



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

CARRERA DE PSICOLOGIA

PROGRAMA PSICOEDUCATIVO PARA EL
FORTALECIMIENTO DEL PENSAMIENTO LÓGICO-
MATEMÁTICO EN ADOLESCENTES CON BAJO
RENDIMIENTO INTELECTUAL

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADA EN PSICOLOGÍA

PRESENTA:

Gabriela Jazmín Medina Torres

JURADO DE EXAMEN

DIRECTORA: Dra. Gabriela Ordaz Villegas

COMITÉ: Dra. Guadalupe Acle Tomasini

Dra. Blanca Estela Barcelata Eguiarte

Lic. Ricardo Meza Trejo

Mtro. Gabriel Martín Villeda Villafaña



Ciudad de México

Junio, 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A **Dios** por llevarme de su mano y guiarme a lo largo de mi vida, en las bendiciones, en mis tropiezos y retos, por su amor infinito que me ha permitido luchar más allá de mis fuerzas y hacerme ver lo valioso que es el ser humano, por sus enseñanzas para lograr mis objetivos y rodearme de las personas correctas que me guiarían hasta ahora.

A mi Padre. Gracias por tu sabiduría, tu autenticidad, las extensas horas de charlas amenas, tu tiempo de calidad para apoyarme en lo que estaba en tus manos y por enseñarme que la disciplina y el carácter es la clave del éxito.

A mi Madre. hermosa mujer quien me ha enseñado el valor de la solidaridad, la paciencia y la humildad, gracias por tus palabras exactas en los momentos exactos y tu apoyo incondicional, eso me deja claro que el amor verdadero consta en dejar ser al ser.

La Dra. Gabriela Ordaz, no tengo palabras suficientes para agradecer todo su apoyo para lograr mi objetivo, estoy infinitamente agradecida con Dios por ponerla en mi camino, es un hermoso ser humano. Gracias por creer en mí en todo momento, por impulsarme a seguir mis sueños y no dejarme descansar hasta alcanzarlos. Usted reforzó la pasión y la importancia de mi profesión, gracias por convertirla en mi estilo de vida.

Al área se **Servicio Social** y el programa **LEGOCIENCIAS**, quien evalúa e interviene ante las Necesidades Educativas Especiales que los adolescentes presentan dentro de las escuelas, el cual me ayudó a utilizar mis previas experiencias en la realización de un programa enfocado a esta población.

A los **alumnos** de la escuela secundaria y la **orientadora Erika** que participaron e hicieron posible este trabajo.

A mis **sinodales**, la Dra. Guadalupe Acle Tomasini, la Dra. Blanca Estela Barcelata Eguiarte, El profesor Ricardo Meza Trejo y el Mtro. Gabriel Martin Villeda Villafaña quienes con base a su experiencia me orientaron a mejorar este programa, aportando y compartiendo sus conocimientos.

A mi bella segunda casa la **Universidad Nacional Autónoma de México** y la **Facultad de Estudios Superiores Zaragoza**, por ser el impulso y base significativa en este objetivo logrado.

Dedicatorias

A mi hermana Angélica, quien ha crecido conmigo y ahora compartimos una pasión, los niños. Y mi hermana Alessa quien me da motivo para continuar y a mis padres quienes han estado conmigo en todo momento, los amo.

A Emiliano, Rita, Ángel, Erick, Raquel, Jesús pequeño, Jesús grande y todos **mis niños de CAMVE**, el motivo principal de mi carrera y quienes me han enseñado la importancia de crecer cada día, los amo.

A mi hermosa **familia CAMVE**, quienes han sido los culpables por descubrir mi verdadera vocación, mis talentos y mis defectos, culpable de que este finalizando esta asombrosa y maravillosa carrera. A mi querido **Sergio**, por hacerme participe de tus locuras y enseñarme que la actitud es la pieza fundamental para rebasar nuestros propios límites. A mi **padrino Luis "Pin-Pon"**, por enseñarme la naturaleza del ser humano, la responsabilidad de mis actos y el poder que tiene Dios para levantarnos. Y mi querido **Jhenny**, amigo, confidente y ejemplo, gracias por tus éxitos y enseñarme que soy capaz de lograr lo que me propongo, te admiro y respeto.

Contenido

Resumen	6
Abstract.....	7
Introducción	8
Matemáticas	10
Las matemáticas en la historia	10
Situación del aprendizaje en México	20
Teorías del Aprendizaje	27
Conductista.....	27
Cognoscitivismo.	30
Constructivismo.....	32
Educación Especial.....	43
Aptitudes Sobresalientes	47
Bajo Rendimiento Escolar	49
Trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH)	50
Bajo Rendimiento Intelectual.....	51
El Juego en la intervención	55
Método.....	58
Planteamiento del problema	58
Objetivo General	60
Definición de variables	60
Tipo de investigación y Diseño	61
Contexto.....	61
Escenario.....	62
Fase 1. Planificación del programa.....	62
Objetivo Particular.....	62
Participantes.....	62
Herramientas.....	63
Procedimiento.....	64
Resultados	64
Fase 2. Instrumentación de un programa de Intervención	65
Objetivo particular	65

Herramientas	65
Procedimiento.....	67
Resultados	68
Evaluación Sumativa	70
Evaluación Social	72
Discusión y Conclusión	75
Referencias.....	80

Resumen

Desde que el humano ha tenido consciencia de su entorno, ha intentado actuar ante las constantes necesidades que se le presentan, contribuyendo significativamente en el aprendizaje y evolución de las ciencias (García y Piaget, 1984). Desafortunadamente en México, existe un panorama educativo desalentador, fenómeno que se complica al considerar la diversidad dentro del aula, como el caso de los alumnos con Bajo Rendimiento Intelectual, quienes no solo cuentan con un CI bajo, sino también con escasas capacidades cognitivas (León y Salvador, 2007). La propuesta de Jean Piaget (1991) plantea que al estimular el pensamiento lógico-matemático en la etapa formal, permite desarrollar la inteligencia en los adolescentes, Esta etapa está constituida por cuatro áreas: lógica proposicional, razonamiento científico, razonamiento combinatorio y razonamiento probabilístico y el juego, representa una construcción activa del conocimiento en su realidad. Por ello el objetivo de este trabajo es fortalecer el pensamiento lógico-matemático en adolescentes con Bajo Rendimiento Intelectual (BRI) a través de actividades lúdicas, con la finalidad de mejorar la inteligencia. Se propuso una investigación de campo aplicada (Zorrilla, 1993), con un diseño Pretest-Posttest (Campbell & Stanley, 1995), organizado en dos fases: 1) Evaluación Diagnostica; y 2) Instrumentación de un programa de intervención. Participaron 9 alumnos con BRI ($M_{edad}=13.8$; $DE=3.31$) de segundo y tercer grado que asisten a una escuela secundaria pública. Se aplicó el el Test de Escala avanzada de Matrices Progresivas de Raven (1996), una evaluación formal y una validación social. Los resultados indicaron diferencias estadísticamente significativas en la mejora de la inteligencia. Se concluye que el fortalecer el pensamiento lógico matemático a través de actividades lúdicas mejora la inteligencia en los adolescentes con BRI. Es importante seguir realizando aportaciones sobre los programas de intervención.

Palabras Clave: Pensamiento lógico-matemático, Bajo Rendimiento Intelectual, Inteligencia, Juego.

Abstract

Since the human being has had conscience of its environment, it has tried to act before the constant needs that appear before him, contributing significantly in learning and evolution of the sciences (García and Piaget, 1984). Unfortunately in Mexico, there exists a discouraging educational panorama, phenomenon that is complicated on having considered the diversity inside the classroom, like the case of the pupils with Low Intellectual Yield, who not only are provided with a low IQ, but also with scarce cognitive capacities (León and Salvador, 2007). The proposal of Jean Piaget (1991) states that by stimulating logical-mathematical thinking in the formal stage, it allows the development of intelligence in adolescents. This stage is constituted by four areas: propositional logic, scientific reasoning, combinatorial reasoning and reasoning probabilistic and the game, it represents an active construction of the knowledge in its reality. For it the target of this work is to strengthen the thought logician - mathematician in adolescents with Low Intellectual Yield (BRI) across playful activities, for the purpose of improving the intelligence. There was proposed an applied investigation of field (Zorrilla, 1993), with a design Pretest-Posttest (Cambpell and Stanley, 1995), organized in two phases: 1) Evaluation Diagnoses; and 2) Instrumentation of a program of intervention. 9 pupils took part with BRI (Medad=13.8; SD=3.31) of the second and third grade that they assist to a public secondary school. There was applied the Test of advanced Scale of Progressive Counterfoils of Raven (1996), a formal evaluation and a social ratification. The results indicated differences as per statistics significant in the progress of the intelligence. One concludes that strengthening the mathematical logical thought across playful activities improves the intelligence in the adolescents with BRI. It is important to keep on realizing contributions on the intervention programs.

Key words: Thought logician - mathematician, Under Intellectual Yield, Intelligence, Game.

Introducción

“Conserva celosamente tu derecho a reflexionar, porque incluso el hecho de pensar erróneamente es mejor que no pensar en absoluto”

Hipatia de Alejandría

Actualmente la SEP (2016) ha generado diversas modificaciones en el sistema educativo obligatorio, procurando apoyar el proceso de integración en alumnos y alumnas que presentan alguna Necesidades Educativas Especiales, sin embargo los alumnos que presentan un Bajo Rendimiento Intelectual con CI fuera de las categorías “normales” o con discapacidad intelectual, han sido ignorados o mal diagnosticados dentro de los programas de atención, siendo catalogados como flojos, tontos, problemáticos, entre otras, alumnos que han carecido de estimulación intelectual temprana desde nivel primaria y que al ser poco identificados, presentan una decadencia metacognitiva al ingresar a la secundaria, el cual, les impide aprender de forma eficaz y por ende mayor riesgo de deserción escolar.

Dado que el sistema educativo se enfoca en la trasmisión de información, más que en el proceso de la información, es necesario incorporar acciones que les permita desarrollar herramientas para construir su propio aprendizaje interaccionando con su entorno y así solucionar los problemas que se le presenten de forma autónoma, esto ayudará a mejorar la inteligencia de esta población, fortalecer su potencial y así disminuir el rezago escolar. Por ello el objetivo general de este trabajo es fortalecer el pensamiento lógico-matemático en adolescentes con bajo rendimiento intelectual a través de actividades lúdicas.

La sustentación teórica se abordará en cinco capítulos. El primer capítulo se describirá la importancia del pensamiento lógico-matemático en el desarrollo de la civilización, así como la situación actual en México en el aprendizaje matemático, llevando al segundo capítulo, el cual habla de las Necesidades Educativas Especiales, su historia y categorías, donde se hará énfasis en los alumnos con Bajo Rendimiento Intelectual.

En cuanto al tercer capítulo, se describirán las teorías del aprendizaje desde el enfoque conductista y Cognoscitivista, para después enfocarnos en el cuarto capítulo, el cual es la parte medular de este trabajo la Teoría del desarrollo de Piaget y el pensamiento lógico-matemático

en la etapa formal, apoyado de la influencia del juego en la intervención, puntualizado en el quinto capítulo.

Una vez desarrollado el sustento teórico se presentará el objetivo general, la metodología y el procedimiento utilizado para la elaboración y aplicación del programa de intervención. Los resultados obtenidos se darán a conocer en el capítulo nueve, los cuales se describirán tanto de forma general como individual a partir de las evaluaciones establecidas por las rubricas que se han diseñado para valorar el nivel de desempeño de cada una de las áreas lógicas del pensamiento formal, según Piaget (1975): lógica proposicional, razonamiento científico, razonamiento combinatorio, razonamiento probabilístico. Asimismo se describirán los resultados de la evaluación sumativa del Test de Escala avanzada de Matrices Progresivas de Raven (1996). Como última parte de los resultados, también se interpretará la evaluación social realizada a los mismos alumnos beneficiarios del programa.

Finalmente en las conclusiones se cuestionará en base a los resultados, las aportaciones y limitaciones influyentes para el cumplimiento del objetivo general de esta investigación, así como las recomendaciones finales para investigaciones futuras.

Capítulo I

Matemáticas

Al igual que la historia de la humanidad, las matemáticas han sido una de las disciplinas que se encuentra presente en la vida cotidiana. La sociedad de hoy no podría funcionar sin matemáticas, todo lo que hoy nos parece natural, desde la televisión hasta los teléfonos móviles, desde los grandes aviones de pasajeros hasta los sistemas de navegación por satélite en los automóviles, desde los programas de los trenes hasta los escáneres médicos, se basa en ideas y métodos matemáticos. A veces son matemáticas de mil años de edad; otras veces son matemáticas descubiertas la semana pasada. Puede decirse que el progreso de la civilización y el progreso de esta disciplina han ido de la mano, desarrollándose de lo intuitivo y concreto, a lo abstracto. Por ejemplo llegar a la abstracción del 1 llevo al ser humano milenios y ahora es indispensable para la resolución de muchos problemas del entorno, permitiendo en todas las épocas constituir la base de los conocimientos surgidos de la mente humana (Ortiz, 2005).

Las matemáticas en la historia

Se estima que hacia el año 40 000 a. C, el ser humano comenzó a pensar y adquirir conciencia del mundo físico que los rodea, surgiendo así las dos primigenias ideas de la matemática: la idea de número y relación espacial o forma, las cuales se han ido perfeccionando con el transcurso de los siglos. (Ruiz, 1990) Es posible que el hombre primitivo al observar su entorno, pudiera diferenciar entre uno o dos animales, inclusive la convivencia con su propia manada o el estar solo y con forme a su evolución dentro de los pueblos primitivos se iba adquiriendo más consciencia en el hilo numérico que los rodeaba, surgiendo cada vez más necesidades metódicas. Por ejemplo, algunas tribus de esa época debían asegurar sus posesiones, y se llegaban a catalogar como “muchos”, “pocos”, “buen número”, por tanto era necesario crear un sistema numérico que pudiese dar datos exactos.

La solución aparentemente era sencilla, ya que dicho proceso natural consiste en agregar un elemento a otro, en un principio se apoyaban de piedras, de ahí el término calcular, el cual significa contar con piedras en latín, pero también se utilizaron otros métodos como contar con

los dedos de las manos y pies, marcas en palos y huesos, nudos de cuerda, etc. experimentando poco a poco cantidades mayores, y por tanto la necesidad de realizar un método más práctico (Stewart, 1997).

Fueron los egipcios quienes dieron este avance matemático, que aportaron por vez primera símbolos y números, realizando sus primeros intentos de representación numérica bastante grandes. La forma en la que los escribían, nos proporciona una organizada estructura jerárquica de la sociedad egipcia, inclusive tenían dos sistemas numéricos, el hierático (utilizado por sacerdotes) y el jeroglífico donde el uno, diez y cien representaba los trabajos y tareas cotidianas, marcada por un palito, una cuerda y un rollo de cuerda, a partir del mil representaba a la aristocracia, empezando por un loto, diez mil un dedo autoritario y el número de los faraones, un millón, representada por un esclavo, el cual era el único que podía utilizar dicho símbolo, con el fin de controlar a sus siervos y esclavos (Cajori, 1929).

En cuanto aritmética, los egipcios tenían la habilidad de multiplicar y dividir por 2; así mismo calculaban los dos tercios de cualquier número ya sea entero o fraccionario. La multiplicación de dos enteros se afecta mediante operaciones sucesivas de desdoblamiento, lo que depende de que cualquier número se pueda expresar como una suma de potencias de 2 (Ball, 2010). En relación con la geometría, parecía tener un mismo vínculo, aplicaban álgebra y aritmética para resolver problemas relacionados con figuras geométricas que emergían en situaciones del entorno. En los papiros de Rhind y Moscú se puede apreciarse que la mayoría de los problemas geométricos, eran utilizados para calcular áreas de terrenos y volúmenes de graneros. Inclusive Cajori (1929) menciona que los egipcios posiblemente conocían que el área de un triángulo es dado por la mitad del producto de la base por la altura. Aún se vislumbra la idea de la cotangente cuando tratan al ángulo diedro entre la base y la cara de la pirámide. Conocían que cuando los lados de un triángulo miden 3; 4 y 5 entonces se trata de un triángulo rectángulo.

La geometría en Egipto no se desarrolló como una ciencia en el sentido griego de la palabra, fue propiamente una “aritmética aplicada”. El calculista tenía conocimiento de reglas, a partir de las cuales eran realizados los cálculos, pero no se ha encontrado una derivación sistemática de estas reglas. Utilizaban una regla precisa relativa a la circunferencia: la razón entre el área de un círculo y su circunferencia es la misma que entre el área del cuadrado circunscrito al círculo y su

perímetro. Esta relación tiene una significación matemática mucho mayor que la aproximación a dicha medida. Además podían calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios. La semejanza y proporcionalidad no parecen haberles sido desconocidas Boyer (1968). Y no sólo eso pasó desapercibido. Indiscutiblemente la cumbre del conocimiento matemático en Egipto fue el enunciado que se encuentra en el papiro Moscú de hace 2600 años a. C. Se pudo observar una interesante fórmula que permite medir la superficie de la pirámide egipcia: $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$. En esta fórmula genuina en la matemática egipcia, es curioso pensar que está la idea del cálculo integral, ya que a pesar de su cierto grado de empirismo, existe una gran extensión y diversidad en los problemas que se estudiaron con éxito, como es el caso de su intrigante pirámide. Es sorprendente que con métodos empíricos se puedan descubrir resultados matemáticos de gran valor formal (Ruiz, 1990).

Pero los egipcios no eran los únicos que utilizaban las reglas establecidas por la prueba y el error, con sustento en la experiencia práctica. Los babilonios, la segunda civilización de bronce además de Egipto, utilizaban su sistema de numeración para un fin más sofisticado: la astronomía. La capacidad de su sistema para representar números fraccionarios con gran precisión era esencial. Varios centenares de tablillas registran datos planetarios. Entre ellas hay una única tablilla, muy dañada, que detalla el movimiento diario del planeta Júpiter, en el cual no hay evidencia de la idea de estructura lógica, o la de la demostración, o de la necesidad de ofrecer una justificación más allá de lo que la práctica o la evidencia física permitían. En todo caso, no se puede negar que poseían una impresionante sabiduría, la cual se vería afectada para el año 2800 a. C. en la antigua Grecia, sometiendo al álgebra y la aritmética a criterios más bien de naturaleza ideológica, progresando los avances matemáticos (Boyer, 1968).

Luego de algunas Guerras, las civilizaciones caldea, egipcia y en general en antiguo oriente, dieron origen a una fusión que constituyó la civilización griega, pueblo que evolucionó extraordinariamente, formando una civilización que iluminó a la humanidad por varios siglos y de alguna manera, su influencia sigue siendo reconocida en los tiempos actuales. La principal característica de sus supervivientes de las matemáticas pre-griegas es el uso de razonamiento inductivo y deductivo, que les permitió llevar de manera sofisticada conclusiones a base de definiciones y axiomas nutridas por las legendarias cunas del Oriente en particular de Egipto, adquiriendo mayor conocimiento en aritmética y geometría (Ortiz, 2005).

Uno de esos supervivientes y del cual se cree que la historia de las matemáticas en Grecia inició es Tales de Mileto (aprox.624-546 a.C.). En uno de sus viajes a Egipto se preguntó sobre la altura de la pirámide de Keops. Ninguno de los egipcios pudo sacarla debido a su gran tamaño, pero Tales a través de una ingeniosa idea de semejanza de triángulos, aprovecho la sombra que la pirámide producía en un determinado momento, aquel en que la longitud de la sombra sea igual a la pirámide en ese momento los rayos del sol tienen una de 45° . Gracias a su ingenio y rigor matemático al formular el primer Teorema, Tales de Mileto se considera el primer matemático en la historia. Fue uno de los primeros filósofos que razonó con una mentalidad matemática, formulándose preguntas de los que le rodeaba ¿de qué está hecho el universo? e hipótesis, según él, la tierra estaba sobre el agua (Sánchez, 2011).

Una característica relevante en Grecia era el misticismo que abordaba cada área de sus vidas y las matemáticas no fue la excepción. Después de Tales de Mileto existieron los Pitagóricos, un culto al cual se le atribuye la primera reflexión sistemática a las leyes subyacentes en la Naturaleza por medio de las matemáticas, algunos le acreditan ser los originarios de las matemáticas puras, gracias a la idea de considerar los números como elementos constituyentes de la realidad, los números como los átomos del mundo. Su fundador, Pitágoras, nacido en Samos alrededor del 569 a.C. Quien se convirtió en el primer europeo en esclarecer la idea de que los axiomas, los postulados, deben establecerse al principio, en el avance de la Geometría, es decir, fue el primero en ver la prueba como espíritu de la matemática prescindiendo de ella el razonamiento matemático. (Ruiz, 1990)

Era conocido por ser un místico investigador de la naturaleza, estudio en Egipto y en el próximo oriente, al regresar fundó su escuela, donde se veía los misterios de los números. Distinguió los números pares e impares catalogándolos por sexo, además estos formaban formas geométricas. El número 3 formaba un triángulo, 4 el número 4 un cuadrado un cuadrado y al unir $1+2+3+4$ formaba un triángulo mágico que daba como resultado 10. Convencido ante la idea de que el universo estaba construido según la norma discontinua de los números naturales, se propuso a comprobarlo con una de sus figuras favoritas, el triángulo, mismo que comprobaría su error, la insuficiencia numérica. Fue su propio postulado que los llevo a la ruina: es imposible encontrar dos números enteros tales que el cuadrado de uno de ellos sea igual al doble del cuadrado del otro. Tras varios intentos al querer comprobar su teoría, se desoló al encontrar su

tropiezo: la razón entre el lado de un cuadrado y una de sus diagonales no puede ser expresada como razón de dos números enteros cualesquiera. Más adelante, a diferencia de algunos de sus sucesores, aceptó finalmente la derrota después de haber luchado en vano para anular el descubrimiento que había abolido su sistema de creencias (Sánchez, 2011).

En este descubrimiento, Pitágoras sin darse cuenta, encontró el fundamento del moderno Análisis Matemático. Al igual que él, no se concebía a las matemáticas si no representaba cosas reales. Arquímedes quien rompió esta restricción, era conocido por su pasión a lo inimaginable, realizaba preguntas como “¿Cuántos granos de arena cabían en el universo?” Aunque pareciese poco razonable, fue este tipo de cuestiones que los llevaron a ser uno de los más grandes matemáticos de la época clásica. Por ejemplo, se llegó a preguntar cuál era la fórmula para encontrar la diferencia en el área ocupada al transformar una esfera a un cilindro. Formula que ayudó en un futuro a los cartógrafos, pudieron tomar el globo terráqueo y trasladarlo a un plano (Boyer, 1986).

La astronomía era la base fundamental de estudio para las matemáticas en Grecia. Fue ahí posiblemente la matriz para expandir todos los conocimientos alrededor del mundo y claro evolucionando y creando filosofías que con el tiempo se ha convertido en algo concreto y científico como lo es las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), la geometría, el álgebra, la trigonometría, entre muchas otras ramas de las matemáticas (Eggers, 1993).

Con la conquista de Grecia por los romanos y la llegada del cristianismo, el avance de las matemáticas teóricas se dio por concluida en la época clásica. Las condiciones políticas y la conspiración contra el pensamiento griego, hizo que todos los paganos vivientes y sus atesorados manuscritos fueran eliminados. Roma no se encontraba interesado en responder a las cuestiones del universo, obtener poder y territorios era el objetivo que tenía esta civilización con las matemáticas. Utilizaba los conocimientos griegos, egipcios y babilónicos para la arquitectura y el comercio. También crearon un sistema numérico decimal que permitió mantener una rígida cuadrícula en su ejército. Había diez hombres en una sección, representada por una “X”, diez secciones era una centuria, es decir cien, representada con una “C”, diez centurias era un manipulo palabra que literalmente significa “un puñado”, incluso sus castigos estaban basados en principios matemáticos, cada vez que perdían una pelea se mataba a un hombre por cada sección.

Su sistema numérico era muy práctico y básico, debían apoyarse de una tabla para poder resolver problemas aritméticos, con la única utilidad comercial. Pero eso no impidió que fuera el sistema numérico que gobernaba gran parte de Europa y África por más de 500 años (Ruiz, 1990).

Afortunadamente Grecia no fue la única cuna de las matemáticas. Diversos principios matemáticos fueron adoptados en la india, el cual se encargó de mejorar y por ende evolucionar en las matemáticas teóricas. Su cultura, al igual que en Grecia, se encontraba en torno a la geometría y su principal referencia se encuentra en las estructuras de sus templos. Provenía de la integración de orientación, forma y área de los altares, según las prescripciones de los libros sagrados védicos. Había resultados geométricos, procedimientos de construcción de altares y algoritmos. En las construcciones geométricas que planteaban, había cuadrados, rectángulos, trapecios y círculos, que se debían construir con restricciones de área. Incluyen aproximaciones a raíces cuadradas. Se presume que esto se originó al intentar resolver el problema de construir un altar cuadrado que tuviera como área el doble de un cuadrado dado Boyer (1986).

En el siglo V d.C. la India dio su mayor resplendor en el área matemática. Se desarrolló un sistema que permitía hacer cálculos astronómicos de manera sencilla. Uno de los mayores obsequios que tuvo la India a las matemáticas y que hasta la fecha se considera una de las mayores aportaciones intelectuales de todos los tiempos, y lo más conocido a los que se puede llamar un lenguaje universal, el sistema de numeración posicional decimal. Al igual que otras culturas, los hindúes vieron la importancia decimal. Se desconoce el origen de esta idea, pero se tiene cierto margen comparativo con los griegos. En primera estancia se utilizaba el mismo modo repetitivo, es decir, un número podía representar a su múltiplo decimal, la diferencia fue que agregaron más símbolos para representar cuatro, veinte y diez. Su evolución fue de manera gradual, inicio con la escritura Karosthi, para dar lugar a otro sistema de notación, conocido como el de los caracteres Brahmi, que parecido al cifrado alfabético del sistema jónico griego. Lo importante es que llegó a ser el más sofisticado, pasando a las civilizaciones futuras, inclusive a las que habían sido conquistadas por Roma (Sánchez, 2011).

En el lapso evolutivo numérico, los hindúes se percataron que hacía falta un número, el cual presentarían al mundo más adelante, el cero. Crear un símbolo que representará el nada en el sistema de notación posicional, fue una idea innovadora y avanzada, en el cual su origen se dio tanto en el mundo occidental como en el oriental. En el occidente la civilización maya contaba

con un sistema de numeración con base 20 en agrupamientos de 5. Las primeras cuatro unidades eran representadas por puntos y la unión de 5 por barras horizontales. El contar era su máximo desarrollo de orden, el tiempo y los cosmos, fue su impulso para poder crear un número de la nada, el cero, representado por un caracol, el cual a diferencia de los hindúes, los mayas los utilizaban como un intermediario entre el principio y el fin (Magaña 1990).

En lo que respecta a la India, el primer registro que se conoce del cero, fue en el siglo IX, en el cual se encuentra grabado en una pared en un templo del centro de la India. Lo que para otras civilizaciones representaba un lugar vacío, para los hindúes fue el número del cálculo e investigación, revolucionando la matemática. Podían representar números astronómicamente grandes, de una forma eficaz utilizando sólo diez dígitos, del 0 al 9. Esta abstracción simbólica se le da origen a los cálculos que realizaban con piedras en la tierra, al momento de retirar una piedra del suelo quedaba un espacio vacío y ese lugar se utilizaba para representar de algo a nada, conceptos que se encuentran profundamente arraigados a sus creencias, los que permitió aceptar gratamente el concepto cero. Para el siglo VII, el matemático Brahmagupta demostró alguna de las propiedades esenciales el cual es utilizado en el desarrollo académico, $1+0=1$, $1-0=1$, $1 \times 0=0$, pero al momento de querer dividir, descubrió que era necesario crear otro concepto e infinito para que tuviera sentido dividir por cero y el descubrimiento los realizaría un matemático del siglo XII llamado Bhaskara Segundo y dice así “si tomo una fruta y la divido en mitades, tengo dos mitades, entonces si divido uno entre uno y medio, tendré dos medios, si los divido en tercios, tendré tres tercios, así que al dividir trozos cada vez más cercanas al cero, tendré infinitas piezas, por tanto uno dividido en cero es infinito”.

Para la India la idea del cero se había convertido en el centro del cálculo para todos los matemáticos de esa época. Por ejemplo si $3-3=0$, pero si se resta $3-4$, en un principio se creía que el resultado era nada, pero al darse cuenta de esta equivocación, descubrieron los números negativos. Los hindúes le llamaron deudas, los que permitió ser útil en las ecuaciones de primer grado. El enfoque abstracto que tenían los matemáticos de esta cultura pronto puso de manifiesto una nueva forma de resolver ecuaciones cuadráticas y Brahmagupta fue el encargado de ir más lejos con resolución cuadrática con dos incógnitas. Empezó a encontrar métodos abstractos para la resolución de estas ecuaciones, desarrollando a la par, un lenguaje matemático para poder expresar esa abstracción. Experimentaba con diferentes notaciones, utilizando letras de distintos

colores para representar las incógnitas de las ecuaciones. Descubrimiento que se dio en occidente hasta 1657 por el matemático Francés Pierre Fermat (Stewart, 1997).

En lo que respecta al área de trigonometría, los hindúes fueron los responsables de innovadores descubrimientos fundamentales en el área de la trigonometría. Basándose en principios griegos, los hindúes pudieron mejorar estos principios y su objetivo central fue el estudio de los triángulos rectángulos. Los antiguos griegos fueron los primeros en estudiar la función seno, estableciendo valores precisos para algunos ángulos pero no podían calcular los senos de cada ángulo, trabajo del cual se encargaron las matemáticas hindúes. El seno permite medir distancias cuando no se sabe con exactitud, el cual utilizaron para medir las tierras de sus alrededores, navegar por los mares y en última estancia cartografiar la profundidad del espacio. Era fundamental para los observatorios, los astrónomos utilizaron la trigonometría para averiguar la distancia relativa entre la Tierra y la luna y la tierra y el sol, el cálculo solo se puede hacer cuando la luna esta medio llena porque ahí es cuando esta frente al sol de manera que el sol, la luna y la tierra forman un triángulo rectángulo. Al medir el ángulo entre el sol y el observatorio calcularon que para la séptima parte de un grado arroja un radio de 400 a 1, quiere decir que el sol está a cuatrocientas veces más lejos de lo que la luna esta de la tierra, esto dio hincapié a seguir usando la trigonometría para explorar el sistema solar sin tener que abandonar el planeta (Sánchez, 2011).

Los avances de la búsqueda de esta función seno para cada ángulo se realizó en Kerala en el sur de la India. En el siglo XV ésta parte del país se convirtió en la residencia de una de las escuelas más brillantes de matemáticos, su líder se llamaba Madhava, quién utilizó su concepto de infinito, para crear una formula exacta para π . Descubrió que se podían sumar y restar muchas fracciones infinitamente, conduciéndolo a encontrar el valor exacto de π (la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro), útil actualmente para los ingenieros, el cual les permite medir la división de una curva. Anteriormente en el siglo IV, el matemático Berrabai encontró una aproximación de π igual a 3,1416, y con ello quiso medir la circunferencia de la tierra, obteniendo 39,736 km, sorprendentemente 112 km menos que su valor real. Madhava perfeccionó el método, sumando y restando sucesivamente distintas fracciones. Primero avanzó hasta el 4 y eso los llevo a por el valor de π , y luego volvió 4/3 hacia atrás ahora se había pasado del otro lado decidió avanzar 4/5, continuó sumando y restando fracciones con numeración 4 y el

denominador el número impar siguiente $4/7$, $4/9$ y así sucesivamente. Descubrió que si consideraba todos los números impares infinitamente alcanzaría el valor exacto de π , misma estrategia que utilizó para calcular exitosamente el valor de seno para cualquier ángulo con precisión (Stewart, 1997).

Como se ha mencionado el ser humano en base a su necesidad evolutiva ha creado estrategias y métodos que permita un orden en su civilización, obteniendo una diversidad sistemática impresionante. Antes de que los hindúes conquistaran al mundo con su sofisticado sistema numérico, en el siglo III d. C. crearon un sistema de números hecho por varillas (eran de marfil, madera, hierro colado, jade o bambú). Dicho sistema, parecido a un ábaco, contaba con la capacidad de poder realizar todas las operaciones requeridas, incluyendo números negativos y hasta la resolución de ecuaciones, con lo que se expandió una forma de álgebra o aritmética geométrica. Los números hongs servían para representar unidades, centenas, decenas de millar, etc. Los tsungs, las decenas, millares, centenas de millar, etc. D. Maravall. La época exacta en que apareció la numeración a base de varillas en China no se ha podido determinar, pero fue mucho antes de que se adoptase el sistema de numeración posicional en la India. Las varillas en el 300 a.C. no eran una simple notación para escribir los resultados de una computación, sino que los administradores llevaban consigo una bolsa que contenía una colección de varillas de bambú, marfil o hierro que utilizaban como instrumentos para hacer sus cálculos. Las varillas para contar las manejaban los chinos con tanta habilidad que un escrito del siglo XI las describe “volando con tal rapidez de un lado a otro que el ojo no podría seguir su movimiento”. Los números negativos no ocasionaron excesivas dificultades a los chinos acostumbrados a utilizar conjuntos de varillas rojas para representar los números positivos y negras para representar los números negativos. Sin embargo, no aceptaron la idea de que un número negativo pudiera ser solución de una ecuación (López, 2005).

Siguiendo la historia matemática china, en el año 200 a. C. al 220 d. en la dinastía Han, China, se crea uno de los texto clásicos de las matemáticas chinas: el Chiu Chang Suan Shu (Nueve capítulos sobre las artes matemáticas) impactando extraordinariamente a la cultura. Prácticamente era el manual de toda china, en el contenía diversas explicaciones prácticas. En este texto se encuentra la resolución de ecuaciones numéricas de orden superior, basada en la extracción de raíces cuadráticas y cúbicas del Chiu Chang y en el uso de triángulo de Pascal.

Este método se rastrea desde Chia Hsien (c. 1050), y se identifica con el nombre de li cheng shih shuo (resolución de coeficientes mediante una gráfica). Había otro método que se llamaba tseng cheng fang fa o método de extracción mediante suma y multiplicación. Por otra parte, en torno a la confección de calendarios y las necesidades de la astronomía, se desarrollaron procedimientos en las ecuaciones indeterminadas. Hubo también fórmulas de interpolación cúbica (Kuo Shou Ching, c. 1275), algo parecido al método de Newton-Stirling. Esto no se ampliaría en Europa sino hasta el siglo XIX. Un par de detalles adicionales: el teorema Kou ku. Se trata del teorema de Pitágoras. Este aparece demostrado en un texto muy antiguo llamado Chou Pei, en el cual se hace la demostración por medio de diagramas (Algarra, Borges, García, Hernández & Hernández, 2004).

Como se puede ver, la naturaleza de las matemáticas posibilita una amplia gama de abstracciones reflexivas, una metodología deductiva, inclusive inductiva, a la que se puede denominar resolución de problemas. Ya que existen principios o leyes, algoritmos y enunciados (verbales y/o gráficos) que se resolvieron para volver a utilizarlos en otro problema. Por lo que, tanto la forma de explicar como de aplicar son específicos, comprendiendo aún más, al estar adentrado (González, 2002). Y esto puede reflejarse en la actualidad, ya que después de más de 4,000 años, al haber pasado por diversas culturas, idiomas y filosofías, las matemáticas siguen siendo de gran relevancia, desde la hora del reloj hasta los grandes rascacielos de alguna ciudad. Muchos de los conocimientos específicos que se tienen, siguen siendo utilizados en la enseñanza de las escuelas, llevando así la asignatura en el siglo XIX siguiendo esta misma metodología (Stewart, 1997). En México, por ejemplo, se volvió una de las disciplinas centrales en el sistema educativo tanto para la educación básica como para la educación medio superior y superior, teniendo como objetivo primordial desarrollar habilidades que le permitan ser capaces de resolver problemas en forma creativa y no sólo para la aplicación de algoritmos y procedimientos rutinarios (SEP, 2011).

Situación del aprendizaje en México

Los mayas y los aztecas.

Las matemáticas en México, han ocupado un lugar crucial para la civilización, un producto cultural cotidiano que ha puesto orden y armonía. Los mayas, por ejemplo, las utilizaban como su máxima herramienta de desarrollo. Fueron quienes dieron inicio a esta disciplina en el país y que sin duda ha impresionado a diversos investigadores por su versátil uso de la numeración aparentemente compleja, representado en simples símbolos, un punto, una línea horizontal y un caracol que representaba el cero. Este abstracto número tuvo un lugar importante en la prehistoria, anticipándose a los hindúes por un poco más de seiscientos años (Magaña, 1990). No se consideraba como un nada, sino como un elemento que separaba el inicio y el fin, por ejemplo, la semana se concluía cada siete días, siendo cero el séptimo día, para dar paso al día uno, los ciclos lunares, otorgaban el cero para la luna llena, la última fase lunar; y por supuesto en su sistema numérico los utilizaban para representar la ausencia de valor en una determinada posición, cero era la parte central del todo (Mónaco, 2009).

Además, dentro del sistema numérico maya utilizaban otros dos símbolos, el punto para representar uno y una línea horizontal para representar cinco, el cual iba aumentando su valor según su posición, que a diferencia del sistema decimal de izquierda a derecha, era de abajo hacia arriba. Su simplicidad simbólica fue capaz de realizar sumas, restas, multiplicaciones, raíz cuadrada, raíz cúbica y fracciones, siendo asombrosamente equivalentes a la numeración arábiga, que se utiliza actualmente (Magaña, 2006), con la misma capacidad para expresar cantidades muy altas, muchas veces ligadas con el paso del tiempo, ya que en su Cuenta Larga (una forma de llevar registro del tiempo transcurrido) daban registro de cálculos muy altos (Fedriani & Tenorio, 2004). Para ello, utilizaban su más eficaz herramienta de conteo, el ábaco, hecho de piedras y palos sobre una superficie plana. Cada una del lado izquierdo representa una unidad, a medida que se asciende se representan potencias sucesivas de la base a partir de exponente 0 y hasta llegar al exponente 12 de la base 20 en la fila superior. Cada semilla del lado derecho representa 5 unidades. Las operaciones que permite resolver este instrumento son suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada. Más adelante fue empleado por los aztecas, pueblo que tomo mucho de los conocimientos mayas (Lara & Sgreccia, 2010).

Es evidente que sin su metodología matemática poderosa y precisa, los mayas no hubiesen podido desarrollar con tanta exactitud sus cálculos astronómicos, ni su medida del tiempo matemáticos, representado en sus calendarios de 260 días dividido en 13 meses, que daban como resultado 20 días de la semana, el número base de sus sistema numérico, el cual utilizaban para crear las grandes construcciones arquitectónicas piramidales así como otras importantes obras hidráulicas en las cuencas de México (Magaña, 1990).

En los que respecta a la cultura azteca, ellos contaban con su propio sistema numérico, “20” era una bandera, la cual utilizaban para determinar el límite de un terreno, “400” era una planta de maíz y “8000” una muñeca de hojas de maíz, figura representativa de los aztecas (Fedriani & Tenorio, 2004). También tenían un sistema de medición que les permitió realizar cálculos aritméticos para determinar con exactitud áreas de superficie o terrenos agrícolas. Empleaban el Tlalcuahuitl como unidad de medición de distancia, el cual equivale a 2.5 metros (Cerón, 2008).

Estos conocimientos eran transmitidos de generación en generación en uno de los recintos más importantes de los aztecas, el Calmecac. Estaba enfocado en la educación de los hijos de los nobles, los cuales ingresaban entre los diez y doce años de edad. Se les educaba en matemáticas y otras ciencias, bajo el mando de los sacerdotes y los principios morales. Para los aztecas era muy importante que sus gobernantes fueran aptos para los cargos que desempeñaban con la capacidad de tomar buenas decisiones y que tuvieran fuertes convicciones. Para ello, utilizaban cantos, códices y la escucha, siendo esencialmente mnemotécnico, es decir, el mensaje se repetía una y otra vez para reforzarlo y quedara mejor registrado en la memoria. Tomando como base los conceptos aprendidos con los métodos didácticos citados en los párrafos anteriores, al niño y al joven se les enseñaba a observar y preguntarse, de esta manera llegar a conocer su medio ambiente; se le enseñaba asimismo, para experimentar con los conocimientos adquiridos y penetrar en la naturaleza de los fenómenos que acontecían a su alrededor, todo lo cual les proporcionaba la posibilidad de poder descubrir los secretos de la naturaleza a fin de descubrir la verdad y entonces poseer los aspectos necesarios para crear nuevos elementos que lo condujeran al perfeccionamiento total (Larroyo, 1947).

Época Colonial

Para México, la llegada de los españoles fue un acontecimiento que perturbó a las culturas nativas, con ello la influencia de nuevos conocimientos matemáticos como la geometría clásica, álgebra, aritmética y trigonometría. A partir de esta época la civilización enfrentó nuevas necesidades, centradas en el comercio la minería y la adquisición de terrenos, por ello los mercaderes fueron los primeros maestros en el país dedicados a la enseñanza de aritmética y geometría, ya que su oficio los requería, trayendo consigo todos los libros relacionados con estas áreas. Pero esto no fue suficiente para las demandas del país, ya que los españoles no contaban con estrategias para contar plata y oro, por lo que se crea el primer libro americano por Juan Diez Freyle en 1556 llamado “Sumario compendioso de las cuentas de plata y oro que en los reinos del Perú son necesarias a los mercaderes y a todo género de tratantes con algunas reglas tocantes a la aritmética”. Este libro, trató el cálculo de porcentajes, fracciones, ley de plata y oro, aplicaciones de la regla de tres, conversión de moneda, conocimiento fundamental para comerciantes y mineros en cuanto al cálculo de quinto real y diezmos (Rodríguez, 2004).

Las matemáticas, para los españoles, era solo una herramienta de trabajo que mantenía el orden y la economía estable, su enseñanza era básica y repetitiva ya que se regían bajo la corriente escolástica, donde todo pensamiento debía someterse al principio de autoridad y la enseñanza se podía limitar en principio a la repetición de textos antiguos, adoptando el empirismo. Fue Fray Diego Rodríguez quién empezó a realizar aportaciones revolucionarias a las matemáticas, abandonando el pensamiento deductivo propio de esta corriente. Así el método experimental y el razonamiento inductivo se convirtieron en el contrafuerte de la certidumbre científica de esa época. Siguiendo esta nueva perspectiva en 1754, Joaquín Velázquez de León, criollo del México colonial, fundó y presidió la Academia de Matemáticas en el Colegio de Todos Santos, donde muchos jóvenes criollos se destacaron y entrenaron en estas ciencias para convertirse en técnicos y científicos de la Nueva España (Larroyo, 1947).

Siglo XIX a la actualidad

Después de que México se convirtiera independiente, no pareciera haber avance alguno en las matemáticas. La enseñanza española había influido significativamente en el territorio mexicano, las matemáticas que más adelante se llegaban a enseñar de forma masiva, como objetivo

primordial del México independiente, fue la aritmética y geometría clásica, Y al caer en una crisis económica, el país se enfrentó a varias guerras tanto extranjeras como civiles, retrasando la enseñanza de las mismas. Solo aquellos que contaban con recursos económicos podían continuar estudiando, enfocando sus ingresos en el desarrollo de futuros abogados (Ávila, 2013).

No fue hasta mediados del siglo XX que la investigación en el campo de la educación matemática surgió, centrándose en los procesos cognitivos de los estudiantes y el estudio de la génesis histórica de conceptos matemáticos que se enseñan en la educación superior. Con el paso del tiempo, y la incorporación de nuevas teorías y herramientas metodológicas, el foco de atención se desplazó y diversificó. Las primeras publicaciones mexicanas en educación matemática también vieron la luz en ese tiempo. En 1986 se publicaron los primeros Cuadernos del Laboratorio de Psicomatemáticas del Departamento de Investigaciones Educativas, también del CINVESTAV, que después se integrarían a otras colecciones más generales de ese Departamento. Las Memorias de las Reuniones centroamericanas y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, aparecieron anualmente a partir de 1987. Con la revista Educación Matemática, creada en 1989, se inició la publicación periódica, en español, de investigaciones en educación matemática (Larroyo, 1947).

En lo que respecta a la educación básica, se han creado diversos planteamientos didácticos que permita a la población un desarrollo matemático, según las demandas presentadas. En un principio la educación la primaria era la única fuente del conocimiento obligatorio tanto para niños como adultos, para después incorporar el nivel secundaria, ambos bajo el control de la Secretaria de Educación Pública (SEP), creada en 1921, encargada de aportar las herramientas necesarias a los maestros que ejecutaban está labor y responsable de una educación laica, pública, gratuita y popular en el país. Ahora las matemáticas y otras materias tenían un enfoque más pedagógico, permitiendo que el alumno construya su conocimiento de acuerdo a su contexto social, a los apoyos de la escuela y del hogar. De igual forma se incorporaron los libros de texto donde el alumno tenía un apoyo visual, al igual que los docentes (Bonfil, 1992).

Para el año de 1993 se introduce la nueva Ley General de Educación, donde se explica que la finalidad de la educación secundaria es ampliar y profundizar los conocimientos de los niveles procedentes. Dicha reforma también hace énfasis al nuevo método de enseñanza matemática el

cual plantea que los alumnos aprenderían mejor si sus profesores les plantearan problemas para que, al resolverlos, construyeran nuevos conocimientos. Expresándolo de la siguiente forma:

Un aprendizaje significativo de las matemáticas no puede reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas, ni tampoco a la aplicación mecánica de ciertas técnicas y procedimientos. Por el contrario es necesario que los alumnos aprendan a plantearse y resolver problemas en situaciones que tengan sentido para ellos y les permitan generar y comunicar conjeturas. (SEP, 1994: 16)

Con el propósito de aportar información para conocer en qué medida se está cumpliendo los propósitos educativos que se formalizan en el currículo nacional, a inicios del siglo XXI que aparecen en el escenario nacional tres grandes proyectos evaluativos: PISA, que se implementa por primera ocasión en el año 2000; la creación del INEE en 2002 y con él las evaluaciones como EXCALE (Exámenes para la Calidad y el logro Educativo), cuyos resultados se publicaron por primera ocasión en 2005 y ENLACE (Exámenes Nacionales de Logro en Centros Escolares), proyecto de la SEP que también iniciará en 2005 en educación básica y 2008 en educación media superior.

Debido a las constantes demandas ante las necesidades educativas que presentaban los resultados de estas pruebas y para responder a los desafíos de la libre competencia y la globalización se crea una nueva visión pedagógica por competencias, en el año 2006 para secundaria y 2009 para primero y sexto de primaria, el cual propone un proceso de formación activo a través de que el alumno aprenda y utilice sus conocimientos en situaciones de la vida común, con la intención de desplazar la formación memorística, enciclopédica y declarativa. Específicamente en matemáticas, se presentan cuatro competencias que se desarrollarían: resolver problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados y manejar técnicas eficientemente (SEP. 2006; 2009).

Con este nuevo modelo educativo se vuelven a aplicar la intención de evaluar los avances y áreas de oportunidad que presentan los jóvenes que cursan la educación básica, en la evaluación de ENLACE 2009, los alumnos presentaron un nivel Insuficiente en la asignatura de matemáticas: 18% en tercero de primaria, 19% en sexto de primaria y 55% en tercero de

secundaria. Al igual que algunos estudios internacionales donde ha participado México dan un panorama muy desolador al comparar los resultados nacionales con los que obtienen diversos países del mundo; especialmente, aquellos países que pertenecen a la Organización para el Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE). Solo por poner un ejemplo, en la evaluación de PISA 2006 (Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes), el 28% de los estudiantes mexicanos de 15 años (que principalmente estudian tercero de secundaria y primero de bachillerato) se ubicó en el nivel 0 y otro 28% en el nivel 1 de la escala de competencias matemáticas. Aquí se observa la dificultad que los estudiantes mexicanos tienen para identificar información, desarrollar procedimientos rutinarios con instrucciones directas, así como realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos dados (Díaz, Flores y Martínez-Rizo, 2006). En la última publicación del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) realizada en 2015, el desempeño de México se encuentra por debajo del promedio OCDE en matemáticas (408 puntos), es decir, menos del 1% de los estudiantes en México logra alcanzar niveles 5 y 6 que son de excelencia (OCDE, 2016).

En la prueba EXCALE, creada en el 2005, también presenta un desempeño insuficiente en el dominio de las matemáticas, especialmente en los tercer grados de educación primaria y secundaria, en donde en el 2008, el 51.9% de los estudiantes (tercero de secundaria) tuvieron un logro insuficiente y en el 2010, el 31.8% de los estudiantes evaluados (tercero de primaria) se ubicó en ese mismo nivel (INEE, 2012).

Este bajo desempeño de la mayoría de los estudiantes mexicanos que se ha evidenciado de manera reiterada en estas distintas pruebas, fue uno de los desafíos que presentó la nueva reforma educativa en el 2012, donde el nivel medio superior paso a ser parte de la educación obligatoria. Para el año 2017 se presentó el nuevo modelo educativo. Bajo el enfoque humanista, plantea un aprendizaje crítico en el pensamiento de los educandos. De manera más específica menciona que todo egresado de la educación obligatoria debe ser una persona que:

... emplee el pensamiento hipotético, lógico y matemático para formular y resolver problemas cotidianos y complejos; tenga la capacidad de análisis y síntesis; sepa argumentar de manera crítica, reflexiva, curiosa, creativa y exigente; se informe de los procesos naturales y sociales, de la ciencia y la tecnología, para comprender su entorno; sea competente y responsable en el

uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación; y tenga la capacidad y el deseo de seguir aprendiendo de forma autónoma o en grupo durante el transcurso de su vida. (SEP, 2017, p.46).

Con base a este objetivo se incluyó propósitos semejantes para el mejor alcance en matemáticas en nivel de secundaria: “Amplía su conocimiento de técnicas y conceptos matemáticos para plantear y resolver problemas con distinto grado de complejidad, así como para proyectar escenarios y analizar situaciones. Valora las cualidades del pensamiento matemático” (p.48)

Respecto a la media superior media superior, refieren: “Construye e interpreta situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Formula y resuelve problemas, aplicando diferentes enfoques. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos” (SEP, 2017, p.49).

Actualmente el curriculum mexicano, ha presentado un desalentador panorama en el aprendizaje, donde sus sistemas educativos se han enfocado más en la transmisión de contenidos de aprendizaje, cuando poco o nada se considera el desarrollo de las habilidades lógicas, parte de las competencias que son necesarias en la construcción del pensamiento matemático (SEP, 2011).

Esta situación se vuelve más complicada cuando los alumnos, además de tener dificultad en esta área, son señalados por presentar otras Necesidades Educativas Especiales (NEE) principalmente Bajo Rendimiento Intelectual ya que es una de las más complicadas de identificar y por ende no se les brinda las herramientas necesarias para tener un mejor pensamiento matemático (Jiménez, 2002).

Afortunadamente existen diversas teorías que han desarrollado y aportado a la educación, en el cual se utilizan ideas y métodos desde diversas perspectivas, por ello, es necesario revisarlas y analizarlas para después considerar aquella que se adapte a las necesidades actuales de la población estudiantil.

Teorías del Aprendizaje

Conductista.

Como primer paradigma se encuentra el conductismo, una corriente que surgió a principios del siglo XX, como una inconformidad ante la introspección: un método donde se pedía a la persona describir lo que pensaba. Rechazando esa idea, el conductismo centró su estudio en las leyes comunes que determinan el comportamiento, más específico, los vínculos entre estímulos y respuestas. Fue esta la que por vez primera influye en el entendimiento del aprendizaje humano, entendido como “un cambio relativamente permanente en el comportamiento, razonablemente objetivos y medibles, que refleja una adquisición de conocimientos a través de la experiencia” (Arancibia, Herrera & Strasser, 2008, p.48).

Los orígenes de esta corriente se encuentran en los estudios de Pavlov (1927, citado en Schunk, 1997), la salivación de sus perros, por asociación entre dos estímulos: asoció el ruido de una campanilla con la comida (estímulo incondicionado), logrando que el perro salivara (estímulo condicionado) al escuchar la campanilla. El perro fue condicionado a responder de una forma nueva a estímulos que antes no evocaban tales respuestas. Si se enfoca el aprendizaje a esta idea, es típicamente inconsciente, ya que el aprendiz no requiere estar consciente de la relación entre el estímulo condicionado y el incondicionado para responder al primero.

Basado en este experimento, John Watson (1879-1958) fue quién dio inicio al conductismo. Utilizó estos principios al estudio de ciertas conductas humanas para determinar si algunos de los hasta entonces llamados “instintos” eran aprendidos o innatos. Para ello se enfocó en el estudio de los temores en bebés, donde demostró que el miedo es sólo una respuesta emocional aprendida, misma teoría que utilizó para después quitarlos. El tener en cuenta los procesos de condicionamiento que hay a la base de todo aprendizaje, el educador no sólo puede comprender ciertas conductas y actitudes de los alumnos frente al proceso de enseñanza-aprendizaje, sino puede moldearlas de manera que permitan un aprendizaje más efectivo (Arancibia, Herrera & Strasser, 2008). Así por ejemplo, las matemáticas en la situación de aprendizaje puede ser un estímulo neutro para el alumno, que no le provoca una respuesta emocional importante. El profesor, la sala o el ambiente que rodea al alumno, son estímulos incondicionados, que pueden ser agradables o desagradables: profesor amistoso o distante, banca cómoda o incomoda etc. Si el

alumno asocia las matemáticas con los estímulos agradables, probablemente presentará una respuesta condicionada de agrado frente a esa materia. Por el contrario, si asocia la materia con estímulos desagradables, probablemente responderá con desagrado a la materia y no logrará aprender (Rodríguez, 2004).

Como se mencionó anteriormente el aprendizaje no es más que el cambio de comportamiento, que refleja una adquisición de conocimientos. Thorndike (1922 citado en Arancibia, Herrera & Strasser, 2008), psicólogo estadounidense, dedicó sus estudios al aprendizaje, principalmente a la instrucción matemática, basada en el estímulo-respuesta. Su instrucción consistía en cambiar conductas en destrezas y estas a su vez las dividía en pequeños pasos para que, mediante el aprendizaje de destrezas simples se llegue a aprender secuencias de destrezas más complejas, es decir, se plantea un programa de contingencias de refuerzos que modificaban la conducta (premios o castigos). Se propone un conocimiento a aprender, un ejemplo, suma de fracciones, el profesor de forma directa enseña lo que es una fracción, una vez adquirido el conocimiento, se prosigue a enseñar sumas con fracciones de una sola cifra, después de dos, tres, etc. Desde esta perspectiva, un alumno ha aprendido a sumar fracciones si realiza correctamente las sumas. El refuerzo asociado se suministra a cada respuesta (un premio o castigo –sanción- para la corrección o incorrección de la respuesta). Si el alumno responde correctamente las operaciones de fracciones se le refuerza por medio una serie de estímulos positivos, como una calificación aprobatoria o un halago, de lo contrario se dispone a dar estímulo negativos y se le informa sobre su equivocación. Al ser un proceso repetitivo, se vuelve hábito y por tanto el alumno adquirió el conocimiento el cual puede servir para la adquisición de otro conocimiento, sólo resta que los alumnos practiquen para cada clase de problemas, grabando las respuestas correctas y olvidar las incorrectas. Entre más a menudo se puedan presentar la mecanización y la práctica en el contexto de problemas reales, más fuertes serán las conexiones que se establecerán entre estímulo-respuesta.

Una de las críticas recibida ante esta teoría fue de William Brownell. Este psicólogo experimental difería ante el método de la mecanización y la práctica, afirmando que para asegurar la comprensión y un pensamiento cuantitativo, era indispensable el fundamento de definiciones y algoritmos. Lo que no fue un impedimento para dar paso al nacimiento del condicionamiento operante (Rodríguez, 2004).

Esta evolucionada corriente fue creada por B. Skinner, un psicólogo experimental que desarrollo los fundamentos esenciales del conductismo. Destacó gracias a sus experimentos continuos con animales, que tras años de observación, sugirió la idea del condicionamiento aplicado en humanos con la intención de que mostrasen la conducta requerida. Esta propuesta fue adaptada rápidamente por los investigadores de la educación. Basado en el ideal de que los alumnos recibieran una retroalimentación constante y rápida de los resultados, que el reforzamiento fuese inmediato, Skinner desarrollo la teoría del aprendizaje programado. “Todo el proceso de alcanzar una competencia en cualquier campo debe ser dividido en un número muy grande de pasos muy pequeños y el reforzamiento ha de ser contingente a la realización de cada paso” (Skinner, 1954 citado en Orton, 2003).

Este postulado fue inspirado por Skinner (1953), debido a los pocos resultados positivos que se obtenían de los alumnos al recibir un castigo o mensaje de temor. Creía fielmente en que el alumno aprendería mejor si se realizaba un reforzamiento inmediato y positivo, ante enseñanzas pequeñas y para ello creó la máquina de enseñanza. Era un apoyo para los profesores, quienes dividían el tema en pequeñas partes, se exponía dicho tema y para comprobar el aprendizaje obtenido en la máquina se colocaban fragmento de texto o ecuaciones sin resolver en cada cuadro. El alumno en una hoja aparte respondía completando dicho fragmento de texto antes revisado o la resolución de las ecuaciones. Al instante el alumno podía percatarse si su respuesta era correcta o no, evitando la incertidumbre y motivando a continuar resolviendo. A diferencia del condicionamiento clásico, que se centra en el estímulo, el condicionamiento operante, presta atención a la consecuencia que sigue a una respuesta determinada y en el efecto que ésta tiene sobre la probabilidad de emisión de la respuesta en el futuro.

Cabe destacar que este nuevo método de enseñanza-aprendizaje, también ayudaba a que los alumnos concibieran el conocimiento a su propio ritmo, aquellos que eran más avanzados ya no se sentirían frustrados al tener que esperar a los demás, puesto que podía continuar sus lecciones. Caso similar con aquellos que se les dificultaba el aprender, dejarían de sentir presión por los profesores quien solicitaban un mismo avance que los demás, sometiéndoles a castigos y por ende rechazo escolar (Rodríguez, 2004).

Aunque este enfoque ha sido de los más utilizados por los programas educativos para la adquisición de conocimientos, que permite una evaluación objetiva y con mayor orden,

ayudando al alumno a tener una mejor adaptación a su entorno, debe considerarse el rol pasivo que toma el aprendiz al aportar al proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que sólo espera a que el profesor le de la información y la tarea, para después llevarla a cabo y así evitar o ganar un refuerzo. Esta excesiva rigidez en la secuencia de los contenidos, impide el tratamiento de respuestas o preguntas no previstas, la falta de motivación intrínseca y la resolución de problemas por medio de la memorización. Además no considerar las características individuales de los alumnos, evaluando con los mismos criterios, omitiendo la retroalimentación para mejorar los planes de estudios o programas que ayuden a los demás factores que pueden estar impidiendo a su aprendizaje (Hernández, 2008).

Cognoscitivismo.

La concepción del ser humano como un procesador activo de los estímulos tuvo importantes repercusiones en el estudio de los procesos de aprendizaje y en la educación. Se comenzó a poner mayor énfasis en la forma en que los seres humanos procesan la información, surgiendo así diversas teorías que hicieron importantes aportes a la psicología de la educación. Gracias a los mecanismo cognitivos con los que cuenta el ser humano.

Se entiende a la psicología cognitiva como “aquella disciplina que se dedica a estudiar procesos tales como percepción, memoria, atención, lenguaje, razonamiento y resolución de problemas” (Arancibia, Herrera y Strasser, 2009, p. 82), es decir, los procesos involucrados en el manejo de la información por parte del sujeto. Dicho interés por la presencia de capacidades innatas presentes en el sujeto que posibilita el conocimiento, nace el constructivismo, una teoría que está presente hoy con gran fuerza en la psicología de la educación, con el objetivo de comprender la formación del conocimiento de la realidad, situándose en el interior del sujeto, en base a la exploración de su contexto y objetos. (Araya, Alfaro y Andonegi, 2007) A partir de este enfoque surgen algunas teorías del aprendizaje como la sociocultural de Vygotsky, el aprendizaje significativo de Ausbel y la teoría de desarrollo de Piaget.

Aprendizaje sociocultural. Esta teoría fue creada por Lev Semiónovich Vygotsky, quien plantea que el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto, su sociedad y cultura, además del físico. Este comportamiento cognitivo permite al sujeto internalizar el aprendizaje creando su

propia realidad. Por tanto en la construcción del pensamiento, una función aparece dos veces primero a nivel social, (inter personal) y luego a nivel personal (intrapersonal). Estos procesos se aplican en cualquiera situación que realice el sujeto.

Para Vigotsky (1982) existen dos funciones mentales: las funciones mentales inferiores, las cuales son innatas y están determinadas genéticamente y limitan el comportamiento a una reacción o respuesta al ambiente; y las funciones mentales superiores, formadas a partir de la interacción social, se encuentra abierto a mayores posibilidades, se adquiere conciencia, uso de símbolos que a su vez permite pensar en formas más complejas, por lo que en el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a escala social, y más tarde, a escala individual; primero, entre personas (interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (intrapsicológica). Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Por tanto a mayor interacción social, mayor conocimiento. Dicho potencial de desarrollo mediante la interacción con los demás, Vigotsky los denominó zona de desarrollo próximo, el cual puede verse como una etapa de desarrollo del individuo, donde se da la máxima posibilidad de aprendizaje, para después ser responsables de su construir su propio conocimiento y comportamiento.

Desde esta perspectiva, la cultura es el determinante primario del desarrollo individual, es la que proporciona las herramientas psicológicas para adquirir conocimiento como el lenguaje y el pensamiento, además es la mediadora del comportamiento del individuo, ya que es la que dice que pensar y como pensar, a su vez es la que da el conocimiento y la forma de construir ese conocimiento, a través de la enseñanza de otros, por lo que el aprendizaje es el proceso por el que las personas se apropian del contenido y al mismo tiempo, de las herramientas del pensamiento (Carrera & Mazzarella, 2001)

Aprendizaje Significativo. Por otro lado desde una visión más cognitiva significativa se encuentra el pedagogo David Ausubel, quien plantea que el aprendizaje depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, y por ende debe entenderse como el conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización. Dicha interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con aspectos relevantes, el cual reciben el nombre de ideas de anclaje (Ruiz, Caballero & Moreira, 2011). Pero el aprendizaje significativo no es sólo

un proceso, sino también un producto. La atribución que se hace con la nueva información es el resultado emergente de la interacción entre las ideas de anclaje, claras, estables y relevantes presentes en las estructuras cognitivas y esa nueva información o contenido; como consecuencia del mismo, esas ideas de anclaje se ven enriquecidos y modificados, dando lugar a nuevas ideas de anclaje más potentes y explicativas que servirán de base para futuros aprendizajes (Rodríguez, 2004).

Para Ausubel lo que se aprende son palabras u otros símbolos, conceptos y proposiciones, dado que el aprendizaje representacional conduce de modo natural al aprendizaje de conceptos y que éste se encuentra en la base del aprendizaje proposicional y a través de la asimilación se producen básicamente el aprendizaje en la edad escolar y adulta. Se generan combinaciones diversas entre los atributos característicos de los conceptos que constituyen las ideas de anclaje, para dar nuevos significados a nuevos conceptos y proposiciones, lo que enriquece la estructura cognitiva, con una herramienta esencial, el lenguaje, por tanto, el aprendizaje significativo se logra a través de la verbalización y del lenguaje, requiriendo así, comunicación entre distintos individuos y uno mismo (Ruiz, Caballero & Moreira, 2011).

Para que un aprendizaje sea significativo, según Ausubel, el alumno debe manifestar una disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, es decir, relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria (Moreira,2000).

Constructivismo.

A diferencia de Vigotsky y Ausubel quienes comparten el mismo enfoque, Piaget realizó una aportación más detallada del desarrollo humano, inclusive clasificándolo por etapas. En su teoría del desarrollo, plantea que la naturaleza del conocimiento llega gradualmente en el ser humano por medio de la maduración biológica y experiencia ambiental para poder adquirirlo, construirlo y utilizarlo (Araya, Alfaro & Andonegui, 2007). Cuando un individuo afronta un problema, lo intenta resolver mediante los conocimientos que ya posee, usando esquemas conceptuales existentes. Va comprendiendo su entorno, mejorando su sensibilidad a las contradicciones, realizando operaciones mentales, comprendiendo las transformaciones y adquiriendo nuevas

nociones, tratando de adaptarse al entorno por medio de la asimilación o aceptación, es decir, cuando una idea nueva se le presenta, se crea un conflicto cognitivo o desequilibrio en su estado mental ya que esta idea choca con las ya existentes, cuando este esquema cognitivo antes en conflicto se reconstruye o expande, puede decirse que el sujeto llegó a la fase de acomodación (Batanero, Contreras & Arteaga, 2011). Por lo que el individuo que constantemente persigue la consecución de un equilibrio, trata de hallar respuestas, planteándose cada vez más interrogantes e investigando adquiere mayor conocimiento. A su vez Piaget (2001) explica que a medida que el niño crece, utiliza gradualmente representaciones más complejas para organizar la información del mundo exterior que le permite desarrollar su inteligencia y pensamiento, para lo cual hace referencia de tres tipos de conocimiento:

- *El conocimiento físico*: el cual se obtiene de la interacción con los objetos y el medio que los rodea, incorporado por abstracción empírica. Al momento de manipular los objetos se está experimentando colores, peso, sabores, olores, etc.
- *El conocimiento social*: este puede ser dividido en convencional y no convencional. El primero es referido al consenso social y la fuente de conocimiento está en los otros (amigos, padres, profesores, etc.). También se encuentran el no convencional, es decir, aquellas nociones o representaciones sociales construido y apropiado por el individuo, como rico-pobre, representaciones de autoridad, trabajo-descanso, etc.
- *El conocimiento lógico-matemático*: surge de una abstracción reflexiva ya que este conocimiento no es observable y es el niño quien los construye en su mente a través de las relaciones con el medio, iniciando con la seriación y clasificación estableciendo semejanzas, a partir de las características físicas del objeto, aclarando que el conocimiento adquirido una vez procesado no se olvida, ya que la experiencia no proviene del medio sino de la acción sobre los mismos.

Por tanto Piaget considera el pensamiento lógico-matemático como una construcción interna que el propio sujeto hace en base a la acción con el objeto, es decir, un proceso de adaptación que organiza el propio niño de la experiencia. La posibilidad de aprender, depende del conocimiento previamente adquirido y del desarrollo intelectual del alumno, es decir, debe existir una adaptación mental más avanzada necesaria para el intercambio entre el sujeto y el universo. Para dicha construcción se debe seguir una serie de etapas. Cada etapa está por la

posesión de estructuras lógicas de diferente y creciente complejidad, en que cada una de ellas, permite la adquisición de habilidades para hacer ciertas cosas, además de poder tratar diferentes formas con la experiencia (Arancibia, Herrera y Strasser, 2009) Estas etapas son:

Etapas Sensorio-Motriz. La primera etapa es la sensorio-motriz, la cual abarca los primeros meses del niño (0-24 meses) y es donde recibe los estímulos del ambiente construyendo progresivamente el conocimiento y la comprensión del mundo mediante la coordinación de experiencias con sus deseos de satisfacción, preparándolo para iniciar el desarrollo de operaciones y capacidades lógico-matemático y se divide en seis estadios explicados por Piaget (1969): el primer estadio abarca la permanencia del objeto durante el primer mes de nacimiento del sujeto. Una vez que un objeto desaparece de la vista del niño o niña, no puede entender que todavía existe ese objeto (o persona); En el segundo estadio, se empieza a crear hábitos basados en un esquema sensorio-motor, “acciones que se transfieren o generalizan durante la repetición de esa acción en circunstancias iguales o análogas” (p. 26). Después el bebé empieza a agudizar su visión y prensión y por tanto tiene más facilidad de coordinar sus movimientos y aparecen indicios del pensamiento representacional. Por este motivo le resulta tan atractivo y sorprendente el juego que consiste en esconder su cara tras un objeto, como un cojín, y luego volver a “aparecer”. La edad donde empieza a destacar la inteligencia en un bebé es en el cuarto y quinto estadio, donde el niño es capaz de realizar combinaciones interiorizadas, es decir, analogías entre lo que busca y sus acciones, empezando a observar sus relaciones e intentar llegar a su fin ya sea de manera azarosa o por sustitución. Por último el sexto estadio, explica la comprensión súbita del niño, ya que es capaz de encontrar medios nuevos para conseguir su fin de una manera más eficaz por medio de la imitación del resultado y el amaestramiento (Castro, del Olmo & Castro, 2002).

En esta etapa el bebé a través de la experimentación, empieza a descubrir su entorno por medio del gateo, manipulación de objetos con la boca o manos y de ese modo hace una imagen de lo posible, de lo estable, de lo permitido, comestible, etc. todo ello útil para empezar a desarrollar una inteligencia operatoria (Piaget, 2001).

Etapas pre-operacional. Conforme progresa el pensamiento representacional, el aprendizaje se vuelve más acumulativo y menos dependiente de la percepción inmediata, lo que lleva a la segunda etapa, la pre-operacional. Es caracterizada por la consolidación de las funciones semióticas que hacen referencia a la capacidad de pensar sobre los objetos en su ausencia, además de dos progresos cognitivos para la representación de la realidad (Piaget e Inhelder, 1969):

- *Función simbólica:* La función simbólica consiste en: "poder representar algo (un "significado" cualquiera: objeto, acontecimiento, esquema conceptual, etc.) por medio de un "significante" diferenciado y que sólo sirve para esa representación" (p.59).

Complementando esta idea Pérez y Navarro (2011) mencionan que en esta función simbólica se distinguen cinco comportamientos que surgen en el curso del segundo año de vida, y que implican la construcción o el uso de significantes diferenciados. Tales conductas son: La imitación diferida, la imitación que el niño realiza en ausencia del modelo. El juego simbólico o juego de ficción. El niño juega con una caja "como si" fuera un coche. El dibujo o imagen gráfica. La imagen mental o imitación interiorizada. El lenguaje o empleo de los signos de la lengua que se está aprendiendo. Es cierto que el desarrollo de muchos de estos comportamientos se inicia en el período sensorio-motriz, pero no alcanzan su máxima expresión hasta el período preoperatorio.

- *Pensamiento intuitivo,* este es el segundo progreso cognitivo, el cual permite atribuirle rasgos humanos a los objetos inanimados, de una forma egocéntrica recurren a sus propias experiencias y observaciones personales tratando de dar una explicación a los fenómenos que le rodean.

Esto hace posible una solución de problemas más sistemática en la que los niños relacionan los factores situacionales actuales con esquemas desarrollados con anterioridad retenidos en la memoria. Descubre conceptos clave como la identidad, las agrupaciones, más-menos, añadir-quitar, igual-diferente, etc. logrando usar los números naturales para comparar tamaños, pero aunque su habilidad representacional haya sido consolidada, aún requiere la adquisición de ciertas estructuras lógicas que le permitan

desarrollar operaciones concretas, debido a ello se denomina pre-operacional, tal es el caso de la conservación, el niño reconoce que existe el objeto y lo recuerda, pero aún no es capaz de entender que la cantidad no cambia cuando la forma cambia y es hasta el final de esta etapa cuando el niño logra un verdadero entendimiento del concepto de número (Piaget, 1981).

Etapas operaciones concretas. En esta etapa el niño es capaz de adoptar otros puntos de vista, considerando más de una perspectiva y representación de transformaciones, siendo la reversibilidad, una de las operaciones mentales más significativa en esta etapa, siendo esta, la capacidad de concebir simultáneamente dos operaciones mentales inversas). Con ello es posible realizar operaciones mentales y comprenderlas, principalmente de seriación y clasificación, dichas operaciones son concebidas como las acciones interiorizadas que se integran a una estructura de conjunto, cuando se guía al niño de manera adecuada por medio de la experimentación y manipulación, el pensamiento se vuelve verdaderamente lógico, entendiendo el concepto de agrupar, sabiendo, por ejemplo, que un perro pequeño y un perro grande siguen siendo ambos perros, o que los diversos tipos de monedas y los billetes forman parte del concepto más amplio de dinero, siendo la conservación, clasificación y seriación las características cognoscitivas principales en esta etapa (Meece, 2000).

Uno de los experimentos de Piaget para comprobar la adquisición de la conservación entre la etapa pre-operacional y operacional, consiste en colocar dos vasos de diferente altura y anchura frente a un niño de 6 años (etapa pre-operacional) y el niño de 8 años (etapa operaciones concretas), se inicia llenando dos vasos del mismo tamaño con la misma cantidad de agua, uno de ellos es vaciado, frente al niño, a un vaso de mayor altura, después se les preguntó por el vaso que tenía más cantidad de agua. Los niños que se encontraban en la etapa pre-operacional se concentraban en una sola característica prominente del estímulo, juzgaron con mayor cantidad de líquido por una sola dimensión, casi siempre la altura. Por otro lado el niño que se encuentra en la etapa de operaciones concretas aprende que la cantidad de un líquido sigue siendo la misma aunque se coloque en un recipiente de distinta forma, pero de la misma capacidad (Araya, Alfaro & Andonegi, 2007). Para efectuar dicha tarea de conservación, los niños se sirven de dos operaciones mentales básicas: negación, compensación e identidad. Estas operaciones se reflejan

en la forma en que un niño de 8 años podría explicar por qué la cantidad de agua en dos vasos permanece inalterada. El adulto que acompaña al niño en su proceso de aprendizaje debe planificar didáctica de procesos que le permita interactuar con objetos reales, que sean su realidad (citado en Arancibia, Herrera & Strasser, 2009).

Otra de las características que se presentan en esta etapa es la clasificación. Piaget y Inhelder (1969) la consideraba como la capacidad de nombrar e identificar los conjuntos de objetos de acuerdo a la apariencia, tamaño u otras características, incluyendo la idea de que un conjunto de objetos puede incluir a otro, es decir, clasificar los objetos en clases y subclases basadas en las similitudes y diferencias entre los grupos.

Por último se encuentra la seriación como parte de la formación de operaciones concretas, el cual es la capacidad de ordenar los objetos en progresión lógica, como tamaño, o en tiempo de una magnitud creciente o decreciente. Para poder resolver estos problemas de seriación, es necesario aplicar la regla de la lógica de transitividad, referida a la capacidad de ordenar objetos mentalmente y reconocer las relaciones entre varias cosas en un orden serial. Por ejemplo, si se le pide a un niño guardar sus libros en una estantería de acuerdo a la altura, el niño reconoce que se inicia con la colocación del más alto en un extremo de la estantería y en el otro extremo termina el más corto (Piaget, 1981).

Una de las limitantes de esta etapa, es la inhabilidad de tomar en cuenta todos los resultados lógicamente posibles y no captan conceptos abstractos ya que el niño sólo puede aplicar estas nuevas estructuras lógicas a los objetos concretos (aquellos que han experimentado con sus sentidos). Es decir, los objetos imaginados o los que no han visto, oído, o tocado, continúan siendo algo místico y el pensamiento abstracto tiene todavía que desarrollarse (Meece, 2000). El objetivo central de este periodo es guiar la inteligencia con las leyes de la lógica y las matemáticas, a una operación formal.

Operaciones Formales. Para Piaget las operaciones formales es la última etapa cognoscitiva del ser humano, que no es más que la reconstrucción de las operaciones concretas, el cual inicia en el niño en un promedio de 11 años de edad en adelante. En esta etapa es posible aplicar el razonamiento para la resolución de problemas en contextos diferentes en los cuales fueron adquiridos, con el objetivo cognitivo de extender el razonamiento lógico- matemático, hacia un

nivel simbólico más abstracto (Piaget e Inhelder, 1969). El niño o adolescente tendrá una inversión de sentido entre lo real y lo posible, donde será lo real lo que esté subordinado a lo posible, es decir, no se limitará a contemplar solamente las relaciones aparentes entre los elementos que conforman un problema, sino que buscará englobar esas relaciones con el conjunto de relaciones que conciba como posibles, con el objeto de evitar que posteriormente nuevos hechos resulten contradictorios. Además tendrá a su disposición una variedad de operaciones virtuales que son condición necesaria para lograr un equilibrio que es a la vez móvil y más estable. En pocas palabras el adolescente adquiere habilidades metacognitivas; son capaces de razonar sobre realidades concretas así como razonar sobre la base de posibilidades teóricas, considerar situaciones hipotéticas y pensar sobre ellas (Cano, 2007).

En este sentido Meece (2000) hace referencia a cuatro razonamientos indispensables para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático que Piaget plantea y del cual esta investigación se centra: Lógica proposicional, razonamiento científico, razonamiento combinatorio y razonamiento de la probabilidad y de proporción.

Lógica Proposicional: De acuerdo con Piaget (1991) la lógica proposicional consiste en una reflexión entre dos afirmaciones o premisas, entendiendo por lógica al pensamiento que proporciona un ajuste a lo real, la cual puede ser verdadera o falsa, no ambas. David Moshman y Bridge Franks (1986 citado en Meece, 2000) comprobaron que los niños que se encuentran en operaciones concretas, tienden a evaluar la conclusión anterior basándose en la verdad objetiva más que en la validez del argumento. Sin embargo, en las operaciones formales el niño o adolescente, la validez del argumento se relaciona más con la forma en que se relacionan las proposiciones que con la veracidad del contenido. Por lo que la lógica proposicional se encarga de extraer una conclusión lógica a partir de la relación entre dos afirmaciones o premisas.

Muchos tipos de situaciones en que se resuelven problemas requieren utilizar la lógica proposicional, representada por algoritmos, especialmente al momento de formalizar la representación de un teorema. Un caso especial muy conocido es el “Teorema de Pitágoras”, el cual afirma que si (a, b, c) es una terna pitagórica entonces: $c^2 = a^2 + b^2$ (Benito & Madonna, 2015). De igual forma a la hora de resolver problemas algebraicos se necesita la habilidad de reflexionar sobre proposiciones (por ejemplo, $x + 2y = 11$; si $y = 1$, entonces $x = ?$). También

resulta indispensable al momento de defender un punto de vista o para determinar la clasificación de alguna especie.

Razonamiento Científico: A medida que se empieza a utilizar la lógica proposicional, el adolescente abordará los problemas de un modo más sistemático. Formula hipótesis, determina cómo compararlas con los hechos y excluye las que resulten falsas, también conocido como pensamiento hipotético-deductivo, definido por Piaget (1991) como la capacidad de generar y probar hipótesis en una forma lógica y sistemática. El primer paso consiste en formular una hipótesis o en hacer una predicción. En la etapa de las operaciones concretas, el niño puede aplicar esta estrategia de solución de problemas, aun cuando no sean tan diversas. El siguiente paso consiste en probar las hipótesis y, generalmente, es el que distingue la etapa de las operaciones concretas y la de las operaciones formales.

Otra de las características de este razonamiento, es la inducción de leyes explicativas, definido por Piaget y Inhelder (1954) como el método de un niño o adolescente que organiza una experiencia con el fin de registrar leyes y verificar experimentalmente su generalidad, esta consiste en interrogar a lo real sobre su deducibilidad. Esto implica suponer que el sujeto construye una representación mental del problema que va a dirigir su experimentación.

Razonamiento combinatorio: Otro componente especial dentro del pensamiento formal, son los esquemas combinatorios, entendido como la capacidad de pensar en causas múltiples o de una forma más específica “la capacidad de concebir y organizar sistemáticamente todas las posibilidades que pueden interactuar como elementos y causas de un suceso” (Morales, 2013, pp. 2) .Para Inhelder y Piaget (1969) el razonamiento hipotético deductivo opera por medio de las operaciones combinatorias que se aplican sobre un conjunto de posibilidades que deben examinarse y enumerarse hasta llegar a una conclusión. Mediante la observación y las hipótesis planteadas, antes de llegar a una respuesta, primero el adolescente enumera o enlista todos los grupos posibles que pueden formarse dados ciertos elementos y condiciones en un problema. Esta enumeración tiene un carácter sistemático, el cual puede entenderse como un procedimiento regulador más avanzado que se despliega para controlar posibles errores por repetición u omisión de grupos posibles y para que se facilite la verificación de los mismos.

Este razonamiento tiene un carácter evolutivo en el niño. En el estadio I, hasta los 7 años de edad aproximadamente, el niño construye las combinaciones por tanteo, de una manera empírica, y no es capaz de establecer un procedimiento sistemático que le lleve a determinar todos los casos posibles. Incluso en tareas sencillas como la consistente en formar parejas de fichas de diferente color, tomadas de entre tres montones de diferente color, los niños de estas edades seleccionan parejas al azar y no buscan un procedimiento que les permita obtener todas las parejas posibles. Este hecho se pone aún más de manifiesto en el caso de combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos, formación de parejas de distinto color cuando se dispone de fichas de cuatro colores diferentes, en que no se aprecia ningún procedimiento sistemático como pudiera ser, por ejemplo, dejar fija alguna ficha y mover las restantes. En el estadio II (8 a 11 años aproximadamente) lo que predomina es la búsqueda de un procedimiento sistemático de formación de parejas y se va desechando lo que era la obtención aislada de parejas. Esa búsqueda pocas veces conduce a resultados satisfactorios y, con demasiada frecuencia, el niño recurre de nuevo a la búsqueda empírica. En el estadio III (11 a 12 años aproximadamente) los niños comienzan a descubrir con relativo éxito procedimientos sistemáticos de búsqueda. El integrar dos operaciones, seriación y correspondencia, en una sola operación como algo necesario para obtener todas las combinaciones posibles de los elementos tomados de dos en dos, es característico del pensamiento formal que es el que corresponde a los niños de estas edades. (Meece, 2000).

Razonamiento sobre las probabilidades y las proporciones: la última característica de las operaciones formales cuya enseñanza ha estado más influida por la teoría de Piaget (1991 citada en Meece, 2000) como “la capacidad de incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información” (pp. 134).

Desde muy pequeño el niño debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades. Estos conceptos básicos se pueden concretizar con objetos físicos; por ejemplo, la suma o la resta se pueden ejemplificar juntando o separando colecciones de dulces, piedrecillas o cualquier otro objeto, con la propiedad de ser reversibles (volver a los datos primitivos al deshacer la operación). Por el contrario, no existe una experiencia concreta similar de lo aleatorio, ya que no se puede manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación (Cañizares, 1997).

En este sentido Piaget concebía al azar como complementario a la noción de causa y como composición de operaciones de mezcla no reversibles de mecanismo causales entre un conjunto de posibilidades de las que sólo algunas estarían presentes en cada suceso aleatorio particular. El azar sería, por tanto, un dominio complementario de la composición lógica, y no podría ser adquirido hasta que se constituyan las operaciones reversibles, por comparación con ellas. Sólo con la posesión de un esquema combinatorio capaz de considerar el conjunto de posibilidades y la proporción de los casos favorables a un suceso dado con el total de las mismas, aparece la idea de probabilidad (Batanero, Contreras & Arteaga, 2011). En conclusión con este tipo de razonamiento la comprensión de la idea de azar y probabilidad requiere la adquisición de razonamiento combinatorio y proporcional y la idea de causalidad.

Como se puede observar la teoría de Piaget marca una meta común en todo ser humano, llegar al pensamiento formal, desarrollando sustancialmente sus habilidades para pensar sobre el pensamiento (metacognición), que implica ser capaz de entender cómo funciona su entorno. Primero reflexiona y luego interviene, de tal manera que no tratan de extraer directamente de la experiencia, las leyes, sino que primero hacen hipótesis y luego intentan comprobar si se cumplen, traza un plan y luego comprueba en todos los casos, teniendo en cuenta las combinaciones posibles (Meece, 2000). Dichas capacidades permiten desarrollar la inteligencia, el cual define Piaget (1981) como “un sistema de operaciones que interactúan constantemente con el medio, convirtiéndose en la adaptación mental más avanzada y el instrumento necesario de intercambio entre el sujeto y el universo” (p.60).

Cabe destacar que Piaget (1977) argumenta que las edades de cada una de estas etapas cognitivas varían según el entorno social, pero siempre están en reconstrucción. Dentro de los múltiples experimentos psicológicos que ha realizado este autor en diferentes sociedades como África, América del Norte, Asia entre otros, estudiando los estadios, se percató que las zonas menos escolarizadas llegaban a tener un retraso de 3 años en cada etapa en comparación de aquellas que estaban escolarizadas, pero la sucesión es la misma de una etapa a la otra. Siguiendo esta idea más tarde Piaget y García (1984) lo afirmarían diciendo:

Los estadios sucesivos de la construcción de las diferentes formas del saber son secuenciales -es decir, que cada uno es a la vez resultado de las posibilidades abiertas por el precedente y condición necesaria de la formación del siguiente

sino, además, cada nuevo estadio comienza por una reorganización, a otro nivel, de las principales adquisiciones logradas en los precedentes (p. 9).

También estaban convencidos de que estas tendencias evolutivas en el ámbito del desarrollo cognitivo, contribuye significativamente en el aprendizaje y evolución de las matemáticas y otras ciencias. Como se vio en el capítulo de la historia de las matemáticas cada uno de los matemáticos que realizaron aportaciones importantes a la ciencia y que son utilizadas en la actualidad, presentaban un pensamiento lógico-matemático hacia un nivel abstracto, tomaban ciertas premisas y al pensar en ellas por medio de la acción con el objeto seguían adquiriendo nuevos conocimientos, por ejemplo, para que Pitágoras descubriera que existen números irracionales, primero concibió la idea de un número racional, convencido ante la idea de que el universo estaba construido según la norma discontinua de los números naturales, comenzó a construir su propio conocimiento por medio de figuras geométricas, a partir de ello se empezó a hacer hipótesis para después comprobarlo con el triángulo, hasta que se dio cuenta de que existían números irracionales, por los que en ese acontecimiento seguía desarrollando un pensamiento lógico-matemático hacia un nivel más abstracto gracias al razonamiento proposicional, científico, combinatorio y probabilístico característico del pensamiento formal.

Desde que el humano ha tenido consciencia de su entorno, gracias a los constantes conflictos cognitivos y con base a la experiencia y la lógica-matemática, la ciencia ha sido capaz de construir conocimiento de forma evolutiva. Por tanto es preciso reconocer a la lógica como un constituyente del sistema cognitivo de todo sujeto, en el que su construcción no solo depende de los procesos biológicos, sino también de la interacción con su entorno (Piaget, 1991). Su importancia es que permite establecer las bases del razonamiento para la construcción de los conocimientos, proceso que puede mejorar la situación de algunas Necesidades Educativas Especiales (NEE), como el Bajo Rendimiento Intelectual (BRI), población que a su vez, llega a ser ignorada o confundida con algunas otras NEE, limitando su intervención. A continuación se revisará la historia de NEE, así como su definición y algunas categorías como Aptitudes Sobresalientes, Bajo Rendimiento Escolar (BRE), Trastorno por Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH) y Bajo Rendimiento Intelectual (BRI).

Capítulo II

Educación Especial

La educación es un derecho que todo individuo tiene, además de ser un instrumento esencial para el desarrollo del país. Durante años ha sido uno de los temas abordados en las investigaciones, tal es el caso de la educación especial, una modalidad del Sistema Nacional Educativo que se encarga de intervenir en niños y jóvenes que tienen necesidades educativas especiales, es decir, alumnos que presentan dificultad para alcanzar con éxito conductas básicas exigidas por el grupo social y cultural, con la intención de potencializar habilidades que favorezcan los estados de productividad. Con el tiempo, los servicios de educación especial van cambiando de acuerdo a las políticas y países y en México no es la excepción (Guillen & Vicente, 2001).

La atención a las necesidades educativas especiales, empezó a tomar importancia, a mediados del siglo XIX, durante la presidencia de Benito Juárez, quién consideró a la educación como base fundamental para el crecimiento del país, por ello, fundó escuelas especiales para aquellos niños que presentaba una diferencia o minusvalía, principalmente en sordomudos y ciegos, donde sus instituciones se centraban en la capital del país, sin lograr un avance sustancial en la materia manteniendo con poca o nula atención a las diferentes personas que padecían algún tipo de discapacidad de la época (Cardenas & Barraza, 2014).

Los avances sobre educación especial en el Porfiriato son pocos y precarios. En 1884, se atendían a personas con déficit visual en un Hospicio para pobres. Uno de los eventos que sobresalen en esta época es el decretó de la Ley de Educación Primaria en 1908 y en 1911, la Ley de Instrucción Rudimentaria, en ambas se disponía la creación de escuelas y/o enseñanzas especiales para infantes con discapacidad y el establecimiento de escuelas para los indígenas, el cual fueron interrumpidos durante la Revolución Mexicana. Fue hasta 1925 que se crea el Departamento de Psicopedagogía e Higiene Escolar, dirigida por la Secretaria de Educación Pública (SEP). Este departamento se encargaba de estudiar el desarrollo físico, mental y pedagógico. Se investigaba las causas del retardo escolar, proponían programas de intervención y sugerían a los alumnos diferentes alternativas de estudio con base en las aptitudes y habilidades detectadas en cada caso. Sin embargo, el sistema educativo carecía de mecanismos para proporcionar las herramientas necesarias a los niños con discapacidades diferentes, quedando

estas intervenciones completamente sujetas a las formas de enseñanza generalizada del concepto de educación gubernamental. Esta situación impulsó a generar un avance en cuestión de cuidado especializado, los maestros normalistas se vieron en la necesidad de ser autodidactas para dar una atención a los niños que presentaban capacidades diferentes, asimismo se constituyeron algunas instituciones especializadas, como Escuela Nacional para Ciegos, Escuela Municipal de Sordomudos, la Clínica de la conducta, entre otras. Debido a la carencia de respuesta del sistema educativo también se crearon diversas organizaciones educativas de la sociedad civil que surgieron como resultado de la reunión de familiares o de las propias personas con discapacidad y se fortalecieron con la participación de especialistas y profesionales de distintos ámbitos (SEP, 2004).

Un hito importante en la evolución de la Educación Especial fue en 1970, cuando se creó la Dirección General de Educación Especial (DGEE) encargada de, como su nombre lo indica, la educación especial, la cual, hasta 1979, se sustentó en un modelo médico. Más adelante, en los años ochenta, dicho modelo de atención cambió a otro de corte psicopedagógico, y en la década de los noventa la educación especial en México evolucionó hacia un modelo de integración educativa, gracias a la influencia de la Conferencia Mundial sobre Educación para Todos y la Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad (ONU, 2006). A partir de entonces inició el camino para la reconceptualización de la educación especial. El enfoque terapéutico o rehabilitatorio cambió por uno educativo; adquirió especial importancia el hecho de que el niño participe activamente en su proceso de aprendizaje, especialmente en los que se refiere a la lengua escrita y a la lógica matemática, y se dio un gran impulso a la investigación pedagógica.

Bajo la misma línea de acción y mejora constante a la educación estándar y especial, llega el presidente Carlos Salinas de Gortari (1988-1989), quién impulsó un Programa de Modernización Educativa a partir de realizar un diagnóstico que subrayaba el rezago educativo (Noriega, 2000). Como solución ante la situación de emergencia, propuso dar una cobertura nacional de primaria, dando prioridad a las áreas marginadas, mediante medios electrónicos de comunicación. Asimismo la Dirección General de Educación Especial, no solo se preocupó por crear contextos en los que la persona con discapacidad pudiera integrarse, dentro de la comunidad escolar, así como el aprendizaje esperado; sino que también pretendía que se diera

una integración social ya que es necesario para la conformación de estructuras mentales y para 1993 se crea la Ley General de Educación, publicado en el Diario Oficial de la federación, donde por vez primera, la discapacidad es considerada en la distribución de gasto públicos. Además, esta ley expresó un avance irreversible del gobierno de la republica al dar respuesta a una exigencia de justicia social para las personas con discapacidad y aquellas con aptitudes sobresalientes. Por ley y no por filantropía, se legisló que esta población recibiera educación a través de un proceso de integración educativa, en el marco de la reorientación del sistema educativo nacional, al mismo tiempo el marco jurídico educativo enfatizó situar la importancia y relevancia de la acción pedagógica gestión escolar y la comunidad educativa.

La oportunidad de cambio, innovación y transformación del proceso de atención de Educación especial, quedó plasmada en los artículos 39 y 41 de la Ley General de Educación. El primero reconoció la educación Especial como parte del sistema educativo Nacional junto con la educación inicial y la educación para los adultos. El segundo, se nutrió del principio ético del derecho equitativo que actualmente modificado a letra expresa:

“Tratándose de personas con discapacidad, con dificultades severas de aprendizaje, de conducta o de comunicación, se favorecerá su atención en los planteles de educación básica, sin que esto cancele su posibilidad de acceder a las diversas modalidades de educación especial atendiendo a sus necesidades. Se realizarán ajustes razonables y se aplicarán métodos, técnicas, materiales específicos y las medidas de apoyo necesarias para garantizar la satisfacción de las necesidades básicas de aprendizaje de los alumnos y el máximo desarrollo de su potencial para la autónoma integración a la vida social y productiva. Las instituciones educativas del Estado promoverán y facilitarán la continuidad de sus estudios en los niveles de educación media superior y superior” (LGE, 2016, 01 de Junio).

Para que fuese posible la integración educativa de menores con discapacidad, desaparecieron las escuelas de educación especial y en su lugar fueron creadas en 1998, los Centros de Atención Múltiple (CAM). Instancias educativas que ofrecen ayuda temprana y capacitación laboral para niños y jóvenes con discapacidad en educación básica, con el objetivo

de que se beneficien del plan y programas de estudios regulares y alcance lo antes posible el grado escolar que les corresponde, de acuerdo a su edad (Cárdenas y Barraza, 2014).

Bajo el mismo eje central en el mismo año se crearon las Unidades de Servicio de Apoyo a la Educación Regular (USAER) (actualmente Unidad de Educación Especial y Educación Inclusiva, UDEEI). Su población se centra en alumnos y las alumnas con discapacidad, Capacidades y Aptitudes Sobresalientes (CAS) y/o talentos específicos, indígenas, migrantes, en situación de calle y en situación de enfermedad en educación básica, integrada por especialistas de la materia, los cuales son responsables de atender sistemáticamente a toda la comunidad educativa (los alumnos, maestros, directores y padres). Su propósito central es: “contribuir a una educación que garantice la igualdad de oportunidades, la equidad para la universalización de la cobertura de la CDMX, una auténtica accesibilidad educativa con calidad que atienda la deuda social de la escuela pública con los grupos en situación de vulnerabilidad” (UDEEI, 2015, p. 7).

Actualmente existe un cambio importante en la Educación Especial, en cuanto que la noción de discapacidad no se centra sólo en la descripción de las características personales, sino que se reconoce en la presencia, mantenimiento y/o erradicación de la misma, a la interacción que existe entre las características individuales y las demandas particulares que el ambiente ejerce sobre el individuo (Acle, Roque, Zacatelco, Lozada & Martínez, 2007), puede reconocerse como la disciplina que se ocupa del estudio e intervención de los procesos de enseñanza-aprendizaje orientados al logro de la optimización de las posibilidades educativas referidas a los aspectos cognitivos, actitudinales y procedimentales de los sujetos con Necesidades Educativas Especiales (Sánchez, 2011).

Con respecto a esto último, la DGEE, considera a un niño con Necesidades Educativas Especial (NEE), cuando en relación con sus compañeros de grupo enfrenta dificultades para desarrollar el aprendizaje de los contenidos estipulados en el currículo escolar, requiriendo en su proceso educativo, incorporar mayores y diferentes recursos a fin de que logren las metas y objetivos curriculares.

Dentro de esta diversidad estudiantil que actualmente hay en las aulas, se han distinguido algunas categorías, debido a las características particulares que presentan. Entre ellas se encuentran: Aptitudes Sobresalientes (AS), Bajo Rendimiento Escolar (BRE), Trastorno por

Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH) y Bajo Rendimiento Intelectual (BRI) el cual es el fenómeno central de este trabajo.

Aptitudes Sobresalientes

Como se vio en el capítulo de la historia de las matemáticas, aquellos sujetos que han manifestado un potencial sobresaliente, han dejado un gran impacto en la actualidad, influyendo significativamente en su conceptualización el cual han ido cambiando según las necesidades culturales e históricas, dando mayor peso a las habilidades superiores al promedio que presenten ante una actividad de interés social (Ordaz, 2012).

En Latinoamérica los más usuales son genio, talentoso, superdotado, con altas capacidades, entre otras. Actualmente la SEP (2012) adoptó el término Aptitudes Sobresalientes, definido como “aquel que destaca significativamente del grupo educativo y social al que pertenece en uno o más de los siguientes campos del quehacer humano: científico-tecnológico, humanístico-social, artístico y/o de acción motriz”.

El término aptitud se propuso, según (Sánchez, Cantón, Sevilla, 1997), debido a las capacidades naturales que posee el niño, no por haber sido heredadas –aunque, en parte, puedan serlo– sino porque se encuentran presentes en los alumnos sobresalientes, a pesar de que éstas no hayan sido formadas sistemáticamente en la escuela o fuera de ella.

Asimismo esta definición fue compartida en el Diario Oficial de la Federación (2013), haciendo énfasis en las necesidades educativas especiales y la atención que pueden llegar a requerir los alumnos:

El que destaca significativamente del grupo educativo y social al que pertenece en uno o más de los siguientes campos del quehacer humano: científico-tecnológico, humanístico-social, artístico y/o de acción motriz. Este alumnado tiene necesidades específicas y algunos de ellos pueden requerir de apoyos educativos complementarios, dependiendo del contexto y de la atención

educativa que se les brinde, para potenciar sus capacidades y satisfacer sus necesidades e intereses. (SEP, 2006, p.59)

A la par de su conceptualización han existido diversas propuestas de teorías y modelos explicativos, así como las nuevas variables psicológicas consideradas para la identificación de la población sobresaliente y la inclusión social. Mason y Mönks (1993 citado en Valdez, et al., 2006) proponen una categorización por cuatro grupos fundamentales: Modelo orientado a las capacidades: tomando las bases objetivas de la medición psicométrica a través del Coeficiente Intelectual; Modelos cognitivos. En este modelo el rendimiento excepcional de los procesos cognoscitivos específicos para el proceso de la información es el eje central de los sobresalientes; Modelos orientados al rendimiento. Uno de los modelos más persuasivos en el campo el descrito por Renzulli (1994) llamada el modelo de los tres anillos, el cual promovió la idea de erradicar el uso exclusivo de los test de inteligencia como principal criterio para la identificación de niños con aptitudes sobresalientes; Modelos socioculturales. En este caso son los contextos que determinan en el comportamiento humano que tipo de productos poseen valor para considerarlos dignos de un talento especial (Ordaz, 2012). Cada modelo es el complemento de otro, ya que la evolución de los modelos teóricos en torno a los alumnos con aptitudes sobresalientes fue desarrollándose paulatinamente, de tal manera que en sus inicios se vinculó con la herencia y en las ideas más recientes se ha considerado al ambiente como un factor importante que favorece las capacidades de los niños.

La importancia que se tiene en la realización de los modelos es conocer las características que los adolescentes con Aptitudes sobresalientes tienen y de esa forma poder utilizar las herramientas necesarias para su identificación. Es por ello que la propuesta de Renzulli (1994) resulta tener una base firme, ya que a partir de ésta se pueden emplear pruebas cuantitativas y cualitativas para la identificación de los sobresalientes, considerando que la importancia de su identificación tiene como propósito precisar las capacidades, destrezas y las necesidades educativas que pueden presentar los alumnos. Una vez detectados, es necesaria una intervención de acuerdo a sus necesidades.

Este carácter dinámico que presentan los niños o adolescentes con Aptitudes sobresalientes, debe ser tomado en cuenta, ya que aunque son niños con habilidades intelectuales generales altas, existen otros factores que pueden inhibir o potencializar su capacidad, como los

factores sociales y emocionales. Gerson y Carracedo (2007) consideran que es necesario implementar adaptaciones curriculares específicas para evitar que se aburran en la escuela y presenten problemas en su motivación, bajo rendimiento escolar o trastornos emocionales, es decir, requieren de un contexto facilitador que les permita potencializar sus capacidades personales y satisfacer sus necesidades e intereses para su propio beneficio y el de la sociedad.

Bajo Rendimiento Escolar

Una de las mayores preocupaciones de los profesionales de la educación, padres de familia y toda autoridad educativa, es la mejora del aprendizaje de los alumnos y como consecuencia, reducir el fracaso escolar. Por ello investigaciones científicas y la experiencia profesional han ayudado a clarificar conceptos que permitan la identificación de los diversos tipos de dificultades de aprendizaje.

El término de Bajo Rendimiento Escolar (BRE) comenzó a utilizarse a mediados del siglo XX, y se refiere al bajo nivel de conocimientos que el alumno demuestra tener en el ámbito escolar, en relación a los objetivos de aprendizaje y en comparación con sus compañeros, presentando una inadaptación escolar, deficiencias en aprendizajes inespecíficos. Según Brendelman (1975) comúnmente se identifica por las bajas calificaciones escolares considerando que tiene un valor relativo como medida del rendimiento debido a que no hay un criterio estandarizado para todos los centros, para todas las asignaturas, para todos los cursos y para todos los profesores. Para Martínez (1996) el rendimiento es el producto que rinde o da el alumno en el ámbito de los centros oficiales, suelen mostrar menos perseverancia, motivación y confianza en sí mismos; también faltan más a clases o a días completos de escuela. Su causa es extrínseca, es decir, es el resultante de un conjunto de factores externo: familiares, como la negligencia de los padres ante el aprendizaje de sus hijos, desvalorizando la importancia de la educación, omitiendo todo apoyo al aprendizaje, por diversas causas como la ignorancia, violencia, proceso de duelo, entre otras; los factores sociales, como las influencias negativas del grupo de iguales, acoso escolar, adicciones entre otras; y los factores educativos-institucionales, métodos y prácticas de enseñanza inadecuados o bien la falta de identificación de otras necesidades educativas, tal es el caso del TDAH y BRI, inclusive los niños con Aptitudes

Sobresalientes, que al no ser identificados y/o atendidos adecuadamente baja su rendimiento escolar (Atuesta, Vázquez & Arruego, 2008; Gómez y Valadez, 2010).

Por tanto es necesario identificar sus causas y atenderlas, puesto que trae consigo repercusiones psicológicas en la motivación de logro, procedimientos de pensamiento, estrategias de aprendizaje, metacognición y actitudes (Brendelman, 1975). La atención de los niños con BRE es recuperable, ya que en algunas ocasiones no se requiere una atención profesional, sino que de forma relativamente espontánea, las condiciones familiares y escolares se acomodan y facilitan la recuperación, sin omitir la importancia de la detección precoz para un mejoramiento oportuno.

Trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH)

EL TDAH es un trastorno de origen neurobiológico de inicio en la edad infantil y cuyos síntomas pueden perdurar hasta la edad adulta, el cual se caracteriza por tres síntomas típicos: Déficit de atención, Impulsividad e hiperactividad motora y/o vocal, considerando la frecuencia e intensidad en comparación a sus iguales. Existen tres presentaciones o anteriormente subtipos de TDAH, según el manual de Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales (DMS-V): predominante inatento, el cual se caracteriza por su falta de atención ante las indicaciones, constantemente pierde y olvida cosas y evita el esfuerzo mental sostenido, como hacer operaciones o realizar exámenes; el segundo es el subtipo hiperactivo-impulsivo. El sujeto que la padece, mantiene un constante movimiento de un lugar a otro, se considera una persona imprudente, habla en exceso, no sabe realizar actividades tranquilas y presenta agresividad, además tienden a sufrir accidentes porque no reconocen situaciones que implican a priori un alto riesgo físico, actúan sin pensar, tienen dificultad en aprender de las experiencias y cometen reiteradamente las mismas torpezas físicas; el último es el combinado, que tal como dice, se refiere a que el sujeto presenta todas las conductas antes mencionadas. En todos los subtipos presentan conductas negativas, principalmente la omisión de reglas, discuten y tienen deficientes patrones de comunicación social (Rebollo & Rodríguez, 2006).

La causa de este trastorno, es intrínseca, debido a una alteración neuropsicológica que provoca un retraso en el desarrollo de los sistemas que se ocupan del control ejecutivo del comportamiento y puede ser por diversos factores. Según Biederman (2004) una fuerte contribución es la genética con una tasa del 76%. Si uno de los padres tiene un antecedente con TDAH, existe un riesgo del 57% de tener descendencia con este trastorno. Otro factor es el abuso de sustancias durante el embarazo, como beber alcohol, drogarse, y principalmente el hábito de fumar. En una de las investigaciones Se detectaron que los niveles de fenilalanina en la madre o padres y de forma cuestionable el estrés y la ansiedad durante el embarazo están asociadas a la existencia de TDAH (Martínez, 2006).

Con lo anterior puede decirse que el aspecto social se encuentra poco ligado a la etiología de este trastorno, aunque si existen ciertos factores que pueden contribuir al aumento de este. Tal es el caso de la pobre competencia social que presentan, ya que dentro de su ámbito familiar y escolar experimentan rechazo por sus compañeros, hermanos, padres y profesores, debido a su conducta agresiva e inquieta. Unido a esto, las exigencias académicas y de comportamiento son mayores, influyendo negativamente en el desempeño académico, bajas notas, bajos puntajes en test estandarizados de lectura y matemáticas y repetición de grado escolar, siendo etiquetado como el “niño problema” y por ende, esta inadaptación social conlleva a que el niño genere frustración, baja autoestima y disgusto por el colegio (Avila, Cabanyes, García, Orjales & Moreno, 1997 citado en Rivera, 2013).

Bajo Rendimiento Intelectual

En la actualidad el Bajo Rendimiento Intelectual, es una de las Necesidades Educativas Especiales, menos atendidas, ya que no se cuenta con criterios formales ni claros para su identificación y por ende para su intervención, En los programas de atención educativa creados en México desde 1979, ninguno se ha enfocado en esta población o atendido adecuadamente. Esto se explica al momento de evaluar la inteligencia, puesto que su CI no se ubica ni con los niños con un CI “normal”, ni con aquellos que presentan una Discapacidad Intelectual. Dicha

dificultad hace que en muchas ocasiones se mal diagnostique, o no se apoye, aumentando a la cifra de fracaso escolar (Mélendez, 2012). Esto se debe en parte a la falta de sintomatología observable, ya que pese a que los profesores y padres de familia lo perciben, la apariencia física, los hitos del desarrollo y la salud física son aparentemente normales, lo que justifica la inexistencia de una atención clínica directa, de acceso a recursos sociales, educativos, etc, con los único que se cuenta es las constantes quejas en el bajo rendimiento escolar (Begona, Mercado & García, 2015).

Los padres y profesores suelen observar primero la calificación reprobatoria, repetición de cursos, presencia de problemas de conducta, lento aprendizaje y terminan etiquetándolos como “flojos”, “tontos”, “problemáticos”, ocasionándose, por estos motivos, muchas situaciones conflictivas entre la familia y la escuela, además de baja autoestima, mayor rechazo a la escuela e irónicamente exclusión escolar. A su vez, debido al fracaso continuo y persistente en el aula, el alumno con BRI empieza a desinteresarse por los contenidos académicos, marginándose de la escuela, incluso antes de que esta los excluya, provocando alteraciones en su autoimagen, pues se considera marginal para estudiar (Atuesta, Vásquez & Urrego, 2005).

También se llega a confundir con otros trastornos como el TDAH, ya que puede haber problemas disciplinarios e impulsividad, una escasa convivencia con pares, pobreza para establecer vínculos afectivos, quejas somáticas inespecíficas e incluso intento de suicidio. Otras características son la deficiencias en los procesos de lectoescritura, cálculo además de baja autoestima y poca tolerancia al fracaso (Atuesta, Vásquez & Arruego, 2008). Por otro lado, debido a esta limitante intelectual, los padres de familia y autoridades educativas trasladan a los niños o adolescentes a centros de atención de personas con discapacidades del desarrollo, con compañeros con mayores limitaciones y en estos centros tampoco encuentran su sitio (Krihnakumar, Geeta & Palat, 2006), llegando en ambos casos presentar problemas de adaptación social, dificultades para adaptarse a las exigencias del entorno y a ambientes competitivos y por consecuencia fracaso escolar principalmente a nivel secundaria (Edad, 2008).

En este caso la definición y sus características son de suma importancia para su intervención. En México en el 2008 fue incorporado el termino de Bajo Rendimiento Intelectual, definiéndolo como aquellas personas que presentan deficiencias en los procesos básicos para el aprendizaje y en una o más áreas de la conducta adaptativa y el rango de CI se encuentra entre 70

a 90 de acuerdo con la tabla de clasificación de inteligencia de Wechsler. Dicha descripción se asemeja a la que hace el DSM-V en la sección de “problemas adicionales que pueden ser objeto de atención médica”, donde menciona a la población con una Capacidad Intelectual límite refiriéndose a “toda persona con un coeficiente intelectual de entre 71 y 84” (p. 699). Algunos otros autores como Carulla, García, Ruiz, Artigas, García & González (2013) denominan esta anomalía como funcionamiento intelectual límite y la describen como:

...una metacondición de salud que requiere atención sociosanitaria, educativa y legal específica, caracteriza por disfunciones cognitivas diversas que se asocian a un coeficiente intelectual de entre 71 y 85 y que determinan un déficit en el funcionamiento de la persona tanto en la restricción de sus actividades como en la limitación de su participación social. (p.111)

Algunos autores como León y Salvador (2007) señalan que un alumno con BRI, no solo se identifica por un nivel intelectual bajo, sino por algunas características cognitivas que pueden considerarse fortalezas como: razonamiento perceptual, manifestando más habilidad en la coordinación visomotora, concentración, memoria visual, atención y capacidad para diferenciar detalles. Y algunas debilidades como: razonamiento conceptual, percepción, expresión verbal, dificultades para asumir responsabilidades, memoria limitada, además de un limitante razonamiento abstracto y concreto. Así también dificultades para poner en práctica los conocimientos adquiridos y resolver problemas cotidianos (Meléndez, 2012).

Si se considera la definición de Piaget (1981) con respecto a inteligencia como “un sistema de operaciones que interactúan constantemente con el medio, convirtiéndose en la adaptación mental más avanzada y el instrumento necesario de intercambio entre el sujeto y el universo” (p.60), se puede decir, que el niño o adolescente con BRI, se caracteriza por la limitante adaptación mental al medio, debido a su poca capacidad de razonar sobre realidades concretas y la base de posibilidades teóricas, considerar situaciones hipotéticas y pensar sobre ellas, necesarias para un pensamiento lógico-matemático a un nivel más abstracto. En este sentido es de gran utilidad que el alumno fortalezca este pensamiento, ya que le dará las herramientas necesarias para poder comprender conceptos y procesar la información para así resolver los problemas que le presenten, mejorando su adaptación mental y social, construyendo su propio conocimiento, además de llevar una vida más productiva y estable.

Ante estas características, Begona, Mercado y García (2015), sugieren que “La realización de una intervención temprana que influya en la modificación de patrones cognitivos puede mejorar el aprendizaje y como consecuencia se producirá un mayor rendimiento escolar y un mejor funcionamiento social” (p.369). Es por ello que se ha decidido crear un programa de intervención donde se utilice el juego, ya que según Piaget (1991), las formas que sirven para organizar los conocimientos no son sólo innatas sino también aprendidas a través del desarrollo de las capacidades lógicas-matemáticas y de su interacción con la realidad y el juego, representa una construcción activa del conocimiento en su realidad.

Capítulo IV

El Juego en la intervención

El juego tuvo sus orígenes en Grecia y actualmente es reconocido y utilizado alrededor del mundo para aprender, ya que éste no toma en cuenta razas, credos o ideologías. Dentro de las estrategias educativas resulta ser un elemento primordial para facilitar el aprendizaje y se define como "conjunto de actividades agradables, cortas, diversas, con reglas que permiten el fortalecimiento de valores, fomentan el compañerismo para compartir ideas, conocimientos, inquietudes y facilita el esfuerzo para internalizar los conocimientos de manera significativa" (Minerva, 2002) En todas sus formas, posee la ventaja de proporcionar diversión y placer. Piers y Landau (1980, como se citó en Moyles, 1990) afirman que “desarrolla la creatividad, competencia intelectual, fortaleza emocional, estabilidad y sentimientos de júbilo y placer”. De manera que el juego infantil llama la atención, en ocasiones, como delicado y encantador, como alborotador y turbulento, ingenioso o tan solo tonto y molesto cuando se imitan los actos y actitudes de los adultos.

Entre los beneficios educativos, contribuye no sólo al desarrollo físico y social del niño, sino también facilita el avance motor e intelectual, mejorando su metacognición, un pilar básico en la formación del adolescente. Como medio educativo, el juego ayuda al individuo a adaptarse a diversas situaciones en la vida real. Desde el punto de vista biológico y psicológico, los juegos enseñan a tomar decisiones, a luchar por un objetivo, aceptar la derrota o lograr el éxito con respeto, este ayuda a comprender, penetrar y captar el mundo circundante, formas, sentimientos (Vivas & Guevara, 2003).

Desde el enfoque constructivista de Piaget (1991), del cual está basado este trabajo se describe la importancia que tiene los juegos en la evolución cognitiva, siendo un modo para que el niño o adolescente construya su mundo. Es un conocimiento activo que refleja la etapa en la que se encuentra el niño:

- *El juego de ejercicio*, realizada por el niño que se encuentra en el estadio I y II de la etapa sensorio-motriz. Su ejecución se centra al principio en el propio cuerpo siendo un simple funcionamiento por placer. En este tipo de juegos la comprensión

del mundo se crea mediante la coordinación de experiencias con sus deseos de satisfacción y al ser poco estructurales no se requiere un pensamiento.

- *El juego simbólico*, aparece en la etapa pre-operacional, el empleo del símbolos, propio del lenguaje socializado, es lo que caracteriza este tipo de juegos, puesto que implica la representación de un objeto ausente, siendo esta la comparación entre un elemento dado y un elemento imaginado y una representación ficticia ya que dicha comparación consiste en una asimilación deformante. Retomando el ejemplo del niño y el juego con la caja, este al imaginar que es un carro, está fortaleciendo desarrollando la capacidad representativa ya que hace una comparación entre la caja y el carro por lo que se satisface con una ficción, ya que el lazo entre el significante y el significado es totalmente subjetivo.
- *El juego de reglas*, conforme el niño va adquiriendo un pensamiento más colectivo y menos egocéntrico se va diluyendo el simbolismo y empieza a crear formas regularizadas en las actividades adaptándose a la idea de “obligación” que supone una interacción social de por lo menos dos personas. En este tipo de juegos Piaget distingue dos tipos: las reglas transmitidas, derivadas del contexto social “reguladas por un código transmitido de generación en generación” (p.196) y las reglas espontaneas el cual pueden ser de ejercicio o simbólicos que se vuelven colectivos y se crean convenios improvisados en el momento del juego, existe un equilibrio sutil entre la asimilación del Yo y la vida social que también hay satisfacción sensorio-motora o intelectual y además tiende a la victoria del individuo sobre los demás en una moral del honor. Para Piaget (1991) este tipo de juegos “marca el debilitamiento del juego infantil y al paso del juego propiamente del adulto, que no es más que la ficción vital del pensamiento en la medida en que el individuo está socializando” (p. 227).

La importancia de esta estrategia radica en que no se debe enfatizar en el aprendizaje memorístico de hechos o conceptos, sino en la creación de un entorno que estimule a los alumnos a construir su propio conocimiento, dentro del cual el profesorado pueda conducir al alumno progresivamente hacia niveles superiores de independencia, autonomía y capacidad para aprender, en un contexto de colaboración y sentido comunitario que respaldará y acentuará todas las adquisiciones. Si se quiere implementar esta perspectiva a la intervención de los

alumnos con aptitudes sobresalientes o Bajo Rendimiento Intelectual, es preciso tomar a la metacognición como punto de referencia.

Si esta perspectiva se implementa en la intervención a los adolescentes con Bajo Rendimiento intelectual, puede considerarse que al aumentar su metacognición, tendrán la oportunidad mejorar su adaptación mental al medio, construyendo sus propias relaciones en sus estructuras cognitivas del pensamiento formal. Por ello es necesario planificar didácticas que le permita interaccionar con objetos reales, ofreciendo al alumno la oportunidad de variar y enriquecer sus experiencias, concentrar su voluntad y su inteligencia, conocer sus limitaciones y potencialidades para la realización de determinadas actividades y facilitando la integración al medio que lo rodea (Minerva, 2002).

Capítulo V

Método

Planteamiento del problema

La Educación Especial, es una modalidad del Sistema Nacional Educativo que se encarga de intervenir en niños y jóvenes que tienen necesidades educativas especiales, es decir, alumnos que presentan dificultad para alcanzar con éxito conductas básicas exigidas por el grupo social y cultural, con la intención de potencializar habilidades que favorezcan los estados de productividad. Dicha modalidad ha propiciado la unión con el sistema educativo regular con la intención de mejorar sus servicios y ampliar su cobertura a poblaciones que difícilmente tenían acceso a la educación (SEP, 2016). Sin embargo, aún persisten ciertas problemáticas, como la escasa atención a los alumnos con un Bajo Rendimiento Intelectual.

Debido a sus características poco observables, estos alumnos son ignorados o mal diagnosticados dentro del aula, además de las limitaciones en recursos y personal especializado hacen difícil contar con programas de detección y atención tempranas de este tipo de condiciones, así como de estadísticas precisas sobre su prevalencia. De hecho, el sistema de la Asociación Americana de Discapacidades Intelectuales y el Desarrollo (AAIDD) hace alusión a la necesidad de dar respuesta a las necesidades de la gran olvidada” refiriéndose a las personas con Inteligencia Limite (Escribano, 2017).

Con respecto a las características de esta población, diversas investigaciones han coincidido en que la primera característica es el tener un Coeficiente Intelectual Límite y que la primera observación que pueden tener los padres de familia y autoridades educativas, es el bajo desempeño escolar y la poca adaptación social (Medina, Mercado y García, 2015). Ante esta problemática, algunos autores como León y Salvador (2017) encontraron que las deficiencias cognitivas, como la falta de razonamiento abstracto y concreto, interfieren en el proceso de aprendizaje del adolescente. Así también, los alumnos presentan dificultades para poner en práctica los conocimientos adquiridos y resolver problemas cotidianos (Meléndez, 2012).

Esta realidad acarrea como principal consecuencia la estigmatización de esta población quien son catalogados como “flojos”, “problemáticos”, “tontos”, generando dificultades no solo

académicos, sino sociales y emocionales, situando al alumno, principalmente en el adolescente quien se encuentra en la etapa de identidad, en riesgo de fracaso escolar, Por tal motivo su identificación e intervención temprana permitirá cumplir con éxito los objetivos de la educación y así fortalecer e incrementar los factores protectores. A este respecto Begona, Mercado y García (2015) sugieren que “La realización de una intervención temprana que influya en la modificación de patrones cognitivos puede mejorar el aprendizaje y como consecuencia se producirá un mayor rendimiento escolar y un mejor funcionamiento social” (p.369). Una condición necesaria es por tanto, intervenir en esas deficiencias, permitiendo al adolescente fortalecer su pensamiento lógico-matemático a un nivel más abstracto y por ende su rendimiento escolar.

Desde el enfoque constructivista, Piaget (1981) menciona que las formas que sirven para organizar los conocimientos o el aprendizaje, no son sólo innatas sino también aprendidas a través del desarrollo de las capacidades lógicas-matemáticas, su madurez y su interacción con la realidad, permitiendo desarrollar la inteligencia, definida por él como: “un sistema de operaciones que interactúan constantemente con el medio, convirtiéndose en la adaptación mental más avanzada y el instrumento necesario de intercambio entre el sujeto y el universo” (p.60), es decir, para mejorar la adaptación mental o la inteligencia se requiere que el adolescente aumente su capacidad de razonar sobre realidades concretas y abstractas una construcción interna que el propio sujeto hace con base a la acción con su entorno, estimulando así, el pensamiento lógico-matemático.

De forma general se entiende como lógico al pensamiento que es correcto, es decir, el pensamiento que garantiza que el conocimiento mediato que proporciona se ajusta a lo real, basado en procedimientos Andonegui (2004). Cuando estas formas lógicas del pensamiento se utilizan dentro de la rama de las matemáticas, para resolver ejercicios y problemas de acuerdo a procedimientos establecidos de una forma correcta, entonces se le llama pensamiento lógico-matemático (García, 2008). Por lo que es clave para el desarrollo de la inteligencia y es fundamental para el bienestar principalmente de los adolescentes con BRI y su desarrollo, ya que este tipo de pensamiento va mucho más allá de las capacidades numéricas, aporta importantes beneficios como la capacidad de entender conceptos y establecer relaciones basadas en la lógica de forma esquemática y técnica. Implica la capacidad de utilizar de manera casi natural el cálculo, las cuantificaciones, proposiciones o hipótesis. Aunque todos nacen con la capacidad de

desarrollar este tipo de pensamiento, las diferentes capacidades van a depender de la estimulación recibida (García, 2008).

En el caso de los alumnos con Bajo Rendimiento Intelectual, Begona, Mercado y García (2015) Sugieren “La realización de una intervención temprana que influya en la modificación de patrones cognitivos puede mejorar el aprendizaje y como consecuencia se producirá un mayor rendimiento escolar y un mejor funcionamiento social” (p.369). En este sentido, al fortalecer este pensamiento, en el alumno con Bajo Rendimiento Intelectual, le dará las herramientas necesarias para poder comprender conceptos y procesar la información para así resolver los problemas que le presenten, mejorando su adaptación mental y social.

Por otra parte, utilizar actividades lúdicas como una estrategia de intervención, puede permitir al adolescente construir su propio conocimiento, y al interactuar con su entorno, fortalecerá el pensamiento lógico-matemático a un nivel más abstracto Piaget (1991). Es por ello que se planteó la siguiente pregunta de investigación:

¿En qué medida un programa psicoeducativo que fortalece el pensamiento lógico-matemático mejora la inteligencia a través de actividades lúdicas, en adolescentes de segundo y tercer grado de secundaria con bajo Rendimiento Intelectual?

Objetivo General

Fortalecer el pensamiento lógico-matemático en adolescentes con Bajo Rendimiento Intelectual a través de actividades lúdicas, con la finalidad de mejorar la inteligencia.

Definición de variables

Conceptual

- *Pensamiento Lógico-Matemático*: Construcción interna que el propio sujeto hace en base a la acción con el objeto (Piaget, 2001).

- *Inteligencia:* Un sistema de operaciones que interactúan constantemente con el medio, convirtiéndose en la adaptación mental más avanzada y el instrumento necesario de intercambio entre el sujeto y el universo. (Piaget, 1981)

Operacional

- *Fortalecimiento de Pensamiento Lógico-Matemático:* Puntuación de evaluación formativa, diseñada para fines de este trabajo, donde 5 = fase de consolidación, 3=fase de adquisición y 1= fase de iniciación.
- *Mejora de la Inteligencia:* Puntuaciones del test de Matrices Progresivas Avanzadas de Raven, en su versión adaptada para población mexicana (Méndez y Palacios, 2001).

Tipo de investigación y Diseño

Es una investigación de campo aplicada (Zorrilla,1993), con un diseño Pretest-Postest (Campbell & Stanley, 1995).

Contexto

El estudio se llevó a cabo en una escuela secundaria pública de la delegación Iztapalapa, en la Ciudad de México, la cual está ubicada al oriente de la ciudad, delegación que tiene una extensión de 116.67 Km², siendo esto el 7.5% de la superficie de la ciudad y su altura del mar es de 2240m. Las delegaciones con las cuales colinda son: al norte con Iztacalco, al sur con Xochimilco y Tlahúac, al poniente con Coyoacán y al oriente con el Estado de México. De acuerdo con los datos censales, es la delegación más poblada del país. Además es el lugar donde residen más personas inmigrantes provenientes de distintos estados de la republica (Instituto Nacional de Estadística y Geografía- INEGI-, 2006). El Instituto Ciudadano de Estudios sobre Inseguridad (2009) indicó que la delegación Iztapalapa es el segundo lugar con los niveles más altos en delitos en la Ciudad de México, además señalaron que las posibles causas que generan

estos índices son la marginación y la concentración importante de unidades de manufactura, comercio y de servicio, los que hace que diariamente haya un ingreso de más de 2 millones de personas que acude a los centros de trabajo, escuelas, comercios y espacios culturales.

Escenario

El estudio se llevó a cabo en una escuela secundaria pública de la delegación Iztapalapa, en la Ciudad de México. La estructura de la escuela está constituida por tres edificios de tres plantas cada uno, un patio. Cuenta con un aula de computación, una biblioteca, salón de usos múltiples, dirección, los baños de mujeres y hombres y la cooperativa.

El espacio brindado para la aplicación del programa fue en un salón de clases en la tercera planta, el cual no se utilizaba, contaba con bancas suficientes para los participantes, además de un pizarrón para marcador.

Fase 1. Planificación del programa

Objetivo Particular

Determinar a la población con NEE que se intervendrá.

Determinar los requerimientos de la población con NEE seleccionada

Participantes

Se contó con la participación de 9 alumnos, 55.5% mujeres y 45.5% hombres, 88.8% que cursaban tercer grado de secundaria y 12.2% de segundo grado, cuyas edades oscilan en una media de 13.8 años de edad ($SD=3.31$). Cabe destacar que los nombres utilizados serán ficticios por cuestiones de ética (Véase Tabla 1).

Tabla 1
Participantes del programa

Nombre	Edad	Grado
Alin	14	Tercero
Fernanda	14	Tercero
Jair	15	Tercero
Julio	13	Tercero
Sergio	14	Tercero
Lorena	14	Tercero
Pamela	14	Tercero
Yoel	14	Tercero
Laura	13	Segundo

Herramientas

Para este trabajo se utilizó el Test de Escala avanzada de Matrices Progresivas de Raven (1996). Esta prueba fue diseñada para evaluar habilidades intelectuales como el razonamiento analógico, la percepción y la capacidad de abstracción de sujetos de 12 a 65 años. De acuerdo a este test, se evalúa a los sujetos de acuerdo al rango en que se encuentra según al resultado que obtengan:

	Descripción
Rango I	Intelectualmente superior (igual o mayor al percentil 95)
Rango II	Superior al término medio (igual o mayor al percentil 75)
Rango III	Término medio (entre los percentiles 25 y 75)
	III + si sobrepasa el percentil 50
	III – si es inferior al percentil 50
Rango IV	Inferior al término medio (igual o menor al percentil 25)

	IV – si es igual o menor al percentil 10
Rango V	Intelectualmente deficiente (menor al percentil 5)

Procedimiento

1. La evaluación exploratoria para la identificación de los alumnos con necesidades educativas especiales fue realizada previamente por alumnos de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, bajo la supervisión de la Dra. Gabriela Ordaz Villegas a través de diversos instrumentos de evaluación, entre ellos, Prueba de Matrices Progresivas de Raven (1996).
2. Se analizó los resultados, así como sus áreas de oportunidad.
3. Se reportó a la orientadora de la escuela sobre las Necesidades Específicas encontradas en las evaluaciones exploratorias, así como sus áreas de oportunidad.
4. Al final se seleccionó a la población con Bajo Rendimiento Intelectual.

Resultados

Se identificó que el total de los alumnos evaluados, 88.8% que cursaban tercer grado de secundaria y 12.2% de segundo grado, presentaban Bajo Rendimiento Intelectual, identificados con la siguiente puntuación en el test Matrices Progresivas de Raven (Véase en Tabla 2).

Tabla 2

Puntuaciones de la prueba de Raven, grado y edad

Nombre	Edad	Grado	Puntuación Raven
Alin	14	Tercero	7
Fernanda	14	Tercero	8
Jair	15	Tercero	10
Julio	13	Tercero	13
Sergio	14	Tercero	17
Lorena	14	Tercero	11
Pamela	14	Tercero	6

Yoel	14	Tercero	10
Laura	13	Segundo	11

Ante estos resultados, fue necesario desarrollar un programa de intervención que permitiera mejorar la inteligencia.

Fase 2. Instrumentación de un programa de Intervención

Objetivo particular

Planificar un programa de intervención que se adapte a las necesidades de los alumnos con BRI.

Instrumentar el programa con los alumnos identificados con BRI que permita fortalecer el pensamiento lógico-matemático, según su etapa de desarrollo.

Herramientas

Programa de intervención. Con base a las necesidades identificadas en los alumnos con BRI, se diseñó el programa basado en la teoría de desarrollo de Piaget (1978) utilizando las cuatro habilidades lógicas-matemáticas de la etapa formal: Lógica Proposicional, Razonamiento Científico, Razonamiento Combinatorio y Razonamiento Probabilístico, dividido en 10 sesiones, dos veces por semana (ver tabla 3).

Tabla 3
Organización de las sesiones y sus áreas.

	Área	Descripción
Sesión 1 Palillos Lógicos	Razonamiento Combinatorio	Al observar la ecuación, el alumno se obliga a buscar una estrategia para ver todas las posibilidades de crear un equilibrio de la ecuación, deshecha las que resulta posibles errores para después dar una o más respuestas correctas constituyendo, a lo que llama Roa (2000), una multiplicidad de cambio de orden.
	Lógica Proposicional	El alumno reflexiona sobre la validez de las premisas y a partir de ello saca su conclusión de forma lógica de cada una de las cinco ecuaciones.
Sesión 2	Razonamiento	Se fomenta en el alumno la inducción a las leyes

Trucos de Magia	Científico	explicativas, donde empieza a cuestionarse a partir de problemáticas, en busca de su solución, lo cual conlleva a la observación, la formulación de hipótesis para después comprobarlas, logrando una interpretación más objetiva.
	Lógica Proposicional	El alumno reflexiona y crea una sentencia simple con valor asociado, verdadero o falso, y extraer una conclusión a partir de las premisas presentadas.
Sesión 3 Domino	Razonamiento Combinatorio	Se motiva al alumno a realiza una estadística o combinación a partir de las 28 fichas del domino.
	Razonamiento Probabilístico	Los alumnos al ir fortaleciendo el razonamiento combinatorio, empiezan a desarrollar en su mente probabilidades y estadísticas creadas al ver qué juego tiran sus contrincantes, para inferir los números y cuántas fichas de cada uno tienen sus oponentes, y a partir de ahí decidir sus siguientes movimientos.
Sesión 4 Rompecabezas de domino	Razonamiento combinatorio	Se motiva al alumno a crear estrategias que le permitan concebir todas las posibilidades y combinaciones que puedan existir en el tablero para después solucionar el rompecabezas.
	Razonamiento probabilístico	El alumno incorpora incorporar cambios en el grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que se adquiere nueva información.
Sesión 5 Torre de Hanoi	Lógica Proposicional	El alumno representa una proposición a partir de las premisas algebraicas, verificando su veracidad
Sesión 6 Macramé	Razonamiento Científico	El alumno manipula los factores y comprender la idea básica del método experimental, es decir, cambiar un factor a la vez.
	Razonamiento Combinatorio	Se motiva al alumno a integrar dos operaciones, seriación y correspondencia, en una sola operación como algo necesario para obtener todas las combinaciones posibles de los elementos tomados.
Sesión 7 Ajedrez	Razonamiento Científico	Se motiva a alumno a elaborar planes, analizar la movida de su contrincante, probando simultánea o sucesivamente varias de las hipótesis planteadas, que le llevará a dilucidar las verdaderas consecuencias de las acciones que ha efectuado sobre la realidad.
	Razonamiento Probabilístico	El alumno, intentará aumentar su probabilidad de ganar, considerando todas las opciones a la par de intentar predecir las situaciones que puedan resultar aleatorias, en este caso los movimientos de su contrincante y con ello seguir cambiando su

		estrategia.
Sesión 8	Razonamiento	El alumno observa pone en práctica sus estrategias. Observa y prevé las posibles fallas y así crear nuevas estrategias combinatorias.
	Combinatorio	
Solitario Chino	Razonamiento	Lleva al alumno a plantearse hipótesis, para decidir cuáles de ellas someter a prueba y luego ver si se confirma o no.
	Científico	
Sesión 9	Lógica	El alumno al manipular el cubo, desarrolla conclusiones a partir de sus conocimientos previos
	Proposicional	
Cubo de Rubik	Razonamiento	Al realizar una inferencia lógica, el alumno se obliga a crear hipótesis y comprobarlas.
	Científico	
Sesión 10	Las cuatro áreas lógicas	El alumno retroalimenta los conocimientos previos de cada una de las áreas, además de interactuar de forma física y social, reforzando el pensamiento lógico-matemático
Grandes juegos		

Actividades de Rompe-hielo. Se refiere a las actividades lúdicas al inicio de la sesión, el cual permite desarrollar un ambiente con mayor confianza entre los alumnos, así como la fomentación de respeto entre los mismos.

Evaluación formativa. Diseñada para los fines de este trabajo, el cual evalúa el nivel de desempeño del pensamiento lógico-matemático, de acuerdo a los criterios de valoración de la rúbrica: 5 (Fase de Adquisición), 3 (Fase en Proceso) y 1 (Fase de iniciación).

Procedimiento

1. Se planificó el programa y el diseño de las actividades, donde se recolectó y organizó información relevante para proponer las actividades, de acuerdo a las características de desarrollo que marca la teoría. Se estructuró la secuencia didáctica de los contenidos, se elaboraron las cartas descriptivas de cada una de las actividades y posteriormente, se prepararon los instrumentos didácticos, así como las rubricas.

2. Posteriormente se realizó una reunión en la escuela con los padres de familia de los alumnos identificados, exponiendo la importancia de favorecer sus capacidades a través de un programa psicoeducativo acorde a sus necesidades educativas. Al término de la reunión se solicitó su consentimiento informado para que sus hijos participaran en las actividades propuestas, así como el asentimiento de los alumnos.
3. Se instrumentó el programa, llamado “LudoMat”, el cual se dividió en 10 sesiones, de 50 minutos cada una, dos veces por semana. Por cuestión de horarios manejados por la escuela, el programa se realizó de forma mixta, por lo que el programa fue aplicado de la misma forma para los alumnos de segundo y tercer grado, acompañados por la orientadora de la escuela al iniciar y finalizar la sesión.
4. Para ponderar el nivel de desempeño, al final de cada sesión, los alumnos contestaban una evaluación formativa, el cual fue evaluado bajo los criterios de las rubricas.
5. Al finalizar el programa se realizó la evaluación sumativa a través de la aplicación en donde se aplicó nuevamente la prueba de matrices Progresivas Avanzadas de Raven, realizada en una sesión. De igual forma se realizó una evaluación social, donde los alumnos describieron su utilidad e impacto en los diferentes ámbitos de su vida (social, escolar, personal etc.).

Resultados

Los resultados del programa se presentan a continuación en dos partes. La primera se refiere a la evaluación formativa de cada sesión, tanto de forma general como individual. Por otra parte, se presenta los resultados de la evaluación sumativa a través de la evaluación de habilidades intelectuales.

Cada sesión tenía como objetivo evaluar una o dos áreas del desempeño de pensamiento abstracto, como es: lógica proposicional, razonamiento científico, razonamiento combinatorio y razonamiento probabilístico. Cabe recordar que se utilizó una evaluación formativa como instrumento de medición, el cual evalúa el nivel de desempeño de cada área del pensamiento, de

acuerdo a los criterios de valoración de la rúbrica: 1 (Fase inicial), 3 (Fase de adquisición) y 5 (Fase de consolidación). Además se cambiaron los nombres de los integrantes con el propósito de mantener la confidencialidad de los alumnos beneficiarios del programa.

Sesión 1 Palillos Lógicos.

La actividad de la sesión 1 fue “los palillos lógicos” Una actividad donde los alumnos debían dar soluciones a una serie de acertijos matemáticos moviendo o quitando palillos de madera, esto según la instrucción dada. Por ejemplo, uno de los ejercicios como se puede ver en la Figura 1, se encuentra la ecuación de forma ilógica y los alumnos al mover un palillo debían dar orden y coherencia a la ecuación.

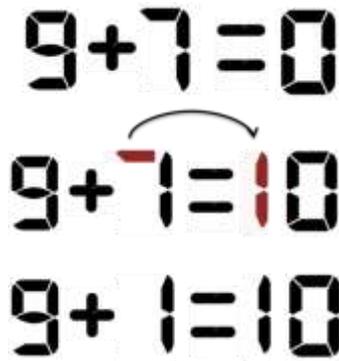


Figura 1. Ejemplo de ejercicio de palillos lógicos

Resultados generales del razonamiento combinatorio. Como se observa en la Figura 2, 6 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en fase inicial, lo que significa que los acertijos no se resolvieron o se resolvieron de forma azarosa, sin intentar crear algún procedimiento. En el caso de los 3 alumnos que lograron estar en la fase de adquisición, intentaban crear un procedimiento, pero terminaban manipulando el material de forma azarosa, sin concebir todas las posibilidades. Por tanto, ningún alumno logró un nivel de desempeño en la fase de consolidación.

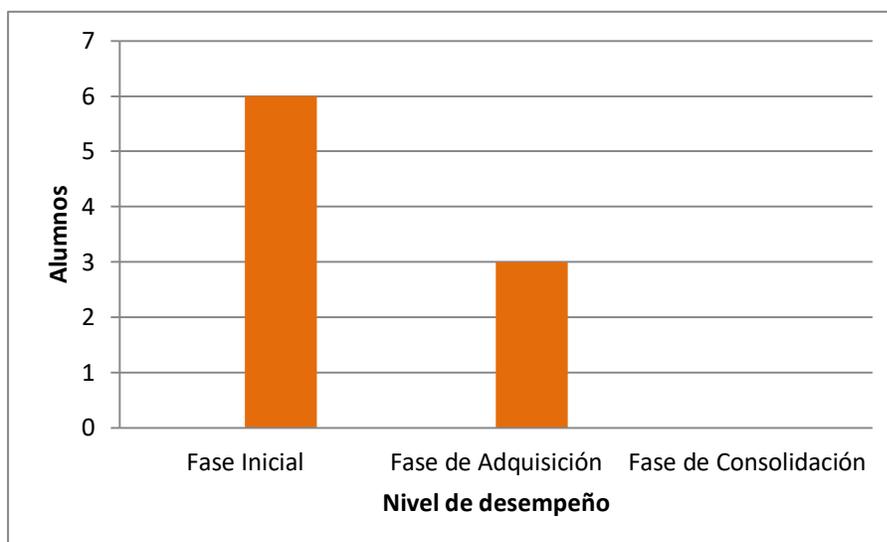


Figura 2. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 1 en el área de razonamiento combinatorio.

Resultados individuales en razonamiento combinatorio. La Tabla 4 presenta las observaciones y el nivel de desempeño de esta primera sesión de forma individual. Una característica predominante es la poca socialización, prefiriendo hacer la actividad de forma individual. En el caso de Fernanda, Julio, Jair y Pamela que además de la poca socialización con sus compañeros había poca participación durante la sesión, en la evaluación, solo manipulaban el material y repetían los movimientos sin concebir alguna estrategia, pese a la ayuda que se les brindaba, dejando la hoja de evaluación en blanco. Por otro lado, Lorena y Yoel, tenían una participación más activa, intentaban resolver el acertijo, movían los palillos de forma azarosa, repitiendo algunos movimientos sin observar antes, sin lograr resultados favorables. En el caso de Alin, Laura y Sergio en un principio buscaban las respuestas de forma azarosa, eran más perseverantes, de igual forma se les apoyo y lograron crear un procedimiento moviendo palillo por palillo, pero sin ver todas las respuestas.

Tabla 4
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 1 en Rc.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Adquisición	Se presentó entusiasta y participativa
	Intenta crear procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades.	Se le motivó a buscar una estrategia y lo hace, pero no encuentra todas las soluciones.
Fernanda	Fase Inicial	Hay poca comunicación con sus compañeros.
	Resuelve por azar. No intenta hacer algún procedimiento.	Trabaja de forma individual
		Manipula el material para buscar la respuesta, se le dificulta buscar una estrategia.
		Repite los movimientos Deja su evaluación en blanco
Jair	Fase Inicial	Intenta hacer el ejercicio en equipo, pero termina haciéndolo individualmente.
	Resuelve por azar. No intenta hacer algún procedimiento.	Solo manipula el material y repite los movimientos. No hay estrategia clara
Julio	Fase Inicial	Habla poco y bajito
	Resuelve por azar. No intenta hacer algún procedimiento.	Repite los movimientos No busca otras soluciones Deja su evaluación en blanco
Laura	Fase de Adquisición	Llegó algo tímida y callada, pero participativa
	Intenta crear procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades.	Prefirió trabajar individualmente Al inicio solo manipulaba el material, se le apoyo para pensar en un procedimiento y los hizo.
Lorena	Fase Inicial	poco sociable, pero participativa
	Resuelve por azar. No intenta hacer algún procedimiento.	Solo manipula el material Se le dificulta hacer un procedimiento, aún con ayuda
		Llegó algo apática y poco participativa.
		No intenta buscar las posibilidades para resolver el acertijo
Pamela	Fase Inicial	Repite los movimientos
	Resuelve por azar. No intenta hacer algún procedimiento.	Deja su evaluación en blanco
Sergio	Fase de Adquisición	Inicia con un procedimiento, mueve un palillo para verificar todos los números que puede formar.
	Intenta crear procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades.	Resuelve 1 de 5
Yoel	Fase Inicial	Es callado, pero participativo
	Resuelve por azar. No intenta hacer algún procedimiento.	Observa el acertijo antes de manipular el palillo. No repite los movimientos, pero desconoce que procedimiento utilizar, aún con ayuda

Como se puede observar en el ejemplo de evaluación formativa en el área Rc, de la sesión 1 de la Figura 3, el alumno logró resolver solo una ecuación, pero al no concebir más de un resultado o una posibilidad, fue considerando con un nivel de desempeño en la fase de Adquisición. En el caso de los alumnos que tuvieron un nivel de desempeño en la fase inicial, dejaron su hoja de evaluación en blanco.

OPERACIÓN	RESULTADO
$6+4=4$	$0+4=4$

Figura 3. Ejemplo de evaluación formativa en razonamiento combinatorio, sesión 1.

Resultados generales de la lógica proposicional. En la Figura 4 se puede apreciar que 4 alumnos se encontraron en la fase inicial de esta primera sesión, lo que significa, siguiendo la rúbrica (Véase en anexo 3), el alumno solo manipula el material, sin reflexionar su relación. Por otro lado, 5 alumnos se ubicaron en la fase de adquisición, ellos empiezan a distinguir las respuestas incorrectas, pero tiene dificultad de interpretar y desarrollar razonamientos correctos. Ningún alumno logró consolidar el área de lógica Proposicional.

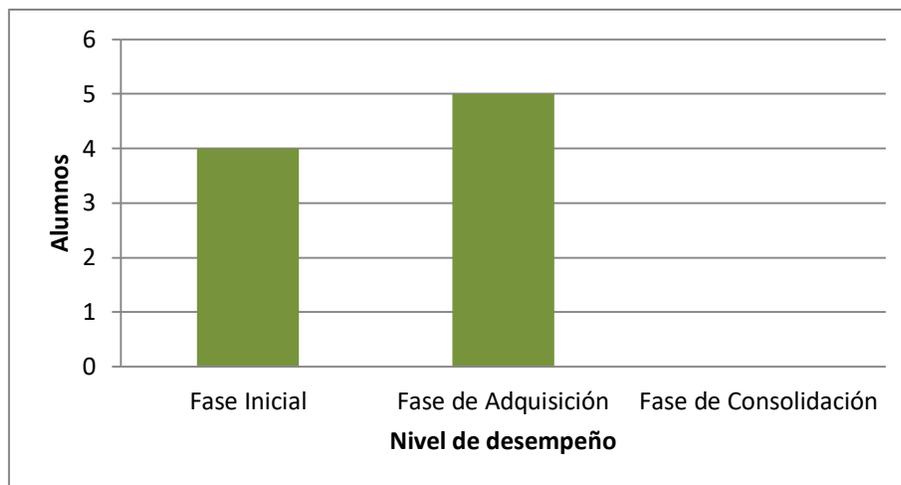


Figura 4. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 1 en el área de lógica Proposicional.

Resultados individuales en el área de lógica proposicional. Como se puede observar en la Tabla 5, los alumnos presentaron dificultad en reflexionar sobre las premisas, en el caso de Fernanda, Jair y Pamela solo manipularon el material. En el caso de Julio se le dificultó comprender la premisa de mover un solo palillo, para sacar su conclusión. En los cuatro casos al no lograr hacer la actividad, abandonaban la actividad dejando en blanco su hoja de evaluación. Por otra parte Lorena y Yoel, Alin, Laura y Sergio, intentaban resolverlo, basándose en la veracidad más que en la validez del argumento.

Tabla 5
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 1 en Lp.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Responde la ecuación, pero sin seguir las premisas Requiere ayuda para reflexionar sobre la premisa
Fernanda	Fase Inicial Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	No intenta resolver algún acertijo Mueve más palillos de los indicados. Dejó la evaluación en blanco
Jair	Fase Inicial El alumno no intenta reflexionar, se basa en la veracidad, más que en la validez.	Solo manipula los palillos Dejó la evaluación en blanco
Julio	Fase Inicial El alumno no intenta reflexionar.	Prefiere hacerlo de forma individual Intenta resolver un acertijo, pero hace más movimientos de los pedidos. Se le recordaba constantemente la indicación. Dejó la evaluación en blanco
Laura	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Es perseverante para resolver los acertijos. Observa los palillos e intenta comprobar su respuesta. Respondió solo 1 de 5.
Lorena	Fase de Adquisición El alumno reflexiona sobre las premisas, pero tiene dificultad para concluir.	Intenta resolver los acertijos, pero de forma individual. Intenta mover un palillo a la vez No logra resolver alguno
Pamela	Fase Inicial El alumno no intenta reflexionar, se basa en la veracidad, más que en la validez.	Manipula el material, No logra resolver algún acertijo. Deja la hoja de evaluación en blanco.
Sergio	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Participa con sus compañeros para resolverlo Manipula el material para buscar la respuesta. Se le dificulta resolver todas las ecuaciones
Yoel	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez del argumento.	Observa e intenta seguir las premisas, pero no resuelve las ecuaciones

En la Figura 5 se puede observar un ejemplo de la evaluación en lógica proposicional de la primera sesión. En el caso 1, el alumno realizó solo una de las cinco ecuaciones, su respuesta es correcta, pero invalida, debido a la falta de validez de la información que la precede, ya que solo debía mover un palillo para equilibrar la ecuación, por tanto tuvo un nivel de desempeño en la fase inicial. En el caso 2 solo resolvió una de las cinco ecuaciones, de igual forma aún presenta dificultad en validar el argumento, lo cual se observa a través de ausencia de ecuaciones resultas para argumentar su respuesta y su nivel de desempeño fue en la fase de adquisición.

Caso 1

$$6+4=4 \quad | \quad 10$$

Caso 2

$$\begin{array}{|l} 6+4=4 \\ 5+9=9 \end{array} \quad | \quad \begin{array}{l} 0+4=4 \\ \end{array}$$

Figura 5. Ejemplo de evaluación en la sesión 1 de lógica Proposicional

Sesión 2 Trucos de Magia

Uno de los trucos de magia que se utilizó en esta sesión fue el “interminable número 1089” (Muñoz, 2007). En una caja se colocan varias hojas con cantidades de 3 dígitos que no tengan números en el primer y último dígito (Por ejemplo 111, 242, 010). En un papelito el aplicador anotó la cantidad de 1089, se le dio a un espectador, pidiéndole aún no abrirlo, después a otro espectador, se le pidió seguir la siguiente instrucción:

1. Saca 3 papelitos de la caja y muéstralo al público, con el objetivo de que vean que las cantidades no se repiten (ejemplo 236, 345, 876)
2. Escribe una de las cantidades en el pizarrón (eligió 236)
3. Invierte el primer y el último dígito (de 236 a 632)
4. Resta la mayor cantidad con el de menor cantidad ($632-236= 396$)
5. Vuelve a invertir el primer y el último dígito del resultado (693)
6. Súmalo con el resultado original ($693+236=1089$)

La cantidad que se predijo en un principio (1089), resultó correcta. La actividad se repitió con otras cantidades de la caja.

Una vez realizado esto se le dio las siguientes premisas:

Premisa 1: Siguiendo el procedimiento, todas las cantidades de 3 dígitos dan 1089

Premisa 2: 242 es una cantidad de 3 dígitos

Por tanto siguiendo el procedimiento con ¿121 el resultado es 1089? ¿Qué conclusión sacas?

Resultados generales razonamiento científico Como se puede observar en la Figura 6, 2 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase inicial, lo que significa que no desarrollaron alguna hipótesis, ni la comprobaron. Por otro lado, se observa que 5 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, es decir, generaron hipótesis, hubo una justificación, pero omitieron la comprobación en al menos uno de los trucos. En el caso de los 2 alumnos que tuvieron un nivel de desempeño en fase de consolidación, lograron ser capaces de generar hipótesis, justificar y comprobarlo, aún si su hipótesis se rechazaba.

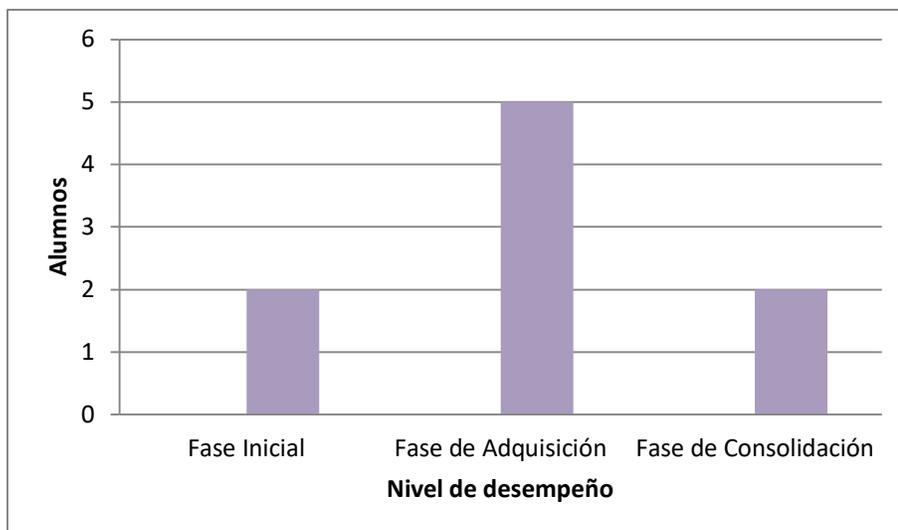


Figura 6. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 2 en el área de razonamiento científico.

Resultados individuales de razonamiento científico. En esta actividad, a través de la evaluación social manifestaron los alumnos que les agrado la actividad, además hubo más participación e interés por conocer la explicación lógica de los truco. En las observaciones de la Tabla 6, se puede apreciar que hubo alumnos que no intentaron realizar o explicar hipótesis, tal es el caso de Julio y Pamela, quienes se encontraban atentos a la actividad, pero su participación fue casi nula, aun cuando se les proporcionaba ayuda, dejando su evaluación en blanco, Por otro lado se puede observar que la mayor parte de los alumnos se les dificultó comprobar las hipótesis que realizaban, dando por hecho su propia opinión, así como justificar su respuesta, por ejemplo Fernanda quien había dado algunas hipótesis y al pedirle comprobarlo, la cambiaba al instante. Con respecto a Lorena, Laura, Jair y Yoel, quienes también generaban hipótesis, intentaban explicarlo solo si se les pedía y si al comprobarlo no resultaba, intentaban generar otras hipótesis. Ali en un principio solo generaba hipótesis, al pedirle que las justificara, los hacía, preguntando constantemente si era correcto o no y en su evaluación logro realizarlo de forma sistemática. Un caso particular fue el de Sergio, quien antes de dar una afirmación, escuchaba las hipótesis de sus compañeros, pedía repetir el truco y al tener la respuesta, justificaba y comprobaba.

Tabla 6
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 2 en Rfc.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Participativa y entusiasta, se observa más sociable con Sergio Realiza varias hipótesis sobre el truco. Justifica y comprueba porque sus compañeros están incorrectos. Se le debe pedir que comprueben su afirmación. En la evaluación logra argumentar y comprobar su hipótesis.
Fernanda	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Habla poco, pero se mantiene atenta. Da razonamientos como “se la escondió en la parte de atrás de la blusa y la otra está en la mano”. Descarta la idea cuando sus compañeros no están de acuerdo. En la evaluación si los justificó, pero no comprobó.
Jair	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Participativo Genera pocas hipótesis Se le motiva a comprobarla y lo hace Pero en la evaluación, lo omite.
Julio	Fase Inicial No genera ni comprueba hipótesis	Poca participación No intentó explicar algún truco.
Laura	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba.	Poco sociable, temerosa al hablar. Genera hipótesis Tiene dificultad en justificar su respuesta. En la evaluación, justifica las hipótesis, pero no las comprueba
Lorena	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Poco sociable, pero participativa En la actividad de grupo no intentó generar alguna hipótesis. En la evaluación justifica y explica hipótesis, pero no las comprueba
Pamela	Fase Inicial No genera ni comprueba hipótesis	Se observa atenta, pero poco participativa. No intenta buscar las posibilidades para resolver el acertijo Deja la hoja de evaluación en blanco
Sergio	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Participativo y entusiasta, es más sociable con Ali. Observa y escucha antes de responder. Hace varias hipótesis.

		En la evaluación vuelve a repetir el procedimiento.
Yoel	Fase de Adquisición	Participativo y más sociable.
	Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Explica las hipótesis que considera falsas. Genera sus propias hipótesis, pero se le dificulta justificar. En la evaluación justifica y explica hipótesis, pero no las comprueba.

En la Figura 7 se puede observar un ejemplo de los niveles de desempeño en la evaluación formativa del área de razonamiento científico de la sesión 2. En el caso 1, se puede observar que el alumno genera hipótesis pero en las observaciones omitió la comprobación en el primer truco, puesto que le consideró con un nivel de desempeño en fase de adquisición. En el caso 2, el alumno generó una hipótesis, la justificó y en las observaciones realizó comprobaciones, es decir, tuvo un nivel de desempeño en fase de consolidación.

Caso 1

Cuando se pasan las manos hacia atrás con el botón se crea una distracción mediante un movimiento rápido para después recalcar que no hay nada en las manos pero el botón se oculta en la mano, donde presumiblemente se pondrá en la boca para "sacarla"

Caso 2

-Tenga la moneda entre los dedos y al prestar atención a la boca para ver si sale lo cambio de una manera rápida.
-se metió la moneda antes de hacer el truco.

Figura 7. Ejemplo de evaluación en la sesión 2 de razonamiento científico.

Resultados generales en el área de lógica proposicional. Con respecto a los resultados generales en esta segunda sesión en lógica proposicional, se puede observar en la Figura 8, que 2 alumnos se encontraban en la fase inicial, dado que, no lograron reflexionar la relación entre las dos premisas. Por otro lado 6 alumnos lograron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, es decir, empezaron a reflexionar e intentaron comprobar las premisas, pero su afirmación o conclusión no resultó correcta. En el caso del alumno que logró llegar a la fase de consolidación, tuvo la capacidad de reflexionar sobre las premisas y concluir correctamente.

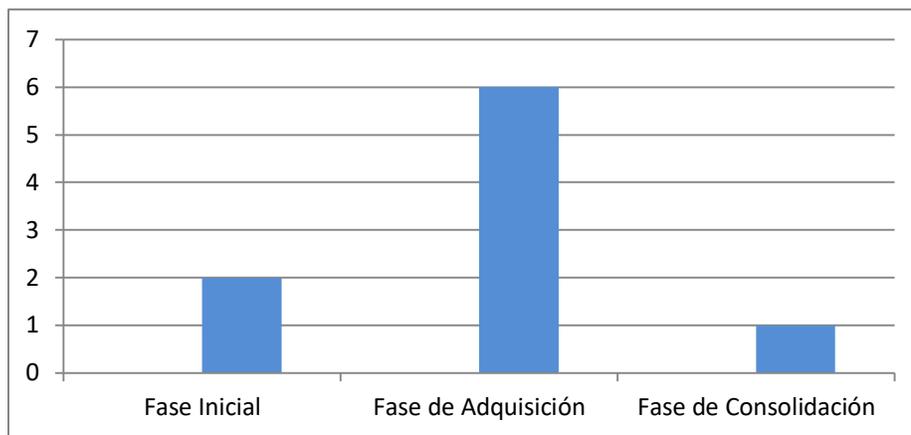


Figura 8. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 2 en el área de lógica Proposicional.

Resultados individuales en lógica proposicional. Como se puede observar en la Tabla 7, en esta segunda sesión hubo mayor interés y participación. Julio aún continúan en la fase inicial, ya que sigue existiendo una dificultad de reflexionar sobre las premisas, aún con apoyo, se le dificultó comprender las premisas. En el caso de Pamela, se podía observar mayor participación, aunque se distraía rayando la mesa constantemente, dejando la hoja de evaluación en blanco, ambos casos tuvieron un nivel de desempeño en fase inicial. Un aspecto predominante en los alumnos que tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición es la inseguridad de sus respuestas, ya que realizaban la comprobación de las premisas, pero terminaban concluyendo la proposición de forma incorrecta, por ejemplo Fernanda, Laura y Yoel. Por otra parte Jair, Alin y Lorena, quienes también estuvieron en la fase de adquisición, comprobaban las premisas y afirmaban correctamente, pero se les dificultaba hacer una conclusión de los trucos. Sergio contaba con

mayor observación y se mantenía perseverante, aunque en un principio tuvo dificultad, comprobó las premisas e inclusive logró descubrir las características de los números en la caja, logrando un nivel de desempeño en la fase de consolidación.

Tabla 7.
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 2 en Lp.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	.Tacha las opciones que no son Se le dificulta formular la conclusión
Fernanda	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Realiza varias pruebas, pero no especifica a que conclusión llegó.
Jair	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Comprobó las premisas Mantén perseverancia en contestar No lograba concluir, solo afirmaba.
Julio	Fase Inicial El alumno no intenta reflexionar.	Solo observa la actividad y a sus compañeros, pero no intenta explicar algún truco. Dejo la hoja en blanco
Laura	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Realiza pruebas para comprobarlas Su conclusión se basa en las opiniones de sus compañeros
Lorena	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Intenta dar alguna premisa y justificarla pero se le dificulta Intenta comprobar el truco de 1089 pero solo afirma no justifica. Preguntaba contantemente sobre sus comprobaciones. Su conclusión es diferente a su afirmación.
Pamela	Fase Inicial El alumno no intenta reflexionar.	Hay interés en la actividad, pero poca participación Comienza a rayar la mesa y no termina la actividad

Sergio	Fase de Consolidación	Es participativo Antes de dar su respuesta, observa el truco. Justifica las premisas incorrectas de sus compañeros y da una explicación correcta. Prueba y concluye correctamente los trucos.
Yoel	Fase de Adquisición	Escucha las premisas de sus compañeros e intenta explicar si son incorrectos, pero sólo si se le pide hacerlo. Intenta verificar la premisa del segundo truco, pero no concluye, solo afirma.

En la Figura 9 se observa un ejemplo de la evaluación en lógica proposicional. En el caso 1, el alumno realizó la conclusión sin verificar la validez. En el caso 2, el alumno reflexionó y su conclusión fue válida.

Caso 1

Que no están todos los números, solo los que tienen números iguales no están.

Caso 2

Que no todos los números están solo los que no tienen números iguales al inicio y al final.

$$\begin{array}{r}
 121 \\
 \underline{121} \\
 000 \\
 + 000 \\
 \hline
 000 \\
 - 000 \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

Figura 9. Ejemplo de evaluación en la sesión 2 de lógica proposicional

Sesión 3 Domino

La actividad de la tercera sesión, fue el clásico juego de dómينو (García & Rivero 2010), donde se puso en práctica el razonamiento combinatorio y probabilístico.

Resultados generales de razonamiento combinatorio. Como se puede observar en la Figura 11, el nivel de razonamiento combinatorio, ningún alumno tuvo un nivel de desempeño en fase inicial, 5 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en fase de adquisición, lo que significa ya inician creando una estrategia, pero aún no logran concebir todas las posibilidades. En el caso de los 3 alumnos que lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, han desarrollado un procedimiento y conciben todas las posibilidades.

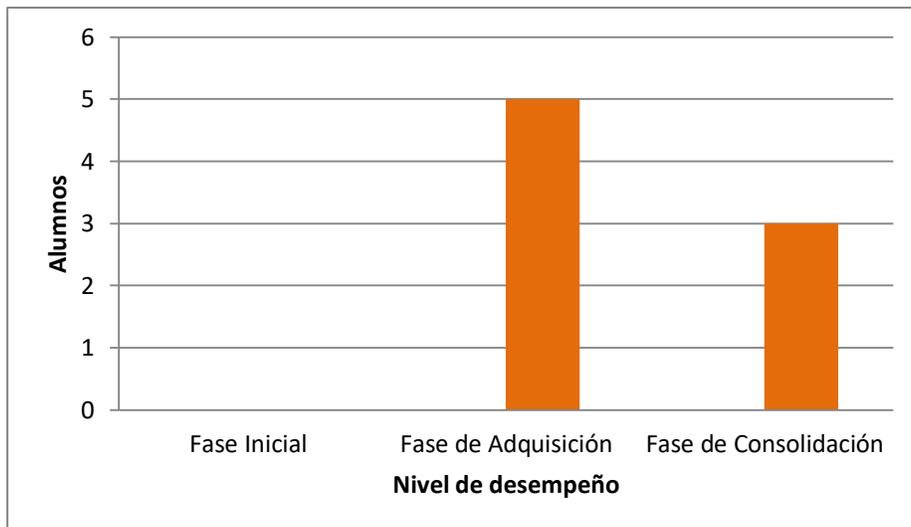


Figura 11. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 3 en el área de razonamiento combinatorio.

Resultados Individuales de razonamiento combinatorio. En esta ocasión, los alumnos presentaron mayor participación e inclusive mayor cooperación en las actividades grupales. Después de la sesión, decidieron seguir con la actividad dentro del salón, durante la hora del receso, además se observó mayor socialización y trabajo en equipo. Esta ocasión se aplicó la sesión a 8 de los alumnos, debido a la inasistencia de uno de ellos. En la Tabla 8 se puede apreciar que los alumnos aumentaron su nivel de desempeño, además de una participación más activa. En esta sesión ningún alumno tuvo un nivel de desempeño en la fase inicial, lo que significa que hubo mayor razonamiento combinatorio. En el caso de Fernanda, Julio, Lorena,

Pamela y Sergio, intentan crear algún procedimiento, utilizando un diagrama de árbol, sin embargo, no lograron concebir todas las posibilidades. En el caso de Alin, Jair y Yoel, observaron mejor el procedimiento, en un principio también realizaban diagramas de árbol, pero al observar su poca eficacia, cambiaron de estrategia, apoyándose en la hoja y logrando concebir todas las posibilidades.

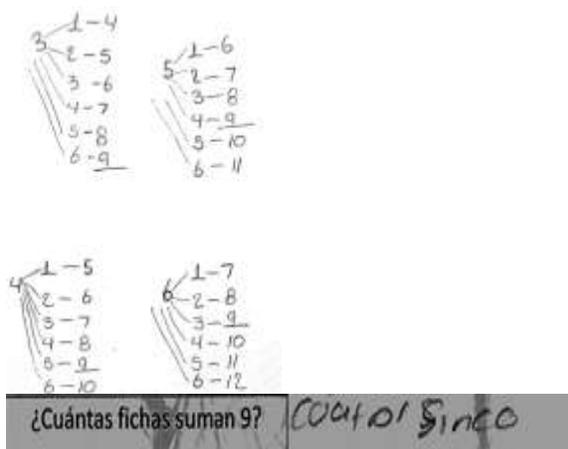
Tabla 8.
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 3 en Rc.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación	Participativa y entusiasta
	Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Observa más antes de manipular el material Maneja el diagrama de árbol Considera todas las posibilidades
Fernanda	Fase de Adquisición	Mayor participación, aún se le dificulta el trabajo en equipo.
	Inicia con procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Hace un diagrama de árbol, pero no concibe todas las combinaciones de la ficha.
Jair	Fase de Consolidación	Participativo, pero no trabaja en equipo.
	Tiene la capacidad de extraer una conclusión lógica a partir de la relaciones entre dos premisas.	Busca estrategias apoyándose de la hoja Logra encontrar todas las posibilidades
Julio	Fase de Adquisición	Habla un poco más, pero su tono de voz es bajo
	Inicia con procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Busca los números al azar y se le motiva a buscar una estrategia con ayuda de la hoja En su evaluación hace estrategia, pero no concibe todas las posibilidades
Lorena	Fase de Adquisición	Trabaja en equipo y se observa menos tímida
	Inicia con procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades.	Conoce el diagrama de árbol, pero no logra encontrar todas las posibilidades
Pamela	Fase de Adquisición	Mayor participación
	Inicia con procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Intenta trabajar en equipo Interroga más Intenta buscar la solución con el diagrama de árbol, pero no logra encontrar todas las posibilidades.

Sergio	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Participativo y trabaja en equipo Intenta buscar una estrategia en la hoja. No logra concebir todas las combinaciones por estrategia.
Yoel	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Mayor entusiasmo e interacción con sus compañeros Pregunta constantemente sobre sus procedimientos Intenta buscar una estrategia en la hoja Logra concebir todas las posibilidades.

En la Figura 12 se puede observar un ejemplo de a evaluación formativa del nivel de desempeño en el área de razonamiento combinatorio de esta sesión. En el caso 1, se observa que el alumno intentó hacer una estrategia, pero no fue los suficientemente útil para concebir todas las posibilidades, puesto que se le consideró con un nivel de desempeño en fase de adquisición. En el caso 2 el alumno creo una estrategia, logrando concebir todas las posibilidades de una forma más sencilla.

Caso 1



Caso 2

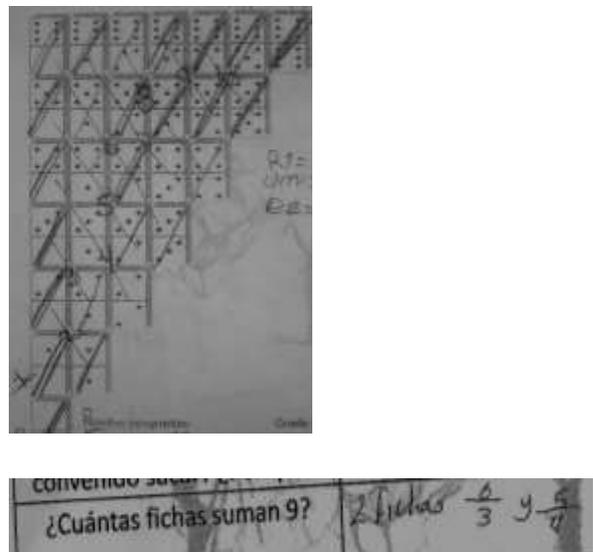


Figura 12. Ejemplo de evaluación en el área de razonamiento combinatorio de la sesión 3.

Resultados Generales de razonamiento probabilístico. En la Figura 13 se puede observar que hubo un nivel de desempeño es bajo. 3 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en fase inicial, lo que significa que no percibe los cambios aleatorios, no existe alguna estrategia. En el caso de los 5 alumnos que lograron un nivel desempeño en la fase de adquisición, empiezan a concebir los cambios aleatorios, pero tienen dificultad en cambiar su estrategia. Ningún alumno logró un nivel de desempeño en la fase de consolidación.

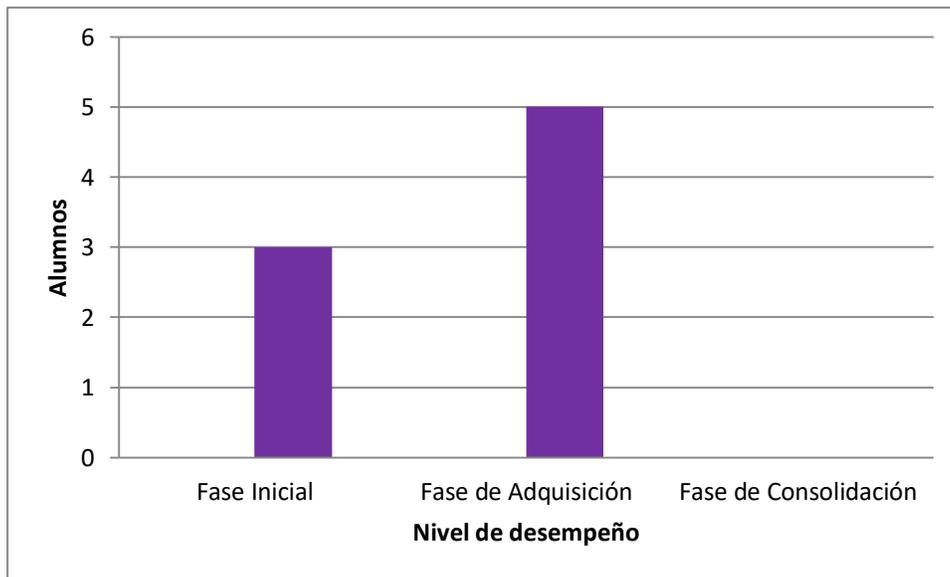


Figura 13. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 3 en el área de razonamiento probabilístico.

Resultados individuales de razonamiento probabilístico. Como se puede observar en la Tabla 9, los alumnos mantuvieron una participación más activa e intentaban buscar estrategias para ganar, algunas de ellas poco pensadas, además de cómo considerar las estrategias de sus contrincantes, tal es el caso de Fernanda, Julio y Lorena, quienes no lograron realizar alguna estrategia y muchas jugadas las realizaban al azar. En el caso de Jair y Ali, intentaban conocer cuántas fichas había en el tablero, pero poco consideraban las fichas de sus compañeros, ya que sus estrategias al ir cambiando, contaban con menos probabilidad, obteniendo así, un nivel de desempeño en la fase de adquisición. Sergio y Pamela, quienes también tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición eran quienes llegaban a ganar más jugadas, aunque Sergio intentaba predecir las

fichas de sus compañeros, si no le resultaba se le dificultaba cambiar la estrategia, auxiliándose de Pamela, a quién también se le dificultaba.

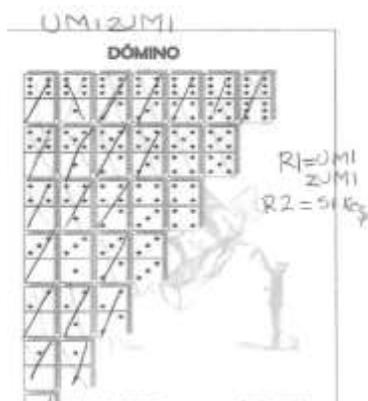
Tabla 9
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 3 en Rpp.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Dificultad para considerar las combinaciones de sus fichas en comparación de sus contrincantes. Se apoyaba de la hoja, pero la deshecha. Gano una partida Expreso que su estrategia era jugar primero con las fichas de mayor puntaje.
Fernanda	Fase Inicial No percibe los sucesos aleatorios y no hay estrategia.	Necesitó apoyo para saber que fichas colocar. Solo prestaba atención a sus fichas.
Jair	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Buscaba alguna estrategia, pero se le dificultaba contemplar las fichas de sus compañeros Sacaba las fichas con mayor cifra Intentaba usar la hoja, pero la desechaba.
Julio	Fase Inicial No percibe los sucesos aleatorios y no hay estrategia	Dificultad para encontrar las fichas que tiene cada uno de sus compañeros No tenía estrategia de juego Tiraba de inmediato
Lorena	Fase Inicial No percibe los sucesos aleatorios y no hay estrategia.	Dificultad para contemplar las fichas de sus compañeros Sabe cuántas combinaciones hay. No pensaba en
Pamela	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Conoce cuántas fichas hay de sus compañeros. Dificultad en hacer una estrategia con base a la información que tiene.

Sergio	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Intenta predecir los movimientos de sus compañeros, pero no siempre resulta. Hace estrategias con apoyo de la hoja Dificultad de cambiar su estrategia su estrategia. Ganó 1
Yoel	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Intenta observar cuantas fichas faltan en el tablero Dificultad en cambiar su estrategia.

En la Figura 14 se puede observar un ejemplo de la evaluación formativa de razonamiento probabilístico de la sesión 3. En el caso 1, el alumno solo tacha las fichas que fue utilizando, sin crear alguna estrategia para anticipar la jugada del oponente, además en las observaciones las fichas eran seleccionadas de forma azarosa, es por ello que se le consideró con un nivel de desempeño en fase inicial. En el caso 2 el alumno utilizó la hoja como estrategia, sombreando las fichas que le pertenecían y dejando en blanco las que le pertenecían al oponente, pero en las observaciones se le dificultaba buscar otra estrategia si la primera no funcionaba, considerándolo con un nivel de desempeño en la fase de Adquisición.

Caso 1



Caso 2

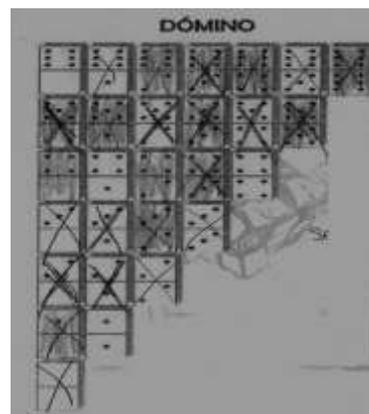


Figura 14. Ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento probabilístico de la sesión 3.

Sesión 4 Rompecabezas de domino

La actividad de esta sesión 4 fue la resolución de un rompecabezas, utilizando las fichas de dominó. Como se observa en la Figura 15, hay una tabla del lado izquierdo con una serie de números que debe ser llenada utilizando las 28 fichas de dominó sin que sobren o falten y del lado derecho la solución.

Rompecabezas								Solución							
3	1	2	2	6	1	3	4	3	1	2	2	6	1	3	4
5	5	3	4	0	5	3	2	5	5	3	4	0	5	3	2
2	6	5	1	1	2	0	0	2	6	5	1	1	2	0	0
1	1	0	6	0	3	3	0	1	1	0	6	0	3	3	0
0	6	4	3	6	5	4	5	0	6	4	3	6	5	4	5
3	2	5	4	0	1	6	2	3	2	5	4	0	1	6	2
5	4	6	4	2	4	6	1	5	4	6	4	2	4	6	1

Figura 15. Ejemplo de Rompecabezas de dominó y su solución

Resultados generales de razonamiento combinatorio. Como se observa en la Figura 16, ningún alumno tuvo un nivel de desempeño en fase inicial. Por otro lado 5 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, dado que, intentaron crear algún procedimiento, pero no lograron concebir todas las combinaciones. En el caso de los 4 alumnos que lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, han empezado a crear procedimientos más eficaces, concibiendo todas las combinaciones.

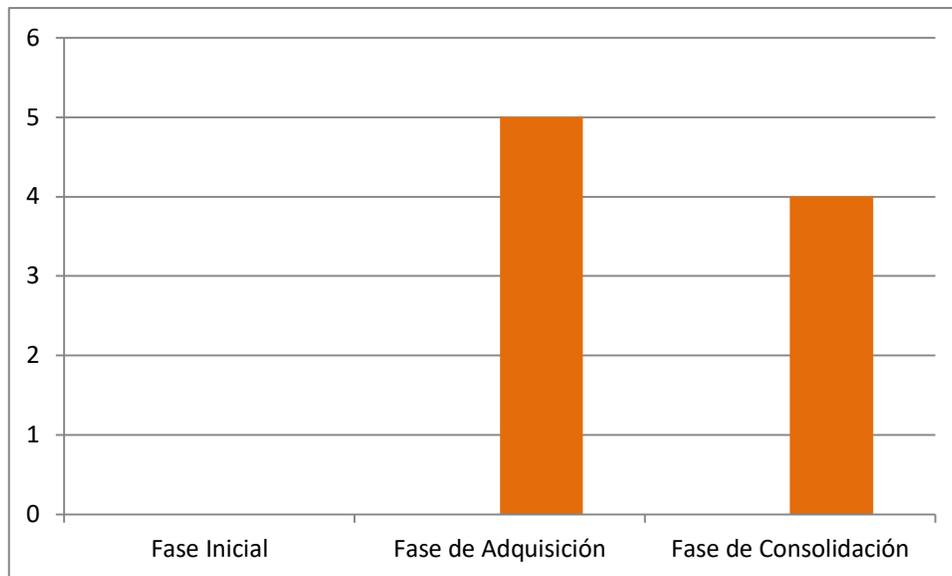


Figura 16. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 4 en el área de razonamiento combinatorio.

Resultados Individuales del razonamiento combinatorio. Como se observa en el Tabla 10, los alumnos presentan una participación más activa y mayor compañerismo, además de un aumento en el nivel de desempeño. En el caso de Fernanda, Julio y Pamela, se observó mayor interés y participación activa, ya que intentaban realizarlo y aunque se les dificultaba crear estrategias, empezaban a observar más combinaciones en el tablero. Su nivel de desempeño estuvo en la fase de adquisición. Laura, Lorena y Yoel comenzaron a preguntar más sobre sus dudas, además de haber mayor compañerismo y hablaban un poco más. Aunque Laura no asistió en la sesión 3 (Domino) consideró la idea de crear una estrategia para encontrar la solución, pero se le dificultaba desarrollarla. En el caso de Jair se observó mayor trabajo en equipo, empieza a considerar la opinión de los demás, considera estrategias y las lleva a cabo, aunque se le dificultó reformular su estrategia, fue perseverante y logró armar el rompecabezas. Por otro lado Alin y Sergio, siguen teniendo una participación y entusiasmo en las actividades, para crear estrategias requieren apoyo, pero poco a poco concibieron formas de mejorar su estrategia.

Tabla 10
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 4 en Rc.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Participativa y entusiasta Pregunta constantemente sobre su procedimiento Consideró todas las combinaciones del rompecabezas
Fernanda	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Mayor participación Inicia armando el rompecabezas al azar. Se le apoya para hacer un procedimiento e intenta hacerlo.
Jair	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Empieza a trabajar más en equipo. Toma en cuenta las combinaciones. Empieza a crear estrategias.
Julio	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Habla poco y hay poca participación en equipo Se le dificulta concebir todas las combinaciones que puede formar una ficha. Pero intenta crear un procedimiento, con ayuda.
Laura	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Habla un poco más Requiere ayuda para percatarse de las combinaciones del tablero. Tiene la idea de crear una estrategia, antes de mencionarlo, pero se le dificulta organizarla.
Lorena	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Hay mayor participación con sus compañeros Se le dificulta crear una estrategia.
Pamela	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Mayor participación con sus compañeros Pregunta más sobre sus estrategias Se le dificulta concebir todas las combinaciones
Sergio	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Participativo y entusiasta Casi no pregunta por sus estrategias Intenta buscar estrategias y las cambia cuando se percata de una nueva posibilidad.
Yoel	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Habla más con sus compañeros Pregunta cuando tiene duda en su estrategia. Concibe las combinaciones posibles.

En la Figura 17 se observa un ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento combinatorio en la sesión 4. En el caso 1, el alumno hizo un procedimiento, pero no consideró todas las combinaciones, considerándolo con un nivel de desempeño en la fase de adquisición. En el caso 2, el alumno realizó un procedimiento más eficaz, primero consideró las combinaciones de la parte superior y después la parte inferior, observando todas las combinaciones, por tanto tuvo un nivel de desempeño en la fase de consolidación.

Caso 1

¿Con estos números cuantas combinaciones de fichas puedo hacer? ¿Cuáles?

6	0	3	2
1	3	6	4

14

6,0 6,1

3,6 2,4

8,6 6,1

Caso 2

¿Con estos números cuantas combinaciones de fichas puedo hacer? ¿Cuáles?

6	0	3	2
1	3	6	4

5

6-0 6-1

3-2 -0-3

1-3 3-6

6-4 2-4

5

Figura 17. Ejemplos de evaluación formativa en el área de razonamiento combinatorio en la sesión 4.

Resultados generales de razonamiento probabilístico. Como se puede observar en la Figura 18. Ningún alumno estuvo en la fase inicial, 6 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, los que significa que los alumnos empiezan a percatarse de las nuevas posibilidades, pero aún se les dificulta crear una estrategia para lograr el objetivo, en este caso armar el rompecabezas. Por otro lado 3 alumnos lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, es decir, logró concebir las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio que se le vaya presentando.

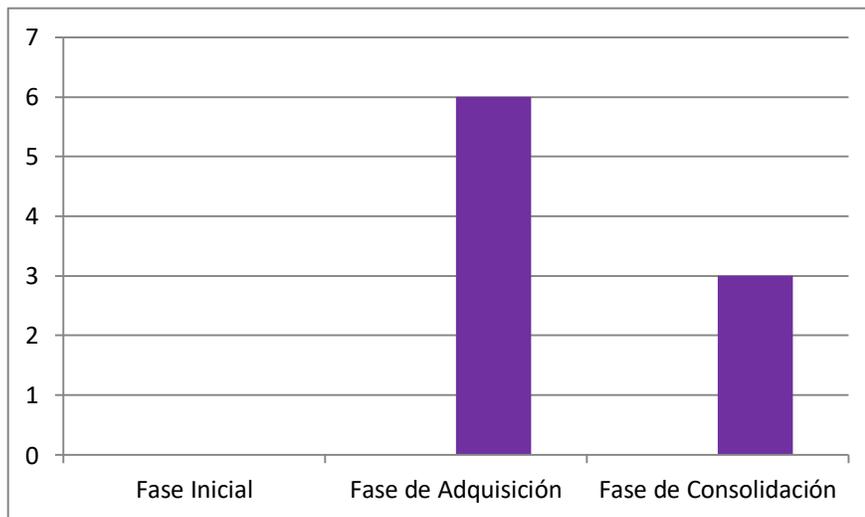


Figura 18. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 4 en el área de razonamiento probabilístico.

Resultados Individuales de razonamiento probabilístico. El armar el rompecabezas de dominó, les permitió estimular el razonamiento probabilístico, desarrollando estrategias, que le permitieran disminuir las probabilidades de fichas repetidas. Como se observa en la Tabla 11, en el caso de Fernanda, Jair, Julio, Laura, Lorena y Pamela, en un principio intentaban resolver el rompecabezas colocando las fichas de forma azarosa, pero al proporcionarles ayuda se les invito a apoyarse de la hoja de apoyo, sin embargo olvidaban hacerlo regresando a la colocación de fichas al azar. Por otra parte Alin, Sergio y Yoel lograron utilizar la hoja de apoyo y así disminuir la probabilidad de fichas repetidas, los tres coincidieron en colocar primero las mulas, en los lugares donde no hay probabilidad de repetirse y así con cada una, hasta completar el rompecabezas.

Tabla 11.

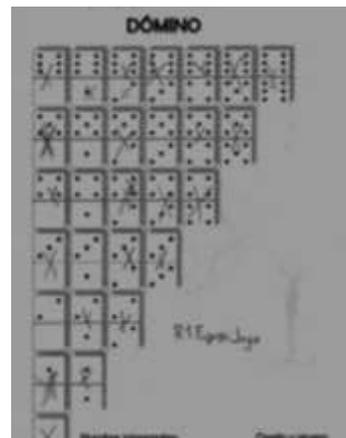
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 4 en Razonamiento Probabilístico.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio.	Cambia su estrategia, conforme ve las posibilidades Coloca primero las mulas
Fernanda	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Considera las combinaciones Coloca ciertas fichas al azar Se le dificulta buscar otra estrategia
Jair	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Aunque crea estrategias, se le dificulta cambiarla si la primera no resulta. Se le llega a repetir las fichas
Julio	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Requiere ayuda para considerar las fichas que pueden repetirse Intenta hacer una estrategia, de repente colocaba fichas al azar.
Laura	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Considera las situaciones donde se puede repetir alguna ficha. Requiere apoyo para crear nuevas estrategias
Lorena	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Considera las situaciones donde las fichas pueden repetirse Intentó cambiar la estrategia, más de 3 veces, pero en ocasiones colocaba fichas al azar.
Pamela	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Intenta crear una estrategia. Se percata de nuevas situaciones Sigue repitiendo su estrategia En ocasiones coloca fichas al azar.
Sergio	Fase de Consolidación Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio.	Ganó el juego individual Usó la hoja de apoyo para marcar todas las fichas usadas Corrige a sus compañeros cuando ve una posibilidad de repetición de ficha que ellos no. Sugiere iniciar con las mulas

Yoel	Fase de Consolidación	Crea estrategias y la cambia conforme observa nuevas posibilidades de equivocarse
	Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio.	Se percató de situaciones que sus compañeros no.
		Armó el rompecabezas

En la Figura 19, se puede observar dos ejemplos en la evaluación formativa en el área de razonamiento probabilístico de la sesión 4. En el caso 1, el alumno utilizó la hoja de apoyo solo para tachar las fichas que iba colocando, unido a esto, en las observaciones colocaba algunas fichas al azar, sin percatarse de las posibles combinaciones repetidas, al finalizar le faltó fichas, puesto que se les consideró con un nivel de desempeño con fase de adquisición. En el caso 2 el alumno desarrollo una estrategia, utilizando la hoja y en las observaciones iniciaba colocando las mulas, después iba observando las fichas con menor probabilidad de repetirse, disminuyendo cada vez más las opciones y armando correctamente el rompecabezas, es decir, tuvo un nivel de desempeño en la fase de consolidación.

Caso 1



Caso 2

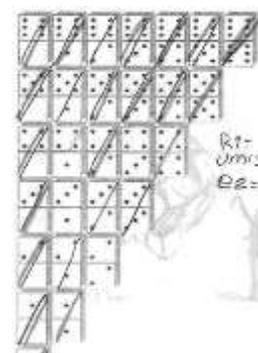


Figura 19. Ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento probabilístico

Sesión 5 "Torre de Hanoi"

La Torre de Hanoi es un juego matemático individual, fue inventado por el matemático Édouard Lucas en 1883 (Balbuena, 2006). Como se ve en el ejemplo de la Figura 20, el objetivo es apilar en una de las varillas de los extremos, (catalogada como A) un número indeterminado de discos de tamaño decreciente con diferente color cada uno, moviendo un disco a la vez, a la varilla del extremo contrario, catalogado como C. La varilla de en medio, catalogada como "B", y la varilla C puede ser utilizada para sus movimientos. Para ello se les proporcionó una ecuación para conocer el número de movimientos mínimos, $f(n) = 2^n - 1$.

$$f(n) = 2^n - 1 \Rightarrow n = \text{No. de discos} / 2^3 - 1 = 7 \text{ movimientos}$$

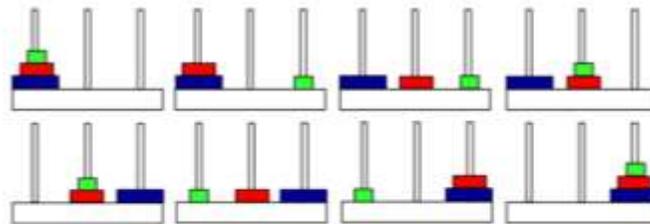


Figura 20. Ejemplo de Torre de Hanoi con 3 discos y su formula

Es decir, se denota a $f(n)$ el número mínimo de movimientos para mover los $n \geq 1$ discos en la varilla inicial con las reglas dadas, y al emplear la formula $f(n) = 2^n - 1$, se conoce el movimiento mínimo requerido para $n \geq 1$ (Benito & Madonna, 2015).

Resultados generales de lógica proposicional. Como se puede observar en la Figura 21, ningún alumno tuvo un nivel de desempeño en fase inicial. Por otra parte 4 alumnos lograron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, ya que lograron reflexiona la relación de las premisas, pero aún existe dificultad para concluir, en el caso de los 5 alumnos que tuvieron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, lograron extraer una conclusión lógica a partir de la relaciones entre las dos premisas.

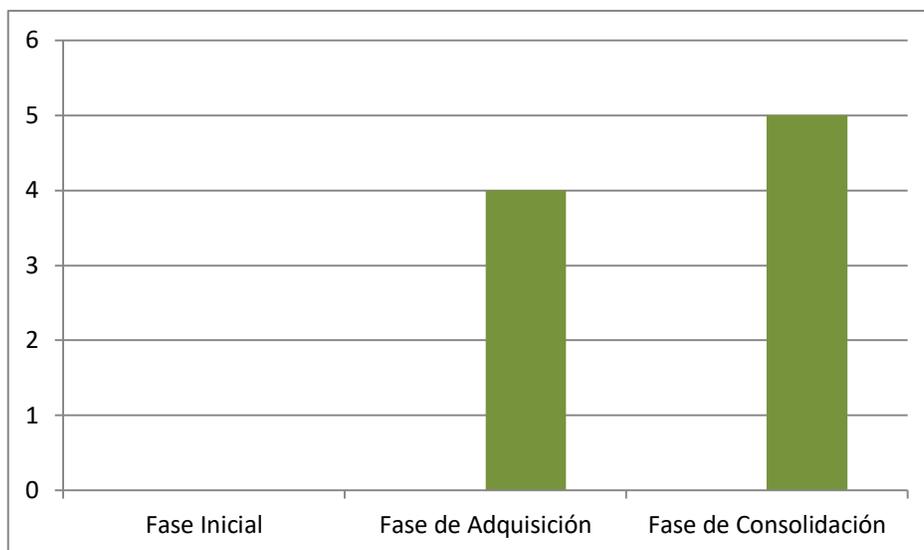


Figura 21. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 4 en el área de lógica proposicional.

Resultados Individuales en lógica proposicional. Como se puede observar en la Tabla 12, los alumnos mantienen su participación activa además de una mejor convivencia y trabajo en equipo entre ellos. Todos los alumnos expresaron no conocer el juego, en vista de ello, se les explicó las reglas y la forma de jugarlo. Además realizaron una prueba piloto para asegurar su comprensión. Sienten más confianza en preguntar sobre sus dudas. La mayoría de ellos tiene dificultad con operaciones algebraicas y se les apoyo, reflexionaban entre las premisas, sabían que al resolver la ecuación del primer nivel el resultado debía dar 7 e intentaban verificarlo, tal es el caso de Fernanda, Jair, Julio, Lorena y Pamela. Por otro lado Alin, Laura y Yoel, sabían resolver las ecuaciones e inclusive Alin expresó “¡wow! Ahora veo para que pueden servir las ecuaciones”, lograron definir que “n” era igual al número de discos. En el caso de Sergio quien expresó que se le dificultaba el álgebra, logró resolverlo y verificarlo en más de un nivel.

Tabla 12.
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 5 en Lp.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Ayuda a sus compañeros, en la resolución de la ecuación. Sus resultados son correctos. Verificó con los dos primeros niveles (3 y 4 discos), más de una ocasión.
Fernanda	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Mayor participación con sus compañeros Confunde Intenta resolver la ecuación con ayuda.
Jair	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Se le dificulta el trabajo en equipo, no permite participar a los demás. Se le dificultó resolver la fórmula. No conocía como sacar la potencia y se le explicó. Se le dificultó conocer el significado de n.
Julio	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Sigue hablando poco, pero interactúa más con el material. Dificultad en resolver las ecuaciones. Requiere apoyo Su conclusión es incorrecta
Laura	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Mayor confianza e interactúa más con sus compañeros. Resuelve todas las ecuaciones correctamente Se percató del patrón antes de dar la indicación Verifica más de una vez con los dos primeros niveles.
Lorena	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Mayor comunicación con sus compañeros Dificultad en resolver la ecuación, responde que $n=3$, pero se le dificulta generalizar.
Pamela	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Mayor participación e interés Pregunta cuando tiene dudas Olvidó como sacar potencia Intenta verificar su respuesta, pero solo con el primer nivel Su conclusión $n=3$
Sergio	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Participación y entusiasmo Se le dificulta hacer las ecuaciones y se le ayuda

Verifica su respuesta con el nivel 3,4 y 5 y conoció la respuesta.

Yoel	Fase de Consolidación	Mayor comunicación con sus compañeros
	Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Pregunta sobre sus dudas
		Sus ecuaciones son correctas
		Verifica con el nivel 3 y 4
		Su conclusión es correcta.

La Figura 22 se observa un ejemplo de la evaluación en lógica proposicional de la sesión 5. En el caso 1, el alumno logró representar solo la fórmula del primer nivel, colocando $n=3$ en el nivel con 5 discos. En el caso 2, el alumno logró descubrir que “n” es igual al número de discos tanto en el primer nivel de 3 discos, 4 discos y 5 discos.

Caso 1

TORRE DE HANOI

NIVEL	No. MOVIMIENTOS	ESTRATEGIA
1 (3 discos)	7	$f(n) = 2^3 - 1 = 7$
2 (4 discos)	256	$f(n) = 2^8 - 1 = 256$ $2^8 = 256$ $256 - 1 = 255$

Caso 2

TORRE DE HANOI

NIVEL	No. MOVIMIENTOS	ESTRATEGIA
1 (3 discos)	7	$f(n) = 2^n - 1$ $f(n) = 2^3 - 1 = 7$ $f(n) = 8 - 1 = 7$
2 (4 discos)	15	$f(n) = 2^n - 1$ $f(n) = 2^4 - 1 = 15$ $f(n) = 16 - 1 = 15$
3 (5 discos)	30	$f(n) = 2^n - 1$ $f(n) = 2^5 - 1 = 31$ $f(n) = 32 - 1 = 31$
4 (6 discos)		$f(n) = 2^n - 1$ $f(n) = 2^6 - 1 = 63$ $f(n) = 64 - 1 = 63$

Figura 22. Ejemplos de evaluación formativa en Lógica Proposicional sesión 5.

Resultados generales de razonamiento científico. La Figura 23 se puede apreciar que ningún alumno estuvo en la fase inicial. Por otro lado, 6 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, puesto que lograron crear hipótesis, pero no comprobarlas, por último 3 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, ya que lograron generar y comprobar hipótesis de forma lógica y sistemática.

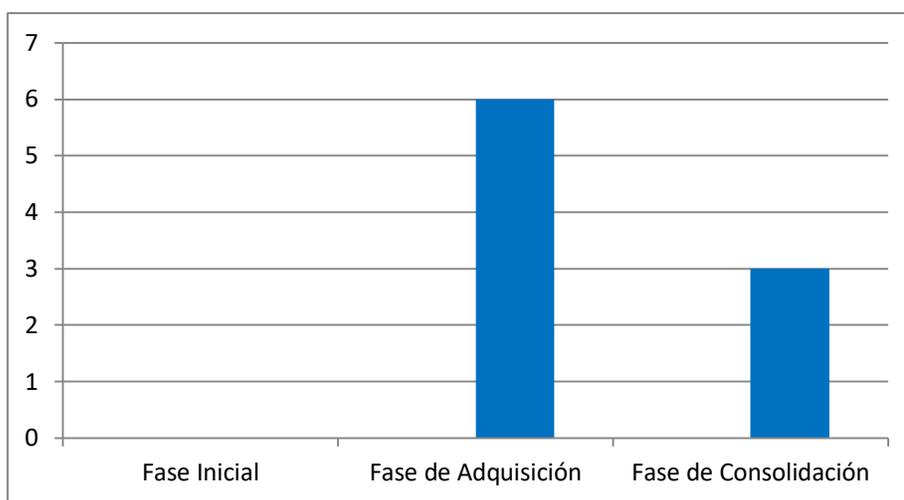


Figura 23. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 4 en el área de razonamiento científico.

Resultados individuales en el razonamiento científico. Como se puede observar en la Tabla 13, la participación continúa siendo activa además de presentar perseverancia en la búsqueda del patrón. En el caso de Fernanda, Julio, Jair, Lorena y Pamela, presentaron dificultad en encontrar el patrón, tomando el mismo para los demás nivel, sin considerar otros factores como el número de discos y su relación las varillas, es decir, omitieron la comprobación. Por otro parte Alin, Jair, Laura, Sergio y Yoel, consideraron más factores, siendo Laura la primera en percatarse del patrón antes de la indicación, al ir comprobando cada nivel se percataron de la posición del primer disco según el número de los mismos, es decir, si es un numero par, el primer disco va en la varilla B y si es impar, el primer disco va en la varilla C. Logrando encontrar algunos patrones y rectificándolo para su validez.

Tabla 13.

Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 5 en Rcf.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Descubrió el patrón del primero y segundo nivel. Primero observaba y después manipulaba el material. Solo repetía para anotar el patrón y verificar Argumenta y comprueba.
Fernanda	Fase de Adquisición Intenta genera hipótesis de forma lógica y justificarlas pero no las comprueba.	Consideró el patrón del primer nivel. Repite el patrón en el segundo nivel sin comprobar. Solo genera hipótesis, se le dificulta argumentar.
Jair	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Comprobó el primer nivel (3 discos) y repitió el patrón en el segundo nivel solo agregando el último disco. Intenta justificar su hipótesis, pero no lo comprueba.
Julio	Fase de Adquisición Intenta genera hipótesis de forma lógica y justificarlas pero no las comprueba.	Intenta hacer el primer nivel y se le apoya. El patrón del segundo nivel lo hace con más movimientos de los mínimos Olvida colocar las varillas, solo menciona el orden de los colores. Intenta crear hipótesis, pero se le dificulta justificar.
Laura	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Se percata que el número de discos no empieza en la varilla C y los pares en la varilla B Los comprueba en el nivel 1,2 y 3 Se le pide volverlo a comprobar en el 4. Realiza hipótesis, justifica y luego comprueba.
Lorena	Fase de Adquisición Intenta genera hipótesis de forma lógica y justificarlas pero no las comprueba.	Logra conseguir el nivel 1 El segundo nivel se le dificulta, repite el patrón sólo agregando el último disco sin verificar. Crea hipótesis, las justifica, pero no comprueba.
Pamela	Fase de Adquisición Intenta genera hipótesis de forma lógica y justificarlas pero no las comprueba.	Logra comprobar el primer nivel El segundo hace más movimientos de los pedidos, pero no logra completarlo. Intenta crear hipótesis, pero no las comprueba.
Sergio	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Descubre el patrón del nivel 1 y 2 Las comprueba Primero observa antes de manipular el material en el primer nivel.

		Se percata antes si hizo un patrón incorrecto y los vuelve a intentar. Crea hipótesis, justifica y comprueba.
Yoel	Fase de Consolidación	Se percata de la repetición del orden de los colores en cada nivel y de la posición de la varillas
	Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Lo comprueba con el nivel 1, 2 y 3 e intenta comprobarlo con el nivel 5 (7 discos).
		Crea hipótesis, las justifica y las comprueba.

En la Figura 24, se observa un ejemplo de la evaluación formativa en el área de razonamiento científico en la sesión 5. En el caso 1, el alumno intentó buscar el patrón del nivel con 4 discos, utilizando más movimientos de los esperados (15), presentando dificultad en encontrar el patrón en cada nivel y sin volver a intentar encontrar el correcto, incluido a esto, en las observaciones se omitió la comprobación del patrón descrito, en vista de ello, se consideró con un nivel de desempeño en la fase de adquisición. En el caso 2, el alumno intentó más de una vez encontrar el patrón con el menor número de movimientos, además de rectificar su respuesta, considerándolo con un nivel de desempeño en la fase de consolidación.

Caso 1

15	Rosa - B Amarillo - C Rosa - C Verde - B Rosa - A Amarillo - B Rosa - B Verde - C Rosa - C Amarillo - A Rosa - A Verde - C Rosa - B	Amarillo - C Rosa - C
----	---	--------------------------

caso 2

4	A	
5	B	

Figura 24. Ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento científico en la sesión 5.

Sesión 6 Macramé

Dentro de las actividades lúdicas, se incluyó el arte de los nudos o Macramé, en el cual el alumno por medio de nudos acomodados simétricamente siguiendo un patrón podrá realizar una pulsera, un collar, alguna Figura. En esta ocasión la sesión sólo se enfocó en el razonamiento combinatorio, debido a que es una de las áreas más abstractas del pensamiento lógico-matemático. Como primer paso se les proporcionó a los alumnos un conjunto de hilos de tres colores diferentes, se les dejó manipular el material, realizando una pulsera, a los colores de su elección, siguiendo un patrón. Después se les pidió encontrar todas las combinaciones posibles con esos 3 colores para poder crear la pulsera del mismo patrón. Para ello debieron descubrir con relativo éxito procedimientos sistemáticos de búsqueda para combinar de diferente forma sus hilos, para después ir aumentando los colores. El integrar dos operaciones, seriación y correspondencia, en una sola operación como algo necesario para obtener todas las combinaciones posibles de los elementos tomados, es característico del razonamiento combinatorio del pensamiento formal (Roa, 2000).

Resultados generales del razonamiento combinatorio. Como se observa en la Figura 25. Ningún alumno estuvo en la fase inicial, 4 tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, es decir, intenta crear un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades. Por otro lado 5 alumnos lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, lo que significa que crearon procedimiento y concibe todas las posibilidades.

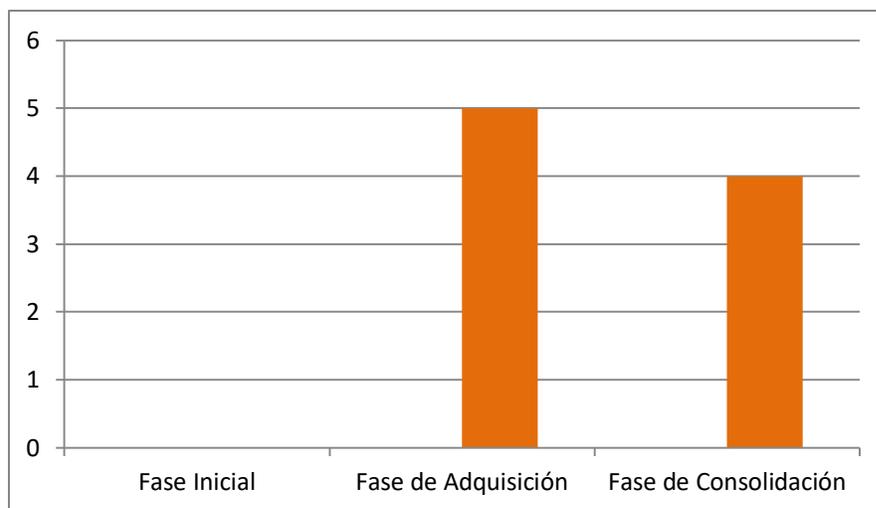


Figura 25. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 4 en el área de lógica proposicional.

Resultados individuales del razonamiento combinatorio. Como se puede observar en la Tabla 14, los alumnos mantuvieron interés en crear una pulsera, inclusive pedían hacer dos, como el caso de Laura y Pamela. Con respecto al nivel de desempeño, se puede apreciar que optaron como mejor opción el diagrama de árbol, en comparación de las sesiones anteriores, donde no intentaban realizar una estrategia y observar más posibilidades, en esta ocasión lograron considerar más de una posibilidad de combinación, pero aún tenían dificultad en representarlo en el diagrama, tal es el caso de Julio, Pamela y Lorena. Por otro lado Jair aunque en la sesión 4 (rompecabezas de domino) había logrado consolidar el razonamiento combinatorio, esta ocasión bajo su nivel de desempeño, no logrando observar todas las combinaciones posibles. Fernanda en esta ocasión presentó un avance considerable, ya que empezó a realizar la actividad con poca ayuda y para aquellos que lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, los alumnos presentaron perseverancia en la actividad y al igual que Fernanda requirieron poca ayuda para llevar a cabo su procedimiento, como es el caso de Alin, Laura, Sergio y Yoel.

Tabla 14.

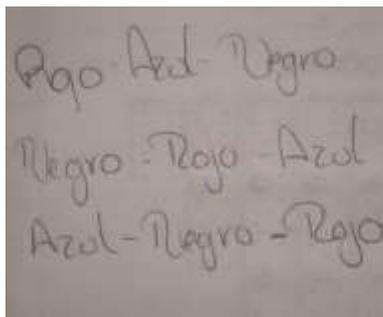
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 6 en Rc.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Ayuda a sus compañeros Comprendió rápido el patrón Realizó todas las combinaciones, por medio de un diagrama de árbol Considero las combinaciones en triadas y de un solo color.
Fernanda	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Presenta interés en la actividad, pide hacer dos pulseras Intenta armar las combinaciones con otro procedimiento, pero se decide en crear diagrama de árbol.
Jair	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Participativo, mayor interacción con sus compañeros Consideró más posibilidades de combinación Se basa en el diagrama de árbol, porque los mencionan sus compañeros, tiene dificultad de representarlo con más de 3 combinaciones.
Julio	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Intenta interactuar con sus compañeros. Se le dificulta hacer el patrón y considerar combinación de más de 3 colores. Se le apoya a considerar más, pero se le dificulta representarlo en el diagrama de árbol.
Laura	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Más entusiasta y participativa Pidió hacer 2 pulseras Considero combinaciones de más de 2 colores, inclusive de un color Hizo un diagrama de árbol
Lorena	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Se observa interés en la actividad. Al inicio se le dificulta comprender el patrón de la pulsera. Consideró combinaciones solo de 3 colores distintos. Se le ayudo a desarrollar el diagrama de árbol, pero así no consideró la posibilidad de combinación de más de 3 colores.

Pamela	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Interés en la actividad dice gustarle las pulseras. Considera más de la posibilidad de combinación de sólo 3 colores. Dificultad en representar el diagrama de árbol.
Sergio	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Interacción con sus compañeros Se distrae con facilidad Hace diagrama de árbol Corrige su diagrama de árbol al concebir más posibilidades de combinación.
Yoel	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Interés en la actividad, interacción con sus compañeros. Dificultad en seguir el patrón Concibió más de una posibilidad de combinación Realizó un diagrama de árbol. Designo la inicial de cada color para realizar su diagrama de árbol

La Figura 26 se puede apreciar un ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento combinatorio en la sesión 6. En el caso 1. El alumno intenta crear combinaciones de más de tres colores, en el cual no concibió la posibilidad de combinar más de dos colores, por ello se le consideró con un nivel de desempeño en la fase de adquisición. En el caso 2 el alumno creó un diagrama de árbol tomando la posibilidad de combinar más de 2 o 3 colores.

Caso 1



Caso 2

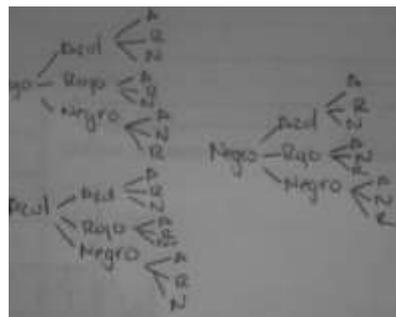


Figura 26. Ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento combinatorio de la sesión 6.

Sesión 7 Ajedrez

La actividad que se realizó en la sesión fue el clásico juego de ajedrez, donde se les proporcionó algunas técnicas, permitiendo realizar algunas estrategias. Antes de la evaluación, se dio la oportunidad de realizar una partida con uno de sus compañeros que conocía y entendía el juego contra uno de los alumnos del taller quien dijo conocer el juego y le agradaba, una de las indicaciones que se les dio a los demás alumnos del taller era observar las jugadas. Al finalizar el juego los alumnos participantes del programa expresaron haber sido útil, ya que pudieron comprender mejor el juego, inclusive conocer algunos trucos que no sabían que existían. Esto según Piaget (1991) es conocido como conocimiento social, donde el alumno puede construir sus propios conocimientos al relacionarse con sus pares o adultos.

Después de ello, se realizó un pequeño torneo, iniciando a jugar únicamente con los peones, para aquellos que no sabían jugarlo, el primero en llegar al final del lado contrario ganaría. Conforme avanzaba el torneo se iba aumentando una pieza colocando al rey desde la segunda partida, siguiendo las torres, los caballos, alfiles y por último la reina. Aquellos que iban saliendo del juego se les proporcionaron una hoja con dinámicas como el ejemplo que se observa en la Figura 27, con alguna dinámica, donde el alumno debía observar y elegir la jugada argumentada y correcta.



Figura 27. Ejemplo de dinámica de ajedrez y su pregunta

Resultados generales del razonamiento científico. Como se puede observar en la Figura 28. Ningún alumno se encontró en la fase inicial. Por otra parte 4 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, los que significa que son capaces intentan generar hipótesis, pero no comprueba. Por otro lado 3 alumnos lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, los que significa que son capaces de crear diversas hipótesis y comprobarlas.

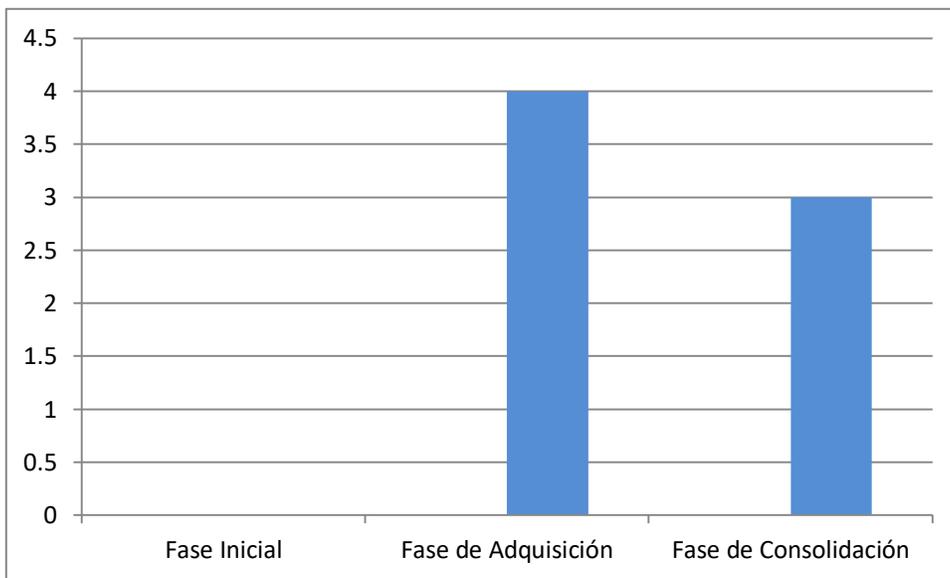


Figura 28. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 7 en el área de razonamiento científico.

Resultados Individuales de razonamiento científico. Como se puede apreciar en la Tabla 15, hubo dos inasistencias, Laura y Sergio. En lo que respecta a la participación, hubo mayor trabajo en equipo y participación. En el caso de Fernanda, Julio, Lorena y Pamela, poco conocen del juego, sin embargo intentan buscar crear hipótesis, pero solo hacen una a la vez, sin percatarse de las consecuencias. Por otro lado Alin, Jair y Yoel conocen el juego y logran hacer diversas hipótesis, suponiendo jugadas de sus compañeros, siguiendo su estrategia.

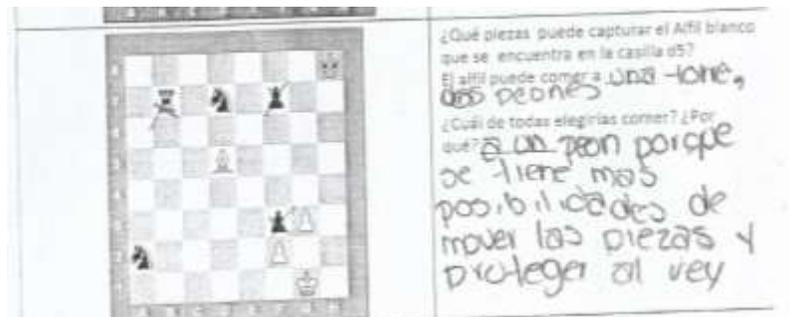
Tabla 15.

Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 7 en Rcf.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Participación e interés Conoce el juego, dice solo haber jugado una vez. Comprendía rápido los movimientos de las piezas Observaba el tablero antes de tirar Justifica su tirada
Fernanda	Fase de Adquisición Intenta generar hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Poca Interacción con sus compañeros Comenta desconocer el juego Solo piensa en una hipótesis a la vez
Jair	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Conoce el juego, pero no lo práctica Genera hipótesis y se percata de las consecuencias.
Julio	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Habla poco, interacciona poco Desconoce el juego Inicia tirando sin pensar Solo piensa en una hipótesis a la vez
Lorena	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Se observa interés en la actividad Conoce poco el juego Solo piensa en una hipótesis a la vez
Pamela	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Conoce poco el juego Conoce algunos movimientos de las piezas Dificultad en crear varias hipótesis, solo se fija en una sola pieza.
Yoel	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Conoce el juego, sus movimientos y algunas reglas, pero dice solo haber jugado una ocasión. Genera varias hipótesis y considera más de una pieza, observando sus consecuencias.

Como se puede apreciar en la Figura 29, en el ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento científico del caso 1, el alumno justificó, pero no tomó en cuenta otros factores como los posibles movimientos de las otras piezas contrarias, como la torre o el caballo, además de omitir la comprobación. En el caso 2, el alumno, creo varias hipótesis y las justifico cuidando las consecuencias.

Caso 1



Caso 2

Figura 29. Ejemplo de evaluación formativa en el área de Razonamiento Combinatorio.

Resultados generales del razonamiento probabilístico. Como se puede observar en la Figura 30. 2 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase inicial, los que significa que tienen dificultad en percibir los sucesos aleatorios y no crean alguna estrategia conforme avanza la partida. Por otro lado 3 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, los que significa que los alumnos crean estrategias, intenta observar los sucesos aleatorios, pero tienen dificultad en ir cambiando su estrategia. Para el caso de los 2 alumnos que tuvieron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, lograron tener la capacidad de observar todas las posibilidades y cambiar su estrategia según el suceso aleatorio.

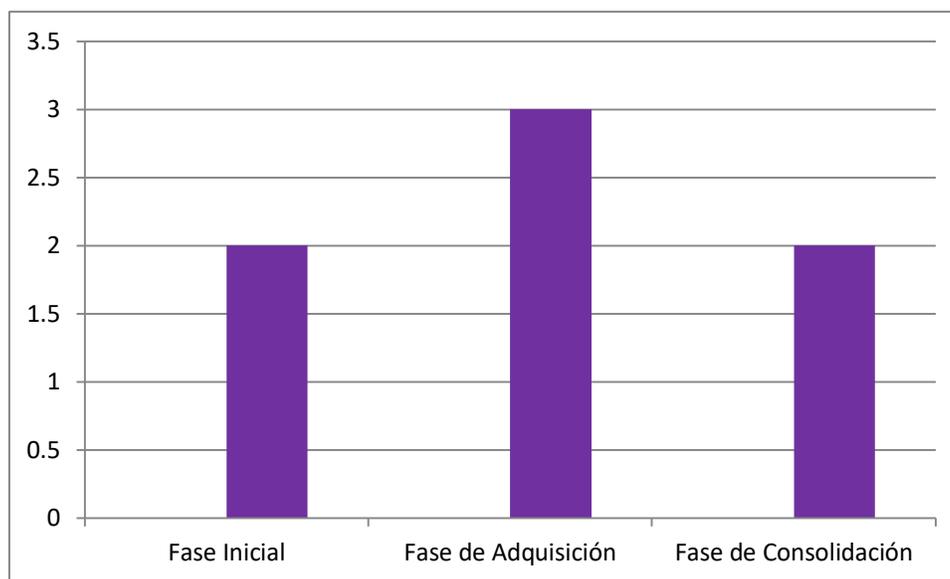


Figura 30. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 7 en el área de razonamiento probabilístico.

Resultado individual del razonamiento probabilístico. Como se puede observar en la Tabla 16. En comparación del razonamiento científico, el razonamiento probabilístico, resultó un poco más complejo, ya que aunque realizaban hipótesis, no consideraban alguna estrategia para aumentar sus probabilidades de hacer jaque o solo se enfocaban en comer piezas contrarias, tal es el caso de Fernanda, Julio y Pamela. Otra situaciones observadas durante la sesión es el considerar algún movimiento, pero seguían su estrategia, y al ser una jugada diferente, había la dificultad de cambiar su estrategia, por ejemplo Jair y Lorena. Por otro lado Alin y Yoel quienes ya tenían un conocimiento previo del juego, durante la sesión, se observó una mejor estrategia, se enfocaban en hacer jaque y tenían la capacidad de cambiar algunos movimientos. En todos los casos faltó conocer más las reglas del ajedrez que les puede permitir crear más estrategias como jugadas de sacrificio o la famosa jugada “el enroque”.

Tabla 16.

Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 7 en Razonamiento probabilístico

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio	Trata de anticipar las jugadas de sus compañeros Se enfoca en hacer jaque, pero sigue cuidando todas sus piezas. Observa las posibilidades Gana partida
Fernanda	Fase de Adquisición Hay estrategia, pero hay dificultad en observar los sucesos aleatorios, o cambiar la estrategia.	Solo se enfoca en comer las piezas de su contrincante. No se percata de la estrategia de su contrincante
Jair	Fase de Adquisición Hay estrategia, pero hay dificultad en observar los sucesos aleatorios, o cambiar la estrategia.	Intenta cambiar sus estrategias. Dificultad en anticipar los movimientos de su contrincante.
Julio	Fase Inicial No percibe los sucesos aleatorios y no hay estrategia	Juega sin estrategia Solo se enfoca en comer las piezas de su contrincante.
Laura	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Intenta hacer estrategia Se enfoca en hacer jaque Intenta predecir los movimientos Dificultad en cambiar si no resultó su predicción.
Lorena	Fase Inicial No percibe los sucesos aleatorios y no hay estrategia	Se enfoca en comer piezas del contrincante Dificultad en armar una estrategia. No toma en cuenta los posibles movimientos de su contrincante
Pamela	Fase de Consolidación Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio	Se enfoca en hacer jaque mate Observa el tablero antes de mover alguna pieza Trata de predecir los movimientos de sus compañeros.
Sergio	Fase de Consolidación Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio	Trata de anticipar las jugadas de sus compañeros Se enfoca en hacer jaque, pero sigue cuidando todas sus piezas. Observa las posibilidades Gana partida
Yoel	Fase de Adquisición Hay estrategia, pero hay dificultad en observar los sucesos aleatorios, o cambiar la estrategia.	Solo se enfoca en comer las piezas de su contrincante, No se percata de la estrategia de su contrincante

En la Figura 31, se puede apreciar la evaluación del razonamiento probabilístico. Es un tablero con una partida ya empezada. Se les presentó de forma individual a los alumnos y se les preguntó “¿Quién tiene más probabilidad de ganar, las negras o las blancas y por qué?”



Figura 31. Tabla con simulación de jugada para la evaluación formativa

Como se observa en la Figura 32. El alumno respondió que las negras tienen más probabilidad de ganar por tener más piezas, se consideró con un nivel de desempeño en la fase inicial, ya que el alumno no se percató en los movimientos aleatorios. En el caso 2, el alumnos que respondieron que las negras tienen mayor probabilidad ya que sus piezas tienen más movimientos y especificaron solo una jugada, se les considero con un nivel de desempeño en la fase de adquisición, ya que tienen una estrategia, pero siguen sin considerar otros posibles movimientos. Por otro lado, en el caso 3, el alumno considero primero el turno, haciendo la simulación de la posible jugada, según el turno, es por ello que se le considero con un nivel de desempeño en la fase de consolidación.

Caso 1

Las negras porque tienen más piezas

Caso 2

Las negras tienen más probabilidad porque se puede comer a la reina y poner en jaque al rey

Caso 3

depende de quien le toque tirar
Si le toque a las blancas, tienen más probabilidad porque el peon de la C se come al peon negro y hay jake y luego se come a la reina. Y si le toca a las negras, las blancas tienen menos movimientos porque el peon negro se come a la reina

Figura 32. Ejemplo de respuestas en la evaluación formativa del área de razonamiento probabilístico de la sesión 7.

Sesión 8 Solitario chino

El solitario Chino consiste en que mediante una serie de "saltos" se debe eliminar todas las fichas excepto una. Las fichas están colocadas en todas las casillas excepto una, que suele ser la central. Un "salto" consiste en mover una ficha en diagonal sobre cualquier ficha adyacente para aterrizar sobre la siguiente casilla vacía, se continua con el mismo procedimiento hasta dejar una sola ficha. La ficha sobre la que se ha saltado se retira del tablero, tal como se observa en la Figura 33. (Echaide, 2007).

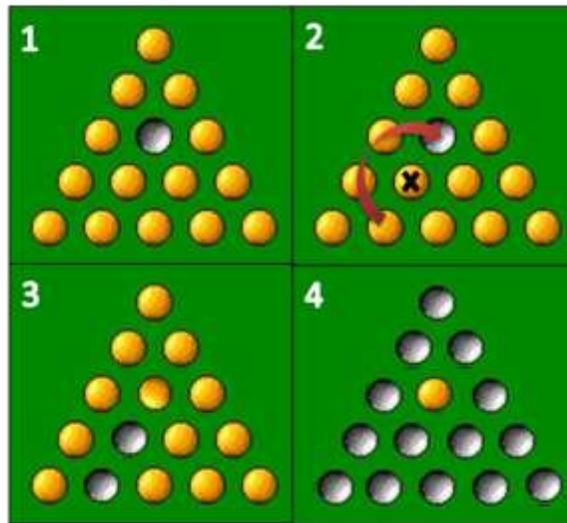


Figura 33. Ejemplo de solitario chino

Resultado generales del razonamiento combinatorio. Como se puede observar en la Figura 34, ningún alumno tuvo un nivel de desempeño en la fase inicial, 5 tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición es decir, que estos alumnos lograron realizar un procedimiento, pero aún se le dificulta concebir todas las posibilidades. Por otro lado 4 alumnos lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación lo que significa que los alumnos han logrado concebir todas las posibilidades creando un procedimiento para ello.

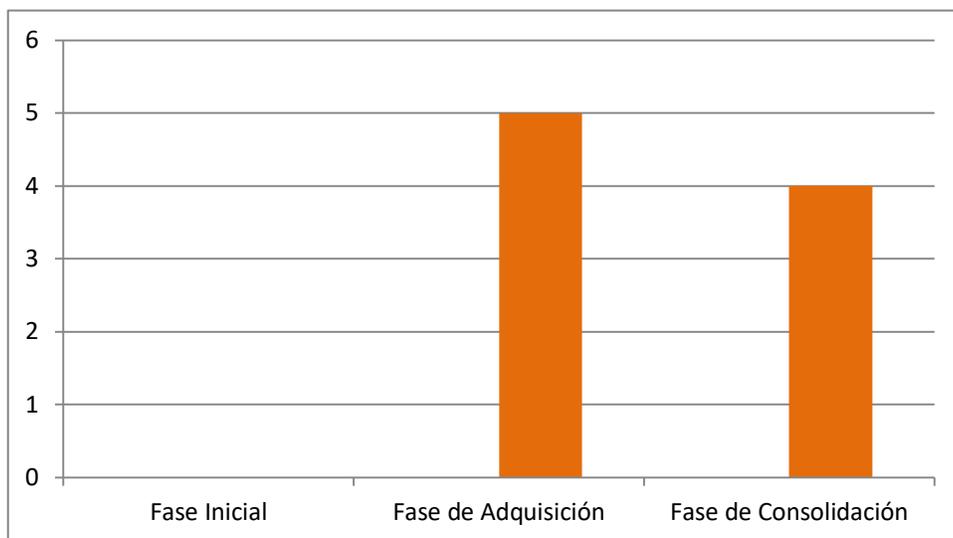


Figura 34. Resultado de la relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 8 en el área de razonamiento combinatorio.

Resultados individuales del área de razonamiento combinatorio. Durante esta sesión, la socialización y participación sigue estable, presentando mayor interacción entre ellos. Todos los alumnos expresaron ser un juego totalmente nuevo, en vista de ello, se les explicó las reglas y la forma de jugarlo. Con respecto al nivel de desempeño se puede observar en la Tabla 17, que la idea de crear un procedimiento para conseguir las posibilidades también ha resultado de una forma más sistemática, aunque en algunos casos aún se les dificulta ver todas las posibilidades, tal es el caso de Fernanda, Jair, Julio, Pamela y Lorena. Por otro lado Alin, Laura, Sergio y Yoel siguen aumentando su desempeño y su confianza en las actividades, un ejemplo es Laura y Alin quienes en un principio preguntaban constantemente sobre sus procedimientos, disminuyeron sus dudas, logrando un buen resultado.

Tabla 17.

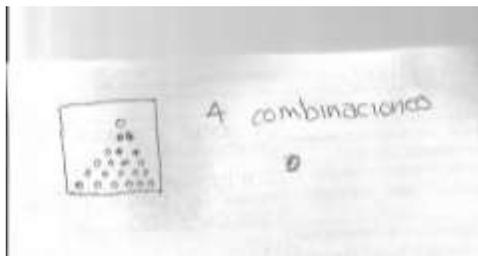
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 8 en Rc.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Participativa y perseverante Observa y piensa sobre su estrategia Pregunta si esta correcta
Fernanda	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Mayor interacción con sus compañeros Intenta buscar un procedimiento y de momento los hace al azar No buscó otras soluciones
Jair	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Poca interacción, pero participación activa en la actividad Intenta buscar algún procedimiento Logra solucionar uno
Julio	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Sigue hablando poco, mayor interacción con sus compañeros Intenta buscar algún procedimiento, sin necesidad de apoyo De momento hacía movimientos al azar No logró resolver el ejercicio En la evaluación encontró solo una solución
Laura	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Más entusiasta y participación activa Busco un procedimiento sin tener que decirle (sistemáticamente), pregunta si tiene dudas. Logra encontrar más de una solución
Lorena	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Se observa interés en la actividad y mayor interacción Se le tuvo que recordar del procedimiento y los hizo Logro hacer el procedimiento de una sola solución.
Pamela	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Mayor interacción con sus compañeros Tiene dificultad en buscar algún procedimiento Se le ayudó a resolver el acertijo, lo logró al quinto intento Observaba las combinaciones posibles.
Sergio	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Inicia observando el juego Hace procedimiento y los cambia sino le resulta. Logra resolverlo al tercer intentó

Yoel	Fase de Consolidación	Hace el procedimiento
	Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Observa el juego antes de mover alguna ficha
		Regresa la ficha si no considero otras opciones.

Como se puede observar en el ejemplo de la evaluación formativa de la sesión 8 de la Figura 35, se les pidió realizar una jugada simulada. En el caso 1, el alumno logró buscar un procedimiento pero no considero todas las posibilidades, es por ello que consideró con un nivel de desempeño en la fase de adquisición. En el caso 2 el alumno logró hacer un procedimiento para ir eliminando cada una de las fichas y logró encontrar todas las posibilidades para encontrar más de una solución, consideró con un nivel de desempeño en la fase de consolidación.

Caso 1



Caso 2

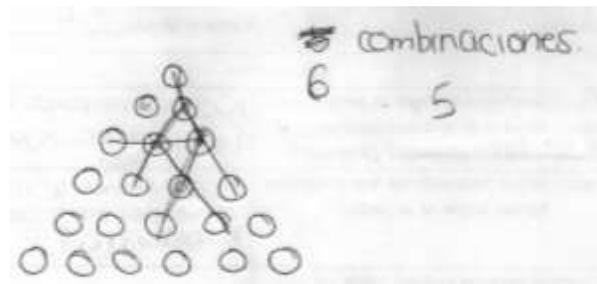


Figura 35. Ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento combinatorio.

Resultados generales del razonamiento científico. Como se observa en la Figura 36, ningún alumno tuvo un nivel de desempeño en la fase inicial. Por otro lado 2 alumnos estuvieron en la fase de adquisición, los que significa que han logrado generar hipótesis, sin embargo aún tienen dificultad en justificar y comprobar. También se puede observar que en el nivel de desempeño en la fase de consolidación aumentó a 7 alumnos, los que significa que fueron capaces de generar hipótesis, justificarla y comprobarlas.

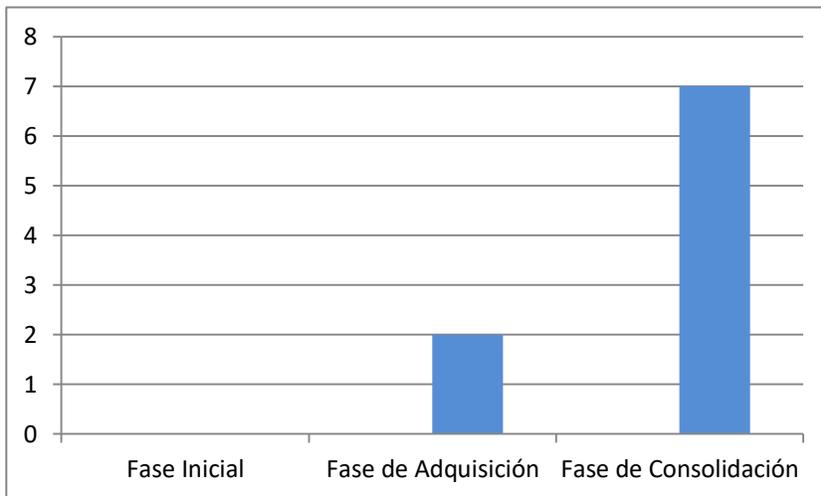


Figura 36. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 8 en el área de razonamiento combinatorio.

Resultados individuales en el área de razonamiento científico. Como se puede observar en la Tabla 18, el nivel de desempeño hay un aumento considerable en comparación de las sesiones anteriores, todos mostraron ser capaces de generar hipótesis lógicas y de forma sistemática. En el caso de Fernanda y Julio aún presentan dificultad en la comprobación, aunque en la evaluación su objetivo era realizar el procedimiento, al momento de comprobar no verificaron que resultará. En el caso de los siete alumnos restantes al centrarse en que su procedimiento resultara fue un impulso para que verificarán que sus movimientos fueran lo más objetivo posible, reiniciando el juego si no resultaba la primera jugada, además de mayor observación y concentración.

Tabla 18.

Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 8 en Rcf.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Observa antes de hacer algún movimiento. Regresa la ficha si considera que no es una buena estrategia.
Fernanda	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Hay jugadas que las hace sin observar antes. En la evaluación solo menciono las jugadas, pero no los comprobó
Jair	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Genera hipótesis para encontrar el procedimiento Vuelve a iniciar sino le funciona
Julio	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, se le dificulta justifica y no las comprueba	Hay movimientos que no sabe justificar Intenta comprobar su procedimiento, si se le apoya. En la evaluación sólo puso el número de jugadas, pero no lo comprobó
Laura	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Busca comprobar su procedimiento Se regresa si cree haber hecho un movimiento mal Observa antes de mover alguna ficha
Lorena	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Intenta verificar su procedimiento Observa el tablero Sabe justificar sus movimientos
Pamela	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Observa antes de tirar Pregunta seguido por las reglas del juego y los movimientos que puede hacer Regresa su ficha si cree haber hecho un movimiento mal
Sergio	Fase de Consolidación	Observa el tablero Verifica que su procedimiento este correcto

Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática

Vuelve a empezar sino resultó su procedimiento

Yoel

Fase de Consolidación

Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática

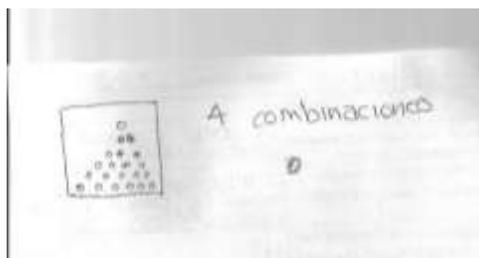
Observa antes de mover una ficha

Sabe argumentar sus movimientos

Regresa su ficha si cree que hizo un movimiento equivocado.

Como se observa en el ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento científico de la Figura 37, en el caso 1, el alumno solo colocó el número de jugadas, la explicó, pero no realizó comprobación, por tanto se le consideró con un nivel de desempeño en la fase de adquisición. En el caso 2 el alumno comprobó su procedimiento y el número de jugadas considerándolo con un nivel de desempeño en la fase de consolidación.

Caso 1



Caso 2

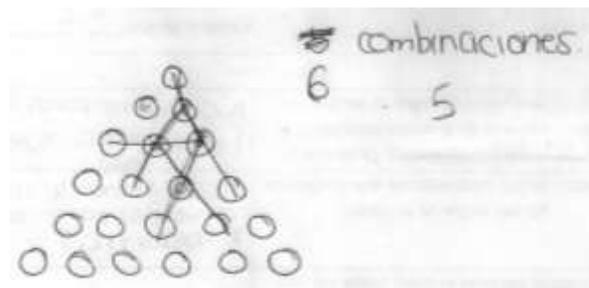


Figura 37. Ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento científico sesión 8

Sesión 9 Cubo de Rubik

El cubo de Rubik es un bloque cúbico con su superficie subdividida de modo que cada cara consiste en nueve cuadrados. Cada cara se puede rotar, dando el aspecto de una rebanada entera del bloque que rota sobre sí mismo, está compuesto de 27 cubos más pequeños ($3 \times 3 \times 3$), denominados sub-cubos. El objetivo básico del juego es restaurar el cubo a su condición original. Se deben utilizar las diferentes rotaciones que el cubo permite, en cada uno de sus lados, para ir llevando cada pieza de éste a su correcta ubicación, logrando así que cada cara sea de un único color. Para poder armarlo se requiere una serie de procedimientos basados en notaciones, sin embargo esta ocasión, debido al tiempo limitado de la sesión, sólo se llevó a cabo dos de los siete pasos. Para una mejor comprensión de dichas instrucciones, se les proporcionó los nombres de las partes del cubo de Rubik (Figura 38). Además se les dio las siguientes premisas: “Los centros son los únicos que permanecen en su lugar”, “cada arista tiene dos colores y cada esquina tres”.

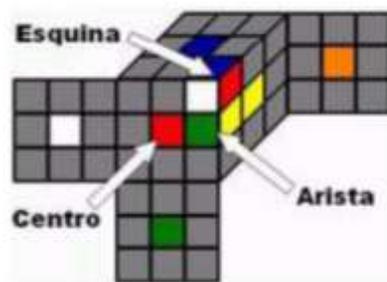


Figura 38. Partes del cubo de Rubik

Después de ello, se les pidió hacer el paso 1 y 2:

Paso 1. Cruceta inicial. El primer paso consiste en crear una cruz en una cara, como se observa en la Figura 39. Para esto basta llevar las cuatro aristas de dicha cara a su posición. Si cada arista tiene dos colores, por tanto un color es el de la cara que se utiliza para hacer la cruz y el otro color debe coincidir con el color del centro adyacente.

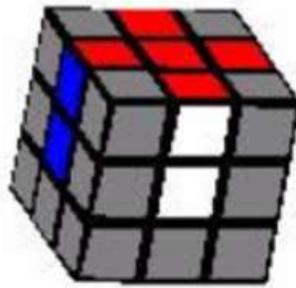


Figura 39. Paso 1 del cubo de Rubik

Paso 2. Primera capa. El segundo paso implica mayor complejidad que el primero, ya que es necesario conservar su resultado (aunque en pasos intermedios se llegue a perder). Consiste en terminar la primera capa del cubo. Para ello basta llevar las cuatro esquinas de la cara que se había empezado en el paso 1 con la orientación correcta, de cada uno de sus centros adyacentes, tal como se observa en la Figura 40.

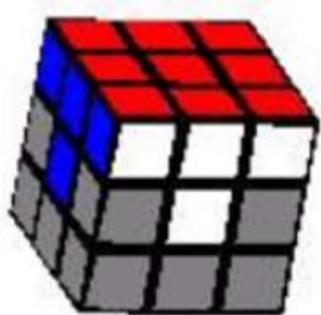


Figura 40. Paso 2 del cubo de Rubik

Resultados generales lógica proposicional. Como se puede observar en la Figura 41, ningún alumno tuvo un nivel de desempeño en fase inicial, 4 alumnos en la fase de adquisición, es decir, han logrado reflexionar sobre las premisas, pero aún había dificultad en concluir de forma lógica. Por otro lado 5 alumnos lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, los que significa que fueron capaces de reflexionar sobre las premisas y realizaron una conclusión correcta.

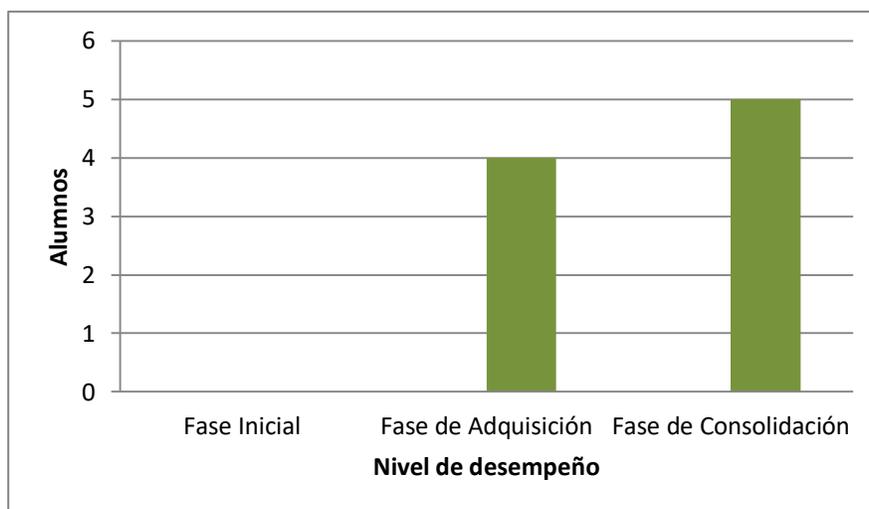


Figura 41. Resultado de la relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 9 en el área de lógica proposicional

Resultados Individuales en el área de lógica proposicional. Esta sesión fue una actividad motivadora para los alumnos, ninguno conocía que existiera algún método para armarlo y algunos expresaron siempre haber querido hacerlo, inclusive uno de ellos expresó “quiero quitarlo de mi lista de deseos”. Aunque es una actividad lúdica interesante, llevar todos los pasos resultó algo complicado debido al tiempo límite, es por ello que se les proporcionó algunas herramientas electrónicas como aplicaciones para celular con este juego, videos tutoriales y una hoja con los algoritmos del cubo y así continuar la actividad fuera del taller. Además la participación y la interacción entre el grupo aumentó.

Con respecto al nivel de desempeño durante la sesión, como se observa en la Tabla 19, presentaron algunas mejoras, todos lograron armar el paso 1, aunque se les dificultaba encontrar la lógica de las aristas y sus movimientos, como es el caso de Fernanda y Julio. Por otra parte han logrado ser más perseverantes en las actividades, intentando reflexionar un poco más. Para Jair encontrar los movimiento fue más sencillo, sin embargo también presentó dificultad en la reflexión de las premisas para concluir. En el caso Alin, Laura, Lorena y Sergio y Yoel, además de que lograron un avance más significativo su confianza aumentó, disminuyendo sus preguntas sobre sus conclusiones, reflexionando más sobre las premisas antes de responder.

Tabla 19.
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 9 en Lp.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Mantiene la atención en armar el cubo Logra armar el paso 1 Dificultad en buscar los movimientos del cubo en el paso 2 Compara sus respuestas con el cubo
Fernanda	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Mantiene atención en armar el cubo de Rubik Logra hacer el paso 1, con ayuda Su conclusión es incompleta, solo menciona los colores repetidos
Jair	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Se mantiene atento a la actividad Cambia de cara, si no los logra en una Logra hacer el paso 1 y 2 Hizo un diagrama de árbol para buscar todas las combinaciones, solo considera las que se repiten.
Julio	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez.	Se mantiene atento a la actividad Dificultad en realizar el paso 1, confunde los movimientos del cubo. Anotó todas las combinaciones, pero su conclusión fue incorrecta.
Laura	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Participación activa Es persistente Consigue hacer el paso 1 y 2 Su conclusión es correcta
Lorena	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Logra hacer el paso 1, con ayuda Dificultad en el paso 2 Logra concluir correctamente
Sergio	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Se mantiene atento a la actividad Cambia de cara si en una puede Dificultad en el paso 2 Empieza a hacer un diagrama de árbol, antes de terminarlo, se percata de lo poco eficiente diciendo “para que hago esto”.
Yoel	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica	Se concentra en la actividad Logra hacer paso 1 y 2

entre dos premisas.

Antes de responder solo observó su cubo

Concluye correctamente

En la Figura 42, se puede apreciar un ejemplo de evaluación formativa de esta sesión. En el caso 1, el alumno no se percató de las caras contrarias, puesto que concluyó diciendo que todas las combinaciones existen, considerándolo con un nivel de desempeño en la fase de adquisición. En el caso 2, el alumno logró percatarse de las caras contrarias, además de considerar los colores repetidos.

Caso 1

Porque solo ay 4 aristas y
4 esquinas

Caso 2

Los colores opuestos de cada cara
del cubo.

Figura 42. Ejemplo de evaluación formativa de la sesión 9 de Lp

Resultados generales en el área de razonamiento científico. En la Figura 43 se presenta el nivel de desempeño de esta sesión en el área de razonamiento científico, donde se observa que ningún alumno estuvo en la fase inicial, solo un alumno tuvo un nivel de desempeño en la fase de adquisición, es decir, aún tiene dificultad en comprobar sus hipótesis. Por otro lado 7 alumnos lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, dado que son capaces de generar hipótesis y comprobarlas de forma sistemática.

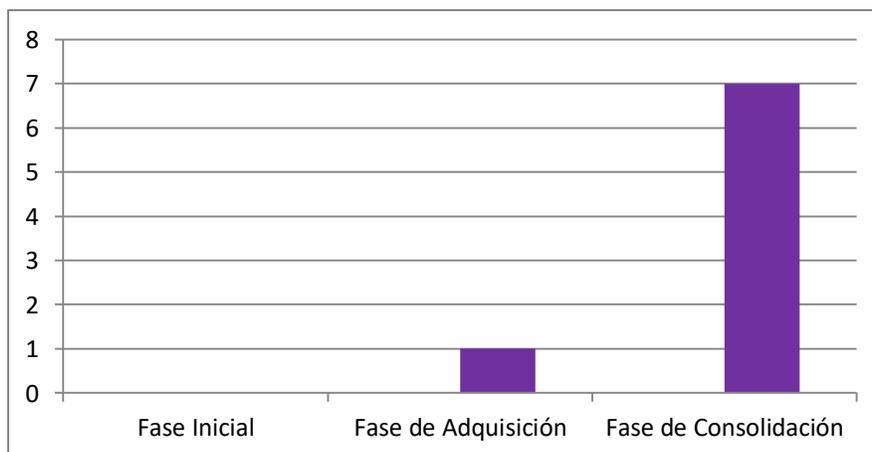


Figura 43. Resultado de la relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 9 en el área de razonamiento científico.

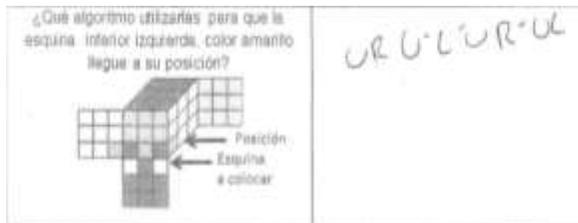
Resultados individuales en el área de razonamiento científico. Como se puede observar en la Tabla 20, los alumnos han logrado comprobar cada una de sus hipótesis, aunque aún tienen dificultad de pensar en varias hipótesis a la vez o bien considerar diversos factores antes de concluir, experimentan para lograr una mejora en su respuesta. Tal es el caso de Fernanda y Jair, quienes aún no consideraban todos los factores, creaban hipótesis y los comprobaban, si resultaba falsa, volvían a intentarlo. Para Julio fue más difícil comprobar, dando por hecho su hipótesis, lo que impidió percatarse de otros factores. Por otro lado Alin, Laura, Sergio y Yoel de forma sistemática comprobaban antes de dar su conclusión final, permitiendo así considerar varios factores, como la colocación de los centros, las aristas y las esquinas de la cara de su selección, rectificándolo con la cara opuesta u otra cara del cubo.

Tabla 20.
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 8 en Rcf.

Alumno	Nivel de Desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Para justificar su respuesta los comprobó armando y desarmando dos caras.
Fernanda	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Creo una hipótesis, las comprueba, considera varias opciones aunque le salen incorrectas.
Jair	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Comprueba su hipótesis con más de una cara, sigue intentando, aunque solo realiza una hipótesis, la comprueba.
Julio	Fase de Adquisición Genera hipótesis de forma lógica, las justifica pero no las comprueba	Intenta justificar, pero no comprueba
Laura	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Comprueba con más de una cara y justifica
Lorena	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Observa su cubo, justifica, y comprueba con más de dos caras.
Sergio	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Observa el cubo Logra comprender los movimientos del cubo Comprueba con más de una cara
Yoel	Fase de Consolidación Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Logra comprender los movimientos del cubo. Comprueba con la cara contraria a la que hizo

Como se observa en la Figura 44, en el ejemplo de evaluación formativa en el área de razonamiento científico, en el caso 1, el alumno solo respondió, pero en las observaciones no comprobó su respuesta, es por ello que su nivel de desempeño se calificó en fase de adquisición. En el caso 2, el alumno comprobó su hipótesis y su comprobación resultó correcta, además de percatarse de más factores como los colores de las caras contrarias.

Caso 1



Caso 2

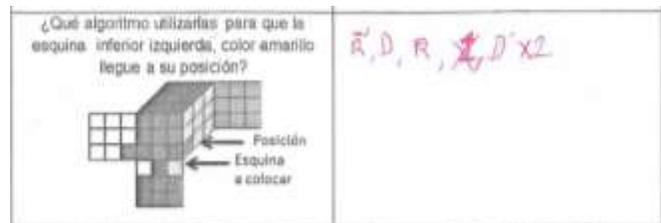


Figura 44. Ejemplo de evaluación formativa de la sesión 9 en el área de Razonamiento Científico

Sesión 10 Grandes Juegos

“Grandes Juegos” fue la última sesión del programa, integrando cada una de las actividades lúdicas de las sesiones anteriores.

Como se ha mencionado en capítulos anteriores, desde la perspectiva de Piaget, existen tres tipos de conocimientos, el físico o la interacción con el objeto; el conocimiento lógico-matemático y el conocimiento social, donde utiliza a la sociedad como su fuente del conocimiento, por medio de la interacción grupal. Estos tres conocimientos interactúan entre sí y a medida que el niño tiene contacto con los objetos del medio (conocimiento físico) y comparte sus experiencias con otras personas (conocimiento social), mejora la estructuración del pensamiento lógico-matemático. Es por ello que en esta sesión se manejaron todas las actividades en equipo con su evaluación correspondiente de cada área. Se les proporcionó cuatro tarjetas con los juegos que ya conocen, al azar, para después resolverlas de forma grupal. Esto fue con el propósito de que el alumno con BRI pudiera compartir sus experiencias dentro del programa, reforzando su pensamiento lógico-matemático.

Resultados generales de lógica Proposicional. Como se puede observar en la Figura 45, ningún alumno tuvo un nivel de desempeño en la fase inicial, 3 alumnos concluyeron el programa con un nivel de desempeño en la fase de Adquisición, lo que significa que aún presentan un área de oportunidad en concluir. En el caso de los 5 alumnos que lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, lograron ser capaces de hacer una inferencia lógica sobre las premisas.

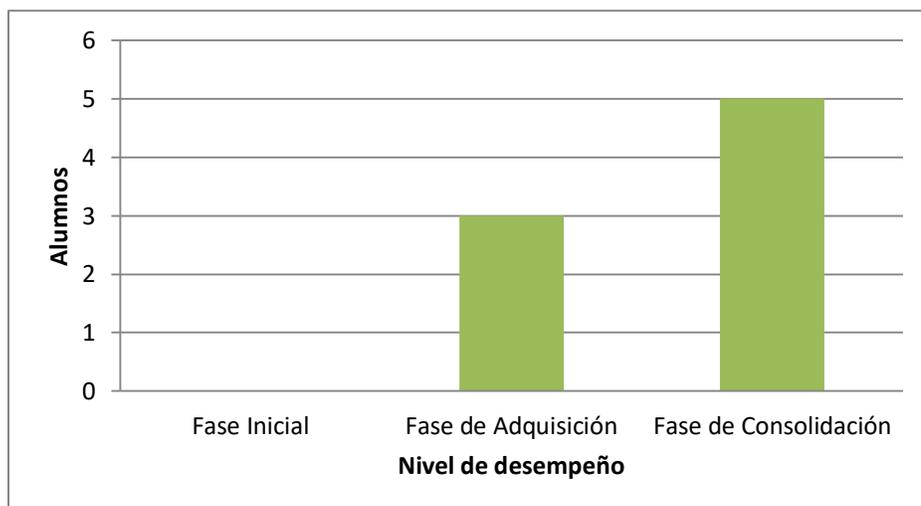


Figura 45. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 10 en el área de lógica proposicional.

Resultados individuales en el área de lógica proposicional. Como se puede observar en la Tabla 21, durante esta sesión los alumnos presentaron mayor participación. En algunos casos como el de Fernanda, Julio y Yoel en un principio disminuyó su interacción, pero al tener la oportunidad de explicar el juego a sus compañeros invitados, la interacción aumentó, además de aumentar la participación. Por otra parte Alin, Laura y Sergio presentaron más confianza, aumentando su entusiasmo y su participación. Con respecto al nivel de desempeño, se observa una mejora, ya que se percataban de validar las premisas antes de contestar, sin embargo para Fernanda, Julio y Lorena presentaban mayor dificultad para reflexionar y a partir de las premisas poder inferir. Por otra parte Alin, Jair, Laura, Sergio y Yoel, presentaron mayor sistematización en la inferencia a partir de dos premisas, tomando en cuenta y proponiendo sugerencias para la resolución de cada una de las actividades.

Tabla 21.
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 10 en Lp.

Alumno	Nivel de desempeño	Observaciones durante la sesión
Alin	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Mayor entusiasmo en las actividades, Mayor facilidad en reflexionar sobre las premisas Resolvió el nivel de 6 discos de la torre de Hanoi
Fernanda	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez del argumento	Ayudaba a su compañero si tenía alguna duda de las actividades
Jair	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Logró resolver tres acertijos de palillos lógicos
Julio	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez del argumento	Presentó poca participación al principio Resolvió con ayuda la torre de Hanoi con 5 discos
Laura	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Mantuvo su participación y disminuyó timidez Resolvió la primera capa de cubo de Rubik
Lorena	Fase de Adquisición Concluye basándose en la veracidad, más que en la validez del argumento	Mayor participación y entusiasta Ayuda a sus compañeros invitados y escucha sus estrategias Resolvió dos acertijos de los palillos lógicos con ayuda
Sergio	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma lógica entre dos premisas.	Mantiene su entusiasmo y su participación activa Menciona que uno de los compañeros invitados es su mejor amigo Resolvió primera y segunda capa de cubo de Rubik
Yoel	Fase de Consolidación Tiene la capacidad de reflexionar de forma	Mantiene participación En un principio presenta poca interacción

Resultados generales de razonamiento científico. En el caso del área de razonamiento científico, como se observa en la Figura 46, ningún alumno tuvo un nivel de desempeño en la fase inicial, misma situación ocurrió con el nivel de desempeño en fase de adquisición, los que significa que los ocho alumnos que asistieron a esta última sesión lograron un nivel de desempeño en la fase de consolidación, es decir, terminaron el taller con la capacidad de generar y comprobar hipótesis.

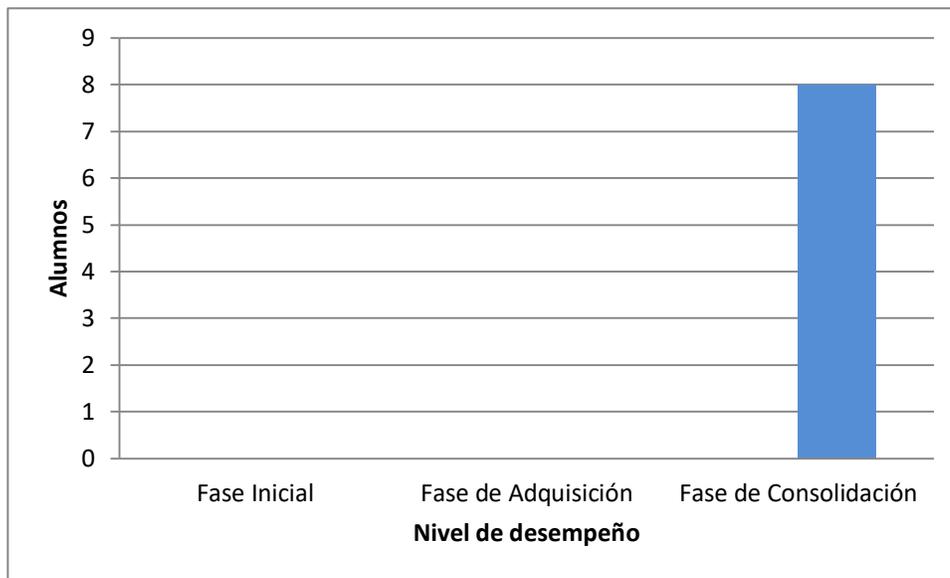


Figura 46. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 10 en el área de razonamiento científico.

Resultados individuales en el área de razonamiento científico. En la Tabla 22 se presenta el nivel de desempeño que tuvieron los alumnos en la última sesión, además de las actividades que realizaron con la intención de evaluar el área de razonamiento Científico. Como se puede observar las actividades fueron variadas y en algunos casos se les pidió que realizarán preguntas sobre el juego e intentarían responder de forma hipotética, además de resolver los juegos que les correspondía. De forma sistemática generaban y comprobaban sus hipótesis, dando a conocer esto a sus compañeros invitados. Un caso interesante fue el de Fernanda, quien intenta explicar a

su compañero invitado la importancia de comprobar antes de dar una conclusión, le dice en el juego de solitario chino “Hay que considerar que movimientos nos puede funcionar y luego movemos la bolita, para no tener que repetir”. Aunque no lograron resolver el juego, logró concebir la idea de generar y comprobar hipótesis.

Tabla 22.

Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 10 en Rfc.

Alumno	Nivel de desempeño	Observaciones
Alin	Fase de Consolidación	Hizo la explicación del truco de Magia
	Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Complementa su hipótesis con su compañero invitado
Fernanda	Fase de Consolidación	Realiza preguntas sobre el juego del solitario chino
	Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Ayuda a su compañero invitado y le recuerda la importancia de comprobar.
Jair	Fase de Consolidación	Explica el truco de Magia con apoyo de su compañero invitado y escucha sugerencias.
	Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	
Julio	Fase de Consolidación	Gana una partida de ajedrez con peones y torre.
Laura	Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	
	Fase de Consolidación	Gana partida de ajedrez con peones y torres
Lorena	Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	Explica y comprueba jugadas de ajedrez a su compañero invitado.
	Fase de Consolidación	Resuelve solitario chino y se apoya de las sugerencias de su compañero invitado
Sergio	Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	
	Fase de Consolidación	Encuentra patrón de torre de Hanoi con 5 discos con ayuda de su compañero invitado
Yoel	Genera y comprueba hipótesis de forma lógica y sistemática	
	Fase de Consolidación	Crea preguntas sobre solitario chino y logra resolverlo.

Resultados generales de razonamiento combinatorio. Como se aprecia en la Figura 47, el nivel de desempeño es bajo en comparación de las sesiones anteriores, aunque no hubo algún alumno en la fase inicial, 4 alumnos tuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, es decir, tienen la capacidad de crear procedimiento, pero aún tienen dificultad en concebir todas las posibilidades, En el caso de los alumnos que finalizaron el taller con un nivel de desempeño en la fase de consolidación, los alumno lograron realizar procedimientos efectivos, que les permitiera ver todas las posibilidades posibles.

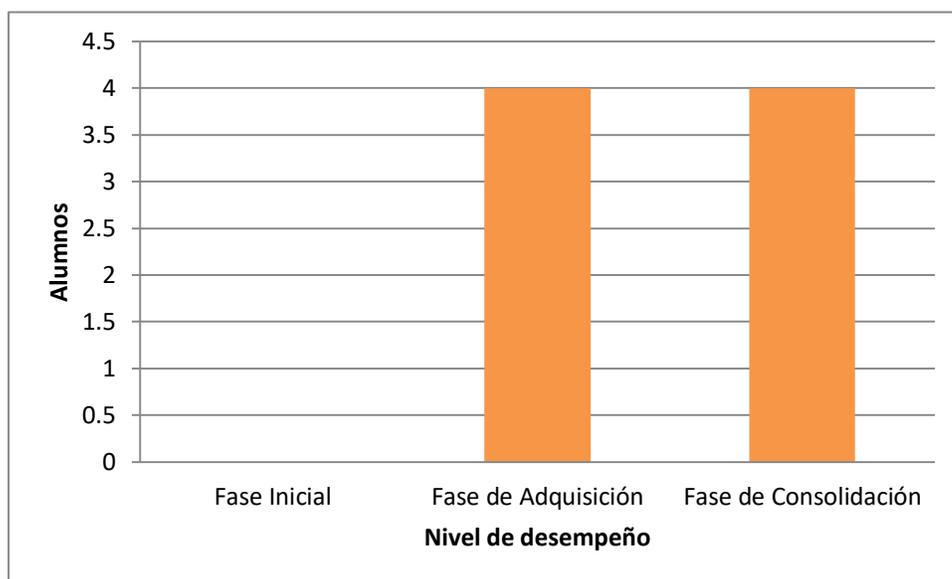


Figura 47. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 10 en el área de razonamiento combinatorio.

Resultados individuales de razonamiento combinatorio. En la Tabla 23 se presenta el nivel de desempeño que tuvieron los alumnos en la última sesión, además de las actividades que realizaron con la intención de evaluar el área de razonamiento combinatorio. Se puede observar que los alumnos lograron un mejor nivel de desempeño en las actividades de dómينو, en comparación de los palillos lógicos, presentando mayor dificultad en considerar estrategia para poder encontrar todas las posibilidades, tal es el caso de Julio y Lorena, quienes resolvieron los acertijos con palillos lógicos con ayuda de sus compañeros invitados, aunque resolvieron las ecuaciones, no lograron ver más de una solución. Por otra parte Fernanda quien también tuvo un nivel de desempeño en la fase de adquisición, se le dificulta encontrar todas las combinaciones que pueden existir en el rompecabezas, aunque estuvo apoyando a su compañero invitado, no

logró observar todas las posibilidades. En el caso de Alin, Jair, Sergio y Yoel, quienes realizaron una actividad con domino, se les facilitó encontrar todas las combinaciones, creando sus propias estrategias. Laura quien también tuvo un nivel de desempeño en la fase de consolidación, logró una mejora en los palillos lógicos, logrando ver más de una respuesta.

Tabla 23.

Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 10 en Rc.

Alumno	Nivel de desempeño	Observaciones
Alin	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Logra crear procedimientos y concebir las combinaciones del domino.
Fernanda	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Armar el rompecabezas de domino, escucha sugerencias de su compañero invitado y propone sugerencia, pero no logra concebir todas las combinaciones.
Jair	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Logra armar rompecabezas de domino
Julio	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Resuelve ecuación con palillos lógicos con ayuda de su compañero invitado No observó más de una solución por sí mismo.
Laura	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Resuelve dos ecuaciones con los palillos lógicos
Lorena	Fase de Adquisición Intenta buscar un procedimiento, pero no concibe todas las posibilidades	Se apoya en su compañero invitado a resolver los palillos lógicos, no logra ver más de una solución.
Sergio	Fase de Consolidación Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.	Logra resolver las combinaciones del rompecabezas de domino

Tiene un procedimiento y concibe todas las posibilidades.

Resultados generales de razonamiento probabilístico. Como se observa en la Figura 48, al igual que en el área de razonamiento combinatorio, ningún alumno estuvo en la fase inicial, 4 estuvieron en la fase de adquisición, los que significa que aún tienen dificultad en considerar sucesos aleatorios y cambiar su estrategia y los 4 alumnos restantes en la fase de consolidación. Han logrado incorporar cambios ante sucesos aleatorios, conforme obtienen nueva información.

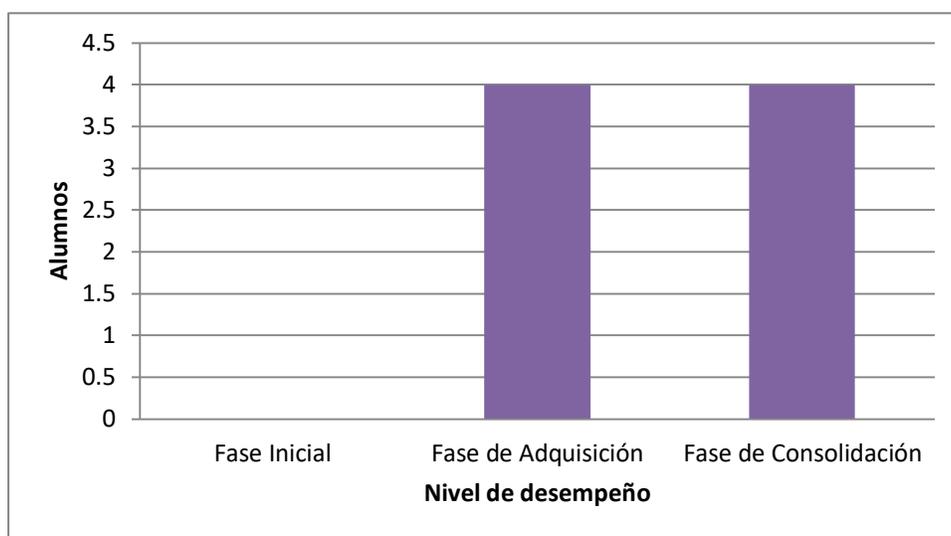


Figura 48. Resultado de la Relación entre el número de alumnos y el nivel de desempeño en la sesión 10 en el área de razonamiento probabilístico.

Resultados Individuales del área de razonamiento probabilístico. En la Tabla 24 se presenta el nivel de desempeño que tuvieron los alumnos en la última sesión, además de las actividades que realizaron con la intención de evaluar el área de razonamiento probabilístico. Como se puede observar, el ajedrez y el domino fueron los juegos que se utilizó para evaluar esta área. En el caso de Fernanda, Julio, Lorena y Sergio, quienes lograron un nivel de desempeño en la fase de adquisición, presentaron dificultad en crear estrategias en el momento que le permitieran predecir los movimientos de sus oponentes y así aumentar la probabilidad de ganar la partida. Por otra parte Alin, Laura, Jair y Yoel, lograron desarrollar esta área, ganando partidas y considerando más posibilidades para lograr su objetivo.

Tabla 24.
Nivel de desempeño y observaciones individuales de la sesión 10 en el área de razonamiento probabilístico.

Alumno	Nivel de desempeño	Observaciones
Alin	Fase de Consolidación Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio.	Ganó partida de ajedrez
Fernanda	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Dificultad en considerar nuevas estrategias para predecir los movimientos de su oponente en el domino
Jair	Fase de Consolidación Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio.	Gana partida de domino y utiliza la hoja de apoyo
Julio	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Aún presenta dificultad en predecir los movimientos de su contrincante en el ajedrez
Laura	Fase de Consolidación Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio.	Gana partida de domino
Lorena	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Dificultad en observar los movimientos de su oponente en el domino, se enfoca en tirar las de mayor valor.
Sergio	Fase de Adquisición Concibe los sucesos aleatorios, pero tiene dificultad de cambiar la estrategia.	Dificultad en el ajedrez, se enfoca más en como comer que en hacer jaque mate.
Yoel	Fase de Consolidación Concibe las posibilidades y cambia su estrategia según el suceso aleatorio.	Gana partida de ajedrez con peones, torres y alfil Concibe todas las posibilidades para evitar que le hagan jaque.

Evaluación Sumativa

A continuación se presenta en la Tabla 25 los resultados de la prueba no paramétrica de Wilcoxon para muestras relacionadas del Test de Matrices progresiva de Raven versión Avanzada, donde se observan diferencias estadísticamente significativas en las habilidades intelectuales de alumnos de Bajo Rendimiento Intelectual a través de la instrumentación del programa ($z = -2.524$; $p < .05$).

Tabla 25.
Prueba no paramétrica del Test de Matrices Progresivas de Raven

Estadísticos de contraste ^a	
	P_TOTAL_SERIE2 - TOTAL_SERIE2
Z	-2.524 ^b
Sig. asintót. (bilateral)	.012

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

b. Basado en los rangos negativos.

Dichos resultados se reflejan en la comparación de medias de la Figura 49, donde hay $M=10$ antes del programa y $M=14.3$ después del programa.

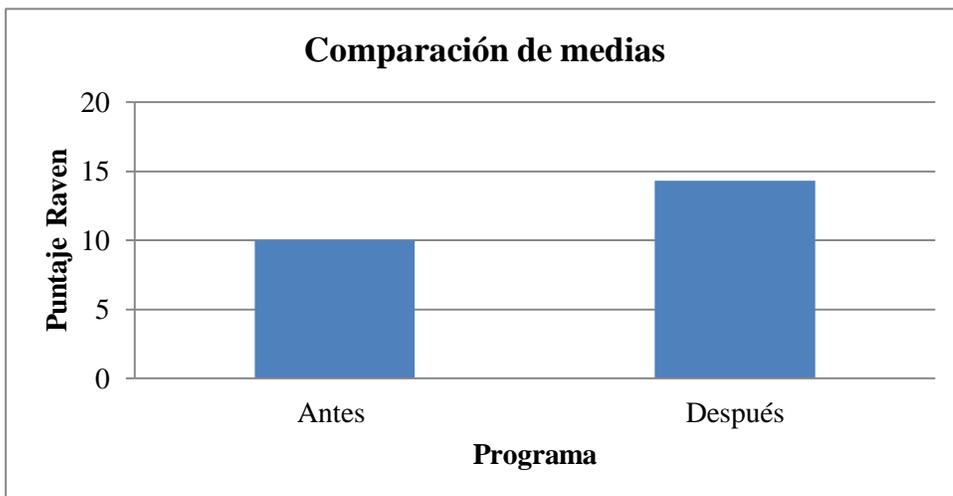


Figura 49. Comparación de medias antes y después del taller.

Como se puede observar, en la Tabla 26 se encuentra la comparación de Puntaje por el alumno antes y después del programa, siendo Alin la alumna con mayor puntaje de diferencia entre el antes y el después y Lorena la alumna con una nula diferencia de puntaje.

Tabla 26
Comparación de Puntaje por alumno antes y después del programa

Alumno	Antes	Después
Alin	7	19
Fernanda	8	13
Jair	8	10
Julio	12	13
Laura	11	17
Lorena	11	11
Pamela	6	9
Sergio	17	20
Yoel	10	17

Evaluación Social

Como parte de este trabajo, se contó con la validación social de los alumnos participantes, expresando su opinión respecto a su propio desempeño dentro del programa. Esto como un aspecto fundamental en el desarrollo intelectual y autoimagen del adolescente.

Entre los aprendizajes que mencionan haber desarrollado, se encuentra la lógica y la observación como parte esencial en su crecimiento académico, la cual mencionan de la siguiente forma:

“... Las actividades me sirvieron para que en cualquier materia use más la lógica y razonar las causas de las cosas” Sergio

“Aprendí a ser más observadora y usar la lógica y también a convivir con las personas”. Yoel

“Aprendí a ser más comunicativo, a tener otras formas de ver las cosas, que hay más de una forma de resolver problemas y una perspectiva diferente, Jair“

...a aplicar métodos de observación que me han servido de mucho” Laura

Como se puede observar, los alumnos lograron captar el objetivo del programa y su funcionalidad en la vida cotidiana, tal como los menciona Piaget (1954) al decir la importancia de que el individuo establezca.

En la parte adaptativa, se observa una mejora en el autoimagen expresando lo siguiente:

“Lo que aprendí es que puedes ser tu misma sin que nadie te juzgue. Que trabajar en equipo es mejor que sólo y si no entiendes algo te pueden ayudar. Pudimos resolver problemas... “ Alin

“Aprendí a convivir más con otros compañeros de los demás salones. Aprendí a ser yo misma” Pamela

“...También aprendí a desarrollar diversas habilidades como la creatividad, la paciencia, el conocimiento de mi misma (que por cierto todo lo anterior me hacía falta desarrollar demasiado)” Laura

Además de sentir una mayor adaptación a su entorno, disminuyendo la marginación escolar en la que se sentían, aceptando la diversidad en su entorno:

“...a que debe haber mayor comunicación y el respetar compañeros que todos somos diferentes.” Jair

“Ser más sociable, hablar más con los demás y no ser tan callado con las personas y no amargarme tanto la vida” Julio

“Del taller aprendí a trabajar en equipo, apoyo mutuo, relacionarme con personas que no son de mi grupo...” Sergio

Como se puede observar existe una interacción entre los compañeros, cumpliendo uno de los propósitos expuestos por Acle (2013), Begona, Mercado y García (2015) quienes mencionan que una intervención adecuada en el alumno con alguna necesidad educativa especial debe favorecer su funcionamiento social dentro de los planteles regulares.

Otro aspecto a reconocer dentro del programa se marca en la teoría del juego, donde se menciona que en el individuo llega a existir un equilibrio sutil entre la asimilación del Yo y la vida social además de una satisfacción sensorio-motora o intelectual y además tiende a la victoria del individuo sobre los demás en una moral del honor (Piaget, 1991).

“Aprendí varias cosas, como hacer pulseras, como armar un cubo, aunque no aprendí a armarlo bien, pero lo que más me gustó fue jugar ajedrez y ganar!!! Estas clases me parecieron, ya aprendí varias cosas. Gracias!!” Lorena

“Pues a mí me gustó mucho todas las clases en general, porque la maestra es muy divertida y es buena onda y pues yo aprendí muchas cosas como el cuadro de colores y como se juega el ajedrez y muchas cosas más divertidas” Fernanda

“Fue muy divertido, lo disfrute mucho en lo que duró. La maestra fue linda con nosotros” Alin

Aprendí a socializar de una manera divertida y en general todas las actividades que se hicieron me gustaron y no cambiaría nada porque los procesos fueron muy buenos. Thank you por todo” Laura

Dentro de las variables no consideradas en esta investigación, que influyeron en el conocimiento social del adolescente se encuentra la creatividad, expresada de la siguiente forma:

*“Lo que aprendí fue a proceder con una resolución de problemas de manera creativa, en donde tomé en cuenta el mayor número de puntos de vista y perspectivas para tomar decisiones...”.*Laura

Ante esta opinión , Torrance (2008) menciona que la creatividad es considerada como un proceso cognitivo, más en específico, como la capacidad para innovar, resolver problemas y asumir riesgos, en contextos y situaciones marcadas por cambios constantes, que requieren la divergencia y la discontinuidad del pensamiento, los que resulta una variable favorable para investigaciones futuras.

Capítulo V

Discusión y Conclusión

Actualmente el sistema educativo mexicano ha realizado diversas modificaciones para apoyar a la inclusión de los alumnos que presentan alguna necesidad educativa especial con o sin discapacidad, sin embargo la Educación Especial ha pasado por desapercibido a la población con Bajo Rendimiento Intelectual, siendo una de las categorías que se encuentran en una posición de desventaja respecto a sus compañeros, ya que sus dificultades adaptativas y sus habilidades cognitivas, según algunas investigaciones, pueden constituirse como un factor de riesgo educativo (Meléndez, 2008; Carulla, García, Ruiz, Artigas, García & González 2013). En lo que respecta a las propuestas de intervención, han sido pocas las investigaciones donde se ha considerado una propuesta a nivel secundaria, lo que resulta importante, ya que es donde se presenta más dificultad de adaptación ante las exigencias de su entorno y donde mayor exclusión escolar existe (Edad, 2008). Es por ello que esta investigación, se orientó en la atención de los adolescentes con Bajo Rendimiento Intelectual a nivel secundaria. Con el propósito de aumentar sus habilidades intelectuales, se pretendió fortalecer el pensamiento lógico-matemático a través de actividades lúdicas, considerando la teoría constructivista de Piaget (1975) donde describe cuatro áreas lógicas, que permiten, al adolescente la formación de un pensamiento lógico matemático a un nivel más abstracto, las cuales son: lógica proposicional, razonamiento científico, razonamiento combinatorio y razonamiento probabilístico.

En lo que respecta a los resultados expuestos en el área de la lógica proposicional, se encontró que los alumnos con BRI, en un principio solo llegan a aceptar conclusiones, sin considerar la validez de las premisas o no intentaban reflexionar sobre las mismas, coincidiendo con Deval (1975), quién menciona que no todos los adolescentes, son capaces de formalizar deducciones a partir de las premisas, dado que algunos llegan aceptar las conclusiones solo por estar de acuerdo con ellas. Aunque los resultado presentan que no todos lograron consolidar esta área, los avances se observaron cada sesión a través de las rubricas de evaluación, de cada alumno, lo cual revela que los alumnos empiezan a identificar premisas y conclusiones, falacias lógicas, distinguir entre argumentos válidos e inválidos, etc. Este hallazgo no solo favoreció a las habilidades intelectuales de los adolescentes participantes, sino también a la independencia y el interés, ya que al escuchar e interactuar con sus compañeros, basándose de su propias

experiencias, al manipular el material de cada sesión, la mayoría fue capaz de defender su punto de vista, aumentando de forma significativa su participación, disminuyendo la ayuda del aplicador, lo que comprueba lo dicho por Piaget (1991) cuando menciona que el infante construye su propio conocimiento a partir de la acción con su entorno.

En cuanto al área de razonamiento científico, se sabe que el generar y comprobar una hipótesis de forma sistemática es lo que diferencia la etapa de operaciones concretas con la etapa formal (Meece, 2000). Durante las sesiones, los alumnos generaban hipótesis, pero no las comprobaban previo a una respuesta definitiva, lo que provocaba una incorrecta resolución del juego. Después de varios intentos fallidos, conforme iba avanzando el programa, los alumnos consideraban la comprobación como un paso importante antes de actuar. Durante este proceso se pudo observar lo que Piaget (1977) llamó “conflictos cognitivos”, ya que el alumno aprendió de sus propias ideas espontáneas al entrar en conflicto con los resultados experimentales y a su vez la misma experiencia, el sujeto intenta relacionar sus conocimientos y experiencias previas con los nuevos problemas para crear nuevos esquemas de forma autónoma, lo que resulta un avance importante en el alumno con Bajo Rendimiento Intelectual, quien es caracterizado, según León y Salvador (2007), por tener dificultad en poner en práctica los conocimientos adquiridos y resolver problemas cotidianos. Estos mismos autores, también hacen mención de algunas fortalezas de esta población, una de ellas es el razonamiento perceptual, el cual se pudo fortalecer, dado que en todas las actividades se les motivaba a observar cuidadosamente el juego antes de contestar, permitiendo al alumno reconocer y comparar la información visual para después generar hipótesis sobre esa misma información. Existe la posibilidad de que dicha fortaleza sea un factor importante para que todos los alumnos hayan logrado consolidar esta área.

Al igual que las anteriores áreas, el nivel de desempeño del área de razonamiento combinatorio, también tuvo un avance significativo en la consideración de causas múltiples. Sin embargo, aún existen algunas áreas de oportunidad, como los esquemas de control de variables, ya que existen dificultades en crear estrategias que les permita ir variando sistemáticamente un factor del problema, mientras mantiene constantes los restantes factores. A esta observación, Fischbein y Gazit (1988, citado en Navarro, 1996) la denominó “*error de orden*”, el cual consiste en confundir los criterios de combinaciones y variaciones; es decir, considerar el orden de los elementos cuando es irrelevante o, al contrario, no considerar el orden cuando es esencial. Por

tanto estos resultados, ponen en manifiesto que los adolescentes con BRI que no lograron consolidar el área del razonamiento combinatorio, requieren desarrollar técnicas combinatorias. Un ejemplo claro, fue el diagrama de árbol que comúnmente utilizaban los alumnos que sí lograron consolidar esta área. Ante esta observación, sería importante retomar en investigaciones futuras, las aportaciones de Fischbein (1975), quien señala que el razonamiento combinatorio no siempre se alcanza en las edades que sugiere Piaget (11-13 años), y que para ello es necesario una instrucción que permita crear técnicas combinatorias para la resolución de problemas.

La última área a mencionar es el razonamiento probabilístico. Como se mencionó en el marco teórico, Piaget e Inhelder (1997) mencionan que se requiere la capacidad del razonamiento combinatorio para adquirir el razonamiento probabilístico, ya que se necesita una serie de estrategias que permitan entrelazar la nueva información con la ya existente. Dicho esto, se pudo observar en los resultados, que en efecto, los alumnos que lograron consolidar el razonamiento combinatorio, tuvieron mayor capacidad de incorporar cambios en el grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que iban adquiriendo nueva información, situación similar sucedió con los alumnos que obtuvieron un nivel de desempeño en la fase de adquisición en el área de razonamiento combinatorio, quienes presentaron dificultad en cambiar sus estrategias ante la nueva información.

Por otro lado, algunas contribuciones importantes que posibilitaron los hallazgos anteriores es la presencia de las actividades lúdicas, ya que resultaron ser una herramienta de trabajo útil en el adolescente con BRI, poniendo en práctica el conocimiento físico al tener la posibilidad de manipular el material, experimentar, sacar sus propios aprendizajes ante problemáticas que el alumno consideró significativas. Por otra parte, el conocimiento social también tuvo un aporte sobresaliente para la eficacia de este programa, principalmente en las actividades competitivas como el ajedrez y dómينو, dando una satisfacción por el triunfo y el honor. Además de experimentar sus propias habilidades sociales, trabajando de manera colaborativa para la resolución de las actividades, comparando e intercambiando ideas, siguiendo un mismo ritmo de aprendizaje, facilitando el mejoramiento de las habilidades intelectuales. Junto a lo anterior, el modelo piagetiano propone una concepción del desarrollo donde inteligencia y socialización evolucionan simultánea y paralelamente hacia formas más avanzadas de equilibrio (Piaget 1975). Esto representa un logro aún mayor en los adolescentes con BRI, ya que investigaciones han

observado que esta población se llega a sentir marginal dentro del aula (Atuesta & Vásquez 2009; Medina, Mercado y García, 2015), comportamiento que se presentó en las primeras sesiones, al dejar su evaluación en blanco, hablar poco o no hablar y la preferencia por hacer las actividades de forma individual, pero, con el paso de las sesiones, su autoimagen y su aprendizaje activo, según la validación social presentada dentro del programa, fue en aumento. Unido a todo lo anterior, Mena (2001), menciona que los materiales al ser utilizados de forma planificada y organizada ayudan al alumno a incrementar la motivación además de ser capaces de sentir que su participación es importante, complementando con Piaget (1991), cuando apunta que es el niño mismo el que construye sus propias relaciones en sus estructuras cognitivas, a través del desarrollo y uso de diferentes operaciones en interacción con su entorno.

Por otra parte, los aspectos que influyeron negativamente en la investigación, uno de ellos fue la participación de pocos alumnos en el programa, lo cual se vio influido por varias razones: padres de familia no aceptaron que sus hijos participaran en el programa, manifestando preocupación en que sus hijos fueran a faltar a clases, aún con la previa información proporcionada sobre la dinámica y los apoyos por parte de los profesores, para que sus hijos no resultarían afectados por inasistencia. Otra situación fue la baja temporal de uno de los alumnos identificados con BRI. Por tanto no todos los alumnos con Bajo Rendimiento Intelectual fueron atendidos en este programa. Además los padres presentan mayor preocupación en la asistencia a clases que en el proceso de aprendizaje.

Una segunda limitación fue el tiempo limitado en las sesiones, ya que en algunas sesiones, la orientadora se presentaba con los alumnos en el lugar asignado para el programa, quince minutos después de la hora estipulada, además de retirarlos cinco minutos antes de la próxima clase. Esta limitación repercute en el proceso de aprendizaje, ya que según León y Salvador (2007) los alumnos con BRI, tienen una capacidad de aprendizaje lenta, lo que se encuentra ligado a las dificultades para poner en práctica los conocimientos adquiridos y resolver problemas, es decir, que los alumnos que no terminaban de completar el juego o no encontraban estrategias más elaboradas, pudieron haber necesitado más tiempo para completarlo. Ante esto se les proporcionaba ejercicios para elaborar en casa, solo para reforzar la actividad del día.

Otro aspecto negativo que pudo ser el mayor obstáculo, fue la falta de seguimiento entre una sesión y otra, ya que durante las semanas de exámenes se posponía las sesiones, además de

las esporádicas inasistencias de los alumnos. Esto pudo haber limitado el aumento en el nivel de desempeño entre una sesión a otra, requiriendo retomar los ejercicios anteriores para continuar la siguiente actividad.

En conclusión, el fortalecer el pensamiento lógico-matemático a un nivel más abstracto, en adolescentes con BRI por medio de actividades lúdicas, aumentó las habilidades intelectuales. Por tal motivo es necesario dar a conocer a los padres de familia y profesores la importancia, en primer lugar de identificar a esta población, tal como se vio en esta investigación, se encuentran presentes dentro del salón de clases y que no atendidos adecuadamente y en segundo la importancia de las actividades lúdicas como herramienta motivante al desarrollo lógico-matemático, además de dar continuidad a la planificación y aplicación de actividades que le permitan aumentar su nivel intelectual, complementando la información que se les da en clase, considerando someter al adolescente a problemas significativos que le permita crear conflictos cognitivos. Tal como señala Bachlerd (1938) *“Todo conocimiento es una respuesta a una pregunta”* sin olvidar que aquellas mentes brillantes que realizaron aportaciones en la civilización, crearon sus propios conocimientos a partir de la observación, las continuas preguntas y la experimentación. La adquisición de esta nueva forma de pensar (más abstracto, complejo, lógico y sistemático) capacita al individuo para afrontar en mejores condiciones las tareas evolutivas de la transición hacia la edad adulta. Su adquisición está condicionada a la experiencia de procesos educativos que faciliten su desarrollo, a través de la instrucción de contenidos y propuestas didácticas que favorezcan aprendizajes significativos desde esta perspectiva.

La revisión de esta investigación, sugiere que para investigaciones futuras, se tome en cuenta la influencia social como factor para alcanzar la etapa formal y como la transmisión cultural, entendida como interacciones del sujeto dentro del sistema educativo formal, se constituyen en un facilitador del desarrollo cognoscitivo en este período crucial de la vida de los individuos, donde el mismo construye sus conocimientos. Sin la escuela, en sus niveles más avanzados, el adolescente no alcanzará seguramente la compleja estructura de pensamiento que lo capacita para la solución de problemas abstractos y que caracteriza al estadio de las operaciones formales, sobre todo tomando en cuenta que la educación escolar guarda una alta relación con la clase social del individuo.

Referencias

- Algarra, M., Borges, C., García, I., Hernández V., y Hernández B., (2004). *Las Matemáticas Chinas*. España: Universidad de Deusto.
- Arancibia, V., Herrera, P. y Strasser, K. (2008) *Manual de Psicología Educacional*. Universidad Católica de Chile. Recuperado de: <https://bibliotecafrancisco.files.wordpress.com/2016/06/manual-de-psicologc3ada-educacional-arancibia-v-herrera-p-strasser-k.pdf>
- Araya, V. Alfaro, M. Andonegi, M. (2007) Constructivismo: Orígenes y perspectivas. *Laurus*. 13 (24), 76-92.
- Atuesta, J. Vázquez, R., Arruego, Z. (2008) Aspectos psicopatológicos del coeficiente intelectual limítrofe: un estudio en el Hospital de la Misericordia. *Revista Colombia Psiquiatría*, 37 (2), pp. 182-194.
- Avila, A. (2016) La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática*, 28 (3), 31-59. Recuperado de: <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v28n3/1665-5826-ed-28-03-00031.pdf>
- Batanero, C., Contreras, J. M. y Arteaga, P. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *Educação Matematica e Tecnológica Iberoamericana*, 2 (2), 1-20.
- Bonfil, R. G. (1992) *La revolución agraria y la educación en México*. México: INI-CONACULTA
- Boyer, Carl B (1986): *A history of mathematics*. (Versión DX Reader). New York: John Wiley & Sons Inc.
- Cajori (1909) *A History of de Mathematics*. (Versión DX Reader)London: Macmillan
- Cano, A (2007) Cognición en el adolescente según Piaget y Vygotski. ¿Dos caras de la misma moneda? *Boletim Academia Paulista de Psicologia*, 27 (2), 148-166.

- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.
- Cardenas, T. y Barraza. A. (2014) *Marco Conceptual y Experiencias de la Educación Especial en México*. México: IUAE
- Carrera, B. y Mazzarella C. (2001) Vigotsky: enfoque sociocultural. *Redalyc*, 5(13), 41-44.
- Carulla, L., García, J., Ruiz, M. Artigas, J. García, J. & González J. (2013) Funcionamiento Intelectual Limite: guía de conceso y buenas prácticas. *Revista Psiquiátrica Salud Mental*, 6 (3), 109-120. Recuperado de: <http://www.elsevier.es/es-revista-revista-psiquiatria-salud-mental-286-articulo-funcionamiento-intelectual-limite-guia-consenso-S1888989112002121>
- Castro, M. E., del Olmo, R. M. y Castro, M. E. (2002) *Desarrollo del pensamiento matemático Infantil* [Versión DX Reader]. Universidad de granada.
- Cerón R. (4 de abril, 2008) Aritmética Azteca, un secreto revelado. *El Universal*. p.1. Recuperado de: <http://archivo.eluniversal.com.mx/cultura/55759.htm>
- Delval, J. (1996). *El desarrollo humano*. Madrid: Siglo XXI.
- Díaz G.M., Flores V. G. y M. R. (2007). *Pisa 2006 en México*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2007. Recuperado de: <http://www.oei.es/evaluacioneducativa/pisa2006-w.pdf11-38>
- Discapacidad Y Rezago Escolar: Riesgos Actuales. *Acta Colombiana de Psicología*, 10 (2), 19-30. Recuperado de: https://editorial.ucatolica.edu.co/ojsucatolica/revistas_ucatolica/index.php/acta-colombiana-psicologia/article/view/208
- Fedriani, E. y Tenorio, A. (2004). Los sistemas de numeración maya, azteca e inca. *Lecturas Matemáticas*, 25(2), 159-190. Recuperado de http://faces.unah.edu.hk/arqueo/images/stories/docs/Documentos_en_Linea/numeracion%20maya,%20azteca%20e%20inca.pdf

- García, R. y Piaget J. (1984) *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores
- Gerson, K., Carracedo, S. (2007) *Niños con Altas Capacidades a la luz de las múltiples Inteligencias*. Argentina: Magisterios
- Gómez, P. y Valadez, S. (2010) *Relaciones de la familia y del hijo con superdotación intelectual*, *Faísca*, 15 (17) 67-85
- Guillen A. y Vicente V.A. (2001) *Una aproximación a la historia de la Educación Especial [Versión DX Reader]*. Murcia
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2012) *Las pruebas EXCALE para educación básica*. México
- Jean P. y Inhelder B. (1969) *Psicología del niño*. Madrid: Morata. Recuperado de: <https://docplayer.es/15217974-Jean-piaget-y-barbel-inhelder-psicologia-del-nino.html>
- Jiménez, C. (2002) *Lúdica y recreación*. Colombia: Magisterio
- Krishnakumar, P., Geeta, M. G., Palat, R. (2006). Effectiveness of individualized education program for slow learners. *Indian Journal of pediatric*, 7 (3), 135-137. Recuperado de: <http://medind.nic.in/icb/t06/i2/icbt06i2p135.pdf>
- Lara, G. y Sgreccia, N. (2010). Nepohualtzitzin: un modelo matemático de cualidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 3 (2), 24-54. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274019443003>
- Larroyo F. (1947), *Historia comparada de la educación en México*. México: Porrúa
- León J y Salvador J. (2017) *Características Cognoscitivas En Alumnos Con Bajo Rendimiento Intelectual*. Congreso Internacional de Psicología.
- Ley general de la Educación. Diario Oficial de la Federación, México, 13 de julio de 1993
https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/558c2c24-0b12-4676-ad90-8ab78086b184/ley_general_educacion.pdf
- Magaña, L. F. (1990). Las Matemáticas y los mayas. *CIENCIAS*, (19) 19-26.

- Martínez N.C. (2006) Psicopatología del trastorno por déficit de atención e hiperactividad. *International journal of clinical and health psychology*, 6 (2) , 379-3
- Martínez, V. (2007) Investigación y reflexión sobre condicionantes del fracaso escolar. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*. 39 (2) pp. 11-38
- Medina B., Mercado E., García I. (2015) La Capacidad Intelectual Límite: La Gran Olvidada. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, 2, 365-372. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=349851784036>
- Meece, J. (2000) *Desarrollo del niño y del adolescente*. México: McGraw-Hill
- Meléndez, C. J. (2012). *Programa para niños con discapacidad intelectual leve y bajo rendimiento intelectual: un enfoque resiliente*. En. G. Acle Tomasini (Coord.). Resiliencia en educación especial. Una experiencia en la escuela regular (pp. 132-165). México: Gedisa-UNAM-FES Zaragoza.
- Minerva, T. C. (2002) *El juego: una estrategia importante*. *Educere*, 6 (19), 289-296. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/pdf/356/35601907.pdf>
- Mónaco, N. (2009) *Matemática e Historia “El número cero” ¿La nada matemática?* (Tesina para optar al título de profesor de Matemática) Fundación Suzuki: Buenos Aires
- Morales, G. J. (2013) *Operaciones combinatorias en adolescentes y jóvenes universitarios* (Tesis de licenciatura) Pontificia Universidad Católica de Perú.
- Moreira, M. A. (2000). *Aprendizaje Significativo: teoría y práctica*. Madrid: Visor
- Moyles, J. (1990) *El juego infantil y primaria*. Madrid: Morata
- Noriega, M. (2000) *Las Reformas Educativas y su financiamiento en el contexto de la Globalización: El caso de México, 1982-1994*. México: UPN-Plaza y Valdés
- Noriega, M. (2000) *Las Reformas Educativas y su financiamiento en el contexto de la Globalización: El caso de México, 1982-1994*. México: UPN-Plaza y Valdés

- Ordaz, G. y Acle, G. (2012) Perfil psicosocial de adolescentes con aptitudes sobresalientes de un bachillerato público. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 10 (3), pp. 1267 -1298
- Ortiz, A. (2005) *Historia de las matemáticas*. Volumen I Las matemáticas en la antigüedad. Perú: PUCP
- Pérez, P. N. y Navarro, S. I. (2011) *Psicología del desarrollo humano: del nacimiento a la vejez*. San Vicente: Club universitario
- Piaget J. (1981) *La toma de conciencia*. Madrid: Morota
- Piaget, J (2001). *La formación de la Inteligencia*. México: Trillas
- Piaget, J. (1977) *O desenvolvimento do pensamento, equilibraféio de estruturas cognitivas*. Lisboa: Dom Quijote.
- Piaget, J. (1991) *Seis Estudios de Psicología*. Barcelona: Labor
- Rebollo, M., Rodríguez, S. (2006). *El aprendizaje y sus dificultades*. *Revista de Neurología*, 42 (2): 139-142. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4692808>
- Renzulli, J. (1994). *El concepto de los tres anillos de la superdotación. Un modelo de desarrollo para la productividad creativa*. España: Amarú.
- Rivera F. G. (2013) Etiología del trastorno por déficit de atención e hiperactividad y características asociadas en la infancia y niñez. *Acta de investigación psicología*. 3 (2), 1079-1091. Recuperado de:
- Rodríguez, S. M. (2004) Del estamento ocupacional a la comunidad científica. (Versión en línea). México: UNAM. Recuperado de: <https://books.google.com.mx/books?hl=es&lr=&id=KFJOrgmXZBcC&oi=fnd&pg=PA85&dq=related:edEWQ5DPfVuApM:scholar.google.com/&ots=xZEflz74tm&sig=RtDqJLN01RGJaq-Nhrjy7-Xf7AQ#v=onepage&q&f=false>
- Ruiz, A. (1990) *Matemáticas y Filosofía*. Costa Rica: UCR

- Ruiz, M., Caballero, S. C. y Moreira, M. (2011) Aprendizaje Significativo. *Meaningful Learning Review*, 1(1), 58-83
- Salvador-Carulla, L., García-Gutiérrez, J. C., Ruiz Gutiérrez-Colosía, M., Artigas-Pallarès, J., García Ibá-ez, J., González Pérez, J.,..... y Martínez-Leal, R. (2013). Borderline Intellectual Functioning: Consensus and good practice guidelines. *Revista de Psiquiatría y Salud Mental*, 6(3), 109-120. doi: 10.1016/j.rpsm.2012.12.001
- Sánchez, M. J. (2011) Historias de Matemáticas Las Escuelas Jónica y Pitagórica. *Pensamiento Matemático*, (1), 1-24. Recuperado de:
http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/las_escuelas_jonica_y_pitagorica.pdf
- Sánchez, P., Cantón, B. y Sevilla, C. (1997). *Compendio de educación especial*. México: El Manual Moderno.
- Schunk, D. (1997), *Teorías del aprendizaje*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Secretaría de Educación Pública (1994). Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria. México
- Secretaría de Educación Pública (2004) Informe final de la 47ª reunión Internacional de Educación de UNESCO. Recuperado de:
http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/Finrep_spa.pdf
- Secretaría de Educación Pública (2009) La integración Educativa en el aula regular. Principios finalidades y estrategias
- Secretaría de Educación Pública (2011) Plan de estudios. Educación básica Recuperado de
https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf
- Secretaría de Educación Pública (2017). *Educación por Niveles*. México: SEP
- Skinner, B. (1953) *Ciencia y conducta humana*. traducción al castellano de Josefa Gallofré. Barcelona: Fontanella.

Stewart I. (2007). (Barros Trad.) *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años*.
Barcelona: Critica. (Trabajo original publicado en 1997)

Unidad de Educación Especial y Educación Inclusiva (2015) *Planteamiento técnico Educativo*.
Recuperado de: http://ripei.org/work/documentos/UDEEI_web.pdf

Vigotsky L. S. (1982): *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. Pueblo y
Educación: La Habana.