\mathcal{P}|)}{|\mathcal{P}|} \to 0$ cuando $|\mathcal{P}| \to 0$ lo anterior implica la existencia de

$$\int_0^t DF(x_s)d\mathbf{X}_s = \lim_{\substack{|\mathcal{P}|\to 0 \\ \mathcal{P}\subset[0,t]}} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\mathbb{S}_{u,v}\right)$$

y la identidad

$$F(x_t) - F(x_0) = \int_0^t DF(x_s)d\mathbf{X}_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(x_s)d[\mathbf{X}]_s.$$

Por último sea $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ una trayectoria rugosa, entonces

$$D^2F(x_s)\mathbb{X}_{s,t} = D^2F(x_s)\mathbb{S}_{s,t} + D^2F(x_s)\mathbb{A}_{s,t} = D^2F(x_s)\mathbb{S}_{s,t}$$

y por lo tanto

$$\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\mathbb{X}_{u,v}\right) = \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\mathbb{S}_{u,v}\right).$$

Por la parte anterior del resultado el termino del lado derecho converge, cuando $|\mathcal{P}| \to 0$, a la integral con respecto a la trayectoria rugosa reducida $(x,\mathbb{S}) \in \mathscr{C}_r^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$. Mientras que por el Teorema 2.13 el lado izquierdo converge a la integral rugosa con respecto a $(x,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ y por lo tanto ambas integrales coinciden. □

Observemos que la fórmula anterior en el caso $\mathbb{B}^{\text{Strat}}$ obtenemos que c.s.

$$F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t DF(B_s)d\mathbf{B}_s^{\text{Strat}}$$

pues al $\mathbf{B}^{\text{Strat}}$ ser casi seguramente una trayectoria rugosa geométrica $[\mathbf{B}^{\text{Strat}}] = 0$. Mientras tanto en el caso de $\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ tenemos por la fórmula de integración por partes para la integral estocástica de Ito que c.s.

$$2\,\mathrm{Sim}(\mathbb{B}^{\text{Itô}})^{i,j} = \int_0^t B^i_{0,s}dB^j_s + \int_0^t B^j_{0,s}dB^i_s = B^i_tB^j_t - [B^i,B^j]_t = B^i_{0,t}B^j_{0,t} - \delta_{i,j}t,$$

donde $[B^i,B^j]$ representa la covariación cuadrática y por lo tanto c.s.

$$[\mathbf{B}^{\text{Strat}}]_t = B_{0,t}\otimes B_{0,t} - 2\,\mathrm{Sim}(\mathbb{B}^{\text{Itô}}) = [B,B]_t = tI.$$

Con esto obtenemos que c.s.

$$\begin{aligned}
D^2F(B_s)[\mathbf{B}^{\text{Itô}}]_{s,t} &= D^2F(B_s)[B,B]_{s,t} = D^2F(B_s)(t-s)I \\
&= \left(\sum_{i=1}^d D^2F(B_s)e_i\otimes e_i\right)(t-s) \\
&= \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}F(B_s)\right)(t-s) \\
&= \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}F(B_s)(t-s) \in \mathbb{R}^e
\end{aligned}$$

y podemos concluir que c.s.

$$\int_0^t D^2F(B_s)d[\mathbf{B}^{\text{Itô}}]_s = \int_0^t D^2F(B_s)d[B,B]_s = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}F(B_s)ds \in \mathbb{R}^e.$$

Con esto y el Teorema 3.12 concluimos que efectivamente esta fórmula generaliza la fómula de Ito clásica del cálculo estocástico.

Recordemos que el Teorema 2.14 nos dice que la integración de 1-formas gradientes con respecto a trayectorias rugosas geométricas era trivial. La importancia del teorema anterior es que generaliza el Teorema 2.14 y nos dice que la integral rugosa de 1-formas gradientes **no** depende del proceso de área $\mathbb{A}$ y únicamente depende de la trayectoria rugosa reducida. Más aún, el Teorema 3.17 nos caracteriza todos los levantamientos de $C^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ a $\mathscr{C}_r^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$ de una manera bastante simple. En nuestro caso recordemos que para realizar el levantamiento de las trayectorias de un movimiento Browniano B nos apoyamos en la existencia de la integral estocástica de Itô lo cual depende de propiedades estocásticas de B (la propiedad de martingala).

Observemos que el Teorema 3.19 nos permite escribir

$$\begin{aligned}
F(x)_{0,t} &= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\mathbb{S}_{u,v}\right) + \frac{1}{2}\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(D^2F(x_u)[\mathbf{X}]_{u,v}\right) \\
&= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\mathbb{S}_{u,v} + \frac{1}{2}D^2F(x_u)[\mathbf{X}]_{u,v}\right) \\
&= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + D^2F(x_u)\left(\mathbb{S}_{u,v} + \frac{1}{2}[\mathbf{X}]_{u,v}\right)\right) \\
&= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \left(DF(x_u)x_{u,v} + \frac{1}{2}D^2F(x_u)x_{u,v}\otimes x_{u,v}\right).
\end{aligned}$$

La condición de Föllmer, presentada a continuación, nos permitira separar este límite como suma de los límites y concluir la fórmula de Itô-Föllmer.

Definición 3.20. *Sea $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión de particiones de $[0,T]$ tales que $\left|\mathcal{P}^{(n)}\right| \to 0$. Se dice que $x:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ tiene variación cuadrática finita en el sentido de Föllmer a lo largo de $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ si para toda $i,j\in\{1,\dots,d\}$ y $t\in[0,T]$ existe el límite*

$$[x^i,x^j]_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} (x^i_{v\wedge t} - x^i_{u\wedge t})(x^j_{v\wedge t} - x^j_{u\wedge t}).$$

En este caso definimos $[x,x]:[0,T]\to \mathrm{Sim}(\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d)$ como

$$[x,x]_t = \sum_{i,j=1}^{d} [x^i,x^j]_t e_i\otimes e_j = \sum_{i=1}^{d}[x^j,x^i]_t e_i\otimes e_j.$$

Lema 3.21. *Si $y:[0,T]\to\mathbb{R}$ tiene variación cuadrática finita en el sentido de Föllmer a lo largo de $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tal que $[y,y]_t$ es continua y $g:[0,T]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} g(u)y^2_{u,v} = \int_0^t g(u)d[y,y]_u,$$

donde esta última es una integral de Riemann-Stieltjes.

Demostración. Definamos la medida

$$\mu_n = \sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} y^2_{u,v}\delta_u,$$

es decir, asigna masa $y_{u,v}^2$ al punto $u<t$ si $[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}$, es decir, u pertenece a la partición y v es el siguiente punto de u en la partición. De esta forma tenemos que μ_n es una medida finita en $[0,t)$ que satisface

$$\sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} g(u)y_{u,v}^2=\int_0^t g\,d\mu_n.$$

Observemos que la distribución asociada a μ_n esta dada para $s\in[0,t)$ por

$$F_n(s)=\mu_n\left([0,s]\right)=\sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u\leq s}} y_{u,v}^2.$$

Para relacionar esta suma con aquella en la defiención de $[y,y]_s$ fijemos $s\in[0,t)$y denotemos por u_n y v_n a los únicos puntos tales que $s\in(u_n,v_n]$ y $[u_n,v_n]\in\mathcal{P}^{(n)}$, de esta manera tenemos que

$$F_n(s)=\sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ v<s}} y_{u,v}^2+y_{u_n,v_n}^2.$$

Más aún, si $[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}$ es tal que $v<s$ entonces $y_{u,v}=y_v-y_u=y_{v\wedge s}-y_{u\wedge s}$ y por lo tanto

$$F_n(s)=\sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ v<s}} (y_{v\wedge s}-y_{u\wedge s})^2+y_{u_n,v_n}^2.$$

El primer término converge por definición a $[y,y]_s$ y como $[u_n,v_n]\in\mathcal{P}^{(n)}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}|v_n-u_n|\leq\lim_{n\to\infty}\left|\mathcal{P}^{(n)}\right|=0$$

y como y es continua $\lim_{n\to\infty}y_{u_n,v_n}=0$. De esta manera concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}F_n(s)=[y,y]_s,$$

es decir, F_n converge puntualmente a $[y,y]$ en $[0,t)$ y como $[y,y]$ es una función continua esta convergencia puntual de distribuciones implica la convergencia débil de las medidas, es decir, la sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ en $[0,t)$ converge debilmente a la medida μ en $[0,t)$ inducida por $[y,y]$. Como g es continua la convergencia débil nos dice que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,t)}g\,d\mu_n=\int_{[0,t)}g\,d\mu.$$

En este caso tenemos que la integral de Lebesgue $\int_{[0,t)}g\,d\mu$ coincide con la integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^t g(u)d[y,y]_u$, por lo que podemos reescribir lo anterior como

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} g(u)y_{u,v}^2=\int_0^t g(u)d[y,y]_u$$

lo cual concluye el resultado. □

Teorema 3.22. *Supongamos que $x : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ tiene variación cuadrática finita en el sentido de Föllmer a lo largo de $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$, entonces la función $t \mapsto [x,x]_t$ es de variación acotada en $[0,T]$. Más aún, si suponemos que $t \mapsto [x,x]_t$ es continua entonces para toda $G : [0,T] \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e\right)$ continua se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} G(u)x_{u,v} \otimes x_{u,v} = \int_0^t G(u)d[x,x]_u,$$

donde esta última es una integral de Riemann-Stieltjes.

Demostración. Por la condición de Föllmer para toda $i \in \{1,\dots d\}$ tenemos la existencia de

$$[x^i,x^i]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} (x^i_{v\wedge t} - x^i_{u\wedge t})^2$$

el cual claramente es no decreciente en t. Más aún, para $i,j \in \{1,\dots,d\}$ por bilinealidad tenemos que

$$[x^i+x^j,x^i+x^j]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} ((x^i+x^j)_{v\wedge t} - (x^i+x^j)_{u\wedge t})^2$$

existe, es no decreciente en t y

$$[x^i+x^j,x^i+x^j]_t = [x^i,x^i]_t + [x^j,x^j]_t + 2[x^i,x^j]_t$$

con lo que concluimos que

$$[x^i,x^j]_t = \frac{1}{2}\left([x^i+x^j,x^i+x^j]_t - [x^i,x^i]_t - [x^j,x^j]_t\right)$$

y por lo tanto $[x^i,x^j]_t$ es combincación lineal de funciones no decrecientes y por lo tanto de variación acotada. Como $[x^i,x^j]_t$ son las coordenadas de $[x,x]_t$ concluimos que esta última es de variación acotada.

Si $t \mapsto [x,x]_t$ es continua tenemos por el Lemma 3.21 que para toda $i,j \in \{1,\dots,d\}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} G^{i,j}(u)(x^i_{u,v})^2 = \int_0^t G^{i,j}(u)d[x^i,x^i]_u,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} G^{i,j}(u)((x^i+x^j)_{u,v})^2 = \int_0^t G^{i,j}(u)d[x^i+x^j,x^ix^j]_u$$

y por la identidad de polarización tenemos que

$$\begin{aligned} 2\sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} G^{i,j}(u)x^i_{u,v}x^j_{u,v} = &\sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} G^{i,j}(u)(x^i_{u,v})^2 + \sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} G^{i,j}(u)(x^i_{u,v})^2 \\ &+ \sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} G^{i,j}(u)((x^i+x^j)_{u,v})^2 \end{aligned}$$

por lo tanto el límite existe y por bilinealidad de la integral de Riemann-Stieltjes

$$\begin{aligned}
2\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} G^{i,j}(u)x^i_{u,v}x^j_{u,v} &= \int_0^t G^{i,j}(u)d[x^i,x^i]_u + \int_0^t G^{i,j}(u)d[x^j,x^j]_u \\
&\quad + \int_0^t G^{i,j}(u)d[x^i+x^j,x^i+x^j]_u \\
&= \int_0^t G^{i,j}(u)d\left([x^i,x^i]+[x^j,x^j]+[x^i+x^j,x^i+x^j]\right)_u \\
&= 2\int_0^t G^{i,j}(u)d[x^i,x^j]_u.
\end{aligned}$$

Basta observar que estas son las coordenadas de la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}\\ u<t}} G(u)x_{u,v}\otimes x_{u,v} = \int_0^t G(u)d[x,x]_u$$

para concluir el resultado. □

Teorema 3.23 (Fórmula de Itô-Föllmer)**.** *Supongamos que $x:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ tiene variación cuadrática finita en el sentido de Föllmer a lo largo de $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y que $t\mapsto[x,x]_t$ es continua. Sea $F\in C_b^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)$, entonces*

$$F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t DF(x_s)dx_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(x_s)d[x,x]_s$$

donde $\int_0^t D^2F(x_s)d[x,x]_s$ es una integral de Riemann-Stieltjes y

$$\int_0^t DF(x_s)dx_s := \lim_{n\to\infty}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} DF(x_u)x_{u,v}$$

es el límite de las sumas de Riemann-Stieltjes a lo largo de la sucesión de particiones $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$.

Demostración. Recordemos que, como consecuencia de la fórmula de Itô (Teorema 3.19) considerando la sucesión $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
F(x)_{0,t} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}}\left(DF(x_u)x_{u,v}+D^2F(x_u)\mathbb{S}_{u,v}\right) + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}}\left(D^2F(x_u)[\mathbf{X}]_{u,v}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}}\left(DF(x_u)x_{u,v}+\frac{1}{2}D^2F(x_u)x_{u,v}\otimes x_{u,v}\right).
\end{aligned}$$

Como $F\in C_b^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)$, entonces $t\mapsto D^2F(x_t)$ es continua, $[x,x]_t$ es de variación acotada por el Teorema 3.22 y

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} D^2F(x_u)x_{u,v}\otimes x_{u,v} = \int_0^t D^2F(x_s)d[x,x]_s.$$

Lo anterior garantiza la existencia de el límite

$$\int_0^t DF(x_s)dx_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} DF(x_u)x_{u,v}$$

y la identidad

$$F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t DF(x_s)dx_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2F(x_s)d[x,x]_s.$$

□

Cabe recalcar que el término $\int_0^t DF(x_s)dx_s$ puede depender de la sucesión $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ que se considere.

3.5. Integración Reversa

Recordemos que la Integral estocástica de Itô esta definida como

$$\int_0^t Y_r dB_r = \mathbb{P} - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y_u B_{u,v}$$

cuando este límite en probabilidad existe de manera uniforme en intervalos compactos. A diferencia de la integral de Riemann-Stiletjes, en este caso la evaluación en el extremo izquierdo es fundamental ya que la evaluación en un punto diferente cambia el límite. Para ver esto sea β un movimiento Browniano 1-dimensional recordemos que

$$\int_0^t \beta_r d\beta_r = \mathbb{P} - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} f_u \beta_{u,v} = \frac{1}{2}\beta_t^2 - \frac{t}{2},$$

sin embargo si consideramos las sumas evaluadas en el extremo derecho se tiene que

$$\mathbb{P} - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \beta_v \beta_{u,v} = \frac{1}{2}\beta_t^2 + \frac{t}{2},$$

con lo cual se pierde la propiedad de martingala.

A partir de esto se define la integral reversa de Itô como

$$\int_0^t Y_r \overleftarrow{dB_r} := \mathbb{P} - \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} f_v B_{u,v}$$

cuando este límite en probabilidad existe de manera uniforme en intervalos compactos. Observemos que en este caso tenemos

$$\int_0^t \beta_r \overleftarrow{d\beta_r} = \frac{1}{2}\beta_t^2 + \frac{t}{2},$$

sin embargo

$$\int_0^t \beta_{r,t}\overleftarrow{d\beta_r} = \beta_t \int_0^t \overleftarrow{d\beta_r} - \int_0^t \beta_r \overleftarrow{d\beta_r} = \beta_t^2 - \frac{1}{2}\beta_t^2 - \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\beta_t^2 - \frac{t}{2}$$

y en este caso se recupera la propiedad de martingala. La diferencia radica en que el integrando $\beta_{\cdot,t}$ es adaptado hacia atrás, lo que quiere decir que si $\mathscr{F}_s^t = \sigma\left(\{\beta_{u,v} \mid s \le u \le v \le t\}\right)$ entonces $\beta_{s,t}$ es $\mathscr{F}_s^t$-medible.

De manéra análoga a la integral de Stratonovich se define la integral reversa de Stratonovich como

$$\int_0^t Y_r \circ \overleftarrow{dB_r} := \int_0^t Y_r \overleftarrow{dB_r} - \frac{1}{2}[Y, B]_t,$$

por lo que en este caso tenemos que

$$\int_0^t \beta_r \circ \overleftarrow{d\beta_r} := \int_0^t \beta_r \overleftarrow{d\beta_r} - \frac{1}{2}[\beta, \beta]_t = \frac{1}{2}\beta_t^2 + \frac{t}{2} - \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\beta_t^2 = \int_0^t \beta_r \circ d\beta_r$$

y como veremos más adelante este caso no es una coincidencia.

Nuestro objetivo es ver que estas integraciones reversas se pueden considerar como integrales rugosas. Recordemos que nuestra definición de integral rugosa para $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ y $(y, y') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}$ esta dada por

$$\int_0^T y_r d\mathbf{X}_r = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \left(y_u x_{u,v} + y'_u \mathbb{X}_{u,v}\right),$$

por lo que, al igual que la integral estocástica de Itô, estamos considerando evaluaciones en el extremo izquierdo. El siguiente resultado nos relaciona la evaluación en el extremo izquierdo con aquella en el extremo derecho en la integral rugosa.

Teorema 3.24. *Sea $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^{\alpha-H\ddot{o}l}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ y $(y, y') \in \mathscr{D}_x^{2\alpha}$ para alguna $\alpha > \frac{1}{3}$, entonces*

$$\int_0^T y_r d\mathbf{X}_r = \lim_{\substack{|\mathcal{P}| \to 0 \\ \mathcal{P} \subset [0,T]}} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \left(y_v x_{u,v} + y'_v \left(\mathbb{X}_{u,v} - x_{u,v} \otimes x_{u,v}\right)\right).$$

Demostración. Recordemos que $y'_{s,t} = O\left(|t-s|^{\alpha}\right)$ por lo que

$$y'_{s,t}\mathbb{X}_{s,t} = O\left(|t-s|^{3\alpha}\right) = o(|t-s|) \quad \text{y} \quad y'_{s,t} x_{s,t} \otimes x_{s,t} = O\left(|t-s|^{3\alpha}\right) = o(|t-s|).$$

Más aún, como $R_{s,t} = y_{s,t} - y'_s x_{s,t} = O\left(|t-s|^{2\alpha}\right)$, entonces

$$R_{s,t} x_{s,t} = O\left(|t-s|^{3\alpha}\right) = o(|t-s|).$$

Con lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
y_s x_{s,t} + y'_s \mathbb{X}_{s,t} &= y_t x_{s,t} - y_{s,t} x_{s,t} + y'_s \mathbb{X}_{s,t} \\
&= y_t x_{s,t} - (R_{s,t} + y'_s x_{s,t}) x_{s,t} + y'_s \mathbb{X}_{s,t} \\
&= y_t x_{s,t} - R_{s,t} x_{s,t} - y'_s x_{s,t} \otimes x_{s,t} + y'_s \mathbb{X}_{s,t} \\
&= y_t x_{s,t} + y'_s (\mathbb{X}_{s,t} - x_{s,t} \otimes x_{s,t}) + o(|t-s|) \\
&= y_t x_{s,t} + y'_t (\mathbb{X}_{s,t} - x_{s,t} \otimes x_{s,t}) + y'_{s,t} (\mathbb{X}_{s,t} - x_{s,t} \otimes x_{s,t}) + o(|t-s|) \\
&= y_t x_{s,t} + y'_t (\mathbb{X}_{s,t} - x_{s,t} \otimes x_{s,t}) + o(|t-s|)
\end{aligned}$$

y de esta manera si $\mathcal{P}$ es una partición de $[0,T]$

$$\begin{aligned}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}(y_v x_{u,v}+y'_v(\mathbb{X}_{u,v}-x_{u,v}\otimes x_{u,v})) &= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}(y_u x_{u,v}+y'_u\mathbb{X}_{u,v}+o(|v-u|))\\ &= \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}(y_u x_{u,v}+y'_u\mathbb{X}_{u,v})+\frac{o(|\mathcal{P}|)}{|\mathcal{P}|}\\ &\underset{|\mathcal{P}|\to 0}{\longrightarrow}\int_0^T y_r d\mathbf{X}_r.\end{aligned}$$

□

El Teorema anterior nos dice que definir una integral rugosa "reversa" sustituyendo las evaluaciones en los extremos izquierdos por evaluaciones en los extremos derechos no esta en general bien definido pues la convergencia de

$$\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}(y_v x_{u,v}+y'_v\mathbb{X}_{u,v})$$

es equivalente a la convergencia de

$$\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} y'_v x_{u,v}\otimes x_{u,v},$$

lo cual a su vez, como $y'_{u,v}x_{u,v}\otimes x_{u,v}=o(|t-s|)$, es equivalente a la convergencia de

$$\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} y'_u x_{u,v}\otimes x_{u,v}.$$

En la sección 3.4 vimos que la noción de variación cuadrática en el sentido de Föllmer a lo largo de $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ (Definición 3.20) es la adecuada para tener esta convergencia al menos a lo largo de la sucesión de particiones $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$, es decir, gracias al Teorema 3.22

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} y'_u x_{u,v}\otimes x_{u,v}=\int_0^T y'_r d[x,x]_r.$$

En el caso del movimiento Browniano la existencia de su variación cuadrática $[B,B]_t=tI$ nos garantizara que c.s. tiene variación cuadrática en el sentido de Föllmer.

Lema 3.25. *Sea $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión de particiones de $[0,T]$ tales que $\left|\mathcal{P}^{(n)}\right|=o(n^{-2})$, entonces casi seguramente B tiene variación cuadrática en el sentido de Föllmer a lo largo de $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y esta noción coincide c.s. con la variación cuadrática de B.*

Demostración. Recordemos que la variación cuadrática de B en $t\in[0,T]$ esta definido como el límite en L^2 dado por

$$[B^i,B^j]_t=L^2-\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} B^i_{u\wedge t,v\wedge t}B^j_{u\wedge t,v\wedge t}.$$

Si $\{\mathcal{P}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión de particiones de $[0,T]$ tales que $\left|\mathcal{P}^{(n)}\right| = o(n^{-2})$ y denotamos

$$S_t^{(n)} = \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} B^i_{u\wedge t, v\wedge t} B^j_{u\wedge t, v\wedge t},$$

entonces

$$[B^i, B^j]_t = L^2 - \lim_{n\to\infty} S_t^{(n)}.$$

Más aún, en el caso $i = j$ se tiene la desigualdad

$$\mathbb{E}\left[\left|S_t^{(n)} - t\right|^2\right] \leq 2\left|\mathcal{P}^{(n)}\right| t$$

y en el caso $i \neq j$

$$\mathbb{E}\left[\left|S_t^{(n)}\right|^2\right] \leq \left|\mathcal{P}^{(n)}\right| t$$

y por la desigualdad de Markov tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\left|S_t^{(n)} - [B^i, B^j]_t\right|^2 > n^2\left|\mathcal{P}^{(n)}\right|\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[\left|S_t^{(n)} - \delta_{i,j}t\right|^2\right]}{n^2\left|\mathcal{P}^{(n)}\right|} \leq \frac{2}{\left|\mathcal{P}^{(n)}\right| t} n^2 \left|\mathcal{P}^{(n)}\right| = \frac{2}{n^2}.$$

Como $\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{2}{n^2} < +\infty$ el Lema de Borel-Cantelli nos dice que la probabilidad de que $\left|S_t^{(n)} - [B^i, B^j]_t\right|^2 > n^2\left|\mathcal{P}^{(n)}\right|$ ocurra una infinidad de veces es 0 o equivalentemente con probabilidad 1 eventualmente $\left|S_t^{(n)} - [B^i, B^j]_t\right|^2 \leq n^2\left|\mathcal{P}^{(n)}\right|$. Como $n^2\left|\mathcal{P}^{(n)}\right| \to 0$ cuando $n\to\infty$ pues por hipótesis $\left|\mathcal{P}^{(n)}\right| = o(n^{-2})$ esto implica que casi seguramente

$$S_t^{(n)}(\omega) \to [B^i, B^j]_t(\omega) = \delta_{i,j}t.$$

Basta observar que esta convergencia puntual c.s. es precisamente la definición de que la trayectoria $B(\omega)$ tiene variación cuadrática en el sentido de Föllmer a lo largo de $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ y c.s.

$$[B^i(\omega), B^j(\omega)]_t = \delta_{i,j}t.$$

$\square$

Con esto resultado podemos ver que la variación cuadrática en el sentido de Föllmer no depende de la sucesión de particiones $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ siempre y cuando $|\mathcal{P}| = o(n^{-2})$. Más aún, en este caso $[B^i(\omega), B^j(\omega)]_t = tI$ para todo $t \in [0,T]$ con probabilidad 1. Regresando a la pregunta inicial concluimos por el Teorema 3.22 que c.s.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} y'_u B_{u,v}(\omega) \otimes B_{u,v}(\omega) = \int_0^T y'_r d[B(\omega), B(\omega)]_r = \int_0^T y'_r(I)dt.$$

Con esto podemos demostar el resultado principal de la sección.

Teorema 3.26. *Definimos*

$$\mathbb{B}^{Back}_{s,t} = \int_s^t B_{s,r}\overleftarrow{dB_r} = \mathbb{B}^{Itô} + (t-s)I,$$

entonces c.s. $\mathbf{B}^{Back}(\omega) = (B(\omega), \mathbb{B}^{Back}(\omega)) \in \mathscr{C}^{\alpha-Höl}\left([0,T], \mathbb{R}^d\right)$ *para toda* $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

Más aún, si Y, Y' *son procesos estocásticos adaptados tales que c.s.* $(Y(\omega), Y'(\omega)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{B(\omega)}$ *entonces c.s. para todo* $t \in [0,T]$

$$\int_0^t Y d\mathbf{B}^{Back} = \int_0^t Y_r dB_r + \int_0^t Y'_r(I)dr = \int_0^t Y_r \circ dB_r + \frac{1}{2}\int_0^t Y'_r(I)dr.$$

Por último, si Y, Y' *son procesos estocásticos tales que c.s.* $(Y(\omega), Y'(\omega)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{B(\omega)}$ *y para todo* $t \in [0,T)$ Y_t, Y'_t *son* $\mathscr{F}^T_t = \sigma\left(\{B_{u,v} \mid t \le u \le v \le T\}\right)$ *medibles, entonces c.s. para todo* $t \in [0,T]$

$$\int_t^T Y d\mathbf{B}^{Back} = \int_t^T Y_r\overleftarrow{dB_r} \quad y \quad \int_t^T Y d\mathbf{B}^{Strat} = \int_t^T Y_r \circ \overleftarrow{dB_r}.$$

Demostración. Por el Teorema 3.8 para toda $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ se tiene que c.s. $\mathbf{B}^{\text{Itô}} = (B, \mathbb{B}^{\text{Itô}})$ es una α-Hölder trayectoria rugosa y como $t \mapsto tI$ es una función lineal, es Lipschitz y por lo tanto 2α-Hölder por lo que el Teorema 2.6 nos garantiza que c.s. $\mathbf{B}^{\text{Back}}$ es una α-Hölder trayectoria rugosa.

Sean Y, Y' procesos estocásticos adaptados tales que c.s. $(Y(\omega), Y'(\omega)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{B(\omega)}$. Por el Lema 2.20 tenemos que

$$\int_0^t Y d\mathbf{B}^{\text{Back}} = \int_0^t Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}} + \int_0^t Y'_r(I)dr$$

donde $\int_0^t Y'_r(I)dr$ es una integral (aleatoria) de Young. Más aún, por el Teorema 3.14 $\int_0^t Y d\mathbf{B}^{\text{Itô}}$ coincide con la integral estocástica de Itô y por lo tanto, por definición de la integral estocástica de Stratonovich, c.s.

$$\int_0^t Y d\mathbf{B}^{\text{Back}} = \int_0^t Y_r dB_r + \int_0^t Y'_r(I)dr = \int_0^t Y_r \circ dB_r + \frac{1}{2}\int_0^t Y'_r(I)dr.$$

Sean Y, Y' son procesos estocásticos tales que c.s. $(Y(\omega), Y'(\omega)) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_{B(\omega)}$ y para todo $t \in [0,T)$ Y_t, Y'_t son $\mathscr{F}^T_t$-medibles. Consideremos a $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una sucesión se particiones de $[t,T]$ tal que $\left|\mathcal{P}^{(n)}\right| = o(n^{-2})$. Dado que $Y'_{s,t}B_{s,t} \otimes B_{s,t} = O\left(|t-s|^{3\alpha}\right) = o(|t-s|)$ y

$Y'_{s,t}I(t-s) = O(|t-s|^{\alpha+1}) = o(|t-s|)$, entonces por el Teorema 3.24 tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_t^T Y d\mathbf{B}^{\text{Back}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v(\mathbb{B}^{\text{Back}}_{u,v} - B_{u,v}\otimes B_{u,v})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v} + (v-u)I - B_{u,v}\otimes B_{u,v})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v} + Y'_u((v-u)I - B_{u,v}\otimes B_{u,v}) + o(|v-u|)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v} + Y'_u((v-u)I - B_{u,v}\otimes B_{u,v})\right).
\end{aligned}$$

Por el Teorema 3.25 B tiene variación cuadrática en el sentido de Föllmer a lo largo de $\mathcal{P}^{(n)}$ y por el Teorema 3.22

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u B_{u,v}\otimes B_{u,v} = \int_t^T Y'_r d[B,B]_r = \int_t^T Y'_r(I)dr = \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} Y'_u(I)(v-u)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_t^T Y d\mathbf{B}^{\text{Back}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v} + Y'_u((v-u)I - B_{u,v}\otimes B_{u,v})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right) + \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} Y'_u(I)(v-u) \\
&\quad - \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} Y'_u B_{u,v}\otimes B_{u,v} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right).
\end{aligned}$$

En la demostración del Teorema 3.14 vimos, con un argumento de martingalas y suponiendo que Y' era adaptado, que c.s.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} Y'_u\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v} = 0.$$

En nuestro caso Y' no es adaptado, sin embargo por nuestra hipótesis de "adaptabilidad reversa" de Y', es decir, que Y'_s sea $\mathscr{F}^T_s$-medible, una modificación a este argumento utilizando martingalas reversas nos permitira concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} Y'_v\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v} = 0.$$

Para ver esto fijemos una partición $\mathcal{P}_n$ y supongamos que esta tiene representación $\mathcal{P}_n = \{0 = t_0 < \ldots < t_N = T\}$ para alguna $N \in \mathbb{Z}^+$. Más aún supongamos que existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{\omega\in N_5^c} |Y'(\omega)|_\infty \le M < +\infty,$$

pues en caso contrario basta utilizar el mismo argumento de localización que en el Tereoma 3.14. Recordemos que $\{S_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ es una $\{\mathscr{F}^T_{t_k}\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$-martingala reversa si tenemos una sucesión no creciente de σ-álgebras

$$\cdots \subseteq \mathscr{F}^T_{t_{k+1}} \subseteq \mathscr{F}^T_{t_k} \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}^T_{t_1},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ $S_n \in L^1$ y se cumple la propiedad de martingala reversa ,es decir,

$$\mathbb{E}\left[S_n \,\middle|\, \mathscr{F}^T_{t_{n+1}}\right] = S_{n+1}.$$

Para $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ definimos $S_0 =$ y $S_{k+1} - S_k = Y'_{t_{k+1}} \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}$. Como

$$\mathbb{E}\left[\left|Y'_{t_k}\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}\right|\right] \leq M\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}\right|\right] = M\left|t_{k+1}-t_k\right|\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|\right] < +\infty$$

por el Corolarios 3.5 y el Corolario 3.7 de lo cual se sigue la integrabilidad de $\{S_k\}_{k=0,\ldots,N}$. Más aún, por hipótesis $Y_{t_{k+1}}$ es $\mathscr{F}^T_{t_{k+1}}$-medible y como consecuencia de la independencia de los incrementos de B tenemos que $\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}$ es independiente de $\mathscr{F}^T_{t_{k+1}}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{k+1}-S_k \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{k+1}}\right] &= Y'_{t_{k+1}}\mathbb{E}\left[\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}} \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{k+1}}\right] \\
&= Y'_{t_{k+1}}\mathbb{E}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} B_{t_k,r}\otimes dB_r \,\middle|\, \mathscr{F}_{t_{k+1}}\right] \\
&= Y'_{t_k}\mathbb{E}\left[\int_{t_k}^{t_k} B_{t_k,r}\otimes dB_r\right] = 0
\end{aligned}$$

y concluimos que $\{S_k\}_{k=0,\ldots,n}$ es una martingala reversa.

Con esto obtenemos que, de manera análoga a las martingalas,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} Y'_u\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right|^2_{L^2} &= \left|\sum_{k=0}^{N-1}(S_{k+1}-S_k)\right|^2_{L^2} = \sum_{k=0}^{N-1}\left|S_{k+1}-S_k\right|^2_{L^2} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\left|Y'_{t_{k+1}}\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}\right|^2_{L^2} \leq M^2\sum_{k=0}^{N-1}\left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{t_k,t_{k+1}}\right|^2_{L^2} \\
&= M^2\sum_{k=0}^{N-1}\left|(t_{k+1}-t_k)\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|^2_{L^2} \\
&= M^2\left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|^2_{L^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left|t_{k+1}-t_k\right|^2 \\
&\leq M^2\left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|^2_{L^2}\left|\mathcal{P}_n\right|\sum_{k=0}^{N-1}\left|t_{k+1}-t_k\right| \\
&\leq M^2\left|\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{0,1}\right|^2_{L^2}\left|\mathcal{P}_n\right| T = O(\left|\mathcal{P}_n\right|)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$L^2 - \lim_{n\to\infty}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} Y'_u\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v} = 0.$$

Pasando a una subsucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ podemos considerar que esta convergencia es c.s. y como

$$\begin{aligned}
\int_t^T Y d\mathbf{B}^{\text{Back}} &= \lim_{k\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n_k)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n_k)}} Y_v X_{u,v} + \lim_{k\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n_k)}} Y'_v \mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n_k)}} Y_v X_{u,v} = \int_t^T Y_r \overleftarrow{dB_r},
\end{aligned}$$

es decir, la integral reversa de Ito coincide con la integral rugosa de $\mathbf{B}^{\text{Back}}$.

Por último, para el caso de Stratonovich basta utilizar el Teorema 3.24 para ver que

$$\begin{aligned}
\int_t^T Y d\mathbf{B}^{\text{Strat}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v (\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{u,v} - B_{u,v}\otimes B_{u,v})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v \left(\mathbb{B}^{\text{Itô}}_{u,v} + \frac{1}{2}(v-u)I - B_{u,v}\otimes B_{u,v}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \left(Y_v X_{u,v} + Y'_v (\mathbb{B}^{\text{Back}} - B_{u,v}\otimes B_{u,v})\right) \\
&\quad - \lim_{n\to\infty} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}^{(n)}} \frac{1}{2} Y'_v (v-u) I \\
&= \int_t^T Y_r d\mathbf{B}^{\text{Back}} - \frac{1}{2}\int_t^T Y'_r(I)dr = \int_t^T Y_r \overleftarrow{dB_r} - \frac{1}{2}\int_t^T Y'_r(I)dr
\end{aligned}$$

y por definición

$$\int_t^T Y d\mathbf{B}^{\text{Strat}} = \int_t^T Y_r \circ \overleftarrow{dB},$$

es decir, la integral reversa de Stratonovich y la integral rugosa de Stratonovich coinciden en este caso, sin embargo la integral estocástica de Stratonovich (no reversa) no tiene por qué existir. $\square$

Referencias

[Friz and Hairer, 2014] Friz, P. K. and Hairer, M. (2014). *A course on rough paths: with an introduction to regularity structures*. Springer.

[Friz and Victoir, 2010] Friz, P. K. and Victoir, N. B. (2010). *Multidimensional stochastic processes as rough paths: theory and applications*, volume 120. Cambridge University Press.

[Lyons and Qian, 2002] Lyons, T. and Qian, Z. (2002). *System control and rough paths*. Oxford University Press.

[Taylor et al., 1972] Taylor, S. J. et al. (1972). Exact asymptotic estimates of brownian path variation. *Duke Mathematical Journal*, 39(2):219–241.

[Warner, 2013] Warner, F. W. (2013). *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media.

Bibliografía complementaria

[Álvarez, 2015] Álvarez, M. Á. G. (2015). *Introducción a la teoría de la probabilidad I. Primer curso.* Fondo de Cultura Económica.

[Chen, 1954] Chen, K.-T. (1954). Iterated integrals and exponential homomorphisms. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):502–512.

[Garcıa Álvarez, 2005] Garcıa Álvarez, M. (2005). Introducción a la teorıa de la probabilidad. segundo curso.

[Grabinsky, 2011] Grabinsky, G. (2011). *Teoría de la medida/por Guillermo Grabinsky.* Number 515.42 G7.

[Gubinelli et al., 2015] Gubinelli, M., Imkeller, P., and Perkowski, N. (2015). Paracontrolled distributions and singular pdes. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 3. Cambridge University Press.

[Kallenberg, 2006] Kallenberg, O. (2006). *Foundations of modern probability.* Springer Science & Business Media.

[Lyons et al., 2007] Lyons, T. J., Caruana, M., and Lévy, T. (2007). *Differential equations driven by rough paths.* Springer.

[Revuz and Yor, 2013] Revuz, D. and Yor, M. (2013). *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293. Springer Science; Business Media.

[Rudin et al., 1976] Rudin, W. et al. (1976). *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York.

[Tudor, 1997] Tudor, C. (1997). *Procesos Estocásticos/por Constantin Tudor.* Number 519.2 T8.