UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONJUNTOS DOMINANTES TRANSVERSALES DE INDEPENDIENTES MÁXIMOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

EMMA LAURA GUZMAN GARCIA

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARÍA DEL ROCÍO SÁNCHEZ LÓPEZ

CIUDAD DE MÉXICO, 2019

1. Datos del alumno
Guzman
Garcia
Emma Laura
5512754154
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
311183001

2. Datos del tutor
Dra.
María del Rocío
Sánchez
López

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Hortensia
Galeana
Sánchez

4. Datos del sinodal 2
Dra. Mucuy-Kak del Carmen
Guevara
Aguirre

5. Datos del sinodal 3
Mat.
Gerardo Miguel
Tecpa
Galván

6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Germán
Benítez
Bobadilla

7. Datos del trabajo escrito
Conjuntos Dominantes Transversales
de Independientes Máximos.
110 p.
2019.

Agradecimientos

GRACIAS.
A mis amigos por acopañarme en este largo camino, en especial a mi mejor amiga que nunca dejó que me rindiera, con quien compartí este maravilloso sueño, eres única Sarahi.

A mi asesora Dra. María del Rocío que me vio crecer académicamente, por toda la paciencia y todas las cosas que aprendí al trabajar con ella. Por hacer que me enamorara de la Teoría de Gráficas.

Y sin duda a todos mis sinodales: Dra. Hortensia, Dra. Muckuy-Kak y M. en C. Germán, en especial a M. en C. Miguel Tecpa por ser tan estricto de lo contrario no hubiera aprendido tantas cosas en el tiempo que fue mi ayudante y mi sinodal.

Índice general

Introducción.

Alrededor de 1850 algunos ajedrecistas y entusiastas del ajedrez se plantearon la siguiente pregunta: ¿Cuál es el mínimo número de reinas que se deben colocar en un tablero de ajedrez de tal manera que cada casilla del tablero sea atacada u ocupada por alguna reina, considerando los movimientos naturales de la reina? (ver figura 1). En 1862 el ajedrecista Jaenisch ([6]) resolvio dicho problema. También se puede plantear dicha pregunta para otras piezas del juego de ajedrez, de igual manera podríamos cambiar el número de casillas del tablero. Varios matemáticos de la época se dedicaron a responder la pregunta anterior, cada uno con distinto enfonque, en particular se dieron cuenta que dicho problema se puede reescribir usando la teoría de gráficas como sigue:

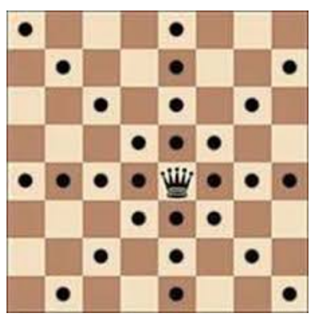

Figura 1: Movimientos posibles de una reina en el tablero de ajedrez

Se construye una gráfica G en la que cada vértice representa una casilla del tablero y hay una arista entre dos vértices si se puede llegar con un movimiento de reina entre las casillas correspondientes. En la figura 2 podemos ver todos los vértices que debe tener la gráfica y todas las posibles aristas de los vértices sombreados, ahora que tenemos una idea de como se debe construir la gráfica que necesitamos, podemos transformar el problema original en un problema de teoría de gráficas, ¿Cuál es la mínimo número de vértices de G que se necesitan para formar un conjunto S tal que cada vértice en $V(G)-S$ es adyacente a algún veŕtice en S? Llamaremos a S un *conjunto dominante* de G. Ore formalizó el concepto de conjunto dominante en el año de 1962 ([7]).

Al mínimo de las cardinalidades sobre todos los conjuntos dominantes de

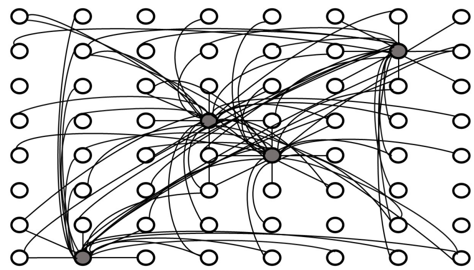

Figura 2: Construcción de la gráfica G que representa los movimientos de una reina en el tablero de ajedrez

una gráfica G se le llama número de dominación, denotado por $\gamma(G)$. Puesto que calcular exactamente el número de dominación para cualquier gráfica es algo complicado, en 1979 Garey y Johnson ([5]) probaron que dada una gráfica G encontrar un conjunto dominante de cardinalidad $\gamma(G)$ es un problema NP-duro. Se han exhibido algunas cotas inferiores y superiores para dicho número; así como el número de dominación exacto para ciertas familias de gráficas como son: trayectorias, árboles, gráficas bipartitas, etcétera.

A partir de este concepto surgieron otros tipos de conjuntos dominantes, en 1862 Jaenisch ([6]) planteó el siguiente problema ¿Cuál es el mínimo número de reinas que no se ataquen entre si que se deben colocar en un tablero de ajedrez de tal manera que cada casilla del tablero sea atacada u ocupada por alguna reina? Si hacemos el mismo análisis que se hizo para la pregunta inicial nos daremos cuenta que en realidad estamos buscando lo que más tarde se definiría como *conjunto dominante independiente* de cardinalidad mínima. El número de dominación independiente que definiremos más adelante y la notación $\imath(G)$ fueron introducidas por Cockayne and Hedetniemi en [8]y [9], en 1974 y 1977, respectivamente.

A continuación daremos otros de los conceptos relacionados con conjuntos dominantes. Un conjunto dominante S tal que $\langle S \rangle$ es conexo es llamado un conjunto *dominante conexo*. Un conjunto *dominante total* es un conjunto dominante S tal que $\langle S \rangle$ no tiene vértices aislados. La mínima cardinalidad de todos los conjuntos dominantes conexos (totales) es llamado el *número de dominación conexa (total)* y es denotado por $\gamma_c(G)$ ($\gamma_t(G)$), el desarrollo de la teoría de estos dos parámetros lo podemos encontrar en ([10],1980) y ([11],1979), respectivamente. Un subconjunto S de $V(G)$ tal que es un conjunto dominante de G y un conjunto dominante de $\bar{G}$ es llamado conjunto *dominante global* y el orden mínimo de los conjuntos dominantes globales es llamado el *número de dominación global*, denotado por $\gamma_g(G)$. El concepto de dominación global en gráficas fue introducido por Sampathkumar ([12]) en el año de 1889.

En el año 2012 el matemático hindú Ismail Sahul Hamid dio a conocer un nuevo concepto relacionado con los conjuntos dominantes; a saber, conjuntos dominantes transversales de independientes máximos. Un subconjunto S de los vértices de una gráfica G es un *conjunto dominante transversal de independientes máximos* si S es un conjunto dominante y S intersecta a cada conjunto independiente máximo de G. Con este nuevo concepto surge lo que se conoce como número de dominación transversal de independientes máximos, denotado por $\gamma_{it}(G)$, el cual es la mínima de las cardinalidades sobre todos los conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de G. En esta tesis nos dedicaremos a estudiar desde distintos enfoques el número de dominación transversal de independientes máximos. Calcularemos $\gamma_{it}(G)$ para ciertas familias de gráficas. Veremos algunas cotas y caracterizaciones para el valor $\gamma_{it}(G)$ en términos de otros parámetros importantes dentro de la teoría de gráficas, en particular dedicaremos toda una sección para estudiar a las gráficas bipartitas.

El capítulo 1 de preliminares lo dedicaremos, naturalmente, para dar las definiciones básicas y algunos lemas y teoremas sobre la teoría de dominación, los cuales necesitaremos para el desarrollo de nuestro trabajo. En el capítulo 2 de la tesis exhibiremos el número de dominación transversal de independientes máximos para algunas familias de gráficas como son: gráficas k-partitas completas, gráficas completas, gráficas bipartitas completas, estrellas, biestrellas, la corona de una gráfica G con K_1, trayectorias, ciclos, ruedas y gráficas inconexas. En el capítulo 3 caracterizaremos el valor de $\gamma_{it}(G)$ en términos del orden y el número de clan, también daremos diversas cotas en términos del orden, del número de dominación, grado mínimo de la gráfica, número de dominación independiente y número de cubierta. En el capítulo 4 estudiaremos el número de dominación transversal de independientes máximos para gráficas bipartitas y veremos como éste se relaciona con el número de dominación.

Capítulo 1

Preliminares.

En este apartado se darán algunas definiciones básicas de la teoría de gráficas que se necesitarán a lo largo de la tesis, así como algunos resultados básicos. En particular en la segunda sección exhibiremos algunos resultados relacionados con la conexidad en gráficas y algunas propiedades estructurales de árboles. En la sección tres veremos algunos resultados relacionados con conjuntos dominantes.

1.1. Definiciones básicas

Una **gráfica** G consiste de un conjunto finito no vacío $V(G)$ de objetos llamados vértices, y un conjunto $A(G)$ de pares no ordenados de distintos elementos de vértices, llamados aristas, la notación convencional para pares no ordenados es $\{u, v\}$ pero a lo largo de este texto usaremos la siguiente notación para la arista (u, v), con u y v en $V(G)$. Por ejemplo: $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ y $A(G) = \{(u, v), (u, w), (v, w), (v, x), (x, y)\}$ son los vértices y aristas correspondientes a la gráfica G.

A cada gráfica se le puede asignar una representación en el plano, para cada vértice de la gráfica asignamos un nodo(punto) en el plano y para cada arista asignaremos un segmento continuo entre los nodos correspondientes. En la figura 1.1 podemos observar la representación en el plano de la gráfica G anteriormente descrita.

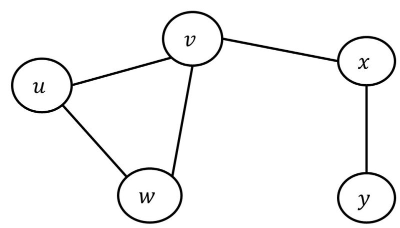

Figura 1.1: Representación geométrica de la gráfica G

Diremos que $|V(G)|$ es el **orden** de G y $|A(G)|$ el **tamaño** de G. Dados u, v en $V(G)$ y a en $A(G)$, diremos que u y v son **adyacentes** si $(u, v) \in A(G)$ y diremos que a y u son **incidentes** si $a = (u, x)$ para algún x en $V(G)$.

La **vecindad abierta** de un vértice u en $V(G)$ se define como $\{x \in V(G) : (x, u) \in A(G)\}$, denotada por $N(u)$, el conjunto de vértices adyacentes a u. La **vecindad cerrada** se define como $N(u) \cup \{u\}$, denotada por $N[u]$. El **grado** de un vértice u, denotado por $\delta(u)$, se define como $|N(u)|$. Diremos que un vértice v es un **vértice aislado** si $\delta(v) = 0$, es un **vértice final** si $\delta(v) = 1$ y es un **vértice interior** si $\delta(v) > 1$. Para la gráfica representada en la figura 1.1 se tiene que el orden es 5 y el tamaño es 5. Además notemos que el vértice u tiene grado 2 ya que $N(u) = \{v, w\}$, y por consiguiente $N[u] = \{u, v, w\}$. Por ultimo, podemos notar que G no tiene vértices aislados y todos sus vértices son vértices interiores.

Dada una gráfica G y f una pareja no ordenada que no pertenece a $A(G)$. Diremos que $G+f$ es la gráfica con $V(G+f) = V(G)$ y $A(G+f) = A(G) \cup \{f\}$. Sea e en $A(G)$. Diremos que $G - e$ es la gráfica con $V(G - e) = V(G)$ y $A(G - e) = A(G) - \{e\}$.

Sean G y H dos gráficas tales que $V(H) \cap V(G) = \emptyset$, definimos a la gráfica $G \cup H$ de tal manera que $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ y $A(G \cup H) = A(G) \cup A(H)$.

Sean G y H dos gráficas. Diremos que H es **subgráfica** de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$, en la figura 1.2 podemos observar un ejemplo de dicho concepto. Si $V(H) = V(G)$ diremos que H es una **subgráfica generadora** de G. Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$. La **subgráfica inducida** por S, denotada por $\langle S \rangle$, es la gráfica tal que $V(\langle S \rangle) = S$ y $(u, v) \in A(\langle S \rangle)$ si y sólo si $(u, v) \in A(G)$, con $\{u, v\} \subseteq S$.

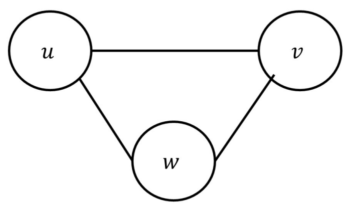

Figura 1.2: Subgráfica de G, para la gráfica G representada en la figura 1.1, generada por el conjunto $\{u, v, w\}$

El **complemento** de G, denotado por $\bar{G}$, es la gráfica tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ y $(u, v) \in A(\bar{G})$ si y sólo si $(u, v) \notin A(G)$.

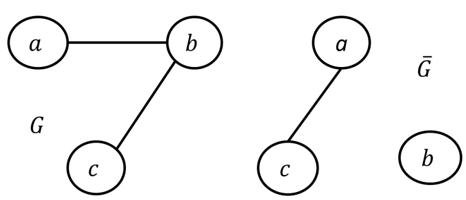

Figura 1.3: Representación de una gráfica y su complemento

Sea G una gráfica. Diremos que G es **completa** si $(u, v) \in A(G)$ para todo subconjunto $\{u, v\}$ de $V(G)$. Una gráfica completa de orden n la denotaremos por K_n. En la figura 1.4 podemos observar un ejemplo de una gráfica completa.

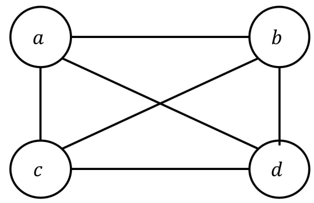

Figura 1.4: K_4

Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$. Diremos que S es un conjunto **independiente** si $A(\langle S\rangle) = \emptyset$. Una gráfica G es ***k*-partita**, con $k \geq 2$, si existe una partición de sus vértices en k conjuntos independientes, en particular si $k = 2$ diremos que G es una gráfica **bipartita**. Una gráfica G es ***k*-partita completa** si existe una partición de sus vértices en k conjuntos independientes, digamos $\{V_1, \ldots, V_k\}$, tal que para cada u en V_i y para cada v en V_j se tiene que $(u, v) \in A(G)$ para cada subconjunto $\{i, j\}$ de $\{1, \ldots, k\}$. Si tenemos que $k = 2$ se dice que G es una gráfica **bipartita completa** y si además $|V_1| = m$ y $|V_2| = n$, entonces G la denotamos por $K_{m,n}$. En el caso en el que $m = 1$ diremos que nuestra gráfica es una **estrella**. Dadas dos estrellas, $K_{1,n}$ y $K_{1,m}$ tales que $V(K_{1,n}) \cap V(K_{1,m}) = \emptyset$, definimos a la **biestrella** como la gráfica tal que tiene como vértices al conjunto $V(K_{1,n}) \cup V(K_{1,m})$ y como aristas al conjunto $A(K_{1,n}) \cup A(K_{1,m}) \cup \{(u, v)\}$, donde u es el único vértice de grado n en $K_{1,n}$ y v el único vértice de grado m en $K_{1,m}$.

Dadas las estrellas $K_{1,3}$ y $K_{1,2}$ podemos formar la siguiente biestrella en la cual se tiene que $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{v_1, v_2\}$ son conjuntos independientes (ver figura 1.5).

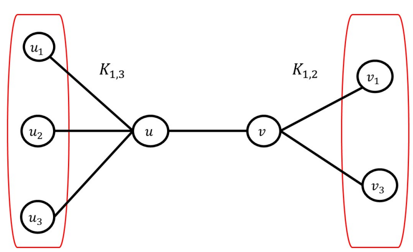

Figura 1.5: Biestrella de orden 7

Sea G una gráfica, llamaremos **cubierta por vértices** de G a un subconjunto S de $V(G)$ tal que cada arista es incidente al menos a un vértice de S, la mínima de las cardinalidades de todas las cubiertas por vértices de G es llamada el **número de cubierta**, denotado por $\alpha_0(G)$. Diremos que S es una **cubierta mínima** de G si $|S| = \alpha_0(G)$. En la gráfica de la figura 1.6 se tiene que $\{z, x, v, w\}$ es una cubierta de G pero no es mínima porque $\{x, u, v\}$ es una cubierta de cardinalidad menor y más aún $\alpha_0(G) = 3$.

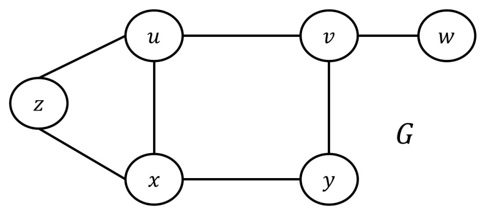

Figura 1.6: Gráfica con número de cubierta tres

A continuación calcularemos α_0 para las gráficas completas y las estrellas. Para el caso en que $n = 1$ definimos $\alpha_0(K_1) = 0$, y para el caso en que $n \geq 2$ consideremos la siguiente proposición:

Proposición 1.1.1. *Si $n \geq 2$, entonces $\alpha_0(K_n) = n - 1$.*

Demostración.
Claramente para el caso en que $n = 2$ se tiene que $\alpha_0(K_2) = 1$, por lo cual consideramos $n \geq 3$. Supongamos que $V(K_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, demostraremos que S es una cubierta por vértices de G. Como v_1 está en S, sabemos que cualquier arista de la forma (v_1, v_i) con i en $\{2, \ldots, n\}$ tiene un vértice incidente que pertenece a S; de igual manera como v_2 está en S, se tiene que cada arista de la forma (v_2, v_i) con i en $\{1, 3 \ldots, n\}$ tiene un vértice incidente que pertenece a S; así sucesivamente como v_{n-1} está en S, se tiene que cada arista de la forma (v_{n-1}, v_i) con i en $\{1, \ldots, n-2, n\}$ tiene un vértice incidente que pertenece a S, esto implica que cada arista de K_n es cubierta por S. Por lo tanto, S es una cubierta por vértices de K_n. Así, $\alpha_0(K_n) \leq |S| = n - 1$.

Ahora demostraremos que $\alpha_0(K_n) \geq n-1$. Procediendo por contradiccción, supongamos que existe una cubierta por vértices de G, digamos S_1, tal que $|S_1| < n - 1$, es decir, $|S_1| \leq n - 2$; usando lo anterior y el hecho que $n \geq 3$ se concluye que $|V(K_n) - S_1| \geq 2$. Sean x y y en $V(K_n) - S_1$, por ser K_n una gráfica completa se sigue que x y y son adyacentes, lo que implica que (x, y) es una arista de G para la cual ninguno de sus vértices incidentes pertenece a S_1, lo cual contradice el hecho que S_1 es una cubierta por vértices de G.

Por lo tanto, no existen cubiertas por vértices de cardinalidad menor a $n-1$. Así, $\alpha_0(K_n) = n - 1$.■

Proposición 1.1.2. *Si G es una estrella de orden n, entonces $\alpha_0(G) = 1$.*

Demostración.
Supongamos que

$$V(G) = \{x, v_1, \ldots, v_{n-1}\} \text{ y } A(G) = \{(x, v_i) : i \in \{1, \ldots, n-1\}\}.$$

Claramente se sigue que $\{x\}$ es una cubierta por vértices de G, con lo cual podemos concluir que $\alpha_0(G) = 1$.■

Un **clan** en una gráfica G es una subgráfica completa de G. El máximo de los ordenes de todos los clanes de G es llamado el **número de clan de** $\boldsymbol{G}$ y es denotado por $\omega(G)$. Un clan de orden $\omega(G)$ es llamado **clan máximo**. Observe que la subgráfica inducida $\langle u_1, u_2, u_3\rangle$ (ver figura 1.7) representa un clan de orden 3 y dado que no podemos encontrar un clan de orden 4 se tiene que $\omega(G) = 3$.

Si G es una gráfica con conjunto de vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces G^+ es la gráfica tal que $V(G^+) = V(G) \cup \{u_1, \ldots, u_n\}$ y
$A(G^+) = A(G) \cup \{(u_i, v_i) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. A dicha gráfica también se le conoce como la **corona de** $\boldsymbol{G}$ **con** $\boldsymbol{K_1}$.

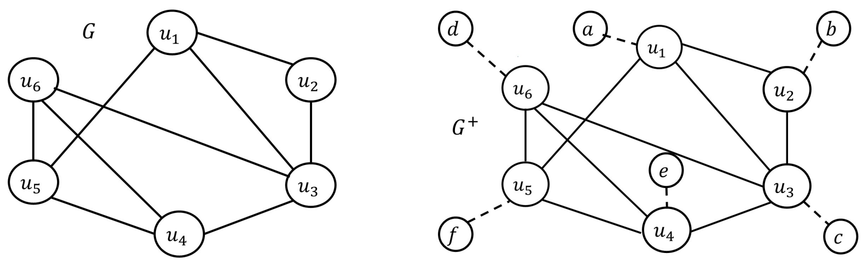

Figura 1.7: La corona de G con K_1

Sea G una gráfica. Decimos que $(v_0, \ldots, v_n)$ es un **camino** en G si $(v_i, v_{i+1}) \in A(G)$ para cada i en $\{0, \ldots, n-1\}$ y diremos que $(v_0, \ldots, v_n)$ es un v_0v_n-camino. Diremos que $(v_0, \ldots, v_n)$ es una **trayectoria** si no repite vértices, es decir, $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$ y $\{i, j\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$, de igual manera llamaremos a $(v_0, \ldots, v_n)$ una v_0v_n-trayectoria, denotaremos por P_n a la trayectoria con n vértices. Sea $\mathscr{C} = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)$ un camino, entonces al camino $(v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1, v_0)$ lo llamaremos el **converso** de $\mathscr{C}$, y lo denotaremos por $\mathscr{C}^{-1}$. Si $\mathscr{C}$ no repite aristas, es decir, si $(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$ si $i \neq j$ y $\{i, j\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$ entonces $\mathscr{C}$ es llamado **paseo**. Diremos que $\mathscr{C}$ es **cerrado** si $v_0 = v_n$. Definimos a n como la **longitud del camino**, denotada por $\ell(\mathscr{C})$.

Dado un uv-camino P y x, y dos vértices en G tales que $(x, u) \in A(G)$ y $(v, y) \in A(G)$, al camino $(x, u \ldots, v, y)$ lo denotaremos como (x, P, y). Sea P un uv-camino y Q un wz-camino tales que $(v, w) \in A(G)$, al camino $(u, \ldots, v, w, \ldots, z)$ lo denotaremos como $P \cup Q$.

Sean G una gráfica y $\{u, v\} \subseteq V(G)$. Si existe un camino entre u y v, entonces definimos la distancia entre u y v, denotado por $d(u, v)$, como $\text{mín}\{\ell(P) : P \text{ es una trayectoria entre } u \text{ y } v\}$. Llamaremos excentricidad de v, denotada por $e(v)$, a $\text{máx}\{d(v, w) : w \in V(G)\}$. Por último definimos el diámetro de G, denotado por $diam(G)$, como $\text{máx}\{e(w) : w \in V(G)\}$.

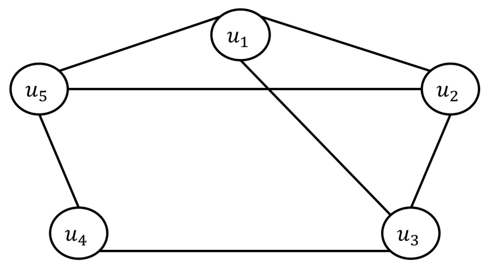

Figura 1.8: Representación geométrica de una gráfica con diámetro dos

Veamos un ejemplo, en la gráfica de la figura 1.8 se tiene que: $d(u_1, u_2) = 1$, $d(u_1, u_3) = 1$, $d(u_1, u_4) = 2$, $d(u_1, u_5) = 1$, $d(u_2, u_3) = 1$, $d(u_2, u_4) = 2$, $d(u_2, u_5) = 1$, $d(u_3, u_4) = 1$, $d(u_3, u_5) = 2$, $d(u_4, u_5) = 1$, $d(u_1, u_1) = 0$, $d(u_2, u_2) = 0$, $d(u_3, u_3) = 0$, $d(u_4, u_4) = 0$, $d(u_5, u_5) = 0$. Por lo cual se tiene que $e(u_1) = 2$, $e(u_2) = 2$, $e(u_3) = 2$, $e(u_4) = 2$ y $e(u_5) = 2$. Así, $diam(G) = 2$.

Un **ciclo** es un camino cerrado de longitud mayor o igual a 3 que no repite vértices salvo el inicial y el final, denotaremos por C_n al ciclo con n vértices. Dado un ciclo $C_{n-1} = (v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1)$ y un vértice v tal que $v \notin V(C_{n-1})$, definimos a una **rueda**, denotado por W_n, como la gráfica que tiene como vértices al conjunto $V(C_{n-1}) \cup \{v\}$ y como aristas al conjunto $A(C_{n-1}) \cup \{(v, v_i) : i \in \{1, \ldots, n-1\}\}$. En la figura 1.9 podemos observar un ejemplo de la rueda W_5.

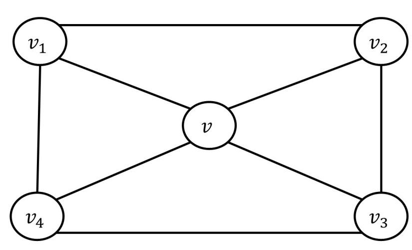

Figura 1.9: W_5

En la figura 1.10 tenemos que $\mathscr{C} = (u, w, v, u, w, v, x)$ es un camino en G, (u, v, x, y) es una trayectoria y $\mathscr{C} = (u, w, v, u)$ es un ciclo de G (en particular

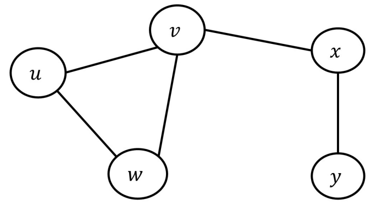

Figura 1.10: Gráfica que contiene caminos, trayectorias y ciclos

también es un paseo).

Sea G una gráfica. Diremos que G es **conexa** si para cualquier par de vértices u y v, existe al menos un camino de u a v. Si G no es conexa entonces diremos que es **inconexa**. Una **componente conexa** de G es una subgráfica conexa de G máxima por contención con dicha propiedad, denotaremos por $w(G)$ el número de componentes conexas. Diremos que G es un **árbol** si G es una gráfica conexa sin ciclos.

Un subconjunto S de $V(G)$ es un conjunto **dominante** si todo vértice en $V(G) - S$ es adyacente a un vértice de S, la mínima cardinalidad de todos los conjuntos dominantes es llamado el **número de dominación de G** y es denotado por $\gamma(G)$. Un conjunto dominante S de una gráfica G tal que $|S| = \gamma(G)$ es llamado un **γ-conjunto** de G. Un conjunto **dominante independiente** S es un conjunto dominante el cual también es independiente. El **número de dominación independiente** $\imath(G)$ es el mínimo de las cardinalidades de todos los conjuntos dominantes independientes.

El máximo de las cardinalidades de los conjuntos independientes es llamado el **número de independencia** y es denotado por $\beta_0(G)$. Un conjunto independiente I tal que $|I| = \beta_0(G)$ es llamado un **β_0-conjunto**.

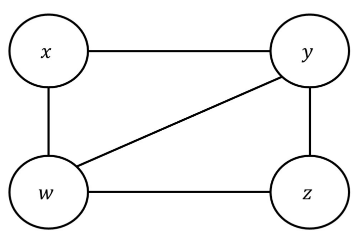

Figura 1.11: Conjuntos dominantes y conjuntos independientes

Notemos que en la figura 1.11 el conjunto S=$\{y, z\}$ es dominante pero no es mínimo ya que S_1={y} es un conjunto dominante de G tal que $|S_1| < |S|$. Por lo tanto, $\gamma(G) = 1$ y justo en este caso se cumple que S_1 es un conjunto dominante independiente por lo cual $\imath(G) = \gamma(G)$. Por último tenemos que S_2={x, z} es un conjunto independiente lo que implica que $\beta_0(G) \geq 2$, dado que nuestra gráfica solo tiene cuatro vértices, $\delta(w) = 3$ y $\delta(y) = 3$ no es posible encontrar un conjunto independiente de G con mayor cardinalidad mayor o igual a tres. Por lo tanto, $\beta_0(G) = 2$.

Sea G una gráfica. Un conjunto dominante S tal que $\langle S\rangle$ es conexo es llamado un conjunto **dominante conexo**. Un conjunto **dominante total** es un conjunto dominante S tal que $\langle S\rangle$ no tiene vértices aislados. La mínima cardinalidad de todos los conjuntos dominantes conexos (totales) es llamado el **número de dominación conexa (total)** y es denotado por $\gamma_c(G)$ ($\gamma_t(G)$). Un subconjunto S de $V(G)$ tal que S es un conjunto dominante de G y un conjunto dominante de $\bar{G}$ es llamado conjunto **dominante global** y el orden mínimo de los conjuntos dominantes globales es llamado el **número de dominación global**, denotado por $\gamma_g(G)$.

Regresando a la gráfica de la figura 1.7 notemos que R={u_3, u_4, u_5, u_6} es un conjunto dominante tanto conexo como total pero no es el de menor cardinalidad ya que R_1={u_1, u_5} también es un conjunto dominante total y dominante conexo. Podemos observar que no hay conjuntos dominantes con cardinalidad 1, lo que implica que no hay conjuntos dominantes conexos ni dominantes totales de cardinalidad 1, entonces se puede concluir que $\gamma_c(G) = \gamma_t(G) = 2$. Además, R_1 también es un conjunto dominante global, usando el análisis anterior se tiene que $\gamma_g(G) = 2$.

Sean G y H dos gráficas. Diremos que G y H son **isomorfas**, denotado por $G \cong H$, si existe una función biyectiva f tal que $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ y $(u, v) \in A(G)$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in A(H)$. Veamos un ejemplo, las gráficas de la figura 1.12 son isomorfas ya que la función $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ con regla de correspondencia $f(u) = c$, $f(v) = a$, $f(x) = b$, $f(y) = d$; es una función que cumple con las características pedidas.

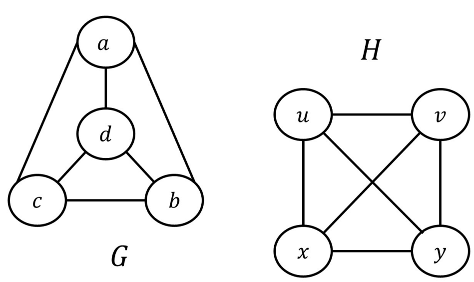

Figura 1.12: Representación geométrica de gráficas isomorfas

Sea G una gráfica conexa definimos a nG como la gráfica con n componentes

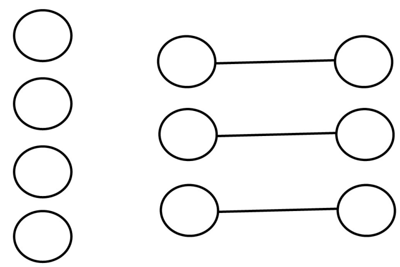

Figura 1.13: $4k_1 \cup 3K_2$

conexas, cada componente conexa isomorfa a G. En general, dada una gráfica G se puede representar como $\bigcup_i n_i G_i$ con $G_i \neq G_j$ para cada $i \neq j$. Por ejemplo para la gráfica inconexa de la figura 1.13 su representación es $4k_1 \cup 3K_2$.

1.2. Gráficas conexas

A lo largo de este trabajo vamos a necesitar los siguientes teoremas.

Teorema 1.2.1. *Sean G una gráfica conexa y $\mathscr{C}$ un ciclo en G. Si a es una arista de $\mathscr{C}$, entonces $G - a$ es conexa.*

Demostración.
Demostraremos que para cualesquiera dos vértices de $G - a$ existe un camino entre ellos en $G - a$. Sean u y v dos vértices de $G - a$ y supongamos que $a = (x, y)$. Como $V(G) = V(G - a)$, entonces u y v también son vértices de G, puesto que G es conexa, se sigue que existe una trayectoria de u a v en G digamos P. Si a no es una arista en P, entonces P es una trayectoria entre u y v en $G-a$. Ahora, si a es una arista en P. Supongamos sin pérdida de generalidad que x aparece antes que y en P, más aún, $\mathscr{C}$ empieza en x y termina en y. Así, $(u, P, x) \cup (x, \mathscr{C}, y) \cup (y, P, v)$ es un camino entre u y v en $G - a$. Por lo tanto, $G - a$ es conexa.■

De la definición de trayectoria es claro que una trayectoria en particular es un camino, además es claro que un camino no siempre es una trayectoria por lo cual demostraremos el siguiente resultado.

Lema 1.2.2. *Si C es un u_0u_n-camino tal que $u_0 \neq u_n$, entonces C tiene una u_0u_n-trayectoria.*

Demostración.
La prueba la realizaremos por inducción sobre $\ell(C)$. Cuando $\ell(C) = 1$ se sigue que $C = (u_0, u_1)$, con lo cual se tiene que C es la u_0u_n-trayectoria buscada, en el caso en que $\ell(C) = 2$ se tiene que $C = K_2$ ya que $C = (u_o, u_i, u_2)$ por lo cual C es la u_0u_n-trayectoria. Ahora que ya analizamos los casos en que $\ell(C) = 1$

y $\ell(C) = 2$, supongamos que si C' es un xy-camino de longitud menor que n, entonces C' contiene una xy-trayectoria.

Sea C un u_0u_n-camino de longitud n. Consideremos dos posibles casos respecto a los vértices de C.

Caso 1. $u_i \neq u_j$ para cada $i \neq j$ y $\{i, j\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$.

En este caso es claro que C cumple la definición de trayectoria, por lo cual C es la u_0u_n-trayectoria que necesitabamos.

Caso 2. Existen u_i y u_j en $V(C)$ tales que $u_i = u_j$ con $\{i, j\} \subset \{0, \ldots, n\}$ e $i \neq j$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, por lo cual $C' = (u_0, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n)$ es un u_0u_n-camino de longitud menor que n entonces C' contiene una u_0u_n-trayectoria. Notemos que C' está contenido en C, de lo que se sigue que P se queda contenida en C. Por lo tanto, P es la u_0u_n -trayectoria buscada.

Por el análisis de ambos casos podemos concluir que si C es un u_0u_n-camino tal que $u_0 \neq u_n$, entonces C tiene una u_0u_n-trayectoria.■

Lema 1.2.3. *Si G es una gráfica conexa y a una arista que no está en ningún ciclo de G, entonces $G - a$ es inconexa y $w(G - a) = 2$.*

Demostración.

Supongamos que $a = (x, y)$ para algunos x y y en $V(G)$. Sabemos que la arista a es una trayectoria de x a y en G. Afirmamos que toda trayectoria en G entre x y y pasa por a. Supongamos que existe una trayectoria entre x y y que no pasa por a, digamos P_1, entonces $(y, x) \cup P_1$ es un ciclo de G que contiene a a, lo cual es una contradicción. Por lo cual toda trayectoria entre x y y pasa por a en G, por lo anterior y el lema 1.2.2 se tiene que en $G - a$ no existe un camino entre x y y, es decir, $G - a$ no es conexa. Ahora veamos que $w(G - a) = 2$, procediendo por contradicción supongamos que $G - a$ tiene al menos 3 componentes conexas, digamos G_1, G_2, G_3. Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad que x pertenece a G_1 y y pertenece a G_2, sean u y v vértices en G_1 y G_2, respectivamente sabemos que G_1 es una componente conexa en $G - a$ por lo cual existen un camino de u a x, digamos C_a, es claro que C_u también es un ux-camino en G de igual manera existen un yv-camino en $G - a$, digamos C_v, y C_v es un yv-camino en G. Notemos que (C_u, a, C_u) es uv-camino en G, lo que implica que $\langle V(G_1) \cup V(G_2) \rangle$ es una gráfica conexa. Ahora si tomamos un vértice w en G_3 y un vértice z en $G_1 \cup G_2$, sabemos que no existen caminos entre w y z en $G - a$ y dado que $w \notin \{x, y\}$, entones en G no existen caminos entre w y z lo cual no es posible ya que G es conexa. Por lo tanto, $w(G - a) = 2$.■

Teorema 1.2.4. *Si G es una gráfica conexa, entonces G contiene un árbol generador.*

Demostración.

Haremos la prueba por inducción sobre $|A(G)|$, considerando $|A(G)| = q$. Notemos que las únicas gráficas con 0 y 1 aristas son K_1 y K_2, respectivamente, y dichas gráficas son árboles. Ahora supongamos que cualquier gráfica conexa G' con menos de q aristas contiene un árbol generador.

Sea G una gráfica conexa con q aristas. Si G no contiene ciclos, entonces G es el árbol buscado. Supongamos que G tiene al menos un ciclo y sea a una arista de G que pertenece a algún ciclo de G. Consideramos $G - a$ que por el teorema 1.2.1 es una gráfica conexa con menos de q aristas, entonces por la hipótesis de inducción $G - a$ contiene un árbol generador, pero dicho árbol generador también es un árbol generador de G.■

Teorema 1.2.5. *Si T es un árbol con al menos dos vértices, entonces T tiene al menos dos vértices finales.*

Demostración.
Sea $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ una trayectoria de longitud máxima en T. A continuación demostraremos que $\delta(v_0) = 1$ y $\delta(v_n) = 1$.

Procediendo por contradicción, consideramos $\delta(v_0) \geq 2$ o $\delta(v_n) \geq 2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\delta(v_n) \geq 2$, lo que implica que existe w en $V(T) - \{v_{n-1}\}$ tal que $(v_n, w) \in A(T)$. Notemos que $w \neq v_i$ para cada i en $\{0, \ldots, n-2\}$, de lo contrario se formaria el ciclo $C = (v_i, P, v_n) \cup (v_n, v_i)$, lo cual contradice el hecho que T es un árbol. Por lo tanto, $w \notin V(P)$ de lo cual se sigue que $P \cup (v_n, w)$ es una trayectoria de T de longitud mayor a la longitud de P, lo cual es una contradicción. Así, $\delta(v_0) = 1$ y $\delta(v_n) = 1$.

Por lo tanto, v_0 y v_1 son los vértices finales buscados.■

Teorema 1.2.6. *Sea G una gráfica. G es conexa si y sólo si para cualquier $\{V_1, V_2\}$ partición de $V(G)$ existe una V_1V_2-arista.*

Demostración.
Primero demostraremos la condición suficiente para lo cual, supongamos que G es conexa. Sea $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(G)$, entonces sabemos que V_1 y V_2 son conjuntos no vacíos. Sean u en V_1 y v en V_2, como G es conexa sabemos que existe una uv-trayectoria, digamos $(u = v_1, \ldots, v_n = v)$. Sea v_i el último vértice de la trayectoria que pertenece a V_1 (v_i existe ya que u pertenece a V_1), es claro que v_{i+1} pertenece a V_2 (por elección de v_i y además v_{i+1} existe ya que v pertenece a V_2). Por lo tanto, (v_i, v_{i+1}) es una V_1V_2-arista.

Ahora para demostrar la condición necesaria, supongamos que para cualquier $\{V_1, V_2\}$ partición de $V(G)$ existe una V_1V_2-arista. Demostraremos que para todo u y v en $V(G)$ existe un uv-camino.

Sean u y v en $V(G)$ y $B_1 = \{w \in V(G) : existe\ un\ uw - camino\ en\ G\}$. Notemos que u está en B_1 ya que podemos considerar el uu-camino.

Afirmación. $v \in B_1$
Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que v no pertenece a B_1. Sea $B_2 = V(G) - B_1$, entonces $v \in B_2$. Es claro que $B_1 \cup B_2 = V(G)$

y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ por lo cual $\{B_1, B_2\}$ es una partición de $V(G)$, aplicando la hipótesis se tiene que existen x en B_1 y y en B_2 tales que $(x, y) \in A(G)$. Ahora como x en B_1 sabemos que existe un ux-camino en G, digamos C. Así, $C \cup (x, y)$ es un uy-camino en G, lo que implica que $y \in B_1$ pero esto no es posible ya que $\{B_1, B_2\}$ es una partición de $V(G)$. Por lo tanto, $v \in B_1$.

Por la afirmación que acabamos de demostrar se tiene que existe un uv-camino en G, por lo cual queda demostrado que para cualesquiera u y v en $V(G)$ existe un uv-camino, es decir, G es conexa.■

Lema 1.2.7. *Si P_1 y P_2 son dos xy-trayectorias distintas de una gráfica G, entonces $P_1 \cup P_2$ contiene un ciclo.*

Demostración.

Sean G una gráfica y P_1 y P_2 dos xy-trayectorias distintas de G. Consideraremos dos casos:

Caso 1.$V(P_1) = V(P_2)$.

Como P_1 y P_2 son dos xy-trayectorias distintas, entonces existe una arista que está en una de las trayectorias pero no en la otra. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a = (u, v)$ pertenece a P_2 pero no a P_1. Como $V(P_1) = V(P_2)$ y a no pertenece a P_1 entonces los vértices u y v no son consecutivos en P_1 (supongamos sin pérdida de generalidad que u aparece antes que v en P_1). Por consiguiente $(u, P_1, v) \cup a$ es un ciclo en $P_1 \cup P_2$ (ver figura 1.14).

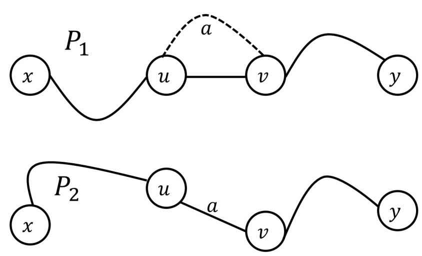

Figura 1.14: Caso 1

Caso 2. $V(P_1) \neq V(P_2)$.

En este caso existe un vértice z que pertenece a uno de los conjuntos pero al otro no. Supongamos sin pérdida de generalidad que z no pertenece a $V(P_2)$. Sean w el primer vértice de P_1 que no pertenece a P_2 (existe ya que x pertenece a P_1 y z no pertenece a P_2) y t en $V(P_1)$ tal que $(t, w) \in A(P_1)$, y t pertenece a $V(P_2)$ ($\delta(w)_{P_1} = 2$). Sean r el primer vértice de (w, P_1, y) que pertenece a P_2 (r existe ya que w no pertenece a P_2 y y pertenece a P_2) y s en $V(w, P_1, y)$ tal que $(s, r) \in A((w, P_1, y))$, y s no pertenece a $V(P_2)$ (ver figura 1.15), de lo cual se sigue que $V((w, P_1, s)) \cap V(P_2) = \emptyset$.

Si r aparece antes que t en P_2, entonces por lo anterior se tiene que $(t, w) \cup (w, P_1, s) \cup (s, r) \cup (r, P_2, t)$ es un ciclo en $P_1 \cup P_2$. Si r aparece después que

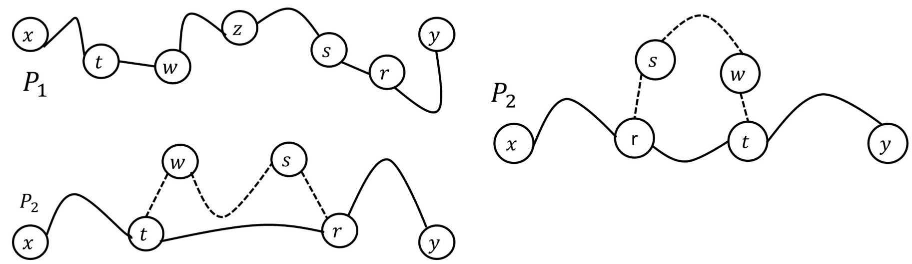

Figura 1.15: Caso 2

t en P_2, entonces por lo anterior se tiene que $(t,w)\cup(w,P_1,s)\cup(s,r)\cup(r,P_2^{-1},t)$ es un ciclo en $P_1 \cup P_2$.

Por lo tanto, $P_1 \cup P_2$ contiene un ciclo.■

Teorema 1.2.8. *Si T es un árbol, entonces $T+f$ tiene un único ciclo para toda arista f tal que $f \notin A(T)$.*

Demostración.

Supongamos que $f=(x,y)$, para algún $\{x,y\} \subseteq V(T)$, tal que $f \notin A(T)$. Como T es conexa, entonces existe una trayectoria de x a y, digamos P, notemos que f no pertenece a $A(P)$ lo que implica que P también es una trayectoria en $T+f$. Por lo tanto, $P \cup (y,x)$ es un ciclo en $T+f$. Supongamos que existe otro ciclo $\mathscr{C}_1$ en $T+f$. Notemos que $\mathscr{C}_1$ contiene a f ya que de lo contrario $\mathscr{C}_1$ es un ciclo en T, lo cual no es posible ya que T es árbol. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathscr{C}_1$ comienza en x y su penúltimo vértice es y. Observemos que $P'=(x,\mathscr{C}_1,y)$ y P son dos xy-trayectorias distintas en T, entonces por el lema 1.2.7 $P \cup P'$ contiene un ciclo, lo cual es una contradicción ya que T es árbol.

Por lo tanto, $T+f$ tiene un único ciclo y dicho ciclo contiene a f.■

1.3. Conjuntos dominantes en gráficas

Teorema 1.3.1. *Si G es una gráfica de orden n que no tiene vértices aislados, entonces $\gamma(G) \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Demostración.

Sea S un γ-conjunto en G. Probaremos que $V(G)-S$ también es un conjunto dominante en G.

Supongamos que existe un vértice u que pertenece a S tal que no es dominado por ninguno de los vértices de $V(G)-S$. Como G no tiene vértices aislados, entonces u tiene que ser adyacente a alguno de los vértices de $S-\{u\}$. Dado que S es un conjunto dominante, entonces los vértices de $V(G)-S$ deben ser dominados por $S-\{u\}$, lo que implica que cada vértice en $V(G)\cap\{u\}$ es adyacente a algún vértice en $S-\{u\}$. Por lo tanto, $S-\{u\}$ es un conjunto dominante, lo cual contradice que S es un γ-conjunto. Concluyendo S es dominado por $V(G)-S$, es decir, $V(G)-S$ es un conjunto dominante.

Ahora usando esto tenemos dos casos: si $|S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Si $|V(G)-S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, entonces por lo que acabamos de demostrar sabemos que $V(G) - S$ también es un conjunto dominante, lo que implica que $\gamma(G) \leqslant |V(G)-S|$. Así, $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. ■

Corolario 1.3.2. *([2]) Si G es una gráfica conexa no trivial de orden n, entonces $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.*

Demostración.

Como G es una gráfica conexa, entonces G no tiene vértices aislados y aplicando el teorema 1.3.1 podemos concluir que $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. ■

Lema 1.3.3. *([2]) Si G es una gráfica conexa con $|A(G)| \geq 2$ y sea $X = \{v \in V(G) : \delta(v) = 1\}$, entonces $\gamma(G) \geq |N(X)|$.*

Demostración.

Note que X es un conjunto independiente ya que al menos tenemos 3 vértices y G es conexa. Sea S un γ-conjunto.

Afirmación. Existe un γ-conjunto S_1 tal que $S_1 \cap X = \emptyset$.

Procediendo por contradicción supongamos que cualquier γ-conjunto B satisface que $B \cap X \neq \emptyset$. Sean S un γ-conjunto y u en $S \cap X$, si existe v en S tal que $(u, v) \in A(G)$, entonces $S - \{u\}$ seria un conjunto dominante (ya que $\delta(u) = 1$) de cardinalidad menor a S, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $N(X) \cap S = \emptyset$. Supongamos que $S \cap X = \{u_1, \ldots, u_k\}$ y sean $v_1, \ldots, v_k$ sus respectivos vecinos, entonces $[S - (S \cap X)] \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$ es un conjunto dominante ya que cualquier vértice en $S - (N(X) \cup X)$ es adyacente a un vértice de $S - (S \cap X)$ (X es el conjunto de vértices de grado 1 y S es un conjunto dominante). Notemos que $v_i \neq v_j$ para toda i distinta de j, ya que de lo contrario $|[S - (S \cap X)] \cup \{v_1, \ldots, v_k\}| < \gamma(G)$, lo cual no es posible. Por lo tanto, podemos asegurar que $|[S - (S \cap X)] \cup \{v_1, \ldots, v_k\}| = \gamma(G)$, es decir, $S - (S \cap X)] \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$ es un γ-conjunto de G. Claramente $([S - (S \cap X)] \cup \{v_1, \ldots, v_k\}) \cap X = \emptyset$ lo cual no es posible. Por lo tanto, existe un γ-conjunto S_1 tal que $S_1 \cap X = \emptyset$.

Por la afirmación anterior podemos asegurar que existe un γ-conjunto S_1 tal que $N(X) \subseteq S_1$, con lo cual se tiene que $|N(X)| \leq |S_1|$. Por lo tanto, $|N(X)| \leq \gamma(G)$.■

Lema 1.3.4. *([2]) Si H es una subgráfica generadora de G, entonces $\gamma(H) \geq \gamma(G)$.*

Demostración.

Sea S un conjunto dominante de$H$ por definición de subgráfica generadora sabemos que $V(H) = V(G)$ lo que implica que $S \subseteq V(G)$ y

$V(G) - S = V(H) - S$. Sea tomamos x un vértice en $V(G) - S$, como S es un conjunto dominante en H entonces existe y en S tal que (x, y) pertenece a $A(H)$, dado que $A(H) \subseteq A(G)$ se sigue que y es un vértice en S tal que (x, y) pertenece a $A(G)$. Por lo tanto, S es un conjunto dominante de G y por consiguiente cada conjunto dominante de H es un conjunto dominante de G, en particular si tenemos un conjunto dominante de cardinalidad $\gamma(H)$, entonces $\gamma(H) \geq \gamma(G)$.■

Teorema 1.3.5. *([2]) Un árbol T con $2n$ vértices cumple que $\gamma(T) = n$ si y sólo si cada vértice interior de T es adyacente a exactamente un vértice final.*

Demostración.

Para $n = 1$. Sea T un árbol con dos vértices tal que $\gamma(T) = 1$. Dado que $\gamma(T) = 1$ se sigue que existe un vértice que es adyacente a todos los vértices restantes pero recordemos que T sólo tiene dos vértices por lo cual ambos vértices son vértices finales, es decir, T no tiene vértices finales entonces se cumple por vacuidad que cada vértice interior es adyacente a exactamente un vértice final. Ahora, sea T un árbol con dos vértices tal que cada vértice interior de T es adyacente a exactamente un vértice final, notemos que P_2 es el único árbol que cumple con dichas hipótesis es P_2, lo que implica que $T = P_2$. Por lo tanto $\gamma(T) = 1$.

Dado que ya demostramos que se cumple el teorema para el caso en que $n = 1$, supongamos que $n > 1$.

Primero demostraremos la condición necesaria. Sea T un árbol en el que cada vértice interior es adyacente a exactamente un vérice final, esto implica que T contiene el mismo número de vértices interiores y vértices finales, es decir, T contiene n vértices interiores y n vértices finales. Aplicando el lema 1.3.3 se tiene que $\gamma(T) \geq n$ y por el corolario 1.3.2 sabemos que $\gamma(T) \leq n$. Por lo tanto, $\gamma(T) = n$.

Para demostrar la condición suficiente procederemos por contrapuesta. Sea T un árbol de orden $2n$ para el cual existe un vértice interior, digamos u, que no es adyacente a exactamente un vértice final. Demostraremos que $\gamma(T) \neq n$. Se tienen dos casos:

Caso 1.u es adyacente a más de un vértice final.

Llamemos H a la gráfica obtenida de T a partir de quitar al vértice u y todos los vértices finales adyacentes a u. Como u es adyacente a más de un vértice final, entonces $|V(H)| \leq 2n-3$. Notemos que H no tiene vértices aislados ya que cada vértice interior adyacente a u induce una componente conexa no trivial. Entonces, aplicando el teorema 1.3.1 se tiene que $\gamma(H) \leq \lfloor \frac{2n-3}{2} \rfloor = n - 2$, es decir, $\gamma(H) \leq n - 2$. Sea S un γ-conjunto de H, en T se cumple que $S \cup \{u\}$ es un conjunto dominante ya que u domina a los vértices finales adyacentes a el y S por elección domina a $V(H) - S$. Dado que $|S \cup \{u\}| \leq n - 2 + 1 = n - 1$, podemos concluir que $\gamma(T) \leq n - 1$.

Caso 2. u no es adyacente a ningún vértice final.

Es claro que $T-u$ no tiene componentes conexas triviales, y al menos una de ellas es de orden impar ya que T es de orden par. Sea T_1 una de estas componentes. Dado que T es conexo, entonces existe un vértice v de T_1 tal que $(u,v) \in A(T)$, supongamos que existe otro vértice w de T_1 tal que $(u,w) \in A(T)$, pero por ser T_1 una componente conexa sabemos que existe una trayectoria P de v a w, con lo cual se formaria el ciclo $(u,v) \cup (v,P,w) \cup (w,u)$ en T, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existe otro vértice de T_1 adyacente a u. Llamemos e a la arista (u,v). Por el lema 1.2.3, $T-e$ tiene dos componente conexas, a saber una de ellas T_1 y T_2 la otra componente conexa. Notemos que ambas son no triviales ya que u no es adyacente a vértices finales y T_2 es de orden impar ya que T_1 es de orden impar y T de orden par.

Por otro lado, por el lema 1.3.4 tenemos que $\gamma(T) \leq \gamma(T-e)$. Ahora calcularemos $\gamma(T-e)$.

Afirmación. $\gamma(T-e) = \gamma(T_1) + \gamma(T_2)$.

Sean S_1 un γ-conjunto de T_1 y S_2 un γ-conjunto de T_2, tomamos el conjunto $S_1 \cup S_2$ el cual es dominante en $T-e$ y $|S_1 \cup S_2| = \gamma(T_1) + \gamma(T_2)$ (porque $S_1 \cap S_2 = \emptyset$) con lo cual se tiene que $\gamma(T-e) \leq \gamma(T_1) + \gamma(T_2)$. Además, no es posible encontrar un conjunto dominante en $T-e$ de cardinalidad menor. Supongamos que existe un conjunto dominante de $T-e$, digamos S, tal que $|S| < \gamma(T_1) + \gamma(T_2)$. Como $S = [S \cap V(T_1)] \cup [S \cap V(T_2)]$ y $[S \cap V(T_1)] \cap [S \cap V(T_2)] = \emptyset$, podemos concluir que $|S \cap V(T_1)| < \gamma(T_1)$ o $|S \cap V(T_2)| < \gamma(T_2)$. Por otro lado, notemos que $S \cap V(T_1)$ y $S \cap V(T_2)$ son conjuntos dominantes de T_1 y T_2, respectivamente, ya que S es un conjunto dominante de $T-e$ y $V(T_1) \cap V(T_2) = \emptyset$, entonces $|S \cap V(T_1)| \geq \gamma(T_1)$ y $|S \cap V(T_2)| \geq \gamma(T_2)$, lo cual en ambos casos es una contradicción a lo visto anteriormente. Por lo tanto, $\gamma(T-e) = \gamma(T_1) + \gamma(T_2)$.

Por lo que acabamos de ver se tiene que $\gamma(T) \leq \gamma(T_1) + \gamma(T_2)$, pero aplicando la afirmación 1 a T_1 y T_2 tenemos que $\gamma(T_1) \leq \lfloor \frac{|V(T_1)|}{2} \rfloor$ y $\gamma(T_2) \leq \lfloor \frac{|V(T_2)|}{2} \rfloor$, entonces $\gamma(T) \leq \lfloor \frac{|V(T_1)|}{2} \rfloor + \lfloor \frac{|V(T_2)|}{2} \rfloor$. Además, sabemos que $|V(T_1)| = 2k+1$ y $|V(T_2)| = 2m+1$ para algún k y m enteros; por un lado tenemos que $\lfloor \frac{|V(T_1)|}{2} \rfloor = k$ y $\lfloor \frac{|V(T_2)|}{2} \rfloor = m$, lo que implica que $\lfloor \frac{|V(T_1)|}{2} \rfloor + \lfloor \frac{|V(T_2)|}{2} \rfloor = k+m$. Por otro lado, tenemos que $(2k+1)+(2m+1) = 2n$, despejando se tiene que $n-1 = k+m$. Por lo tanto, $\lfloor \frac{|V(T_1)|}{2} \rfloor + \lfloor \frac{|V(T_2)|}{2} \rfloor = n-1$. Asi, $\gamma(T) \leq n-1$.

Con lo que acabamos de ver en ambos casos, T no puede tener número de dominación igual a n. Por lo tanto, cualquier árbol con orden $2n$ y número de dominacíon n cumple que cada vértice interior es adyacente a exactamente un vértice final.■

Teorema 1.3.6. *([2]) Sea G una gráfica conexa de orden $2n$ y $\gamma(G) = n$ para $n \geq 3$. Si T es un árbol generador de G, entonces cada vértice final de T es también un vértice final de G.*

Demostración.

Sean G una gráfica conexa de orden $2n$, $\gamma(G) = n$ para $n \geq 3$ y T^* un árbol generador de G. Por el lema 1.3.4 se tiene que $\gamma(T^*) \geq \gamma(G) = n$, es decir, $\gamma(T^*) \geq n$ y por el corolario 1.3.2 (ya que T^* es conexo y tiene orden $2n$) tenemos que $\gamma(T^*) \leq n$, con lo cual se puede concluir que $\gamma(T^*) = n$. Por lo tanto, hemos demostrado que todo árbol generador de G tiene número de dominación n y aplicando el teorema 1.3.5 se tiene que cada vértice interior de T^* es adyacente a exactamente un vértice final de T^*.

Sean D el conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de vértices interiores y E el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vértices finales de T, supongamos que $e_i = (u_i, v_i) \in A(T)$ para cada i en $\{1, \ldots, n\}$. Notemos que D es un conjunto dominante tanto de T como de G (cada conjunto dominante de T es un conjunto dominante de G).

Ahora demostraremos el teorema 1.3.6. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un vértice final de T que no es vértice final de G, digamos v_1. Entonces, existe un vértice $w \neq u_1$ que es adyacente en G a v_1, denotamos por f a (w, v_1). Conideraremos los siguientes casos:

Caso 1. $w \in D$.

Como $w \in D$, entonces $w = u_j$ para algún j en $\{2, \ldots, n\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $j = 2$. Consideremos la gráfica $T' = T - e_1 + f$. Notemos que la gŕafica $T + f$ tiene un único ciclo $\mathscr{C}$, esto por el teorema 1.2.8, y f es una arista en $\mathscr{C}$. Como el vértice v_1 es un vértice final en T, entonces $e_1 \in A(\mathscr{C})$. Luego por el teorema 1.2.1 $T' = T - e_1 + f$ es una gráfica conexa, y no tiene ciclos ya que $\mathscr{C}$ era único en $T + f$. Por lo tanto, T' es un árbol generador de G y por consiguiente $\gamma(T') = n$. Sin embargo, en T' el vértice w es adyacente a los vértices v_1 y v_2, es decir, en T' existe un vértice interior que no es adyacente a exactamente un vértice final, lo cual es una contradicción al teorema 1.3.5.

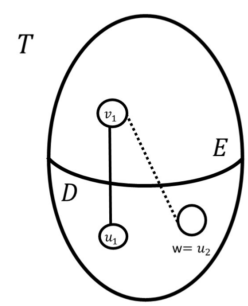

Figura 1.16: Caso 1

Caso 2. $w \in E$.

En este caso existe $j \neq 1$, supongamos sin pérdida de generalidad que $j = 2$ por lo cual $w = v_2$. Ahora consideraremos los siguientes subcasos:

Caso 2.1. u_1 no es adyacente a u_2 en T.

Recordemos que D es un conjunto dominante en G lo que implica que todo vértice en $E - \{v_1, w\}$ es dominado por un vértice de $D - \{u_1, u_2\}$, y dado $(w, v_1) \in A(G)$ se tiene que v_1 domina a w. Por otro lado, como u_1 y u_2 son vértices interiores y no son adyacentes entre si, entonces cada uno es adyacentes a al menos otro vértice interior en T (en T se cumple el teorema 1.3.5), sabemos que dichas adyacencias se conservan en G lo que implica que u_1 y u_2 son dominados en G por al menos un vértice de $D - \{u_1, u_2\}$. Por lo tanto, se concluye que $(D - \{u_1, u_2\}) \cup \{v_1\}$ es un conjunto dominante de G, es claro que $(D - \{u_1, u_2\}) \cup \{v_1\}$ tiene cardinalidad $n - 1$ lo cual no es posible ya que $\gamma(G) = n$.

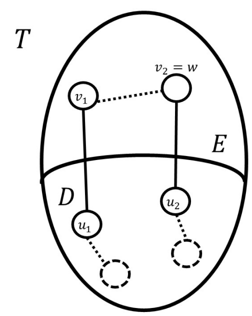

Figura 1.17: Caso 2

Caso 2.2. u_1 adyacente a u_2 en T.

Afirmación. Existe un vértice u en $D - \{u_1, u_2\}$ que debe ser adyacente a u_1 o u_2 en T.

Sean $V_1 = \{v_1, w, u_1, u_2\}$ y $V_2 = V(T) - V_1$, notemos que $V_1 \neq \emptyset$ y $V_2 \neq \emptyset$ ya que $2n \geq 6$, además se tiene que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(T)$. Por lo tanto, $\{V_1, V_2\}$ una partición de $V(T)$, entonces por el teorema 1.3.5 existe al menos una arista entre V_1 y V_2. Dado que $\{v_1, w\} \subseteq E$ sabemos que v_1 y w no pueden ser adyacentes a ningún vértice de V_2, además por lo visto al principio de la demostración sabemos que para T se cumple el teorema 1.3.6 lo que implica que u_1 y u_2 no puedes ser adyacentes a ningún vértice de $E - \{v_1, w\}$. Por lo tanto, existe un vértice en $D - \{u_1, u_2\}$, digamos u, que es adyacente a u_1 o u_2.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $u = u_3$ y que u_2 es adyacente a u_3 en T. Consideramos la gráfica $T'' = T - (u_2, v_2) + (v_1, v_2)$. Haciendo el mismo análisis que en el caso anterior tenemos que T'' es un árbol generador de G, por lo que $\gamma(T'') = n$ y por consiguiente cumple el teorema 1.3.5. Sin embargo, por la construcción de T'' éste contiene dos vértices interiores, u_1 y u_2, que no son adyacentes a ningún vértice final de T'' lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, no es posible que exista un vértice final de T que no sea vértice final de G. Con lo que queda demostrado el teorema.■

Teorema 1.3.7. *([2])En una gráfica conexa G de orden $2n$, $\gamma(G) = n$ si y sólo si $G = C_4$ o $G = H^+$ para alguna gráfica conexa H.*

Demostración.

Para demostrar la condición necesaria, primero demostraremos la siguiente afirmación.

Afirmación. $\gamma(C_4) = 2$ y $\gamma(P_4) = 2$.

Veamos que $\gamma(C_4) = 2$, supongamos que $C_4 = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ entonces $S = \{v_0, v_2\}$ es un conjunto dominante, y no es posible encontrar un conjunto dominante de cardinalidad 1 (ver figura 1.18). Por lo tanto, $\gamma(C_4) = 2$. Ahora supongamos que $V(P_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ entonces $\{v_1, v_4\}$ es un conjunto dominante y de igual manera no es posible encontrar un conjunto dominante de cardinalidad menor (ver figura 1.18). Por lo tanto, $\gamma(P_4) = 2$.

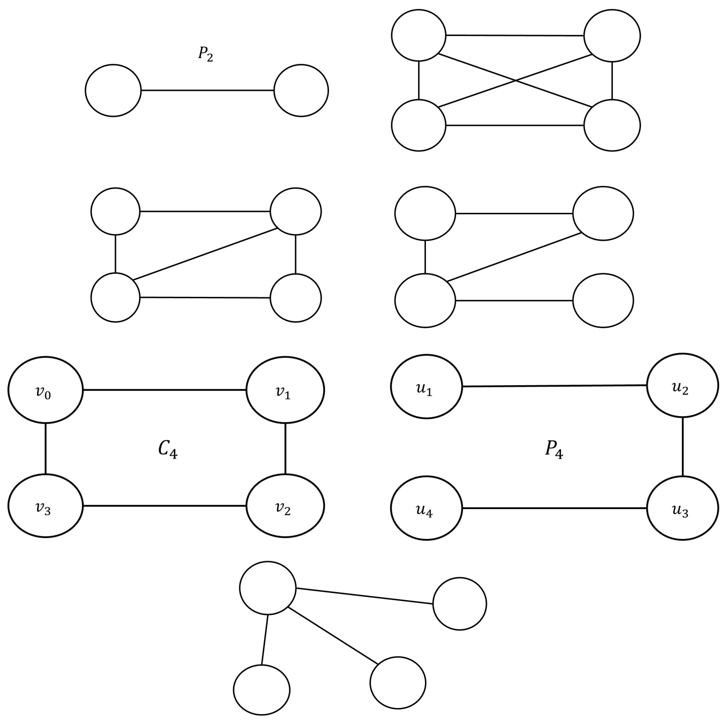

Figura 1.18: Gráficas conexas de orden dos y cuatro

Por la afirmación anterior, si $G = C_4$ se cumple que $\gamma(G) = 2 = n$. Notemos que las únicas gráficas conexas de uno y dos vértices son K_1 y K_2, respectivamente, en el caso en que $H = K_1$ se tiene que $G = H^+ = P_2$, es claro que G es una gráfica conexa de orden dos y $\gamma(P_2) = 1$. En el caso en que $H = K_2$ se tiene que $G = H^+ = P_4$, es claro que G es una gráfica conexa de orden cuatro y por la afirmación demostrada se sigue que $\gamma(P_4) = 2$. Dado que ya se demostro la condición necesaria para el caso en que $2n = 2$ y $2n = 4$, entonces consideramos $n \geq 3$.

Supongamos que G es una gráfica conexa de orden $2n$ y que cumple que $G = H^+$ para alguna gráfica conexa H de orden n. Demostraremos que

$\gamma(G) = n$. Notemos que $V(H)$ es un conjunto dominante en G por definición de H^+, por lo tanto $\gamma(G) \leq n$. Por otro lado, tenemos que todos los vértices de H son adyacentes a un vértice final en G, entonces por el lema 1.3.3 tenemos que $\gamma(G) \geq n$. Por lo tanto, $\gamma(G) = n$.

Ahora para la condición suficiente, primero analizaremos los casos en que $n = 1$ y $n = 2$. La única gráfica conexa de dos vértices es K_2 lo que implica que $G = K_2$, es claro que $\gamma(K_2) = 1$ y si tomamos $H = K_1$ entonces $H^+ = G$. Ahora cuando $n = 2$, en la gráfica de la figura 1.18 podemos observar todas las gráficas de cuatro vértices. Por lo que ya se demostro sabemos que C_4 y P_4 son gráficas conexas de orden cuatro tales que su número de dominación es dos, pero ninguna de las otras gráficas conexas de cuatro vértices cumplen con dicha propiedad, por lo cual $G = C_4$ o $G = P_4$. Por último si tomamos $H = K_2$ se cumple que $H^+ = P_4$, con lo cual se cumple que $G = C_4$ o $G = H^+$.

Por el análisis que acabamos de hacer, vamos a considerar $n \geq 3$. Supongamos que G es una gráfica conexa de orden $2n$, con $\gamma(G) = n$. Encontraremos una gráfica conexa H de orden n tal que $G = H^+$.

Afirmación. Todo árbol generador de G tiene al menos n vértices finales.

Sea T un árbol generador de G, por el lema 1.3.4 se tiene que $\gamma(T) \geq \gamma(G) = n$, es decir, $\gamma(T) \geq n$ y por el corolario 1.3.2 tenemos que $\gamma(T) \leq n$ con lo cual se puede concluir que $\gamma(T) = n$.

Ahora sea S el conjunto de vértices finales de T, por lo que acabamos de ver $\gamma(T) = n$, entonces por el teorema 1.3.5 podemos concluir que cada vértice interior de T es adyacente a exactamente un vértice final. Por lo tanto, cada vértice de $V(T) - S$ es adyacente a exactamente un vértice de S, con lo cual se tiene una función inyectiva de $V(T) - S$ a S (por definición de S), entonces $|V(T) - S| \leq |S|$. Por otro lado, notemos que $V(T) - S$ es un conjunto dominante, esto por definición de S, con lo cual se tiene que $\gamma(T) = n \leq |V(T) - S|$. Por lo tanto, $|S| \geq n$, es decir, T tiene al menos n vértices finales.

Aplicando el teorema 1.3.6 a este hecho se tiene que G tiene al menos n vértices finales, por otro lado como cualquier vértice final de G también es un vértice final para cualquier árbol geneador de G, G puede tener a lo más n vértices finales y por lo tanto exactamente n vértices finales. Etiquetamos a los vértices finales de G como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y a sus respectivos vecinos como $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Vamos a demostrar que cada u_i tiene exactamente un solo vecino en $\{v_1, \ldots, v_n\}$, respecto a G. Supongamos que $u_i = u_j$ para algún $i \neq j$, entonces habría un vértice interior de G adyacente a más de un vértice final pero dado que un vértice final de G es un vértice final en cuaquier árbol generador se tiene que dicho vértice interior seguira siendo adyacente a más de un vértice final en cualquier árbol generador de G, lo cual contradice el teorema 1.3.5 (recordemos que $\gamma(T) = n$ para cualquier árbol generador T de G).

Por lo tanto cada vértice de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es adyacente a solo un vértice de $\{v_1 \ldots, v_n\}$.

Por último, demostraremos que $\langle\{u_1, \ldots, u_n\}\rangle$ es conexa. Sean u_i y u_j dos vértices distintos en $\{u_1, \ldots, u_n\}$, como G es conexa entonces existe un u_iu_j-camino en G , notemos que cada vértice en el u_iu_j-camino tiene grado mayor o igual a dos, lo que implica que cualquier vértice del camino es un vértice en $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Por lo tanto, exite un u_iu_j-camino en $\{u_1, \ldots, u_n\}$, lo que implica que $\langle\{u_1, \ldots, u_n\}\rangle$ es conexa. Así, la gráfica H buscada es $\langle\{u_1, \ldots, u_n\}\rangle$.$\blacksquare$

Capítulo 2

Número de dominación transversal de independientes máximos.

En este capítulo para una gráfica G vamos a introducir los conceptos de conjunto dominante transversal de independientes máximos y de número de dominación transversal de independientes máximos , denotado por $\gamma_{it}(G)$. Posteriormente exhibiremos el valor exacto de $\gamma_{it}(G)$ para algunas familias básicas de gráficas como son: gráficas k-partitas completas, gráficas completas, gráficas bipartitas completas, estrellas, biestrellas, la corona de G con K_1, trayectorias, ciclos y ruedas, así como para gráficas inconexas.

Sea G una gráfica, un subconjunto dominante S de $V(G)$ se dice que es un conjunto **dominante transversal de independientes máximos** si S intersecta a todos los β_0-conjuntos de G. La mínima cardinalidad de todos los conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de G es llamado el **número de dominación transversal de independientes máximos** de G, denotado por $\gamma_{it}(G)$. Un conjunto dominante transversal de independientes máximos S de G tal que $|S| = \gamma_{it}(G)$ es llamado un $\boldsymbol{\gamma_{it}}$ **-conjunto** de G.

En la gráfica de la figura 2.1 se tiene que los conjuntos independientes máximos son $A_1 =\{u_2, u_6\}$, $A_2 =\{u_2, u_5\}$, $A_3 =\{u_2, u_4\}$, $A_4 =\{u_1, u_6\}$, $A_5 =\{u_1, u_4\}$ y $A_6 = \{u_3, u_5\}$. Ahora, si consideramos el conjunto S=$\{u_2, u_1, u_5\}$, note que S intersecta a los conjuntos anteriores y además S es dominante por lo cual S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, lo que implica que $\gamma_{it}(G) \leqslant 3$. Por último, como no existe ningún conjunto de dos vértices o un vértice que intersecte a A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5, entonces no existen conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de cardinalidad dos o uno, por lo cual podemos concluir que $\gamma_{it}(G) = 3$.

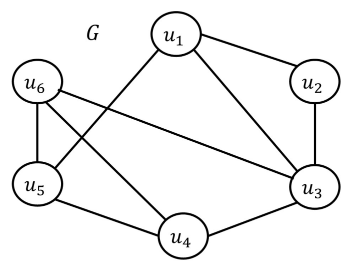

Figura 2.1: Gráfica con número de dominación transversal de independientes máximos tres

Veamos algunas familias para las cuales es fácil determinar $\gamma_{it}(G)$.

Teorema 2.0.1. *([1])Si G es una gráfica k-partita completa que tiene r conjuntos independientes máximos, entonces*

$$\gamma_{it}(G) = \begin{cases} 2 & \textit{si } r\textit{=1} \\ r & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración.

Supongamos que $\{V_1, \ldots, V_k\}$, con $k \geqslant 2$, es una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes. Notemos que todo conjunto independiente está contenido en V_i, para algún i en $\{1, \ldots, k\}$, ya que G es k-partita completa. Por lo tanto, todo conjunto independiente máximo de G coincide con algún V_i.

Caso 1. $r = 1$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que V_1 es el único conjunto independiente máximo en G. Tomemos S un γ_{it}-conjunto.

Afirmación. $|S| = 2$.

Supongamos que $|S| = 1$, por ser S un conjunto dominante transversal de independientes máximos tenemos que $S \cap V_1 \neq \emptyset$, pero $|S| = 1$, entonces $|S \cap V_1| = 1$. Supongamos que $S \cap V_1 = \{v\}$, ahora si existe x en V_1 tal que $x \neq v$, entonces S no sería un conjunto dominante ya que V_1 es un conjunto independiente, lo que implica que no hay una arista entre x y v, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $|V_1| = 1$. Como $V_2, \ldots, V_k$ también son conjuntos independientes, entonces $|V_i| \leqslant |V_1| = 1$ para cada i en $\{2, \ldots, k\}$, con lo cual $|V_i| = 1$ para cada i en $\{2, \ldots, k\}$, lo cual contradice que $r = 1$. Por lo tanto, $|S| \neq 1$, es decir, $|S| \geqslant 2$.

Supongamos que $|S| \geqslant 3$ y consideremos los siguientes subcasos:

Caso 1.1. $S \subseteq V_1$.

Note que $V_1 = S$, ya que de no ser asi, S no sería dominante, debido a que no existen aristas entre S y $V_1 - S$ (porque V_1 es un conjunto independiente). Ahora tomamos x en V_j, para alguna j en $\{2, \ldots, k\}$, y $S_*=\{x, v\}$, con v en $V_1 = S$, sabemos que v domina a todos los vértices de V_i para toda i en $\{2, \ldots, k\}$ y x domina en particular a V_1 por ser G una gráfica k-partita completa. Entonces S_* es un conjunto dominante y además $S_* \cap V_1 = \{v\}$, por lo cual S_* es un conjunto dominante transversal de independientes máximos y $|S_*| = 2<3 \leqslant |S|$. Entonces $|S_*|<|S|$, contradiciendo que S es un γ_{it}-conjunto.

Caso 1.2. S no se queda contenido en V_1.

Entonces existe u en S tal que u no pertenece a V_1. Como $S \cap V_1 \neq \emptyset$, entonces consideremos un vértice v en $S \cap V_1$ y tomemos $S_* = \{v, u\}$. Sabemos que v domina a $V(G) - V_1$ y u domina a V_1, ya que u no pertenece a V_1 y G es una gráfica k-partita completa. Entonces S_* es dominante y $S_* \cap V_1 \neq \emptyset$, lo que implica que S_* es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, pero $|S| < |S_*|$, lo cual es una contradicción ya que S es un γ_{it}-conjunto. Por lo tanto, no es posible que $|S| \geq 3$, con lo cual queda demostrado que $\gamma_{it}(G) = |S| = 2$.

Caso 2. $r \neq 1$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $V_1, \ldots, V_r$ son nuestros r conjuntos independientes máximos y tomemos $S = \{u_1, \ldots, u_r\}$ donde cada u_i pertenece a V_i. Claramente S intersecta a todos los conjuntos independientes máximos, y S es un conjunto dominante ya que en particular u_1 domina a $V(G) - V_1$ y v_2 domina a V_1 (G es k-partita completa). Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, lo que implica que $\gamma_{it}(G) \leq r$. Por otro lado, sabemos que cualquier conjunto dominante transversal de independientes máximos intersecta a los r conjuntos independientes máximos y dichos conjuntos no se intersectan entre si, por lo cual no podemos encontrar un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad menor a r. Por lo tanto, $r \leq \gamma_{it}(G)$. Así, $\gamma_{it}(G) = r$.■

Teorema 2.0.2. *([1]) Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $\gamma_{it}(K_n) = n$.*

Demostración.

Supongamos que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ son los vértices de K_n. Notemos que K_n es n-partita completa ya que $\{V_1, \ldots, V_n\}$, donde $V_1 = \{u_1\}, \ldots, V_n = \{u_n\}$, es una partición de $V(K_n)$ en conjuntos independientes tal que, por definición, cualesquiera dos vértices de distintos conjuntos independientes son adyacentes. Observe que V_i es un conjunto independiente máximo para cada i en $\{1, \ldots, n\}$. Entonces aplicando el resultado anterior se tiene que $\gamma_{it}(K_n) = n$.■

Teorema 2.0.3. *([1]) $\gamma_{it}(K_{m,n}) = 2$.*

Demostración.

Dividiremos la demostración en los dos casos siguientes.

Caso 1. $n = m$.

En este caso tenemos dos conjuntos independientes máximos, entonces por lo visto antes se tiene que $\gamma_{it}(K_{m,n}) = 2$.

Caso 2. $m \neq n$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $m > n$. Entonces solo tenemos un conjunto independiente máximo y por lo visto antes se concluye que $\gamma_{it}(K_{m,n}) = 2$.■

Teorema 2.0.4. *([1]) Para cualquier estrella el valor de su número de dominación transversal de independientes máximos es 2.*

Demostración.

Sea $K_{1,n-1}$ una estrella. Del punto anterior sabemos que $\gamma_{it}(K_{1,n-1}) = 2$. Lo que haremos enseguida es dar una demostración alternativa.

Supongamos que tenemos una estrella con n vértices. Llamamos x al vértice de grado $n-1$ y a los vértices de grado 1 los llamamos $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$, con lo cual tenemos que $B = \{y_1, ..., y_{n-1}\}$ es el único conjunto independiente máximo. Notemos que $S = \{y_1, x\}$ es dominante e intersecta a B, entonces S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, por lo tanto $\gamma_{it}(K_{1,n-1}) \leq 2$. Por otro lado, el único conjunto dominante de un vértice es $\{x\}$ pero dicho conjunto no intersecta a B, entonces no existen conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de cardinalidad 1. Por lo tanto, $\gamma_{it}(K_{1,n-1})$ es 2.■

Teorema 2.0.5. *([1]) Para las biestrellas el número de dominación transversal de independientes máximos es 3.*

Demostración.

Sea G una biestrella. Supongamos que $u_1, \ldots, u_n$ son los vértices de G de grado 1 que son adyacentes a un vértice x, supongamos que $v_1, \ldots, v_m$ son los vértices de G de grado 1 que son adyacentes a un vértice y. Además x y y son adyacentes.

Caso 1. $n > 1$ y $m > 1$.

Observemos que el único conjunto independiente máximo es $J = \{u_1, \ldots, u_n,\ v_1, \ldots, v_m\}$. Afirmamos que $S = \{u_1, x, y\}$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, esto porque y domina a $v_1, \ldots, v_m$ y x domina a $u_1, \ldots, u_n$, es decir, S es un conjunto dominante que además cumple que $S \cap J \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) \leqslant 3$. También notemos que el único conjunto dominante de 2 vértices es $\{x, y\}$ pero este conjunto no intersecta a J, y no existen conjuntos dominantes de cardinalidad uno. Por lo tanto, $3 \leq \gamma_{it}(G)$. Así, $\gamma_{it}(G) = 3$.

Caso 2. $n = 1$ o $m = 1$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $n = 1$, entonces los únicos conjuntos independientes máximos son $J_1 = \{v_1, \ldots, v_m, x\}$ y $J_2 = \{v_1, \ldots, v_m, u_1\}$. Tomemos $S = \{u_1, y, v_1\}$ el cual es dominante. Como $S \cap J_1 = \{v_1\}$ y $S \cap J_2 = \{v_1, u_1\}$, entonces S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, lo que implica que $\gamma_{it}(G) \leq 3$. Ahora, como los únicos conjuntos dominantes de G con dos elementos son $\{x, y\}$ y $\{u_1, y\}$ y estos no intersectan a todos los conjuntos independientes máximos, entonces no es posible encontrar conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de cardinalidad menor o igual a 2. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = 3$.$\blacksquare$

Teorema 2.0.6. *([1]) Si G es una gráfica conexa con n vértices para $n \geq 2$, entonces $\gamma_{it}(G^+) = n$.*

Demostración.

Supongamos que $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es el conjunto de vértices en G^+ tal que u_i sólo es adyacente a v_i en G^+ para cada i en $\{1, \ldots, n\}$.

Afirmación. S es un γ_{it}-conjunto.

Claramente S es un conjunto dominante de G^+, por otro lado se tiene que $\beta_0(G^+) = n$ (S es un conjunto independiente y no es posible encontrar un conjunto independiente con $n + 1$ vértices). Ahora, recordemos que G es conexa por lo cual $\{v_1, \ldots, v_n\}$ no puede ser un conjunto independiente en G^+, usando esto y el hecho que $\beta_0(G^+) = n$, podemos concluir que S intersecta a cualquier β_0-conjunto. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, lo que implica que $\gamma_{it}(G) \leq n$.

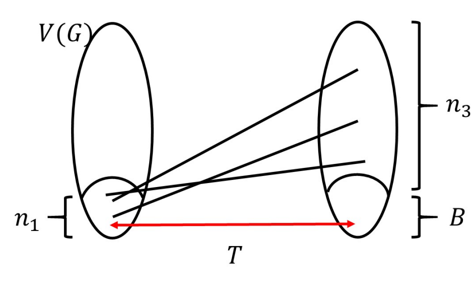

Figura 2.2: $\gamma_{it}(G) \geq n$

Por otro lado, sean T un γ_{it}-conjunto y $B = T \cap S$. Supongamos que $|T \cap V(G)| = n_1$, $|B| = n_2$ y $|S - B| = n_3$. Si $n_3 = 0$, entonces claramente $|T| \geq n$. Supongamos que $n_3 \geq 1$. Como S es un conjunto independiente, $S - B \neq \emptyset$ y T es dominante, entonces todo vértice en $S - B$ es dominado por vértices del conjunto $T \cap V(G)$. Así, por definición de G^+ se tiene que $n_3 \leq |T \cap V(G)| = n_1$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = |T| = n_1 + n_2 \geq n_2 + n_3 = n$.

De lo anterior se concluye que $\gamma_{it}(G^+) = n$.■

Teorema 2.0.7. *([1]) Para cada trayectoria P_n tenemos que*

$$\gamma_{it}(P_n) = \begin{cases} 2 & \textit{si } n{=}2{,}3 \\ 3 & \textit{si } n{=}6 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración

Sea $P_n = (v_1, \ldots, v_n)$. Notemos que $P_2 = K_{1,1}$ y $P_3 = K_{1,2}$, entonces por lo que vimos en el teorema 2.0.3 se tiene que $\gamma_{it}(P_2) = 2$ y $\gamma_{it}(P_3) = 2$.

Ahora supongamos que $n = 6$, entonces $S = \{v_1, v_2, v_5\}$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de P_6 ya que S es un conjunto dominante (v_5 domina a v_4 y v_6, y v_2 domina a v_3) y como los únicos conjuntos independientes máximos son $\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6\}$, $\{v_3, v_1, v_6\}$ y $\{v_1, v_4, v_6\}$ es claro que S los intersecta a todos. Por lo tanto, $\gamma_{it}(P_6) \leq 3$. Como P_6 no tiene conjuntos dominantes de cardinalidad 1, entonces $\gamma_{it}(P_6) \geq 2$. Ahora demostraremos que $\gamma_{it}(P_6) \geq 3$, para lo cual consideremos la siguiente afirmación.

Afirmación. $D = \{v_2, v_5\}$ es el único conjunto dominante de P_6 de cardinalidad 2.

Por definición de P_6, v_2 domina a v_1 y v_3, y v_5 domina a v_4 y v_6, lo que implica que D es un conjunto dominante de P_6. Además, ninguno de los siguientes conjuntos es dominante: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_1, v_6\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_4, v_6\}$ y $\{v_5, v_6\}$. Por lo tanto, D es el único conjunto dominante de P_6 de cardinalidad 2.

Como $\{v_3, v_1, v_6\}$ es un conjunto independiente máximo de P_6 y D no intersecta a dicho conjunto, entonces no existe conjunto dominante de cardinalidad 2 que intersecte a todo β_0-conjunto de P_6. Así, podemos concluir que $\gamma_{it}(P_6) \geq 3$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(P_6) = 3$.

Supongamos que $n \notin \{2, 3, 6\}$. Consideremos 3 casos sobre n:

Caso 1. $n \equiv 0$ $(mod\ 3)$.

En este caso $n = 3k$ para algún k en los naturales. Notemos que $S = \{v_{3i-1} : 1 \leq i \leq \frac{n}{3}\}$ es un conjunto dominante ya que por definición de P_n, v_2 domina a v_1 y v_3, v_5 domina a v_4 y v_6 y asi sucesivamente v_{n-1} domina a v_{n-2} y v_n (ver figura 2.4), lo que implica que $\gamma(P_n) \leq |S|$. Como $n \equiv 0$ $(mod\ 3)$ se tiene que $\frac{n}{3} = \frac{3k}{3} = k$ y dado que tenemos un vértice en S por cada índice en $\{1, \ldots, \frac{n}{3}\}$ podemos concluir que $|S| = k$.

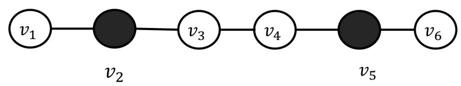

Figura 2.3: P_6

Afirmación 1.1. (**[13]**) $\gamma(P_n) = |S|$.

Supongamos que existe un conjunto dominante S' tal que $|S'| < |S|$. Sea $A = V(P_n) - S'$ el conjunto de vértices dominados por S', luego por definición de P_n sabemos que $\delta(v) \leq 2$ para cualquier v en $V(P_n)$, en particular para los vértices de S', lo que implica que por cada vértice en S' podemos tener a lo más 2 vértices en A, entonces $|A| \leq 2|S'|$ de lo cual se sigue que $|A|+|S'| \leq 3|S'|$. Como $A = V(P_n)-S'$, entonces $n = |(V(P_n)-S')\cup S'| = |A\cup S'| = |A|+|S'| \leq 3|S'|$, es decir, $n \leq 3|S'|$. Por otro lado tenemos que $3|S'| < 3|S| = 3k = n$, lo que implica que $n < n$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no es posible encontrar un conjunto dominante de cardinalidad menor que $|S|$ y por consiguiente $\gamma(P_n) = |S|$.

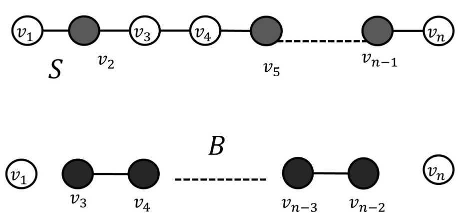

Figura 2.4: P_{3k}

Afirmación 1.2. $\langle V(P_n) - S\rangle = (\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor)K_2 \cup 2K_1$.

Por definición de P_n sabemos que v_1 y v_n solo son adyacentes a v_2 y v_{n-1}, respectivamente, notemos que los vértices v_2 y v_{n-1} están en S por lo cual v_1 y v_n son vértices aislados en $\langle V(P_n) - S\rangle$. Además notemos que $B = \{v_{3i}, v_{3i+1} : i \in \{1,\ldots,k-1\}\}$ no intersecta a S y por consiguiente $V(\langle V(P_n) - S\rangle) = B \cup \{v_1, v_n\}$ y

$$A(\langle V(P_n) - S\rangle) = \{(v_{3i}, v_{3i+1}) : i \in \{1,\ldots,k-1\}\}$$

(ver figura 2.4), entonces por cada índice en $\{1,\ldots,k-1\}\}$ tenemos una copia de K_2 en $\langle V(P_n)-S\rangle$. Por otro lado, sabemos que $k-\frac{2}{3} \geq k-1$ y que $k > k-\frac{2}{3}$, entonces por definición de función piso sabemos que $\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor = \lfloor k - \frac{2}{3} \rfloor = k - 1$. Por lo tanto, en $\langle V(P_n) - S \rangle$ se tienen $\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$ copias de K_2.

Entonces por la afirmación 1.2 cualquier conjunto independiente de $\langle V(P_n) - S \rangle$ tiene a lo más $\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 2$ vértices.

Afirmación 1.3.$\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 2 < \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Dado que $n \notin \{2, 3, 6\}$ y $n \equiv 0$ $(mod\ 3)$ tenemos que $k \geq 3$ por lo que $\frac{k}{2} \geq \frac{3}{2}$ y por cosiguiente $k + \frac{k}{2} \geq k + \frac{3}{2}$, pero $k + \frac{3}{2} > k + 1$, entonces $k + \frac{k}{2} > k + 1$. Por otro lado se tiene que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \lceil \frac{3k}{2} \rceil = \lceil k + \frac{k}{2} \rceil$, además por definición de $\lceil x \rceil$ se tiene que $\lceil k + \frac{k}{2} \rceil \geq k + \frac{k}{2}$, es decir, $\lceil \frac{n}{2} \rceil \geq k + \frac{k}{2}$ y usando que $k + \frac{k}{2} > k + 1$ se concluye que $\lceil \frac{n}{2} \rceil > k + 1$, pero recordemos que $\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor = k - 1$ por lo que $k + 1 = \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 2$. Por lo tanto, $\lceil \frac{n}{2} \rceil > \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 2$.

Afirmación 1.4. (**[14]**) $\beta_0(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Tomamos $I = \{v_{2i-1} : i \in \{1, \ldots, \frac{n+1}{2}\}\}$, el cual es un conjunto independiente de P_n (ver figura 2.5), por lo cual $\beta_0(P_n) \geq |I| = \frac{n+1}{2}$. Por otro lado sabemos que $\frac{n}{2} < \frac{n+1}{2}$, lo que implica que $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq \frac{n+1}{2}$ y por consiguiente $\beta_0(P_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

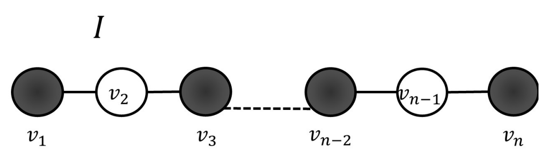

Figura 2.5: I conjunto independiente

Ahora supongamos que existe un conjunto independiente J en P_n tal que $|J| > \lceil \frac{n}{2} \rceil$, lo que implica que $|J| > \frac{n}{2}$, en otras palabras el conjunto J tiene más de la mitad de los vértices de P_n. Entonces J tiene al menos dos vértices que son consecutivos en P_n, lo cual es una contradicción porque J es un conjunto independiente. Por lo tanto, no existe un conjunto independiente de cardinalidad mayor que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Así, $\beta_0(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Por las afirmaciones 1.3 y 1.4 podemos concluir que $\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 2 < \beta_0(P_n)$, esto implica que $\langle V(P_n) - S \rangle$ no contiene β_0-conjuntos de P_n. Por lo tanto, S intersecta a cualquier β_0-conjunto de P_n, es decir, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos por lo cual $\gamma_{it}(P_n) \leq |S| = k = \frac{n}{3} = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Así, $\gamma_{it}(P_n) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Ahora por la afirmación 1.1 sabemos que $\gamma(P_n) = |S|$, por lo cual no es posible encontrar un conjunto dominante que intersecte a todos los β_0-conjuntos de P_n con cardinalidad menor que S, es decir, no es posible encontrar un conjunto dominante transversal de independientes máximos con cardinalidad menor que S. Por lo tanto, $\gamma_{it}(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Caso 2. $n \equiv 1$ $(mod\ 3)$

En este caso $n = 3k + 1$ para algún k en los naturales. Para el caso $k = 0$ se tiene que $P_1 = K_1$, entonces por lo visto anteriormente sabemos que $\gamma_{it}(P_1) = 1 = \lceil \frac{1}{3} \rceil$, es decir,$\gamma_{it}(P_1) = \lceil \frac{1}{3} \rceil$.

Supongamos que $k \geq 1$. Ahora observemos que $S = \{v_{3i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-1}{3}\}$ es un conjunto dominante, porque v_1 domina a v_2, v_4 domina a v_3 y v_5 y asi sucesivamente v_n domina a v_{n-1} (ver figura 2.6). Por otro lado, notemos que por cada índice en $\{0, \ldots, \frac{n-1}{3}\}$ tenemos un vértice en S por lo cual $|S| = \frac{n-1}{3} + 1 = \frac{3k+1-1}{3} + 1 = k + 1$, es decir, $|S| = k + 1$. Por lo tanto, $\gamma(P_n) \leq |S|$.

Afirmación 2.1. (**[13]**) $\gamma(P_n) = |S|$.

Procedindo por contradicción, supongamos que existe un conjunto dominante S' tal que $|S'| < |S| = k + 1$, es decir, $|S'| \leq k$. Sea $A_2 = V(P_n) - S'$ el conjunto de vértices dominados por S', de lo cual se sigue que $|A_2| \geq 2k+1$ (porque $3k + 1 = n = |A_2 \cup S'| = |A_2| + |S'|$). Por otro lado, sabemos por definición de P_n que $\delta(v) \leq 2$ para cualquier v en $V(P_n)$, en particular para los vértices de S', lo que implica que por cada vértice en S' podemos tener a lo mas 2 vértices en A_2, entonces $|A_2| \leq 2|S'| \leq 2k$. Lo que implica que $2k \geq |A_2| \geq 2k + 1$, es decir, $2k \geq 2k+1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existen conjuntos dominantes de cardinalidad menor que S. Así, $\gamma(P_n) = |S|$.

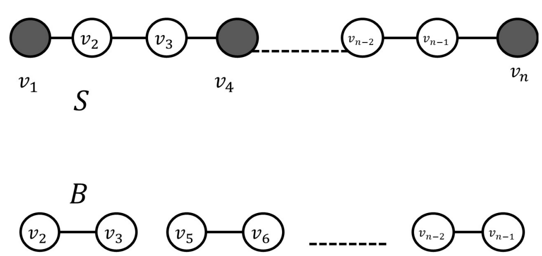

Figura 2.6: S un γ-conjunto de P_n

Afirmación 2.2. $\langle V(P_n) - S \rangle = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor K_2$.

Observe que como $0 < \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3} < 1$, entonces $k \leq k + \frac{1}{3}$ y $k + \frac{1}{3} < k + 1$. Así, por propiedades de $\lfloor x \rfloor$ tenemos que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = \lfloor k + \frac{1}{3} \rfloor = k$. Por otro lado, puesto que $A(\langle V(P_n) - S \rangle) = \{(v_{3i-1}, v_{3i}) : i \in \{1, \ldots, k\}\}$ (ver figura 2.6), entonces por cada índice en $\{1, \ldots, k\}\}$ tenemos una copia de K_2 en $\langle V(P_n) - S \rangle$. Por lo tanto, $\langle V(P_n) - S \rangle = kK_2 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor K_2$.

Note que se sigue de la afirmación 2.2 que cualquier conjunto independiente de $\langle V(P_n) - S\rangle$ tiene a lo más $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ de vértices.

Afirmación 2.3. ([**14**]) $\beta_0(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Para el caso en el que k es un número impar tomamos

$$I_1 = \{v_{2i+1} : i \in \{0, \ldots, \frac{n-2}{2}\}\}$$

el cual es un conjunto independiente de P_n (ver figura 2.7), por lo cual $\beta_0(P_n) \geq |I_1| = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$. Ahora por otro lado veamos que para este caso $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2}$, como sabemos que k es impar entonces $k = 2s+1$ para algún s en los naturales, lo que implica que $\frac{n}{2} = \frac{3(2s+1)+1}{2} = \frac{6s+4}{2} = \frac{2(3s+2)}{2} = 3s+2$. Por lo tanto, $\frac{n}{2} = 3s+2 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y por consiguiente $\beta_0(P_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ahora si k es un número par tomamos $I_2 = \{v_{2i+1} : i \in \{0, \ldots, \frac{n-1}{2}\}\}$, el cual es un conjunto independiente de P_n (ver figura 2.7), por lo cual $\beta_0(P_n) \geq |I_2| = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$. Por otro lado, sabemos que $\frac{n+1}{2} \geq \frac{n}{2}$ lo que implica que $\frac{n+1}{2} \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y por consiguiente $\beta_0(P_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Por último supongamos que existe un conjunto independiente en P_n, J tal que $|J| > \lceil \frac{n}{2} \rceil$, lo que implica que $|J| > \frac{n}{2}$, en otras palabras el conjunto J tiene más de la mitad de los vértices de P_n. Entonces J tiene al menos dos vértices que son consecutivos en P_n, lo cual es una contradicción porque J es un conjunto independiente. Por lo tanto, no existe un conjunto independiente de cardinalidad mayor que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Así, $\beta_0(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

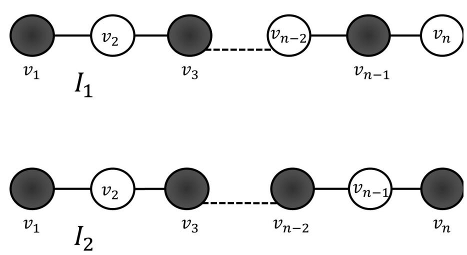

Figura 2.7: Conjuntos independientes de P_n

Dado que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \leq \frac{n}{3} < \frac{n}{2}$ se tiene que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor < \frac{n}{2}$, también sabemos que $\frac{n}{2} \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ de lo que se sigue que $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor < \lceil \frac{n}{2} \rceil = \beta_0(P_n)$ (por afirmación 2.3). Por lo tanto, $\langle V(P_n) - S\rangle$ no contiene β_0-conjuntos de P_n, es decir, S intersecta a cualquier β_0-conjunto de P_n. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos y por consiguiente $\gamma_{it}(P_n) \leq |S|$. Ahora por la afirmación 2.1 sabemos que $\gamma(P_n) = |S|$, por lo cual no es posible encontrar un conjunto dominante que intersecte a todos los β_0-conjuntos de P_n de cardinalidad menor a la de S, es decir, no es posible encontrar un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad menor. Por lo tanto,

$\gamma_{it}(P_n) = |S| = k + 1$.

Afirmación 2.4.$\lceil \frac{n}{3} \rceil = k + 1$.

Pimero notemos que $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \lceil \frac{3k+1}{3} \rceil = \lceil k + \frac{1}{3} \rceil$, entonces en realidad lo que queremos demostrar es que $\lceil k + \frac{1}{3} \rceil = k + 1$. Por otro lado, sabemos que $k + \frac{1}{3} \leq k + 1$ y $k + \frac{1}{3} + 1 > k + 1$ lo que implica por propiedades de $\lceil x \rceil$ que $\lceil \frac{n}{3} \rceil = k + 1$.

Entonces usando la afirmación 2.4 podemos concluir que $\gamma_{it}(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Caso 3. $n \equiv 2$ $(mod\ 3)$.

En este caso $n = 3k + 2$ para algún k en los naturales. Notemos que en el caso para el que $k = 0$ se tiene que $n = 2$ pero este caso ya lo analizamos por lo cual supondremos que $k \geq 1$. Observemos que $S = \{v_{3i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-2}{3}\}$ (ver figura 2.8) es un conjunto dominante ya que por definición de P_n sabemos que v_1 domina a v_2, v_4 domina a v_3 y v_5 y asi sucesivamente $v_n - 1$ domina a v_n. Por consiguiente $\gamma(P_n) \leq |S|$. Notemos que por cada índice en $\{0, \ldots, \frac{n-2}{3}\}$ se tiene un vértice en S por lo cual $|S| = \frac{n-2}{3} + 1 = \frac{3k+2-2}{3} + 1 = k + 1$, es decir, $|S| = k + 1$. Por lo tanto, $\gamma(P_n) \leq k + 1$.

Afirmación 3.1. (**[13]**) $\gamma(P_n) = k + 1$.

Supongamos que existe un conjunto dominante S' tal que $|S'| < |S| = k+1$, es decir, $|S'| \leq k$. Siguiendo el mismo análisis de los casos anteriores, consideremos $A_2 = V(P_n) - S'$ el conjunto de vértices dominados por S' de lo cual se sigue que $|A_2| \geq 2k+2$ (porque $3k+2 = n = |A_2 \cup S'| = |A_2| + |S'|$). Por otro lado, sabemos por definición de P_n que $\delta(v) \leq 2$ para cualquier v en $V(P_n)$, en particular para los vértices de S', lo que implica que por cada vértice en S' podemos tener a lo más 2 vértices en A_2, entonces $|A_2| \leq 2|S'| \leq 2k$. Lo que implica que $2k \geq |A_2| \geq 2k + 2$, es decir, $2k \geq 2k + 2$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existen conjuntos dominantes de cardinalidad menor que S. Así, $\gamma(P_n) = |S|$.

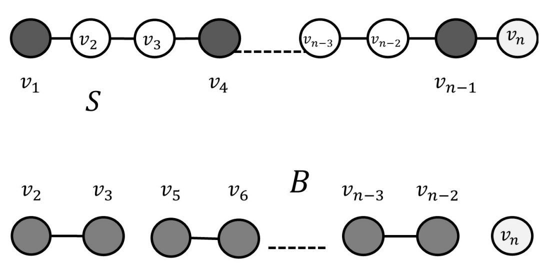

Figura 2.8: $B = V(P_n) - S$

Afirmación 3.2. $\langle V(P_n) - S \rangle = \frac{n-2}{3} K_2 \cup K_1$.

Por definición de P_n sabemos que v_n sólo es adyacente a v_{n-1} por lo cual en $\langle V(P_n) - S\rangle$, v_n es un vértice aislado. Por otro lado, puesto que $A(\langle V(P_n) - S\rangle) = \{(v_{3i-1}, v_{3i}) : i \in \{1, \ldots, \frac{n-2}{3}\}$, entonces por cada índice i en $\{1, \ldots, \frac{n-2}{3}\}$ tenemos una copia de K_2. Por lo tanto, $\langle V(P_n) - S\rangle = \frac{n-2}{3}K_2 \cup K_1$.

Afirmación 3.3. (**[14]**) $\beta_0(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

En el caso en el que k es impar tomamos $I_1 = \{v_{2i+1} : i \in \{0, \ldots, \frac{n-1}{2}\}\}$ que es un conjunto independiente de P_n (ver figura 2.9), por lo cual $\beta_0(P_n) \geq |I_1| = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$. Por otro lado, sabemos que $\frac{n+1}{2} \geq \frac{n}{2}$ lo que implica que $\frac{n+1}{2} \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y por consiguiente $\beta_0(P_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Para el caso en el que k es par tomamos $I_2 = \{v_{2i+1} : i \in \{0, \ldots, \frac{n-2}{2}\}$ un conjunto independiente de P_n (ver figura 2.9), por lo cual $\beta_0(P_n) \geq |I_2| = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$. Ahora por otro lado veamos que para este caso $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2}$, como sabemos que k es par, entonces $k = 2s$ para algún s en los naturales lo que implica que $\frac{n}{2} = \frac{3(2s)+2}{2} = \frac{6s+2}{2} = \frac{2(3s+1)}{2} = 3s + 1$. Por lo tanto, $\frac{n}{2} = 3s + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y por consiguiente $\beta_0(P_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Por último supongamos que existe un conjunto independiente en P_n, J tal que $|J| > \lceil \frac{n}{2} \rceil$, lo que implica que $|J| > \frac{n}{2}$, en otras palabras el conjunto J tiene más de la mitad de los vértices de P_n. Entonces J tiene al menos dos vértices que son consecutivos en P_n, lo cual es una contradicción porque J es un conjunto independiente. Por lo tanto, no existe un conjunto independiente de cardinalidad mayor que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Así, $\beta_0(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

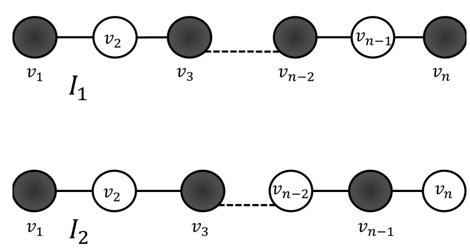

Figura 2.9: I_1 y I_2 conjuntos independientes de P_n

Por la afirmación 3.2 sabemos que cualquier conjunto independiente en $\langle V(P_n) - S\rangle$ tiene a lo más $\frac{n-2}{3} + 1 = \frac{n+1}{3} = \frac{3k+2+1}{3} = k + 1$ vértices. Por otro lado, por la afirmación 3.3 sabemos que $\beta_0 = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lceil \frac{k}{2} + k + 1 \rceil$. Como $\lceil \frac{k}{2} + k + 1 \rceil \geq \frac{k}{2} + k + 1 > k + 1$ ($k \geq 1$), entonces $\beta_0(P_n) > k + 1$, y por consiguiente $\langle V(P_n) - S\rangle$ no tiene β_0-conjuntos de P_n, es decir, S intersecta a cualquier β_0-conjunto de P_n, lo que implica que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos y así $\gamma_{it}(P_n) \leq |S|$. Ahora por la afirmación 3.1 sabemos que $\gamma(P_n) = |S|$ por lo cual no es posible encontrar un conjunto dominante que intersecte a todos los β_0-conjuntos de P_n de cardinalidad menor a la de S, es decir, no es posible encontrar un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad menor. Por lo tanto, $\gamma_{it}(P_n) = |S| = k + 1$.

Afirmación 3.4.$\lceil \frac{n}{3} \rceil = k + 1$.

Pimero notemos que $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \lceil \frac{3k+2}{3} \rceil = \lceil k + \frac{2}{3} \rceil$, entonces en realidad lo que queremos demostrar es que $\lceil k + \frac{2}{3} \rceil = k + 1$. Sabemos que $k + \frac{2}{3} \leq k + 1$ y $k + \frac{2}{3} + 1 > k + 1$ lo que implica, por propiedades de $\lceil x \rceil$, que $\lceil k + \frac{2}{3} \rceil = k + 1$.

Entonces usando la afirmación 3.4 podemos concluir que $\gamma_{it}(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.■

Teorema 2.0.8. *([1]) Para cada ciclo C_n tenemos que*

$$\gamma_{it}(C_n) = \begin{cases} 3 & \textit{si } n \in \{3, 5\} \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración Sea $C_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$. Notemos que para $C_3 = K_3$ el análisis realizado anteriormente nos lleva a concluir que $\gamma_{it}(C_3) = 3$. Ahora para $n = 5$, observemos que $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto dominante ya que v_5 es dominado por v_1 y v_4 es dominado por v_3. Además por la estructura de C_5 los conjuntos dominantes independientes máximos son $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$ y $\{v_3, v_5\}$, es claro que S intersecta a dichos conjuntos. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de C_5 lo que implica que $\gamma_{it}(C_5) \leq 3$.

Ahora notemos que $D_1 = \{v_1, v_3\}$, $D_2 = \{v_1, v_4\}$, $D_3 = \{v_2, v_4\}$, $D_4 = \{v_2, v_5\}$ y $D_5 = \{v_3, v_5\}$ coinciden con todos los γ-conjuntos de C_5 y mas aún $V(C_5) - D_i$ contiene un conjunto independiente máximo para cada i en $\{1, \ldots, 5\}$ (ver figura 2.10), lo que implica que no existe ningún conjunto dominante de cardinalidad menor a 3 que intersecte a todos los conjuntos independientes máximos, es decir, no existen conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de C_5 de cardinalidad menor a 3. Por lo tanto, $\gamma_{it}(C_5) = 3$.

Asumamos que $n \notin \{3, 5\}$. Consideraremos tres casos para n.

Caso 1. $n \equiv 0$ $(mod\ 3)$.

En este caso $n = 3k$ para algún $k \geq 2$ en los naturales. Sea $S = \{v_{3i+1} : 0 \leq i \geq \frac{n-3}{3}\}$ (ver figura 2.11), notemos que S es un conjunto dominante de C_n ya que v_1 domina a v_n y a v_2 , v_4 domina a v_3 y a v_5, y asi sucesivamente $v_{n-2=3\frac{n-3}{3}+1}$ domina a v_{n-1} y a v_{n-3}. Por lo tanto, $\gamma(C_n) \leq |S| = \frac{n-3}{3} + 1 = \frac{n}{3}$, es decir, $\gamma(C_n) \leq \frac{n}{3}$.

Afirmación 1.1. (**[13]**) $\gamma(C_n) = |S|$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un conjunto dominante S' tal que $|S'| < |S| = \frac{n}{3} = k$. Sea $A = V(C_n) - S'$ el conjunto de vértices dominados por S', por construcción de C_n se tiene que $\delta(v) = 2$ para todo v en

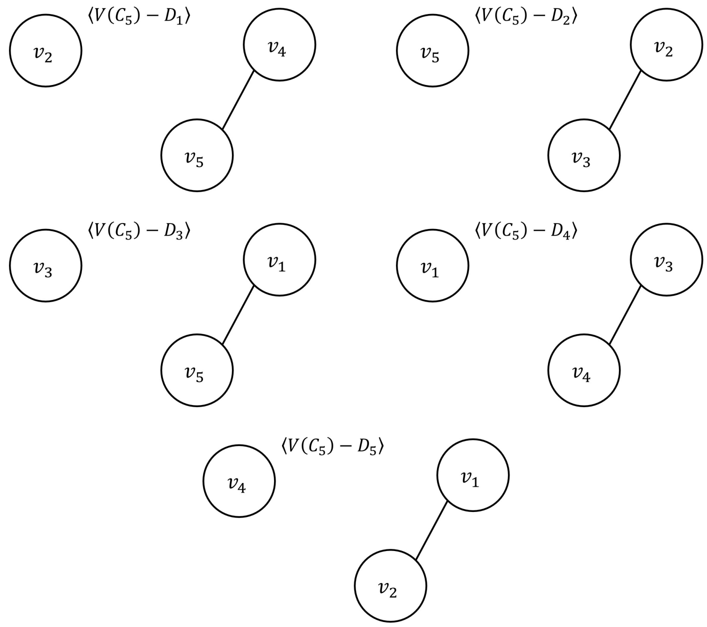

Figura 2.10: $\langle V(C_5) - D_i\rangle$ para cada i en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

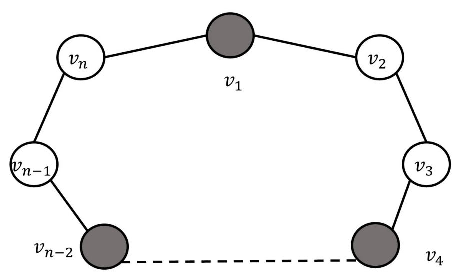

Figura 2.11: S

$V(C_n)$, en particular para los vértices en S', lo que implica que $|A| \leq 2|S'| < 2k$. Por consiguiente $|A \cup S'| = |A| + |S'| < 2k + k = 3k = n$, pero $A \cup S' = V(C_n)$ lo que implica que $|V(C_n)| < n$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existen conjuntos dominantes de cardinalidad menor a S y por consiguiente $\gamma(C_n) = |S|$.

Afirmación 1.2. $\langle V(C_n) - S\rangle = \frac{n}{3}K_2$.

Primero recordemos que $\frac{n}{3} = k$ por lo cual en realidad necesitamos demostrar

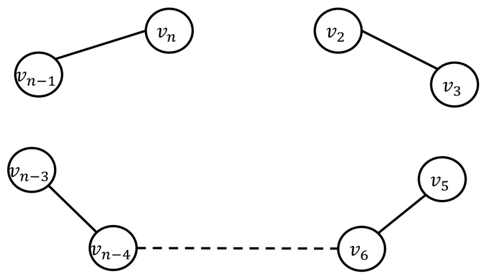

Figura 2.12: $\langle V(C_n) - S\rangle$

que $\langle V(C_n) - S\rangle = kK_2$. Notemos que

$$A(\langle V(C_n) - S\rangle) = \{(v_{3i+2}, v_{3i+3}) : 0 \leq i \leq \frac{n}{3} - 1\}$$

(ver figura 2.12), además por cada índice en $\{0, \ldots, \frac{n}{3} - 1\}$ tenemos una copia de K_2 y dado que la cardinalidad de dicho conjunto es $\frac{n}{3} - 1 + 1 = k$, entonces tenemos k copias de K_2. Por lo tanto, $\langle V(C_n) - S\rangle = \frac{n}{3}K_2$.

De la afirmación anterior se sigue que cada conjunto independiente en $\langle V(C_n) - S\rangle$ contiene a lo más $\frac{n}{3}$ vértices.

Afirmación 1.3. (**[14]**) $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

En el caso en que $k = 2s$, para algún s en los naturales, tomamos $I_1 = \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}\}$ el cual es un conjunto independiente (ver figura 2.13), lo que implica que $\beta_0(C_n) \geq |I_1| = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$. Por otro lado, dado que $k = 2s$ tenemos que $n = 3(2s) = 2(3s)$, entonces $\frac{n}{2} = \frac{2(3s)}{2} = 3s$. Por lo tanto, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2} = 3s$ y por consiguiente $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

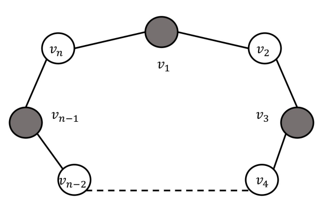

Figura 2.13: Los vértices sombreados representan al conjunto I_1

En el caso en el que $k = 2s+1$ tomamos $I_2 = \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\}$ el cual es un conjunto independiente (ver figura 2.14), por lo cual $\beta_0(C_n) \geq |I_2| = \frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$, es decir, $\beta_0(C_n) \geq \frac{n-1}{2}$. Por otro lado, dado que $k = 2s + 1$ tenemos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{6s+3}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2(3s+1)+1}{2} \rfloor = \lfloor 3s + 1\frac{1}{2} \rfloor$ y como $\lfloor 3s + 1\frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 3s + \frac{3}{2} \rfloor$,entonces $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor 3s + \frac{3}{2} \rfloor$. Además sabemos que $1 < \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2} < 2$, entonces $3s + 1 \leq 3s + \frac{3}{2}$ y $3s + \frac{3}{2} < 3s + 1 + 1$, es decir,

$3s+1 \leq 3s+\frac{3}{2} < 3s+2$, lo que impica que $\lfloor 3s+\frac{3}{2} \rfloor = 3s+1 = \frac{6s+3-1}{2} = \frac{n-1}{2}$. Por lo tanto, $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

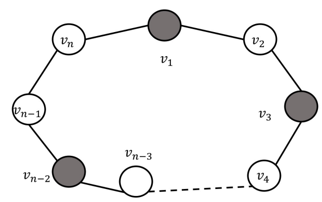

Figura 2.14: Los vértices sombreados representan al conjunto I_2

Afirmación 1.4. $\frac{n}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
En el caso en el que $k = 2s$ tenemos que $\frac{n}{3} = 2s$, además por el análisis anterior sabemos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 3s$. Claramente $2s < 3s$ de lo cual se sigue que $\frac{n}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
En el caso en el que $k = 2s+1$ se tiene que $\frac{n}{3} = 2s+1$, además por el análisis anterior sabemos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 3s+1$. Es claro que $2s < 3s$,entonces $2s+1 < 3s+1$ lo que impica que $\frac{n}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Por lo demostrado en ambos casos se tiene que $\frac{n}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ahora por la afirmación 1.3 y 1.4 se tiene que $\frac{n}{3} < \beta_0(C_n)$ esto implica que $V(C_n) - S$ no contiene β_0-conjuntos de C_n. Por lo cual, S intersecta a todos los β_0-conjuntos de C_n y usando la afirmación 1.1 se tiene que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Por lo tanto, $\gamma_{it}(C_n) \leq |S| = \frac{n-3}{3} + 1 = \frac{n}{3}$. Ahora por la afirmación 1.1 sabemos que $\gamma(C_n) = |S|$ por lo cual no es posible encontrar un conjunto dominante que intersecte a todos los β_0-conjuntos de C_n de cardinalidad menor a la de S, es decir, no es posible encontrar un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad menor. Por lo tanto, $\gamma_{it}(C_n) = \frac{n}{3} = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Caso 2. $n \equiv 1$ $(mod\ 3)$.

En este caso $n = 3k+1$ para algún $k \geq 1$ en los naturales. Consideremos $S = \{v_{3i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-1}{3}\}$ (ver figura 2.15) el cual es un conjunto dominante ya que v_1 domina a v_2, v_4 domina a v_3 y v_5, y asi sucesivamente v_n domina a v_{n-1}. Por lo tanto, $\gamma(C_n) \leq |S| = \frac{n-1}{3} + 1 = \frac{n+2}{3}$, es decir, $\gamma(C_n) \leq \frac{n+2}{3}$.

Afirmación 2.1. (**[13]**) $\gamma(C_n) = |S|$.
Procediendo por contradicción, supongamos que existe un conjunto dominante S' tal que $|S'| < |S| = \frac{n+2}{3} = \frac{3k+1+2}{3} = k+1$, entonces $|S'| \leq k$. Sea $A = V(C_n) - S'$, por construcción de C_n se tiene que $\delta(v) = 2$ para todo v en $V(C_n)$, en particular para los vértices en S', lo que implica que $|A| \leq 2|S'| \leq 2k$. Por consiguiente $|A \cup S'| = |A| + |S'| \leq 2k + k = 3k = n-1$, pero $A \cup S' = V(C_n)$ lo que implica que $|V(C_n)| \leq n-1$, entonces $V(C_n) < n$ lo cual es una contra-

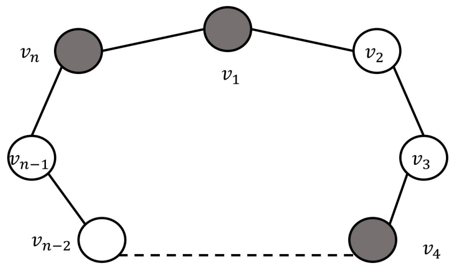

Figura 2.15: Los vértices sombreados representan al conjunto S

dicción. Por lo tanto, no existen conjuntos dominantes de cardinalidad menor a S y por consiguiente $\gamma(C_n) = |S| = k + 1$.

Afirmación 2.2. $\langle V(C_n) - S \rangle = \frac{n-1}{3} K_2$.

Recordamos que en este caso $n = 3k + 1$, entonces $\frac{n-1}{3} = \frac{3k+1-1}{3} = k$, por lo cual tenemos que demostrar que $\langle V(C_n) - S \rangle = kK_2$. Notemos que $A(\langle V(C_n) - S \rangle) = \{(v_{3i+2}, v_{3i+3}) : 0 \leq i \leq \frac{n-4}{3}\}$(ver figura 2.16), además por cada índice en $\{0, \ldots, \frac{n-4}{3}\}$ tenemos una copia de K_2 y dado que la cardinalidad de dicho conjunto es $\frac{n-4}{3} + 1 = \frac{3k+1-4}{3} + 1 = \frac{3(k-1)}{3} + 1 = k - 1 + 1 = k$, entonces tenemos k copias de K_2. Por lo tanto, $\langle V(C_n) - S \rangle = \frac{n-1}{3} K_2$.

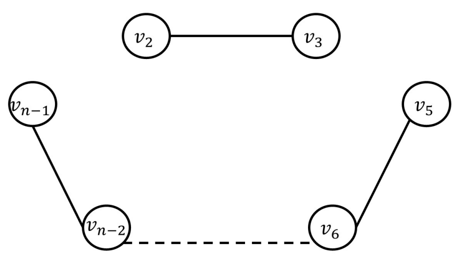

Figura 2.16: $\langle V(C_n) - S \rangle$

De la afirmación anterior se sigue que cada conjunto independiente en $\langle V(C_n) - S \rangle$ contiene a lo más $\frac{n-1}{3}$ vértices.

Afirmación 2.3. (**[14]**) $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

En el caso en el que $k = 2s$ tomamos $I_1 = \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\}$ el cual es un conjunto independiente (ver figura 2.17), por lo cual $\beta_0(C_n) \geq |I_2| = \frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$, es decir, $\beta_0(C_n) \geq \frac{n-1}{2}$. Por otro lado, dado que $k = 2s$ tenemos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{6s+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2(3s)+1}{2} \rfloor = \lfloor 3s + \frac{1}{2} \rfloor$. Además sabemos que $0 < \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} < 1$, entonces $3s \leq 3s + \frac{1}{2}$ y $3s + \frac{1}{2} < 3s + 1$, es decir,

$3s \leq 3s + \frac{1}{2} < 3s + 1$, lo que impica que $\lfloor 3s + \frac{1}{2} \rfloor = 3s = \frac{6s+1-1}{2} = \frac{n-1}{2}$. Por lo tanto, $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

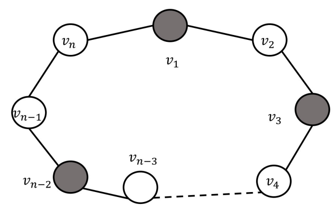

Figura 2.17: Los vértices sombreados representan al conjunto I_1

En el caso en que $k = 2s + 1$, para algún s en los naturales, tomamos $I_2 = \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}\}$ el cual es un conjunto independiente (ver figura 2.18), lo que implica que $\beta_0(C_n) \geq |I_1| = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$. Por otro lado, dado que $k = 2s + 1$ tenemos que $n = 3(2s + 1) + 1 = 6s + 4 = 2(3s + 2)$, entonces $\frac{n}{2} = \frac{2(3s+2)}{2} = 3s + 2$. Por lo tanto, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2} = 3s + 2$ y por consiguiente $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

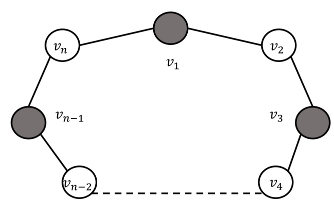

Figura 2.18: Los vértices sombreados representan al conjunto I_2

Afirmación 2.4. $\frac{n-1}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

En el caso en el que $k = 2s$ tenemos que $\frac{n-1}{3} = \frac{3(2s)+1-1}{3} = 2s$, además por el análisis anterior sabemos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 3s$. Claramente $2s < 3s$ de lo cual se sigue que $\frac{n-1}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

En el caso en el que $k = 2s + 1$ se tiene que $\frac{n-1}{3} = \frac{3(2s+1)+1-1}{3} = 2s + 1$, además por el análisis anterior sabemos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 3s + 2$. Es claro que $2s < 3s$, entonces $2s + 1 < 3s + 1 < 3s + 2$ lo que impica que $\frac{n-1}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ahora por la afirmación 2.3 y 2.4 se tiene que $\frac{n-1}{3} < \beta_0(C_n)$ esto implica que $V(C_n) - S$ no contiene β_0-conjuntos de C_n. Por lo cual, S intersecta a todos los β_0-conjuntos de C_n y usando que S es un conjunto dominante se tiene que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Por lo tanto, $\gamma_{it}(C_n) \leq |S| = \frac{n-3}{3} + 1 = \frac{n}{3}$. Ahora por la afirmación 2.1 sabemos que $\gamma(C_n) = |S|$ por lo cual no es posible encontrar un conjunto dominante que intersecte a todos los β_0-conjuntos de C_n de cardinalidad menor a la de S, es decir, no es posible encontrar un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad menor. Por lo tanto, $\gamma_{it}(C_n) = k+1$.

Por otro lado, sabemos que $k+1 > k+\frac{1}{3}$ y $k+\frac{1}{3}+1 > k+1$, es decir, $k+1 > k+\frac{1}{3} > k+1-1$ lo que implica que $\lceil k+\frac{1}{3} \rceil = k+1$, pero $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \lceil \frac{3k+1}{3} \rceil = \lceil k+\frac{1}{3} \rceil$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Caso 3. $n \equiv 2$ $(mod\ 3)$.

En este caso $n = 3k+2$ para algún k en los naturales. Sea $S = \{v_{3i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-2}{3}\}$ (ver figura 2.19) un conjunto dominante de C_n ya que v_1 domina a v_n y v_2, v_4 domina a v_3 y v_5 y asi sucesivamente v_{n-1} domina a v_{n-2}. Por lo tanto, $\gamma(C_n) \leq |S| = \frac{n-2}{3}+1 = \frac{n+1}{3}$, es decir, $\gamma(C_n) \leq \frac{n+1}{3}$.

Afirmación 3.1. ([**13**]) $\gamma(C_n) = |S|$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un conjunto dominante S' tal que $|S'| < |S| = \frac{n+1}{3} = \frac{3k+2+1}{3} = k+1$, entonces $|S'| \leq k$. Sea $A = V(C_n) - S'$, por construcción de C_n se tiene que $\delta(v) = 2$ para todo v en $V(C_n)$, en particular para los vértices en S', lo que implica que $|A| \leq 2|S'| \leq 2k$. Por consiguiente $|A \cup S'| = |A|+|S'| \leq 2k+k = 3k = n-2$, pero $A \cup S' = V(C_n)$ lo que implica que $|V(C_n)| \leq n-2$, entonces $V(C_n) < n-1 < n-2$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no existen conjuntos dominantes de cardinalidad menor a S y por consiguiente $\gamma(C_n) = |S| = k+1$.

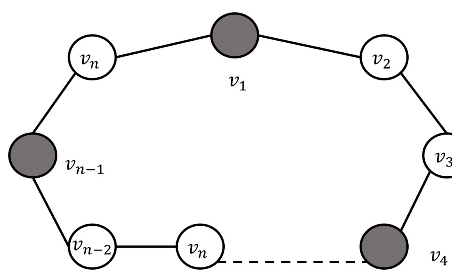

Figura 2.19: Los vértices sombreados representan a conjunto S

Afirmación 3.2. $\langle V(C_n) - S \rangle = \frac{n-2}{3} K_2 \cup K_1$.

Recordamos que en este caso $n = 3k+2$, entonces $\frac{n-2}{3} = \frac{3k+2-2}{3} = k$, por lo cual tenemos que demostrar que $\langle V(C_n) - S \rangle = kK_2 \cup K_1$. Notemos que $A(\langle V(C_n) - S \rangle) = \{(v_{3i+2}, v_{3i+3}) : 0 \leq i \leq \frac{n-5}{3}\}$(ver figura 2.20), además por cada índice en $\{0, \ldots, \frac{n-5}{3}\}$ tenemos una copia de K_2 y dado que la cardinalidad de dicho conjunto es $\frac{n-5}{3}+1 = \frac{3k+2-5}{3}+1 = \frac{3(k-1)}{3}+1 = k-1+1 = k$, entonces tenemos k copias de K_2. Por otro lado, notemos que v_n es un vértice aislado en $\langle V(C_n) - S \rangle$ ya que v_1 y v_{n-1} pertenecen a S. Por lo tanto, $\langle V(C_n) - S \rangle = \frac{n-2}{3} K_2 \cup K_1$.

De la afirmación anterior se sigue que cada conjunto independiente en $\langle V(C_n) - S \rangle$ contiene a lo más $\frac{n-2}{3}$ vértices.

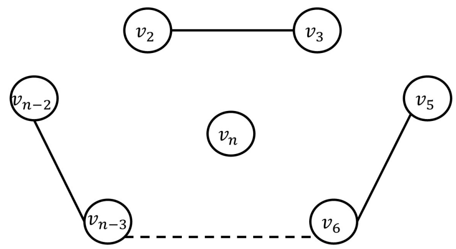

Figura 2.20: $\langle V(C_n) - S \rangle$

Afirmación 3.3. (**[14]**) $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Para el caso en el que $k = 2s + 1$ para algún s en los naturales, tomamos $I_1 = \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\}$ el cual es un conjunto independiente (ver figura 2.21), por lo cual $\beta_0(C_n) \geq |I_1| = \frac{n-3}{2} + 1 = \frac{n-1}{2}$, es decir, $\beta_0(C_n) \geq \frac{n-1}{2}$. Por otro lado, dado que $k = 2s + 1$ tenemos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{6s+5}{2} \rfloor = \lfloor \frac{2(3s+2)+1}{2} \rfloor$ $= \lfloor 3s + 2\frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 3s + \frac{5}{2} \rfloor$. Además sabemos que $2 < \frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2} < 3$, entonces $3s + 2 \leq 3s + \frac{5}{2}$ y $3s + \frac{5}{2} < 3s + 2 + 1$, es decir, $3s + 2 \leq 3s + \frac{5}{2} < 3s + 3$, lo que impica que $\lfloor 3s + \frac{5}{2} \rfloor = 3s + 2 = \frac{6s+5-1}{2} = \frac{n-1}{2}$. Por lo tanto, $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

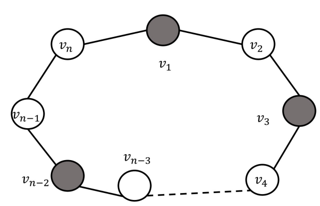

Figura 2.21: Los vértices sombreados representan al conjunto I_1

En el caso en que $k = 2s$, para algún s en los naturales, tomamos $I_2 = \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}\}$ el cual es un conjunto independiente (ver figura 2.22), lo que implica que $\beta_0(C_n) \geq |I_2| = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$. Por otro lado, dado que $k = 2s$ tenemos que $n = 3(2s)+2 = 2(3s+1)$, entonces $\frac{n}{2} = \frac{2(3s+1)}{2} = 3s+1$. Por lo tanto, $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2} = 3s + 1$ y por consiguiente $\beta_0(C_n) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Afirmación 3.4. $\frac{n-2}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

En el caso en el que $k = 2s + 1$ se tiene que $\frac{n-2}{3} = \frac{3(2s+1)+2-2}{3} = 2s + 1$, además por el análisis anterior sabemos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 3s + 2$. Es claro que $2s < 3s$, entonces $2s + 1 < 3s + 1 < 3s + 2$ lo que impica que $\frac{n-2}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

En el caso en el que $k = 2s$ tenemos que $\frac{n-2}{3} = \frac{3(2s)+2-2}{3} = 2s$, además por el análisis anterior sabemos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 3s + 1$. Claramente $2s < 3s < 3s + 1$ de

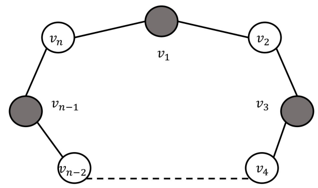

Figura 2.22: Los vértices sombreados representan al conjunto I_2

lo cual se sigue que $\frac{n-2}{3} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ahora por la afirmación 3.3 y 3.4 se tiene que $\frac{n-2}{3} < \beta_0(C_n)$ esto implica que $V(C_n) - S$ no contiene β_0-conjuntos de C_n. Por lo cual, S intersecta a todos los β_0-conjuntos de C_n y usando que S es un conjunto dominante se tiene que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Por lo tanto, $\gamma_{it}(C_n) \leq |S| = \frac{n-2}{3} + 1 = \frac{n+1}{3}$. Ahora por la afirmación 3.1 sabemos que $\gamma(C_n) = |S|$ por lo cual no es posible encontrar un conjunto dominante que intersecte a todos los β_0-conjuntos de C_n de cardinalidad menor a la de S, es decir, no es posible encontrar un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad menor. Por lo tanto, $\gamma_{it}(C_n) = k + 1$.

Por otro lado, sabemos que $k + 1 > k + \frac{2}{3}$ y $k + \frac{2}{3} + 1 > k + 1$, es decir, $k + 1 > k + \frac{2}{3} > k + 1 - 1$ lo que implica que $\lceil k + \frac{2}{3} \rceil = k + 1$, pero $\lceil \frac{n}{3} \rceil = \lceil \frac{3k+2}{3} \rceil = \lceil k + \frac{2}{3} \rceil$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.■

Teorema 2.0.9. *([1])Para cuaquier W_n rueda se tiene que*

$$\gamma_{it}(W_n) = \begin{cases} 2 & si\ n=5 \\ 3 & si\ n \geq 7\ e\ impar\ o\ n=6 \\ 4 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Demostración

Para el caso en que $n = 5$ tomamos $S = \{v_1, v_2\}$ (ver figura 2.23) que es un conjunto dominante de W_5 ya que v_1 domina a v_4 y a v, y v_2 domina a v_3. Por otro lado, notemos que los únicos conjuntos independientes máximos de W_5 son $\{v_1, v_3\}$ y $\{v_2, v_4\}$, y S intersecta a dichos conjuntos por lo cual S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Por lo tanto, $\gamma_{it}(W_5) \leq |S| = 2$, es decir, $\gamma_{it}(W_5) \leq 2$.

Ahora veamos que el único conjunto dominante de cardinalidad menor a la de S es $\{v\}$ pero dicho conjunto no intersecta a ningún β_0-conjunto de W_5. Por lo tanto, no existen conjuntos dominantes idependientes transversales de cardinalidad menor a 2 y por consiguiente $\gamma_{it}(W_5) = 2$.

Para el caso en el que $n = 6$ tomamos $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ (ver figura 2.24) conjunto dominante de W_6 ya que v_1 domina a v_5, v_2 domina a v y v_3 domina

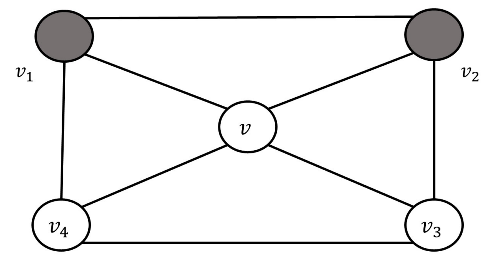

Figura 2.23: Los vértices sombreados representan al conjunto S

a v_4. Por otro lado, notemos que $\{v_1, v_3\}$,$\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_4\}$,$\{v_2, v_5\}$ y $\{v_3, v_5\}$ son todos los β_0-conjuntos de W_6, más aun S intersecta a dichos conjuntos. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos y por consiguiente $\gamma_{it}(W_6) \leq |S| = 3$.

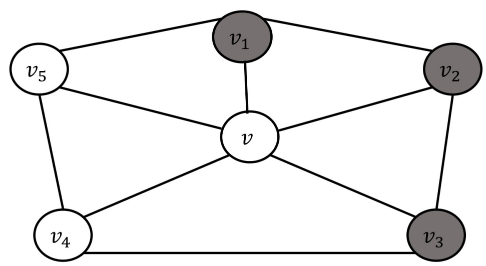

Figura 2.24: Los vértices sombreados representan al conjunto S

Observemos que los conjuntos dominantes de W_6 de cardinalidad menor que 3 son $D_1 = \{v_1, v_3\}$, $D_2 = \{v_1, v_4\}$, $D_3 = \{v_2, v_4\}$, $D_4 = \{v_2, v_5\}$, $D_5 = \{v_3, v_5\}$, $D_6 = \{v\}$, $D_7 = \{v_1, v\}$, $D_8 = \{v_2, v\}$, $D_9 = \{v_3, v\}$, $D_{10} = \{v_4, v\}$ y $D_{11} = \{v_5, v\}$. Ahora si i pertenece a $\{1, \ldots, 5\}$ en $\langle W_6 - D_i \rangle$ tenemos que el vértice de grado uno forma un β_0-conjunto de W_6 con cualquier vértice distinto de v. La gráfica $\langle W_6 - D_6 \rangle$ contiene a todos los conjuntos independientes máximos de W_6. Por último si i pertenece a $\{7, \ldots, 11\}$ en $\langle W_6 - D_i \rangle$ tenemos que los dos vértices de grado uno forman un β_0-conjunto de W_6 (ver figura 2.25). Por todo el análisis anterior podemos concluir que cualquier conjunto dominante de cardinalidad menor que 3 no intersecta a todos los β_0-conjuntos de W_6, es decir, no existen conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de cardinalidad menor que 3. Por lo tanto, $\gamma_{it}(W_6) = 3$.

Ahora para el caso en que $n \geq 7$ y es impar tomamos $S = \{v, v_1, v_4\}$ (ver figura 2.26), por definición de W_n sabemos que v es adyacente a todos los vértices entonces cualquier conjunto que contiene a v es dominante en particular S es un conjunto dominante de W_n. Como n es impar se tiene que W_n contiene un

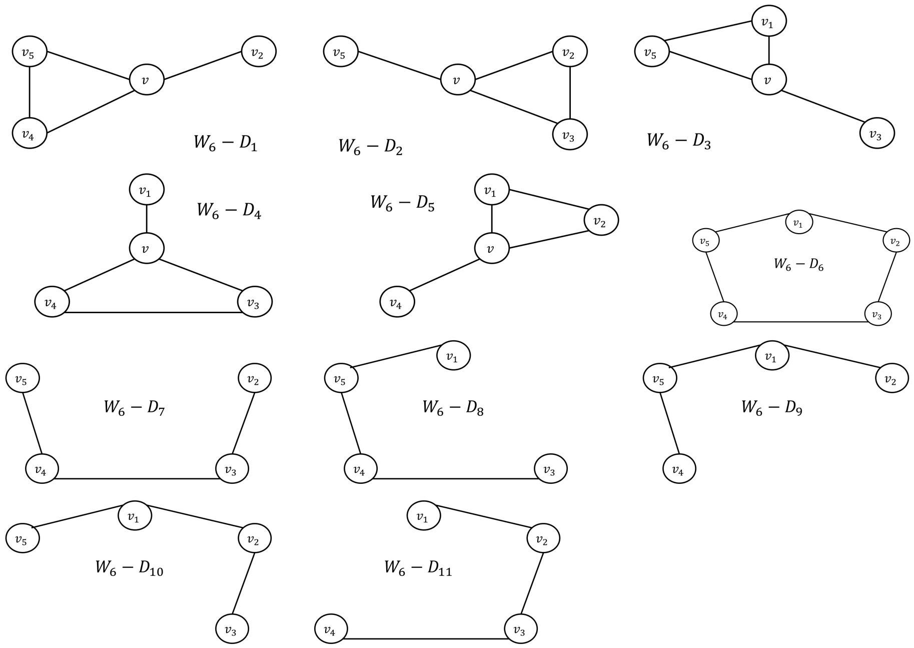

Figura 2.25: Graficas inducidas por $V(G) - D_i$

ciclo par, lo que implica que los únicos conjuntos independientes máximos son $A_1 = \{v_{2i+1} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\}$ y $A_2 = \{v_{2i+2} : 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}\}$ (ver figura 2.27). Dado que v_1 pertenece a A_1 y v_4 pertenece a A_2, entonces S intersecta a todos los conjuntos dominantes de W_n. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de W_n, es decir, $\gamma_{it}(W_n) \leq |S| = 3$.

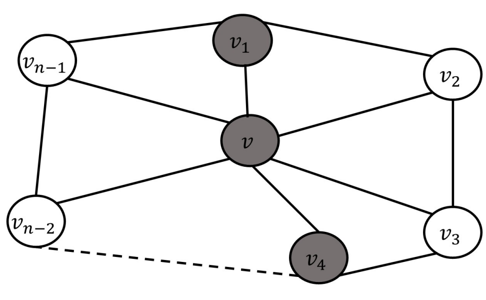

Figura 2.26: Los vértice sombreados representan el conjunto S

Ahora notemos que el único conjunto dominante de cardinalidad uno es $\{v\}$ y dicho conjunto no intersecta a ningún β_0-conjunto de W_n. Los conjuntos dominantes de cardinalidad dos de W_n contienen a v que no pertenece a ningún β_0-conjunto, y el otro vértice v_i solo puede pertenecer a A_1 o A_2 ya que i o es

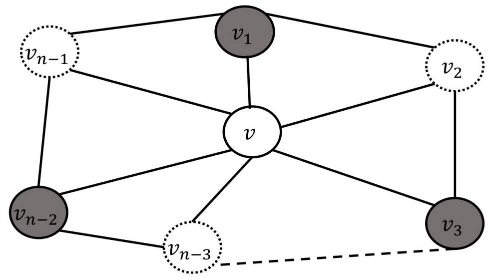

Figura 2.27: Los vértice sombreados representan el conjunto A_1 y los vértices punteados representan al conjunto A_2

impar o par por lo cual podemos concluir que ningún conjunto dominante de cardinalidad dos intersecta a todos los β_0-conjuntos. Por lo tanto, no existen conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de cardinalidad menor o igual a 2 y por consiguiente $\gamma_{it}(W_n) = 3$.

En el caso en el que $n = 4$ tenemos que W_n es una gráfica completa, lo que impica que $\gamma_{it}(W_n) = 4$. Para el caso en el que $n \geq 8$ y n es de la forma $2k$ para algún k es los naturales, tomamos $S = \{v, v_1, v_2, v_n\}$ (ver figura 2.28), el cual es dominante ya que v está en S. Notemos que los β_0-conjuntos de W_n son los β_0-conjuntos de C_{n-1} y por el análisis del teorema anterior tenemos que $\beta_0(W_n) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Ahora observemos que $\langle V(W_n) - S \rangle$ tiene $n - 4$ vértices; más aún, $\langle V(W_n) - S \rangle$ es una trayectoria por lo cual $\beta_0(\langle V(W_n) - S \rangle) = \lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor = \frac{n-4}{2}$ (ver figura 2.29).

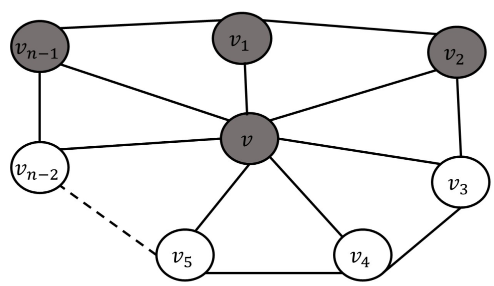

Figura 2.28: Los vértices sombreados representan el conjunto S

Por otro lado, sabemos que $n-4 < n-1$, entonces $\frac{n-4}{2} < \frac{n-1}{2}$, lo que implica que $\frac{n-4}{2} < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \beta_0(W_n)$ de lo que se sigue que $\langle V(W_n) - S \rangle$ no contiene β_0-conjuntos de W_n. Por lo tanto, S es un conjunto dominante que intersecta a todos los β_0-conjuntos, es decir, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos y por consiguiente $\gamma_{it}(W_n) \leq |S| = 4$.

Afirmacíon. $I_1 = \{v_{2l} : 1 \leq l \leq \frac{n-2}{2}\}$ e $I_2 = \{v_{2l+1} : 0 \leq l \leq \frac{n-4}{2}\}$ son

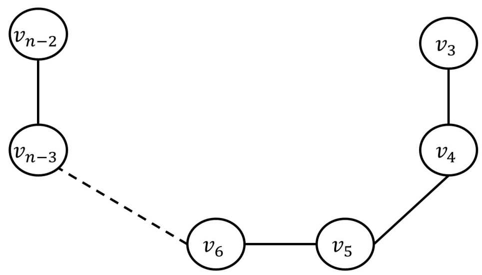

Figura 2.29: $\langle V(W_n) - S\rangle$

β_0-conjuntos de W_n.

También podemos ver al conjunto I_1 como $\{v_2, v_4, \ldots, v_{n-2}\}$ que claramente es un conjunto independiente (ver figura 2.30), solo nos fata demostrar que $|I_1| = \beta_0(W_n) = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$. Se tiene que $|I_1| = \frac{n-2}{2} = \frac{2k-2}{2} = k-1 = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ lo que implica que $|I_1| = \beta_0(W_n)$, es decir, I_1 es un β_0-conjunto de W_n.

Ahora para el conjunto I_2 observemos que también lo podemos ver de la forma $\{v_1, v_3, \ldots, v_{n-3}\}$, claramente I_2 es un conjunto independiente (ver figura 2.30). Por otro lado, notemos que $|I_2| = \frac{n-4}{2}+1 = \frac{2k-4}{2}+1 = k-2+1 = \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, lo que impica que $|I_2| = \beta_0(W_n)$. Por lo tanto, I_2 es un β_0-conjunto de W_n.

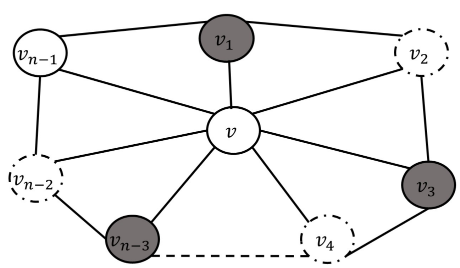

Figura 2.30: Los vértices sombreados representan al conjunto I_1 y los vértices punteados representan al conjunto I_2

Sabemos que el único conjunto dominante de cardinalidad uno es $\{v\}$ y no intersecta a ningún β_0-conjunto de W_n. Cualquier conjunto dominante de cardinalidad 2 es de la forma $\{v, v_i\}$, en el caso en el que i es impar, entonces dicho conjunto no intersecta al I_1 que por la afirmación anterior se tiene que es un β_0-conjunto, en el caso en que i es par entonces $\{v, v_i\}$ no intersecta a I_2 que de igual manera por la afirmación anterior es un β_0-conjunto de W_n. Por lo tanto, no existen conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de cardinalidad dos.

Ahora si tomamos un conjunto dominante de cardinalidad tres sabemos que es de la forma $S' = \{v, v_i, v_j\}$, entonces tenemos tres posibles casos. Si i y j son

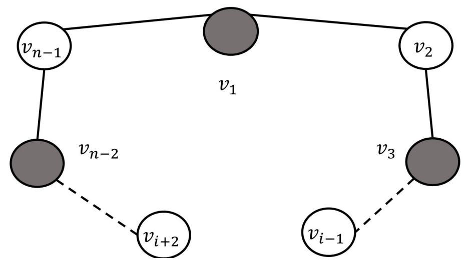

Figura 2.31: $\langle V(W_n) - S' \rangle$, los vértices sombreados representan al conjunto I

impares, entonces I_1 es el β_0-conjunto de W_n que no es intersectado por S'. Si i y j son pares, entonces S' no intersecta a I_2 que es un β_0-conjunto de W_n. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i = 2s - 1$ s y $j = 2t$ con s y t en los naturales, de lo cual surgen dos subcasos: si i y j son consecutivos, entonces $\langle V(W_n) - S' \rangle$ es una trayectoria de orden impar (ver figura 2.31),tomamos $I = \{v_{i+2}, v_{i+4}, \ldots, v_{i-1}\}$, notemos que $\{v_{i+2}, v_{i+4}, \ldots, v_{i-1}\} = \{v_{i+2}, v_{i+4}, \ldots, v_{i+(n-1-i)}\} \cup \{v_2, v_4, \ldots, v_{i-1}\}$ y a su vez $\{v_{i+2}, v_{i+4}, \ldots, v_{i+(n-1-i)}\} \cup \{v_2, v_4, \ldots, v_{i-1}\} = \{v_{i+2r_1} : 1 \leq r_1 \leq k - s\} \cup \{v_{2r_2} : 1 \leq r_2 \leq \frac{i-1}{2}\}$ por lo cual

$$I = \{v_{i+2r_1} : 1 \leq r_1 \leq k - s\} \cup \{v_{2r_2} : 1 \leq r_2 \leq \frac{i-1}{2}\}$$

tomando en cuenta que $n-1-i = 2k-1-2s+1 = 2(k-s)$. I es un β_0-conjunto de W_n, ya que $|I| = (k-s)+\frac{i-1}{2} = k-s+\frac{2s-1-1}{2} = k-s+s-1 = k-1=\beta_0(W_n)$ y claramente I es un conjunto independiente (ver figura 2.31). Por lo tanto, I es un β_0-conjunto de W_n que no intersecta a S'.

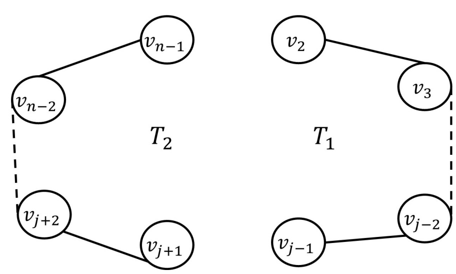

Figura 2.32: $\langle V(W_n) - S' \rangle$

Para el subcaso en el que i y j no son consecutivos, supongamos sin pérdida de generalidad que $i = 1$ por lo cual se tiene que $\langle V(W_n) - S' \rangle$ es la unión de dos trayectorias T_1 de orden par ($|V(T_1)| = j - 2$) y T_2 de orden impar ($|V(T_2)| = n-1-j$) (ver figura 2.32). Encontremos un conjunto independiente de cardinalidad máxima en T_1, para esto tomamos el conjunto

$L_1 = \{v_2, v_4, \ldots, v_{j-2}\} = \{v_{2r} : 1 \leq r \leq \frac{j-2}{2}\}$ que claramente es independiente (ver figura 2.33) y $|L_1| = \frac{j-2}{2} = \lceil \frac{j-2}{2} \rceil = \beta_0(T_1)$ (por lo visto en demostraciones anteriores), lo que implica que L_1 es un β_0-conjunto de T_1.

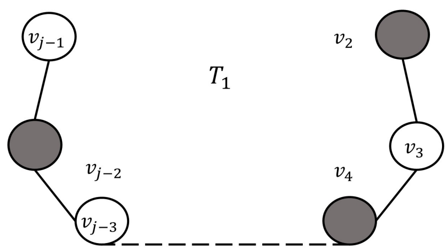

Figura 2.33: Los vértices sombreados representan al conjunto L_1

Ahora para T_2 tomamos el conjunto

$$L_2 = \{v_{j+1}, v_{j+3}, \ldots, v_{j+(n-1-j)}\} = \{v_{j+2r-1} : 1 \leq k - t\}$$

esto tomando en cuenta que $n - 1 - j = 2k - 1 - 2t = 2(k - t) - 1$, claramente L_2 es un conjunto independiente (ver figura 2.34) y $|L_2| = k - t$ pero dado que $k - t = \frac{2k-2t}{2} = \frac{n-j}{2} = \lceil \frac{n-1-j}{2} \rceil$ se sigue que $|L_2| = \lceil \frac{n-1-j}{2} \rceil$. Por demostraciones anteriores sabemos que $\beta_0(T_2) = \lceil \frac{n-1-j}{2} \rceil$, entonces podemos concluir que $\beta_0(T_2) = |L_2|$. Por lo tanto, L_2 es un β_0-conjunto de T_2.

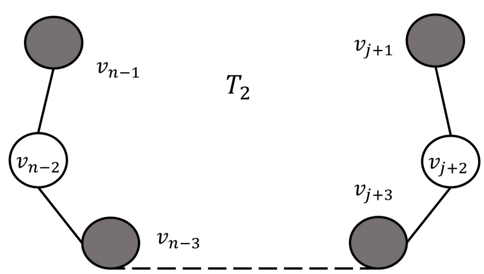

Figura 2.34: Los vértices sombreados representan al conjunto L_2

Afirmación. $L_1 \cup L_2$ es un β_0-conjunto de C_{n-1}.

Como L_1 y L_2 son independientes, de la elección de L_1 y L_2 se sigue que $L_1 \cup L_2$ es un conjunto independiente de $\langle V(W_n) - S' \rangle$ y por consiguiente es un conjunto independiente de W_n. Solo nos falta demostrar que $|L_1 \cup L_2| = \beta_0(C_{n-1})$, es decir $|L_1 \cup L_2| = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$; como $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ se tiene que $|L_1 \cup L_2| = |L_1| + |L_2| = \frac{n-j}{2} + \frac{j-2}{2} = \frac{n-j+j-2}{2} = \frac{n-2}{2} = k - 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Por lo tanto, $L_1 \cup L_2$ es un β_0-conjunto de C_{n-1} que además no intersecta a

S' y por consiguiente $L_1 \cup L_2$ es un β_0-conjunto de W_n que no intersecta a S'. Por el análisis hecho para cada caso podemos concluir que no existen conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de cardinalidad 3. Por lo tanto, $\gamma_{it}(W_n) = 4$. ∎

Teorema 2.0.10. *([1]) Si G es una gráfica inconexa con componentes conexas $G_1, G_2, \ldots, G_r$ entonces* $\gamma_{it}(G) = \min\limits_{1\leq k\leq r}\{\gamma_{it}(G_k) + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)\}$.

Demostración.
Supongamos sin pérdida de generalidad que
$\gamma_{it}(G_1) + \sum\limits_{j=2}^{r} \gamma(G_j) = \min\limits_{1\leq k\leq r}\{\gamma_{it}(G_k) + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)\}$. A continuación encontraremos un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad
$\gamma_{it}(G_1) + \sum\limits_{j=2}^{r} \gamma(G_j)$, para lo cual necesitaremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Si I es un β_0-conjunto de G, entonces para cada i en $\{1, \ldots, r\}$ existe un β_0-conjunto de G_i, digamos I_i, de tal manera que $I = \bigcup\limits_{i=1}^{r} I_i$.

Sea i en $\{1, \ldots, r\}$, proponemos $I_i = I \cap V(G_i)$. Supongamos que $I \cap V(G_i)$ no es un conjunto independiente, entonces existen dos vértices en $I \cap V(G_i)$, digamos v_{i_1} y v_{i_2}, tales que $(v_{i_1}, v_{i_2}) \in A(G)$ pero dado que $I \cap V(G_i) \subset I$ entonces v_{i_1} y v_{i_2} son dos vértices en I tales que $(v_{i_1}, v_{i_2}) \in A(G)$, lo cual contradice el hecho que I es un conjunto independiente. Por lo tanto, $I \cap V(G_i)$ es un conjunto independiente. Ahora, supongamos que $|I \cap V(G_i)| \neq \beta_0(G_i)$, y dado que $I \cap V(G_i)$ es un conjunto independiente se sigue que $|I \cap V(G_i)| < \beta_0(G_i)$, lo cual implica que existe en G_i un conjunto J tal que J es un β_0-conjunto. El conjunto $(I \cap V(G_i))] \cup J$ es un conjunto independiente ya que I, $I \cap V(G_i)$ y J son conjuntos independientes, y $|I - (I \cap V(G_i)) \cup J| > |I|$ ya que $|I \cap V(G_i)| < |J|$, lo cual contradice el hecho que I es un β_0-conjunto de G.

Por último, demostraremos que $I = \bigcup\limits_{i=1}^{r} I_i$. Como $I \cap V(G_i) \subseteq I$ para cada i en $\{1, \ldots, r\}$, entonces $I_i \subseteq I$ para cada i en $\{1, \ldots, r\}$, lo que implica que $\bigcup\limits_{i=1}^{r} I_i \subseteq I$. Por otro lado, sea x en I, como $V(G) = \bigcup\limits_{i=1}^{r} V(G_i)$ e $I \subseteq V(G)$, entonces x pertenece a $V(G_i)$ para alguna i en $\{1, \ldots, r\}$, lo que implica que x pertenece a $I \cap V(G_i)$ para alguna i en $\{1, \ldots, r\}$, por lo cual x pertenece a $\bigcup\limits_{i=1}^{r} I_i$. Por lo tanto, $I \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{r} I_i$. Así, $I = \bigcup\limits_{i=1}^{r} I_i$.

Afirmación 2. Si D' es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G_1 y $S_j^{'}$ es un conjunto dominante de G_j para cada $j \geq 2$, entonces

$D' \cup (\bigcup_{j=2}^{r} S_j^{'})$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G.

Dado que en particular $S_j^{'}$ y D' son conjuntos dominantes para cada $j \geq 2$ se tiene que $D' \cup (\bigcup_{j=2}^{r} S_j^{'})$ es un conjunto dominante de G. Puesto que D' intersecta a cada β_0-conjunto de G_1 y lo demostrado en la afirmación 1, se tiene que D' intersecta a cuaquier β_0-conjunto de G, de lo cual se concluye que $D' \cup (\bigcup_{j=2}^{r} S_j^{'})$ intersecta a todos los β_0-conjuntos de G.

Por lo tanto, $D' \cup (\bigcup_{j=2}^{r} S_j^{'})$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G.

Sean D un γ_{it}-conjunto de G_1 y y S_j un γ-conjunto de G_j para cada $j \geq 2$, como en particular D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos y S_j es un conjuto dominante para todo $j \geq 2$, entonces por la afirmación 2 se tiene que $D \cup (\bigcup_{j=2}^{r} S_j)$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G, por lo cual concluimos que $|D \cup (\bigcup_{j=2}^{r} S_j)| \geq \gamma_{it}(G)$.

Ahora como $D, S_2, \ldots, S_r$ son conjuntos ajenos dos a dos, entonces tenemos que D y $\bigcup_{j=2}^{r} S_j$ son conjuntos ajenos de lo que se sigue que $|D \cup (\bigcup_{j=2}^{r} S_j)| = |D| + |\bigcup_{j=2}^{r} S_j|$. Además sabemos que D es un γ_{it}-conjunto de G_1 y S_j es un γ-conjunto de G_j para cada $j \geq 2$, entonces

$$|D| + |\bigcup_{j=2}^{r} S_j| = \gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j)$$

lo que implica que

$$\gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) = \min_{1 \leq k \leq r} \{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} \gamma(G_j)\} \geq \gamma_{it}(G) \tag{2.1}$$

Por último, sea S un γ_{it}-conjunto de G. Observemos que S debe intersectar a $V(G_j)$ para cada componente G_j de G ya que en particular S es un conjunto dominante, además $S \cap V(G_j)$ es un conjunto dominante en G_j, para cada $j \geq 1$, ya que S es un conjunto dominante y no existen aristas entre vérices de distintas componentes conexas. Por otro lado, en particular en la afirmación 1 se demostro que si I es un β_0-conjunto en G, entonces $I \cap V(G_j)$ es un β_0-conjunto en G_j para toda j en $\{1, \ldots, r\}$.

Afirmación 3. Existe j en $\{1, \ldots, r\}$ tal que $S \cap V(G_j)$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos en G_j.

Procediendo por contradicción, supongamos que $S \cap V(G_j)$ no es un conjunto dominante transversal de independientes máximos en G_j para toda j en $\{1, \ldots, r\}$. Como $S \cap V(G_j)$ es un conjunto dominante en G_j para cada j en $\{1, \ldots, r\}$, entonces existe un conjunto independiente máximo, digamos I_j, en G_j que no intersecta a $S \cap V(G_j)$. Por lo tanto $\bigcup_{j=1}^{r} I_j$ es un conjunto independiente máximo en G tal que $(\bigcup_{j=1}^{r} I_j) \cap S = [\bigcup_{j=1}^{r} I_j] \cap (\bigcup_{j=1}^{r}(S \cap V(G_j))) = \emptyset$, lo que contradice el hecho que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G. Por lo tanto, para algún j en $\{1, \ldots, r\}$ se tiene que $S \cap V(G_j)$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos en G_j.

Ahora demostremos que $|S \cap V(G_j)| = \gamma_{it}(G_j)$ y $|S \cap V(G_i)| = \gamma(G_i)$ para toda i en $\{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r\}$. Procediendo por contradicción, analicemos los siguientes casos:

Caso 1. $|S \cap V(G_j)| \neq \gamma_{it}(G_j)$.

En este caso existe un conjunto dominante transversal de independientes máximos en G_j, S'de cardinalidad menor que $|S \cap V(G_j)|$, lo que implica que $(\bigcup_{i=1}^{j-1}(S \cap V(G_i))) \cup S' \cup (\bigcup_{l=j+1}^{r} (S \cap V(G_l))$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos por la afirmación 2 y el hecho que $S \cap V(G_i)$ es un conjunto dominante para cada i en $\{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r\}$) de cardinalidad menor a la de S, lo cual es una contradicción ya que S es un γ_{it}-conjunto de G.

Caso 2. Existe alguna i en $\{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r\}$ tal que $|S \cap V(G_i)| \neq \gamma(G_i)$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $i = 1$, entonces existe un conjunto dominante S_1 en G_1 de cardinalidad menor que $|S \cap V(G_1)|$. Ahora como sabemos que $S \cap V(G_j)$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos en G_j, $S \cap V(G_i)$ es un conjunto dominante para cada i en $\{2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r\}$ y S_1 es un conjunto dominante, por la afirmación 2 se sigue que con lo $S_1 \cup (\bigcup_{i=2}^{r}(S \cap V(G_i))$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Por último, dado que $|S_1| < |S \cap V(G_1)|$ es claro que

$S_1 \cup (\bigcup_{i=2}^{r}(S \cap V(G_i)))$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad menor que S, lo cual es una contradicción ya que S es un γ_{it}-conjunto de G.

Por lo tanto, $|S \cap V(G_j)| = \gamma_{it}(G_j)$ y $|S \cap V(G_i)| = \gamma(G_i)$ para toda i en $\{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r\}$.

Como $S = \bigcup_{k=1}^{r}(S \cap V(G_k))$, entonces $|S| = |\bigcup_{k=1}^{r}(S \cap V(G_k))| = \sum_{k=1}^{r}|S \cap V(G_k)|$ pero por lo demostrado en la afirmación 3 se tiene que $|S| = \gamma_{it}(G_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{r}\gamma(G_k)$,

lo que implica que $|S| \in \{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r}\gamma(G_j) : 1 \leq k \leq r\}$, entonces

$|S| \geq \min\limits_{1\leq k\leq r}\{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r}\gamma(G_j)\}$. Así,

$$\gamma_{it}(G) \geq \min_{1\leq k\leq r}\{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r}\gamma(G_j)\} \tag{2.2}$$

Por lo tanto de (2.1) y (2.2) se concluye que $\gamma_{it}(G) = \min\limits_{1\leq k\leq r}\{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r}\gamma(G_j)\}$.■.

Corolario 2.0.11. *([1]) Si G tiene un vértice aislado, entonces $\gamma_{it}(G) = \gamma(G)$.*

Demostración.

Sean $G_1, \ldots, G_r$ las componentes conexas de G. Por hipótesis una de las componentes conexas es un vértice aislado, supongamos sin pérdida de generalidad que es G_1, por lo cual se tiene que $\gamma_{it}(G_1) = 1$ y $\gamma(G_1) = 1$ de esto se sigue que $\gamma_{it}(G_1) \leq \gamma_{it}(G_k)$ y $\gamma(G_1) \leq \gamma(G_k)$ para cada k en $\{1, \ldots, r\}$. En el caso en que $k = 1$ es claro que

$$\gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r}\gamma(G_j) = \gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r}\gamma(G_j). \tag{2.3}$$

Cuando $k \neq 1$, es facil ver que $\gamma(G_k) \leq \gamma_{it}(G_k)$ de lo cual se sigue que

$\gamma(G_k) + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j) \leq \gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)$, entonces

$$\sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) \leq \gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)$$

por lo cual $1 + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) \leq 1 + \gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)$, se sigue que

$$\gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) \leq \gamma(G_1) + \gamma_{it}(G_k)\sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)$$

. Por lo tanto,

$$\gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) \leq \gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j). \tag{2.4}$$

En particular (2.4) se cumple para $\min_{1\leq k\leq r} \{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)\}$, es decir,

$$\gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) \leq \min_{1\leq k\leq r} \{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)\}. \tag{2.5}$$

Por otro lado, notemos que
$\gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) \in \{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j) : 1 \leq k \leq r\}$, lo que implica que

$$\min_{1\leq k\leq r} \{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)\} \leq \gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) \tag{2.6}$$

Por lo tanto, de (2.5) y (2.6) tenemos que

$$\gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) = \min_{1\leq k\leq r} \{\gamma_{it}(G_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{r} \gamma(G_j)\}$$

.

Entonces por el teorema 2.0.10 se tiene que $\gamma_{it}(G_1) + \sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) = \gamma_{it}(G)$. Notemos que $\gamma_{it}(G_1) = \gamma(G_1)$, lo que implica que

$$\gamma_{it}(G) = \sum_{i=1}^{r} \gamma(G_i). \tag{2.7}$$

Afirmación 1. $\sum_{i=1}^{r} \gamma(G_i) = \gamma(G)$.

Sea S un γ-conjunto de G. Por el análisis hecho en el teorema 2.0.10 sabemos que $S \cap V(G_j)$ es un conjunto dominante de G_j para cada j en $\{1 \ldots, r\}$.

Afirmación 1.1 $|S \cap V(G_j)| = \gamma(G_j)$ para cada j en $\{1 \ldots, r\}$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe alguna k en $\{1 \ldots, r\}$ tal que $|S \cap V(G_k)| \neq \gamma(G_k)$, entonces existe S' un conjunto dominante en G_k de cardinalidad menor a $|S \cap V(G_k)|$. Como $S' \cup (\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} S \cap V(G_i))$ es un conjunto dominante en G y $|S' \cup (\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} S \cap V(G_i))| < |S|$, obtenemos una contradicción ya que S es un γ-conjunto de G. Por lo tanto, $|S \cap V(G_j)| = \gamma(G_j)$ para cada j en $\{1 \ldots, r\}$.

Por otro lado, puesto que $S = \bigcup_{j=1}^{r} (S \cap V(G_j))$, entonces

$$|S| = |\bigcup_{j=1}^{r} (S \cap V(G_j))| = \sum_{j=1}^{r} |S \cap V(G_j)| \tag{2.8}$$

Por (2.8) y la afirmación 1.1 se concluye que $|S| = \sum_{j=1}^{r} \gamma(G_j)$. Por lo tanto, $\sum_{j=2}^{r} \gamma(G_j) = \gamma(G)$.

Así, de (2.7) y la afirmación 1 se tiene que $\gamma_{it}(G) = \gamma(G)$.■

Capítulo 3

Cotas para el número de dominación transversal de independientes máximos y algunas conjeturas.

En este capítulo se darán algunas cotas para el valor de $\gamma_{it}(G)$, en términos de otros parámetros como son: número de dominación, orden de la gráfica, grado mínimo de la gráfica, número de clan y número de cubierta. También daremos algunas caracterizaciones para $\gamma_{it}(G)$ en términos de: orden de la gráfica y número de clan.

Tomando en cuenta el teorema 2.0.10, visto en el capítulo anterior, nos limitaremos a considerar gráficas conexas para el estudio de dominación transversal de independientes máximos. Por lo tanto en el resto de la tesis vamos a suponer que las gráficas con conexas.

Comenzaremos con la siguiente observación: para cualquier gráfica H de orden n se cumple que $1 \leq \gamma_{it}(G) \leq n$, ya que $V(G)$ es un conjunto dominante y $\emptyset$ no es un conjunto dominante.

Dada la desigualdad anterior podemos preguntarnos cuando se cumple que $\gamma_{it}(G) = n$, lo cual análizaremos en el siguiente teorema.

Lema 3.0.1. *([1]) Si G es una gráfica, entonces $\gamma(G) \leq \gamma_{it}(G)$.*

Demostración.

Sea S un γ_{it}-conjunto, por definición se tiene que S en particular es un conjunto dominante, lo que implica que $\gamma(G) \leq |S| = \gamma_{it}(G)$. Por lo tanto, $\gamma(G) \leq \gamma_{it}(G)$.■

Teorema 3.0.2. *([1]) Sea G una gráfica de orden n, $\gamma_{it}(G) = n$ si y sólo si $G = K_n$.*

Demostración.

La condición necesaria es cierta, ya que en el capitulo anterior demostramos que $\gamma_{it}(K_n) = n$

Para la condición suficiente, demostraremos que si $\gamma_{it}(G) = n$, entonces $G = K_n$. Para esto analizaremos dos casos:

Caso 1. $n = 1$. Es claro que la única gráfica de orden uno con $\gamma_{it}(G) = 1$ es K_1.

Caso 2. $n \geq 2$.

En este caso si demostramos que $\beta_0(G) = 1$, entonces podemos concluir que G es completa. Procediendo por contradicción, supongamos que $\beta_0(G) \geq 2$. Tomamos el conjunto $V(G) - \{v\}$, donde v es un vértice cualquiera de $V(G)$, dicho conjunto es dominante ya que G es conexa. Por otro lado como cualquier β_0-conjunto S tiene al menos dos elementos, entonces $S - \{v\} \neq \emptyset$, lo que implica que $(V(G) - \{v\}) \cap S \neq \emptyset$. Así, $V(G) - \{v\}$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) \leq n - 1$ lo que contradice el hecho que $\gamma_{it}(G) = n$. Concluimos que $\beta_0(G) = 1$, lo que implica que $G = K_n$.

Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = n$ si y sólo si $G = K_n$.■

Teorema 3.0.3. *([1]) Si G es una gráfica con n vértices, entonces $\gamma_{it}(G) = n-1$ si y sólo si $G = P_3$.*

Demostración.

Por el teorema 2.0.7 tenemos que $\gamma_{it}(P_3) = 2 = 3 - 1$ con lo cual queda demostrada la condición necesaria.

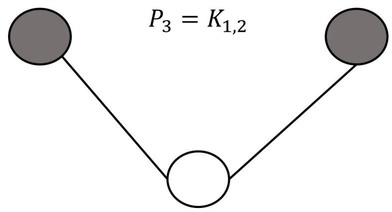

Figura 3.1: Los vértices sombreados representan un γ_{it}-conjunto

Ahora para demotrar la condición suficiente. Supongamos que $\gamma_{it}(G) = n-1$, a continuación demostraremos que $G = P_3$. Por lo visto en el teorema 3.0.2, sabemos que G no es completa, lo que implica que $\beta_0(G) \geq 2$.

Afirmación 1. Si u y v son dos vértices en $V(G)$ tales que $(u, v) \in A(G)$, entonces $\delta(u) = 1$ o $\delta(v) = 1$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $\delta(u) \geq 2$ y $\delta(v) \geq 2$. Sea $S = V(G) - \{u, v\}$. A continuación demostraremos que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos.

Notemos que S es un conjunto dominante ya que $\delta(u) \geq 2$ y $\delta(v) \geq 2$, es decir, u y v son adyacentes a al menos un vértice en S.Por otro lado, supongamos que existe J un β_0-conjunto de G que no intersecta a S, entonces $J \subseteq \{u, v\}$, lo que implica que J no puede ser igual a $\{u, v\}$ ya que en particular J es un conjunto independiente y $(u, v) \in A(G)$. Por lo tanto, $|J| = 1 = \beta_0(G)$ lo cual es una contradicción ya que anteriormente vimos que $\beta_0(G) \geq 2$ y por consiguiente S intersecta a cualquier β_0-conjunto de $V(G)$, es decir, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos.

Dado que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos se sigue que $\gamma_{it}(G) \leq |S| = n - 2$, lo cual contradice el hecho que $\gamma_{it}(G) = n - 1$. Por lo tanto, no existen dos vértices adyacentes de grado mayor igual a 2. Así, para cualquier par de vértices adyacentes u y v se tiene que $\delta(u) = 1$ o $\delta(v) = 1$.

Usando la afirmación 1 y el hecho que G es conexa se tiene que $G = K_{1,n-1}$. Ahora por lo visto en el teorema 2.0.4 sabemos que $\gamma_{it}(K_{1,n-1}) = 2$, pero por hipótesis $\gamma_{it}(G) = n - 1$, entonces $n = 3$. Por lo tanto, $G = P_3$.■

Teorema 3.0.4. *([1]) Sea G una gráfica conexa no completa de orden n. Si $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Demostración.

Sea I un β_0-conjunto de G. Como $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces vamos a dividir la prueba en dos casos:

Caso 1. $\beta_0(G) > \frac{n}{2}$.

Sea u en I y consideremos el conjunto $D = (V(G)-I)\cup\{u\}$. Demostraremos que D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Notemos que $V(G) - D = I - \{u\}$. Sea x en $I - \{u\}$, como G es conexa y $G \neq K_1$ se sigue que $\delta(x) \geq 1$, y puesto que I es un conjunto independiente se tiene que x es adyacente al menos un vértice de $D = (V(G)-I)\cup\{u\}$. Por lo tanto, D es un conjunto dominante. Por último, supongamos que existe un β_0-conjunto de G que no intersecta a D digamos J, entonces $J \subseteq V(G)-D$, es decir, $J \subseteq I-\{u\}$, lo que implica que $|J| \leq \beta_0 - 1$, lo cual contradice que $|J| = \beta_0$. Por lo tanto, D intersecta a cualquier β_0-conjunto de G. Así, D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, y por consiguiente $\gamma_{it}(G) \leq |D|$.

Por otro lado, $|D| = n - |I| + 1 = n - \beta_0(G) + 1$ y dado que $-\beta_0 < -\frac{n}{2}$, se tiene que $|D| < n-\frac{n}{2}+1 = \frac{n}{2}+1$, entonces $|D| \leq \frac{n}{2}$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2}$.

Caso 2. $\beta_0(G) = \frac{n}{2}$.

En este caso dividiremos la prueba en dos subcasos:

Caso 2.1. $V(G) - I$ no es un conjunto independiente.

Vamos a demostrar que I es un conunto dominante independiente transversal. Sea v en $V(G) - I$, si no existiera un vértice en I adyacente a v entonces $I' = I \cup \{v\}$ es un conjunto independiente de G tal que $|I'| > |I|$, lo cual es una contradicción ya que I es un β_0-conjunto. Por lo tanto, para cada vértice en $V(G) - I$ existe al menos uno en I al que es adyacente, es decir, I es un conjunto dominante.

Ahora, supongamos que existe un β_0-conjunto que no intersecta a I, digamos J, entonces $J \subseteq V(G) - I$. Ahora como J es un β_0-conjunto se tiene que $|J| = \frac{n}{2}$, por otro lado $|I| = \frac{n}{2}$ ya que I también es un β_0-conjunto, entonces $|V(G) - I| = \frac{n}{2}$. Por lo tanto, $J = V(G) - I$, lo cual contradice el hecho de que $V(G) - I$ no es un conjunto independiente.

Así, I intersecta a a cualquier β_0-conjunto con lo cual se tiene que I es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G y por consiguiente $\gamma_{it}(G) \leq |I| = \frac{n}{2}$.

Caso 2.2. $V(G) - I$ es un conjunto independiente.

Claramente $I\cap(V(G)-I) = \emptyset$, $V(G) = I\cup(V(G)-I)$, $I \neq \emptyset$ y $V(G)-I \neq \emptyset$ ($|I| = |V(G) - I| = \frac{n}{2}$) lo que implica que $\{I, V(G) - I\}$ es una partición de $V(G)$. Además I y $V(G) - I$ son conjuntos independientes por lo cual G es una gráfica bipartita.

Ahora consideremos nuevamente dos posibles casos respecto a $\delta(G)$.

Caso 2.2.1. $\delta(G) \geq 2$.

Sean u en I y v en $N(u)$, tomamos el conjunto $D = (I - \{u\}) \cup \{v\}$ (ver figura 3.2).

Afirmación. D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos.

Primero demostremos que D es un conjunto dominante. Notemos que $V(G) - D = [(V(G) - I) - \{v\}] \cup \{u\}$. Sea x en $[(V(G) - I) - \{v\}] \cup \{u\}$. Si $x = u$, entonces v es el vértice en D al que es adyacente $x = u$. Ahora si x pertenece a $[(V(G) - I) - \{v\}]$, entonces como $V(G) - I$ es un conjunto independiente y $\delta(v) \geq 2$ ($\delta(G) \geq 2$) se tiene que existe un vértice w en $I - \{u\}$ tal que $(x, w) \in A(G)$, lo que implica que D es un conjunto dominante.

Ahora demostraremos que D intersecta a cualquier β_0-conjunto. Procediendo por contradicción, supongamos que existe J un β_0-conjunto de G que no es intersectado por D, entonces $J \subseteq [(V(G) - I) - \{v\}] \cup \{u\}$. Dado que $D = (I - \{u\}) \cup \{v\}$ y $|I| = \frac{n}{2}$ se sigue que $|D| = \frac{n}{2}$ por lo cual $|D| = |V(G) - D|$, usando esto y el hecho que $|J| = \beta_0(G) = \frac{n}{2}$ se concluye que $J = [(V(G) - I) - \{v\}] \cup \{u\} = V(G) - D$. Por lo tanto, $V(G) - D$ es un conjunto independiente máximo lo que implica que u no puede ser adyacente a los vértices de $V(G) - D$ en particular no puede ser adyacente a nadie en $(V(G) - I) - \{v\}$. Por otro lado, como I es un conjunto independiente máximo y $u \in I$, u tampoco puede ser adyacente a nadie en I. Así, $\delta_G(u) = 1$ ($(u, v) \in A(G)$) lo cual es una contradicción ya que $\delta(G) \geq 2$.

Por lo tanto, D intersecta a cualquier β_0-conjunto, lo que nos dice que D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos y por consiguiente $\gamma_{it}(G) \leq |D| = |S| = \frac{n}{2}$.

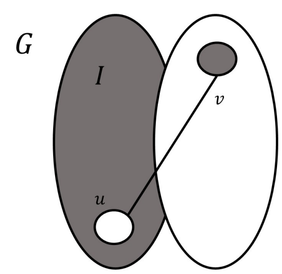

Figura 3.2: La parte sombreada de la gráfica representa el conjunto D

Caso 2.2.2. $\delta(G) = 1$.

Tomamos u en $V(G)$ tal que $\delta(u) = 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que u está en I. Sea v en $N(u)$ (notemos que $N(u) \subseteq V(G) - I$ porque I es un conjunto independiente), como G es conexa y no es una gráfica completa se sigue que G tiene al menos tres vértices, lo que implica que $\delta(v) \geq 2$ (notemos que $N(v) \subseteq I$ porque $V(G) - I$ es un conjunto independiente).

Afirmamos que $\delta(w) \geq 2$ para todo w en $N(v) - \{u\}$. Si existe un vértice w en $N(v) - \{u\}$, tal que $\delta(w) = 1$, entonces consideremos los conjuntos $(I - \{u, w\}) \cup \{v\}$ y $V(G) - [(I - \{u, w\}) \cup \{v\}]$.

Ahora demostraremos que

$V(G) - [(I - \{u, w\}) \cup \{v\}] = [(V(G) - I) - \{v\}] \cup \{u, w\}$ es un conjunto independiente. Como $[(V(G) - I) - \{v\}] \subset V(G) - I$ y $\{u, w\} \subseteq I$ se tiene que $[(V(G) - I) - \{v\}]$ y $\{u, w\}$ son conjuntos independientes. Por otro lado, no existen aristas entre $[(V(G) - I) - \{v\}$ y $\{u, w\}$ porque $\{u, w\} \subseteq N(v)$ y $\delta(u) = 1 = \delta(w)$. Por último, notemos que

$|[(V(G) - I) - \{v\}] \cup \{u, w\}| = |V(G) - I| - 1 + 2 = \frac{n}{2} - 1 + 2 = \frac{n}{2} + 1$ (ver figura 3.3), lo cual contradice el hecho que $\beta_0(G) = \frac{n}{2}$.

Por lo tanto, cualquier vértice en $N(v) - \{u\}$ tiene grado mayor o igual a dos.

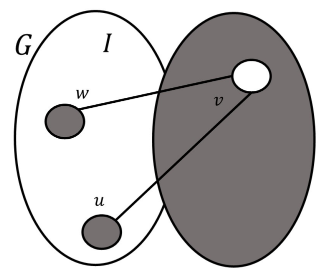

Figura 3.3: La parte sombreada de la gráfica representa un conjunto dominante

Tomamos el conjunto $D = [V(G) - (I \cup \{v\})] \cup \{u\}$ (ver figura 3.4).

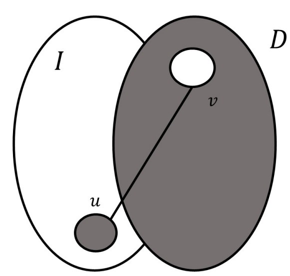

Figura 3.4: Los vértices sombreados representan al conjunto D

Afirmación. D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos.

Primero demostraremos que D es un conjunto dominante. Notemos que $V(G) - D = (I - \{u\}) \cup \{v\}$. Sea x en $(I - \{u\}) \cup \{v\}$. Si $x = v$ entonces u es el vértice en D al que es adyacente $x = v$. Si $x \in I - \{u\}$, tenemos dos posibles casos sobre x.

Caso 1. $x \in N(v) - \{u\}$.

Por lo demostrado anteriormente sabemos que $\delta(x) \geq 2$, lo que implica que existe al menos un vértice en D que es adyacente a x esto porque $x \in N(v) - \{u\}$ e $I - \{u\}$ es un conjunto independiente.

Caso 2. $x \notin N(v) - \{u\}$.

En este caso, como G es conexa e $I - \{u\}$ es un conjunto independiente se tiene que existe al menos un vértice en D al que x es adyacente.

Ahora veamos que D intersecta a cualquier β_0-conjunto. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un β_0-conjunto de G, digamos J, que no intersecta a D , entonces $J \subseteq V(G) - D$, es decir, $J \subseteq (I - \{u\}) \cup \{v\}$. Como J es un β_0-conjunto se tiene que $|J| = \frac{n}{2}$, además $|V(G) - D| = |(I - \{u\}) \cup \{v\}|$ y $|(I - \{u\}) \cup \{v\}| = \frac{n}{2}$, de lo anterior se concluye que $J = (I - \{u\}) \cup \{v\}$. Por lo tanto, $(I - \{u\}) \cup \{v\}$ es un conjunto independiente, lo que implica que v no puede ser adyacente a nadie en $I - \{u\}$. Por otro lado, recordemos que $\delta(v) \geq 2$. Por lo tanto, existe w en $V(G) - I$ tal que $(v, w) \in A(G)$ lo cual contradice el hecho que $V(G) - I$ es un conjunto independiente porque $\{v, w\} \subseteq V(G) - I$.

Por lo tanto, D intersecta a cualquier β_0-conjunto. Así, D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, y por consiguiente $\gamma_{it}(G) \leq |D| = \frac{n}{2}$.■

Corolario 3.0.5. *([1]) Si G es una gráfica bipartita de orden n tal que $n \geq 3$, entonces $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Demostración.

Como la gráfica es bipartita se tiene que $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$. Entonces por el teorema 3.0.4 se concluye que $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2}$.■

Antes de seguir con el desarrollo de los siguientes teoremas hagamos una pequeña observación. Como vimos en el teorema 2.0.6, si $G = H^+$ para alguna gráfica H conexa con n vértices se tiene que $\gamma_{it}(G) = n$. Por otro lado, cuando H es una gráfica bipartita con partición en conjuntos independientes $\{V_1, V_2\}$, tomamos en H^+ los conjuntos

$$V_1 \cup \{u \in V(H^+) : \delta(u) = 1 \textit{ y } (u, v) \in A(H^+) \textit{ para algún } v \in V_2\} \textit{ y}$$

$$V_2 \cup \{u \in V(H^+) : \delta(u) = 1 \textit{ y } (u, v) \in A(H^+) \textit{ para algán } v \in V_1\}$$

dichos conjuntos son independientes, son ajenos y $[V_1 \cup \{u \in V(H^+) : \delta(u) = 1$ y $(u, v) \in A(H^+)$ para algún $v \in V_1\}] \cup [V_2 \cup \{u \in V(H^+) : \delta(u) = 1$ y $(u, v) \in A(H^+)$ para algún $v \in V_2\}] = V(H^+)$. Por lo tanto, los conjuntos descritos anteriormente forman una particiíon de $V(H^+)$ en conjuntos independientes. Así, H^+ es una gráfica bipartita, recordemos que por definición H^+ tiene $2n$ vértices.

Por lo tanto, siguiendo el análisis anterior se concluye que existe una familia infinita de gráficas bipartitas para las cuales γ_{it} es la mitad de su orden. En la gráfica de la figura 3.5 se tiene que H es la gráfica con $V(H) = \{u_1, \ldots, u_6\}$ y $A(H) = \{(u_1, u_4), (u_4, u_2), (u_2, u_5), (u_2, u_6), (u_3, u_5)\}$. Los conjuntos $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{u_4, u_5, u_6\}$ forman la partición de $V(H)$ en conjuntos independientes, por lo cual H es una gráfica bipartita. Usando el argumento planteado anteriormente se sigue que los conjuntos $\{u_1, u_2, u_3, x_4, x_5, x_6\}$ y $\{u_4, u_5, u_6, x_1, x_2, x_3\}$ forman una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes. Por lo tanto, $G = H^+$ es

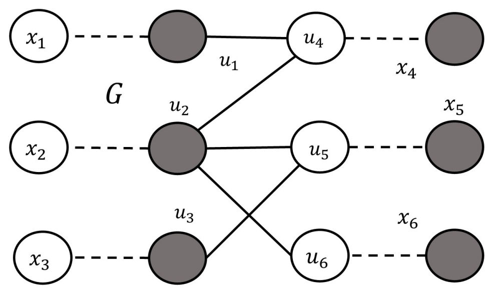

Figura 3.5: Los conjuntos $\{u_1, u_2, u_3, x_4, x_5, x_6\}$ y $\{u_4, u_5, u_6, x_1, x_2, x_3\}$ forman una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes

una gráfica bipartita tal que $\gamma_{it}(G) = 6$.

La demostración del siguiente teorema es una demostración propia.

Teorema 3.0.6. *([1]) Si a y b son dos números naturales tales que $b \geq 2a - 1$, entonces existe una gráfica G de orden b tal que $\gamma_{it}(G) = a$.*

Demostración.
Como b es un número natural tal que $b \geq 2a - 1$ se tiene que $b = 2a + r$ para algún $r \geq -1$. El objetivo de la demostración es construir una gráfica G de orden b tal que $\gamma_{it}(G) = a$. Para esto analizaremos dos posibles casos respecto a r.

Caso 1. $r = -1$.
Sea G la gráfica tal que $V(G) = \{v_1, \ldots, v_a\} \cup \{u_1, \ldots, u_{a-1}\}$ y $A(G) = \{(v_i, u_i) : i \in \{1, \ldots, a-1\}\}$ (ver figura 3.6).

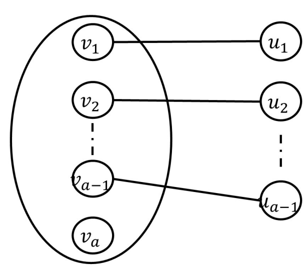

Figura 3.6: Representación geométrica de la gráfica G, para el caso $r = -1$

Afirmación 1. $\gamma(G) = a$.
Tomamos $S = \{v_1, \ldots, v_a\}$, claramente S es un conjunto dominante, lo que implica que $\gamma(G) \leq a$. Por otro lado, sea S' un γ-conjunto, notemos que $\{u_i, v_i\} \cap S' \neq \emptyset$ ya que de otra manera se tendría que en particular u_i no sería dominado por S', para cada i en $\{1, \ldots, a-1\}$. Ahora si $| \{u_i, v_i\} \cap S' | = 2$ para algún i en $\{1, \ldots, a-1\}$, entonces $S'' = S' - \{u_i\}$ sería un conjunto dominante de cardinalidad menor a la cardinalidad de S', lo cual contradice el

hecho que S' es un γ-conjunto. Por lo tanto, $\mid \{u_i, v_i\} \cap S' \mid= 1$ para cada i en $\{1, \ldots, a-1\}$, lo que implica que $|S'| \geq a-1$. Por último notemos que v_a no es dominado por ningún vértice de S', lo que implica que $v_a \in S'$. Por lo tanto, $\gamma(G) = |S'| \geq a$; así, $\gamma(G) = a$.

De la afirmación 1 y el corolario 2.0.11 podemos concluir que $\gamma_{it}(G) = a$.

Caso 2. $r \geq 0$.

Para este caso, sea H una gráfica conexa distinta de una estrella con $V(H) = \{v_1, \ldots, v_a\}$. Sea G la gráfica tal que $V(G) = V(H) \cup \{x_1, \ldots, x_{r+1}\} \cup \{u_2, \ldots, u_a\}$ y $A(G) = A(H) \cup \{(v_i, u_i) : i \in \{2, \ldots, a\}\} \cup \{(v_1, x_i) : i \in \{1, \ldots, r+1\}\}$, ver figura 3.7.

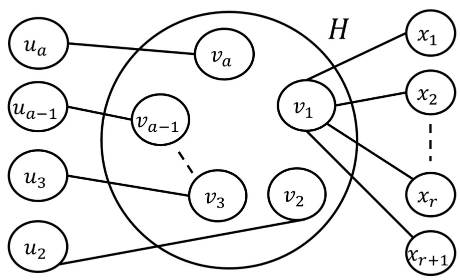

Figura 3.7: Representación geométrica de la gráfica G, para el caso $r \geq 0$

Afirmación 1. $\gamma(G) = a$

Por construcción se tiene que $V(H)$ es un conjunto dominante de G, lo cual implica que $\gamma(G) \leq a$. Por otro lado, sea S un γ-conjunto, notemos que $\{u_i, v_i\} \cap S \neq \emptyset$ ya que de otra manera se tendría que en particular u_i no sería dominado por S, para cada i en $\{2, \ldots, a\}$. Ahora si $\mid \{u_i, v_i\} \cap S \mid= 2$ para algún i en $\{2, \ldots, a\}$, entonces $S' = S - \{u_i\}$ sería un conjunto dominante de cardinalidad menor a la cardinalidad de S, lo cual contradice el hecho que S es un γ-conjunto. Por lo tanto, $\mid \{u_i, v_i\} \cap S \mid= 1$ para cada i en $\{2, \ldots, a\}$, lo que implica que $|S| \geq a-1$. Ahora notemos que si $v_1 \notin S$, entonces por construcción de G se tiene que $\{x_1, \ldots, x_{r+1}\} \subseteq S$, y dado que $r+1 \geq 1$ concluimos que $|S| \geq a$. En otro caso, si $v_1 \in S$, de igual manera podemos concluir que $|S| \geq a$. Por lo tanto, $\gamma(G) = a$

Por la afirmación anterior y el lema 3.0.1 podemos concluir que $a \leq \gamma_{it}(G)$.

Afirmación 2. $\beta_0(G) = r + a$

Sea $I = \{x_1, \ldots, x_{r+1}\} \cup \{u_2, \ldots, u_a\}$. A continuación demostraremos que I es un conjunto independiente. Sean y y z en I.

Caso 1. $\{y, z\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$.

Recordemos que $\delta_G(x_j) = 1$ y $N(x_j) = \{v_1\}$, para cada j en $\{1, \ldots, r+1\}$, lo que implica que $\{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$ es un conjunto independiente en G. Por lo tanto, $\{y, z\}$ es un conjunto independiente en G.

Caso 2. $\{y, z\} \subseteq \{u_2, \ldots, u_a\}$.

Recordemos que $\delta_G(u_s) = 1$ y $N(u_s) = \{v_s\}$, para cada s en $\{2, \dots, a\}$. Entonces $\{u_2, \dots, u_a\}$ es un conjunto independiente en G. Por lo tanto, $\{y, z\}$ es un conjunto independiente en G.

Caso 3. Supongamos sin pérdida de generalidad que $y \in \{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ y $z \in \{u_2, \dots, u_a\}$.

Como $y \in \{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ y $z \in \{u_2, \dots, u_a\}$, entonces supongamos sin pérdida de generalidad que $y = x_1$ y $z = u_2$, de lo cual se tiene que y solo es adyacente a v_1, y z solo es adyacente a v_2. Por lo tanto, y y z no son adyacentes en G.

Así, I es un conjunto independiente en G. Adémas

$$|I| = |\{x_1, \dots, x_{r+1}\}| + |\{u_2, \dots, u_a\}| = r + 1 + a - 1 = r + a$$

. Por lo tanto, $\beta_0(G) \geq |I| = r + a$.

Ahora, supongamos que existe un conjunto independiente J tal que $|J| > r + a$, lo que implica que $|V(G) - J| \leq a - 1$. Dado que $|V(H)| = a$ y $|V(G) - J| \leq a - 1$, se concluye que $V(H) \cap J \neq \emptyset$. Supongamos que $V(H) \cap J = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$. Si $v_1 \in \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$, supongamos sin pérdida de generalidad que $v_1 = v_{i_1}$. Por construcción de G y el hecho que J es un conjunto independiente se tiene que $\{u_{i_2}, \dots, u_{i_k}\} \subset V(G) - J$ y $\{x_1, \dots, x_{r+1}\} \subseteq V(G) - J$. Además sabemos que $V(H) - \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \subset V(G) - J$, por lo cual podemos concluir que $|V(G) - J| \geq a$ (porque $r + 1 \geq 1$), lo cual no es posible.

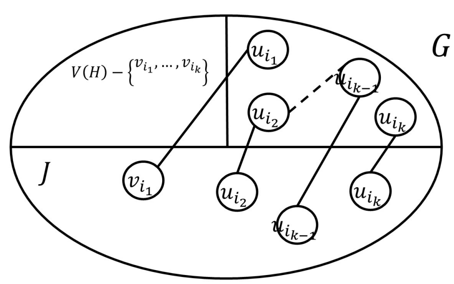

Figura 3.8: Cardinalidad del conjunto independiente J

Si $v_1 \notin \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$, entonces por construcción de G y el hecho que J es un conjunto independiente se tiene que $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\} \subset V(G) - J$. Además sabemos que $V(H) - \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \subset V(G) - J$, lo que implica que $|V(G) - J| \geq a$, lo cual no es posible.

Así, no existe ningún conjunto independiente de cardinalidad mayor que $r + a$, y por consiguiente $\beta_0(G) = r + a$.

A continuación encontraremos un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad a. Sea $S = \{v_1, u_2 \dots, u_a\}$, claramente S es un conjunto dominante (ver figura 3.9).

Ahora demostremos que S intersecta a cualquier β_0-conjunto. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un β_0-conjunto de G, digamos J, tal que $J \cap S = \emptyset$, esto implica que dicho conjunto se queda totalmente contenido en $V(G)-S$, pero sabemos que $V(G)-S = \{v_2, \ldots, v_a, x_1, \ldots, x_{r+1}\}$. Por lo tanto, como $|J| = r + a$ (por la afirmación 2) se tiene que $J = V(G) - S$, es decir, $V(G) - S$ es un β_0-conjunto. En particular $V(G) - S$ es un conjunto independiente, de lo cual se sigue que $V(H) - \{v_1\}$ es un conjunto independiente pero H es una gráfica conexa, entonces todos los vértices de $V(H) - \{v_1\}$ son adyacentes a v_1, lo que implica que H es una estrella pero eso es una contradicción.

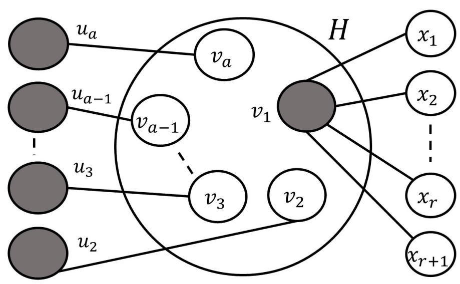

Figura 3.9: Los vértices sombreados representan al conjunto S

Así, S intersecta a cualuier β_0-conjunto, y por consiguiente S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, por lo que se tiene que $\gamma_{it}(G) \leq |S| = a$.

Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = a$. ■

Respecto a el teorema 3.0.6, en [1] el autor nos da la siguiente construcción: sean H una gráfica conexa de orden a tal que $V(H) = \{v_1, \ldots, v_a\}$ y G la gráfica que obtenemos a partir de H al agregar $r + 1$ vértices de grado uno adyacentes a v_1 y un vértice de grado uno, u_i, adyacente a v_i para cada i en $\{2, \ldots, a\}$.

Encontramos que, para el caso en que $r = -1$, hay una gráfica construida según lo anterior que no cumple con la conclusión del teorema 3.0.6 (ver figura 3.10).

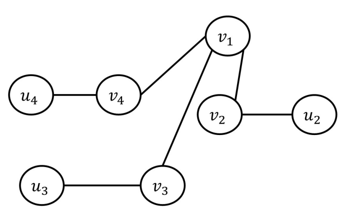

Figura 3.10: Representación geométrica de la gráfica G

El conjunto S propuesto por el autor como candidato a conjunto dominante transversal de independientes máximos es $\{v_1, u_2, u_3, u_4\}$, es claro que S es dominante, y además S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos ya que $\langle V(G)-S\rangle$ no contiene β_0-conjuntos de G ($\beta_0(G) = 4$). A pesar de que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos se tiene que S no es un γ_{it}-conjunto, como mostraremos a continuación.

Afirmamos que $\gamma_{it}(G) = 3$, es decir, $\gamma_{it}(G) = a-1$. Para esto, demostraremos primero que $\gamma(G) = 3$, notamos que el conjunto $\{v_2, v_3, v_4\}$ es dominante, lo que implica que $\gamma(G) \leq 3$. Por otro lado, sea S un γ-conjunto, notemos que para cada i en $\{2, 3, 4\}$ se tiene que $\{u_i, v_i\} \cap S \neq \emptyset$ ya que de otra manera se tendría que en particular u_i no sería dominado por S. Ahora si $| \{u_i, v_i\} \cap S |= 2$ para algún i en $\{2, 3, 4\}$, entonces $S' = S - \{u_i\}$ sería un conjunto dominante de cardinalidad menor a la cardinalidad de S, lo cual contradice el hecho que S es un γ-conjunto. Por lo tanto, $| \{u_i, v_i\} \cap S |= 1$ para cada i en $\{2, 3, 4\}$, lo que implica que $|S| \geq 3$. Así, $\gamma(G) = 3$ y por el lema 3.0.1 se concluye que $3 \leq \gamma_{it}(G)$.

Para la otra desigualdad, encontraremos un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G con cardinalidad 3. Sea $S = \{v_2, u_3, u_4\}$, claramente S es dominante (ver figura3.11).

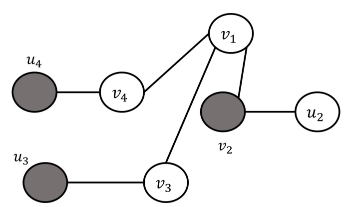

Figura 3.11: Los vértices sombreados representan al conjunto S

Ahora, notemos que $\beta_0(G) = 4$. Por otro lado, se tiene que $\langle V(G) - S\rangle$ es la gráfica representada en la figura 3.12, en la cual notamos que no existe un β_0-conjunto de G. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos y por consiguiente $\gamma_{it}(G) \leq 3$. Así, $\gamma_{it}(G) = 3$.

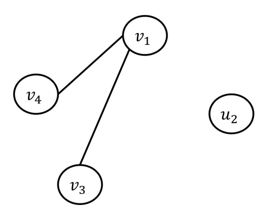

Figura 3.12: $\langle V(G) - S\rangle$

Para el caso en el que $r > 0$, también encontramos que la construcción que nos sugieren en [1] no cumple con la conclusión del teorema 3.0.6. Considere la gráfica de la figura 3.13.

El conjunto que nos propone el autor como candidato a ser un conjunto dominante transversal de independientes máximos es $S = \{v_1, u_2, u_3\}$.A continuación demostraremos que $\beta_0(G) = 5$, es claro que $\{v_2, v_3, x_1, x_2, x_3\}$ es un conjunto independiente, con se tiene que $\beta_0(G) \geq 5$. Supongamos que $\beta_0(G) \geq 6$ y sea J un β_0-conjunto, notemos que para algún i en $\{1, 2, 3\}$ se tiene que x_i pertenece a J ya que $|V(G) - \{x_1, x_2, x_3\}| = 5$ y dado que x_i pertenece a J, se sigue que $v_1 \notin J$. Además si x_j no pertenece a J para algún j en $\{1, 2, 3\}$, se sigue que $J \cup \{x_j\}$ es un conjunto independiente de cardinalidad mayor a la de J lo cual contradice el hecho que J es un β_0-conjunto. Por otro lado, como $|J| \geq 6$, $\{x_1, x_2, x_3\} \subset J$ y $v_1 \notin J$ entonces se tiene que al menos tres de los siguientes vértices u_2, v_2, u_3, v_3 pertenecen a J, lo cual no es posible ya que u_2 y v_2 son adyacentes, u_3 y v_3 son adyacentes y J es un conjunto independiente. Por lo tanto, no es posible que $|J| \geq 6$ lo que implica que $|J| = 5$, es decir, $\beta_0(G) = 5$.

Por lo anterior se tiene que $\{v_2, v_3, x_1, x_2, x_3\}$ es un β_0-conjunto de G, dicho conjunto no intersecta a S, lo que implica que S no es un conjunto dominante transversal de independientes máximos.

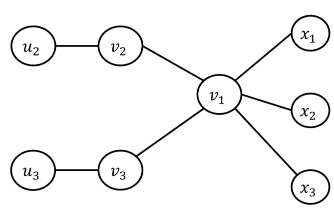

Figura 3.13: $a = 3$, $r = 2$ y $b = 8$

Afirmamos que para la gráfica G de la figura 3.13 se tiene que $\gamma_{it}(G) = 4$. Para demostrar esto tomemos $S = \{v_1, v_2, v_3, u_3\}$, claramente S es un conjunto dominante y como $|V(G) - S| = 4$, entonces en la gráfica $\langle V(G) - S \rangle$ no existen β_0-conjuntos. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G y por consiguiente $\gamma_{it}(G) \leq 4$.

Por otro lado, sea S un γ_{it}-conjunto de G, notemos que para cada i en $\{2, 3\}$ se tiene que $\{u_i, v_i\} \cap S \neq \emptyset$ ya que de otra manera se tendría que en particular u_i no sería dominado por S (en particular S es un conjunto dominante), lo que implica que $1 \leq | \{u_i, v_i\} \cap S |$ para cada i en $\{2, 3\}$. Así, $|S| \geq 2$.

También notemos que v_1 pertenece a S ya que de lo contrario $\{x_1, x_2, x_3\} \subset S$, y esto implicaría que $|S| \geq 5$, lo cual contradice que $|S| \leq 4$. De esta manera $|S| \geq 3$.

Supongamos que $|S| = 3$, entonces considerando las observaciones anteriores tenemos que todos los posibles conjuntos de cardinalidad 3, candidatos a ser S, son: $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2, u_3\}$, $\{v_1, u_2, v_3\}$, $\{v_1, u_2, u_3\}$. Aunque estos conjuntos son dominantes, se tiene que ninguno es dominante independiente transversal ya que en cualquiera de estos casos $V(G) - S$ es un β_0-conjunto. Por lo tanto, no es posible que $|S| = 3$. Así, $|S| > 3$, es decir, $\gamma_{it}(G) \geq 4$.

Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = 4$.

Ahora, para el caso en el que $r = 0$ notamos que si H es una estrella en la construcción dada en [1] se tiene que efectivamente $\gamma_{it}(G) = a$, aunque el conjunto propuesto por el autor $S = \{v_1, u_2, \ldots, u_a\}$ no es un conjunto dominante transversal de independientes máximos (porque $V(G) - S$ es un β_0-conjunto que no intersecta a S). A continuación demostraremos que $\gamma_{it}(G) = a$. Sea $S = \{x, v_3, \ldots, v_a, u_2\}$, claramente este conjunto es dominante (ver figura 3.14) y si observamos la gráfica $\langle V(G) - S \rangle$ se tiene que el conjunto independiente mas grande es de cardinalidad $a - 1$, lo que implica que $\langle V(G) - S \rangle$ no contiene β_0-conjuntos ($\{x, u_2, \ldots, u_a\}$ es un cojunto independiente y por consiguiente $\beta_0(G) \geq a$). Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Así, $\gamma_{it}(G) \leq a$. Por otro lado, usando el mismo argumento que en los otros casos se tiene que $\gamma(G) = a$. Usando lo anterior y el lema 3.0.1 concluimos que $a \leq \gamma_{it}(G)$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = a$.

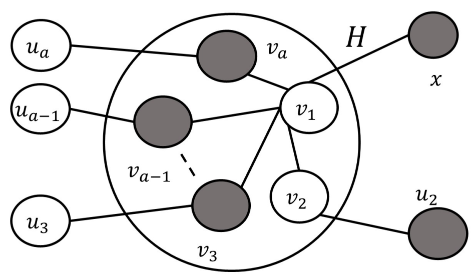

Figura 3.14: Los vértices sombrados representan al conjunto S

De lo visto anteriormente, contribuimos con el siguiente teorema.

Teorema 3.0.7. *Si a y b son dos números naturales, entonces existe una gráfica G de orden b tal que $\gamma_{it}(G) = a - 1$ si $b = 2a - 1$ o $\gamma_{it}(G) = a + 1$ si $b > 2a$.*

Demostración.

Dividiremos la prueba en dos casos:

Caso 1. $b = 2a - 1$

Sean H una estrella de orden a tal que $V(H) = \{v_1, \ldots, v_a\}$ con $\delta(v_1) = a - 1$ y G la gráfica que se obtiene a partir de H al agregar un vértice de grado uno, u_i, adyacente a v_i para cada i en $\{2, \ldots, a\}$ (ver figura 3.15).

Afirmación.$\gamma(G) = a - 1$

Es claro que $V(H) - \{v_1\}$ es un conjunto dominante, de lo cual se tiene que $\gamma(G) \leq a - 1$. Por otro lado, sea S un γ-conjunto, notemos que para cada i en $\{1, \ldots, a - 1\}$ se tiene que $\{u_i, v_i\} \cap S \neq \emptyset$, ya que de otra manera u_i no sería dominado por S, para algún i en $\{2, \ldots, a\}$. Ahora si $\mid \{u_i, v_i\} \cap S \mid = 2$ para

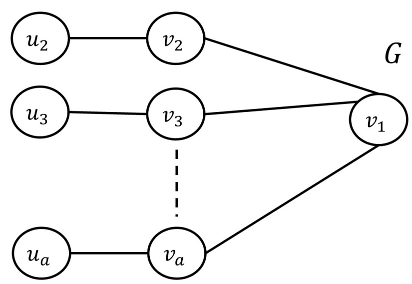

Figura 3.15: Representación geométrica de la construccion de la gráfica G

algún i en $\{2, \ldots, a\}$, entonces $S' = S - \{u_i\}$ sería un conjunto dominante de cardinalidad menor a la cardinalidad de S, lo cual contradice el hecho que S es un γ-conjunto. Por lo tanto, $| \{u_i, v_i\} \cap S |= 1$ para cada i en $\{2, \ldots, a\}$, lo que implica que $|S| \geq a - 1$. Así, $\gamma(G) = a - 1$.

Por la afirmación anterior y el lema 3.0.1 se tiene que $a - 1 \leq \gamma_{it}(G)$.

Por otro lado, notemos que $\beta_o(G) \geq a$ ya que $I = \{v_1, u_2, \ldots, u_a\}$ es un conjunto independiente. Sea $S = \{v_2, u_3, \ldots, u_a\}$, claramente S es un conjunto dominante (ver figura 3.16). Ahora, si observamos la gráfica $\langle V(G) - S \rangle$ se tiene que la cardinalidad del conjunto independiente mas grande es $a - 1$, lo que implca que $\langle V(G) - S \rangle$ no contiene β_0-conjuntos. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G. Así, $\gamma_{it}(G) \leq a - 1$ y por consiguiente $\gamma_{it}(G) = a - 1$.

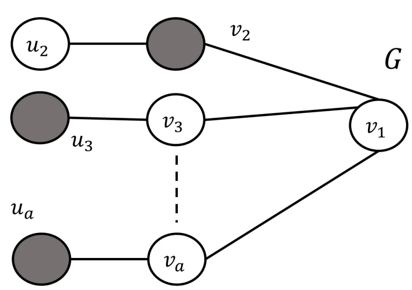

Figura 3.16: Los vértices sombreados representan al conjunto dominante S

Caso 2. $b > 2a$.

Supongamos que $b = 2a + r$, donde $r > 0$. Sean H una estrella de orden a tal que $V(H) = \{v_1, \ldots, v_a\}$ con $\delta(v_1) = a - 1$ y G la gráfica que se obtiene a partir de H al agregar $r+1$ vértices de grado uno adyacentes a v_1, digamos $x_1, \ldots, x_{r+1}$ y un vértice de grado uno, u_i, adyacente a v_i para cada i en $\{2, \ldots, a\}$. Ver figura 3.17.

Necesitamos demostrar que $\gamma_{it}(G) = a + 1$.

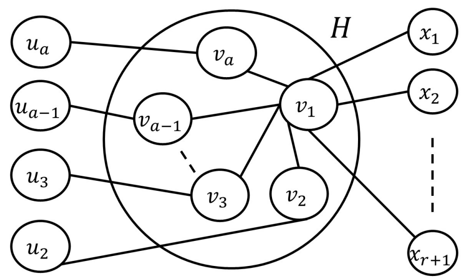

Figura 3.17: Representación geometrica de la gráfica G

Afirmación 1. $\beta_0(G) = r + a$

Sea $I = \{u_2, \ldots, u_a, x_1, \ldots, x_{r+1}\}$. Como I es un conjunto independiente, entonces $\beta_0(G) \geq r + a$. Por otro lado, sea J un β_0-conjunto, demostraremos que $\beta_0(G) \leq r + a$. Supongamos que $J \cap \{v_i, u_i\} = \emptyset$ para algún i en $\{2, \ldots, a\}$, entonces $J \cup \{u_i\}$ es un conjunto independiente de cardinalidad mayor que la de J, lo cual es una contradición. Por lo tanto, para cada i en $\{2, \ldots, a\}$ se tiene que $J \cap \{v_i, u_i\} \neq \emptyset$. Notemos que $|J \cap \{v_i, u_i\}| = 1$ ya que u_i y v_i son adyacentes para cada i en $\{2, \ldots, a\}$, lo que implica que $|J| \geq a - 1$.

Por otro lado, si v_1 pertenece a J entonces $(J - \{v_1\}) \cup \{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$ es un conjunto independiente de cardinalidad mayor que la de J, lo cual no es posible. Por lo tanto, v_1 no pertenece a J. Por último, si x_i no pertenece a J para algún i en $\{1, \ldots, r+1\}$, entones $J \cup \{x_i\}$ es un conjunto independiente de cardinalidad mayor que la de J, lo cual no es posible. Por lo tanto, $\{x_1, \ldots, x_{r+1}\} \subseteq J$.

Por todo el análisis anterior se tiene que $|J| \leq r + a$. Por lo tanto, $\beta_0(G) = r + a$.

Sea $D = V(H) \cup \{u_a\}$, es claro que D es un conjunto dominante. Notemos que $|V(G) - D| = r + a - 1$, lo que implica que la gráfica $\langle V(G) - D \rangle$ no contiene β_0-conjuntos de G. Por lo tanto, D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G. Así, $\gamma_{it}(G) \leq a + 1$.

Por otro lado, sea S un γ_{it}-conjunto de G, a continuación demostraremos que $|S| \geq a + 1$. Notemos que para cada i en $\{2, \ldots, a\}$ se tiene que $\{u_i, v_i\} \cap S \neq \emptyset$ ya que de otra manera se tendría que en particular u_i no sería dominado por S para algún i en $\{2, \ldots, a\}$ (en particular S es un conjunto dominante), lo cual no es posible. Por lo tanto, $1 \leq | \{u_i, v_i\} \cap S |$ para cada i en $\{2, \ldots, a\}$. Así, $|S| \geq a - 1$.

También notemos que dado que S en particular es un conjunto dominante se tiene que v_1 pertenece a S o en otro caso $\{x_1, \ldots, x_{r+1}\} \subset S$, en ambos casos esto implicaría que $|S| \geq a$. Así, $|V(G) - S| \leq r + a$.

Caso 1. $|V(G) - S| < r + a$.

En este caso se sigue que $|S| \geq a + 1$.

Caso 2. $|V(G) - S| = r + a$.

Como $|V(G) - S| = r + a$ y dado el hecho que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos se tiene que $V(G) - S$ no es un β_0-conjunto, entonces existen al menos dos vértices en $V(G) - S$, digamos u y v, los cuales son adyacentes. Notemos que $u_i \notin \{u, v\}$ para algún i en $\{2, \ldots, a\}$ ya que de otro modo se tiene por construcción de G que $v_i \in \{u, v\}$, esto implica que u_i no es dominando por S, lo cual contradice el hecho que S es dominante. De igual manera $x_i \notin \{u, v\}$ para algún i en $\{1, \ldots, r + 1\}$ ya que de otro modo se tiene por construcción de G que $v_1 \in \{u, v\}$, esto implica que x_i no es dominando por S, lo cual contradice el hecho que S es dominante. Por lo tanto, existen i y j en $\{1, \ldots, a\}$ tales que $u = v_i$ y $v = v_j$. Por hipótesis sabemos que H es un estrella, lo que implica que $v_1 = v_i$ o $v_j = v_1$. Así, $v_1 \notin S$ y dado que S es un conjunto dominante tenemos que $\{x_1, \ldots, x_{r+1}\} \subset S$, pero sabíamos que $|S| \geq a - 1$, lo que implica que $|S| \geq (a - 1) + (r + 1) = a + r$. Por lo tanto, $|S| \geq a + 1$ ya que $r \geq 1$.

De esta manera, de ambos casos se concluye que $|S| \geq a + 1$. Así, $\gamma_{it}(G) = a + 1$.■

En el teorema 3.0.4 demostramos que $\gamma_{it}(G)$ está acotado superiormente por $\frac{n}{2}$, donde n es el orden de la gráfica conexa G, no completa, y con número de independencia mayor o igual a $\frac{n}{2}$. Pero en busca de mejorar este resultado el autor en [1] notó que existen algunas gráficas para las cuales su número de dominación transversal de independientes máximos es $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ o $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, incluso si su número de independencia no es mayor o igual a $\frac{n}{2}$.

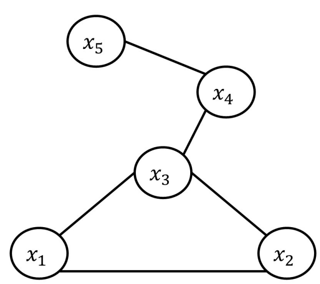

Figura 3.18: Representación geométrica de una gráfica G tal que $\gamma_{it}(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Por ejemplo para la gráfica de la figura 3.18 tenemos que $\gamma(G) = 2 \leq \gamma_{it}(G)$ y $\beta_0(G) = 2$. Como $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, entonces $\gamma_{it}(G) \leq 3$. Observemos que $S_1 = \{x_5, x_3\}$, $S_2 = \{x_5, x_2\}$, $S_3 = \{x_5, x_1\}$, $S_4 = \{x_4, x_3\}$, $S_5 = \{x_4, x_2\}$ y $S_6 = \{x_4, x_1\}$ son todos los γ-conjuntos de G y para cada uno de ellos se tiene que la gráfica inducida por su complemento contiene un β_0-conjunto (ver figura 3.19). Por lo tanto no existe algún γ-conjunto que intersecte a todos los β_0-conjuntos. Así, $\gamma_{it}(G) = 3 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, sin embargo $\beta_0(G) = 2 < \frac{n}{2}$.

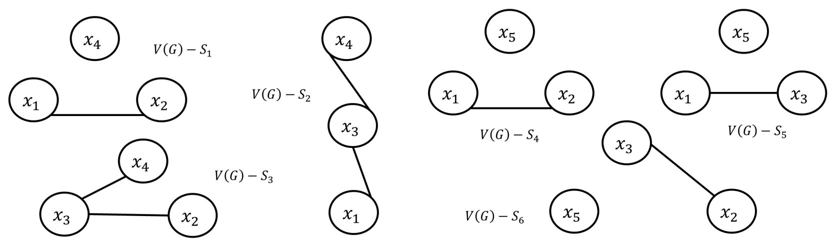

Figura 3.19: $\langle V(G) - S_i \rangle$ para cada i en $\{1, \ldots, 6\}$

Por lo tanto, motivado por la observación anterior, el autor formuló la siguiente conjetura.

Conjetura 1.([1]) Si G es una gráfica conexa no completa de orden n, entonces $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

En [3] los autores dieron tres familias distintas de gráficas para las cuales esta conjetura no es cierta. En este trabajo solo exhibiremos una de dichas familias, para esto necesitamos la siguiente definición:

Dadas dos gráficas G y H, definimos la **gráfica composición**, denotada por $G[H]$, como la gráfica tal que $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ y $A(G[H]) = \{((u, v), (w, z)) : (u, w) \in A(G) \text{ o } (v, z) \in A(H)\}$. Veamos un ejemplo de la composición de gráficas en la figura 3.20.

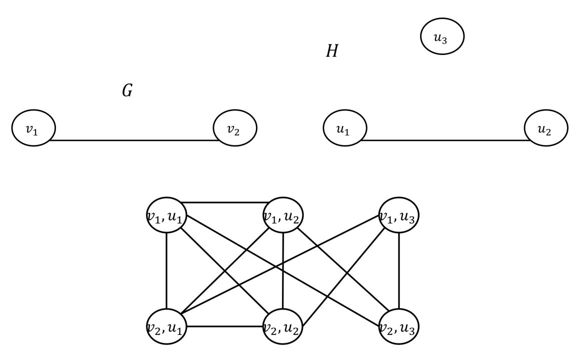

Figura 3.20: $G[H]$

Ahora procedamos a dar el contraejemplo para la conjetura. Si $k > 1$, entonces sean K_k la gráfica completa con conjunto de vértices $\{v_1, \ldots, v_k\}$ y C_5

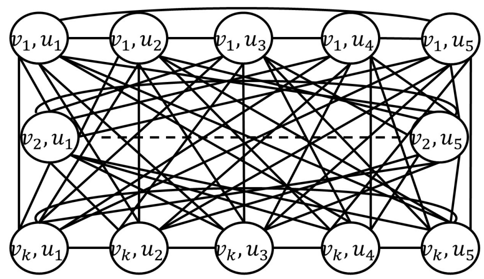

Figura 3.21: Representación geométrica de la gráfica G

el ciclo de longitud cinco con conjunto de vértices $\{u_1, \ldots, u_5\}$ y conjunto de aristas $\{(u_1, u_2), (u_1, u_5), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_5)\}$.

Afirmación. Para la gráfica G definida como $K_k[C_5]$ de orden $n = 5k$ se tiene que $\gamma_{it}(G) = \frac{3}{5}n$.

Dado que $n = 5k$, nuestro objetivo es demostrar que $\gamma_{it}(G) = 3k$.

Observamos que por definición de G, para cada i en $\{1, \ldots, k\}$, se tiene que $\langle\{(v_i, u_j) : 1 \leq j \leq 5\}\rangle \cong C_5$, a la gráfica $\langle\{(v_i, u_j) : 1 \leq j \leq 5\}\rangle$ la llamaremos nivel i. Luego, para cada s en $\{1, \ldots, 5\}$ se tiene que

$$\langle\{(v_r, u_s) : 1 \leq r \leq k\}\rangle \cong K_k$$

.

Afirmación 1. $\delta(G) = n - 3$.

Sea (v_i, u_j) un vértice arbitrarío en G, notemos que dicho vértice no es adyacente a los vértices (v_i, u_{j-2}) y (v_i, u_{j+2}) (con $j-2$ y $j+2$ tomados módulo 5), y sí es adyacente a los vértices (v_i, u_{j-1}) y (v_i, u_{j+1}) (con $j-1$ y $j+1$ tomados módulo 5). También, por construcción de G y el hecho que v_i pertence a una gráfica completa, se tiene que (v_i, u_j) es adyacente a cualquier vértice de la forma $(v_{i'}, u_k)$, con $i' \neq i$ y k en $\{1, \ldots, 5\}$, es decir, (v_i, u_j) es adyacente a cualquier vértice de otro nivel. Por lo tanto, cualquier vértice de la gráfica G tiene exactamente $n-3$ vecinos.

Afirmación 2. $\beta_0(G) = 2$.

Observamos que el conjunto $I = \{(v_1, u_1), (v_1, u_3)\}$ es independiente, lo que implica que $\beta_0(G) \geq 2$. Por otro lado, sea J un β_0-conjunto de G, por lo visto en la afirmación 1 sabemos que cualesquiera dos vértices de distinto nivel son adyacentes, esto implica que $J \subset \{(v_i, u_j) : 1 \leq j \leq 5\}$ para algún i en $\{1, \ldots, k\}$. Así, como $\beta_0(C_5) = 2$ y $\langle\{(v_i, u_j) : 1 \leq j \leq 5\}\rangle \cong C_5$, se tiene que $|J| \leq 2$. Por lo tanto, $\beta_0(G) = 2$.

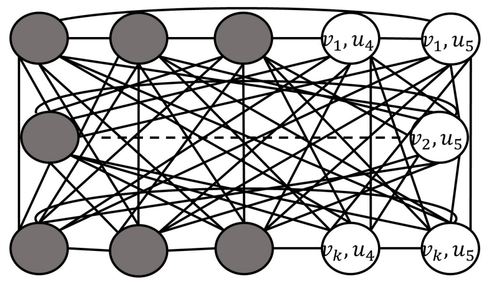

Figura 3.22: Los vértices sombreados representan al conjunto S

Por otro lado, para cada i en $\{1, \ldots, k\}$ se tiene que el conjunto de vértices $S_i = \{(v_i, u_1), (v_i, u_2), (v_i, u_3)\}$ domina al resto de los vértices del nivel i. Por lo tanto, $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ es un conjunto dominante en G con $3k$ vértices (ver figura 3.22).

Afirmación 3. $V(G) - S$ es un clan de G.

Sean (v_i, u_j) y (v_r, u_s) dos vértices de $V(G) - S$. Si $i \neq r$, entonces como dichos vértices estan en distintos niveles se tiene que (v_i, u_j) y (v_r, u_s) son adyacentes. Si $i = r$, entonces como (v_i, u_j) y (v_r, u_s) pertenecen a $V(G) - S$ se tiene que $\{(v_i, u_j), (v_r, u_s)\} \subseteq \{(v_i, u_4), (v_i, u_5)\}$, lo que implica que (v_i, u_j) y (v_r, u_s) son adyacentes. Por lo tanto, cualesquiera dos vértices de $V(G) - S$ son adyacentes y por consiguiente $V(G) - S$ es un clan de G.

De la afirmación 3 y el hecho que $\beta_0(G) = 2$ se sigue que $\langle V(G) - S \rangle$ no contiene β_0-conjuntos de G. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Así, $\gamma_{it}(G) \leq 3k$.

Para la otra desigualdad, sea D un conjunto cualquiera de vértices de G de cardinalidad menor o igual a $3k - 1$. Demostraremos que D no intersecta a todo β_0-conjunto de G. Como $|D| \leq 3k - 1$ se tiene que existe al menos un i en $\{1, \ldots, k\}$ para la cual a lo más dos vértices del conjunto $\{(v_i, u_j) : 1 \leq j \leq 5\}$ también pertenecen a D.

Caso 1. $D \cap \{(v_i, u_j) : 1 \leq j \leq 5\} = \emptyset$.

En este caso $\{(v_i, v_1)(v_i, v_3)\}$ es un β_0-conjunto de G que no intersecta a D.

Caso 2. $|D \cap \{(v_i, u_j) : 1 \leq j \leq 5\}| \in \{1, 2\}$.

Supongamos que $(v_i, u_j) \in D$. Si $|D \cap \{(v_i, u_j) : 1 \leq j \leq 5\}| = 1$, entonces $\{(v_i, v_{j-1}), (v_i, v_{j+1})\}$ ($j - 1$ y $j + 1$ tomados modulo 5) es un β_0-conjunto de G que no intersecta a D.

Si $|D \cap \{(v_i, u_j) : 1 \leq j \leq 5\}| = 2$, supongamos que (v_i, u_s) es el otro vértice que pertenece a D. Si $s \in \{j - 1, j + 1\}$, entonces $\{(v_i, u_{j-2}), (v_i, u_{j+1})\}$ ($j - 2$

y $j+1$ tomados modulo 5) o $\{(v_i, u_{j-1}), (v_i, u_{j+2})\}$ ($j-1$ y $j+2$ tomados modulo 5) son β_0-conjuntos de G que no intersectan a D si $s = j-1$ o $s = j+1$, respectivamente. Ahora si (v_i, u_j) y (v_i, u_s) no son adyacentes, entonces $\{(v_i, v_{j-1}), (v_i, v_{j+1})\}$ ($j-1$ y $j+1$ tomados modulo 5) es un β_0-conjunto de G que no intersecta a D.

Por lo tanto, D no intersecta a todo β_0-conjunto de G.

Así, no existen conjuntos dominantes transversales de independientes máximos de G de cardinalidad menor que $3k$ y por consiguiente $\gamma_{it}(G) \geq 3k$, lo que implica que $\gamma_{it}(G) = 3k$.■

Ahora que ya demostramos la afirmación anterior, para la familia anterior de gráficas se cumple que $\gamma_{it}(G) = 3k > \lceil \frac{n}{2} \rceil$, lo cual contradice la conjetura 1.

A continuación demostraremos que existe una familia de gráficas para las cual la conjetura 1 es cierta, para demostrar esto necesitaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.0.8. *([1]) Si G es cualquier gráfica, entonces $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + \delta(G)$.*

Demostración.

El objetivo de la demostración es encontrar un conjunto dominante transversal de independientes máximos de cardinalidad menor o igual a $\gamma(G) + \delta(G)$, y para esto tomemos u un vértice de G tal que $\delta(u) = \delta(G)$ y S un γ-conjunto.

Afirmación. Cada β_0-conjunto de G intersecta a $N[u]$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe J un β_0-conjunto de G tal que $J \cap N[u] = \emptyset$, esto implica que $J \cup \{u\}$ es un conjunto independiente de cardinalidad mayor que la de J, lo cual contradice el hecho que J es un β_0-conjunto. Por lo tanto, $N[u]$ intersecta a cada β_0-conjunto.

Por la afirmación anterior se tiene que $S \cup N[u]$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G (porque S es un γ-conjunto de G), lo que implica que $\gamma_{it}(G) \leq |S \cup N[u]|$. Notemos que S puede o no intersectar a $N[u]$, en ambos casos se tiene que $|S \cup N[u]| \leq \gamma(G) + \delta(G)$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + \delta(G)$.■

Corolario 3.0.9. *([1]) La conjetura 1 es cierta para cualquier gráfica conexa tal que $\delta(G) = 1$*

Demostración.

Supongamos que el orden de G es n, el objetivo de la demostración es probar que $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Usando el teorema 3.0.8 y el hecho que $\delta(G) = 1$ se tiene que $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + 1$, además por el teorema 1.3.1 sabemos que $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Es claro que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{n}{2}$, lo que implica que $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$. Dividiremos la prueba en dos casos:

Caso 1. $\gamma(G) < \frac{n}{2}$.

Como $\gamma(G) < \frac{n}{2}$, entonces $\gamma(G) + 1 < \frac{n}{2} + 1$. Por lo cual $\gamma_{it}(G) < \frac{n}{2} + 1$. Por otro lado sabemos que $\frac{n}{2} \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, de lo cual se sigue que $\frac{n}{2} + 1 \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, usando esto y el hecho que $\gamma_{it}(G) < \frac{n}{2} + 1$ se tiene que $\gamma_{it}(G) < \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Caso 2. $\gamma(G) = \frac{n}{2}$.

Por el teorema 1.3.7 sabemos $G = C_4$ o existe una gráfica H conexa tal que $G = H^+$. En el caso en que $G = C_4$, tenemos que $n = 4$, y por el teorema 2.0.8 sabemos que $\gamma_{it}(G) = \lceil \frac{4}{3} \rceil = \frac{n}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Para el caso en que $G = H^+$, por el teorema 2.0.6 se tiene que $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2} \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Por lo tanto, para este caso se tiene que $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Así, la conjetura 1 es cierta para toda gráfica con grado mínimo igual a uno.$\blacksquare$

Corolario 3.0.10. *([1]) Sea T un árbol, entonces $\gamma_{it}(G)$ es $\gamma(T)$ o $\gamma(T) + 1$.*

Demostración.

Para el caso en el que T consiste de un solo vértice, sabemos que $\gamma_{it}(T) = 1 = \gamma(T)$. Ahora, para el caso en el que T tiene al menos dos vértices, por el teorema se tiene que en T hay al menos dos vértices finales. Así $\delta(T) = 1$, y usando el teorema 3.0.8 se concluye que $\gamma_{it}(T) \leq \gamma(T) + 1$. Luego por el lema 3.0.1 se tiene que $\gamma(T) \leq \gamma_{it}(T)$. Por lo tanto, $\gamma(T) \leq \gamma_{it}(T) \leq \gamma(T) + 1$, es decir, $\gamma_{it}(T) = \gamma(T)$ o $\gamma_{it}(T) = \gamma(T) + 1$.$\blacksquare$

Teorema 3.0.11. *([1]) Si G es una gráfica tal que $diám(G) = 2$, entonces $\gamma_{it}(G) \leq \delta(G) + 1$.*

Demostración.

Sea u un vértice de G tal que $\delta(u) = \delta(G)$.

Afirmación. $N[u]$ es un conjunto dominante.

Como $diám(G) = 2$ se tiene que cualesquiera dos vértices de G estan a distancia uno o dos, es decir, son vecinos o comparten al menos un vecino, entonces en particular cualquier vértice de G es adyacente a u o comparte un vecino con u. Ahora, sea x un vértice de $V(G) - N[u]$, entonces x no es dayacente a u, lo que implica por la observación anterior que x es adyacente a al menos un vécino de u, es decir, x es adyacente a al menos un vértice de $N[u]$. Por lo tanto, $N[u]$ es un conjunto dominante.

Por último notemos que $N[u]$ intersecta a cualquier β_0-conjunto de G, ya que de lo contrario, si existe un β_0-conjunto J de G que no intersecta a $N[u]$, entonces esto implica que $J \cup \{u\}$ es un conjunto independiente de cardinalidad mayor a la de J, lo cual no es posible porque J es un β_0-conjunto. Por lo tanto, $N[u]$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G y por consiguiente $\gamma_{it}(G) \leq |N[u]| = \delta(u) + 1$. Así, $\gamma_{it}(G) \leq \delta(G) + 1$.$\blacksquare$

A continuación estableceremos algunas contas para γ_{it} en terminos del número de cubierta y el número de clan.

Teorema 3.0.12. *([1]) Si G es una gráfica sin vértices aislados, entonces* $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_0(G) + 1$.

Demostración.
Sea S una cubierta por vértices de G tal que $|S| = \alpha_0(G)$. Ahora demostraremos que S es un conjunto dominante. Sea x en $V(G) - S$, puesto que G no tiene vértices aislados, entonces x es adyacente a al menos un vértice, digamos w. Ahora, como S es cubierta por vértices, $(x, w) \in A(G)$ y $x \notin S$ se sigue que $w \in S$. Por lo tanto, S es dominante.

Afirmación. $V(G) - S$ es un β_0-conjunto.
Primero demostraremos que $V(G) - S$ es un conjunto independiente. Procediendo por contradicción, supongamos que existen x y y dos vértices de $V(G) - S$ que son adyacentes de lo cual se sigue que (x, y) es una arista de G para la cual ninguno de sus vértices incidentes pertenece a S, esto contradice el hecho que S en particular es una cubierta por vértices. Por lo tanto, $V(G) - S$ es un conjunto independiente y por consiguiente $\beta_0(G) \geq |V(G) - S|$.

Ahora supongamos que existe un conjunto independiente J tal que $|J| > |V(G) - S|$. Sabemos que J es un conjunto independiente y G no tiene vértices aislados, esto implica que cada vértice de J es adyacente a al menos un vértice de $V(G) - J$, por lo cual se tiene que $V(G) - J$ es una cubierta por vértices de G (ver figura 3.23). Por otro lado, sabemos que $|V(G)| = |V(G) - J| + |J|$ y $|V(G)| = |V(G) - S| + |S|$, lo cual implica que $|J| = |V(G)| - |V(G) - J|$ y $|V(G)| - |S| = |V(G) - S|$, pero adémas se tiene que $|J| > |V(G) - S|$ por lo cual $|V(G)| - |V(G) - J| > |V(G)| - |S|$, entonces $-|V(G) - J| > -|S|$ y por consiguiente $|V(G) - J| < |S|$. De todo el análisis anterior se sigue que $V(G) - J$ es una cubierta por vértices de G de cardinalidad menor que la de S, lo cual contradice el hehcho que S es una cubierta por vértices mínima de G.

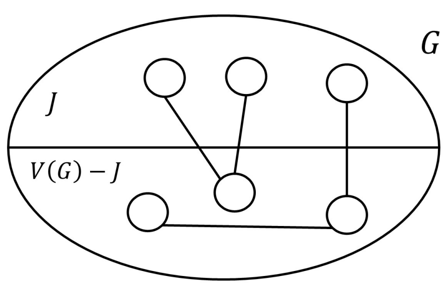

Figura 3.23: $V(G) - J$ es una cubierta por vértices de G

Por lo tanto, no existen conjuntos independientes de cardinalidad mayor a la de $V(G) - S$, lo que implica que $\beta_0(G) \geq |V(G) - S|$. Así, $V(G) - S$ es un β_0-conjunto.
Por último, sea u un vértice de $V(G) - S$, como S es un conjunto dominante entonces $S \cup \{u\}$ es un conjunto dominante. Ahora, como $\beta_0(G) = |V(G) - S|$

y $|V(G) - (S \cup \{u\})| < |V(G) - S|$, entonces $V(G) - (S \cup \{u\})$ no contiene ningún β_0-conjunto. Por lo tanto, $S \cup \{u\}$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G. Así, $\gamma_{it}(G) \leq |S \cup \{u\}| = \alpha_0(G) + 1$.■

A continuación mostraremos dos familias de gráficas, gráficas completas y estrellas, para las cuales se da la igualdad del teorema 3.0.12. Primero para las gráficas completas por el teorema 2.0.2 sabemos que $\gamma_{it}(K_n) = n$ y por la proposición 1.1.1 se tiene que $\alpha_0(K_n) = n - 1$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(K_n) = n = (n-1) + 1 = \alpha_0(K_n) + 1$.

Para el caso en que G es una estrella, por el teorema 2.0.4 se tiene que $\gamma_{it}(G) = 2$ y por la proposición 1.1.2 sabemos que $\alpha_0(G) = 1$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = 2 = 1 + 1 = \alpha_0(G) + 1$.

Corolario 3.0.13. *([1]) Sea G una gráfica de orden n, sin vértices aislados. Entonces $\gamma(G) + \gamma_{it}(G) \leq n + 1$ e $\imath(G) + \gamma_{it}(G) \leq n + 1$.*

Demostración.

Sea S' un conjunto dominante independiente tal que $|S'| = \imath(G)$ por definición se tiene que S' es un conjunto dominante, lo que implica que $\gamma(G) \leq |S|$. Así, $\gamma(G) \leq \imath(G)$. De igual manera, por definición se tiene que S es un conjunto independiente de lo cual se sigue que $\beta_0(G) \geq |S| = \imath(G)$. Por lo tanto,

$$\gamma(G) \leq \imath(G) \leq \beta_0(G) \tag{3.1}$$

Por otro lado, sabemos que $n = |S| + |V(G) - S|$. Recordemos que en la demostración del teorema anterior vimos que si S es un una cubierta por vértices de G tal que $|S| = \alpha_0(G)$, entonces $V(G) - S$ es un β_0-conjunto de G, lo que implica que

$$n = \alpha_0(G) + \beta_0(G) \tag{3.2}$$

De (3.1) tenemos en particular que $\gamma(G) \leq \beta_0(G)$, entonces $\gamma(G) + \alpha_0(G) \leq \beta_0(G) + \alpha_0(G)$ usando (3.2) podemos concluir que $\gamma(G) + \alpha_0(G) \leq n$. Por lo tanto,

$$\alpha_0(G) \leq n - \gamma(G). \tag{3.3}$$

Aplicando el teorema 3.0.12 a la gráfica G obtenemos que $\gamma_{it}G) \leq \alpha_0(G)+1$, usando (3.3) se concluye que $\gamma_{it}(G) \leq n + 1 - \gamma(G)$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) + \gamma(G) \leq n + 1$.

De igual manera, de (3.1) tenemos en particular que $\imath(G) \leq \beta_0(G)$, entonces $\imath(G) + \alpha_0(G) \leq \beta_0(G) + \alpha_0(G)$ usando (3.2) podemos concluir que $\imath(G) + \alpha_0(G) \leq n$. Por lo tanto,

$$\alpha_0(G) \leq n - \imath(G). \tag{3.4}$$

Aplicando el teorema 3.0.12 a la gráfica G obtenemos que $\gamma_{it}G) \leq \alpha_0(G)+1$, usando (3.4) se concluye que $\gamma_{it}(G) \leq n + 1 - \imath(G)$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) + \imath(G) \leq n + 1$. Así, $\gamma_{it}(G) + \gamma(G) \leq n + 1$ y $\gamma_{it}(G) + \imath(G) \leq n + 1$.■

Teorema 3.0.14. *([1]) Sea G una gráfica no completa tal que $\delta(G) \geq 2$, entonces $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_0(G)$.*

Demostración.
Sea S un β_0-conjunto de G. A continuación demostraremos que $V(G) - S$ es un conjunto dominante. Sea y un vértice en S, como $\delta(G) \geq 2$ y S es un conjunto independiente, existen al menos dos vértices en $V(G) - S$ adyacentes a y con lo cual se concluye que $V(G) - S$ es un conjunto dominante. Dividiremos la demostración en dos posibles casos:

Caso 1. Existe un vértice v en $V(G) - S$ tal que $|N(v) \cap S| \geq 2$.
Sean u y w dos vecinos de v que pertenecen a S. Como $\delta(G) \geq 2$ se sigue que tanto u como w tienen al menos un vecino distinto de v en $V(G) - S$.

Sea $D = (V(G) - S) - \{v\}$.
Afirmación. D es un conjunto dominante de $G - v$.
Sea x en $V(G - v) - D = S$. Como $\delta_G(x) \geq 2$, entonces se sigue que $\delta_{G-v}(x) \geq 1$, y dado que S es un conjunto independiente en G y en $G - v$ se concluye que existe al menos un vértice en D que es adyacente a x. Por lo tanto, D es un conjunto dominante de $G - v$.

Usando la afirmación anterior y el hecho que $(v, w) \in A(G)$ se tiene que $D \cup \{w\}$ es un conjunto dominante de G. Por último veamos que $D \cup \{w\}$ intersecta a cada β_0-conjunto de G. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un β_0-conjunto J que no intersecta a $D \cup \{w\}$, entonces $J \subseteq V(G) - (D \cup \{w\}) = (S - \{w\}) \cup \{v\}$. Como $|V(G) - (D \cup \{w\})| = |S| = \beta_0(G)$, entonces $J = V(G) - (D \cup \{w\})$, lo cual no es posible ya que v y u pertenecen a $V(G) - (D \cup \{w\})$ y estos vértices son adyacentes. Por lo tanto, $D \cup \{w\}$ intersecta a cada β_0-conjunto de G.
Así $D \cup \{w\}$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G, de lo cual se sigue que $\gamma_{it}(G) \leq |D \cup \{w\}|$. Por otro lado, notemos que $|D| = |(V(G) - S) - \{v\}| = n - \beta_0(G) - 1$, lo que implica que $|D \cup \{w\}| = n - \beta_0(G)$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) \leq n - \beta_0(G) = \alpha_0(G)$ (recordando 3.2 del corolario 3.0.13).

Caso 2. Para cada vértice x en $V(G) - S$ se tiene que $|N(x) \cap S| = 1$.
Sean v un vértice en $V(G) - S$, w un vértice en G tal que $\{w\} = N(v) \cap S$ y u cualquier vértice de S que no es adyacente a v (recuerde que $|S| = \beta_0(G) \geq 2$ ya que G no es completa).

Tomamos el conjunto $D = [(V(G) - S) - \{v\}] \cup \{u\}$.

Afirmación. D es un conjunto dominante.
Sea y un vértice en $V(G) - D = (S - \{u\}) \cup \{v\}$, entonces tenemos dos posibles casos: si $y \in S - \{u\}$, como S es conjunto independiente y $\delta(y) \geq 2$, entonces existe al menos un vértice en $(V(G) - S) - \{v\}$ tal que es adyacente a

y. Si $y = v$, como $w \in V(G) - D$, $\delta(v) \geq 2$ y $|N(v) \cap S| = 1$, se sigue que existe al menos un vértice en D que es adyacente a v. Por lo tanto, D es un conjunto dominante.

Demostraremos que D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G, para lo cual solo nos falta ver que cada β_0-conjunto de G intersecta a D. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un β_0-conjunto de G, Jque no intersecta a D, entonces $J \subseteq (S - \{u\}) \cup \{v\}$. Como $|(S - \{u\}) \cup \{v\}| = |S| = \beta_0(G)$ y $J \subseteq (S - \{u\}) \cup \{v\}$ se sigue que $J = (S - \{u\}) \cup \{v\}$. Como $w \in S - \{u\}$, entonces se sigue que w y v pertenecen a J lo cual no es posible ya que $(w, v) \in A(G)$ y J es un conjunto independiente. Por lo tanto, no existen β_0-conjuntos de G que no sean intersectados por D, lo que implica que D es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G. Así, $\gamma_{it}(G) \leq |D|$.

Por último, es claro que $|D| = |V(G) - S| = n - \beta_0(G) = \alpha_0(G)$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_0(G)$. Con lo cual queda demostrado el teorema.■

Antes de continuar con nuestros resultados haremos una observación. Para la demostración del teorema 3.0.14 en [1] el autor afirmaba que siempre existe un vértice v en $V(G) - S$ tal que $|N(v) \cap S| \geq 2$. A continuación presentamos una gráfica para la cual dicha afirmación no es cierta.

Para la gráfica G de la figura 3.24 se cumplen las hipótesis del teorema 3.0.14, G es una gráfica conexa no completa, $\delta(G) = 2$ y $\beta_0(G) = 2$. Tomamos $S = \{u_3, u_6\}$, es claro que S es un β_0-conjunto de G, pero ninguno de los vértices u_1, u_2, u_4, u_6 tiene mas de un vecino en S.

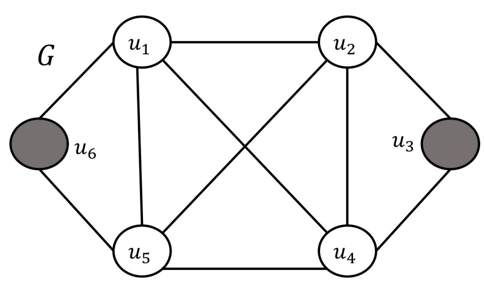

Figura 3.24: Los vértices sombreados representan al conjunto S

Debido a lo anterior, nosostros dividimos la demostración del teorema 3.0.14 en dos casos.

Corolario 3.0.15. *([1]) Si G es una gráfica no completa con $\gamma_{it}(G) = \alpha_0(G) + 1$, entonces $\gamma(G) = \alpha_0(G)$.*

Demostración.

Por hipótesis sabemos que $\gamma_{it}(G) = \alpha_0(G) + 1$ esto implica que $\delta(G) \leq 1$ ya que de lo contrario por el teorema 3.0.14 se tendría que $\gamma_{it}(G) = \alpha_0(G)+1 \leq \alpha_0(G)$, esto implica que $1 \leq 0$ lo cual es una contradicción. Ahora por el teorema 3.0.8, se cumple que $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + \delta(G)$, pero dado que $\delta(G) \leq 1$ se sigue que $\gamma(G) + \delta(G) \leq \gamma(G) + 1$, entonces $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + 1$. Por lo tanto, $\alpha_0(G) \leq \gamma(G)$.

Sea S una cubierta por vértices de G tal que $|S| = \alpha_0(G)$. Demostraremos que S es un conjunto dominante. Sea x un vértice en $V(G) - S$, como G es una gráfica conexa se tiene que $\delta(G) \geq 1$ lo que implica que existe al menos un vértice w tal que $(x, w) \in A(G)$. Como x pertenece a $V(G) - S$ y S es una cubierta se sigue que $w \in S$. Por lo tanto, S es un conjunto dominante, por lo cual se tiene que $\gamma(G) \leq |S| = \alpha_0(G)$.

Por lo tanto, $\gamma(G) = \alpha_0(G)$. ■

En el siguiente resultado damos una cota superior para $\gamma_{it}(G)$ en término del número de clan y caracterizamos a las gráficas para las cuales se da la igualdad con dicha cota.

Teorema 3.0.16. *([1]) Para cualquier gráfica G no completa de orden n y número de clan w, se cumple $\gamma_{it}(G) \leq n - w + 1$. Mas aún $\gamma_{it}(G) = n - w + 1$ si y sólo si*

1. $\beta_0(G) = 2$
2. *Si S es un conjunto dominante tal que $\langle V(G) - S \rangle$ es completa, entonces $|V(G) - S| \leq w - 1$.*

Demostración.
Sean H un clan máximo de G, u en $V(H)$ y $S = V(G) - (H - \{u\})$, dado que $V(G) - (H - \{u\}) = (V(G) - H) \cup \{u\}$ podemos concluir que $S = (V(G) - H) \cup \{u\}$. Como H es un clan de G, cada vértice de $H - \{u\} = V(G) - S$ es adyacente a u, lo que implica que S es un conjunto dominante. Por otro lado, demostraremos que S intersecta a cada β_0-conjunto de G. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un β_0-conjunto de G, digamos J, que no intersecta a S lo que implica que $J \subseteq V(G)-S = H-\{u\}$, sean x y y dos vértices en J, por lo anterior sabemos que x y y están en $H-\{u\}$, lo que implica que son adyacentes, lo cual contradice el hecho que J es un conjunto independiente. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G.
Así, $\gamma_{it}(G) \leq |S| = |V(G) - (H - \{u\})| = n - (w - 1) = n - w + 1$.

Ahora demostraremos que $\gamma_{it}(G) = n - w + 1$ si y sólo si

1. $\beta_0(G) = 2$

2. Si S es un conjunto dominante tal que $\langle V(G) - S\rangle$ es completa, entonces $|V(G) - S| \leq w - 1$.

Para la condición suficiente, supongamos que $\gamma_{it}(G) = n - w + 1$. Sean H un clan máximo de G, u y v dos vértices adyacentes de G tales que $u \in H$ y $v \in V(G) - H$ (u y v existen por el teorema 1.2.6). Tomamos el conjunto $D = \{u\} \cup [V(G) - (H \cup \{v\})]$, demostraremos a continuación que D es un conjunto dominante. Sea x en $V(G) - D = (H - \{u\}) \cup \{v\}$, tenemos dos posibles casos:

Caso 1. $x \in H - \{u\}$.

Como H es un clan de G se tiene que cada vértice en $H - \{u\}$ es adyacente a u (u pertenece a D).

Caso 2. $x = v$.

Por elección, x es adyacente a u.

Por lo tanto, D es un conjunto dominante tal que $|D| = n - w$.

Afirmación 1. $\beta_0(G) = 2$.

Dado que $\gamma_{it}(G) = n - w + 1$ y $|D| = n - w$, se sigue que D no es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Como D si es un conjunto dominante pero no es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, se tiene que existe un β_0-conjunto de G, digamos S' tal que $D \cap S' = \emptyset$. Por lo tanto, $S' \subseteq V(G) - D = (H - \{u\}) \cup \{v\}$, es claro que $S' \nsubseteq H - \{u\}$ ya que $H - \{u\}$ es un clan de G y G es no completa, de lo cual se sigue que $v \in S'$. Ahora, supongamos que v es adyacente a cada vértice en $H - \{u\}$ lo cual implica que $H \cup \{v\}$ es un clan de G (porque u y v son adyacentes) de cardinalidad mayor a la de H, lo cual contradice el hecho que H es un clan máximo de G. Así, existe un vértice de $H - \{u\}$, digamos z, que no es adyacente a v; como $H - \{u\}$ es un clan entonces solo z puede pertenecer al conjunto independiente S', lo que implica que $S' = \{z, v\}$. Por lo tanto, $\beta_0(G) = 2$.

Afirmación 2. Si S es un conjunto dominante tal que $\langle V(G) - S\rangle$ es completa, entonces $|V(G) - S| \leq w - 1$.

Procediendo por contradicción, supongamos que existe un conjunto dominante de G, S tal que $\langle V(G) - S\rangle$ es completa para el cual se cumple que $|V(G) - S| > w - 1$. Como $\langle V(G) - S\rangle$ es un clan se tiene que $|V(G) - S| \leq w$, lo que implica que $|V(G) - S| = w$. Por otro lado, puesto que $\langle V(G) - S\rangle$ es un clan y $\beta_0(G) = 2$ se concluye que cada β_0-conjunto de G intersecta a S. Por lo tanto, S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos y por consiguiente $\gamma_{it}(G) \leq |S|$. Por último, ya que $|V(G) - S| = w$ y $|V(G) - S| + |S| = n$ se tiene que $|S| = n - w$. Así, $\gamma_{it}(G) \leq n - w$ lo cual contradice el hecho que $\gamma_{it}(G) = n - w + 1$.

Por lo tanto, la afirmación dos es cierta.

Ahora para la condición necesaria, supongamos que 1 y 2 es cierto. Dado que ya se demostró que $\gamma_{it}(G) \leq n - w + 1$ solo nos resta demostrar que $\gamma_{it}(G) \geq n - w + 1$. Sea S un γ_{it}-conjunto de G. Afirmamos que $\langle V(G) - S \rangle$ es un clan de G, ya que de lo contrario existen dos vértices de $V(G) - S$ que no son adyacentes, digamos x y y, entonces $\{x, y\}$ es un β_0-conjunto de G que no intersecta a S, lo cual contradice el hecho que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Por lo tanto, en particular S es un conjunto dominante tal que $\langle V(G) - S \rangle$ es completa, por 2 se sigue que $|V(G) - S| \leq w - 1$. Como $|V(G) - S| + |S| = n$ se sigue que $n \leq w - 1 + |S|$, entonces $\gamma_{it}(G) = |S| \geq n - w + 1$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = n - w + 1$.

Con lo cual queda demostrado el teorema.■

Capítulo 4

Número de dominación transversal de independientes máximos para gráficas bipartitas

En este capítulo veremos algunos resultados respecto a $\gamma_{it}(G)$ para gráficas bipartitas, mas aún demostraremos que $\gamma_{it}(G) \in \{\gamma(G), \gamma(G)+1\}$, para lo cual necesitaremos un lema y un teorema. Finalizaremos este capítulo caracterizando el valor de $\gamma_{it}(G)$ cuando G es una gráfica bipartita y uno de los conjuntos independientes de su partición de $V(G)$ tiene cardinalidad $\gamma(G)$.

Lema 4.0.1. *([1]) Si G es una gráfica bipartita y S es un γ-conjunto de G, entonces cualesquiera par de β_0-conjuntos de G se intersectan en $V(G) - S$, mas aún cualesquiera tres β_0-conjuntos de G en $V(G) - S$ se intersectan.*

Demostración.

Supongamos que G es una gráfica bipartita con $\{X, Y\}$ una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes. Supongamos sin pérdida de generalidad, que

$$|X| \leq |Y|. \tag{4.1}$$

Sea S un γ-conjunto de G. Primero demostraremos que cualquier par de β_0-conjuntos de G en $V(G) - S$ se intersectan. Procediendo por contradicción, supongamos que existen D_1 y D_2 dos β_0-conjuntos de G en $V(G) - S$ que no se intersectan. Como $D_1 \subseteq V(G) - S$, $D_2 \subseteq V(G) - S$ y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ se sigue que $|D_1| + |D_2| = 2\beta_0(G) \leq |V(G) - S|$, además como S es un γ-conjunto se concluye que $2\beta_0(G) + \gamma(G) \leq |V(G) - S| + |S|$. Por otro lado, sabemos que $|V(G)| = |V(G) - S| + |S|$ y $V(G) = |X| + |Y|$, por lo cual $|V(G) - S| + |S| = |X| + |Y|$, lo que implica que $2\beta_0(G) + \gamma(G) \leq |X| + |Y|$ y por consiguiente

$$\gamma(G) \leq |X| + |Y| - 2\beta_0(G). \tag{4.2}$$

Ahora, como Y es un conjunto independiente se tiene que $\beta_0(G) \geq |Y|$, lo que implica que $-2\beta_0(G) \leq -2|Y|$, entonces

$$|X| + |Y| - 2\beta_0(G) \leq |X| - |Y|. \tag{4.3}$$

Por lo tanto, de (4.2) y (4.3) $\gamma(G) \leq |X| - |Y|$. Luego de (4.1) se tiene que $|X| - |Y| \leq 0$, lo que implica que $\gamma(G) \leq 0$, lo cual no es posible.

Así, cada par de β_0-conjuntos de G en $V(G) - S$ se intersectan.

A continuación haremos un análisis similar para demostrar que cada tercia de β_0-conjuntos de G en $V(G) - S$ se intersecta. Procediendo por contradicción, supongamos que D_1, D_2, D_3 son tres β_0-conjuntos de G en $V(G) - S$ tales que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \emptyset$. Por lo que acabamos de demostrar sabemos que en particular cada par de estos conjuntos se intersectan, supongamos que $D_1 \cap D_2 = S_1$, $D_1 \cap D_3 = S_2$ y $D_2 \cap D_3 = S_3$.

Notemos que $|V(G) - S| \geq |D_1| + |D_2| - |S_1| + |D_3| - |S_2| - |S_3|$ y usando el análisis del caso anterior sabemos que $|X| + |Y| = |S| + |V(G) - S|$, lo cual implica que $|X| + |Y| \geq \gamma(G) + |D_1| + |D_2| - |S_1| + |D_3| - |S_2| - |S_3|$, es decir,

$$|X| + |Y| \geq \gamma(G) + |D_1| + |D_2| + |D_3| - |S_1| - |S_2| - |S_3|. \tag{4.4}$$

Recordando que $\beta_0(G) = |D_1| = |D_2| = |D_3|$ la desigualdad 4.4 queda de la siguiente manera:

$$|X| + |Y| \geq \gamma(G) + 3\beta_0(G) - (|S_1| + |S_2| + |S_3|) \tag{4.5}$$

Por otro lado, por definición de S_i para cada i en $\{1, 2, 3\}$ y el hecho que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \emptyset$ se concluye que $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ es un conjunto independiente, por lo cual $|S_1| + |S_2| + |S_3| \leq \beta_0(G)$, usando esto y la ecuación (4.5) se tiene que $|X| + |Y| \geq \gamma(G) + 3\beta_0(G) - \beta_0(G) = \gamma(G) + 2\beta_0(G)$, entonces

$$|X| + |Y| \geq \gamma(G) + 2\beta_0(G). \tag{4.6}$$

Nuevamente, puesto que $\beta_0(G) \geq |Y|$, se tiene que $2\beta_0(G) \geq 2|Y|$, usando esto y la ecuación 4.6 podemos concluir que $|X| + |Y| \geq \gamma(G) + 2|Y|$. Entonces $\gamma(G) \leq |X| + |Y| - 2|Y| = |X| - |Y|$, luego por 4.1 se tiene que $|X| - |Y| \leq 0$, lo que implica que $\gamma(G) \leq 0$, lo cual no es posible. Por lo tanto, cualquier tercia de β_0-conjuntos de G en $V(G) - S$ se intersecta. ■

Sean G una gráfica bipartita y S un γ-conjunto, si G tiene a lo más tres β_0-conjuntos que no intersectan a S, entonces por el lema 4.0.1 dichos conjuntos se intersectan. Tomamos un vértice en la intersección, digamos v, entonces $S \cup \{v\}$ es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) \leq |S| + 1 = \gamma(G) + 1$.

Motivado por la idea de generalizar la observación anterior y el corolario 3.0.10 en [1] el autor planteó la siguiente conjetura.

Conjetura 2. ([1]) Si G es una gráfica bipartita conexa, entonces $\gamma_{it}(G) \in \{\gamma(G), \gamma(G) + 1\}$.

En [3] se demuestra el siguiente teorema, el cual se usa para demostrar que la conjetura 2 es cierta.

Teorema 4.0.2. *([3]) Si G es una gráfica de orden n tal que $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$, entonces $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + 1$*

En este trabajo no daremos la demostración de dicho teorema ya que se necesitan otros resultados previos: tres lemas y tres teoremas.

A continuación presentamos la demostración de la conjetura 2 haciendo uso del teorema 4.0.2.

Demostración de la conjetura 2.

Como G es una gráfica bipartita sabemos que existe una partición de $V(G)$ en conjuntos independientes, digamos $\{X, Y\}$. Ahora, dado que $|X| + |Y| = n$ se sigue que $|X| \geq \frac{n}{2}$ o $|Y| \geq \frac{n}{2}$, además como X y Y son conjuntos independientes se tiene que $\beta_0(G) \geq |X|$ y $\beta_0(G) \geq |Y|$ esto implica que $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$. Así, por el teorema 4.0.2 se concluye que $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + 1$.

Por otro lado, por el lema 3.0.1 se tiene que $\gamma(G) \leq \gamma_{it}(G)$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) \in \{\gamma(G), \gamma(G) + 1\}$.■

Ahora, notemos que por el teorema 4.0.2 y el lema 3.0.1 se tiene que para cualquier gráfica G con $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$ se cumple que $\gamma_{it}(G) \in \{\gamma(G), \gamma(G) + 1\}$.

En [1] se enuncia y demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.0.3. *([1]) Sea G un gráfica bipartita con $\{X, Y\}$ la partición de $V(G)$ en conjuntos independientes tal que $|X| \leq |Y|$ y $|X| = \gamma(G)$. Entonces $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$ si y sólo si cada vértice en X es adyacente a al menos dos vértices finales.*

Encontramos una gráfica G (ver figura 4.1) para la cual no se cumple la condición suficiente del teorema 4.0.3.

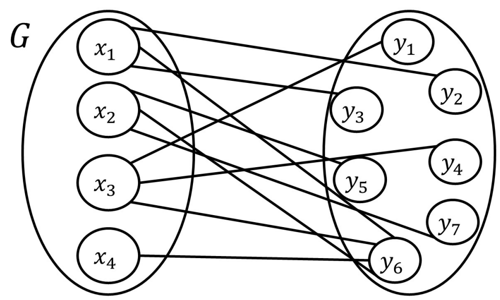

Figura 4.1: x_4 no es adyacente a ningún vértice final

Notemos que la gráfica G es bipartita conexa con $\{X, Y\}$ partición de $V(G)$ en conjuntos independientes, donde $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$. Es claro que $|X| < |Y|$, solo nos falta ver que $|X| = \gamma(G)$ para lo cual demostraremos la siguiente afirmación.

Afirmación 1. $\gamma(G) = 4$.

Es claro que X es un conjunto dominante ya que x_1, x_2 y x_3 dominan a los vértices $y_1, \ldots, y_5$ y y_7, y x_4 domina al vértice y_6. Por lo cual se tiene que $\gamma(G) \leq 4$.

Ahora, sea D un γ-conjunto y supongamos que $D \neq X$. Por lo ya demostrado tenemos que $|D| \leq 4$. Notemos que D no puede quedarse contenido en Y ya que por ser Y un conjunto independiente de cardinalidad siete D no dominaria al resto de los vértices de Y, lo cual contradice el hecho que D es un conjunto dominante. Sean $X_1 = D \cap X$ y $X_2 = D \cap Y$, entonces por lo anterior y el hecho que $D \neq X$ se tiene que $|X_1| \geq 1$ y $|X_2| \geq 1$. Analizaremos todos los posibles casos con respecto a $|X_1|$:

Caso 1. $|X_1| = 1$.

Como $|X_1| = 1$ se tiene que tres de los vértices de X no pertenecen a D. Supongamos que $X_1 = \{x_i\}$ para alguna i en $\{1, 2, 3, 4\}$, entonces existen en $X - X_1$ al menos dos vértices que son adyacentes a dos vértices finales, dichos vértices finales deben pertenecer a D ya que de lo contario no serian dominados por D lo cual es una contradicción, por lo anterior se sigue que $|X_2| \geq 4$. Por lo tanto, $|D| = |X_1| + |X_2| \geq 1 + 4 = 5$ lo cual es una contradicción.

Caso 2. $|X_1| = 2$.

Supongamos que $X_1 = \{x_i, x_j\}$ para algún subconjunto $\{i, j\}$ de $\{1, 2, 3, 4\}$. Si $x_i = x_4$ o $x_j = x_4$, entonces los dos vértices de X que no pertenecen a D son adyacentes a dos vértices finales, los cuales por el análisis del caso anterior sabemos que pertenecen a D, lo que implica que $|X_2| \geq 4$. Por lo tanto, $|D| = |X_1| + |X_2| \geq 2 + 4 = 5$ lo cual es una contradicción. Ahora, si $x_i \neq x_4$ y $x_j \neq x_4$, entonces y_6 debe pertenecer a D ya que lo contrario D no dominaria a x_4, para el otro vértice distinto de x_4 de X que no pertenece a D sabemos que sus dos vecinos que son vértices finales pertenecen a D, lo que implica que $|X_2| \geq 3$. Por lo tanto, $|D| = |X_1|+|X_2| \geq 2+3 = 5$ lo cual es una contradicción.

Como los dos casos anteriores no son posibles se concluye que $|X_1| \geq 3$, esto y el hecho que $|X_2| \geq 1$ implican que $|D| \geq 4$. Por lo tanto, $\gamma(G) = |D| = 4$.

Así, de la afirmación 1 se sigue que $|X| = 4 = \gamma(G)$. Demostraremos que $\gamma_{it}(G) = 5 = \gamma(G) + 1$ para lo cual primero necesitamos calcular el valor de $\beta_0(G)$.

Afirmación 2. $\beta_0(G) = 7$.

Como Y es un conjunto independiente se sigue que $\beta_0(G) \geq |Y| = 7$. Supongamos que existe un conjunto independiente J tal que $|J| \geq 8$. Primero notemos que si y_6 pertenece a J, entonces ningún vértice de X podría pertenecer a J, lo que implica que $|J| \leq 7$, lo cual no es posible. Como y_6 no pertenece a J, entonces $|J \cap Y| \leq 6$ y por consiguiente $|J \cap X| \geq 2$, es decir, al menos dos vértices de X pertenecen a J. Para encontrar dichos vértices analizaremos algunos casos sobre los elementos de X.

Si x_1 pertenece a J, entonces y_2 y y_3 no pueden pertenecer a J ya que son vecinos de x_1. Lo anterior y el hecho que $|J| \geq 8$ implica que $J = V(G) - \{y_2, y_3, y_6\}$, pero este conjunto no es independiente porque $(x_2, y_5) \in A(G)$, lo cual no es posible. De igual manera si x_2 pertenece a J, entonces y_5 y y_7 no pueden pertenecer a J lo que implica que $J = V(G)-\{y_5, y_6, y_7\}$, lo cual no es posible ya que x_1 y y_3 son dos vértices de J que son adyacentes. Por último, si x_3 pertenece a J, entonces y_1 y y_4 no pueden pertenecer a J lo que implica que $J = V(G) - \{y_1, y_4, y_6\}$, lo cual no es posible ya que x_1 y y_2 son dos vértices de J que son adyacentes.

Por lo tanto, el único elemento de X que puede pertenecer a J es x_4 lo cual es una contradice el hecho que $|J| \geq 8$. Así, no existen conjuntos independientes de cardinalidad mayor a siete y por consiguiente $\beta_0(G) = 7$.

Por otro lado, siguiendo el análisis de las demostraciones de las afirmaciones 1 y 2 se puede ver que los únicos γ-conjuntos de G son X y $(X - \{x_4\}) \cup \{y_6\}$ (ver figura 4.2) y los únicos β_0-conjuntos de G son Y y $(Y - \{y_6\}) \cup \{x_4\}$ (ver figura 4.3).

Notemos que X no es un conjunto dominante transversal de independientes máximos ya que $X \cap Y = \emptyset$ y Y es un β_0-conjunto. De igual manera $(X - \{x_4\}) \cup \{y_6\}$ no es un conjunto dominante transversal de independientes máximos ya que $V(G) - [(X - \{x_4\}) \cup \{y_6\}] = (Y - \{y_6\}) \cup \{x_4\}$ es un β_0-conjunto. Por lo tanto, ningún γ-conjunto es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, es decir, $\gamma_{it}(G) \geq \gamma(G)+1$. Por otro lado, si tomamos $S = X \cup \{y\}$ para cualquier vértice y en Y, como X es dominante se sigue que S es dominante, es claro que S intersecta a Y y a $(Y - \{y_6\}) \cup \{x_4\}$ lo que implica que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Así, $\gamma_{it}(G) \leq |S| = \gamma(G) + 1$.

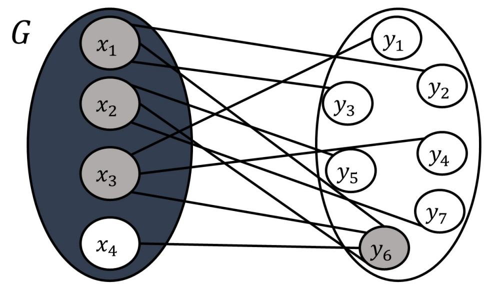

Figura 4.2: Los vértices sombreados representan a los conjuntos dominantes X y $(X - \{x_4\}) \cup \{y_6\}$

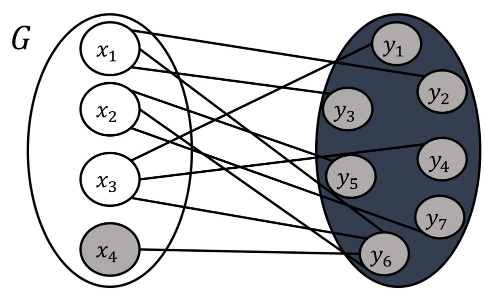

Figura 4.3: Los vértices sombreados representan a los conjuntos independientes Y y $(Y - \{y_6\}) \cup \{x_4\}$

Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$ pero para nuestra gráfica G se tiene que el vértice x_4 no es adyacente a ningún vértice final.

Con base en el teorema 4.0.3, planteamos el siguiente teorema que caracteriza a las gráficas bipartitas para las cuales $\gamma_{it}(G)$ es igual a $\gamma(G) + 1$.

Teorema 4.0.4. *Sea G una gráfica bipartita (no necesariamente conexa) con $\{X, Y\}$ la partición de $V(G)$ en conjuntos independientes tal que $|X| \leq |Y|$ y $|X| = \gamma(G)$. Entonces $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$ si y sólo si*

1. *Cada vértice distinto de un vértice final en X es adyacente a al menos dos vértices finales*

2. Y no tiene vértices aislados.

Demostración.
Notemos que K_2 es una gráfica que cumple con las hipótesis del teorema. Por lo ya visto sabemos que $\gamma_{it}(K_2) = 1 + 1 = \gamma(G) + 1$, luego por vacuidad se cumple que cada vértice de X que no es final es adyacente a al menos dos vértices finales. Como K_2 cumple con las condiciones necesarias y suficientes del teorema, en lo siguiente supondremos que G es de orden al menos tres.

Para demostrar la condición suficiente supongamos que $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$, entonces se sigue del corolario 2.0.11 que G no tiene vértices aislados, lo que implica que cada vértice de G tiene grado al menos uno y que Y no tiene vértices aislados. Ahora, supongamos que cada vértice en X tiene grado exactamente uno, es decir, X no tiene vértices no finales entonces por vacuidad se tiene que cada vértice no final de X es adyacente a al menos dos vértices finales. Por lo anterior, para esta demostración supondremos que existen al menos un vértice en X de grado mayor o igual a 2.

Afirmación 1. X es un γ-conjunto.
Sea a un vértice en $V(G) - X = Y$, por lo dicho anteriormente se tiene que $\delta(a) \geq 1$ y puesto que Y es un conjunto independiente, se sigue que existe en X al menos un vértice adyacente a a. Por lo tanto, X es un conjunto dominante de G. Luego, por hipótesis sabemos que $|X| = \gamma(G)$, lo que implica que X es un γ-conjunto de G.

Afirmación 2. $\beta_0(G) = |Y|$.
Como Y es un conjunto independiente se tiene que $\beta_0(G) \geq |Y|$. Supongamos que $\beta_0(G) > |Y|$, lo que implica que Y no contiene β_0-conjuntos de G, de lo cual se concluye que cada β_0-conjunto de G intersecta a X. Por lo tanto, como X es un conjunto dominante, se concluye que X es un conjunto dominante transversal de independientes máximos de G. Así, $\gamma(G) = |X| \geq \gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$ lo cual no es posible.
Por lo tanto, $\beta_0(G) = |Y|$.

A continuación demostraremos que existe al menos un vértice final.
Afirmación 3. $\delta(G) = 1$.
Procediendo por contradicción, supongamos que $\delta(G) \geq 2$. Sean $u \in X$, $v \in N(u)$ y $S = (X - \{u\}) \cup \{v\}$.

Afirmación 3.1. S es un conjunto dominante.
Sea a en $V(G) - S = (Y - \{v\}) \cup \{u\}$. Tenemos dos posibles casos sobre a: si $a \in Y - \{v\}$, entonces como X es un γ-conjunto de G y $\delta(G) \geq 2$ se tiene que existe al menos un vértice en $X - \{u\}$ el cual es adyacente a a. Si $a = u$, entonces por elección se tiene que v es adyacente a u. Por lo tanto, S es un conjunto dominante.

Afirmación 3.2. S intersecta a todo β_0-conjunto de G.

Sea J un β_0-conjunto de G. Si $J \subseteq Y$, entonces por la afirmación 2 se tiene que $J = Y$, lo que implica que $v \in J$ y así $J \cap S \neq \emptyset$. Si $J \nsubseteq Y$, entonces $|J \cap X| \geq 1$. En el caso en que $u \notin J$ se sigue que $J \cap S \neq \emptyset$. Supongamos que $u \in J$ y en este caso demostraremos que $|J \cap X| \geq 2$. Procediendo por contradicción, supongamos que $J \cap X = \{u\}$, entonces $J = (Y - \{z\}) \cup \{u\}$ para algún z en Y (porque sabemos $\beta_0(G) = |Y|$), lo cual no es posible ya que u tiene al menos dos vecinos en Y y J es un conjunto independiente. Por lo tanto, $|J \cap X| \geq 2$ lo que implica que $J \cap S \neq \emptyset$. Así, S intersecta a cada β_0-conjunto de G.

De las afirmaciones 3.1 y 3.2 se sigue que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos tal que $|S| = |X| = \gamma(G)$, lo que implica que $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G)$ lo cual contradice el hecho que $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$. Por lo tanto, la afirmación 3 es cierta, es decir, $\delta(G) = 1$.

Por último, sea u un vértice en X tal que $\delta(u) \geq 2$ (sabemos que u existe por lo visto al inicio de la demostración), necesitamos demostrar que u es adyacente a al menos dos vértices finales para lo cual procederemos por contradicción. Supongamos que $N(u)$ contiene a lo más un vértice final, entonces sean v un vértice de $N(u)$, si $N(u)$ contiene un vértice final entonces tomar a v como dicho vértice, y $S = (X - \{u\}) \cup \{v\}$.

Afirmación 4. S es un conjunto dominante.

Sea a en $V(G) - S = (Y - \{v\}) \cup \{u\}$, por lo cual tenemos dos posibles casos:

Caso 1. $a \in Y - \{v\}$.

Notemos que $Y - \{v\} = [N(u) - \{v\}] \cup [Y - (N(u) - \{v\})]$. Si $a \in Y - N(u)$, entonces como $\delta(G) \geq 1$ y Y es un conjunto independiente se tiene que existe al menos un vértice en $X - \{u\}$ adyacente a a. Si $a \in N(u) - \{v\}$, como $\delta(G) \geq 1$ se sigue que $\delta(a) \geq 1$ pero dado que $a \neq v$, a no puede ser un vértice final por elección de v y la suposición sobre $N(u)$, lo que implica que $\delta(a) \geq 2$. Por lo tanto, existe al menos un vértice en $X - \{u\}$ adyacente a a.

Caso 2. $a = u$.

Por elección sabemos que v es adyacente a u.

Por lo tanto, de ambos casos podemos concluir que S es un conjunto dominante.

Afirmación 5. S intersecta a cada β_0-conjunto de G.

Sea J un β_0-conjunto de G. Si $J \subseteq Y$, entonces por la afirmación 2 se sigue que $J = Y$, lo que implica que v pertenece a J y así $J \cap S \neq \emptyset$. Si $J \nsubseteq Y$, entonces $|J \cap X| \geq 1$. Si $J \cap X = \{u\}$, entonces $J = (Y - \{z\}) \cup \{u\}$ para algún z en Y lo cual no es posible ya que $\delta(u) \geq 2$, es decir, existe al menos un vértice en $Y - \{z\}$ adyacente a u y J es un conjunto independiente. Por lo tanto, existe w en $X - \{u\}$ que pertenece a J, lo que implica que $J \cap S \neq \emptyset$.

De las afirmaciones 4 y 5 se sigue que S es un conjunto dominante transversal de independientes máximos, tal que $|S| = |X| = \gamma(G)$ lo que implica que $\gamma_{it}(G) \leq |S| = \gamma(G)$ lo cual contradice el hecho que $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$. Por lo tanto, cada vértice en X distinto de un vértice final es adyacente a al menos dos vértices finales. Así, se cumple 1 y 2.

Ahora para la condición necesaria, supongamos que cada vértice distinto de un vértice final en X es adyacente a al menos dos vértices finales y Y no tiene vértices aislados. Dado que $|X| \leq |Y|$ y Y no tiene vértices aislados se sigue que $\delta(G) \geq 1$. Consideremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. $\beta_0(G) = |Y|$.

Como Y es un conjunto independiente se sigue que $\beta_0(G) \geq |Y|$. Supongamos que $\beta_0(G) > |Y|$, sea J un β_0-conjunto de G. Como $\beta_0(G) > |Y|$ y $|X| \leq |Y|$ se tiene que $J \cap X \neq \emptyset$ y $J \cap Y \neq \emptyset$. Sean $X' = J \cap X$ y $Y' = J \cap Y$, como en X existen dos tipos de vértices entonces dividiremos los vértices de X' en dos conjuntos: llamaremos X_1 al conjunto de vértices de X' que no son vértices finales y X_2 al conjunto de vértices de X' que son vértices finales.

Afirmación 1.1. $|X_1| \geq 1$.

Como $|Y| = |Y'| + |Y - Y'|$, $|J| = |X'| + |Y'|$ y $|J| > |Y|$ entonces $|X'| > |Y - Y'|$. De lo anterior, el hecho que $\delta(G) \geq 1$, X es un conjunto independiente y Y es un conjunto independiente se sigue que existen dos vértices en X' digamos u_1 y u_2, adyacentes a un mismo vértice de $Y - Y'$, digamos y.

Procediendo por contradicción, supongamos que $X_1 = \emptyset$, esto implica $X' = X_2$, de lo cual se sigue que $\delta(u_1) = 1$ y $\delta(u_2) = 1$. Entonces para cada vértice z en $Y - (Y' \cup \{y\})$ existe un vértice x_z en $X - \{u_1, u_2\}$ de tal manera que $(z, x_z) \in A(G)$ (recordemos que $\delta(G) \geq 1$). Por otro lado, como J es un conjunto independiente se tiene que para cada w en Y' existe x_w en $X - X'$ tal que $(w, x_w) \in A(G)$. Por lo tanto, $(X - \{u_1, u_2\}) \cup \{y\}$ es un conjunto dominante, lo cual contradice que $|X| = \gamma(G)$.

Por lo tanto, $|X_1| \geq 1$.

Ahora, como $N(X') \subseteq Y - Y'$, entonces se sigue de la hipótesis, la definición de X_1 y la definición de X_2 que $|Y - Y'| \geq 2|X_1| + |X_2|$, es decir, $|Y - Y'| \geq |X'| + |X_1|$, lo que implica que $|Y| \geq |X'| + |X_1| + |Y'|$. Por lo tanto, como $|X_1| + |J| \leq |Y|$, $1 \leq |X_1|$ (por la afirmación 1) y $|Y| < |J|$, lo cual es una contradicción. Así, $\beta_0(G) = |Y|$.

Sea D un γ-conjunto de G por lo cual se tiene que $|D| = \gamma(G) = |X|$ y por consiguiente $|V(G) - D| = |V(G) - X| = |Y| = \beta_0(G)$. A continuación demostraremos que $V(G) - D$ es un conjunto independiente, sean u y v dos vértices de $V(G) - D$ de lo cual se derivan tres posibles casos: si u y v pertenecen al conjunto independiente X, entonces u y v no son adyacentes; de igual manera si u y v pertenecen al conjunto independiente Y, entonces u y v no son adyacentes. Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad que u

pertenece a X y v pertenece a Y.

Afirmación 2. $\delta(u) = 1$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $\delta(u) \geq 2$. Por hipótesis sabemos que u es adyacente a al menos dos vértices finales, digamos w y z, como u no pertenece a D, entonces tanto w como z pertenecen a D ya que de lo contario w o z no serían dominados por D. Sea $S = (D - \{w, z\}) \cup \{u\}$, notemos que $V(G) - S = (((V(G) - D) \cap X) - \{u\}) \cup ((V(G) - D) \cap Y) \cup \{w, z\}$, $D = (D \cap X) \cup (D \cap Y)$ y $S = (D \cap X) \cup ((D \cap Y) - \{w, z\}) \cup \{u\}$. Como D es un conjunto dominante se sigue que para cada vértice y en $(V(G) - D) \cap Y$ existe un vértice x_y en $D \cap X$ tal que $(y, x_y) \in A(G)$ y de igual manera para cada x en $((V(G) - D) \cap X) - \{u\}$ existe y_x en $D \cap Y$ tal que (x, y_x) ($y_x \notin \{w, z\}$ ya que w y z son dos vértices finales adyacentes a u). Por lo tanto, S es un conjunto dominante de G, tal que $|S| = |D| - 2 + 1 = |X| - 1$ lo cual no es posible ya que $|X| = \gamma(G)$. Por lo tanto, $\delta(u) = 1$.

Así, como u no pertenece al conjunto dominante D y $\delta(u) = 1$, entonces el único vecino de u pertenece a D ya que de lo contrario u no sería dominado por D, lo que implica que $(u, v) \notin A(G)$. Por lo tanto, $V(G) - D$ es un conjunto independiente. Así, $V(G) - D$ es un β_0-conjunto de G.

De lo anterior se sigue que existe un β_0-conjunto de G que no intersecta a D. Por lo tanto, D no es un conjunto dominante transversal de independientes máximos. Así, $\gamma_{it}(G) \geq \gamma(G) + 1$.

Afirmación 3. $\delta(G) = 1$.

Recordemos que $\delta(G) \geq 1$. Si X tiene un vértice final entonces podemos concluir que $\delta(G) = 1$. Supongamos que X no tiene vértices finales, entonces por hipótesis sabemos que dado u en X se sigue que $N(u)$ contiene al menos dos vértices finales, lo que implica que $\delta(G) = 1$.

De la afirmación 3 y el teorema 3.0.8 se sigue que $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + 1$. Por lo tanto, $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$.■

Conclusiones.

A lo largo de este trabajo introdujimos y utilizamos el concepto de conjuntos dominantes transversales de independientes máximos, el cual como su nombre lo dice está relacionado con el concepto de conjunto dominante. Calculamos el valor de $\gamma_{it}(G)$ para las gráficas: k-partitas completas, completas, estrellas, la corona de G con K_1, trayectorias, gráficas inconexas, etcétera. Exhibimos algunas cotas para $\gamma_{it}(G)$ en términos de algunos parámetros conocidos dentro de la teoría de gráficas, así como algunas caracterizaciones para $\gamma_{it}(G)$.

Para el teorema 3.0.6 se vió que la demostración dadá en [1] no era correcta, ya que se encontró una gráfica construida de la manera descrita en la demostración de dicho resultado pero esta gráfica no cumple con lo afirmado en la prueba del teorema. La veracidad del teorema 3.0.6 se comprobo dividiendo la demostración en dos casos, uno de ellos se demostró usando la idea original de la prueba dada en [1] por el autor, para el otro caso se exhibió una gráfica distinta a la de la construcción que propone el autor en [1] la cual cumple con las conclusiones del teorema.

En el último capítulo de la tesis, al análizar la demostración dada en [1] para el teorema 4.0.3 nos dimos cuenta que el teorema no era cierto, por lo cual exhibimos una gráfica bipartita G para la cual se cumplen todas las hipótesis requeridas, a saber $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$ y $|X| = \gamma(G)$, pero en G existe un vértice de X que no es adyacente a ningún vértice final. Por lo tanto, con base en el contraejemplo pudimos dar una versión correcta del teorema 4.0.3.

Dado que aún hay mucho por estudiar sobre los conjuntos dominantes transversales de independientes máximos, nos gustaría seguir trabajando en ellos para responder algunas preguntas que aparecen en [1] como son:

1. ¿Es posible caracterizar las gráficas no completas de orden n con $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$ tales que $\gamma_{it}(G) = \frac{n}{2}$? En particular, ¿será posible responder la pregunta anterior cuando G es una gráfica bipartita?

2. ¿Es posible caracterizar las gráficas que cumplen con lo siguiente

   a) $\gamma_{it}(G) = \gamma(G)$

   b) $\gamma_{it}(G) = \alpha_0(G) + 1$

c) $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + \delta(G)$?

3. ¿Es posible caracterizar las gráficas de diámetro dos tales que $\gamma_{it}(G) = \delta(G) + 1$.

   Por último nos gustaría demostrar si dados tres números naturales a,b y c tales que $a \leq b \leq a + c$, entonces existe una gráfica G tal que $\gamma(G) = a$, $\gamma_{it}(G) = b$ y $\delta(G) = c$

Dadas dos gráficas G y H, por el teorema 2.0.10 y la definición de $G \cup H$ se tiene que $\gamma_{it}(G) = \text{mín}\{\gamma_{it}(G) + \gamma(H), \gamma_{it}(H) + \gamma(G)\}$. Por lo cual es natural considerando dos gráficas disjuntas por vértices G y H, agregar las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el valor de $\gamma_{it}(G + H)$?
2. ¿Cuál es el valor de $\gamma_{it}(G \times H)$?
3. ¿Cuál es el valor de $\gamma_{it}(L(G))$?

Bibliografía

[1] Ismail Sahul Hamid. (2012). Independent Transversal Domination in Graphs. Discussiones Mathematicae, Graph Theory 32, pag. $5-17$.

[2] Fink J.F., Jacobson M.S., Kinch L.F. and Roberts J. (1985). On Graphs Having Domination Number Half Their Order.Periodica Mathematica Hungarica Vol. 16(4), pg. $287-293$.

[3] Christoph Brausea, Michael A. Henning, Kenta Ozeki, Ingo Schiermeyer and Elkin Vumar. (2018). On upper bounds for the independent transversal domination number. Discrete Applied Mathematics 236, pag. 66-72.

[4] Chartrand G., Leniask L. Graphs and Digraphs (Fourth edition, CRC Press, Boca Raton, 2005).

[5] M.R. Garey, D.S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman and Company, San Francisco (1979).

[6] C.F. de Jaenisch. Traite des Applications de lAnalyse Mathematique au Jue des Echecs . 1862.

[7] O. Ore. Theory of graphs. American Mathematical Society Transl., Vol.38 pp. 206212, 1962

[8] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi. Independence graphs. Congr. Numer., X:$471-491$, 1974.

[9] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi. Towards a theory of domination in graphs. Networks, 7:$247-261$, 1977.

[10] E.J. Cockayne, R.M. Dawes and S.T. Hedetneimi, Total domination in graphs, Networks 10 (1980) $211-219$.

[11] E. Sampathkumar and H.B. Walikar, The connected domination number of a graph, Journal Mathematical Physical Sciciences, 13 (1979) $607-6134$.

[12] E. Sampathkumar, The global domination number of a graph, Journal of Mathematical and Physical Sciences, vol. 23, no. 5, pp. $377-385$, 1989.

[13] Douglas B. West. Introduction to graph theory (Solution Manual), Second edition, Mathematics Department University of Illinois, version 2005.

[14] Antoaneta Klobucar. Independent sets and independent dominating sets in the strong product of paths and cycles, Mathematical Communications 10(2005), pp. $23 - 30$.