Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

JERARQUÍA DE MAPEOS CAÓTICOS EN CONTINUOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
LUIS ALEJANDRO ROSAS MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

CD. UNIVERSITARIA, CD. MX., 2019

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Este trabajo, mi tesis, representa la culminación de una etapa muy valiosa en mi vida académica como personal. Quiero agradecer a todas esas personas que, de alguna manera, contribuyeron a que este logro, parte camino y parte final, se haya finalizado con éxito.

A mis padres, Alejandro y Rosario; por su invaluable presencia y apoyo durante toda mi vida, por haber prestado atención a mis necesidades y por siempre creer y apoyar mis metas, por jamás exclamar un *no se puede*. Gracias por su cariño, su perdón y comprensión inagotables.

A mis hermanos Brandon y Brayan, quienes me han mostrado que la vida es mejor compartiendo. Espero verlos próximamente en sus futuros éxitos.

A mis abuelos. A mis abuelitas Rosa y Chayo, por su infinito amor y sacrificio hacia sus hijos y nietos. Y a mi abuelito José Luis del quien aún sigo aprendiendo.

A mis tíos y tías; Ana, Fer, Dani por ser ejemplo de hermanos para mis padres. A mis tíos Chave y Tico por abrirme las puertas de su casa.

A mis primas Mari y Brenda, compañeras de infancia, igual anhelo verlas triunfando.

Al gran número de profesores que a lo largo de mis estudios han contribuido en este logro.

A Jhony, Luis, L, Tocayo, quienes me sumergieron al mundo de las matemáticas.

A Didier y Wendy por instruirme en las demás ciencias.

A Vero, gracias por haber dirigido esta tesis, por tu interés en tus alumnos, en las oportunidades que personalmente me has dado y me han servido para crecer como alumno y futuro matemático.

A Jorge, por tus excelentes clases y lograr que un alumno de tercer semestre comprendiera la topología.

A mis carísimos amigos: Daniel, José, Sid, Alonso, Diego. Gracias por sus pláticas y múltiples chistes, por el tiempo con ustedes, por su paciencia a mi mal humor y dotar en buena medida más alegría a la aventura universitaria.

Un enorme agradecimiento a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas, y a los profesores, personal y alumnado que lo conforman. Hicieron que la universidad fuera la etapa más grata de mi vida.

De igual forma quiero agradecer a los proyectos PAPIIT IN101216 y IN106319 "Teoría de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos II y III"por su apoyo en mi periodo de tesista.

Índice general

1. Definiciones y propiedades básicas **3**

1.1. Métrica Hausdorff 3

1.2. Algunos mapeos caóticos 9

1.2.1. Funciones transitivas 10

1.2.2. Las funciones n-transitivas. 15

1.3. El cono topológico 20

2. Resultados preliminares **23**

3. Continuos localmente conexos **32**

3.1. Resultados generales en continuos localmente conexos 32

3.2. Continuos localmente conexos con arcos libres. Gráficas. 33

3.3. La dendrita D_4. Un mapeo débil completamente expansivo por continuos y no completamente expansivo por continuos 38

3.4. La dendrita D_ω. Un mapeo débilmente mezclante y no mezclante . 55

3.4.1. Construcción de las funciones $\alpha_Z : S - \{\emptyset\} \longrightarrow S$ 57

3.4.2. Propiedades de la función F_Z 62

4. Abanico de Cantor **71**

4.1. Débil completamente expansivo por continuos no implica completamente expansivo por continuos 74

4.2. Mezclante no implica débil completamente expansivo por continuos 82

4.3. Débilmente mezclante no implica mezclante 89

5. Continuos tipo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ **generalizado** **102**

5.1. Definición y propiedades 103

5.2. Un mapeo en un continuo tipo sen($\frac{1}{x}$) generalizado débil completamente expansivo por continuos y no completamente expansivo por continuos 115

Conclusión **130**

Bibliografía **131**

Introducción

Es ya conocido por todos los curiosos, el afán constante del ser humano por tratar de predecir con seguridad el devenir de los sucesos que se nos presentan, con frecuencia, desafiantes. Es por ello, que muy a menudo nos roban la atención aquellos procesos cuya evolución en el tiempo es irregular e impredecible, a pesar de estar regida por una ley exacta que describa la evolución del proceso en el transcurso temporal del sistema.

En efecto, dentro del campo de la Física resulta muy claro que los movimientos parabólicos o interplanetarios quedan descritos por ecuaciones los cuales no representan dificultades fuera de lo determinista, pero si viramos la atención, por ejemplo, al campo de la economía, nos hallamos a menudo con grandes problemas sobre modelizaciones dinámicas de diversas variables económicas las cuales intentan explicar dentro de sí mismo el muy irregular y no periódico comportamiento de los fenómenos económicos (evolución y crecimiento económico, de los precios, de los activos y capitales). Son en estas circunstancias cuando nos encontramos con un desafío más atractivo.

A estos cambios o movimientos los llamaremos *caóticos* por que son justamente los movimientos que resultan cada vez más complicados de predecir en tiempos muy lejanos del punto de partida. Estos movimientos o comportamientos son el principal interés de la rama de la matemática denominada *Sistemas dinámicos.*

El propósito principal de la presente tesis, es abordar ciertos tipos de caoticidad, verificar sus relaciones entre sí y aportar una jerarquía, es decir, queremos hallar si alguno de estas condiciones caóticas implica algún otro, y de ser posible queremos averiguar bajo qué condiciones podemos tener la implicación recíproca para obtener de esa forma condiciones caóticas equivalentes.

En términos matemáticos un sistema dinámico está definido por un espacio topológico X y un mapeo $f : X \longrightarrow X$, que es una función continua y suprayectiva, con cierta condición dinámica. En este trabajo analizaremos los sistemas dinámicos sobre continuos, un continuo es un espacio métrico compacto y conexo.

Se analizarán cuatro tipos de condiciones dinámicas caóticas

(1) *completamente expansivo por continuos*,

(2) *débil completamente expansivo por continuos*,

(3) *mezclante* y

(4) *débilmente mezclante.*

Se mostrará primero la cadena de implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) y se investigará bajo qué condiciones topológicas sobre el espacio X son verdaderas las implicaciones inversas y en qué casos no es posible revertir la condición dinámica proveyendo al lector de contraejemplos.

La tesis se basa completamente en el artículo *Hierarchies of Chaotic Maps on Continua. Ergodic Theory and Dynamical Systems 34(6). Cambridge University Press: 1897-1913 (2014)* de los profesores Hoehn Logan y Christopher Mouron. En este artículo, los autores ofrecen demostraciones y referencias de los resultados que concluyen con la jerarquía de los mapeos caóticos expuestos, así como desarrollan la tarea más importante y complicada de exhibir los contraejemplos respectivos en los casos donde la respuesta es negativa.

Puesto que nuestra finalidad es la de presentar el trabajo de los profesores Logan y Mouron de manera que sea comprensible para los estudiantes que hayan tomado cursos básicos de topología general y análisis matemático, nuestro trabajo consiste en recolectar el preámbulo adecuado y ordenado para el desarrollo de las ideas expuestas, así como completar y extender las pruebas y sobretodo los detalles de las construcciones que están a punto de conocerse en la lectura de la tesis.

Capítulo 1

Definiciones y propiedades básicas

Conviene mencionar desde un inicio unas aclaraciones de notación: $\mathbb{N}$ denotará el conjunto de los números naturales positivos, y al conjunto de los número naturales incluyendo el 0 lo denotaremos por ω. Para un conjunto Y, $\mathcal{P}(Y)$ denotará el conjunto provisto de todos los subconjuntos de Y. A lo largo de la tesis denotaremos como (X, d_X) un *espacio métrico*, es decir, X es un conjunto no vacío y d_X una *métrica* sobre este conjunto, en particular escribiremos $d = d_X$ cuando no haya posibilidad de ambigüedad. Del mismo modo denotaremos para cada $A \subseteq X$, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$; la *cerradura* y el *interior* de A como $\overline{A}^X$ e $\mathrm{int}_X(A)$ respectivamente, la *bola abierta de centro x y radio ε* como $B_\varepsilon^X(x)$, y nuevamente, de no haber confusión a qué espacio estaremos refiriéndonos, entonces los conceptos anteriores los abreviaremos como $\overline{A}$, $\mathrm{int}(A)$ y $B_\varepsilon(x)$, respectivamente.

1.1. Métrica Hausdorff

La primera noción de la conocida métrica Hausdorff la introdujo, en 1905, Dimitrie Ponpeiu en su tesis doctoral, en la cual sólo trabajo una noción de métrica entre los subespacios compactos de $\mathbb{R}^n$ [Ponpeiu]. Fue posteriormente en el año 1914, cuando Félix Hausdorff retoma la idea de Ponpeiu generalizándola para subespacios compactos de un espacio métrico arbitrario [Hausdorff]. En este capítulo introduciremos una definición general de pseudométrica para los conjuntos acotados no vacíos de un espacio métrico, la cual de restringirse al espacio de los subconjuntos cerrados no vacíos del espacio, se obtiene una métrica a la cual

llamaremos la métrica Hausdorff.

Sea (X, d) espacio métrico no vacío. La *nube alrededor* de un subconjunto A de X se define como $N_\varepsilon(A) := \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$, nótese que por definición esta nube es un subconjunto abierto de X. Una primera observación es que para $x \in X$

$$x \in N_\varepsilon(A) \Longleftrightarrow \exists a \in A \ (d(x, a) < \varepsilon).$$

También es muy fácil notar que si $0 < \delta < \varepsilon$ entonces $N_\delta(A) \subseteq N_\varepsilon(A)$. Ahora bien para dos subconjuntos no vacíos A, B de X definamos

$$H(A, B) := \{\varepsilon > 0 : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A)\},$$

de la definición es inmediato que $H(A, B) = H(B, A)$, en general estos espacios pueden ser vacíos, para evitar esto debemos pedir que A y B sean subconjuntos acotados (decimos que Y es un subconjunto acotado de X si existe $M > 0$ tal que $d(x, y) \leq M$ para todo $x, y \in Y$). Definimos la colección de los subconjuntos acotados no vacíos de X como

$$\mathcal{B}(X) := \{A \subseteq X : \ A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es acotado}\}.$$

Proposición 1.1. *Para todo $A, B \in \mathcal{B}(X)$ se tiene que $H(A, B) \neq \emptyset$.*

Demostración. Por ser A y B acotados, entonces $A \cup B$ también lo es, por lo que existe $M > 0$ tal que $d(x, y) \leq M$ si $x, y \in A \cup B$. Se afirma que $M + 1 \in H(A, B)$. En efecto, dado $a \in A$ se tiene que al ser B no vacío, existe $b_0 \in B$ y se cumple que $d(a, b_0) \leq M < M + 1$, lo que muestra que $a \in N_{M+1}(B)$ y de la arbitrariedad de a concluimos que $A \subseteq N_{M+1}(B)$, de manera análoga se muestra que $B \subseteq N_{M+1}(A)$. Por ello $M + 1 \in H(A, B)$. $\square$

De la proposición anterior tenemos que si $A, B \in \mathcal{B}(X)$ entonces $H(A, B)$ consiste en un subconjunto no vacío de reales no negativos, en particular es un subconjunto no vacío y acotado inferiormente en los reales, entonces podemos definir $d_H^X(A, B) := \inf H(A, B)$ la cual llamaremos la *distancia Hausdorff* entre A y B, frecuentemente denotaremos la distancia Hausdorff como $d_H(A, B)$ cuando no haya confusión acerca del espacio en el que se trabaje. A continuación veremos unas propiedades que justifican, entre otras cosas, el nombre de distancia:

Proposición 1.2. *Sean $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ y $\varepsilon > 0$ entonces se cumple lo siguiente:*

(a) $d_H(A, B) \geq 0$,

(b) $d_H(A,B) = d_H(B,A)$,

(c) $d_H(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A \subseteq \overline{B}$ *y* $B \subseteq \overline{A}$,

(d) $d_H(A,B) \leq d_H(A,C) + d_H(C,B)$,

(e) $d_H(A,A) = 0$

(f) $d_H(A,B) < \varepsilon \Longrightarrow A \subseteq N_\varepsilon(B)$ *y* $B \subseteq N_\varepsilon(A)$,

(g) $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ *y* $B \subseteq N_\varepsilon(A) \Longrightarrow d_H(A,B) \leq \varepsilon$.

Demostración. (a) Por definición 0 es una cota inferior para $H(A,B)$ por lo que $d_H(A,B) = \inf H(A,B) \geq 0$.

(b) Es inmediato pues $H(A,B) = H(B,A)$.

(c) $\Longrightarrow$] Supongamos primero que $d_H(A,B) = 0$, para mostrar que $A \subseteq \overline{B}$ sea $a \in A$ y sea $\delta > 0$. Puesto que $0 = d_H(A,B) = \inf H(A,B)$, por la propiedad del ínfimo sabemos que existe $\delta' \in H(A,B)$ tal que $0 < \delta' < \delta$ y en particular obtenemos que $A \subseteq N_{\delta'}(B)$ y entonces $a \in N_{\delta'}(B)$, lo cual significa que existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta' < \delta$ y por tanto $B_\delta(a) \cap B \neq \emptyset$. Como $\delta > 0$ fue arbitrario se sigue que $a \in \overline{B}$ y por tanto $A \subseteq \overline{B}$. De forma análoga se demuestra que $B \subseteq \overline{A}$.

$\Longleftarrow$] Recíprocamente supongamos que $A \subseteq \overline{B}$ y $B \subseteq \overline{A}$. Mostremos que $H(A,B) = (0,\infty)$. La contención $H(A,B) \subseteq (0,\infty)$ es clara por definición, para la otra contención sea $\delta > 0$, queremos probar que $A \subseteq N_\delta(B)$ y $B \subseteq N_\delta(A)$. Así bien para lo primero, sea $a \in A$, luego $a \in \overline{B}$, se sigue entonces que $B_\delta(a) \cap B \neq \emptyset$, esto quiere decir que existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta$ lo cual prueba que $a \in N_\delta(B)$ y por tanto $A \subseteq N_\delta(B)$. De forma similar se prueba $B \subseteq N_\delta(A)$. Concluimos que $\delta \in H(A,B)$ y al ser éste un real positivo arbitrario se sigue que $(0,\infty) \subseteq H(A,B)$. Por tanto $H(A,B) = (0,\infty)$ y así $d_H(A,B) = \inf H(A,B) = \inf(0,\infty) = 0$.

(d) Por definición, tenemos que demostrar que

$$\inf H(A,B) \leq \inf H(A,C) + \inf H(C,B),$$

pero recordemos que la suma de los ínfimos de dos subconjuntos de los reales acotados inferiormente, es el ínfimo de la suma de los dos subconjuntos, por

ello lo que nos basta demostrar es que

$$\inf H(A,B) \leq \inf\{\delta_1 + \delta_2 : \ \delta_1 \in H(A,C) \ \text{ y } \ \delta_2 \in H(C,B)\}.$$

Así bien sean $\delta_1 \in H(A,C)$ y $\delta_2 \in H(C,B)$. Sea $a \in A$, como $\delta_1 \in H(A,C)$ tenemos que $a \in A \subseteq N_{\delta_1}(C)$ por lo que existe $c \in C$ tal que $d(a,c) < \delta_1$. Del mismo modo, como $\delta_2 \in H(C,B)\}$ tenemos $c \in C \subseteq N_{\delta_2}(B)$ por lo que existe $b \in B$ tal que $d(c,b) < \delta_2$. Entonces $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < \delta_1 + \delta_2$ lo que demuestra que $a \in N_{\delta_1+\delta_2}(B)$ y por tanto $A \subseteq N_{\delta_1+\delta_2}(B)$.

De forma análoga se demuestra que $B \subseteq N_{\delta_1+\delta_2}(A)$ lo que nos hace concluir que $\delta_1+\delta_2 \in H(A,B)$ y por tanto $d_H(A,B) = \inf H(A,B) \leq \delta_1+\delta_2$, esto prueba que $d_H(A,B)$ es cota inferior para

$$\{\delta_1 + \delta_2 : \ \delta_1 \in H(A,C) \ \text{ y } \ \delta_2 \in H(C,B)\}.$$

Por tanto $d_H(A,B) = \inf H(A,B) \leq \inf\{\delta_1+\delta_2 : \ \delta_1 \in H(A,C) \ \text{ y } \ \delta_2 \in H(C,B)\}$ justo lo que queríamos probar.

(e) Por el inciso (c) tenemos como $A \subseteq \overline{A}$ entonces $d_H(A,A) = 0$.

(f) Si $d_H(A,B) < \varepsilon$ por la propiedad del ínfimo sabemos que existe $\delta \in H(A,B)$ tal que $\delta < \varepsilon$ y entonces $A \subseteq N_\delta(B) \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\delta(A) \subseteq N_\varepsilon(A)$ como queríamos demostrar.

(g) Si $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\varepsilon(A)$, esto implica que $\varepsilon \in H(A,B)$ por tanto

$$d_H(A,B) = \inf H(A,B) \leq \varepsilon.$$

Esto demuestra la proposición. $\square$

Los incisos $(a), (b)$ y (d) de la proposición anterior nos dicen que $\mathcal{B}(X)$ dotado de d_H forma un espacio pseudométrico, en general no es métrico pues no es cierto que si $d_H(A,B) = 0$ entonces $A = B$.

Por ejemplo con $X = \mathbb{R}$ con la métrica euclidiana y $A = (0,1)$ y $B = [0,1]$, gracias al inciso (c) tenemos que $d_H(A,B) = 0$ pues $A \subseteq \overline{B}$ y $B \subseteq \overline{A}$, pero claramente $A \neq B$. Sin embargo, si $\mathcal{CB}(X)$ representa el conjunto de los cerrados acotados no vacíos de X, tendremos que d_H es una métrica en este hiperespacio como lo muestra el siguiente corolario:

Corolario 1.3. *d_H es una métrica en $\mathcal{CB}(X)$ el hiperespacio de los cerrados acotados no vacíos de X.*

Demostración. Por los incisos $(a), (b)$ y (d) de la proposición 1.2 basta probar que para $A, B \in \mathcal{CB}(X)$

$$d_H(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B.$$

En efecto, si $d_H(A, B) = 0$ entonces por el inciso (c) de la proposición 1.2 y usando que A y B son cerrados se sigue que $A \subseteq \overline{B} = B$ y $B \subseteq \overline{A} = A$ por lo que $A = B$.

Recíprocamente si $A = B$ entonces por el inciso (e) de la proposición 1.2 se sigue que $d_H(A, B) = 0$. $\square$

A continuación hagamos una pequeña observación sobre la nube alrededor de un subconjunto y radio ε.

Lema 1.4. *Para A subconjunto de X y $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$N_\varepsilon(A) = \bigcup\{N_\delta(A) : 0 < \delta < \varepsilon\}.$$

Demostración. Si $x \in N_\varepsilon(A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$, así bien, sea $\delta \in (d(x, a), \varepsilon)$, entonces $0 \leq d(x, a) < \delta < \varepsilon$ por lo cual $d(x, a) < \delta$ y así $x \in N_\delta(A)$ con $0 < \delta < \varepsilon$ por lo que $x \in \bigcup\{N_\delta(A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$.

Recíprocamente, si $x \in \bigcup\{N_\delta(A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$ luego para algún $0 < \delta < \varepsilon$ se tiene que $x \in N_\delta(A) \subseteq N_\varepsilon(A)$. De lo cual concluimos la igualdad de conjuntos. $\square$

Ahora, si consideramos un subconjunto compacto no vacío de un espacio métrico X, digamos K, entonces K es cerrado y acotado, es decir, $K \in \mathcal{CB}(X)$. La siguiente propiedad también nos dirá qué tan grande puede medir la distancia Hausdorff entre compactos:

Proposición 1.5. *Si A, B son subespacios compactos no vacíos de X entonces $d_H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\varepsilon(A)$.*

Demostración. $\Longrightarrow]$ Si suponemos $d_H(A, B) < \epsilon$ entonces por en inciso (g) de la proposición 1.2 tenemos $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\varepsilon(A)$.

$\Longleftarrow$ Recíprocamente si suponemos que $A \subseteq N_\varepsilon(B)$ y $B \subseteq N_\varepsilon(A)$, por un lado tenemos, gracias al lema 1.4, que $A \subseteq \bigcup\{N_\delta(A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$, esto nos dice que $\{N_\delta(A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$ es una cubierta de subconjuntos abiertos de X que cubre a A y como éste es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $0 < \delta_1, \ldots, \delta_n < \varepsilon$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n N_{\delta_i}(B)$ así que tomando $\delta_A = \text{máx}\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ tenemos que $0 < \delta_A < \varepsilon$

y $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_{\delta_i}(B) = N_{\delta_A}(B)$. De manera análoga podemos llegar a que existe $0 < \delta_B < \varepsilon$ tal que $B \subseteq N_{\delta_B}(A)$, así que tomando $\delta = \text{máx}\{\delta_A, \delta_B\}$ se sigue que $0 < \delta < \varepsilon$ y $A \subseteq N_\delta(B)$ y $B \subseteq N_\delta(A)$, por lo que $d_H(A, B) \leq \delta < \varepsilon$. $\square$

En lo que sigue, cuando nos refiramos al hiperespacio $\mathcal{CB}(X)$ lo pensaremos con la métrica Hausdorff.

Proposición 1.6. *Supongamos que $A \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$ son tales que $d_H(A, X) < \varepsilon$. Si $x \in X$ entonces $A \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.*

Demostración. De la hipótesis $d_H(A, X) < \varepsilon$ se sigue que $x \in X \subseteq N_\varepsilon(A)$ por lo que existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$, y así $a \in A \cap B_\varepsilon(x)$. $\square$

Corolario 1.7. *Sean $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow X$ una función continua de tal forma que existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} d_H(f^{n_k}(A), X) = 0$. Entonces para todo V abierto no vacío de X existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(A) \cap V \neq \emptyset$ si $k \geq N$.*

Demostración. Sean $v \in V$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(v) \subseteq V$. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$ entonces $d_H(f^{n_k}(A), X) < \varepsilon$, por la proposición 1.6 se sigue que $\emptyset \neq f^{n_k}(A) \cap B_\varepsilon(v) \subseteq f^{n_k}(A) \cap V$ para todo $k \geq N$. $\square$

Lema 1.8. *Sean $(X, d_X), (Y, d_Y)$ espacios métricos compactos y $g : X \longrightarrow Y$ función continua. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ son tales que $d_H^X(A, B) < \delta$ entonces $d_H^Y(g(A), g(B)) < \varepsilon$.*

Demostración. Como X es compacto, g es uniformemente continua, así bien existe $\delta > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $d_X(x_1, x_2) < \delta$, entonces $d_Y(g(x_1), g(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Probemos que dicha $\delta > 0$ funciona como queremos. Supongamos que $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ son tales que $d_H^X(A, B) < \delta$, afirmo que $g(A) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(g(B))$ y $g(B) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(g(A))$.

En efecto sea $g(a) \in g(A)$ con $a \in A$, como $d_H^X(A, B) < \delta$ en particular tenemos que $A \subseteq N_\delta(B)$ así que existe $b \in B$ tal que $d_X(a, b) < \delta$ y por consiguiente $d_Y(g(a), g(b)) < \frac{\varepsilon}{2}$ lo que implica $g(a) \in N_{\frac{\varepsilon}{2}}(g(B))$. Esto prueba que $g(A) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(g(B))$. De manera análoga se muestra que $g(B) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(g(A))$.

De lo anterior se concluye que $d_H^Y(g(A), g(B)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. $\square$

1.2. Algunos mapeos caóticos

Es en esta sección introduciremos las definiciones y primeras observaciones acerca de los mapeos caóticos que conciernen a este trabajo, a continuación se definirán cada una de las condiciones caóticas presentadas en la introducción y nuestro primer objetivo es examinar ciertas propiedades con las cuales se trabajarán más adelante.

Definición 1.1. *Recordemos que un continuo X es un espacio métrico, compacto y conexo no vacío.*

Un subcontinuo de X es un subconjunto $A \subseteq X$ que en sí mismo es un continuo, es decir, A es un cerrado conexo no vacío de X (ser un subespacio de X automáticamente le otorga la característica de métrico y al ser un cerrado en el compacto X se sigue que A igual es compacto).

Denotaremos la colección de todos los subcontinuos de X por $C(X)$, al cual llamaremos el hiperespacio de subcontinuos de X.

Finalmente, diremos que un continuo es no degenerado si tiene más de un punto.

Puesto que un espacio métrico compacto siempre es acotado, entonces $C(X) \subseteq \mathcal{CB}(X)$, por ello podemos pensar al hiperespacio $C(X)$ dotada de la métrica Hausdorff. Lo que resulta interesante es que el espacio métrico $(C(X), d_H)$ resulta en un continuo (véase [Illanes, Corolario 6.13, p. 93]), en este trabajo no ahondaremos en este resultado, sin embargo conforme se vaya necesitando iremos mencionando ciertas propiedades generales del hiperespacio $C(X)$ que nos serán de utilidad para ciertos resultados.

Ya estamos en condiciones para definir las principales propiedades caóticas que se desean abordar en este trabajo:

Definición 1.2. *Sean X, Y continuos y $f : X \longrightarrow Y$, diremos que f es un mapeo entre los continuos X y Y si f es continua y suprayectiva. Si $X = Y$, diremos sencillamente que f es un mapeo en X. Un mapeo $f : X \longrightarrow X$ es:*

(1) completamente expansivo por continuos si para todo $Y \in C(X)$ subcontinuo no degenerado de X y $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon, Y) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d_H(f^n(Y), X) < \varepsilon$. O reformulando lo anterior, si para todo $Y \in C(X)$ subcontinuo no degenerado se tiene que $\lim_{n \longrightarrow \infty} d_H(f^n(Y), X) = 0$.

(2) débil completamente expansivo por continuos si el conjunto definido como

$$\begin{aligned} E(X,f) &:= \{Y \in C(X) : \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, (n \geq N \Longrightarrow d_H(f^n(Y), X) < \varepsilon)\} \\ &= \{Y \in C(X) : \lim_{n \longrightarrow \infty} d_H(f^n(Y), X) = 0\} \end{aligned}$$

es denso en $C(X)$.

(3) mezlante si para cualesquiera U y V abiertos no vacíos de X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq n$, $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$;

(4) transitivo si para cualesquiera U y V abiertos no vacíos de X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$;

(5) n-transitivo si la función $f_{(n)} : X^n \longrightarrow X^n$, definida como $f_{(n)}((x_1, \ldots, x_n)) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in X$, es transitiva;

(6) débilmente mezclante si f es 2-transitivo.

Hagamos notar que las definiciones (3), (4), (5) y (6) se pueden definir para cualquier función continua y suprayectiva $f : X \longrightarrow X$ donde X es un espacio topológico arbitrario, no obstante las definiciones (1) y (2) deben ser definidas para continuos pues necesariamente recurren a conceptos de subcontinuos y de la métrica Hausdorff de $C(X)$, el hiperespacio de los subcontinuos.

Nuestro primer objetivo es demostrar la cadena de implicaciones:

$$\begin{aligned} \text{Completamente expansivo por continuos} &\Longrightarrow \text{Débil completamente expansivo por continuos} \\ &\Longrightarrow \text{Mezclante} \\ &\Longrightarrow \text{Débilmente mezclante} \end{aligned}$$

A continuación, definimos la *órbita de un punto $x \in X$* bajo el mapeo f.

Definición 1.3. *Sean X un continuo, $f : X \longrightarrow X$ un mapeo y $x \in X$. Definimos la órbita de x bajo f como el conjunto $orb(x, f) := \{f^n(x) : n \in \omega\}$.*

Diremos que x tiene órbita densa bajo f si $orb(x, f)$ es denso en X.

1.2.1. Funciones transitivas

Veamos algunas propiedades que involucran a la definición de funciones transitivas y órbitas densas en X. (Véase [King y Méndez, Capítulo 8, p.111]).

Lema 1.9. *Sean X espacio topológico, $x \in X$ y $\mathcal{B}$ una base de abiertos no vacíos para la topología de X. Sea $f : X \longrightarrow X$ un mapeo tal que orb(x, f) no es denso en X. Entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que orb$(x, f) \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Como $\mathrm{orb}(x, f)$ no es denso entonces existe U abierto no vacío de X tal que $\mathrm{orb}(x, f) \cap U = \emptyset$, por ser $\mathcal{B}$ base para la topología y U abierto no vacío, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq U$ y por ende $\mathrm{orb}(x, f) \cap V \subseteq \mathrm{orb}(x, f) \cap U = \emptyset$ como se quería demostrar. $\square$

Definición 1.4. *Sea X un espacio topológico, diremos que $x \in X$ es un punto aislado si y sólo si $\{x\}$ es un subconjunto abierto de X. Así bien, diremos que X es un espacio perfecto si y sólo si no tiene puntos aislados.*

Hagamos notar que de la definición, todo espacio perfecto necesariamente tiene más de un punto, más aún, de suponer que es T_1 entonces necesariamente es infinito, como lo prueba el siguiente resultado:

Proposición 1.10. *Si X es un espacio topológico perfecto y T_1, entonces para todo subconjunto finito y no vacío F de X se tiene que int$(F) = \emptyset$ y por tanto ningún conjunto finito no vacío es abierto. Además si V es un abierto no vacío de X entonces $V - F \neq \emptyset$.*

Demostración. La prueba se hará por inducción fuerte sobre $n \in \mathbb{N}$ la cardinalidad de los subconjuntos finitos no vacíos de X.

Si $n = 1$ y $x \in X$, de suponer $\mathrm{int}(\{x\}) \neq \emptyset$ esto implica necesariamente que $\mathrm{int}(\{x\}) = \{x\}$ un absurdo pues $\{x\}$ no puede ser abierto por hipótesis.

Ahora supongamos como hipótesis de inducción que para todo $1 \leq m \leq k$ si $F' \subseteq X$ es tal que $|F'| = m$ entonces $\mathrm{int}(F') = \emptyset$. Para el paso inductivo, sea $F \subseteq X$ tal que $|F| = k + 1$. Si suponemos por el contrario que $\mathrm{int}(F) \neq \emptyset$, entonces definiendo $F' = \mathrm{int}(F)$ tendríamso que $\emptyset \neq F' \subseteq F$ por lo que $|F'| = m$ para algún $1 \leq m \leq k+1$, notemos que por la hipótesis de inducción necesariamente $m = k+1$, pues si $1 \leq m \leq k$ entonces $\emptyset \neq F' = \mathrm{int}(F) = \mathrm{int}(\mathrm{int}(F)) = \mathrm{int}(F') = \emptyset$ lo cual es un absurdo, así bien como $|F'| = |F| = k + 1$ necesariamente $F = F'$ lo que hace F un subconjunto abierto no vacío de X. Así bien, tomemos $x \in F$, como X es T_1, entonces $\{x\}$ es cerrado en X por lo cual $F - \{x\}$ es abierto no vacío de X y de cardinalidad k, lo que contradice la hipótesis de inducción pues $\mathrm{int}(F - \{x\}) = \emptyset$. Lo cual termina la demostración por inducción.

Por último si F es un subconjunto no vacío de X y V un abierto no vacío, entonces de suponer $V - F = \emptyset$ tendríamos que $V \subseteq F$ y por tanto V es abierto y

finito, pero por lo mostrado anteriormente el único subconjunto abierto y finito es el vacío, por ello $V = \emptyset$ una contradicción, lo cual prueba $V - F \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 1.11. *Todo espacio métrico conexo con más de dos puntos es perfecto. En particular todo continuo no degenerado es perfecto.*

Demostración. Sea X es un espacio métrico y conexo con al menos dos elementos. Si $x \in X$ es tal que $\{x\}$ es abierto entonces, al ser X un espacio T_1 se sigue que también es cerrado, como X es conexo y como $\{x\}$ claramente no es vacío, entonces necesariamente implica que $X = \{x\}$ lo que contradice que X tiene al menos dos puntos. Por ello X es perfecto. $\square$

Teorema 1.12. *Sea X es un espacio topológico perfecto y T_1. Si $f : X \longrightarrow X$ es una función continua con alguna órbita densa, entonces f es transitiva.*

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $\mathrm{orb}(x, f)$ es denso en X. Sean U, V abiertos no vacíos de X. Por la hipótesis de densidad, existe $n \in \omega$ tal que $f^n(x) \in U$. Por otro lado, como X es T_1, el subconjunto $\{f^k(x) : 0 \leq k \leq n\}$ es cerrado en X por ser finito y por tanto $V - \{f^k(x) : 0 \leq k \leq n\}$ es abierto en X, además es no vacío gracias a lo probado en la proposición 1.10.

Nuevamente por la hipótesis de densidad sabemos que existe $m \in \omega$ tal que $f^m(x) \in V - \{f^k(x) : 0 \leq k \leq n\}$ de lo cual tenemos que $n < m$ y $f^m(x) \in V$. Así bien $m - n \in \mathbb{N}$ es tal que $f^m(x) \in f^{m-n}(U) \cap V$ pues $f^m(x) = f^{m-n}(f^n(x))$ donde $f^n(x) \in U$ y $f^m(x) \in V$. Lo cual prueba que f es transitiva. $\square$

Sin la hipótesis de que el espacio X es perfecto, el teorema pierde validez como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.13. *Consideremos $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ espacio dotado de la topología euclidiana de $\mathbb{R}$. Sea $f : X \longrightarrow X$ definida como $f(0) = 0$ y $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$ si $n \in \mathbb{N}$. Entonces f es una función continua y tiene una órbita densa pues: $orb(1, f) = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ el cual es un denso en X. Sin embargo no es transitiva ya que $f(X) = X - \{1\}$, lo cual evidencia que para los abiertos no vacíos $\{1\}$ y X y para todo $n \in \mathbb{N} : f^n(X) \cap \{1\} \subseteq f(X) \cap \{1\} = \emptyset$.*

Corolario 1.14. *Si X es un continuo y $f : X \longrightarrow X$ un mapeo tal que existe una órbita densa, entonces f es transitiva.*

Demostración. Si X es degenerado el resultado es inmediato. Supongamos X continuo no degenerado, entonces X es perfecto por la proposición 1.11 y es T_1 por ser espacio métrico, de la proposición 1.12 se tiene el resultado. $\square$

Definición 1.5. *Decimos que un subconjunto $A \subseteq X$ es denso en ninguna parte de X si y sólo si $int\left(\overline{A}\right) = \emptyset$. Para $Y \subseteq X$ decimos que:*

1) Y es de la primera categoría de Baire si y sólo si $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ donde A_n es un conjunto cerrado denso en ninguna parte de X para todo $n \geq 1$,

2) Y es de la segunda categoría de Baire si y sólo si Y no es de la primera categoría de Baire.

Por último, decimos que X es de Baire si y sólo si para toda colección numerable de abiertos denso de X, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es también denso en X.

Lema 1.15. *Si A es denso en X entonces $int(X - A) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que $\operatorname{int}(X - A) \neq \emptyset$ entonces en particular es un abierto no vacío, por tanto $\emptyset \neq \operatorname{int}(X - A) \cap A \subseteq (X - A) \cap A = \emptyset$ por lo que obtenemos un absurdo. Entonces $\operatorname{int}(X - A) = \emptyset$. $\square$

La razón para introducir la noción de un espacio de Baire es para poder mostrar el siguiente resultado, el cual da condiciones para el recíproco del teorema 1.12:

Teorema 1.16. *Supongamos que X es un espacio segundo numerable y de la segunda categoría de Baire, si $f : X \longrightarrow X$ es un mapeo transitivo entonces tiene una órbita densa.*

Demostración. Sea $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de abiertos no vacíos para la topología de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase $U_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f^{-k}(V_n)$, nótese que por construcción U_n es abierto, veamos también que es un denso.

Sea U abierto no vacío de X, luego por ser f transitiva existe $k \geq 1$ tal que $f^k(U) \cap V_n \neq \emptyset$ y por tanto como f es suprayectiva $f^{-k}(f^k(U) \cap V_n) \neq \emptyset$, se sigue entonces que:

$$\emptyset \neq f^{-k}(f^k(U) \cap V_n) = f^{-k}(f^k(U)) \cap f^{-k}(V_n) \subseteq U \cap f^{-k}(V_n) \subseteq U \cap U_n$$

lo que prueba que U_n en efecto es denso para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, el conjunto $F_n = X - U_n$ definido para cada $n \in \mathbb{N}$, es un conjunto cerrado y con interior vacío, por ende es un subconjunto (cerrado) denso en ninguna parte de X.

Ahora bien, si por el contrario, suponemos que no existen órbitas densas, se afirma que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. En efecto, si $x \in X$ como su $\operatorname{orb}(x, f)$ no es denso, por

el lema 1.9 se sigue que existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{orb}(x, f) \cap V_{n(x)} = \emptyset$. Veamos que $x \in F_{n(x)}$, para ello nótese que

$$F_{n(x)} = X - U_{n(x)} = X - \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(V_{n(x)}) \right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (X - f^{-k}(V_{n(x)})).$$

Así bien sea $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^k(x) \in \operatorname{orb}(x, f)$ y por tanto $f^k(x) \notin V_{n(x)}$ (pues $\operatorname{orb}(x, f) \cap V_{n(x)} = \emptyset$), lo cual implica $x \notin f^{-k}(V_{n(x)})$ o bien $x \in X - f^{-k}(V_{n(x)})$. Concluimos que $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty}(X - f^{-k}(V_{n(x)})) = F_{n(x)}$, lo cual a su vez prueba que $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Por tanto $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ contradiciendo que X es de la segunda categoría de Baire, por tanto debe existir una órbita densa. □

Un teorema muy importante en análisis, es el teorema de la categoría de Baire el cual se enuncia como sigue:

Teorema 1.17 (De la categoría de Baire)**.** *Todo espacio métrico y completo es de Baire.*

Una equivalencia de éste teorema, y que resulta en ocasiones más útil para las aplicaciones y la cual usaremos a continuación, es la siguiente:

Teorema 1.18 (De la categoría de Baire)**.** *Si X es un espacio métrico completo entonces todo abierto no vacío de X es de la segunda categoría de Baire. En particular X es de la segunda categoría.*

Las demostraciones de los teoremas 1.17 y 1.18 se pueden consultar en [Folland, 5.9, p. 161] y en [Munkres, Teorema 48.2, p. 337].

Corolario 1.19. *Si X es un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ es un mapeo transitivo, entonces X tiene una órbita densa con respecto a f.*

Demostración. Como X es métrico compacto, en particular es métrico completo y segundo numerable, por el Teorema de la categoría de Baire (1.18), X es de la segunda categoría de Baire, aplicando el teorema 1.16 se tiene el resultado. □

Ahora podemos concluir la equivalencia, en continuos, de ser transitivo y tener órbitas densas:

Corolario 1.20. *Si X es un continuo y $f : X \longrightarrow X$ un mapeo, entonces f es transitiva si y sólo si existe una órbita densa con respecto a f.*

Demostración. Es consecuencia de los corolarios 1.14 y 1.19. □

1.2.2. Las funciones n-transitivas.

En breve discutiremos las relaciones que existen entre las propiedades de ser n-transitivo para $n \geq 2$. Estas relaciones, para algunos autores, implican propiedades combinatorias en el campo de los sistemas dinámicos la cual va de la mano con la teoría ergódica (Véanse [Furstenberg] y [Glasner]).

Comencemos primero con dar una equivalencia de la propiedad de ser n-transitivo:

Proposición 1.21. *Sean X espacio topológico, $f : X \longrightarrow X$ un mapeo y $n \geq 2$. Entonces f es $n-$transitiva si y sólo si para todo $U_1, \ldots, U_n$ y $V_1, \ldots, V_n$ abiertos no vacíos de X existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_k) \cap V_k \neq \emptyset$ para todo $k = 1, \ldots, n$.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos que f es n-transitiva, es decir, $f_{(n)} : X^n \longrightarrow X^n$ es transitiva. Sean $U_1, \ldots, U_n$ y $V_1, \ldots, V_n$ abiertos no vacíos de X. Se tiene que $U_1 \times \ldots \times U_n$ y $V_1 \times \ldots \times V_n$ son abiertos no vacíos de X^n, por lo que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m_{(n)}(U_1 \times \ldots \times U_n) \cap (V_1 \times \ldots \times V_n) \neq \emptyset$. Nótese que

$$f^m_{(n)}(U_1 \times \ldots \times U_n) = f^m(U_1) \times \ldots \times f^m(U_n).$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned}(f^m(U_1) \cap V_1) \times \ldots \times (f^m(U_n) \cap V_n) &= (f^m(U_1) \times \ldots \times f^m(U_n)) \cap (V_1 \times \ldots \times V_n) \\ &= f^m_{(n)}(U_1 \times \ldots \times U_n) \cap (V_1 \times \ldots \times V_n) \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Lo cual prueba que $f^m(U_k) \cap V_k \neq \emptyset$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

$\Longleftarrow$] Recíprocamente, supongamos que para todo $W_1, \ldots, W_n$ y $Z_1, \ldots, Z_n$ abiertos no vacíos de X existe $m \in \mathbb{N}$ tal que: $f^m(W_k) \cap Z_k \neq \emptyset$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Sean U, V abiertos no vacíos de X^n; luego por definición de la base en la topología producto, existen $U_1, \ldots, U_n$ y $V_1, \ldots, V_n$ abiertos no vacíos de X tales que $U_1 \times \ldots \times U_n \subseteq U$ y $V_1 \times \ldots \times V_n \subseteq V$. Además por nuestro supuesto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $k = 1, \ldots, n$, entonces $f^m(U_k) \cap V_k \neq \emptyset$. Luego, se sigue que:

$$\begin{aligned}f^m_{(n)}(U) \cap V &\supseteq f^m_{(n)}(U_1 \times \ldots \times U_n) \cap (V_1 \times \ldots \times V_n) \\ &= (f^m(U_1) \times \ldots \times f^m(U_n)) \cap (V_1 \times \ldots \times V_n) \\ &= (f^m(U_1) \cap V_1) \times \ldots \times (f^m(U_n) \cap V_n) \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Lo cual prueba que f es n-transitiva. $\square$

Corolario 1.22. *Sean $m > n \geq 1$ naturales, si $f : X \longrightarrow X$ es m-transitiva entonces también es n-transitiva.*

Demostración. Usemos la caracterización mostrada en la proposición 1.21, sean $U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n$ abiertos no vacíos de X. Para $i \in \{n+1, \ldots, m\}$ sean los abiertos no vacíos $U_i = X = V_i$, como f es m-transitiva nuevamente por la proposición 1.21, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq m$, en particular se cumple para $1 \leq i \leq n$ lo cual muestra que f es $n-$transitiva. $\square$

De la definición 1.2(6) y de la proposición 1.21, tenemos que f es débilmente mezclante si y sólo si para cualesquiera U_1, U_2, V_1, V_2 abiertos no vacíos de X existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^m(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, equivalencia que utilizaremos muy frecuente en el texto.

De igual forma, del corolario 1.22, tenemos que f débilmente mezclante implica f transitiva.

Además, claramente una función que cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$ es n-transitiva, en particular es 2-transitivo y por tanto débilmente mezclante. Nuestro objetivo por ahora es mostrar que ser débilmente mezclante es condición suficiente de tal hecho.

Para ello consideramos X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow X$ un mapeo, para subconjuntos A, B de X podemos definir el conjunto

$$\mathcal{N}(A, B) := \{n \in \mathbb{N} : f^n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Entonces podemos reescribir la definición de ser mapeo transitivo como: f es transitiva si y sólo si para todo U, V abiertos no vacíos de X se cumple que $\mathcal{N}(U, V) \neq \emptyset$. Y gracias a la proposición 1.21 tenemos que si $n \geq 2$, entonces f es n-transitiva si y sólo si para todo $U_1, \ldots, U_n$ y $V_1, \ldots, V_n$ abiertos no vacíos de X ocurre que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{N}(U_k, V_k) \neq \emptyset.$$

Por último nótese que $n \in \mathcal{N}(U, V)$ implica $A \cap f^{-n}(B) \neq \emptyset$, en efecto, si $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$, existe $a \in A$ tal que $f^n(a) \in B$ y entonces $a \in A \cap f^{-n}(B)$.

Proposición 1.23. *Supongamos que $f : X \longrightarrow X$ es una función transitiva. Entonces para todos U, V abiertos no vacíos de X el conjunto $\mathcal{N}(U, V)$ es infinito.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existen U, V abiertos no vacíos de X tales que $\mathcal{N}(U, V)$ es finito. Puesto que f es transitiva sabemos que además de finito debe ser no vacío entonces podemos considerar $N = \text{máx}\,\mathcal{N}(U, V)$.

Tenemos que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$ y por tanto usando que f es continua se sigue que el subconjunto $W := U \cap f^{-N}(V)$ es un abierto no vacío de X. Nuevamente de f transitiva, existe $m \in \mathcal{N}(W, W)$. Se afirma que $N + m \in \mathcal{N}(U, V)$, en efecto, como $f^m(W) \cap W \neq \emptyset$ entonces existe $w \in W$ tal que $f^m(w) \in W$, de lo anterior tenemos que $w \in U$ y $f^m(w) \in f^{-N}(V)$ por lo que $f^{N+m}(w) \in V$ y por ende $f^{N+m}(w) \in f^{N+m}(U) \cap V \neq \emptyset$. Puesto que $m \in \mathbb{N}$ entonces $N + m > N$ lo cual contradice que N es el máximo de $\mathcal{N}(U, V)$. Luego necesariamente ocurre que $\mathcal{N}(U, V)$ es infinito. $\square$

Proposición 1.24. *Supongamos que X es un espacio topológico y $f : X \longrightarrow X$ es un mapeo débilmente mezclante. Se cumple lo siguiente:*

(a) Si U_1, V_1, U_2, V_2 son abiertos no vacíos de X, entonces existen U, V abiertos no vacíos de X tal que

$$\mathcal{N}(U, V) \subseteq \mathcal{N}(U_1, V_1) \cap \mathcal{N}(U_2, V_2).$$

(b) Si $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n$ son abiertos no vacíos de X, entonces existen abiertos no vacíos U, V de X tales que

$$\mathcal{N}(U, V) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{N}(U_k, V_k).$$

En particular $\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{N}(U_k, V_k)$ resulta ser un conjunto infinito.

(c) Para todo $n \geq 1$, f es n-transitiva. Mas aún; para todo $n \geq 1$ y para cualesquiera $U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n$ abiertos no vacíos de X y $m \in \mathbb{N}$, existe $k \geq m$ tal que: $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Demostración. (a) Por ser f débilmente mezclante, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $f^n(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, enonces definiendo $U := U_1 \cap f^{-n}(U_2)$ y $V := V_1 \cap f^{-n}(V_2)$ resultan ser abiertos no vacíos. Nótese $U \subseteq U_1$, $V \subseteq V_1$ y como f es suprayectiva $f^n(U) \subseteq f^n(f^{-n}(U_2)) = U_2$, $f^n(V) \subseteq f^n(f^{-n}(V_2)) = V_2$, así bien si $m \in \mathcal{N}(U, V)$ entonces $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$ luego obtenemos que:

$$f^m(U_1) \cap V_1 \supseteq f^m(U) \cap V \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned} f^m(U_2) \cap V_2 &\supseteq f^m(f^n(U)) \cap f^n(V) = f^n(f^m(U)) \cap f^n(V) \\ &\supseteq f^n(f^m(U) \cap V) \neq \emptyset, \end{aligned}$$

y entonces $m \in \mathcal{N}(U_1, V_1) \cap \mathcal{N}(U_2, V_2)$, por tanto $\mathcal{N}(U, V) \subseteq \mathcal{N}(U_1, V_1) \cap \mathcal{N}(U_2, V_2)$.

(b) La prueba la hacemos por inducción sobre $n \geq 1$. Nótese que el caso $n = 1$ es claro y $n = 2$ es justamente el inciso (a), así bien supongamos que la propiedad se cumple para $k \in \mathbb{N}$, probémosla de igual forma para $k + 1$. Sean $U_1, V_1, \ldots, U_k, V_k, U_{k+1}, V_{k+1}$ abiertos no vacíos de X, por hipótesis de inducción existen U', V' abiertos no vacíos tales que $\mathcal{N}(U', V') \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{N}(U_i, V_i)$ y entonces

$$\mathcal{N}(U', V') \cap \mathcal{N}(U_{k+1}, V_{k+1}) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{N}(U_i, V_i),$$

y del inciso anterior existen U, V abiertos no vacíos tales que $\mathcal{N}(U, V) \subseteq \mathcal{N}(U', V') \cap \mathcal{N}(U_{k+1}, V_{k+1})$ por tanto

$$\mathcal{N}(U, V) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{N}(U_i, V_i)$$

lo cual completa la inducción. Además como f es transitiva ya que es débilmente mezclante, sabemos que el conjunto $\mathcal{N}(U, V)$ es infinito por la proposición 1.23, por tanto lo es también $\bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{N}(U_i, V_i)$.

(c) Del inciso (b) se probó que para toda $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $U_1, V_1, \ldots, U_n, V_n$ abiertos no vacíos de X, el conjunto $\bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{N}(U_i, V_i)$ es infinito. Por ello, dado $m \in \mathbb{N}$ existe $k \in \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathcal{N}(U_i, V_i)$ tal que $k \geq m$ y entonces $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i \leq n$ con $k \geq m$.

Esto en particular demuestra que f es n-transitiva. $\square$

De esta proposición ya tenemos que para cualquier mapeo $f : X \longrightarrow X$ en un espacio topológico arbitrario:

$$f \text{ es débilmente mezclante} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\,(f \text{ es n-tranistiva}).$$

Nota. *En la literatura de sistemas dinámicos, una función continua $f : X \longrightarrow X$ se dice ω-transitiva si y sólo si f es $n-$transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando este concepto, podemos reformular que f es débilmente mezclante si y sólo si f es $\omega-$transitiva.*

Algo importante, aunque no abordaremos mucho en el transcurso de este trabajo, es que la condición de ser transitiva no es suficiente para ser débilmente mezclante, el ejemplo, aunque sencillo de describir, no es sencillo de demostrar. Consideremos $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ como el conjunto $\mathbb{S}^1 = \{e^{\theta i} : \theta \in [0, 2\pi)\}$. La rotación por λ en $\mathbb{S}^1$ es el mapeo $f_\lambda : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(e^{\theta i}) = e^{\theta i + 2\pi\lambda i}$. Se dice que la rotación f es racional (repectivamente irracional) si λ es racional (respectivamente irracional). Un resultado conocido es que una rotación es transitiva si y sólo si es irracional, además se sabe que ninguna rotación es débilmente mezclante. Lo último tiene que ver con que las funciones inducidas por las rotaciones en el hiperespacio de los cerrados no vacíos de $\mathbb{S}^1$ (este hiperespacio de los cerrados no vacíos de X se denota por 2^X) no es transitiva. Estos resultados se pueden hallar en [Banks 1] y [Banks 2].

Haremos una última observación sobre las funciones transitivas usando la proposición 1.23.

Proposición 1.25. *Sea X un espacio topológico infinito y T_1. Sea $f : X \longrightarrow X$ función transitiva y $U \subseteq X$ abierto no vacío, entonces $f^n(U)$ es un subespacio no degenerado para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) = \{x\}$. Mostremos que lo anterior implica que la órbita de x es finita y densa, trayendo una contradicción.

Primero, para ver que la órbita es finita, basta ver que x es lo que llamamos un punto periódico, es decir, que existe $k \in \mathbb{N}^+$ tal que $f^k(x) = x$. De la proposición 1.23 como $\mathcal{N}(U, U)$ es infinito, existe $k > m$ tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$, pero $f^k(U) = f^{k-m}(f^m(U)) = f^{k-m}(\{x\}) = \{f^{k-m}(x)\}$ entonces $f^{k-m}(x) \in U$ lo que a su vez implica que $f^k(x) \in f^m(U) = \{x\}$ lo que muestra que $f^k(x) = x$, y en efecto x es un punto periódico y por tanto $\mathrm{orb}(x) = \{x, \ldots, f^{k-1}(x)\}$ es finito.

Para ver que $\mathrm{orb}(x)$ es denso, sea V abierto no vacío de X, nuevamente como $\mathcal{N}(U, V)$ es infinito, se sigue que existe $n > m$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ pero $f^n(U) = \{f^{n-m}(x)\}$, por tanto $f^{n-m}(x) \in V$ lo que muestra que $\mathrm{orb}(x) \cap V \neq \emptyset$.

Finalmente, la contradicción se sigue pues $X = \overline{\mathrm{orb}(x)} = \mathrm{orb}(x)$, pues al ser X espacio T_1 y $\mathrm{orb}(x)$ finito entonces es un cerrado, pero lo anterior es un absurdo pues X es infinito. $\square$

1.3. El cono topológico

En esta parte supondremos que (X, τ) es un espacio topológico no vacío. Consideremos el producto $X \times [0,1]$ con su topología usual, en este conjunto podemos considerar la siguiente relación de equivalencia, para $(x,t),(y,s) \in X \times [0,1]$ diremos que:

1. Si $t \neq 0$ entonces $(x,t) \sim (y,s)$ si y sólo si $(x,t) = (y,s)$,
2. Si $t = 0$ entonces $(x,t) \sim (y,s)$ si y sólo si $t = s = 0$.

Esta relación lo que realiza es colapsar, o identificar, todos los puntos de la base $X \times \{0\}$ en uno solo. Para un un elemento $(x,t) \in X \times [0,1]$ denotaremos su clase de equivalencia como $[(x,t)] = [(x,t)]_\sim$, entonces tendremos que

$$[(x,t)] = \begin{cases} \{(x,t)\} & \text{si } \ t \neq 0 \\ X \times \{0\} & \text{si } \ t = 0 \end{cases}$$

A la función $\rho : X \times [0,1] \longrightarrow (X \times [0,1])/\sim$ que manda a los pares ordenados en sus clases de equivalencia, es decir, $\rho((x,t)) = [(x,t)]$, se le llama función cociente y con ella se puede definir una topología $\tau_\sim$ al espacio cociente que cumple que para $A \subseteq (X \times [0,1])/\sim$ se cumple que

$$A \in \tau_\sim \Longleftrightarrow \rho^{-1}(A) \in \tau,$$

la cual en particular realiza a ρ como función continua entre dichos espacios topológicos. Así bien, podemos considerar el espacio cociente con dicha topología cociente al cual denotaremos como $\mathcal{K}(X) = (X \times [0,1])/\sim$, llamado el *cono topológico de X* (véanse [Dugundji, pág. 126] y [Hatcher, págs. 8-9]).

Es bien sabido que el cono topológico, para cualquier espacio X, es un espacio contráctil (véase [Fragalá, Proposición 1.4.1, p. 14]), en particular es conexo por trayectorias y por ende conexo. Además, si X es compacto, entonces $\mathcal{K}(X)$ es compacto pues es la imagen continua bajo ρ del espacio compacto $X \times [0,1]$. Más aún, si X tiene una topología inducida por una métrica d, y ésta está acotada por 1, entonces se puede darle una métrica al cono $\mathcal{K}(X)$ la cual inducirá la topología cociente $\tau_\sim$, a saber, para $(x,t),(y,s) \in X \times [0,1]$ se define:

$$\Delta([(x,t)],[(y,s)]) = |t-s| + \text{mín}\{t,s\}d(x,y)$$

la cual no depende del representante tomado para la clase. Para ver los detalles de

que Δ es métrica e induce la topología del cono topológico véase la tesis [Juárez, Proposición 1.1.27, p. 11].

En síntesis, si X es un espacio métrico compacto, entonces $\mathcal{K}(X)$ es un continuo. También, teniendo este supuesto, tendremos que la función cociente ρ sería un mapeo cerrado pues tiene un dominio compacto y su imagen es un espacio T_2 por ser métrico.

En general, recuérdese que para una función continua y suprayectiva entre dos espacios topológicos, $p : X \longrightarrow Y$, decimos que p es una *función cociente* (o una *identificación*) si y sólo si:

$$\tau_Z = \{U \subseteq Z \,:\, p^{-1}(U) \in \tau_Y\},$$

en este contexto se dice que Z es un espacio cociente.

Una propiedad básica de los espacios y funciones cociente y que nos garantiza la continuidad de ciertas funciones es la siguiente:

Teorema 1.26. *Sean $(X', \tau_X), (Y, \tau_Y), (Z, \tau_Z)$ espacios topológicos y $f : X' \longrightarrow Y$ función cociente. Sea $g : Y \longrightarrow Z$ función, entonces g es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

La demostración del teorema 1.26 se puede encontrar en [Dugundji, Teorema 3.1, p. 123].

El siguiente corolario es un caso particular del teorema 1.26 aplicado al espacio cociente del cono topológico, $\mathcal{K}(X)$.

Corolario 1.27. *Sean X espacio topológico y $f : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ función continua. Entonces si la función $F : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ es tal que $F \circ \rho = \rho \circ f$ donde ρ es la función cociente para el cono topológico de X, $\rho : X \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{K}(X)$, entonces F es continua.*

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "\rho"] \\ \mathcal{K}(X) \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K}(X) \end{tikzcd}$$

Demostración. Para aplicar el teorema 1.26, hagamos $X' = X \times [0,1], Y = Z = \mathcal{K}(X)$. Por hipótesis $F \circ \rho = \rho \circ f$ es continua (pues f y ρ son ambas continuas), como ρ es función cociente, se sigue que F es continua del teorema 1.26. $\square$

Capítulo 2

Resultados preliminares

A lo largo de este capítulo se abordarán las primeros resultados concernientes a las condiciones caóticas;

(1) completamente expansivo por continuos,

(2) débil completamente expansivo por continuos,

(3) mezclante

(4) débilmente mezclante.

Nos concentraremos en dar equivalencias de ser *mezclante* y *débilmente mezcalnte* que incluyan nociones de la métrica Hausdorff.

Se mostrará el teorema cuyo resultado establezca la cadena de implicaciones $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4)$.

Daremos ciertas hipótesis para las cuales, en un continuo, (3) y (4) son equivalentes, dichas condiciones se recuperarán en los resultados y ejemplos de los capítulos 3 y 5.

Proposición 2.1. *Sea X un espacio topológico y $f : X \longrightarrow X$ un mapeo mezclante, entonces f es débilmente mezclante.*

Demostración. Sean U_1, V_1, U_2, V_2 abiertos no vacíos de X, como f es mezclante se sigue que para cada $i = 1, 2$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ si $k \geq n_i$. Haciendo $n = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ tenemos que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Esto prueba que f es débilmente mezclante. $\square$

Proposición 2.2. *Un mapeo $f : X \longrightarrow X$ es mezclante si y sólo si para todo abierto no vacío $U \subseteq X$, $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(U), X) = 0$.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Primero supongamos que f es mezclante, sea $U \subseteq X$ abierto no vacío y $\varepsilon > 0$. Puesto que X es métrico compacto, es totalmente acotado, así bien existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{I=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$.

Tenemos por hipótesis que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_i$, $f^k(U) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \neq \emptyset$, así bien con $K = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_n\}$ se tiene que para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $k \geq K$, $f^k(U) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \neq \emptyset$.

Se afirma que $d_H(f^k(U), X) \leq \varepsilon$ para todo $k \geq K$, en efecto si $k \geq K$, sea $x \in X$ luego $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$ y entonces $d(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, por otro lado existe $z \in f^k(U) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ por lo cual $d(z, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ a su vez se sigue que $d(x, z) < \varepsilon$ con $z \in f^k(U)$, por tanto $x \in N_\varepsilon(f^k(U))$ o bien $X \subseteq N_\varepsilon(f^k(U))$, lo cual prueba $d_H(f^k(U), X) \leq \varepsilon$ y que a su vez concluye que $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(U), X) = 0$.

$\Longleftarrow$] Recíporcamente supongamos que para todo abierto no vacío $A \subseteq X$,

$$\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(A), X) = 0.$$

Sean $U, V \subseteq X$ abiertos no vacíos de X, como en particular se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(U), X) = 0$$

se sigue del corlario 1.7 que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq K, f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Lo cual prueba que f es mezclante. $\square$

Proposición 2.3. *Si $f : X \longrightarrow X$ es un mapeo débil completamente expansivo por continuos, entonces para cada U abierto no vacío de X existe un subcontinuo $C \in E(X, f)$ tal que $C \subseteq U$.*

Demostración. Sean $u \in U$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(u) \subseteq U$. Como $\{u\} \in C(X)$ existe $Z \in E(X, f)$ tal que $d_H(\{u\}, Z) < \varepsilon$, y entonces $Z \subseteq N_\varepsilon(\{u\}) = B_\varepsilon(u) \subseteq U$. $\square$

Proposición 2.4. *Si $f : X \longrightarrow X$ es un mapeo débil completamente expansivo por continuos, entonces f es mezclante.*

Demostración. Usemos la caracterización probada en la proposición 2.2.

Sea U abierto no vacío de X, de la proposición 2.3 existe $Z \in E(X, f)$ tal que $Z \subseteq U$. Sabemos que $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(Z), X) = 0$ ya que $Z \in E(X, f)$, y además $d_H(f^n(U), X) \leq d_H(f^n(Z), X)$ para todo $u \in \mathbb{N}$ pues $f^n(Z) \subseteq f^n(U)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de esto concluimos que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d_H(f^n(U), X) \leq \lim_{n\to\infty} d_H(f^n(Z), X) = 0.$$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(U), X) = 0$ lo cual prueba el resultado. $\square$

Lema 2.5. *Sean X un continuo y $\varepsilon > 0$. Supongamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X y $A \subseteq X$ son tales que para todo $U \in \mathcal{U}$ se cumplen que; $U \cap A \neq \emptyset$ y diám$(U) < \varepsilon$. Entonces $d_H(A, X) \leq \varepsilon$.*

Demostración. Basta probar que $X \subseteq N_\varepsilon(A)$. Sea $x \in X$, entonces por hipótesis existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. También por hipótesis existe $a \in U \cap A$. Como diám$(U) < \varepsilon$ y $x, a \in U$, se sigue que $d(a, x) < \varepsilon$, usando el hecho que $a \in A$ concluimos que $x \in N_\varepsilon(A)$. Lo cual prueba que $X \subseteq N_\varepsilon(A)$ y por ende $d_H(A, X) \leq \varepsilon$. $\square$

Proposición 2.6. *Sea $f : X \longrightarrow X$ un mapeo en un continuo. Entonces f es débilmente mezclante si y sólo si para todo abierto no vacío $U \subseteq X$ existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} d_H(f^{n_k}(U), X) = 0$.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos primero que f es débilmente mezclante. Sea U abierto no vacío de X. Como X es compacto, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $\mathcal{U}_i$ una cubierta abierta finita de X tales que si $V \in \mathcal{U}_i$, diám$(V) < \frac{1}{i}$. En efecto para construir dicha cubierta finita, dado $i \in \mathbb{N}$, consideramos la cubierta abierta de X, $\left\{B_{\frac{1}{3i}}(x) : x \in X\right\}$ la cual satisface tener como elementos abiertos de X con diámetro a lo más $\frac{2}{3i}$ y por ende menor que $\frac{1}{i}$. Entonces al ser X un espacio compacto,$\left\{B_{\frac{1}{3i}}(x) : x \in X\right\}$ contiene una subcubierta finita cuyos elementos tienen diámetro menor que $\frac{1}{i}$. Ahora, construimos por recursión una sucesión de números positivos estrictamente creciente $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ tales que $d_H(f^{n_k}(U), X) \leq \frac{1}{k}$.

Para $k = 1$, consideremos la cubierta abierta finita $\mathcal{U}_1$, ésta última consiste en una cantidad finita, a saber $|\mathcal{U}_1|$, de abiertos no vacíos. Como f es débilmente mezclante, de la proposición 1.24 (c) sabemos que f es $|\mathcal{U}_1|-$ transitiva y por tanto existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{U}_1$. Puesto que los abiertos de la cubierta $\mathcal{U}_1$ tienen diámetro menor que 1, del lema 2.5 se sigue que $d_H(f^{n_1}(U), X) \leq 1$.

Supongamos que tenemos construidos, para cierto natural $k \in \mathbb{N}$, los números $1 \leq n_1 < \ldots < n_k$ tales que $d_H(f^{n_i}(U), X) \leq \frac{1}{i}$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Nuevamente de la proposición 1.24 (c), para la subcubierta finita $\mathcal{U}_{k+1}$, existe $n_{k+1} > n_k$ tal que $f^{n_{k+1}}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{U}_{k+1}$. Del lema 2.5 se sigue que $d_H(f^{n_{k+1}}(U), X) \leq \frac{1}{k+1}$.

Por tanto se construyó una sucesión de números positivos estrictamente creciente $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ tales que $d_H(f^{n_k}(U), X) \leq \frac{1}{k}$, lo cual muestra que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} d_H(f^{n_k}(U), X) = 0.$$

$\Longleftarrow]$ Recíprocamente supongamos que para todo abierto no vacío $U \subseteq X$ existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} d_H(f^{n_k}(U), X) = 0.$$

Sean U_1, U_2, V_1, V_2 abiertos no vacíos de X. Por hipótesis existe sucesión $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} d_H(f^{n_k}(U_1), X) = 0$ y por el corolario 1.7 existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_K}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$. Entonces si hacemos $W = U_1 \cap f^{-n_K}(U_2)$ se sigue que éste es un abierto no vacío de X, nuevamente aplicando la hipótesis existe sucesión $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} d_H(f^{m_k}(W), X) = 0$, como f es suprayectiva sabemos que $f^{-n_K}(V_2)$ es un abierto no vacío, por el corolario 1.7 existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$f^{m_j}(W) \cap V_1 \neq \emptyset \quad \text{ si } j \geq k_1$$

$$f^{m_j}(W) \cap f^{-n_K}(V_2) \neq \emptyset \quad \text{ si } j \geq k_2.$$

Haciendo $S = \text{máx}\{k_1, k_2\}$ tenemos $f^{m_S}(W) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^{m_S}(W) \cap f^{-n_K}(V_2) \neq \emptyset$, se afirma que $f^{m_S}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $f^{m_S}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ lo cual terminaría la demostración. En efecto, por un lado como $W \subseteq U_1$ entonces

$$\emptyset \neq f^{m_S}(W) \cap V_1 \subseteq f^{m_S}(U_1) \cap V_1,$$

por otro lado $W \subseteq f^{-n_K}(U_2)$ y entonces $f^{m_S}(W) \subseteq f^{m_S}(f^{-n_K}(U_2)) \subseteq f^{-n_K}(f^{m_S}(U_2))$ por lo que

$$\emptyset \neq f^{m_S}(W) \cap f^{-n_K}(V_2) \subseteq f^{-n_K}(f^{m_S}(U_2)) \cap f^{-n_K}(V_2) = f^{-n_K}(f^{m_S}(U_2) \cap V_2)$$

lo cual necesariamente implica $f^{m_S}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. $\square$

Nuestro siguiente objetivo ahora es mostrar que para un continuo X no degenerado, el hiperespacio de los subcontinuos no degenerados es denso en $C(X)$. Para ello necesitamos introducir el concepto de *arco ordenado:*

Definición 2.1. *Sea X un continuo y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneqq B$. Una función continua $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ es un arco ordenado de A a B en $C(X)$, si $\alpha(0) = A$,*

$\alpha(1) = B$ *y* $\alpha(s) \subsetneqq \alpha(t)$ *siempre que* $0 \leq s < t \leq 1$.

La existencia de los arcos ordenados da como consecuencia el resultado de que el hiperespacio $C(X)$ es conexo por arcos para cualquier continuo X. Sin embargo la demostración de la existencia de los arcos ordenados escapa a los propósitos de este trabajo, nos limitaremos a enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.7. *Dados* $A, B \in C(X)$ *con* $A \subsetneqq B$, *existe un arco ordenado de* A *a* B *en* $C(X)$.

La demostración del teorema 2.7 se puede ver con detalle en [Illanes, Teorema 6.10, p. 90].

Proposición 2.8. *Todo* $f : X \longrightarrow X$ *mapeo (en un continuo) completamente expansivo por continuos es débil completamente expansivo por continuos.*

Demostración. Sea X un continuo y $f : X \longrightarrow X$ mapeo completamente expansivo por continuos. Definamos

$$C^*(X) := \{C \in C(X) : C \text{ es no degenerado}\}$$

y recuérdese que

$$E(X, f) = \{Y \in C(X) : \lim_{n \longrightarrow \infty} d_H(f^n(Y), X) = 0\}.$$

Nuestra hipótesis se traduce entonces en que $C^* \subseteq E(X, f)$.

Queremos mostrar que $E(X, f)$ es denso en $C(X)$, si $X = \{x\}$ es un continuo degenerado, $E(X, f) = \{X\} = C(X)$ es un denso. Supongamos entonces que X no es degenerado. Para mostrar que $E(X, f)$ es denso en $C(X)$, basta demostrar que C^* es denso en $C(X)$.

Sea $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que existe $B \in C^*$ tal que $d_H(B, A) < \varepsilon$. Hay dos casos: el primero, si $A \in C^*$, entonces $d_H(A, A) < \varepsilon$ y así hacemos $B = A$; el segundo, si $A = \{a\}$ es un subcontinuo degenerado, se sigue que $A \subsetneqq X$ y por el teorema 2.7 existe $\alpha : [0, 1] \longrightarrow C(X)$ un arco ordenado de A a X en $C(X)$. De la continuidad de α en 0, existe $\delta > 0$ tal que $d_H(\alpha(s), A) = d_H(\alpha(s), \alpha(0)) < \varepsilon$ si $|s| < \delta$. Definiendo entonces $B = \alpha\left(\frac{\delta}{2}\right)$ tenemos que $d_H(B, A) < \varepsilon$ y como $\frac{\delta}{2} > 0$, $A = \alpha(0) \subsetneqq \alpha\left(\frac{\delta}{2}\right) = B$, por lo que B es un subcontinuo no degenerado de X, o bien, $B \in C^*$.

Concluimos que C^* es denso en $C(X)$ lo cual a su vez implica que $E(X, f)$ también es denso en dicho hiperespacio. Esto muestra que f es débil completamente expansivo por continuos. $\square$

Ya podemos resumir nuestros últimas proposiciones en el siguiente teorema, que como habíamos anticipado, describe una jerarquía entre las condiciones que este trabajo quiere estudiar: completamente expansiva por continuos, débil completamente expansiva por continuos, mezclante y débilmente mezclante:

Teorema 2.9. *Sea $f : X \longrightarrow X$ un mapeo en un continuo y consideremos las siguientes condiciones caóticas:*

(1) f es completamente expansiva por continuos,

(2) f es débil completamente expansiva por continuos,

(3) f es mezclante y

(4) f es débilmente mezclante.

Entonces $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4)$.

Demostración. $(1) \Longrightarrow (2)$ es la proposición 2.8, $(2) \Longrightarrow (3)$ es la proposición 2.4 y $(3) \Longrightarrow (4)$ la proposición 2.1. $\square$

Lema 2.10. *Sean que $S \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow X$ mapeo tales que existe $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión estrictamente creciente tales que:*

(1) $\lim_{k\to\infty} d_H(f^{n_k}(S), X) = 0$,

(2) existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S \subseteq f^m(S)$.

Entonces $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(S), X) = 0$.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ como en la hipótesis (2). Sea $\varepsilon > 0$, por el lema 1.8 para cada $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ existe $\delta_j > 0$ tal que si $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ cumplen $d_H(A, B) < \delta_j$ entonces $d_H(f^j(A), f^j(B)) < \varepsilon$, así bien con $\delta := \min\{\delta_0, \ldots, \delta_{m-1}\} > 0$ se tiene que si $\emptyset \neq A \subseteq X$ cumple $d_H(A, X) < \delta$ entonces $d_H(f^j(A), X) = d_H(f^j(A), f^j(X)) < \varepsilon$ para todo $j \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Puesto que $\lim_{k\to\infty} d_H(f^{n_k}(S), X) = 0$, existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(f^{n_\alpha}(S), X) < \delta$.

De la hipótesis (2), $S \subseteq f^m(S)$ entonces se sigue que $f^{n_\alpha}(S) \subseteq f^{n_\alpha+m}(S)$ y más general se puede probar por inducción que si $k \in \omega$ entonces $f^{n_\alpha}(S) \subset f^{n_\alpha+km}(S)$, en efecto para $k = 0, 1$ el resultado es claro por la hipótesis y si $f^{n_\alpha}(S) \subset f^{n_\alpha+km}(S)$ para algún $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f^{n_\alpha+m}(S) \subset f^{n_\alpha+km+m}(S) = f^{n_\alpha+(k+1)m}(S)$$
$$\Rightarrow f^{n_\alpha}(S) \subseteq f^{n_\alpha+m}(S) \subseteq f^{n_\alpha+(k+1)m}(S)$$

por lo que la inducción es válida.

De estas series de contenciones y del hecho que $d_H(f^{n_\alpha}(S), X) < \delta$ se sigue que para todo $k \in \omega$, $d_H(f^{n_\alpha+km}(S), X) < \delta$, que a su vez implica que para todo $k \in \omega$ y $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, $d_H(f^{n_\alpha+km+j}(S), X) < \varepsilon$.

Por último notemos que si $n \geq n_\alpha$ entonces aplicando el algoritmo de la división existen $k \in \omega$ y $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ tales que $n - n_\alpha = km + j$ y por tanto $d_H(f^n(S), X) = d_H(f^{n_\alpha+km+j}(S), X) < \varepsilon$ lo cual prueba

$$\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(S), X) = 0.$$

□

Lema 2.11. *Supóngase que $f : X \longrightarrow X$ es débilmente mezclante y existe una colección de abiertos no vacíos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ tal que:*

(1) Para cada $\alpha \in \Omega$ existe $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $U_\alpha \subseteq f^{n_\alpha}(U_\alpha)$,

(2) Para cada abierto no vacío $U \subseteq X$ existen $\alpha \in \Omega$ y $m_\alpha \in \omega$ tales que $U_\alpha \subseteq f^{m_\alpha}(U)$.

Entonces f es mezclante.

Demostración. Primero notemos que al ser f débilmente mezclante entonces por la proposición 2.6, la hipótesis (1) y el lema 2.10 se sigue que para todo $\alpha \in \Omega$, $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(U_\alpha), X) = 0$.

Ahora bien consideremos $V \subseteq X$ abierto no vacío, de la hipótesis (2) existen $\alpha \in \Omega$ y $m_\alpha \in \omega$ tales que $U_\alpha \subseteq f^{m_\alpha}(V)$. De lo anterior se deduce que $f^n(U_\alpha) \subseteq f^{m_\alpha+n}(V)$ y por ende $0 \leq d_H(f^{m_\alpha+n}(V), X) \leq d_H(f^n(U_\alpha), X)$ para todo $n \in \omega$. Por tanto $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(V), X) = \lim_{n\to\infty} d_H(f^{m_\alpha+n}(V), X) = 0$, lo que prueba que f es mezclante por la proposición 2.2. □

Proposición 2.12. *Sean $f : X \longrightarrow X$ y $g : Y \longrightarrow Y$ mapeos y sea el mapeo $F : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ definido como $F(x, y) = (f(x), g(y))$. Entonces f y g son mezclantes si y sólo si F es mezclante.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos primero que f y g son mapeos mezclantes, sean $U, V \subseteq X \times Y$ abiertos no vacíos, entonces existen U_X, V_X abiertos no vacíos de X y U_Y, V_Y abiertos no vacíos de Y tales que $U_X \times U_Y \subseteq U$ y $V_X \times V_Y \subseteq V$. Por nuestro supuesto existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(U_X) \cap V_X \neq \emptyset$ si $n \geq N_1$ y $g^n(U_Y) \cap V_Y \neq \emptyset$

si $n \geq N_2$, así bien tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ tenemos que si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned}\emptyset \neq (f^n(U_X) \cap V_X) \times (g^n(U_Y) \cap V_Y) &= (f^n(U_X) \times g^n(U_Y)) \cap (V_X \times V_Y) \\ &= F^n(U_X \times U_Y) \cap (V_X \times V_Y) \subseteq F^n(U) \cap V.\end{aligned}$$

Por lo que F es mezclante.

$\Longleftarrow$] Recíprocamente para probar la suficiencia, supongamos por contrapuesta que f o g alguno no es mezclante, sin pérdida de generalidad supongamos que f no es mezclante (el otro caso tiene un razonamiento totalmente análogo), así bien existen U, V abiertos no vacíos de X de tal forma que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \geq n$ tal que $f^{k_n}(U) \cap V = \emptyset$. De lo anterior se sigue que $U \times Y, V \times Y$ son abiertos no vacíos de $X \times Y$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}F^{k_n}(U \times Y) \cap (V \times Y) &= (f^{k_n}(U) \times g^{k_n}(Y)) \cap (V \times Y) \\ &= (f^{k_n}(U) \cap V) \times (g^{n_k}(Y) \cap Y) \\ &= (f^{k_n}(U) \cap V) \times (Y \cap Y) = (f^{k_n}(U) \cap V) \times Y = \emptyset,\end{aligned}$$

por lo que F no es mezclante. $\square$

Proposición 2.13. *Sean mapeos $f : X \longrightarrow X$ mezclante y $g : Y \longrightarrow Y$ débilmente mezclante, entonces el mapeo $F : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ definido como $F(x, y) = (f(x), g(y))$ es débilmente mezclante.*

Demostración. Sean U_1, V_1, U_2, V_2 abiertos no vacíos de $X \times Y$, luego existen $U_{i,X}, V_{i,X}$ abiertos no vacíos de X y $U_{i,Y}, V_{i,Y}$ abiertos de Y con $i = 1, 2$ tales que $U_{i,X} \times U_{i,Y} \subseteq U_i$ y $V_{i,X} \times V_{i,Y} \subseteq V_i$ para $i = 1, 2$. Puesto que f es mezclante, para cada $i = 1, 2$ existen $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_i$, luego $f^n(U_{i,X}) \cap V_{i,X} \neq \emptyset$ elijamos $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$.

Como g es débilmente mezclante entonces por 1.24 existe $m \geq N$ tal que para cualquier $i = 1, 2$, se tiene $g^m(U_{i,Y}) \cap V_{i,Y} \neq \emptyset$. Entonces para esta elección de $m \in \mathbb{N}$ se tiene que para cualquier $i = 1, 2; m \geq N_i$ y por tanto

$$\begin{aligned}F^m(U_i) \cap V_i \supseteq F^m(U_{i,X} \times U_{i,Y}) \cap (V_{i,X} \times V_{i,Y}) &= (f^m(U_{i,X}) \times g^m(U_{i,Y})) \cap (V_{i,X} \times V_{i,Y}) \\ &= (f^m(U_{i,X}) \cap (V_{i,X}) \times (g^m(U_{i,Y}) \cap V_{i,Y}) \neq \emptyset.\end{aligned}$$

Por tanto F es débilmente mezclante. $\square$

Proposición 2.14. *Si $f : X \longrightarrow X$ es un mapeo mezclante en un continuo y $\mathcal{H} := \{Y \in C(X) : int(Y) \neq \emptyset\}$ es denso en $C(X)$, entonces f es débil completamente expansivo por continuos.*

Demostración. Nótese que si $Y \in \mathcal{H} := \{Y \in C(X) : \operatorname{int}(Y) \neq \emptyset\}$ entonces como f es mezclante y por 2.2 se tiene que $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(\operatorname{int}(Y)), X) = 0$ y como $\operatorname{int}(Y) \subseteq Y$ entonces $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(Y), X) = 0$ lo cual significa que $Y \in E(X, f)$ y por ende $\mathcal{H} \subseteq E(X, f)$, por hipótesis como $\mathcal{H}$ es denso en $C(X)$ se sigue que $E(X, f)$ es denso lo cual significa que f es *débil completamente expansivo por continuos.* $\square$

Capítulo 3

Continuos localmente conexos

A continuación presentamos los resultados más generales para continuos localmente conexos, igual llamados *continuos de Peano*. Se verán qué condiciones extras en estos continuos nos otorgan más equivalencias para las condiciones caóticas expuestas, llegando así a que en una gráfica las cuatros condiciones caóticas son todas equivalentes. Por último se introducirá el concepto de dendrita, un continuo localmente conexo sin circunferencias, y se darán contraejemplos para aquellas equivalencias que en general no son ciertas.

3.1. Resultados generales en continuos localmente conexos

Proposición 3.1. *Sea X un continuo localmente conexo, entonces el conjunto*

$$\mathcal{H} := \{Y \in C(X) : int(Y) \neq \emptyset\}$$

es denso en $C(X)$.

Demostración. Sea $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $a \in A$, como X es localmente conexo existe U abierto conexo de X tal que $a \in U \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$, se sigue que $\overline{U}$ es conexo y $a \in U \subseteq \overline{U} \subseteq \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}} \subseteq B_{\varepsilon}(a)$. Defínase $Y = A \cup \overline{U}$, como este conjunto es unión de cerrados en X, entonces es cerrado y por tanto compacto (además de ser no vacío), al ser unión de conexos cuya intersección no es vacía (pues $a \in A \cap \overline{U}$) resulta ser también conexo, por ende $Y \in C(X)$, por último nótese que $U \subseteq Y$ y como U es abierto no vacío se sigue que $\text{int}(Y) \neq \emptyset$ y por tanto $Y \in \mathcal{H}$.

Por otro lado nótese que $A \subseteq Y \subseteq N_\varepsilon(Y)$ y $Y = A \cup \overline{U} \subseteq A \cup B_\varepsilon(a) \subseteq N_\varepsilon(A)$ por lo cual $d_H(A, Y) < \epsilon$. Esto prueba que $\mathcal{H}$ es denso en $C(X)$. $\square$

Teorema 3.2. *Si $f : X \longrightarrow X$ es un mapeo mezclante en un continuo localmente conexo, entonces f es débil completamente expansivo por continuos.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de las proposiciones 3.1 y 2.14. $\square$

Como veremos más adelante en los ejemplos de las dendritas D_4 y D_ω, en general, en los continuos localmente conexos NO tenemos las implicaciones:

$$\text{Débilmente mezclante} \Longrightarrow \text{Mezclante} \quad \text{y}$$

$$\text{Débil completamente expansiva} \Longrightarrow \text{Completamente expansiva por continuos.}$$

por continuos

Veremos a que si además pedimos que el continuo tenga arcos libres, podremos tener la equivalencia: Débilmente mezclante $\Longleftrightarrow$ Mezclante.

3.2. Continuos localmente conexos con arcos libres. Gráficas.

Definición 3.1. *En un espacio topológico X, diremos que $A \subseteq X$ es un arco libre de X si existe un homeomorfismo $h : [a, b] \longrightarrow A$ y $h((a, b)) = A - \{h(a), h(b)\}$ es un abierto de X.*

De la definición, puesto que A es homeomorfo al arco $[a, b]$, comúnmente escribiremos $[a, b] \subseteq X$ es un arco libre, es decir, por simplicidad omitiremos el homemorfismo h y así cuando escribamos $x \in [a, b]$ nos referiremos al elemento del espacio X que se obtiene bajo el homeomorfismo h en x.

Una observación sencilla es que todo subarco $[c, d]$ de un arco libre $[a, b]$ también es un arco libre ya que (c, d) es abierto en (a, b) que a su vez es abierto en X, lo cual implica que (c, d) es abierto en X.

Lema 3.3. *Sea X un espacio T_2 y $[a, b] \subseteq X$ un arco libre, supongamos que $a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < b$, entonces para todo conexo $C \subseteq X$ tal que $(a, x_1) \cap C \neq \emptyset$ y $(y_1, x_2) \cap C \neq \emptyset$ se cumple que $(x_1, y_1) \subseteq C$ o $(x_2, y_2) \subseteq C$.*

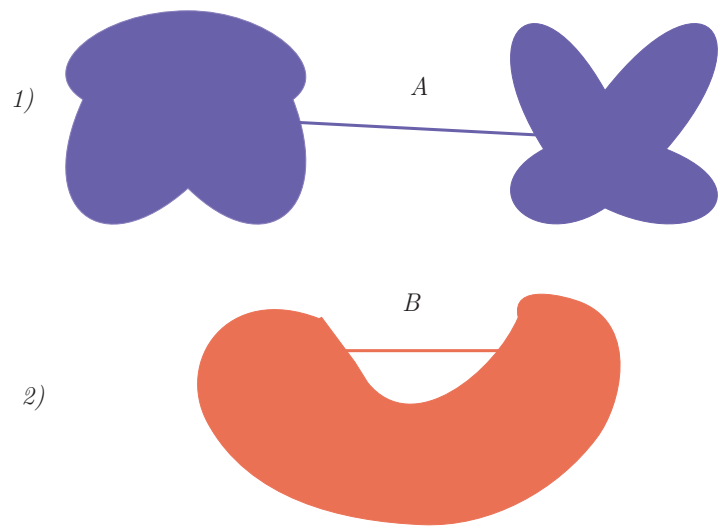

Figura 3.1: Espacios con arcos libres: el espacio 1) representa un arco libre que desconecta al espacio, mientras que en el espacio 2) el arco libre no lo desconecta.

Demostración. Supongamos para llegar a una contradicción que $(x_1, y_1) \nsubseteq C$ y $(x_2, y_2) \nsubseteq C$, luego consideremos $p \in (x_1, y_1) - C$ y $q \in (x_2, y_2) - C$.

Nótese que $a < x_1 < p < y_1 < x_2 < q < y_2 < b$ por tanto (p, q) forma un intervalo abierto y por ende $[p, q]$ es otro arco libre, debido a que $p, q \notin C$ entonces $C \subseteq X - \{p, q\} = (p, q) \cup (X - [p, q])$ pero (p, q) y $X - [p, q]$ son abiertos ajenos (pues $[p, q]$ es un cerrado en X por ser un compacto en un T_2) y como C es conexo entonces necesariamente ocurre $C \subseteq (p, q)$ o $C \subseteq X - [p, q]$.

En el primer caso si $C \subseteq (p, q)$ considerando $a < x_1 < p < q$ obtenemos que $(a, x_1) \cap C \subseteq (a, x_1) \cap (p, q) = \emptyset$ contradiciendo nuestra hipótesis $(a, x_1) \cap C \neq \emptyset$.

En el segundo caso si $C \subseteq X - [p, q]$ se sigue que $C \cap (p, q) \subseteq (X - [p, q]) \cap (p, q) = \emptyset$ y haciendo notar el hecho de que $p < y_1 < x_2 < q$ implica $(y_1, x_2) \subseteq (p, q)$ entonces $(y_1, x_2) \cap C \subseteq (p, q) \cap C = \emptyset$ contrario a la hipótesis $(y_1, x_2) \cap C \neq \emptyset$.

Por tanto necesariamente ocurre $(x_1, y_1) \subseteq C$ o $(x_2, y_2) \subseteq C$. $\square$

Lema 3.4. *Supóngase que X es un continuo , $f : X \longrightarrow X$ un mapeo débilmente mezclante y $[a, b] \subseteq X$ un arco libre. Entonces existen $a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < b$ y $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $(x_1, y_1) \subseteq f^n((x_1, y_1))$ y $(x_2, y_2) \subseteq f^m((x_2, y_2))$.*

Demostración. Consideremos $a < w_1 < z_1 < w_2 < z_2 < \frac{a+b}{2}$ y consideremos los intervalos $(a, w_1), (w_1, z_1), (z_1, w_2), (w_1, z_1)$, entonces para estos dos pares de intervalos abiertos, por ser f débilmente mezclante, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(a, w_1) \cap f^p((w_1, z_1)) \neq \emptyset$$

$$(z_1, w_2) \cap f^p((w_1, z_1)) \neq \emptyset$$

como f es continua y (w_1, z_1) es conexo, entonces $f^p((w_1, z_1))$ es conexo, por tanto por el lema 3.3 sabemos que ocurre alguna de las siguientes contenciones: $(w_1, z_1) \subseteq f^p((w_1, z_1))$ o $(w_2, z_2) \subseteq f^p((w_1, z_1))$. De manera análoga para los intervalos abiertos $(a, w_1), (w_2, z_2), (z_1, w_2), (w_2, z_2)$ existe $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$(a, w_1) \cap f^q((w_2, z_2)) \neq \emptyset$$

$$(z_1, w_2) \cap f^q((w_2, z_2)) \neq \emptyset$$

y concluiríamos nuevamente por el lema 3.3 que ocurre: $(w_1, z_1) \subseteq f^q((w_2, z_2))$ o $(w_2, z_2) \subseteq f^q((w_2, z_2))$. Así bien tenemos cuatro casos posibles:

(1) $(w_1, z_1) \subseteq f^p((w_1, z_1))$ y $(w_1, z_1) \subseteq f^q((w_2, z_2))$,

(2) $(w_1, z_1) \subseteq f^p((w_1, z_1))$ y $(w_2, z_2) \subseteq f^q((w_2, z_2))$,

(3) $(w_2, z_2) \subseteq f^p((w_1, z_1))$ y $(w_1, z_1) \subseteq f^q((w_2, z_2))$,

(4) $(w_2, z_2) \subseteq f^p((w_1, z_1))$ y $(w_2, z_2) \subseteq f^q((w_2, z_2))$.

Nótese que (3) implica que $(w_1, z_1) \subseteq f^q((w_2, z_2)) \subseteq f^q(f^p((w_1, z_1))) = f^{p+q}((w_1, z_1))$ y $(w_2, z_2) \subseteq f^p((w_1, z_1)) \subseteq f^p(f^q((w_2, z_2))) = f^{p+q}((w_1, z_1))$, por tanto en cualquiera de los cuatro casos podemos elegir $i \in \{1, 2\}$ tal que $(w_i, z_i) \subseteq f^n((w_i, z_i))$ para algún $n \in \mathbb{N}$, así bien definamos $x_1 = w_i$ y $y_1 = z_i$ para obtener que existen $a < x_1 < y_1 < \frac{a+b}{2}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(x_1, y_1) \subseteq f^n((x_1, y_1))$.

Ahora si consideramos $\frac{a+b}{2} < w_1' < z_1' < w_2' < z_2' < b$ y repitiendo la técnica anterior podemos concluir de igual manera que para algún $i \in \{1, 2\}$ y algún $m \in \mathbb{N}$ se tiene $(w_i', z_i') \subseteq f^m((w_i', z_i'))$, por lo que haciendo $x_2 = w_i'$ y $y_2 = z_i'$ concluimos que existen $\frac{1}{2} < x_2 < y_2 < b$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $(x_2, y_2) \subseteq f^m((x_2, y_2))$. Y así $a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < b$ y $m, n \in \mathbb{N}$ son los que buscábamos. $\square$

Teorema 3.5. *Supóngase que X es un continuo localmente conexo con un arco libre $[a, b] \subseteq X$, si $f : X \longrightarrow X$ un mapeo débilmente mezclante entonces f es mezclante.*

Demostración. Por el lema 3.4 sean $a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < b$ y $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $(x_1, y_1) \subseteq f^n((x_1, y_1))$ y $(x_2, y_2) \subseteq f^m((x_2, y_2))$.

Se probará que para la familia de abiertos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$, si U es abierto no vacío de X entonces existe $i \in \{1, 2\}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $(x_i, y_i) \subseteq f^k(U)$. En efecto, sea U abierto no vacío de X, y sea $u \in U$, luego existe V abierto conexo de X tal que $u \in V \subseteq U$, luego V es abierto conexo no vacío. Por ser f débilmente mezclante sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(0, x_1) \cap f^k(V) \neq \emptyset$ y $(y_1, x_2) \cap f^k(V) \neq \emptyset$ como V es conexo y f es continua se sigue que $f^k(V)$ es conexo y por el lema 3.3 se sigue que $(x_1, y_1) \subseteq f^k(V) \subseteq f^k(U)$ o $(x_2, y_2) \subseteq f^k(V) \subseteq f^k(U)$ lo cual queríamos demostrar.

Lo que se mostró es que $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ es familia de abiertos no vacíos de X tales que:

a) $(x_1, y_1) \subseteq f^n((x_1, y_1))$ y $(x_2, y_2) \subseteq f^m((x_2, y_2))$,

b) para cada abierto no vacío U de X, existen $i =\in \{1, 2\}$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $(x_i, y_i) \subseteq f^k(U)$.

Entonces usando el lema 2.11 se sigue que f es mezclante. $\square$

Las técnicas de demostración utilizadas en los lemas 3.3, 3.4 y el teorema 3.5 se verán de nuevo en el capítulo 5, la razón, estas técnicas se pueden utilizar en las gráficas (en el capítulo 5 abordaremos ciertos continuos que guardan cierta similitud a las gráficas puesto que nos basamos de éstas para su definición).

Definición 3.2. *Una gráfica G, es una unión conexa y finita de arcos tales que cada uno de ellos se intersecta en un número finito de puntos.*

Una gráfica resulta ser un continuo localmente conexo, de la definición es inmediato que siempre contienen arcos libres. Véase [Nadler, Proposición 9.4, p. 142]. Entre los ejemplos de gráficas están el arco, $\mathbb{S}^1$, el triodo simple (véase figura 3.2).

El siguiente teorema muestra la equivalencia de nuestra condiciones caóticas de interés para la clase de las gráficas.

Teorema 3.6. *Sea $f : G \longrightarrow G$ un mapeo en una gráfica. Entonces las siguientes son equivalentes para f :*

(1) f es completamente expansivo por continuos

(2) f es débil completamente expansivo por continuos

(3) f es mezclante

(4) f es débilmente mezclante

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) es exactamente el teorema 2.9. Por otro lado como G es una gráfica, entonces es un continuo localmente conexo el cual contiene un arco libre entonces (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) se sigue de los teoremas 3.2 y 3.5.

Para acabar con las equivalencias mostremos (2) $\Rightarrow$ (1), esto se sigue del hecho de que todo subcontinuo no degenerado de $Y \in C(G)$ tiene interior no vacío (pues siempre contiene un intervalo abierto, más aún todo subcontinuo de una gráfica es a su vez otra gráfica, véase [Nadler, Corolario 9.10.1, p. 145]). Así bien, suponiendo que f débil completamente expansiva por continuos, entonces f es mezclante por el teorema 2.9, por la técnica utilizada en la proposición 2.14 y como $\operatorname{int}(Y) \neq \emptyset$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} d_H(f^n(Y), X) = 0$, lo cual prueba (4). $\square$

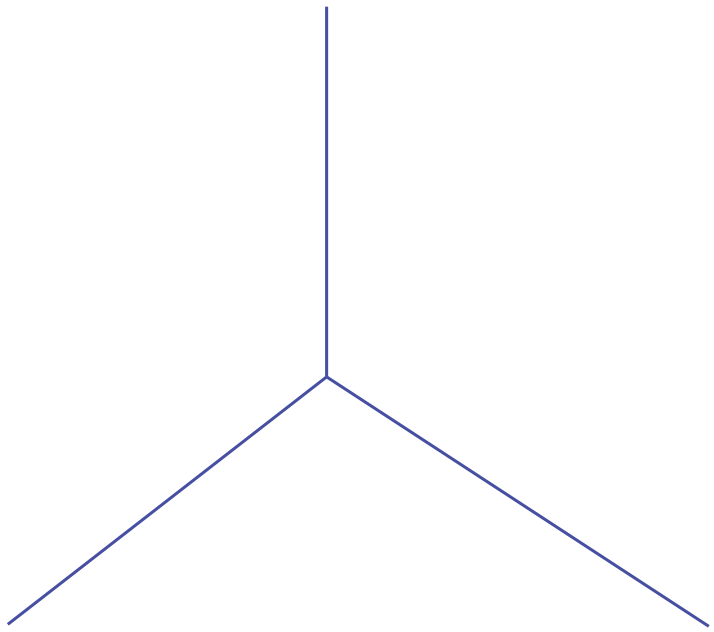

Figura 3.2: El triodo simple.

3.3. La dendrita D_4. Un mapeo débil completamente expansivo por continuos y no completamente expansivo por continuos

Una dendrita se define como un continuo localmente conexo que no contiene como subcontinuos una circunferencia, es decir, no contiene copias homeomorfas del continuo $\mathbb{S}^1$.

Consideremos $X_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| + |2y| \leq 1\}$ (véase figura 3.3), claramente éste es un subconitnuo de $\mathbb{R}^2$ (de hecho es homeomorfo al continuo $[0,1]^2$). Definamos los siguientes homeomorfismos en $\mathbb{R}^2$, para $i = 1,2,3,4$ sean $h_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como siguen: para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} h_1(x,y) &= \left(-\frac{1}{4}y, \frac{1}{4}(x+1)\right), \\ h_2(x,y) &= \left(\frac{1}{2}(x+1), \frac{1}{2}y\right), \\ h_3(x,y) &= \left(\frac{1}{4}y, -\frac{1}{4}(x+1)\right), \\ h_4(x,y) &= \left(-\frac{1}{2}(x+1), -\frac{1}{2}y\right), \end{aligned}$$

obsérvese que $h_1 = -h_3$ y $h_2 = -h_4$. Para $X \subseteq \mathbb{R}^2$ defínase

$$-X = \{(-x,-y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x.y) \in X\},$$

entonces es fácil notar que si $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces $h_1(A) = -h_3(A)$, $h_2(A) = -h_4(A)$, $h_3(A) = -h_1(A)$ y $h_4(A) = -h_2(A)$, y $-(A \cap B) = -A \cap -B$.

Proposición 3.7. *Para todo $i,j \in \{1,2,3,4\}$ si $i \neq j$ entonces $h_i(X_0) \cap h_j(X_0) = \{(0,0)\}$.*

Demostración. Sean $i,j \in \{1,2,3,4\}$ con $i \neq j$. Primero notemos que $(-1,0) \in X_0$ y $h_i(-1,0) = (0,0) = h_j(-1,0)$, por ello basta únicamente probar que $h_i(X_0) \cap h_j(X_0) \subseteq \{(0,0)\}$. Lo demostraremos realizando las 6 distintas combinaciones:

a) Si $i = 1$ y $j = 2$, sean $(p,q),(x,y) \in X_0$ y supongamos que $h_1(p,q) = h_2(x,y)$, entonces

$$\left(-\frac{1}{4}q, \frac{1}{4}(p+1)\right) = \left(\frac{1}{2}(x+1), \frac{1}{2}y\right)$$

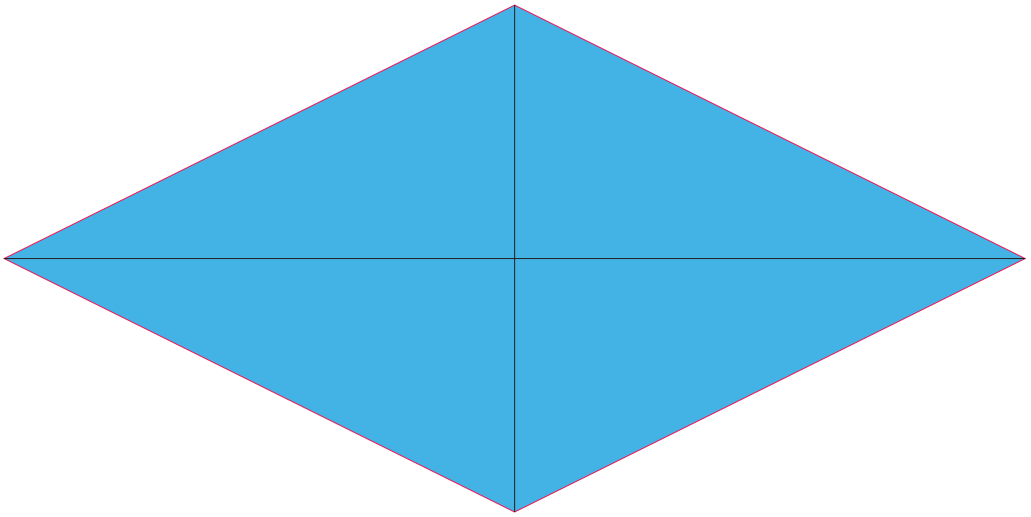

Figura 3.3: El continuo X_0.

de lo cual se sigue que

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}q = \frac{1}{2}(x+1) \\ \frac{1}{4}(p+1) = \frac{1}{2}y, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} q = \frac{-4}{2}(x+1) = -2(x+1) \\ p = \frac{4}{2}y - 1 = 2y - 1. \end{cases}$$

Así $(p,q) = (2y-1, -2(x+1))$ y como $(p,q),(x,y) \in X_0$ se sigue que:

$$\begin{cases} |x| + |2y| & \leq 1 \\ |2y-1| + |-4(x+1)| = |p| + |2q| & \leq 1, \end{cases}$$

y en particular tenemos que

$$\begin{cases} -x + 2y & \leq 1 \\ 1 - 2y + 4(x+1) & \leq 1, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2y & \leq x+1 \\ 4(x+1) & \leq 2y, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 4(x+1) \leq 2y \leq x+1,$$

$$\Longrightarrow 3(x+1) \leq 0,$$

$$\Longrightarrow x+1 \leq 0,$$

$$\Longrightarrow x \leq -1.$$

Por tanto tenemos que $x \leq -1$, de lo cual se sigue que $|x| \geq 1$. Del hecho que $|x| + |2y| \leq 1$ concluimos que $(x, y) = (-1, 0)$ y por tanto

$$(p, q) = (2y - 1, -2(x+1)) = (-1, 0).$$

Por ello $h_1(p, q) = h_2(x, y) = (0, 0)$, lo cual muestra que $h_1(X_0) \cap h_2(X_0) \subseteq \{(0, 0)\}$.

b) Si $i = 1$ y $j = 3$, sean $(p, q), (x, y) \in X_0$ y supongamos que $h_1(p, q) = h_3(x, y)$, entonces

$$\left(-\frac{1}{4}q, \frac{1}{4}(p+1)\right) = \left(\frac{1}{4}y, -\frac{1}{4}(x+1)\right),$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}q = \frac{1}{4}y \\ \frac{1}{4}(p+1) = -\frac{1}{4}(x+1), \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} q = \frac{-4}{4}y = -y \\ p = -\frac{4}{4}(x+1) - 1 = -x - 2, \end{cases}$$

Entonces $(p, q) = (-(x+2), -y)$ y como $(p, q), (x, y) \in X_0$ se sigue que

$$\begin{cases} |x| + |2y| & \leq 1 \\ |x+2| + |2y| & \leq 1, \end{cases}$$

en particular $x \in [-1, 1]$ y de lo cual $x + 2 \in [1, 3]$ por lo que $|x+2| \geq 1$ y del hecho $|x+2| + |2y| \leq 1$ concluimos que $x + 2 = 1$ y $y = 0$, o bien $(x, y) = (-1, 0)$, también se deduce que

$$(p, q) = (-(x+2), -y) = (-1, 0).$$

Entonces $h_1(p, q) = h_3(x, y) = (0, 0)$, lo cual muestra que $h_1(X_0) \cap h_3(X_0) \subseteq \{(0, 0)\}$.

c) Si $i = 1$ y $j = 4$, sean $(p,q),(x,y) \in X_0$ y supongamos que $h_1(p,q) = h_4(x,y)$, entonces

$$\left(-\frac{1}{4}q, \frac{1}{4}(p+1)\right) = \left(-\frac{1}{2}(x+1), -\frac{1}{2}y\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}q = -\frac{1}{2}(x+1) \\ \frac{1}{4}(p+1) = -\frac{1}{2}y, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} q = \frac{-4}{-2}(x+1) = 2(x+1) \\ p = -\frac{4}{2}y - 1 = -2y - 1. \end{cases}$$

Así $(p,q) = (-2y-1, 2(x+1))$ y como $(p,q),(x,y) \in X_0$ se sigue que

$$\begin{cases} |x| + |2y| & \leq 1 \\ |-2y+1| + |4(x+1)| & \leq 1, \end{cases}$$

este sistema es el mismo del inciso a) y por lo probado en éste, $(x,y) = (-1,0)$ y

$$(p,q) = (-2y-1, 2(x+1)) = (-1,0)$$

por ello $h_1(p,q) = h_4(x,y) = (0,0)$, lo cual muestra que $h_1(X_0) \cap h_4(X_0) \subseteq \{(0,0)\}$.

d) Si $i = 2$ y $j = 3$,

$$h_2(X_0) \cap h_3(X_0) = -h_4(X_0) \cap -h_1(X_0) = -(h_1(X_0) \cap h_4(X_0)) \subseteq -\{(0,0)\} = \{(0,0)\}.$$

e) Si $i = 2$ y $j = 4$, sean $(p,q),(x,y) \in X_0$ y supongamos que $h_2(p,q) = h_4(x,y)$, entonces

$$\left(\frac{1}{2}(p+1), \frac{1}{2}q\right) = \left(-\frac{1}{2}(x+1), -\frac{1}{2}y\right),$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(p+1) = -\frac{1}{2}(x+1) \\ \frac{1}{2}q = -\frac{1}{2}y, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p = \frac{2}{-2}(x+1) - 1 = -x - 2 \\ q = \frac{2}{-2}y = -y. \end{cases}$$

Así $(p,q) = (-(x+2), -y)$ y como $(p,q),(x,y) \in X_0$ se sigue que

$$\begin{cases} |x| + |2y| & \leq 1 \\ |-(x+2)| + |-2y| & \leq 1, \end{cases}$$

este sistema es el mismo del inciso b) y por lo probado en éste, $(x, y) = (-1, 0)$ por ello

$$(p, q) = (-(x+2), -y) = (-1, 0)$$

y así $h_2(p, q) = h_4(x, y) = (0, 0)$, lo cual muestra que $h_2(X_0) \cap h_4(X_0) \subseteq \{(0, 0)\}$.

f) Si $i = 3$ y $j = 4$,

$$h_3(X_0) \cap h_4(X_0) = -h_1(X_0) \cap -h_2(X_0) = -(h_1(X_0) \cap h_2(X_0)) \subseteq -\{(0, 0)\} = \{(0, 0)\}.$$

Por tanto, en cualquier caso deducimos que $h_i(X_0) \cap h_j(X_0) = \{(0, 0)\}$. $\square$

Para un subconjuto $X \subseteq \mathbb{R}^2$ no vacío y acotado, definimos

$$\text{diám}(X) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in X\}.$$

De la definición es claro que si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$ son subconjuntos no vacíos con B acotado, entonces A es acotado y además $\text{diám}(A) \leq \text{diám}(B)$.

Proposición 3.8. *1. diám$(X_0) = 2$.*

2. Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es subconjunto acotado y no vacío, entonces

$$\textit{diám}(h_1(A)) = \textit{diám}(h_3(A)) = \frac{1}{4}\textit{diám}(A)$$

y

$$\textit{diám}(h_2(A)) = \textit{diám}(h_4(A)) = \frac{1}{2}\textit{diám}(A).$$

En particular diám$(h_i(A)) \leq \frac{1}{2}$diám$(A)$ si $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Demostración. 1. Puesto que $(-1, 0), (1, 0) \in X_0$ entonces $2 = \|(-1, 0) - (1, 0)\| \leq \text{diám}(X_0)$. Para mostrar $\text{diám}(X_0) \leq 2$, sean $(p, q), (x, y) \in X_0$ entonces $|p| + |2q| \leq 1$ y $|x| + |2y| \leq 1$ y por tanto

$$|p - x| + |q - y| \leq |p| + |x| + |q| + |y| \leq (|p| + |2q|) + (|x| + |2y|) \leq 2,$$

entonces

$$\|(p, q) - (x, y)\| = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2} \leq \sqrt{(|p-x| + |q-y|)^2} = |p-x| + |q-y| \leq 2$$

lo que muestra que $\text{diám}(X_0) \leq 2$, y finalmente $\text{diám}(X_0) = 2$.

2. Claramente para todo $i \in \{1,2,3,4\}$ el conjunto $h_i(A)$ es no vacío, si $(p,q),(x,y) \in A$ entonces

$$\|h_1(p,q) - h_1(x,y)\| = \left\|\left(-\frac{1}{4}q, \frac{1}{4}(p+1)\right) - \left(-\frac{1}{4}y, \frac{1}{4}(x+1)\right)\right\| = \frac{1}{4}\|(p,q) - (x,y)\|$$
$$\|h_2(p,q) - h_2(x,y)\| = \left\|\left(\frac{1}{2}(p+1), \frac{1}{2}q\right) - \left(\frac{1}{2}(x+1), \frac{1}{2}y\right)\right\| = \frac{1}{2}\|(p,q) - (x,y)\|$$
$$\|h_3(p,q) - h_3(x,y)\| = \left\|\left(\frac{1}{4}q, -\frac{1}{4}(p+1)\right) - \left(\frac{1}{4}y, -\frac{1}{4}(x+1)\right)\right\| = \frac{1}{4}\|(p,q) - (x,y)\|$$
$$\|h_4(p,q) - h_4(x,y)\| = \left\|\left(-\frac{1}{2}(p+1), -\frac{1}{2}q\right) - \left(-\frac{1}{2}(x+1), -\frac{1}{2}y\right)\right\| = \frac{1}{2}\|(p,q) - (x,y)\|,$$

las anteriores igualdades muestra que los conjuntos $h_i(A)$ están acotados para cada $i \in \{1,2,3,4\}$ pues A lo está, y muestra que $\text{diám}(h_1(A)) = \text{diám}(h_3(A)) = \frac{1}{4}\text{diám}(A)$ y $\text{diám}(h_2(A)) = \text{diám}(h_4(A)) = \frac{1}{2}\text{diám}(A)$. $\square$

A continuación definamos los siguientes conjuntos por recursión:

I) Tenemos construido $X_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |2y| \leq 1\}$ y para todo $n \in \omega$ sea $X_{n+1} := \bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_n)$. (Véanse las figuras de la 3.4 a la 3.8).

II) Definamos $R_1 := \{(0,0)\}$ y para todo $m \in \mathbb{N}$ sea $R_{m+1} := \left(\bigcup_{k=1}^{4} h_k(R_m)\right) \cup R_m$.

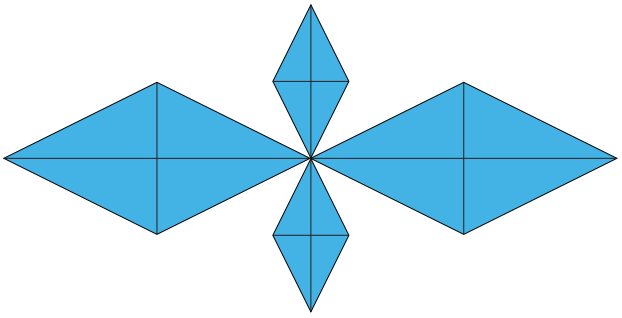

Figura 3.4: El continuo X_1.

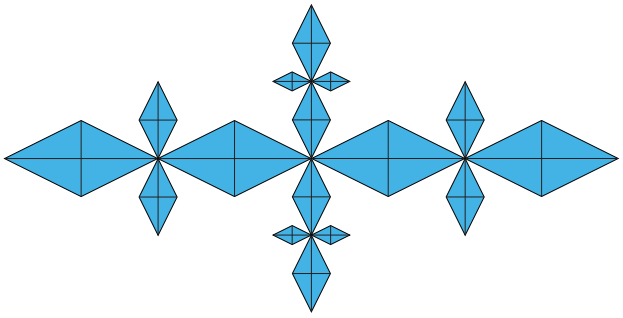

Figura 3.5: El continuo X_2.

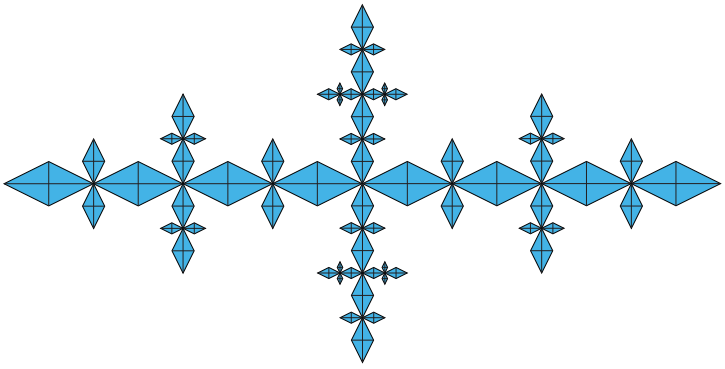

Figura 3.6: El continuo X_3.

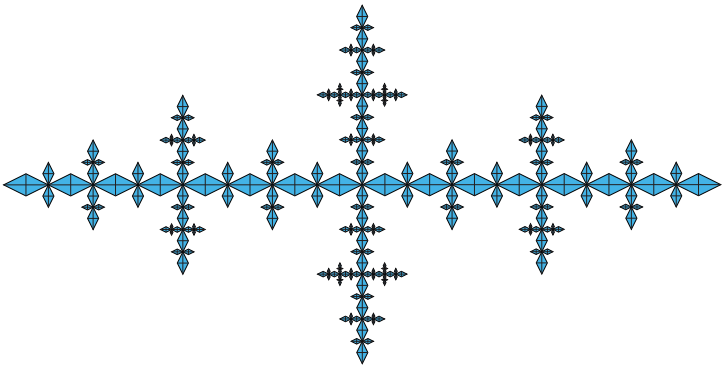

Figura 3.7: El continuo X_4.

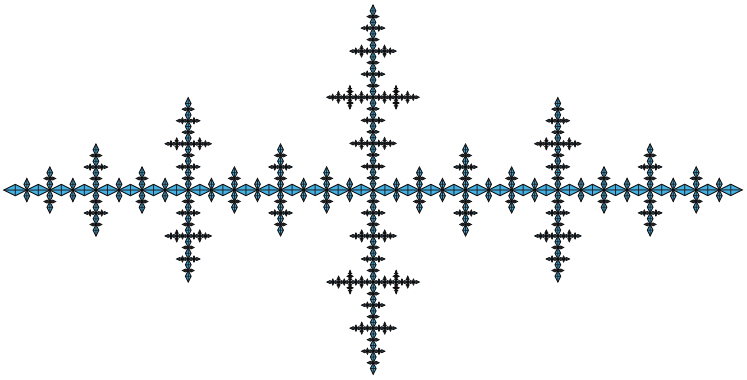

Figura 3.8: El continuo X_5.

Proposición 3.9. *Para todo $n \in \omega$ se cumple que:*

a) $X_{n+1} \subseteq X_n$,

b) $[-1,1] \times \{0\} \subseteq X_n$,

c) $R_m \subseteq X_n$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$,

d) *si* $i, j \in \{1,2,3,4\}$ *con* $i \neq j$ *entonces* $h_i(X_n) \cap h_j(X_n) = \{(0,0)\}$,

e) X_n *es un continuo de* $\mathbb{R}^2$.

f) *si* $j \in \{1,2,3,4\}$ *entonces* $h_i(X_n) - \{(0,0)\}$ *es abierto de* X_{n+1}, *en particular es abierto de* $X_{n+1} - \{(0,0)\}$.

Demostración. a) La prueba la hacemos por inducción, primero veamos que $h_k(X_0) \subseteq X_0$ para todo $k \in \{1,2,3,4\}$. Sea $(x,y) \in X_0$ entonces observemos que por la definición de los homeomorfismos tenemos que

$$\begin{aligned}
h_1(x,y) &= \left(-\frac{1}{4}y, \frac{1}{4}(x+1)\right),\\
h_2(x,y) &= \left(\frac{1}{2}(x+1), \frac{1}{2}y\right),\\
h_3(x,y) &= \left(\frac{1}{4}y, -\frac{1}{4}(x+1)\right),\\
h_4(x,y) &= \left(-\frac{1}{2}(x+1), -\frac{1}{2}y\right),
\end{aligned}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned}
&\left|-\frac{1}{4}y\right| + \left|\frac{2}{4}(x+1)\right| \leq \frac{1}{4}\left(|y| + 2|x| + 2\right) = \frac{1}{4}\left(2(|x| + |2y|) + 2 - 3|y|\right) \leq \frac{1}{4}(4 - 3|y|) \leq 1,\\
&\left|\frac{1}{2}(x+1)\right| + \left|\frac{2}{2}y\right| \leq \frac{1}{2}\left(|x| + 1 + |2y|\right) = \frac{1}{2}(2) = 1,\\
&\left|\frac{1}{4}y\right| + \left|-\frac{2}{4}(x+1)\right| \leq \frac{1}{4}\left(|y| + 2|x| + 2\right) = \frac{1}{4}\left(2(|x| + |2y|) + 2 - 3|y|\right) \leq \frac{1}{4}(4 - 3|y|) \leq 1,\\
&\left|-\frac{1}{2}(x+1)\right| + \left|-\frac{2}{2}y\right| \leq \frac{1}{2}\left(|x| + 1 + |2y|\right) = \frac{1}{2}(2) = 1,
\end{aligned}$$

lo anterior muestra que $h_1(x,y), h_2(x,y), h_3(x,y), h_4(x,y) \in X_0$. Por tanto $h_k(X_0) \subseteq X_0$ si $k \in \{1,2,3,4\}$ y por tanto $X_1 = \bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_0) \subseteq X_0$.

Ahora supongamos que para cierta $n \in \omega$ se cumple $X_{n+1} \subseteq X_n$, entonces se

sigue que $h_k(X_{n+1}) \subseteq h_k(X_n)$ para todo $k \in \{1,2,3,4\}$ y entonces

$$X_{n+2} = \bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_{n+1}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_n) = X_{n+1},$$

lo que termina la demostración por inducción.

b) Por inducción sobre n. Es fácil notar que $[-1,1] \times \{0\} \subseteq X_0$, supongamos que $[-1,1] \times \{0\} \subseteq X_n$ para cierta $n \in \omega$, nótese que

$$[-1,1] \times \{0\} = h_2([-1,1] \times \{0\}) \cup h_4([-1,1] \times \{0\})$$

y por tanto

$$[-1,1] \times \{0\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{4} h_k([-1,1] \times \{0\}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_n) = X_{n+1},$$

lo que termina al inducción.

c) Se realizará doble inducción, primero probemos que si $m \in \mathbb{N}$ entonces $R_m \subseteq X_0$, lo haremos por inducción sobre m. Claramente $R_1 \subseteq X_0$, supongamos ahora que para cierta $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_m \subseteq X_0$, de este supuesto y por lo probado en el inciso anterior se sigue que

$$R_{m+1} = \left(\bigcup_{k=1}^{4} h_k(R_m)\right) \cup R_m \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_0)\right) \cup X_0 = X_1 \cup X_0 = X_0,$$

lo que termina esta inducción en el caso $n = 0$.

Supongamos que para cierta $n \in \omega$ se cumple que para todo $m \in \mathbb{N}$ la contención $R_m \subseteq X_n$. Por inducción sobre m mostraremos que también se cumple lo anterior para $n+1$. Por el inciso b) sabemos que $R_1 \subseteq \{0\} \times [-1,1] \subseteq X_{n+1}$, ahora supongamos que para cierta $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_m \subseteq X_{n+1}$, puesto que $R_m \subseteq X_n$ entonces $\bigcup_{k=1}^{4} h_k(R_m) \subseteq \bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_n) = X_{n+1}$ y por tanto

$$R_{m+1} = \left(\bigcup_{k=1}^{4} h_k(R_m)\right) \cup R_m \subseteq X_{n+1},$$

lo que prueba la propiedad para n, y esto demuestra este inciso.

d) Si $i, j \in \{1,2,3,4\}$ con $i \neq j$, puesto que $h_1(-1,0) = h_2(-1,0) = h_3(-1,0) =$

$h_4(-1,0) = (0,0)$ y del inciso b) sabemos que $\{0\} \times [-1,1] \subseteq X_n$ entonces $(0,0) \in h_i(X_n) \cap h_j(X_n)$, por otro lado del inciso a) se deriva que $X_n \subseteq X_0$ y de la proposición 3.7 entonces $h_i(X_n) \cap h_j(X_n) \subseteq h_i(X_0) \cap h_j(X_0) = \{(0,0)\}$, por tanto $h_i(X_n) \cap h_j(X_n) = \{(0,0)\}$.

e) La demostración la hacemos por inducción sobre n. Ya mencionamos que X_0 es un continuo (de hecho homeomorfo a $[0,1]^2$), ahora supongamos que para cierta $n \in \omega$ el conjunto X_n es un continuo, queremos mostrar que X_{n+1} es compacto y conexo de $\mathbb{R}^2$, de la hipótesis de inducción y del hecho de que h_1, h_2, h_3 y h_4 son homeomorfismos se sigue que $h_i(X_n)$ es compacto y conexo para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, luego $X_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_n)$ es compacto por ser unión finita de éstos, y al ser unión de conexos cuya intersección es no vacía pues por el inciso d) sabemos que $\bigcap_{k=1}^{4} h_k(X_n) = \{(0,0)\}$, concluimos que también es conexo, por tanto X_{n+1} es continuo, lo que termina la inducción.

f) De la definición $X_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_n)$ y del inciso d) se deriva que

$$h_i(X_n) - \{(0,0)\} = X_{n+1} - \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{4} h_k(X_n) \right)$$

y como $\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{4} h_k(X_n)$ es un cerrado (por ser unión finita de cerrados, pues cada $h_k(X_n)$ es de hecho un subcontinuo), concluimos que $h_i(X_n) - \{(0,0)\}$ es abierto en X_{n+1}, por último nótese que $h_i(X_n) - \{(0,0)\} \subseteq X_{n+1} - \{(0,0)\}$, lo cual implica que también es abierto en este espacio.
Terminamos la demostración de la proposición. $\square$

En un espacio topológico X, para $x, y \in X$ decimos que son separados por $z \in X$ en X, si existen U, V subconjuntos abiertos ajenos de $X - \{z\}$ tales que $X - \{z\} = U \cup V$ y $x \in U$ y $y \in V$. Claramente de la definición para que dos elementos de un espacio topológico estén separados necesariamente deben ser distintos; además si $z \in X$ es un punto que separa a un par de puntos distintos, entonces necesariamente el espacio $X - \{z\}$ resulta disconexo.

Una observación sencilla es que si Y es un subespacio de X y $x, y \in Y$ están separados por $z \in Y$ en X, esto es: existen U, V abiertos ajenos de $X - \{z\}$ tales

que $X - \{z\} = U \cup V$ y $x \in U, y \in V$. Definiendo $U' = U \cap Y$ y $V = V \cap Y$, se tiene que $Y - \{z\} = U' \cup V'$, $U' \cap V' = \emptyset$ y $x \in U', y \in V'$, esto muestra que x y y están separados por z en Y.

Ejemplos sencillos, en $[0,1]$ cualesquiera dos puntos distintos están separados por un tercero, sin embargo en $\mathbb{S}^1$ ningún par de puntos distintos se puede separar por un tercero, en efecto pues al quitar un elemento de $\mathbb{S}^1$ el espacio no se desconecta. La misma situación ocurre en el continuo *curva del topólogo* (véase el capítulo 5) pues los elementos de la barra límite no pueden ser separados, lo anterior tiene una razón cuya respuesta se encuentra en este teorema.

Teorema 3.10. *Sea X un continuo. X es una dendrita si y sólo si cualesquiera par de elementos distintos de X se separan por un tercero.*

El teorema 3.10 se puede hallar en [Hernández, Teorema 2.3, p. 27]

Lema 3.11. *Los conjuntos $X_n - \{(-1,0)\}$ y $X_n - \{(1,0)\}$ son conexos para todo $n \in \omega$.*

Demostración. Por inducción sobre n, sabemos que X_0 es homeomorfo a $[0,1]^2$ el cual es un espacio que no se desconecta al quitar un punto, por ello $X_0 - \{(-1,0)\}$ y $X_0 - \{(1,0)\}$ son conexos. Supongamos ahora que para cierto $n \in \omega$, los conjuntos $X_n - \{(-1,0)\}$ y $X_n - \{(1,0)\}$ son conexos, entonces puesto que $h_i(X_n) \cap h_j(X_n) = \{(0,0)\}$ si $i \neq j$ (proposición 3.9 (d)) y $h_4((1,0)) = (1,0)$, tenemos que

$$h_4(X_n - \{(1,0)\}) \cap h_1(X_n) \cap h_2(X_n) \cap h_3(X_n) = \{(0,0)\},$$

y además

$$X_{n+1} - \{(-1,0)\} = h_4(X_n - \{(1,0)\}) \cup h_1(X_n) \cup h_2(X_n) \cup h_3(X_n).$$

Por tanto $X_{n+1} - \{(-1,0)\}$ es la unión de conjuntos conexos cuya intersección es no vacía, concluimos que $X_{n+1} - \{(-1,0)\}$ es conexo. De un modo similar usando que

$$X_{n+1} - \{(1,0)\} = h_2(X_n - \{(1,0)\}) \cup h_1(X_n) \cup h_3(X_n) \cup h_4(X_n)$$

y

$$h_2(X_n - \{(1,0)\}) \cap h_1(X_n) \cap h_3(X_n) \cap h_4(X_n) \neq \emptyset,$$

se muestra que $X_{n+1} - \{(1,0)\}$ es conexo. Lo cual termina la demostración por inducción. $\square$

Proposición 3.12. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $u, v \in X_n$ son tales que $\|u - v\| > \frac{1}{2^{n-1}}$ entonces éstos son separados por un elemento $z \in R_n$.*

Demostración. La demostración la realizamos por inducción sobre n.

Sean $u, v \in X_1$ tales que $\|u - v\| > 1$, por un lado $u, v \in X_1 = \bigcup_{k=1}^{4} h_k(X_0)$ luego existen $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tales que $u \in h_i(X_0)$ y $v \in h_j(X_0)$. Primero notemos que $i \neq j$, pues de lo contrario si son iguales, entonces $u, v \in h_i(X_0)$ lo cual implica que $\text{diám}(h_i(X_0)) \geq \|u - v\| > 1$, pero de la proporción 3.8 sabemos que $\text{diám}(h_i(X_0)) \leq \frac{1}{2}\text{diám}(X_0) = 1$ lo cual es una contradicción, por ello $i \neq j$. Notemos que $u, v \neq (0, 0)$ pues de lo contrario, suponiendo sin pérdida de generalidad que $u = (0, 0)$ entonces $u, v \in h_j(X_0)$ lo que nos lleva a la misma contradicción anterior, por ello $u \in h_i(X_0) - \{(0, 0)\}$ y $v \in h_j(X_0) - \{(0, 0)\} \subseteq \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{4} h_k(X_0)\right) - \{(0, 0)\}$, de la proposición 3.9 tenemos que $h_i(X_0) - \{(0, 0)\}$ y $\left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{4} h_k(X_0)\right) - \{(0, 0)\}$ son abiertos disjuntos tales que su unión es $X_1 - \{(0, 0)\}$, concluimos que $(0, 0) \in R_1$ separa a u y a v.

Ahora supongamos que para cierta $n \in \mathbb{N}$, se cumple la propiedad, mostrémosla de igual manera para $n + 1$. Sean $u, v \in X_{n+1}$ tales que $\|u - v\| > \frac{1}{2^n}$, sabemos que existen $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tales que $u \in h_i(X_0)$ y $v \in h_j(X_0)$, hay entonces dos casos:

1) si $i = j$, entonces existen $u', v' \in X_n$ tales que $h_i(u') = v$ y $h_i(v') = v$, sabemos que $\frac{1}{2^n} < \|u - v\| = \|h_i(u') - h_i(v')\| \leq \frac{1}{2}\|u' - v'\|$ por tanto $\|u' - v'\| > \frac{1}{2^{n-1}}$ y de la hipótesis de inducción existe $z \in R_n$ que separa a u' y a v' en X_n, así que existen U' y V' abiertos disjuntos de $X_n - \{z\}$ tales que $X_n - \{z\} = U' \cup V'$ y $u' \in U', v' \in V'$.

   Se afirma que $h_i(z)$ separa a u y v en X_{n+1}. Primero notemos que $h_i(z) \neq (0, 0)$ pues de lo contrario tendríamos que $z = h_i^{-1}(0, 0) = (-1, 0)$ sin embargo, por el lema 3.11, $z = (-1, 0)$ no es un punto que desconecte el espacio X_n, y por ende no puede separar puntos.

   Por tanto $h_i(z) \neq (0, 0)$, por ello $(0, 0) \in h_i(X_n - \{z\}) = h_i(U') \cup h_i(V')$, sin pérdida de generalidad supongamos que $(0, 0) \in h_i(V')$, entonces si definimos $U = h_i(U')$ y $V = h_i(V') \cup \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{4} h_k(X_n)\right)$, éstos resultan ser abiertos disjuntos de $X_{n+1} - \{h_i(z)\}$ (ya que U', V' son abiertos de X_n y h_i es homeomorfismo

para $i\{1,2,3,4\}$) tales que $U \cup V = X_{n+1} - \{h_i(z)\}$ y $u \in U, v \in V$, por tanto $h_i(z)$ separa los puntos u y v en X_{n+1}, puesto que $z \in R_n$ entonces $h_i(z) \in R_{n+1}$.

2) si $i \neq j$, argumentando como en la base de inducción, tenemos que $u, v \neq (0,0)$ y entonces $u \in h_i(X_n) - \{(0,0)\}$ y $v \in \left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{4} h_k(X_n)\right) - \{(0,0)\}$, nuevamente $(0,0) \in R_{n+1}$ separa a u y v pues $h_i(X_n) - \{(0,0)\}$ y $\left(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{4} h_k(X_n)\right) - \{(0,0)\}$ son abiertos disjuntos cuya unión es $X_{n+1} - \{(0,0)\}$.

En cualquier caso, u y v son separados por algún elemento de R_{n+1}, lo cual termina la prueba por inducción. $\square$

Un teorema que es forzosamente importante conocer cuando se está hablando de continuos, y que provee de muchos más ejemplos de continuos es el siguiente:

Teorema 3.13. *Sean X un continuo y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subcontinuos decreciente, es decir, $A_{i+1} \subseteq A_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un subcontinuo de X.*

La demostración del teorema 3.13 se puede hallar en cualquier literatura de continuos, aquí recomendamos consultar [Illanes, Corolario 4.4, p. 69] y [Nadler, Teorema 1.8, p. 6].

Ahora bien, definamos $D_4 = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$, y para cada $i \in \{1,2,3,4\}$ sean $D_4^{(i)} := \bigcap_{n=0}^{\infty} h_i(X_n)$. Del teorema 3.13 se tiene que D_4 es un continuo. Lo primero que haremos es mostrar que D_4 es en efecto una dendrita, probemos esto último junto algunas observaciones importantes.

Proposición 3.14. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

a) *D_4 es una dendrita y para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, $D_4^{(i)}$ es un subcontinuo de D_4.*

b) *$[-1,1] \times \{0\} \subseteq D_4$ y diám$(D_4) = 2$.*

c) *$D_4 = \bigcup_{i=1}^{4} D_4^{(i)}$.*

d) *Si $i, j \in \{1,2,3,4\}$ son distintos, entonces $D_4^{(i)} \cap D_4^{(j)} = \{(0,0)\}$.*

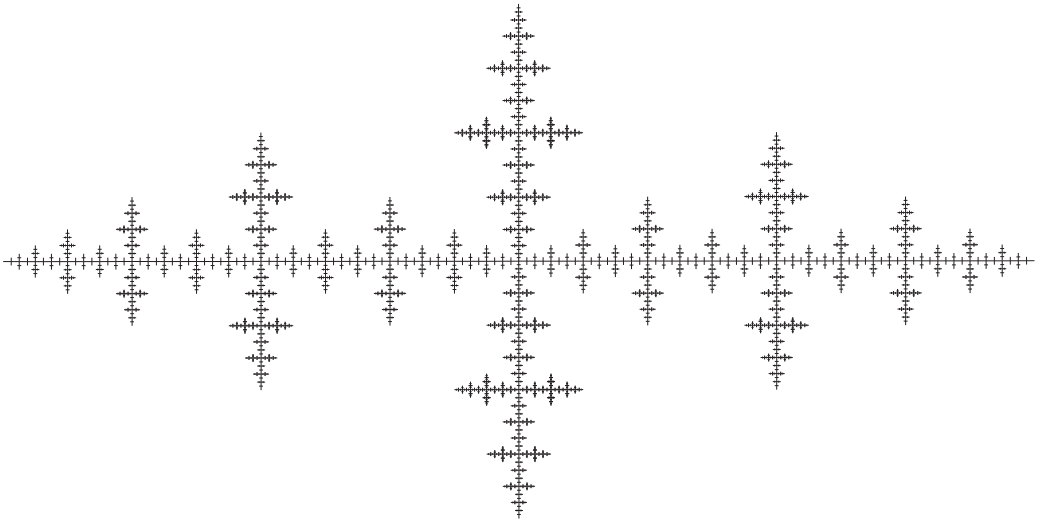

Figura 3.9: La dendrita D_4.

e) Para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, $h_i^{-1}(D_4^{(i)}) = D_4$.

Demostración. a) Puesto que $(X_n)_{n\in\omega}$ y para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, $(h_i(X_n))_{n\in\omega}$, forman sucesiones anidadas de continuos no vacíos, entonces D_4 y $D_4^{(i)}$ son continuos, además sabemos que para todo $n \in \omega$, $h_i(X_n) \subseteq X_{n+1}$, entonces

$$D_4^{(i)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} h_i(X_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = D_4,$$

por lo que $D_4^{(i)}$ es un subcontinuo de D_4.

Para demostrar que D_4 es una dendrita, utilicemos el teorema 3.10, para ello notemos que del inciso c) de la proposición 3.9, tenemos que para todo $n \in \omega$ y $m \in \mathbb{N}$, $R_m \subseteq X_n$ lo cual implica que $R_m \subseteq D_4$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sean $x, y \in D_4$ distintos, entonces $\|x - y\| > 0$ y entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \|x - y\|$, en particular $x, y \in X_{n+1}$ y por la proposición 3.12 sabemos que existe $z \in R_{n+1} \subseteq$

D_4 que separa al par x, y; y entonces z también separa a x de y en D_4. Por tanto D_4 es una dendrita.

b) Del inciso b) de la proposición 3.9 es claro que $[-1,1] \times \{0\} \subseteq D_4$ y por tanto $\text{diám}(D_4) \geq \text{diám}([-1,1] \times \{0\}) = 2$, por otro lado sabemos que $D_4 \subseteq X_0$ y por tanto $\text{diám}(D_4) \leq \text{diám}(X_0) = 2$, por tanto $\text{diám}(D_4) = 2$.

c) Del inciso a), $D_4^{(i)}$ es un subcontinuo de D_4 para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{4} D_4^{(i)} \subseteq D_4$.

Para al otra contención, sea $x \in D_4$, si $x = (0,0)$ entonces $x \in h_1(X_n)$ para todo $n \in N$, por lo que $x \in D_4^{(1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{4} D_4^{(i)}$ Supongamos entonces que $x \neq (0,0)$, puesto que $x \in X_1$ existe $i \in \{1,2,3,4\}$ tal que $x \in h_i(X_0)$. En general, si $n \in \omega$ como $x \in X_{n+1}$ entonces existe $j \in \{1,2,3,4\}$ tal que $x \in h_j(X_n)$, si i fuese distinto a j, entonces $x \in h_i(X_0) \cap h_j(X_n) \subseteq h_i(X_0) \cap h_j(X_0) = \{(0,0)\}$ lo cual es un absurdo pues $x \neq (0,0)$, por tanto $i = j$ lo que muestra que para todo $n \in \omega$, $x \in h_i(X_n)$ y por ello $x \in D_4^{(i)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{4} D_4^{(k)}$, lo cual muestra que $D_4 \subseteq \bigcup_{i=1}^{4} D_4^{(i)}$.

d) Sean $i, j \in \{1,2,3,4\}$ distintos, luego por el inciso d) de la proposición 3.9

$$D_4^{(i)} \cap D_4^{(j)} = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} h_i(X_n)\right) \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} h_j(X_n)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (h_i(X_n) \cap h_j(X_n)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{(0,0)\} = \{(0,0)\}.$$

e) Sea $i \in \{1,2,3,4\}$, entonces

$$h_i^{-1}(D_4^{(i)}) = h_i^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} h_i(X_n)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} h_i^{-1}(h_i(X_n) = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = D_4.$$

Lo que termina la demostración de esta proposición. $\square$

Ahora estamos en condiciones de definir la siguiente función. Sea $f : D_4 \longrightarrow D_4$ como $f(x) = h_i^{-1}(x)$ si $x \in D_4^{(i)}$. Esta función esta bien definida ya que de la proposición 3.9, si $i, j \in \{1,2,3,4\}$ son distintos entonces $D_4^{(i)} \cap D_4^{(j)} = \{(0,0)\}$ y $h_i^{-1}((0,0)) = h_j^{-1}((0,0))$. Por tanto, como la función f se define en cuatro subcontinuos de forma continua, por la propiedad del pegado resulta que f es una función continua, además es suprayectiva pues en particular $D_4 = h_1^{-1}\left(D_4^{(1)}\right) = f\left(D_4^{(1)}\right) \subseteq f(D_4)$, por tanto f es un mapeo en el continuo D_4. Esta función verifica muy fácilmente no ser *continuamente expansiva por continuos* pues para el

subcontinuo no degenerado $[-1,1]\times\{0\}\subseteq D_4$ (véase el inciso b de la proposición 3.9) se cumple que por un lado que

$$[-1,0]\times\{0\}=h_4([-1,1]\times\{0\})\subseteq h_4(D_4)=h_4\left(h_4^{-1}\left(D_4^{(4)}\right)\right)=D_4^{(4)}$$

$$[0,1]\times\{0\}=h_2([-1,1]\times\{0\})\subseteq h_2(D_4)=h_2\left(h_2^{-1}\left(D_4^{(2)}\right)\right)=D_4^{(2)}$$

por tanto

$$\begin{aligned}f([-1,1]\times\{0\})&=f([-1,0]\times\{0\})\cup f([0,1]\times\{0\})=h_4([-1,0]\times\{0\})\cup h_2([0,1]\times\{0\})\\&=[-1,1]\times\{0\}\cup[-1,1]\times\{0\}=[-1,1]\times\{0\}\end{aligned}$$

y entonces por un argumento inductivo se tiene que para todo $n\in\omega$

$$f^n([-1,1]\times\{0\})=[-1,1]\times\{0\}$$

por lo que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d_H(f^n([-1,1]\times\{0\}),D_4)=d_H([-1,1]\times\{0\},D_4)>0$ pues claramente $D_4\neq[-1,1]\times\{0\}$. Por ello f no es *completamente expansivo por continuos.*

Veremos que f sí es *débil completamente expansivo por continuos*, gracias al corolario 3.2, basta mostrar que f es mezclante pues D_4 es localmente conexo. Por comodidad, denotemos $B_\varepsilon(x)=\{y\in D_4 : \|x-y\|<\varepsilon\}$ para $x\in D_4$ y $\varepsilon>0$.

Proposición 3.15. *a) Para todo $x\in D_4$ y $\varepsilon>0$ se tiene que $B_{2\varepsilon}(f(x))\subseteq f(B_\varepsilon(x))$, y por tanto para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple que $B_{2^n\varepsilon}(f^n(x))\subseteq f^n(B_\varepsilon(x))$.*

b) Para todo U abierto no vacío de D_4 existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $f^n(U)=D_4$. En particular f es mezclante.

Demostración. a) Por inducción sobre $n\in\mathbb{N}$. Sean $x\in D_4$ y $\varepsilon>0$. Sea $y\in B_{2\varepsilon}(f(x))$, es decir, $\|y-f(x)\|<2\varepsilon$. Puesto que $x\in D_4$, existe $i\in\{1,2,3,4\}$ tal que $x\in D_4^{(i)}$ y entonces como $y\in D_4=h_i^{-1}(D_4^{(i)})$ existe $z\in D_4^{(i)}$ tal que $y=h_i^{-1}(z)$, por tanto

$$\|z-x\|=\frac{1}{2}\|h_i^{-1}(z)-h_i^{-1}(x)\|=\frac{1}{2}\|y-f(x)\|<\varepsilon.$$

Por tanto $z\in B_\varepsilon(x)$ y como $z\in D_4^{(i)}$, se sigue que $f(z)=h_i^{-1}(z)=y$, por tanto $y=f(z)\in f(B_\varepsilon(x))$. Esto muestra que $B_{2\varepsilon}(f(x))\subseteq f(B_\varepsilon(x))$. Esto muestra el paso base.

Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $B_{2^n\varepsilon'}(f^n(y)) \subseteq f^n(B_{\varepsilon'}(y))$ para todo $y \in D_4$ y $\varepsilon' > 0$.

Sean $x \in D_4$ y $n \in \mathbb{N}$. Por nuestra hipótesis de inducción tenemos que $B_{2^n\varepsilon}(f^n(x)) \subseteq f^n(B_\varepsilon(x))$, y aplicando nuestro paso base

$$B_{2^{n+1}\varepsilon}(f^{n+1}(x)) \subseteq f(B_{2^n\varepsilon}(f^n(x))) \subseteq f(f^n(B_\varepsilon(x))) \subseteq f^{n+1}(B_\varepsilon(x)).$$

Lo que completa la prueba por inducción.

b) Sea U abierto no vacío de D_4, luego existen $x \in U$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n\varepsilon > 2$, por el inciso anterior tendremos que $B_{2^n\varepsilon}(f^n(x)) \subseteq f^n(B_\varepsilon(x)) \subseteq f^n(U)$, pero como $2^n\varepsilon > 2$ y diám$(D_4) = 2$ entonces $B_{2^n\varepsilon}(f^n(x)) = D_4$, esto muestra que $f^n(U) = D_4$. Así bien si V es abierto no vacío de D_4, se tiene que para todo $k \geq n$, $f^k(U) \cap V = f^{k-n}(f^n(U)) \cap V = f^{k-n}(D_4) \cap V = V \neq \emptyset$, lo que muestra que f es mezclante.
$\square$

3.4. La dendrita D_ω. Un mapeo débilmente mezclante y no mezclante

Primeramente describiremos la construcción de la dendrita D_ω, recordemos que $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales incluyendo el 0. Sea Q el conjunto de los racionales diádicos del intervalo $[0, 1]$, es decir

$$Q := \left\{ \frac{a}{2^b} \in (0,1) \,:\, a \text{ es impar}, b \in \mathbb{N}, 0 < a < 2^b \right\}.$$

Dado $k \in \omega$ definimos

$$S_k := \begin{cases} \omega & \text{si } k = 0 \\ \omega \times (Q \times \omega)^k & \text{si } k > 0 \end{cases},$$

$$S := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{k \in \omega} S_k.$$

A los elementos de S les llamaremos secuencias (nótese que el vacío la consideramos una secuencia), toda secuencia no vacía consiste en un primer natural y después en una cantidad finita de pares de naturales con racionales diádicos del intervalo $(0, 1)$. A las secuencias de S_0 (que no son más que números naturales)

los escribiremos como $\langle j \rangle$ para $j \in \omega$. Las secuencias nos servirán para poder dar coordenadas a los arcos que compondrán la dendrita D_ω. Dados dos secuencias no vacías $s \in S_n$ y $s' \in S_m$ con $n \leq m$ en ω, diremos que $s \sqsubseteq s'$ si podemos escribir $s = (k_0, k_1, p_1, \ldots, k_n, p_n)$ y $s' = (k_0, k_1, p_1, \ldots, k_n, p_n, \ldots, k_m, p_m)$, esto es, que los *primeros elementos* de s' son la secuencia s.

Definimos las semisecuencias de longitud $k \in \mathbb{N}$ como el conjunto

$$S_k^s := (Q \times \omega)^k,$$

y al conjunto de todas las semisecuencias lo denotaremos por $S^s := \bigcup_{k \in \omega} S_k^s$. Si consideramos una secuencia no vacía $s = (k_0, k_1, p_1, \ldots, k_n, p_n) \in S_n$ y una semisecuencia $\sigma = (l_1, q_1, \ldots, l_n, q_n) \in S_m$ podemos dar lugar a una nueva secuencia $(k_0, k_1, p_1, \ldots, k_n, p_n, l_1, q_1, \ldots, l_n, q_n) \in S_{n+m}$ a la cual llamaremos *la concatenación de s con σ* y denotaremos por $s \oplus \sigma$.

Para construir la dendrita universal D_ω, se construirán recursivamente su *esqueleto* el cual resulta de unir arcos en el plano, estos arcos son los que podremos asociar con las secuencias (no vacías) anteriormente definidas. Primero consideremos el origen $O \in \mathbb{R}^2$, a este punto le pegamos una cantidad infinita numerable de arcos $A[(m)], m \in \omega$ cada uno de longitud $\frac{1}{2^m}$ y que tengan por uno de sus extremos en común el punto O, de esta forma se han construido los arcos correspondientes a las secuencias del conjunto S_0. Suponiendo construidos los arcos $A[s]$ para todo $s \in S_k$ con $k \in \omega$, para cada racional diádico $p \in Q$ pegamos una cantidad numerable infinita $m \in \omega$ de arcos $A[s \oplus (p, m)]$ en el punto que representa al diádico p en el arco $A[s]$ y de forma que la longitud de $A[s \oplus (p, m)]$ sea a lo más

$$2^{-(m_0 + \sum_{i=1}^{k}(m_i + b_i) + m + b)}$$

donde $s = (m_0, m_1, \frac{a_1}{2^{b_1}}, \ldots, m_1, \frac{a_k}{2^{b_k}})$ y $q = \frac{a}{2^b}$. Entonces se construye la dendrita universal como $D_\omega = \overline{\bigcup_{s \in S} A[s]}$ (aquí se hace la convención $A[\emptyset] = \{O\}$ y la cerradura es en $\mathbb{R}^2$). Los detalles y la demostración de que D_ω es en efecto una dendrita se pueden consultar en [Hernández, Sección 5.3, p. 78].

Dado $j \in \omega$, sea la subdendrita $E_j := \overline{\bigcup_{s \sqsupseteq \langle j \rangle} A[s]}$.

Por construcción, cada arco $A[s]$ tiene por puntos extremos, uno un punto terminal de D_ω (no desconecta a D_w al quitarlo) y el otro un punto de ramificación que al desconectarlo genera una cantidad numerable de componentes conexas cada una con cerradura homeomorfa a D_ω. Para cada $s_1, s_2 \in S - \{\emptyset\}$ denotaremos por $L(s_1, s_2) : A[s_1] \longrightarrow A[s_2]$ al mapeo lineal entre estos dos arcos de manera que

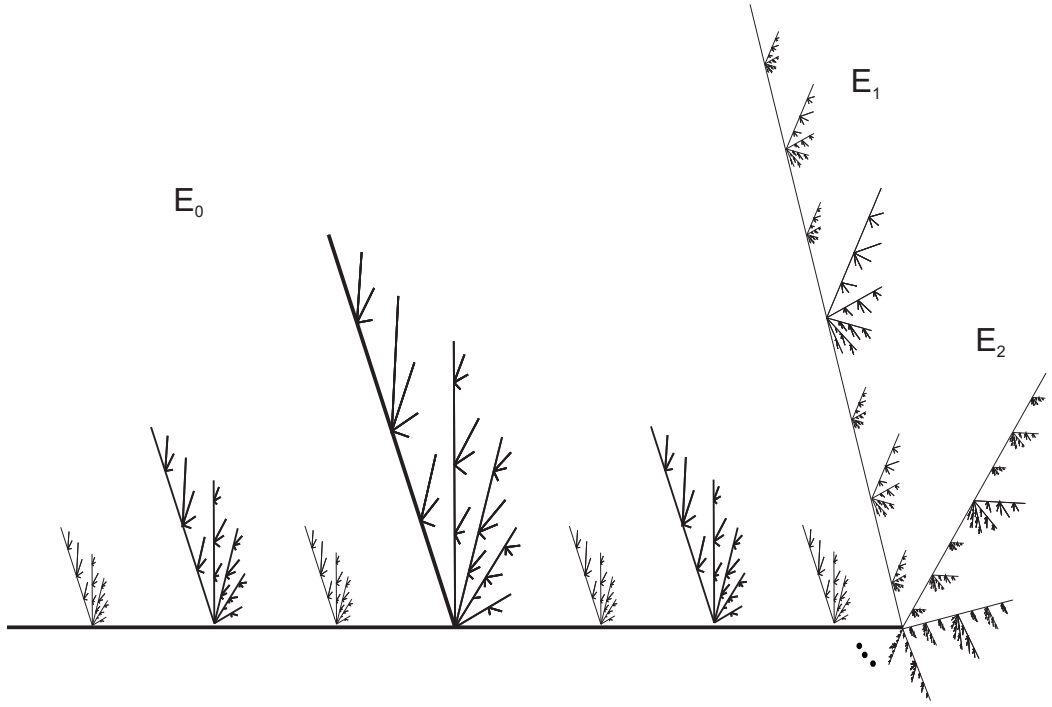

Figura 3.10: Dendrita universal D_ω.

el extremo de $A[s_1]$ que es punto terminal en $D\omega$ se mapea al punto extremo de $A[s_2]$ que es punto terminal de D_ω. Para $s \in S - \{\emptyset\}$, denotaremos por $L(s, \emptyset) : A[s] \longrightarrow A[\emptyset] = \{O\}$ a la función constante.

Nuestro objetivo ahora es definir un mapeo $F : D_\omega \longrightarrow D_\omega$ débilmente mezclante y no mezclante, para ello, lo más natural es que dicha función mande los arcos de la forma $A[s_1]$ con $s_1 \in S - \{\emptyset\}$ en conjuntos de la forma $A[s_2]$, así bien basta con dar una función $\alpha : S - \{\emptyset\} \longrightarrow S$ lo cual nos permite definir una función $F = F_\alpha : D_\omega \longrightarrow D_\omega$ tal que $F|_{A[s]} = L(s, \alpha(s))$.

3.4.1. Construcción de las funciones $\alpha_Z : S - \{\emptyset\} \longrightarrow S$

Consideremos un subconjunto infinito de números naturales $Z \subseteq \omega$, construiremos de manera simultánea y por recursión funciones $\alpha = \alpha_Z : S - \{\emptyset\} \longrightarrow S$ y $n = n_Z : S - \{\emptyset\} \longrightarrow S$. La función α dictará las imágenes de los arcos $A[s]$ bajo

la función $F_Z := F_\alpha$, como se mencionó previamente. La construcción de α estará hecha para que toda secuencia no vacía sea mapeada eventualmente a la secuencia vacía, puesto que requeriremos que $F(O) = O$ entonces tendremos que todo arco $A[s]$ se mapee bajo F en un tiempo finito a O, en este caso tendremos que $n(s)$ será el mínimo natural tal que $\alpha^{n+1}(s) = \emptyset$, nótese que de estas condiciones se debe cumplir que $n(s) = n(\alpha(s)) + 1$. Enumeremos los elementos de Z en orden creciente $Z = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$.

(1) Para elementos en S_0 :

- $\alpha(\langle 0\rangle) := \emptyset$ y $n(\langle 0\rangle) := 0$;
- Si $m \in \mathbb{N}$ entonces $\alpha(\langle m\rangle) = \langle m-1\rangle$ y por consiguiente se tiene que $n(\langle m\rangle) = m = n(\langle m-1\rangle) + 1 = n(\alpha(\langle m\rangle)) + 1$.

(2) Para elementos en S_1;

- Si $s = \left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1\right)$, se define $\alpha(s) := \langle z_{b_1+m_1}\rangle \in Z \subseteq S_0$, de lo cual $n(s) = n(\alpha(s)) + 1 = z_{b_1+m_1} + 1$;
- Si $m_0 \in \mathbb{N}$ y $s = \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1\right)$, se define $\alpha(s) := \left(m_0 - 1, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1\right)$ y $n(s) = n(\alpha(s)) + 1$.

(3) Para elementos en $S_k (k \geq 2)$:

- Si $s = \left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)$, definimos

$$\alpha(s) := \alpha\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) \oplus \left(\frac{a_k}{2^{b_k}}, m\right) \in S_{k-1}$$

  donde m es el m_k-ésimo elemento de Z tal que

$$n\left(\alpha\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) \oplus \left(\frac{a_k}{2^{b_k}}, m\right)\right) \in Z,$$

  ental caso nótese que $m \geq z_{m_k}$. Definimos entonces $n(s) := n(\alpha(s)) + 1$.
- Si $m_0 \in \mathbb{N}$ y $s = \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)$, definimos

$$\alpha(s) = \left(m_0 - 1, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)$$

  y $n(s) := n(\alpha(s)) + 1$.

Note que en la parte (3) de la definición, habiendo ya definido la función α y n en los elementos de S_j con $j \leq k-1$ entonces toma sentido hablar de

$$n\left(\alpha\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) \oplus \left(\frac{a_k}{2^{b_k}}, m\right)\right)$$

ya que

$$\alpha\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) \in S_{k-2}$$

y por tanto se sigue que

$$\alpha\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) \oplus \left(\frac{a_k}{2^{b_k}}, m\right) \in S_{k-1}.$$

De igual forma, hagamos ver que en la definición (3) la existencia del natural m no siempre está garantizada, de forma que no estaría definido α en s, de lo cual depende el resto de la definición para secuencias más grandes. Si nuestro conjunto Z contiene muchos naturales (por ejemplo $Z = \omega$) la función α podría estar definidas en todas nuestras secuencias no vacías, sin embargo, la función F_Z posiblemente sería suficientemente caótica (por ejemplo mezclante). Así que nuestro trabajo a partir de ahora es hallar condiciones para Z para que dicho mapeo sea débilmente mezclante pero no mezclante, de hecho, daremos la existencia de Z de forma que se vaya construyendo recursivamente para que sea posible desde un inicio definir α_Z en el dominio $S - \{\emptyset\}$, y que a su vez sea del tipo de caoticidad como requerimos.

Lema 3.16. *Para todo $k \geq 1$ y $s = \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right) \in S_k$ se cumple que*

$$n(s) \geq n\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) + b_k + m_k.$$

Demostración. El argumento es por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$. Si $k = 1$, primero supongamos que $s = \left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1\right)$, entonces

$$n(s) = n(\alpha(s)) + 1 = z_{b_1+m_1} + 1 \geq 0 + b_1 + m_1 = n(\langle 0 \rangle) + b_1 + m_1,$$

y por inducción si para $m_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que $s = \left(m_0 - 1, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1\right)$ cumple que

$n(s) \geq n(\langle m_0 - 1\rangle) + b_1 + m_1 = m_0 - 1 + b_1 + m_1$, entonces

$$n\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1\right)\right) = n\left(\alpha\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1\right)\right)\right) + 1 = n(s) + 1 \geq m_0 + b_1 + m_1$$
$$= n(\langle m_0\rangle) + b_1 + m_1,$$

lo que muestra la validez de la desigualdad para S_1.

Supongamos que el resultado es válido para los elementos (en los cuales esté definido n) de S_{k-1} $(k \geq 2)$. Primeramente, supongamos que $s = \left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right) \in S_k$ y $n(s)$ está definido, entonces $n(s) = n(\alpha(s)) + 1$ donde

$$\alpha(s) = \alpha\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) \oplus \left(\frac{a_k}{2^{b_k}}, m\right)$$

y $m \geq z_{m_k} \geq m_k$.

Por la hipótesis de inducción, como $\alpha(s) \in S_{k-1}$,

$$\begin{aligned} n(\alpha(s)) &\geq n\left(\alpha\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right)\right) + b_k + m \\ &\geq n\left(\alpha\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right)\right) + b_k + m_k, \end{aligned}$$

de lo cual,

$$\begin{aligned} n(s) &\geq n\left(\alpha\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right)\right) + 1 + b_k + m_k \\ &= n\left(\left(0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) + b_k + m_k. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que el resultado es cierto para los elementos de S_k que comienzan con $m_0 - 1$ donde $m_0 \geq 1$, si $s = \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right) \in S_k$, entonces de nuestro supuesto para S_k,

$$n\left(\left(m_0 - 1, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)\right) \geq n\left(\left(m_0 - 1, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) + b_k + m_k,$$

y de las definiciones de α y n:

$$\begin{aligned}
n(s) = n(\alpha(s)) + 1 &= n\left(\left(m_0 - 1, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)\right) + 1 \\
&\geq n\left(\left(m_0 - 1, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) + 1 + b_k + m_k \\
&= n\left(\alpha\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right)\right) + 1 + b_k + m_k \\
&= n\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) + b_k + m_k.
\end{aligned}$$

Lo que prueba el resultado para los elementos de S_k, y se tiene probado así el lema. $\square$

Corolario 3.17. *De estar definida n en $s = \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)$, se cumple que*

$$n\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)\right) \geq m_0 + \sum_{i=1}^{k}(b_i + m_i).$$

Demostración. Por un razonamiento inductivo y del lema anterior 3.16, obtenemos

$$\begin{aligned}
n\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)\right) &\geq n\left(\left(m_0, \tfrac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \tfrac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) + b_k + m_k \\
&\vdots \\
&\geq n(\langle m_0 \rangle) + \sum_{i=1}^{k}(b_i + m_i) = m_0 + \sum_{i=1}^{k}(b_i + m_i).
\end{aligned}$$

$\square$

Una cadena de números naturales es un conjunto de la forma $\{n, n+1, \ldots, n+m\}$ donde $n, m \in \omega$. Por simplicidad, a una cadena de éstas la denotaremos de manera concisa como $[n, n+m]$.

Proposición 3.18. *Para todo $s \in S_k$ y $N \in \omega$, existe $M \in \omega$ tal que: si $[N, N+M] \subseteq Z$ entonces $\alpha(s)$ está definido.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre $k \in \omega$. Primero notemos que sin importar el conjunto $Z \subseteq \omega$, α siempre está definido en S_0, además como estamos suponiendo Z infinito, entonces α también siempre está definido en S_1, por ello, si $s \in S_k$ con $k \in \{0, 1\}$ y $N \in \omega$, tomando $M = 0$ el resultado es cierto.

Supongamos que el resultado es cierto para los elementos de S_{k-1} para algún $k \geq 2$. Sea $s = \left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)\right. \in S_k$ y $N \in \omega$. Por la hipótesis de inducción

existe $M_0 \in \omega$ tal que si $[N, N+M_0] \subseteq Z$ entonces $\alpha\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right)$ está definido. Supongamos que $[N, N+M_0] \subseteq Z$, luego para todo $N \leq m \leq N+m_k$, la secuencia

$$s_m := \alpha\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2^{b_{k-1}}}, m_{k-1}\right)\right) \oplus \left(\frac{a_k}{2^{b_k}}, m\right) \in S_{k-1}$$

está bien definida. Nuevamente por la hipótesis de inducción, podemos encontrar $M_1 \geq M_0$ tal que si $[N, N+M_1] \subseteq Z$ entonces $\alpha(s_m)$ está definido para todo $N \leq m \leq N+m_k$. Así bien, supongamos que $[N, N+M_1] \subseteq Z$. Para cada $N \leq m \leq N+m_k$, al estar definido $\alpha(s_m)$, entonces lo está $n(s_m)$ y en tal caso, por el corolario 3.17, $n(s_m) \geq m \geq N$, por tanto elijamos $M_2 \geq M_1$ de manera que $N \leq n(s_m) \leq N+M_2$ para todo $N \leq m \leq N+m_k$. Finalmente, si $[N, N+M_2] \subseteq Z$, entonces hay al menos m_k números tales que $n(s_m) \in Z$ (a saber, los números $N \leq m \leq N+m_k$), por lo que $\alpha(s)$ está definida, completando nuestra prueba por inducción. $\square$

3.4.2. Propiedades de la función F_Z

A continuación, supongamos que Z es tal que α esta bien definido para toda secuencia no vacía y por tanto, la función $F_Z = F_\alpha$ está bien definida en $\bigcup_{s \in S} A[s]$, nos gustaría probar que se puede extender a una función continua en todo D_ω, para ello veremos que basta probar que F_Z es uniformemente continua en $\bigcup_{s \in S} A[s]$ como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 3.19. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $A \subseteq X$ subconjunto denso, si $f : A \longrightarrow A$ es una función uniformemente continua entonces existe una única función $F : X \longrightarrow X$ continua que extiende a f.*

Demostración. La unicidad se ve directamente del hecho de que al suponer F_1 y F_2 funciones continuas en X que extienden a f, entonces $F_1|_A = F_2|_A$, y al ser A un denso, se sigue que $F_1 = F_2$.

Para construir F, consideremos $x \in X$ y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en A que converge a x en X. Mostremos que la sucesión $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en X y que este límite no depende de la elección de la sucesión con la cual comenzamos:

a) Mostremos que $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en X. Como X es un espacio completo (pues es métrico compacto), basta probar que $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy: sea $\varepsilon > 0$, de la continuidad uniforme, existe $\delta > 0$ tal que si $d(a, a') < \delta$

entonces $d(f(a), f(a')) < \varepsilon$ para todo $a, a' \in A$. Puesto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy por ser convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, a_m) < \delta$ si $n, m \geq N$. Por tanto $d(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$ si $n, m \geq N$, lo que muestra este inciso.

b) Supongamos que $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión en A que converge a x en X. Supongamos que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(a_n) = z$ y $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(a'_n) = z'$, luego

$$d(z, z') = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(f(a_n), f(a'_n)).$$

Para probar que este último límite es 0, sea $\epsilon > 0$ luego de la continuidad uniforme existe δ como en el inciso a), como $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = x = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a'_n$, tenemos que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d(a_n, a'_n) = 0$, por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, a'_n) < \delta$ si $n \geq N$, y por tanto $d(f(a_n), f(a'_n)) < \varepsilon$ si $n \geq N$. Esto muestra que $d(z, z') = 0$ y por tanto $z = z'$.

Por tanto definimos $F : X \longrightarrow X$ como $F(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(a_n)$ donde $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = x$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión en A. Claramente si $a \in A$, tomando la sucesión constante se tiene que $F(a) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(a) = f(a)$ lo que muestra que F extiende a f. Veamos que F es continua, más aún, probaremos que F es uniformemente continua: sea $\varepsilon > 0$, luego existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $d(x, y) < \delta$. Sean $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \frac{\delta}{3}$ y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en A que convergen respectivamente a x y a y. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n), d(y, y_n) < \frac{\delta}{3}$ si $n \geq N$, entonces

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) < \delta$$

si $n \geq N$, y por tanto $d(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Concluimos que

$$d(F(x), F(y)) = \lim_{n\longrightarrow\infty} d(f(x_n), f(y_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por lo que F es uniformemente continua. $\square$

Recuérdese de la definición de F_Z está dado como $F|_{A[s]} = L(s, \alpha(s))$, donde s es una secuencia no vacía, es una función afín entre arcos y por tanto es Lipschitz continua, esto significa que existe $C > 0$ tal que $d(F(x), F(y)) \leq Cd(x, y)$ si $x, y \in A[s]$, a C le llamamos una constante de Lipschitz para la función $F|_{A[s]}$. Lo que queremos hacer notar a continuación es que podemos dar una misma constante de Lipschitz para todas las funciones $F|_{A[s]}$. Lo anterior se sigue de la construcción de los arcos que definen D_ω : dado $s \in S - \{\emptyset\}$ si $s = \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right)$

podemos definir $C(s) := m_0 + \sum_{i=1}^{k}(m_i + b_i)$, entonces para la función $F_Z|_{A[s]}$ tenemos que una constante de Lipschitz es el cociente de las longitudes del arco imagen y el arco dominio, es decir,

$$\frac{2^{-C(\alpha(s))}}{2^{-C(s)}} = 2^{C(s)-C(\alpha(s))}.$$

Es fácil ver que si $m_0 \geq 1$ entonces $C(s) = C(\alpha(s)) + 1$, y una sencilla inducción muestra que si $m_0 = 0$ entonces $C(\alpha(s)) \geq C(s)$, por tanto

$$\frac{2^{-C(\alpha(s))}}{2^{-C(s)}} = 2^{C(s)-C(\alpha(s))} \leq 2$$

para todo s secuencia no vacía, lo cual nos da a 2 como una constante de Lipschitz para todas estas funciones.

Lo que nos gustaría en este momento es decir que F_Z definida en $\bigcup_{s\in S} A[s]$ es Lipschitz continua (con constante de Lipschitz igual a 2), lo que en particular hace a F_Z uniformemente continua y aplicando la proposición 3.19, se extiende continuamente a D_ω. Sin embargo esto esto no tiene que ser cierto en general por que nuestra métrica euclidiana heredada del plano no mide las distancias como aquí se requiere. Afortunadamente, podemos dotar a D_ω una métrica equivalente a la euclidiana, que sí realice lo que queremos, este tipo de métricas son las radialmente A-convexas.

Definición 3.3. *Sea X un continuo y consideremos*

$$\mathcal{A}(X) := \{C \in C(X) : C \text{ es un arco o } |C| = 1\}$$

el hiperespacio de los arcos del continuo X dotado con la métrica Hausdorff. Una función continua $A : X \times X \longrightarrow \mathcal{A}(X)$ la llamaremos una arco-estructura para X si cumple lo siguiente:

(1) Para todo $x \in X$, $A(x,x) = \{x\}$.

(2) Para cualesquiera $x, y \in X$ disntintos, $A(x,y) = A(y,x)$ es un arco con extremos x y y.

(3) Para cualesquiera $x, y, z \in X$, $A(x,z) \subseteq A(x,y) \cup A(y,z)$ y además se da la igualdad si y sólo si $y \in A(x,z)$.

En las dendritas se puede probar que existe una única arco estructura dada por $A(x,y) = xy$ lo que significa la única arco trayectoria con extremos x, y. Véase [Hernández, Teorema 2.16, p. 39].

Definición 3.4. *En un espacio X con una arcoestructura A, decimos que una métrica d (que genera la topología de X) es radialmente $A-$convexa en $p \in X$ si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $y \in A(p,x)$ se tiene que $d(p,x) = d(p,y) + d(x,y)$.*

No toda arco estructura en un continuo admite una métrica radialmente convexa, como es el caso del círculo de Varsovia. Sin embargo, para el caso de las dendritas, que sólo tienen una arco estructura, ésta tiene una métrica radialmente $A-$convexa en todos sus puntos. Estos resultados nuevamente se pueden encontrar en [Hernández, págs. 92-95].

Aprovechando este resultado, si dotamos a D_ω con la métrica radialmente convexa, al ser una métrica equivalente a la euclidiana, entonces F_Z sigue siendo Lipschitz continua en todos los arcos $A[s]$.

Para notar que es Lipschitz continua en $\bigcup_{s\in S} A[s]$, dados dos puntos $x, y \in \bigcup_{s\in S} A[s]$, existe una cantidad finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in \bigcup_{s\in S} A[s]$ tales que $x = x_1, y = x_n$, y para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ se tiene que x_i y x_{i+1} pertenecen a un mismo arco $A[s(i)]$, y por ende $F(x_i)$ y $F(x_{i+1})$ pertenecen al mismo arco $A[\alpha(s(i))]$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Por ser F_Z Lipschitz continua (constante de Lipschitz igual a 2) en todos estos arcos $A[s(i)]$, y usando que la métrica es radialmente convexa, tenemos que:

$$d(F(x), F(y)) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(F(x_i), F(x_{i+1})) \leq \sum_{i=1}^{n-1} 2d(x_i, x_{i+1}) = 2d(x,y)$$

Esto prueba que F_Z es Lipschitz continua en $\bigcup_{s\in S} A[s]$, y por ende es uniformemente continua, de la proposición 3.19, F_Z se extiende continuamente a la dendrita D_ω.

Hagamos notar que si $s, s' \in S$ y $s' \sqsubseteq s$ entonces por como se definió α, $\alpha(s') \sqsubseteq \alpha(s)$, y por un argumento inductivo, $\alpha^n(s') \sqsubseteq \alpha^n(s)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, aquí hacemos la convención $\emptyset \sqsubseteq s$ para todo $s \in S$. Recuérdese que dado $j \in \omega$, se tiene la subdendrita $E_j = \overline{\bigcup_{s \sqsupseteq \langle j \rangle} A[s]}$, la construcción de la dendrita está hecha para que estas subdendritas tengan únicamente por punto en común al punto O, por ello,

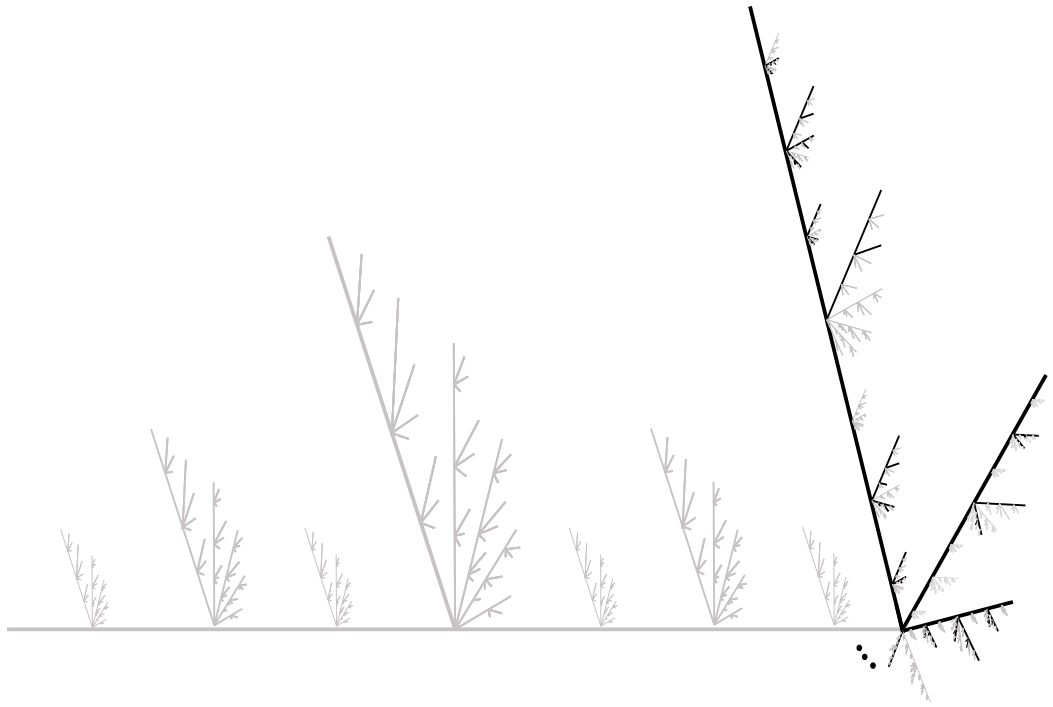

Figura 3.11: Se ilustra, de color negro, el comportamiento de F_Z en el subcontinuo E_0.

para todo $j \in \omega$, $E_j - \{O\}$ es abierto en D_ω y por consiguiente, para cualquier $Y \subseteq \omega$,

$$\bigcup_{j \in Y} E_j = D_\omega - \left(\bigcup_{i \in \omega - Y} (E_i - \{O\}) \right)$$

es un cerrado de D_ω. La definición recursiva de la función α está específicamente diseñada para que lo siguiente se verifique:

Proposición 3.20. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $F_Z^n(E_0) \subseteq \bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j$.

Demostración. Mostraremos que para todo $s \sqsupseteq \langle 0 \rangle$, $F_Z^n(A[s]) \subseteq \bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j$, se procede por inducción sobre $n(s)$, recuérdese que éste cumple ser el mínimo natural

tal que $\alpha^{m+1}(s) = \emptyset$. Si $n(s) = 0$ entonces $n(s) < n$ y por ello

$$F_Z^n(A[s]) = \{O\} \subseteq \bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j.$$

Supongamos que $m \in \omega$ es tal que para todo $s \sqsupseteq \langle 0 \rangle$ con $n(s) \leq m$ se tiene $F_Z^n(A[s]) \subseteq \bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j$.

Sea $s \sqsupseteq \langle 0 \rangle$ con $n(s) = m+1$. Si $n(s) \leq n$ entonces $F_Z^n(A[s]) = \{0\} \subseteq \bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j$, así que supongamos que $n < n(s)$, dividamos en dos casos:

a) Si $\alpha^n(s) = \langle j_0 \rangle \in S_1$ entonces $F_Z^n(A[s]) = A[\langle j_0 \rangle] \subseteq E_{j_0}$ y además como $n(\langle j_0 \rangle) = j_0$, es claro que $j_0 + n = n(s)$, de la definición de α y la función $n(_)$, tenemos que $n(s) - 1 = n(\alpha(s)) \in Z$. Por tanto $j_0 + n - 1 \in Z$, lo cual muestra que $f_Z^n(A[s]) \subseteq E_{j_0} \subseteq \bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j$.

b) Supongamos que $\alpha^n(s) \in S_k$ con $k \geq 2$. Entonces existe $s' \sqsubseteq s$ tal que $n(s') < n(s)$ y $\langle 0 \rangle s'$. De lo anterior tenemos que $n(s') \leq m$ y por la hipótesis de inducción existe $j \in \omega$ tal que $n + j - 1 \in Z$ y $A[\alpha^n(s')] = F_Z^n(A[s']) \subseteq E_j$. De lo anterior tenemos que $\langle j \rangle \sqsubseteq \alpha^n(s') \sqsubseteq$ y por tanto, $F_Z^n(A[s]) = A[\alpha^n(s)] \subseteq E_j$ con $n + j - 1 \in Z$, lo cual termina el paso inductivo.

La inducción muestra que $F_Z\left(\bigcup_{s \sqsupseteq \langle 0 \rangle} A[s]\right) \subseteq \bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j$, como F_Z es una función continua entre continuos, en particular es cerrada y por tanto

$$F_Z(E_0) = F_Z\left(\overline{\bigcup_{s \sqsupseteq \langle 0 \rangle} A[s]}\right) = \overline{F_Z(\bigcup_{s \sqsupseteq \langle 0 \rangle} A[s])} \subseteq \overline{\bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j} = \bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j,$$

pues $\bigcup_{j+n-1 \in Z} E_j$ es un cerrado, esto concluye la demostración. $\square$

El siguiente resultado muestra que si Z tiene *huecos* arbitrariamente grandes, es decir, su complemento contiene cadenas de número naturales arbitrariamente grandes, entonces F_Z no es mezclante.

Proposición 3.21. *Supongamos que Z es tal que para todo $M \in \mathbb{N}$ existe $N \in \omega$ tal que $[N, N+M] \cap Z = \emptyset$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que diám$(F_Z^n(E_0)) < \varepsilon$. Por consiguiente F_Z no es mezclante.*

Demostración. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Sea $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{diám}\left(\bigcup_{k \geq M_0} E_k\right) < \varepsilon,$$

sea $M := \text{máx}\{z_m, M_0\}$, por hipótesis existe $N \in \omega$ tal que $[N, N+M] \cap Z = \emptyset$. Observemos que $z_m \leq N$, pues de lo contrario, $N < z_m \leq M \leq N + M$ una contradicción de la elección de N, por tanto $N \geq z_m \geq m$. Supongamos que $j \in \omega$ es tal que $j + N \in Z$ entonces $j + N \notin [N, N+M]$ y puesto que $j + N \geq N$, necesariamente $j + N \geq N + M$ lo cual implica que $j \geq M$, esto muestra que

$$F_Z^{N+1}(E_0) \subseteq \bigcup_{j+N \in Z} E_j \subseteq \bigcup_{k \geq M} E_k \subseteq \bigcup_{k \geq M_0} E_k.$$

Por tanto $\text{diám}(F_Z^{N+1}(E_0)) < \varepsilon$ con $N + 1 \geq m$.

Con lo anterior, podemos encontrar una sucesión creciente de naturales $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\text{diám}(F_Z^{n_k}(E_0)) < \frac{1}{k}$, y por ende $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \text{diám}(F_Z^{n_k}(E_0)) = 0$ lo cual prueba que la sucesión de imágenes de E_0 bajo F_Z no convergen en la métrica Hausdorff a D_ω, puesto que $\text{int}(E_0) = E_0 - \{O\} \neq \emptyset$, se sigue que F_Z no puede ser mezclante. $\square$

A continuación, probaremos que se puede construir Z de forma que al contener cadenas de naturales arbitrariamente grandes, realice a f_Z como un mapeo débilmente mezclante.

Defínase para $k \in \mathbb{N}$, $S_k^- := (\omega \times Q)^k$, y sea $S^- := \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} S_k^-$. Dados $s = (m_1, p_1, \ldots, m_k, p_k) \in S^-$ y $s' = (n_0, q_1, n_1, \ldots, q_l, n_l) \in S$, defínase

$$s \oplus s' := (m_1, p_1, \ldots, m_k, p_k, n_0, q_1, n_1, \ldots, q_l, n_l) \in S.$$

Por último, dados $s \in S^-$ y $K, m \in \omega$, sea el siguiente subconjunto finito de secuencias

$$T_{s,K,m} := \left\{ s \oplus \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right) : 0 \leq k \leq K,\ m \leq m_0 \leq m + K, \text{ y para} \right.$$
$$\left. \text{todo } 1 \leq i \leq k \text{ tenemos que } 1 \leq b_i \leq K,\ 1 \leq a_i \leq 2^{b_i} \text{ y } 0 \leq m_i \leq K \right\}$$

En este caso, sea $A[T_{s,K,m}] := \bigcup\limits_{s' \in T_{s,K,m}} A[s']$ el cual resulta ser un árbol en D_ω.

Consideremos de igual forma el conjunto finito de secuencias

$$T_{\emptyset,K,m} := \left\{ \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, m_1, \ldots, \frac{a_k}{2^{b_k}}, m_k\right) : 0 \leq k \leq K,\ m \leq m_0 \leq m+K, \text{ y para} \right.$$

$$\left. \text{todo } 1 \leq i \leq k \text{ tenemos que } 1 \leq b_i \leq K,\ 1 \leq a_i \leq 2^{b_i} \text{ y } 0 \leq m_i \leq K \right\}$$

y el árbol $A[T_{\emptyset,K,m}] := \bigcup_{s' \in T_{\emptyset,K,m}} A[s']$.

No es difícil convencerse que $A[T_{\emptyset,K,0}] \longrightarrow D_\omega$ cuando $K \longrightarrow \infty$ en la métrica Hausdorff d_H.

Defínase $\alpha^- : S^- \longrightarrow S^-$ como sigue: $s = \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, \ldots, m_k, \frac{a_{k+1}}{2^{b_{k+1}}}\right) \in S^-$ entonces $\alpha^-(s) = \alpha\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, \ldots, m_k\right)\right) \oplus \left\langle \frac{a_{k+1}}{2^{b_{k+1}}} \right\rangle$, lo anterior significa que *pegamos* el último diádico a la secuencia $\alpha\left(\left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, \ldots, m_k\right)\right)$.

Proposición 3.22. *Para todo $s \in S^-$, $K, N \in \omega$ y $m \geq N$, existe $M \in \omega$ tal que si $[N, N+M] \subseteq Z$ entonces $\alpha(T_{s,K,m}) = T_{\alpha(s),K,m'}$ donde $m' \in \omega$ es tal que $\alpha(s \oplus \langle m \rangle) = \alpha(s) \oplus \langle m' \rangle$.*

Demostración. Escribamos $s = \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, \ldots, m_k, \frac{a_{k+1}}{2^{b_{k+1}}}\right)$, nótese que si $m_0 \geq 1$ entonces el resultado es inmediato pues α está definido en todos los elementos de $T_{s,K,m}$ y más aún $\alpha(T_{s,K,m}) = T_{\alpha(s),K,m}$, sin importar la elección de $M \in \omega$. Así bien, supongamos que $m_0 = 0$. Puesto que $T_{s,K,m}$ es finito, de la proposición 3.18 se puede mostrar que existe $M \in \omega$ tal que si $[N, N+M] \subseteq Z$ entonces $\alpha(s')$ está definido para todo $s' \in T_{s,K,m}$. Por como definimos $T_{s,K,m}$ y del corolario 3.17, tenemos que $n(s') \geq m \geq N$ para todo $s' \in T_{s,K,m}$. Podemos suponer M suficientemente grande de manera que

$$n\left(\alpha\left(s \oplus \left(m'_0, \frac{a'_1}{2^{b'_1}}, m'_1, \ldots, \frac{a'_{i-1}}{2^{b'_{i-1}}}, m'_{i-1}\right)\right) \oplus \left(\frac{a'_i}{2^{b'_i}}, m\right)\right) \in [N, N+M] \subseteq Z$$

para todo $1 \leq i \leq K$ y todo $m \leq K$. Por tanto, de la definición de α se sigue que

$$\alpha\left(\left(s \oplus \left(m'_0, \frac{a'_1}{2^{b'_1}}, m'_1, \ldots, \frac{a'_i}{2^{b'_i}}, m'_i\right)\right)\right) = \alpha\left(s \oplus \left(m'_0, \frac{a'_1}{2^{b'_1}}, m'_1, \ldots, \frac{a'_{i-1}}{2^{b'_{i-1}}}, m'_{i-1}\right)\right) \oplus \left(\frac{a'_i}{2^{b'_i}}, m'_i\right).$$

Luego el resultado se sigue por un argumento de inducción sobre $1 \leq i \leq K$. $\square$

Una observación fácil de hace notar es que que para todo $K, n \in \mathbb{N}$ se cumple $\alpha^n(T_{\emptyset,K,n}) = T_{\emptyset,K,0}$. Con esto y la proposición anterior podemos generalizarlo a lo siguiente:

Corolario 3.23. *Para todo $N, K \in \omega$ y y $s \in S^-$, existen $M, m, n \in \omega$ tales que si $[N, N+M] \subseteq Z$ entonces $\alpha(T_{s,K,m}) = T_{\emptyset,K,0}$.*

Demostración. Fijemos $N, K \in \omega$ y sea $s = \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, \ldots, m_k, \frac{a_{k+1}}{2^{b_{k+1}}}\right) \in S^-$. Consideremos $s' := \left(m_0, \frac{a_1}{2^{b_1}}, \ldots, m_k\right) \in S$, aplicando la proposición 3.22 repetidamente, para $m \geq N$ existe $N \in \omega$ tan grande como queramos tal que si $[N, N+M] \subseteq Z$, entonces $\alpha^i(T_{s,K,m}) = T_{\alpha^i(s),K,m'_i}$ para todo $i < n(s')$ y para ciertos $m'_i \geq N$. En particular para $i = n(s') - 1$ tenemos que $\alpha^{n(s')-1}(T_{s,K,m}) = T_{\alpha^{n(s')-1}(s),K,m'_{n(s')-1}}$, por tanto $\alpha^{n(s')}(T_{s,K,m}) = T_{\alpha^{n(s')}(s),K,m'} = T_{\emptyset,K,m'}$ para algún $m' \in \omega$. Finalmente, con $n = n(s') + m'$ obtenemos que $\alpha^n(T_{s,K,m}) = T_{\emptyset,K,0}$. $\square$

Finalmente estamos preparados para definir Z y la función F_Z, consideremos $S^- = \{s_0, s_1, s_2 \ldots\}$ una enumeración de S^-.

Definimos $N_0 = 0 = M_0$. Supongamos construido, para $K \geq 1$, N_{K-1} y M_{K-1} con $N_{K-1} \leq M_{K-1}$, definamos $N_K = M_{K-1} + K$. Por el corolario 3.23 existe $M_K \geq N_K$ tal que si $[N_K, M_K] \subseteq Z$, entonces para cada $i \leq K$ existen $m(i,K), n(i,K) \in \omega$ tales que $\alpha(s)$ está definido para todo $s \in T_{s_i,K,m(i,K)}$ y $\alpha^{n(i,K)}(T_{s_i,K,m}) = T_{\emptyset,K,0}$.

Defínase entonces $Z := \bigcup_{K\in\omega}[N_K, M_K]$. Por construcción, α_Z está definido en

$$\bigcup_{K\in\omega} \bigcup_{i\leq K} T_{s_i,K,m(i,K)} = S - \{\emptyset\},$$

así que tenemos bien definido el mapeo $F_Z : D_\omega \longrightarrow D\omega$. Puesto que Z tiene *huecos* de naturales arbitrariamente grandes, entonces por las proposición 3.21 se sigue que F_Z no es mezclante.

Para ver que sí es débilmente mezclante, consideremos un abierto U no vacío de D_ω, se puede mostrar que existe $s_i \in S^-$, de forma que toda secuencia $s \in S$ tal que $s_i \sqsubseteq s$, $A[s] \subseteq U$. Por ello, para todo $K \geq i$, tenemos que $A[T_{s_i,K,m(i,K)}] \subseteq U$, entonces

$$A[T_{\emptyset,K,0}] = F^{n(i,K)}(A[T_{s_i,K,m(i,K)}]) \subseteq F^{n(i,K)}(U).$$

Por tanto, como $A[T_{\emptyset,K,0}] \longrightarrow D_\omega$ cuando $K \longrightarrow \infty$, se sigue que

$$F^{n(i,K)}(U) \longrightarrow D_\omega \qquad \text{si} \quad K \longrightarrow \infty,$$

lo cual prueba, por la proposición 2.6, que F_Z es débilmente mezclante, concluyendo así nuestro ejemplo.

Capítulo 4

Abanico de Cantor

El propósito principal de este capítulo es mostrar, exhibiendo ciertos contraejemplos, que ninguna de las implicaciones probadas en el teorema 2.9 son válidas para el continuo *Abanico de Cantor.* Trabajaremos con el conjunto de *Cantor* no como la versión construida en el intervalo $[0,1]$ pero sí con aquella provista del producto contable de los espacios discretos $\{0,1\}$ y cuya métrica se describirá en breve. De igual forma, para abordar el *Abanico de Cantor* será necesario recordar nociones de los espacios cocientes en topología que nos auxiliarán en las construcciones de los mapeos que posteriormente servirán de contraejemplos para este objetivo.

Definiremos el conjunto de Cantor como el espacio

$$\Sigma := \prod_{n=1}^{\infty} \{0,1\}$$

donde $\{0,1\}$ es el espacio discreto de dos elementos, resulta que Σ es compacto y además se le puede asignar una métrica compatible con la topología producto, si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ son elementos de Σ entonces

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},$$

esta métrica, entre otras cosas, cumple con estar acotada por 1 y la característica de que para todo $m \in \mathbb{N}$ $d(x,y) < \frac{1}{2^{m-1}}$ si $x_i = y_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$, en algunos casos utilizaremos el elemento cero de cantor como $\overline{0} \in \Sigma$ cuyas entradas son todas cero.

El *Abanico de Cantor* lo definiremos como el cono topológico de *Cantor*,

$\mathcal{K}(\Sigma) := (\Sigma \times [0,1])\backslash(\Sigma \times \{0\})$ y $\rho : \Sigma \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{K}(\Sigma)$ denotará la función cociente, por lo expuesto en el capítulo 2 sabemos que $\mathcal{K}(\Sigma)$ es un continuo con métrica

$$\Delta([(x,t],[(y,s)]) = |t-s| + \text{mín}\{t,s\}d(x,y)$$

para $(x,t),(y,s) \in \Sigma\times[0,1]$. Una de las razones por la que se considera este ejemplo es por la forma en que se ven los subconjuntos continuos de $\mathcal{K}(\Sigma)$ y porque más adelante veremos que existe un mapeo $\alpha : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ débilmente mezclante pero no mezclante.

A continuación veremos algunas propiedades que cumple $\mathcal{K}(\Sigma)$ con respecto a sus subcontinuos, para ello hablemos primero un poco sobre el espacio producto $\Sigma \times [0,1]$. Recordaremos que de nuestros cursos de topología, el conjunto de Cantor está bien caracterizado como el único (salvo homeomorfismos) espacio métrico compacto perfecto y totalmente disconexo, un espacio es totalmente disconexo si los únicos subespacios conexos de éste constan de un sólo punto, de esta característica podemos deducir quiénes son las componentes conexas de $\Sigma \times [0,1]$.

Proposición 4.1. *Si A es un conexo no vacío de $\Sigma \times [0,1]$ entonces existe un único $x \in \Sigma$ tal que $A \subseteq \{x\}\times[0,1]$. Por tanto las componentes conexas de $\Sigma\times[0,1]$ son de la forma $\{c\} \times [0,1]$ para $c \in C$.*

Demostración. Basta mostrar que si $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in A$ entonces $x_1 = x_2$, para ello sea $P_1 : \Sigma \times [0,1] \longrightarrow \Sigma$ es la proyección en la primera entrada, esto es, si $(x,t) \in \Sigma \times [0,1]$ entonces $P_1((x,t)) = x$. Entonces $x_1 = P((x_1,t_1)) \in P(A)$ y $x_2 = P((x_2,t_2)) \in P(A)$, por otro lado se sabe que la proyección es continua, por ello $P(A)$ es un conexo no vacío en Σ y como éstos constan únicamente de un punto tenemos que $P(A) = \{x_1\} = \{x_2\}$ por lo cual $x_1 = x_2$. Como A es no vacío existe $(x,t) \in A$ y por lo anterior sabemos que todos los elementos de A tienen como primera entrada a x, por ello $A \subseteq \{x\} \times [0,1]$. Ahora si $c \in \Sigma$, queremos ver que $\{c\} \times [0,1]$ es un conexo maximal, por ello sea B conexo tal que $\{c\} \times [0,1] \subseteq B$, luego B es conexo no vacío y por lo anterior existe $x \in \Sigma$ tal que $B \subseteq \{x\} \times [0,1]$ pero como $\{c\} \times [0,1] \subseteq B$, necesariamente $x = c$. Por tanto $\{c\}\times[0,1] \subseteq B \subseteq \{c\}\times[0,1] \subseteq B$ y esto implica que $B = \{c\}\times[0,1]$ lo que concluye que $\{c\} \times [0,1]$ es maximal y por tanto es una componente conexa. $\square$

Ahora bien, recuérdese que de la relación de equivalencia que se utiliza para formar el cono topológico, los elementos de $\Sigma\times[0,1]$ que sólo se relacionan consigo mismo son aquellos del subespacio $\Sigma \times (0,1]$ y si llamamos $O = [(\overline{0},0)]$ tenemos

que $\rho(\Sigma\times(0,1]) = \mathcal{K}(\Sigma)-\{O\}$, no es difícil darse cuenta que éstos forman espacios homeomorfos y

$$\rho|_{\Sigma\times(0,1]} : \Sigma \times (0,1] \longrightarrow \mathcal{K}(C) - \{O\}$$

forma un homeomorfismo, utilicemos este hecho para observar lo siguiente:

Proposición 4.2. *Si A es un subcontinuo de $\mathcal{K}(\Sigma)-\{O\}$ entonces es de la forma $\rho(\{c\} \times [a,b])$ donde $c \in \Sigma$ y $0 < a \leq b \leq 1$.*

Demostración. Puesto que A es subespacio conexo y cerrado de $\mathcal{K}(\Sigma) - \{O\}$ y $\rho|_{C\times(0,1]}$ es homeomorfismo, entonces $\rho^{-1}(A)$ es un conexo cerrado de $\Sigma \times (0,1]$ y por tanto también de $\Sigma \times [0,1]$. Por la proposición 4.1 existe $c \in \Sigma$ tal que $\rho^{-1}(A) \subseteq \{c\} \times [0,1]$. Por tanto $\rho^{-1}(A)$ es un conexo y cerrado de $\{c\} \times [0,1]$ que es homeomorfo al intervalo, luego necesariamente $\rho^{-1}(A) = \{c\} \times [a,b]$ para ciertos $0 \leq a \leq b \leq 1$, pero al ser $A \subseteq \mathcal{K}(\Sigma) - \{O\}$ esto necesariamente implica que $a > 0$. Por ello concluimos que $A = \rho(\{c\} \times [a,b])$ con $c \in \Sigma$ y $0 < a \leq b \leq 1$. $\square$

Si para $0 \leq a \leq b \leq 1$ y $c \in \Sigma$ definimos $[a,b]_c = \rho(\{c\} \times [a,b])$, entonces tenemos que $[a,b]_c$ es un subcontinuo de $\mathcal{K}(\Sigma)$ y por la proposición anterior, si A es un subcontinuo de $\mathcal{K}(\Sigma)$ y $O \notin A$ entonces A es de la forma $[a,b]_c$ con $c \in \Sigma$ y $0 < a \leq b \leq 1$.

Proposición 4.3. *La función desplazamiento $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ es mezclante.*

Demostración. Sean U, V abiertos no vacíos de Σ, entonces sean $u = (u_i)_{i=1}^{\infty} \in U, v = (v_i)_{i=1}^{\infty} \in V$ y $\varepsilon > 0$ tales que $u \in B_{\varepsilon_1}(u) \subseteq U$ y $v \in V$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon_1$. A continuación construiremos una sucesión en Cantor, $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$, los cuales serán elementos de U. Primero definamos $\alpha_1 = (\alpha_{1,j})_{j=1}^{\infty}$ como sigue

$$\alpha_{1,j} = \begin{cases} u_j & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ v_{j-k} & \text{si } j \geq k+1 \end{cases}$$

de modo que $\alpha_1 = (u_1 \ldots u_k v_1 v_2 \ldots v_m \ldots)$, y para $i \geq 2$ definamos $\alpha_i = (\alpha_{i,j})_{j=1}^{\infty}$ como

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} u_j & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ 1 & \text{si } k+1 \leq j \leq k+(i-1) \\ v_{(j-k)-(i-1)} & \text{si } j \geq k+i \end{cases}$$

lo cual se visualiza como $\alpha_i = (u_1 \ldots u_k \overbrace{1 \ldots 1}^{(i-1)\text{ veces}} v_1 v_2 \ldots v_m \ldots)$.

De la definición de estos elementos, podemos observar que para cada $i \geq 1$ se cumple que $\alpha_{i,j} = u_j$ si $j = 1, \ldots, k$ y entonces $d(\alpha_i, u) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$, por tanto $\alpha_i \in B_\varepsilon(u) \subseteq U$ como habíamos propuesto. Por otro lado, nótese que para cada cada $i \geq 1$, por construcción $\sigma^{k+(i-1)}(\alpha_i) = v$. Y por tanto para todo $i \geq 1$ se tiene que $\sigma^{k+(i-1)}(\alpha_i) \in \sigma^{k+(i-1)}(U) \cap V$, o expresado de otra forma, para todo $j \geq k$ se cumple que $\sigma^j(U) \cap V \neq \emptyset$. Lo cual demuestra que σ es mezclante. $\square$

4.1. Débil completamente expansivo por continuos no implica completamente expansivo por continuos

En esta sección, la misión principal es construir una función en el abanico de Cantor que sea *débil completamente expansivo por continuos* pero no *completamente expansivo por continuos.* Para ello consideremos los siguientes conjuntos:

$$C_1 = \left\{[(c,x)] \in \mathcal{K}(\Sigma) : x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]\right\} = \rho\left(\Sigma \times \left[0, \frac{1}{3}\right]\right),$$

$$C_2 = \left\{[(c,x)] \in \mathcal{K}(\Sigma) : x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right\} = \rho\left(\Sigma \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right),$$

$$C_3 = \left\{[(c,x)] \in \mathcal{K}(\Sigma) : x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right\} = \rho\left(\Sigma \times \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right).$$

Puesto que ρ es un mapeo entre espacios métricos compactos, sabemos que ρ es función cerrada, por tanto C_1, C_2 y C_3 son cerrados de $\mathcal{K}(\Sigma)$ (véase la figura 4.1). Definamos las siguientes funciones: $F_1 : C_1 \longrightarrow \mathcal{K}(\Sigma)$, $F_2 : C_2 \longrightarrow \mathcal{K}(\Sigma)$ y $F_3 : C_3 \longrightarrow \mathcal{K}(\Sigma)$, cuyas reglas de correspondencia están dadas por:

$$\begin{aligned}
F_1([(c,x)]) &= [(c,3x)] && \text{si } [(c,x)] \in C_1 \\
F_2([(c,x)]) &= [(c,2-3x)] && \text{si } [(c,x)] \in C_2 \\
F_3([(c,x)]) &= [(\sigma(c),3x-2)] && \text{si } [(c,x)] \in C_3.
\end{aligned}$$

Puesto que las funciones anteriores están definidas considerando un representante para la clase $[(c,x)]$ ahora debemos ver que están bien definidas mostrando que no dependen del representante, para ello primero nótese que C_2 y C_3 consisten únicamente de clases que provienen de un sólo representante, esto pues $O \notin C_2, C_3$, esto nos dice que automáticamente F_2 y F_3 están bien defi-

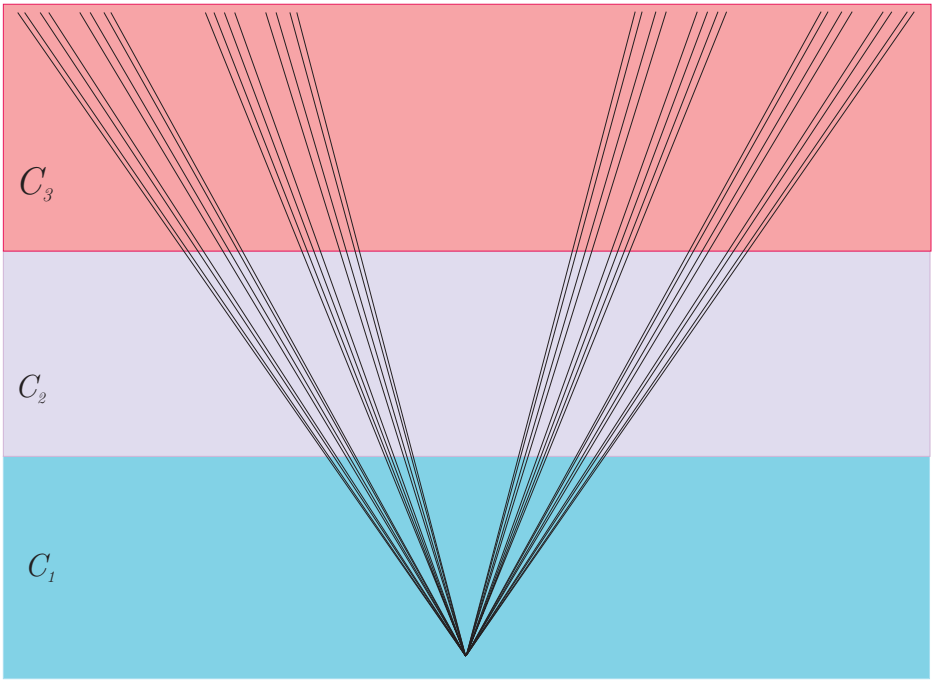

Figura 4.1: El cono de cantor $\mathcal{K}(C)$ cuyo vértice O en la parte inferior y los cerrados C_1, C_2 y C_3.

nidas. Puesto que $O \in C_1$ únicamente debemos ver que está bien definida para esta clase, en efecto si $(c_1, 0), (c_2, 0) \in O$ entonces $(c_1, 3(0)), (c_2, 3(0)) \in O$ o bien $[(c_1, 3(0))] = [(c_2, 3(0))] = O$, por lo que la función F_1 está bien definida. Ahora nos interesa probar que son todas continuas.

Para ello consideremos $p : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ de forma que

$$p(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 2 - 3x & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 3x - 2 & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Esta función es continua en el arco $[0,1]$, por tanto las funciones $Id_\Sigma \times p, \sigma \times p : \Sigma \times [0,1] \longrightarrow \Sigma \times [0,1]$ son funciones continuas del producto. Si consideramos las

funciones $G, H : \mathcal{K}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{K}(\Sigma)$ de forma que

$$G([(c,x)]) = \begin{cases} [(c,3x)] & \text{si } [(c,x)] \in C_1 \\ [(c,2-3x)] & \text{si } [(c,x)] \in C_2 \\ [(c,3x-2)] & \text{si } [(c,x)] \in C_3 \end{cases}$$

$$H([(c,x)]) = \begin{cases} [(\sigma(c),3x)] & \text{si } [(c,x)] \in C_1 \\ [(\sigma(c),2-3x)] & \text{si } [(c,x)] \in C_2 \\ [(\sigma(c),3x-2)] & \text{si } [(c,x)] \in C_3, \end{cases}$$

resultan estar bien definidas y además son continuas, lo último porque $\rho \circ (Id_\Sigma \times p) = G \circ \rho$ y $\rho \circ (\sigma \times p) = H \circ \rho$ y del corolario 1.27.

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "Id_\Sigma \times p"] \arrow[d, "\rho"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "\rho"] \\ \mathcal{K}(X) \arrow[r, "G"'] & \mathcal{K}(X) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "\sigma \times p"] \arrow[d, "\rho"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "\rho"] \\ \mathcal{K}(X) \arrow[r, "H"'] & \mathcal{K}(X) \end{tikzcd}$$

Nótese que $F_1 = G|_{C_1}$, $F_2 = G|_{C_2}$ y $F_3 = H|_{C_3}$ y por tanto, F_1, F_2 y F_3 son continuas. Puesto que $C_1 \cap C_2 = \rho(C \times \{\frac{1}{3}\})$ y $F_1|_{\rho(C\times\{\frac{1}{3}\})} = F_2|_{\rho(C\times\{\frac{1}{3}\})}$, y del mismo modo $C_2 \cap C_3 = \rho(C \times \{\frac{2}{3}\})$ y $F_2|_{\rho(C\times\{\frac{2}{3}\})} = F_3|_{\rho(C\times\{\frac{2}{3}\})}$, entonces al definir la función $F : \mathcal{K}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{K}(\Sigma)$ como

$$F([(c,x)]) = \begin{cases} [(c,3x)] & \text{si } [(c,x)] \in C_1 \\ [(c,2-3x)] & \text{si } [(c,x)] \in C_2 \\ [(\sigma(c),3x-2)] & \text{si } [(c,x)] \in C_3, \end{cases}$$

gracias al lema del pegado sabemos que es una función continua, además es suprayectiva, por lo que es un mapeo en el abanico de Cantor. Nuestro objetivo será mostrar que dicho mapeo es *débil completamente expansivo por continuos* pero no *completamente expansivo por continuos.*

Ver lo último es inmediato, pues nótese que para el subcontinuo no degenerado $[0,1]_{\overline{0}}$ de $\mathcal{K}(\Sigma)$ se tiene que $F([0,1]_{\overline{0}}) = [0,1]_{\overline{0}}$ y por tanto para todo $n \geq 1$,

$F^n([0,1]_{\overline{0}}) = [0,1]_{\overline{0}}$ de lo cual obtenemos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d_H(F^n([0,1]_{\overline{0}}), \mathcal{K}(C)) = d_H([0,1]_{\overline{0}}, \mathcal{K}(C)) > 0,$$

lo cual prueba que F no es *completamente expansivo por continuos.*

Recordemos que para probar que F es *débil completamente expansivo por continuos* se debe demostrar que el conjunto

$$E(\mathcal{K}(\Sigma), F) := \left\{ Y \in C(\mathcal{K}(\Sigma)) : \lim_{n\longrightarrow\infty} d_H(F^n(Y), X) = 0 \right\}$$

es denso en $C(\mathcal{K}(\Sigma))$.

Proposición 4.4. *Sean $x \in \Sigma$ y $k \in \omega$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}$, existe $m \in \omega$ tal que*

$$F^n\left(\left[\frac{l}{3^n}, \frac{l+1}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = [0,1]_{\sigma^{k+m}(x)}.$$

Demostración. La prueba lo hacemos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

1. *Paso Base n=1.* Para este caso sea $l \in \{0,1,2\}$.

   a) Si $l = 0$ entonces $F\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = [0,1]_{\sigma^k(x)}$ donde $m = 0$.

   b) Si $l = 1$ entonces $F\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = [0,1]_{\sigma^k(x)}$ donde $m = 0$.

   c) Si $l = 2$ entonces $F\left(\left[\frac{2}{3}, 1\right]_{\sigma^k(x)}\right) = [0,1]_{\sigma^{k+1}(x)}$ donde $m = 1$. Lo que prueba el paso base de la inducción.

2. *Hipótesis de inducción (HI).* Supongamos que para cierto $n \in \mathbb{N}$ y para todo $j \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}$, existe $m \in \omega$ tal que

$$F^n\left(\left[\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = [0,1]_{\sigma^{k+m}(x)}.$$

3. *Paso inductivo.* Queremos probar la propiedad para $n+1$, así bien sea $l \in \{0, \ldots, 3^{n+1} - 1\}$, checaremos los siguientes casos.

   a) Si $0 \leq l \leq 3^n - 1$ entonces ocurre que $l \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}$ y $\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right] \subseteq \left[0, \frac{1}{3}\right]$, entonces por la definición de F obtenemos que:

$$F\left(\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = \left[\frac{l}{3^n}, \frac{l+1}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)}$$

y por la hipótesis de inducción aplicada a $l \in \{0, \ldots, 3^{n+1} - 1\}$, se sigue que

$$F^{n+1}\left(\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = F^n\left(\left[\frac{l}{3^n}, \frac{l+1}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = [0,1]_{\sigma^{k+m}(x)},$$

para algún $m \in \omega$. Lo que demuestra este caso.

b) Si $3^n \leq l \leq 2 \cdot 3^n - 1$ entonces ocurre que $\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right] \subseteq \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, y entonces

$$\begin{aligned} F\left(\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right]_{\sigma^k(x)}\right) &= \left[2 - \frac{l+1}{3^n}, 2 - \frac{l}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)} \\ &= \left[\frac{2 \cdot 3^n - l - 1}{3^n}, \frac{2 \cdot 3^n - l}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)} \\ &= \left[\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)}, \end{aligned}$$

donde $j = 2 \cdot 3^n - l - 1$, como estamos suponiendo $3^n \leq l \leq 2 \cdot 3^n - 1$ entonces $j \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}$ y entonces por hipótesis de inducción tenemos que

$$F^{n+1}\left(\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = F^n\left(\left[\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = [0,1]_{\sigma^{k+m}(x)},$$

para algún $m \in \omega$, terminando este caso.

c) Si $2 \cdot 3^n \leq l \leq 3^{n+1} - 1$ entonces $\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right] \subseteq \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, de lo cual se sigue

$$\begin{aligned} F\left(\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right]_{\sigma^k(x)}\right) &= \left[\frac{l}{3^n} - 2, \frac{l+1}{3^n} - 2\right]_{\sigma^{k+1}(x)} \\ &= \left[\frac{l - 2 \cdot 3^n}{3^n}, \frac{l - 2 \cdot 3^n + l}{3^n}\right]_{\sigma^{k+1}(x)} \\ &= \left[\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n}\right]_{\sigma^{k+1}(x)}, \end{aligned}$$

donde $j = l - 2 \cdot 3^n$, del supuesto $2 \cdot 3^n \leq l \leq 3^{n+1} - 1$ obtenemos que $j \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}$ y entonces por hipótesis de inducción tenemos que

$$F^{n+1}\left(\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = F^n\left(\left[\frac{j}{3^n}, \frac{j+1}{3^n}\right]_{\sigma^{k+1}(x)}\right) = [0,1]_{\sigma^{k+m+1}(x)},$$

para algún $m \in \omega$ y así

$$F^{n+1}\left(\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right]_{\sigma^k(x)}\right) = [0,1]_{\sigma^{k+m'}(x)}$$

donde $m' = m + 1 \in \mathbb{N}$.

Lo que concluye la prueba pro inducción. $\square$

Corolario 4.5. *Si $0 \leq a < b \leq 1$, $x \in \Sigma$ y $k \in \omega$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \omega$ tales que $[0,1]_{\sigma^{k+m}(x)} \subseteq F^n([a,b]_{\sigma^k(x)})$.*

Demostración. Pues que $a < b$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \frac{b-a}{2}$, entonces $2 < 3^n b - 3^n a$ y por tanto $3^n a + 2 < 3^n b$. Puesto que que los reales $3^n a$ y $3^n a + 1$ distan de al menos 1, existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $3^n a \leq l < 3^n a + 1$. Como $a \geq 0$ luego $l \geq 0$, y de $b \leq 1$ entonces $l < 3^n a + 1 < 3^n b \geq 3^n$ por lo que $l \in \{0, \ldots, 3^n - 1\}$. Por otro lado, $3^n a \leq l < l + 1 < 3^n a + 2 < 3^n b$ y entonces $a \leq \frac{l}{3^n} < \frac{l+1}{3^n} < b$ o bien $\left[\frac{l}{3^{n+1}}, \frac{l+1}{3^{n+1}}\right] \subseteq [a,b]$, y ésto a su vez implica $\left[\frac{l}{3^n}, \frac{l+1}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)} \subseteq [a,b]_{\sigma^k(x)}$, y por tanto $F^n\left(\left[\frac{l}{3^n}, \frac{l+1}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)}\right) \subseteq F^n([a,b]_{\sigma^k(x)})$. Por la proposición 4.4 existe $m \in \omega$ tal que

$$[0,1]_{\sigma^{k+m}(x)} = F^n\left(\left[\frac{l}{3^n}, \frac{l+1}{3^n}\right]_{\sigma^k(x)}\right) \subseteq F^n([a,b]_{\sigma^k(x)}).$$

Como se quería demostrar. $\square$

Ya que σ es una función transitiva (pues es mezclante por la proposición 4.3) y Σ es métrico compacto, por 1.19 sabemos que existe $t \in \Sigma$ tal que $\mathrm{orb}(t,\sigma) = \{\sigma^n(t) : n \in \omega\}$ es denso en Σ, con esto definamos el subconjunto de continuos de $\mathcal{K}(\Sigma)$

$$\mathcal{P} := \left\{Y \in C(\mathcal{K}(\Sigma)) : \exists\, 0 \leq a < b \leq 1, k \in \omega \left([a,b]_{\sigma^k(t)} \subseteq Y\right)\right\},$$

mostraremos que $\mathcal{P}$ es denso en $C(\mathcal{K}(\Sigma))$ y que $\mathcal{P} \subseteq E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$, lo cual probaría que $E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$ es denso en $C(\mathcal{K}(\Sigma))$ y terminaría la prueba de que F es débil completamente expansiva por continuos.

Para cada $k \in \omega$ defínase el subcontinuo de $\mathcal{K}(\Sigma)$, $\Sigma_k := [0,1]_{\sigma^k(t)}$.

Proposición 4.6. *Para cada $n, k \in \omega$ se cumple que*

$$F^n(\Sigma_k) = \bigcup_{i=k}^{k+n} \Sigma_i.$$

Y por tanto si $k \in \omega$ es fijo y $0 \leq m \leq n$ entonces $F^m(\Sigma_k) \subseteq F^n(\Sigma_k)$.

Demostración. Haremos inducción sobre $n \in \omega$. El caso $n = 0$ es claro, pues para $k \in \omega$ es cierto $F^0(\Sigma_k) = \Sigma_k = \bigcup_{i=k}^{k+0} \Sigma_i$. Demostremos el paso base $n = 1$, sea $k \in \omega$ entonces

$$\begin{aligned} F(\Sigma_k) = F([0,1]_{\sigma^k(t)}) &= F\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]_{\sigma^k(t)} \cup \left[\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\right]_{\sigma^k(t)} \cup \left[\frac{2}{3}\,1\right]_{\sigma^k(t)}\right) \\ &= F\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]_{\sigma^k(t)}\right) \cup F\left(\left[\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\right]_{\sigma^k(t)}\right) \cup F\left(\left[\frac{2}{3}\,1\right]_{\sigma^k(t)}\right) \\ &= [0,1]_{\sigma^k(t)} \cup [0,1]_{\sigma^k(t)} \cup [0,1]_{\sigma^{k+1}(t)} = \Sigma_k \cup \Sigma_{k+1}. \end{aligned}$$

Como hipótesis de inducción, supongamos que para cierto $n \in \omega$ es cierto que si $j \in \omega$ entonces $F^n(\Sigma_j) = \bigcup_{i=j}^{j+n} \Sigma_i$. Demostremos para $n + 1$. Sea $k \in \omega$ arbitrario, entonces por hipótesis de inducción tenemos $F^n(\Sigma_j) = \bigcup_{i=k}^{k+n} \Sigma_i$ y por el caso base se cumple que para todo $i \in \{k \ldots, k+n\}$ tenemos que $F(\Sigma_i) = \Sigma_i \cup \Sigma_{i+1}$, entonces:

$$\begin{aligned} F^{n+1}(\Sigma_k) = F(F^n(\Sigma_k)) = F\left(\bigcup_{i=k}^{k+n} \Sigma_i\right) &= \bigcup_{i=k}^{k+n} F(\Sigma_i) \\ &= \bigcup_{i=k}^{k+n} (\Sigma_i \cup \Sigma_{i+1}) = \bigcup_{i=k}^{k+(n+1)} \Sigma_i. \end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba por inducción. Ahora si $k \in \omega$ es fijo y $0 \leq m \leq n$ entonces

$$F^m(\Sigma_k) = \bigcup_{i=k}^{k+m} \Sigma_i \subseteq \bigcup_{i=k}^{k+m} \Sigma_i \cup \bigcup_{i=k+m}^{k+n} \Sigma_i = \bigcup_{i=k}^{k+n} \Sigma_i = F^n(\Sigma_k)$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Lema 4.7. *Sea Y un espacio T_2 y perfecto. Si A es un subconjunto denso de Y y $F \subset X$ es un subconjunto finito, entonces $A - F$ es denso en X.*

Demostración. Sea U abierto no vacío, puesto que Y es T_2 entonces F es cerrado y así $U - F$ es abierto, además es no vacío por la proposición 1.10, entonces

$$(A - F) \cap U = A \cap (U - F) \neq \emptyset,$$

lo que prueba que $A - F$ es denso en Y. □

Puesto que Σ, el conjunto de Cantor, es métrico y perfecto, y $\{\sigma^n(t)\}_{n\geq 0}$ es denso, entonces tenemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\{\sigma^n(t)\}_{n\geq k}$ también es denso usando el lema anterior.

Proposición 4.8. *Para todo $k \in \omega$ se tiene que $\Sigma_k \in E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$.*

Demostración. Sea $k \in \omega$, tenemos que probar que $\lim_{n\longrightarrow\infty} d_H(F^n(\Sigma_k), \Sigma) = 0$. Así bien sea $\varepsilon > 0$, puesto que $\{\sigma^j(t)\}_{j\geq k}$ es denso en Σ, entonces $\{B_\varepsilon(\sigma^j(t)) : j \geq k\}$ resulta ser una cubierta abierta para Σ, por ser compacto, existen $p \in \mathbb{N}$ y $n_1, \ldots, n_p \geq k$ tales que $\Sigma = \bigcup_{i=1}^p B_\varepsilon(\sigma^{n_i}(t))$. Sea $n_0 = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_p\}$. Afirmo que $\mathcal{K}(\Sigma) = N_\varepsilon(F^{n_0}(\Sigma_k))$. Para ellos sea $[(c, s)] \in \mathcal{K}(\Sigma)$ donde $(c, s) \in \Sigma \times [0, 1]$ es un representante cualquiera de la clase. Puesto que $c \in \Sigma = \bigcup_{i=1}^p B_\varepsilon(\sigma^{n_i}(t))$ entonces existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $d(c, \sigma^{n_i}(t)) < \varepsilon$ y entonces

$$\Delta([(c, s)], [(\sigma^{n_i}(t), s)]) = sd(c, \sigma^{n_i}(t)) \leq d(c, \sigma^{n_i}(t)) < \varepsilon.$$

Por otro lado, por la proposición 4.6,

$$[(\sigma^{n_i}(t), s)] \in [0, 1]_{\sigma^{n_i}(t)} = \Sigma_{n_i} \subseteq \bigcup_{j=k}^{n_i} \Sigma_j = F^{n_i-k}(\Sigma_k) \subseteq F^{n_i}(\Sigma_k) \subseteq F^{n_0}(\Sigma_k),$$

pues $n_i \geq k$ y $n_i - k \leq n_i \leq n_0$. En síntesis, para $[(c, s)] \in \mathcal{K}(\Sigma)$ existe $[(\sigma^{n_i}(t), s)] \in F^{n_0}(\Sigma_k)$ tal que $\Delta([(c, s)], [(\sigma^{n_i}(t), s)]) < \varepsilon$, esto muestra que $[(c, s)] \in N_\varepsilon(F^{n_0}(\Sigma_k))$. Por tanto $\mathcal{K}(\Sigma) = N_\varepsilon(F^{n_0}(\Sigma_k))$.

En general si $n \geq n_0$, de nuevo por la proposición 4.6 sabemos que $F^{n_0}(\Sigma_k) \subseteq F^n(\Sigma_k)$ y entonces $\mathcal{K}(\Sigma) = N_\varepsilon(F^{n_0}(\Sigma_k)) \subseteq N_\varepsilon(F^n(\Sigma_k))$, que más bien muestra la igualdad $\mathcal{K}(\Sigma) = N_\varepsilon(F^n(\Sigma_k))$, como la contención $F^n(\Sigma_k) \subseteq N_\varepsilon(\mathcal{K}(\Sigma))$ se cumple trivialmente, entonces $d_H(F^n(\Sigma_k), \mathcal{K}(\Sigma)) < \varepsilon$ y ésto es válido para $n \geq n_0$. Concluimos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} d_H(F^n(\Sigma_k), \mathcal{K}(\Sigma)) = 0$, lo cual deseábamos demostrar. $\square$

Proposición 4.9. $\mathcal{P} := \left\{Y \in C(\mathcal{K}(\Sigma)) : \exists\, 0 \leq a < b \leq 1, k \in \omega \left([a, b]_{\sigma^k(t)} \subseteq Y\right)\right\} \subseteq E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$.

Demostración. Sea $Y \in \mathcal{P}$, y sean $0 \leq a < b \leq 1$, $k \in \omega$ tales que $[a, b]_{\sigma^k(t)} \subseteq Y$. Por el corolario 4.5 existen $n, m \in \omega$ tales que $\Sigma_{k+m} = [0, 1]_{\sigma^{k+m}(t)} \subseteq F^n([a, b]_{\sigma^k(t)})$. Puesto que $\Sigma_{k+m} \in E(\Sigma, F)$, por la proposición 4.8 y de las contenciones $\Sigma_{k+m} \subseteq F^n([a, b]_{\sigma^k(t)})$ y $[a, b]_{\sigma^k(t)} \subseteq Y$, obtenemos que para todo $p \in \omega$, $F^p(\Sigma_{k+m}) \subseteq F^{p+n}(Y)$. Por ende $0 \leq d_H(F^{p+n}(Y), \mathcal{K}(\Sigma)) \leq d_H(F^p(\Sigma_{k+m}), \mathcal{K}(\Sigma))$.

Por tanto:

$$0 \leq \lim_{p\longrightarrow\infty} d_H(F^{p+n}(Y), \mathcal{K}(\Sigma)) \leq \lim_{p\longrightarrow\infty} d_H(F^p(\Sigma_{k+m}), \mathcal{K}(\Sigma)) = 0.$$

Lo cual concluye que $Y \in E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$. $\square$

Proposición 4.10. $\mathcal{P} := \left\{Y \in C(\mathcal{K}(\Sigma)) : \exists\, 0 \leq a < b \leq 1, k \in \omega \left([a,b]_{\sigma^k(t)} \subseteq Y\right)\right\}$ *es denso en* $C(\mathcal{K}(\Sigma))$.

Demostración. Sean $K \in C(\mathcal{K}(\Sigma))$ y $\epsilon > 0$, analicemos los siguientes casos:

1. Si $O = [(\overline{0}, 0)] \in K$ entonces consideremos $A = K \cup [0, \frac{\varepsilon}{2}]_{\sigma(t)}$. Puesto que A está formado por la unión de dos subespacios cerrados y conexos de (Σ) entonces resulta que A es un subcontinuo, más aún, por construcción se tiene que $A \in \mathcal{P}$. Por otro lado se tiene que $O \in [0, \frac{\varepsilon}{2}]_{\sigma(t)} \subseteq B_\varepsilon^{\mathcal{K}(\Sigma)}(O)$ por tanto
$$A \subseteq K \cup B_\varepsilon^{\mathcal{K}(\Sigma)}(O) \subseteq N_\varepsilon(K) \qquad \text{y} \qquad K \subseteq A \subseteq N_\varepsilon(A)$$
lo que muestra que $d_H(K, A) < \varepsilon$.

2. Si $O \notin K$ entonces por la proposición 4.2 sabemos que $K = [a,b]_x$ para ciertos $0 \leq a \leq b \leq 1$ y $x \in \Sigma$. Por otro lado, existen $0 \leq a' < b' \leq 1$ tales que $[a,b] \subseteq [a',b']$ y $[a',b'] \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}([a,b])$ y puesto que $\{\sigma^n(t)\}_{n\geq 0}$ es denso en Σ existe $k \in \omega$ ta que $d(x, \sigma^k(t)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Defínase entonces $A = [a',b']_{\sigma^k(t)}$, entonces cumple por construcción que $d_H(K, A) < \varepsilon$ y $A \in \mathcal{P}$.

En cualquier caso, existe $A \in \mathcal{P}$ tal que $d_H(K, A) < \varepsilon$, lo que muestra que $\mathcal{P}$ es denso en $C(\mathcal{K}(\Sigma))$. $\square$

Finalmente, se demostró que la función F es *débil completamente expansivo por continuos*, pero no *completamente expansivo por continuos.*

4.2. Mezclante no implica débil completamente expansivo por continuos

Para esta sección y la siguiente consideraremos cierto tipo de funciones caóticas en el producto $X \times [0,1]$. Diremos que un mapeo $f : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ es *bien portado* si $f^{-1}(X \times \{0\}) = X \times \{0\}$. No es difícil convencerse que existen mapeos *bien portados* lo que no resulta claro es que existan mapeos *bien portados* y caóticos, para ello utilicemos el siguiente resultado:

Proposición 4.11. *Existe* $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *mapeo mezclante tal que* $g^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

La construcción de este mapeo mezclante se puede hallar en [Méndez, Observación 8.c, p. 62].

Proposición 4.12. *Sean X espacio topológico y $h : X \longrightarrow X$ mapeo mezclante, si $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ mapeo mezclante tal que $g^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, entonces la función $f : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ tal que $f(x,t) = (h(x), g(t))$ para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$ es un mapeo mezclante bien portado.*

Demostración. Por la proposición 2.12 sabemos que f resulta ser un mapeo mezclante, por otro lado si $(x,t) \in f^{-1}(X \times \{0\})$ se tiene que $(h(x), g(t)) \in X \times \{0\}$ lo que significa que $g(t) = 0$ y de la hipótesis tenemos que $t = 0$, lo que muestra $f^{-1}(X \times \{0\}) \subseteq X \times \{0\}$, inversamente la contención $X \times \{0\} \subseteq f^{-1}(X \times \{0\})$ se sigue del hecho que para todo $x \in X$ se cumpla $f(x,0) = (h(x), g(t)) = (h(x), 0)$. $\square$

Las proposiciones anteriores justifican la existencia de mapeos *bien portados*, pues para ellos basta considerar un espacio topológico X y un mapeo definido en éste que sean mezclante. A continuación unas observaciones sobre mapeos *bien portados*.

Proposición 4.13. *Sea $f : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ mapeo bien portado, entonces se cumple lo siguiente:*

a) Para todo $k \geq 1$ el mapeo $f^k : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ es bien portado.

b) Para todo $k \geq 1$, si $W \subseteq X \times \{0\}$ entonces $f^k(W) \subseteq X \times \{0\}$, en particular $f^k(X \times \{0\}) = X \times \{0\}$.

c) Para todo $k \geq 1$, si $W \subseteq X \times (0,1]$ entonces $f^k(W) \subseteq X \times (0,1]$.

Demostración. a) Se hace una prueba por inducción. El paso base $k = 1$ lo tenemos por hipótesis, supongamos que para cierto $k \geq 1$ se cumple que $f^k : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ es *bien portado* por tanto $(f^k)^{-1}(X \times \{0\}) = X \times \{0\}$ y usando el paso base obtenemos que

$$(f^{k+1})^{-1}(X \times \{0\}) = f^{-1}((f^k)^{-1}(X \times \{0\})) = f^{-1}(X \times \{0\}) = X \times \{0\}$$

lo que muestra que f^{k+1} es *bien portado*.

b) Si $W \subseteq X \times \{0\}$ y $k \geq 1$, entonces dado $w \in W$ obtenemos que $w \in X \times \{0\} = (f^k)^{-1}(X \times \{0\})$ por ser f^k *bien portado*, por tanto $f^k(w) \in X \times \{0\}$, lo que muestra la contención $f^k(W) \subseteq X \times \{0\}$. Como $(f^k)^{-1}(X \times \{0\}) = X \times \{0\}$ y f^k es suprayectiva por ser un mapeo, se sigue que $X \times \{0\} = f^k((f^k)^{-1}(X \times \{0\})) = f^k(X \times \{0\})$.

c) Si $W \subseteq X \times (0,1]$ y $k \geq 1$, entonces dado $w \in W$ si ocurriera que $f^k(w) \in X \times \{0\}$ entonces $w \in X \times \{0\}$ pues f^k es *bien portado*, contradiciendo que $W \subseteq X \times (0,1]$, entonces necesariamente debe ocurrir que $f^k(w) \in X \times (0,1]$, mostrando la contención.

Concluimos esta proposición. $\square$

La razón de introducir los mapeos *bien portados* en el producto $X \times [0,1]$ es porque nos gustaría que al considerar funciones caóticas en $X \times [0,1]$ éstas pudiesen pasar al cociente como fucniones caóticas en $\mathcal{K}(X)$. Por ello tenemos este resultado:

Proposición 4.14. *Sean X espacio topológico y $f : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ mapeo mezclante (débilmente mezclante) y bien portado . Entonces si la función $F : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ es tal que $F \circ \rho = \rho \circ f$ donde ρ es la función cociente para el cono topológico de X, $\rho : X \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{K}(X)$, entonces F es mezclante (débilmente mezclante).*

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "\rho"] \\ \mathcal{K}(X) \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K}(X) \end{tikzcd}$$

Demostración. Del corolario 1.27 sabemos que F resulta ser continua, además al ser f y ρ suprayectivas tenemos que F también lo es, por tanto F es un mapeo en $\mathcal{K}(X)$. Supongamos f mezclante y sean U, V subconjuntos abiertos y no vacíos de $\mathcal{K}(X)$. Puesto que $\mathcal{K}(X)$ es un continuo no degenerado entonces $U' := U - \{O\}$ es abierto no vacío de $\mathcal{K}(X)$, por tanto $\rho^{-1}(U')$ y $\rho^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos de $X \times [0,1]$ y de la hipótesis existe $n \in \omega$ tal que si $k \geq n$ entonces $f^k(\rho^{-1}(U')) \cap \rho^{-1}(V) \neq \emptyset$. De la hipótesis $F \circ \rho = \rho \circ f$, por un razonamiento inductivo se puede demostrar que para todo $k \in \omega$ se cumple $F^k \circ \rho = \rho \circ f^k$. Además recuérdese que la función $\rho|_{X \times (0,1]} : X \times (0,1] \longrightarrow \mathcal{K}(X) - \{O\}$ resulta en un homeomorfismo, en particular es biyección, por tanto si $W \subseteq X \times (0,1]$ y de la proposición 4.13 tenemos que $f^k(W) \subseteq X \times (0,1]$ para todo $k \in \omega$ y por tanto se tiene $\rho^{-1}(F^k(\rho(W))) = \rho^{-1}(\rho(f^k(W))) = f^k(W)$, en particular nos interesa observar que $\rho^{-1}(U') \subseteq X \times (0,1]$ y por tanto, para todo $k \in \omega$ tenemos

$$\rho^{-1}(F^k(\rho(\rho^{-1}(U')))) = f^k(\rho^{-1}(U'))$$

y como ρ es suprayectiva, $\rho(\rho^{-1}(U')) = U'$, por tanto

$$\rho^{-1}(F^k(U')) = f^k(\rho^{-1}(U')).$$

Finalmente, para todo $k \geq n$ se sigue que

$$\begin{aligned}\rho^{-1}(F^k(U) \cap V) \supseteq \rho^{-1}(F^k(U') \cap V) &= \rho^{-1}(F^k(U)) \cap \rho^{-1}(V) \\ &= f^k(\rho^{-1}(U')) \cap \rho^{-1}(V) \neq \emptyset,\end{aligned}$$

que a su vez implica que $F^k(U) \cap V \neq \emptyset$, si $k \geq n$. Lo que muestra que F es mezclante.

Ahora bien si f es débilmente mezclante, dados U_1, U_2, V_1, V_2 abiertos no vacíos de $\mathcal{K}(X)$, definiendo $U_1' := U_1 - \{O\}$ y $U_2' := U_2 - \{O\}$ resultan ser abiertos no vacíos nuevamente, por ello $\rho^{-1}(U_i')$ y $\rho^{-1}(V_i)$ son abiertos no vacíos de $X \times [0,1]$ para $i = 1, 2$. Por ello existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(\rho^{-1}(U_i')) \cap \rho^{-1}(V_i) \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$. Y repitiendo el argumento anterior concluimos que para $i = 1, 2$ se cumple $F^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, lo cual muestra que F es débilmente mezclante. $\square$

Como uno sospecharía, un mapeo *bien portado* también debe conservar el carácter caótico del espaico cociente, en este caso el cono topológico $\mathcal{K}(X)$, al espacio base, nos referimos a X. Para verificar esto último necesitamos este hecho previo:

Lema 4.15. *Sea X un espacio topológico no vacío, entonces $X \times \{0\}$ es denso en ninguna parte en $X \times [0,1]$. Por tanto si U es un abierto no vacío de $X \times [0,1]$ entonces $U - (X \times \{0\})$ es abierto no vacío también.*

Demostración. Notemos que $X \times \{0\}$ es cerrado en $X \times [0,1]$, basta ver que tiene interior vacío, en efecto, si existiese $(x, 0) \in \operatorname{int}(X \times \{0\}) \subseteq X \times \{0\}$ existirían V abierto en X y $0 < \varepsilon \leq 1$ tal que $x \in V$ y $V \times [0, \varepsilon) \subseteq X \times \{0\}$, en particular se tendría que $(x, \frac{\varepsilon}{2}) \in X \times \{0\}$ lo cual es absurdo, por ello $\operatorname{int}(X \times \{0\}) = \emptyset$. Por otro lado, si U es abierto no vacío de $X \times [0,1]$ de forma que $U - (X \times \{0\}) = \emptyset$ entonces $U \subseteq (X \times \{0\})$ lo cual implicaría que $\emptyset \neq U \subseteq \operatorname{int}(X \times \{0\})$ una contradicción a lo previamente demostrado, por ello $U - (X \times \{0\}) \neq \emptyset$ y además es abierto. $\square$

Proposición 4.16. *Sean X espacio topológico y $f : X \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$ mapeo bien portado . Entonces si $F : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ es mapeo mezclante (débilmente mezclante) tal que $F \circ \rho = \rho \circ f$ donde ρ es la función cociente para el cono topológico*

de X, $\rho : X \times [0,1] \longrightarrow \mathcal{K}(X)$, entonces f es mezclante (débilmente mezclante).

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & X \times [0,1] \arrow[d, "\rho"] \\ \mathcal{K}(X) \arrow[r, "F"'] & \mathcal{K}(X) \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos primero que F es mezclante. Sean U, V abiertos no vacíos de $X \times [0,1]$, por el lema 4.15, $U' := U - (X \times 0)$ y $V' := V - (X \times \{0\})$ son abiertos no vacíos y además $U', V' \subseteq X \times (0,1]$, puesto que

$$\rho|_{X \times (0,1]} : X \times (0,1] \longrightarrow \mathcal{K}(X) - \{O\}$$

es homeomorfismo, entonces $\rho(U')$ y $\rho(V')$ son abiertos no vacíos de $\mathcal{K}(X) - \{O\}$ y al ser éste abierto en $\mathcal{K}(X)$, entonces $\rho(U')$ y $\rho(V')$ son abiertos en $\mathcal{K}(X)$. Por ello, existe $n \in \mathbb{N}$ de manera que $F^k(\rho(U')) \cap \rho(V') \neq \emptyset$ para todo $k \geq n$, entonces si $k \geq n$ puesto que $F^k(\rho(U')) = \rho(f^k(U'))$ se sigue que $\rho(f^k(U')) \cap \rho(V') \neq \emptyset$. Como f es *bien portado* y $U', V' \subseteq X \times (0,1]$, por la proposición 4.13 tenemos que $f^k(U') \subseteq X \times (0,1]$ y como $\rho|_{X \times (0,1]}$ es biyección, se sigue que $\rho(f^k(U') \cap V') = \rho(f^k(U')) \cap \rho(V') \neq \emptyset$, lo cual a su vez implica $f^k(U) \cap V \supseteq f^k(U') \cap V' \neq \emptyset$, lo anterior para todo $k \geq n$. Eso muestra que f es mezclante.

Un razonamiento similar muestra que si F es débilmente mezclante entonces f también lo es. $\square$

Ahora sí estamos en condiciones de dar el ejemplo requerido. Consideremos el mapeo desplazamiento de cantor $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ y sea $h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ un mapeo mezclante y tal que $h^{-1}(0) = \{0\}$ (el cual sabemos que existe por la proposición 4.11). Defínase $f : \Sigma \times [0,1] \longrightarrow \Sigma \times [0,1]$ de forma que $f(x,t) = (\sigma(x), h(t))$, de las proposiciones 2.12 y 4.12 sabemos que f resulta en un mapeo mezclante y bien portado. Puesto que para todo $x \in \Sigma$ se tiene que $f(x,0) = (\sigma(x), 0) \in \Sigma \times \{0\}$ entonces esta función f pasa al cociente ρ, es decir, si definimos $F : \mathcal{K}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{K}(\Sigma)$ como $F([(x,t)]) = [f(x,t)]$, está bien definida y cumple que $F \circ \rho = \rho \circ f$. Como f es mezclante y de la proposición 4.14 ya es inmediato que F es mapeo mezclante. Nuestro trabajo a continuación es mostrar que la función F no es *débil continuamente expansiva por continuos.*

Recuérdese que en un espacio topológico X, $D \subseteq X$ denso implica que $\operatorname{int}(X - D) = X - \overline{D} = \emptyset$. De esto último, para mostrar que un subconjunto D de X no es denso, basta mostrar que $\operatorname{int}(X - D) \neq \emptyset$. Así bien, para mostrar que F no es

débil completamente expansivo por continuos, tenemos que probar que el conjunto $E(\mathcal{K}(\Sigma), F) \subseteq C(\mathcal{K}(\Sigma))$ es tal que

$$\operatorname{int}_{C(\mathcal{K}(\Sigma))}(C(\mathcal{K}(\Sigma)) - E(\mathcal{K}(\Sigma), F)) \neq \emptyset.$$

Primero nótese que para todo $x \in \Sigma$,

$$F([0,1]_x) = F(\rho(\{x\} \times [0,1])) = \rho(f(\{x\} \times [0,1])) = \rho(\{\sigma(x)\} \times [0,1]) = [0,1]_{\sigma(x)},$$

y por un argumento inductivo obtendríamos que

$$F^n([0,1]_x) = [0,1]_{\sigma^n(x)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Nuestro primer paso es mostrar que para todo $x \in \Sigma$ se tiene que

$$[0,1]_x \in C(\mathcal{K}(\Sigma)) - E(\mathcal{K}(\Sigma), F).$$

Para ello necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.17. *Sea (X, d) espacio métrico no degenerado, entonces existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in X$ se cumple $B_\delta(x) \neq X$.*

Demostración. Procedamos por contradicción, supongamos que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $B_\delta(x_\delta) = X$. Sea $\varepsilon = \text{diám}(X) > 0$ el cual es positivo pues X es no degenerado, entonces para $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ existe $x_0 \in X$ tal que $X = B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)$. Pero esto último implicaría que $\varepsilon = \text{diám}(X) = \text{diám}(B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ lo cual es un absurdo, por tanto existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in X$ se cumple $B_\delta(x) \neq X$. $\square$

Proposición 4.18. *Para todo $c \in \Sigma$ se tiene que $[0,1]_c \in C(\mathcal{K}(\Sigma)) - E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$.*

Demostración. Sea $c \in \Sigma$. Del lema 4.17, sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \neq \Sigma$ para todo $x \in \Sigma$. Se afirma que $N_\varepsilon([0,1]_{\sigma^n(c)}) \neq \mathcal{K}(\Sigma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ y entonces $B_\varepsilon(\sigma^n(c)) \neq \Sigma$, así bien existe $y_n \in \Sigma$ tal que $\varepsilon < d(y_n, \sigma^n(c))$, veamos que $[(y_n, 1)] \notin N_\varepsilon([0,1]_{\sigma^n(c)})$, para ello sea $t \in [0,1]$ y consideremos $[(\sigma^n(c), t)] \in [0,1]_{\sigma^n(c)}$ entonces

$$\Delta([(y_n, 1)], [(\sigma^n(c), t)]) = |1 - t| + \text{mín}\{1, t\}\, d(y_n, \sigma^n(c)) \geq 1 - t + t\varepsilon \geq \varepsilon$$

Lo anterior muestra que todos los elementos de $[0,1]_{\sigma^n(c)}$ distan al menos ε de $[(y_n, 1)]$, por tanto $[(y_n, 1)] \notin N_\varepsilon([0,1]_{\sigma^n(c)})$, y así $N_\varepsilon([0,1]_{\sigma^n(c)}) \neq \mathcal{K}(\Sigma)$. Pero

esto a su vez implica que $d_H([0,1]_{\sigma^n(c)}, \mathcal{K}(\Sigma)) > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto

$$d_H(F^n([0,1]_c), \mathcal{K}(\Sigma)) > \varepsilon \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto $\lim_{n\longrightarrow\infty} d_H(F^n([0,1]f_c), \mathcal{K}(\Sigma)) \neq 0$ lo que significa que $[0,1]_c \in C(\mathcal{K}(\Sigma)) - E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$. $\square$

Corolario 4.19. *Para todo $c \in \Sigma$ y $0 \leq a \leq b \leq 1$ se cumple que $[a,b]_c \in C(\mathcal{K}(\Sigma)) - E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$.*

Demostración. Si de lo contrario, es decir, existen $c \in \Sigma$ y $0 \leq a \leq b \leq 1$ tales que $[a,b]_c \in E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$ entonces como $[a,b]_c \subseteq [0,1]_c$ se seguiría que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d_H(F^n([0,1]_c, \mathcal{K}(\Sigma)) \leq 0 \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} d_H(F^n([a,b]_c, \mathcal{K}(\Sigma)) = 0,$$

lo cual es una contradicción a la proposición anterior. $\square$

Ahora bien definamos $\mathcal{A} := \{[a,b]_c \in C(\mathcal{K}(\Sigma)) : c \in \Sigma, 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Por el corolario anterior ya e sclaro que $\mathcal{A} \subseteq C(\mathcal{K}(\Sigma)) - E(\mathcal{K}(\Sigma), F)$, para mostrar que

$$\mathrm{int}_{C(\mathcal{K}(\Sigma))}(C(\mathcal{K}(\Sigma)) - E(\mathcal{K}(\Sigma), F)) \neq \emptyset,$$

es suficiente que demostremos

$$\mathrm{int}_{C(\mathcal{K}(\Sigma))}(\mathcal{A}) \neq \emptyset.$$

Proposición 4.20. *$int_{C(\mathcal{K}(\Sigma))}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.*

Demostración. Consideremos $R = \left[\frac{1}{2}, 1\right]_{\overline{0}}$, entonces $R \in \mathcal{A}$. Se afirma que

$$B_{\frac{1}{2}}^{C(\mathcal{K}(\Sigma))}(R) \subseteq \mathcal{A}.$$

En efecto, sea $W \in B_{\frac{1}{2}}^{C(\mathcal{K}(\Sigma))}(R)$, luego $d_H(W, R) < \frac{1}{2}$ y en particular tenemos $W \subseteq N_{\frac{1}{2}}(R)$, si $O \in W \subseteq N_{\frac{1}{2}}(R)$ entonces como $O \in N_{\frac{1}{2}}(R)$ existiría $[\overline{0}, t] \in R$ donde $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tal que $\Delta\left([\overline{0}, 0], [\overline{0}, t]\right) < \frac{1}{2}$, pero $\Delta\left([\overline{0}, 0], [\overline{0}, t]\right) = t \geq \frac{1}{2}$ lo cual es un absurdo, por tanto $O \notin W$ y por la proposición 4.2, se sigue que $W \in \mathcal{A}$. $\square$

Corolario 4.21. *$int_{C(\mathcal{K}(\Sigma))}(C(\mathcal{K}(\Sigma)) - E(\mathcal{K}(\Sigma), F)) \neq \emptyset$.*

Lo anterior termina la demostración de que F no es *débil completamente expansivo por continuos.*

4.3. Débilmente mezclante no implica mezclante

A continuación, nuestro objetivo es construir un mapeo en Cantor, $\alpha : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, que sea débilmente mezclante pero no mezclante. Para ello, consideremos la función desplazamiento $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ y recuérdese que para U, V abiertos de Cantor podemos definir $\mathcal{N}(U,V) := \{n \in \mathbb{N} : \sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$.

A una sucesión finita de 0's y 1's, $A = a_1 \dots a_n$ donde $a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}$, le llamaremos un bloque y denotaremos por $l(A) = n$ a la longitud del bloque que será la cantidad de términos por los cuales está compuesto. Para $s \geq 1$ denotaremos 0_s al bloque de longitud s que contiene exactamente s ceros

$$0_s = \overbrace{0 \dots 0}^{s \text{ veces}}.$$

Para dos bloques $A = a_1 \dots a_n$ y $B = b_1 \dots b_m$ la concatenación de los bloques A y B será otro bloque, denotado como AB, de manera que $AB = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$. En ocaciones pensaremos que con $s = 0$ el bloque 0_s significa *un espacio vacío entre términos,* y por tanto para un bloque A tendríamos que $A0_0 = 0_0 A = A$.

También, para el bloque $A = a_1 \dots a_n$, podremos pensarlo como un elemento $x_A = (x_{A,i})_{i=1}^{\infty} = A \in \Sigma$ lo cual para nosotros significará que

$$x_{A,i} = \begin{cases} a_i & \text{si } \ 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si } \ i \geq n+1 \end{cases}$$

lo que podemos visualizarlo como

$$x_A = (A\,0 \dots 0 \dots) = (a_1 \dots a_n 0 \dots 0 \dots)$$

Sean $x \in \Sigma$ donde $y = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $A = a_1 \dots a_n$ un bloque y $t \geq 1$, diremos que el bloque A aparece en x en la posición t si $x_{t-1+i} = a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, de forma visualizada tendríamos que

$$x = (x_1 \dots x_{t-1} \overbrace{a_1 \dots a_n}^{A} x_{t+n} \dots).$$

Diremos simplemente que, A aparece en y si existe t natural positivo con la propiedad anterior. Así bien, para A un bloque y $t \geq 1$ definiremos el conjunto

$$(A,t) := \{x \in C : A \text{ aparece en } x \text{ en la posición } t\}.$$

Proposición 4.22. *Para todo bloque A y $t \geq 1$ el conjunto (A,t) es abierto no vacío de Σ.*

Demostración. Sea $A = a_1 \dots a_n$ un bloque con $n = l(A)$ y $t \geq 1$. Puesto que el elemento $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ definido como

$$y_i = \begin{cases} a_j & \text{si } \ i = t-1+j \ \text{ para algún } j = 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

cumple por definición que A aparece en y en la posición t, entonces (A,t) es no vacío. Veamos que es abierto, para ellos sea $x \in (A,t)$, probaré que $B_{\frac{1}{2^{t+n}}}(x) \subseteq (A,t)$ lo que probaría que x es punto interior y de lo cual (A,t) es abierto. En efecto, si $w \in B_{\frac{1}{2^{t+n}}}(x)$ entonces $d(w,x) < \frac{1}{2^{t+n}}$ por lo que si $w = (w_i)_{i=1}^{\infty}$ y $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ entonces $w_k = x_k$ si $k = 1, \dots, t+m$. Por otro lado, como $x \in (A,t)$ entonces $x_{t-1+i} = a_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, nótese que $1 \leq t-1+i \leq t+n$ cuando $i = 1, \dots, n$, por tanto $w_{t-1+i} = x_{t-1+i} = a_i$ si $i = 1, \dots, n$, lo que permite concluir que $w \in (A,t)$, lo cual prueba que $B_{\frac{1}{2^{t+n}}}(x) \subseteq (A,t)$ como se quería demostrar. $\square$

Proposición 4.23. *El conjunto de abiertos $\{(A,t) : A$ es un bloque y $t \geq 1\}$ forma una base para la topología de Σ.*

Demostración. Basta probar que si $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \Sigma$ y $\varepsilon > 0$ entonces existen A bloque y $t \geq 1$ tales que $x \in (A,t) \subseteq B_\varepsilon(x)$. En efecto, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ tomando $t = 1$ y $A = x_1 \dots x_{n+1}$ tenemos claramente que $x \in (A,1)$, y además si $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in (A,1)$ esto implica que $y_i = x_i$ si $i = 1, \dots, x_{n+1}$ lo cual implica que $d(x,y) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ y por tanto $y \in B_\varepsilon(x)$, o bien que $x \in (A,1) \subseteq B_\varepsilon(x)$. $\square$

Consideremos $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ y $A = a_1 \dots a_n$ un bloque. Diremos que A es $S-$admisible si y sólo si se cumple que para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ si $a_i = 1 = a_j$ entonces $i = j$ o $|i-j| \in S$. Una observación fácil es que si A es un bloque S-admisible y $s \geq 0$ entonces los bloques $0_s A$ y $A 0_s$ también son S-admisibles, en efecto en el primero caso

$$0_s A = \overbrace{0 \dots 0}^{s \text{ veces}} a_1 \dots a_n$$

lo podemos escribir como $0_s A = x_1 \dots x_{n+s}$ donde

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 1 \leq i \leq s \\ a_k & \text{si } \ i = s+k, \ \ k \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Por tanto si $x_i = 1 = x_j$ necesariamente $x_i = a_{i'} = 1$ donde $i = s + i'$, y $x_j = a_{j'} = 1$ donde $j = s + j'$ y como A es S-admisible entonces $i' = j'$ o $|i - j| \in S$ lo cual implica que $i = j$ o $|i - j| = |(s + i') - (s + j')| = |i' - j'| \in S$, lo cual nos permite concluir que $0_s A$ es S-admisible. Para $A0_s$ se hace una prueba similar.

Por otro lado, para $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ definiremos

$$X_S := \{x \in \Sigma : \text{todo bloque que aparece en } x \text{ es } S\text{-admisible}\}.$$

Una primera observación es que todos estos conjuntos tienen al elemento cero de Cantor, $\overline{0}$, pues los bloques de éste al no contener términos 1, por vacuidad, son S-admisibles para S arbitrario. Más en general, recuérdese que para un bloque A podemos definir $x_A \in C$ como aquel con sus primeros términos coinciden con los de A y después son sólo 0, en ese caso tenemos lo siguiente:

Proposición 4.24. *$x_A \in X_S$ si y sólo si A es S-admisible.*

Demostración. Escribamos $A = a_1 \dots a_n$ y entonces

$$x_A = (x_1 \dots x_n 0 \dots 0 \dots) = (a_1 \dots a_n 0 \dots 0 \dots).$$

$\Longrightarrow$] Supongamos que $x_A \in X_S$ en particular como A es un bloque que aparece en x y por tanto debe ser $S-$admisible por la definición de X_S.

$\Longleftarrow$] Recíprocamente si A es S-admisible y $B = b_1 \dots b_m$ es un bloque que aparece en x, digamos que en la posición $t \geq 1$, queremos ver que B es S-admisible, para ellos supongamos que $b_i = b_j = 1$ para ciertos $i, j \in \{1, \dots, m\}$ luego necesariamente $b_i = x_{i'}$ y $b_j = x_{j'}$ donde $i' = i + t - 1$ y $j' = j + t - 1$ y $i', j' \in \{1, \dots, n\}$,

$$x = (x_1 \dots x_{t-1} b_1 \dots b_m \dots)$$

por tanto $b_i = a_{i'}$ y $b_j = a_{j'}$ y como A es S- admisible entonces $i' = j'$ lo cual demostraría que $i = j$ o bien tendríamos que $|i-j| = |(i'-t+1)-(j'-t+1)| = |i'-j'| \in S$. Por tanto B es $S-$admisible y así $x_A \in X_S$. $\square$

La siguiente proposición nos dirá que estos subespacios de Cantor son cerrados no vacíos:

Proposición 4.25. *Si $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ entonces X_S es cerrado en C. Y por consiguiente es compacto.*

Demostración. Probemos que $\Sigma - X_S$ es abierto en Σ. Sea $x \in \Sigma - X_S$, entonces existe A un bloque que aparece en x que no es S-admisible. Supongamos que A

aparece en x en la posición t, para algún $t \geq 1$, luego $x \in (A,t)$. Nótese además que si $y \in (A,t)$ entonces, en particular, A es un bloque que aparece en y y éste no es S-admisible, por lo que $y \in \Sigma - X_S$. Esto prueba que $x \in (A,t) \subseteq \Sigma - X_S$ y de la proposición 4.22 el conjunto (A,t) es abierto, lo que prueba que x es punto interior de $\Sigma - X_S$ y por ende éste es abierto. Concluimos que X_S es cerrado en Σ, como éste último es compacto entonces también lo es X_S. $\square$

Diremos que $S \subseteq N$ es repleto si y sólo si para todo $\emptyset \neq F \subseteq \mathbb{N}$ subconjunto finito existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + F \subseteq S$ donde $n + F := \{n + m : m \in F\}$. Nótese que por definición el conjunto S debe ser un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ pues para todo $m \in \mathbb{N}$ existiría $k_m \in \mathbb{N}$ tal que $\{1 + k_m, \ldots, m + k_m\} \subseteq S$ y por tanto $|S| \geq m$ con m natural positivo arbitrariamente grande. A continuación probaremos una propiedad más general para los subconjuntos repletos:

Proposición 4.26. *Si $S \subseteq \mathbb{N}$ es un subconjunto repleto entonces para todo $\emptyset \neq F \subseteq \mathbb{Z}$ subconjunto finito y $k \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq k$ y $n + F \subseteq S$.*

Demostración. Sea $F = \{p_1, \ldots, p_m\}$ un subconjunto finito no vacío de $\mathbb{Z}$. La prueba se hace por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$. Para el paso base $(k = 1)$, consideremos $M = \text{máx}\{|p_1|, \ldots, |p_m|\} \geq 0$ entonces este natural cumple que $M + p_i + 1 \geq 1$ para todo $i = 1, \ldots, m$ por lo que $(M + 1) + F$ es un subconjunto finito no vacío de $\mathbb{N}$, como S es repleto, existe $n' \geq 1$ tal que $n' + ((M+1) + F) \subseteq S$ y por tanto $n + F \subseteq S$ donde $n = n' + M + 1 \geq 1$ lo que prueba el caso base. Supongamos que para $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \geq k$ tal que $n_k + F \subseteq S$. Probemos la propiedad para $k + 1$. Puesto que $n_k + F \subseteq S \subseteq \mathbb{N}$ entonces $n_k + F$ es un subconjunto finito no vacío de $\mathbb{N}$ y como S es repleto, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $(s + n_k) + F = s + (n_k + F) \subseteq S$ pero haciendo $n_{k+1} = s + n_k$ como $n_k \geq k$ y $s \in \mathbb{N}$ tenemos que $n_{k+1} \geq k + 1$ y $n_{k+1} + F \subseteq S$ lo que completa el paso inductivo. Por tanto la propiedad es válida para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposición 4.27. *Si $S \subseteq \mathbb{N}$ es repleto, entonces X_S es un subconjunto perfecto de Σ.*

Demostración. Basta demostrar que si $x \in X_s$ y $\epsilon > 0$, entonces $(B_\varepsilon(x) - \{x\}) \cap X_S \neq \emptyset$. Para ello, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Escribamos $x = (x_1 \ldots x_n x_{n+1} x_{n+2} \ldots)$, chequemos los siguientes casos:

Caso 1. Supongamos que existe $j \geq n + 2$ tal que $x_j = 1$, en ese caso definamos el bloque $A = x_1 \ldots x_{n+1}$ el cual es S-admisible pues es un bloque de $x \in X_S$, y por la proposición 4.24 sabemos que $x_A \in X_S$, puesto que para todo $i = 1, \ldots, n + 1$ se tiene que $x_i = (x_A)_i$ entonces $d(x, x_A) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ y así $x_A \in B_\varepsilon(x)$, pero como

$x_j = 1 \neq 0 = (x_A)_j$ pues $j \geq n+2$ entonces $x \neq x_A$ y podemos concluir que $x_A \in (B_\varepsilon(x) - \{x\}) \cap X_S$.

$$x = (x_1 \dots x_n x_{n+1} \dots \overbrace{1}^{x_j} \dots)$$

$$x_A = (x_1 \dots x_n x_{n+1} 0 \dots \overbrace{0}^{(x_A)_j} \dots).$$

Caso 2. Supongamos que para todo $j \geq n+2$ se tiene que $x_j = 0$. Entonces $x = x_A$ donde $A = x_1 \dots x_n x_{n+1}$. Sea $F := \{0, 1, \dots, n\}$, puesto que S es repleto, existe $m \in \mathbb{N}$ ta que $m + F \subseteq S$. Consideremos el bloque el bloque B de longitud $(n+1)+m$ de forma que

$$b_i = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq n+1 \\ 0 & \text{si } n+1 < i < (n+1)+m \\ 1 & \text{si } i = (n+1)+m \end{cases}$$

$$B = x_1 \dots x_n x_{n+1} \dots 0 \overbrace{1}^{(n+1)+m\text{-ésimo lugar}}.$$

Probemos que B es S-admisible. Así bien sean $x_i = x_j = 1$ para $1 \leq i, j \leq (n+1)+m$, si $i = j$ ya acabamos, así que supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j$, hay dos casos: el primero es que $1 \leq i < j \leq n+1$ pero omo $x = x_A \in X_S$ entonces por la proposición 4.24 tenemos que $A = x_1 \dots x_{n+1}$ es S-admisible, y entonces $|i-j| \in S$, el segundo caso es que $j = (n+1)+m$ y $1 \leq i \leq n+1$ pero entonces $|i-j| = j - i = m + ((n+1)-i) \in m + F \subseteq S$ pues $(n+1)-i \in F$. En cualquier caso concluimos que B es S–admisible. Luego $x_B \in X_S$, como

$$(x_B)_{(n+1)+m} = 1 \neq 0 = x_{(n+1)+m}$$

pues $(n+1)+m \geq n+2$ tenemos que $x_B \neq x$, y por último, como $(x_B)_i = x_i$ para todo $1 \leq i \leq n+1$ entonces $d(x, x_B) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ lo que quiere decir que

$$x_B \in (B_\varepsilon(x) - \{x\}) \cap X_S.$$

Concluyendo el segundo caso.

En cualquier caso obtenemos que $(B_\varepsilon(x) - \{x\}) \cap X_S \neq \emptyset$ y eso muestra que X_S es perfecto. $\square$

Corolario 4.28. *Si $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ es repleto, entonces X_S es homeomorfo a Σ, es decir X_S es un Cantor.*

Demostración. Basta probar la caracterización del conjunto de Cantor, es decir, que X_S es un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente disconexo. Nótese que al ser $X_S \subseteq C$ y como Σ es métrico totalmente disconexo, automáticamente se sigue que X_S es métrico totalmente disconexo, por las proposiciones 4.25 y 4.27 igual tenemos que X_S es compacto y perfecto, que es justo lo que queríamos probar. $\square$

Proposición 4.29. *Si $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ entonces $\sigma(X_S) = X_S$.*

Demostración. Hagamos la doble contención.

$\subseteq$) Sea $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X_S$, luego $\sigma(x) = (x_i)_{i=2}^{\infty}$, nótese que si A es un bloque que aparece en $\sigma(x)$ entonces es un bloque que aparece en x y como $x \in X_S$ entonces A es $S-$admisible, lo cual prueba que $\sigma(x) \in X_S$.

$\supseteq$) Sea $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in X_S$ y sea $y \in \Sigma$ definido como $y_1 = 0$ y $y_{i+1} = x_i$ para $i \geq 1$,

$$y = (0\, x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots).$$

Es fácil notar que $\sigma(y) = x$, mostremos que $y \in X_S$. Sea A un bloque que aparece en y, entonces hay dos posibilidades:

a) la primera si A aparece en y en la posición 1 entonces puede ocurrir que $A = 0_1$ el bloque que consta de un sólo 0 el cual es claramente $S-$ admisible, o bien $A = 0_1 B$ donde B es un bloque de x y cómo éste es elemento de X_S entonces B sería $S-$admisible lo que implica a su vez que A también lo es. En cualquier caso A es S admisible.

b) la segunda si A aparece en y en la posición $t \geq 2$, entonces eso hace a A un bloque que aparece en x el cual es $S-$admisible pues $x \in X_S$.

Esto prueba que $y \in X_S$ y por tanto $x = \sigma(y) \in \sigma(X_S)$. $\square$

La proposición anterior nos permite pensar en el nuevo sistema dinámico $(X_S, \sigma|_{X_S})$ donde $\sigma!_{X_S} : X_S \longrightarrow X_S$. Por comodidad, escribiremos $\sigma_S = \sigma|_{X_S}$ cuando tengamos no haya equivocación al referirnos del subconjunto S. Recuérdese que el conjunto $\{(A,t) : A \text{ es un bloque y } t \geq 1\}$ forma una base de abiertos no vacíos para la topología de C, entonces si definimos para un bloque A, $t \geq 1$ el conjunto $(A,t)_S = (A,t) \cap X_S$ entonces resulta que el conjunto $\{(A,t)_S :$

A es un bloque y $t \geq 1\}$ forma una base de abiertos para la topología de X_S, sin embargo ésta familia de básicos puede contar entre sus elementos muchos conjuntos vacíos lo cual no son de nuestro interés (pues las propiedades caóticas mezclante y débilmente mezclante solo sirven para abiertos no vacíos), sin embargo lo natural sería pedir que A fuese $S-$admisible para asegurar básicos no vacíos, como lo asegura esta proposición:

Proposición 4.30. *Sea A un bloque y $t \geq 1$, entonces $(A,t)_S \neq \emptyset$ si y sólo si A es $S-$admisible.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Por un lado si $(A,t)_S \neq \emptyset$ sea $x \in (A,t)_S = (A,t) \cap X_S$, entonces $x \in X_S$ y A es un bloque que aparece en x, por tanto A es $S-$admisible.

$\Longleftarrow$] Recíprocamente, si A es $S-$admisible, sabemos que el bloque $0_{t-1}A$ es también $S-$admisible, por lo que $x_{0_{t-1}A} \in X_S$ y además es claro que $x_{0_{t-1}A} \in (A,t)$ por ende $x_{0_{t-1}A} \in (A,t)_S$. $\square$

De la proposición anterior ya podemos asegurar que el conjunto

$$\{(A,t)_S : \ A \text{ es un bloque } S\text{–adimisble y } t \geq 1\}$$

es una base de abiertos no vacíos para el subespacio X_S. Recordemos que para U, V abiertos no vacíos de X_S, podemos definir $N(U,V) = \{n \in \mathbb{N} : \sigma_S^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$ y que del corolario 4.28 si $S \subseteq \mathbb{N}$ es repleto, entonces X_S es un cantor, a continuación tenemos la primera propiedad caótica para σ_S en X_S :

Proposición 4.31. *Si $S \subseteq \mathbb{N}$ es repleto, entonces $\sigma_S : X_S \longrightarrow X_S$ es débilmente mezclante.*

Demostración. Es suficiente probar que si A, B, C, D son bloques $S-$admisibles y $t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 1$ entonces $N((A_1,t_1)_S, (B,t_2)_S) \cap N((C,t_3)_S, (D,t_4)_S) \neq \emptyset$. Esto ya que

$$\{(P,t)_S : \ P \text{ es un bloque } S\text{–adimisble y } t \geq 1\}$$

forma una base de abiertos no vacíos de X_S.

Así bien sean:

$$\begin{aligned} A &= a_1 \dots a_{l(A)}, \\ B &= b_1 \dots b_{l(B)}, \\ C &= c_1 \dots c_{l(C)}, \\ D &= d_1 \dots d_{l(D)} \end{aligned}$$

bloques S–admisibles y donde $l(A), l(B), l(C)$ y $l(D)$ denotan sus respectivas longitudes y sean $t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 1$. Consideremos

$$m = \text{máx}\{1, (t_3 - 1) + (t_2 - t_1) + l(C) - l(A), (t_2 - t_1) - l(A) + 1, t_2 - 1\} \in \mathbb{N}.$$

Afirmación 1. Existen $s \geq m$ y $p \geq t_4 - 1 \geq 0$, tales que los bloques formados como $P = 0_{t_1-1}\, A\, 0_s\, B$ y $Q = 0_{t_3-1}\, C\, 0_p\, D$ son S–admisibles.

Demostración de la afirmación 1. Sea $F = \{k \in \mathbb{Z} : -M \leq k \leq M\}$ donde

$$M = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + l(A) + l(B) + l(C) + l(D) \in \mathbb{N}.$$

Entonces al ser F conjunto finito de $\mathbb{Z}$, por la afirmación 4.26 existe, $s \geq m \geq 1$ tal que $s + F \subseteq S$, defínase $p = s - [(t_3 - t_4) + (t_2 - t_1) + l(C) - l(A)]$. Nótese que por como definimos m obtenemos que $s \geq m \geq (t_3 - 1) + (t_2 - t_1) + l(C) - l(A) = [(t_3 - t_4) + (t_2 - t_1) + l(C) - l(A)] + (t_4 - 1)$ y sumándole el hecho que $t_4 \geq 1$ obtenemos que

$$p = s - [(t_3 - t_4) + (t_2 - t_1) + l(C) - l(A)] \geq t_4 - 1 \geq 0.$$

Sean los bloques $P = 0_{t_1-1}\, A\, 0_s\, B$ y $Q = 0_{t_3-1}\, C\, 0_p\, D$, mostremos que éstos son S–admisibles con dicha elección de s y p.

1. Para probar que $P = 0_{t_1-1}\, A\, 0_s\, B$ es S–adimisible, sean w_i, w_j términos del bloque P tales que $w_i = w_j = 1$, si $i = j$ ya acabamos, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $i > j$ y puesto que los *unos* del bloque P sólo pueden hallarse dentro de los bloques A y B, entonces tenemos los casos siguientes:

   a) Si $w_i = a_{i'} = 1$ y $w_j = a_{j'} = 1$ para ciertos $1 \leq j' < i' \leq l(A)$. Entonces ocurre que $i = i' + (t_1 - 1)$ y $j = j' + (t_1 - 1)$ por lo que $|i - j| = |i' - j'| \in S$ pues A es S–admisible.

   b) Si $w_i = b_{i'} = 1$ y $w_j = b_{j'} = 1$ para ciertos $1 \leq j' < i' \leq l(B)$. Entonces ocurre que $i = i' + s + l(A) + (t_1 - 1)$ y $j = j' + s + l(A) + (t_1 - 1)$ por lo que $|i - j| = |i' - j'| \in S$ pues B es S–admisible.

   c) Si $w_i = b_{i'} = 1$ y $w_j = a_{j'} = 1$ para ciertos $1 \leq i' \leq l(B)$ y $1 \leq j' \leq l(A)$. Entonces $i = i' + s + l(A) + (t_1 - 1)$ y $j = j' + (t_1 - 1)$ por lo que $|i - j| = i - j = s + (i' - j' + l(A))$, pero nótese que $|i' - j' + l(A)| = i' + l(A) - j' \leq l(B) + l(A) \leq M$ por lo que $i' - j' + l(A) \in F$ y así $s + (i' - j' + l(A)) \in s + F \subseteq S$ por lo que $|i - j| \in S$.

En cualquier caso concluimos que $|i-j| \in S$ por lo que $P = 0_{t_1-1}\, A\, 0_s\, B$ es en efecto S–adimisible.

2. De modos similar, para probar que $Q = 0_{t_3-1}\, C\, 0_p\, D$ es S–admisible, sean z_i, z_j términos del bloque Q tales que $z_i = z_j = 1$, nuevamente supongamos sin pérdida de generalidad que $i > j$ (pues de ser iguales ya acabamos). Tenemos los siguientes casos:

   a) Si $z_i = c_{i'} = 1$ y $z_j = c_{j'} = 1$ para ciertos $1 \leq j' < i' \leq l(C)$. Entonces ocurre que $i = i' + (t_3 - 1)$ y $j = j' + (t_3 - 1)$ por lo que $|i-j| = |i'-j'| \in S$ pues C es S–admisible.

   b) Si $z_i = d_{i'} = 1$ y $z_j = d_{j'} = 1$ para ciertos $1 \leq j' < i' \leq l(D)$. Entonces ocurre que $i = i' + p + l(C) + (t_3 - 1)$ y $j = j' + p + l(C) + (t_3 - 1)$ por lo que $|i-j| = |i'-j'| \in S$ pues D es S–admisible.

   c) S $z_i = d_{i'} = 1$ y $z_j = c_{j'} = 1$ para ciertos $1 \leq i' \leq l(C)$ y $1 \leq j' \leq l(D)$. Entonces $i = i'+p+l(C)+(t_3-1)$ y $j = j'+(t_3-1)$ por lo que $|i-j| = i-j = p+(i'-j'+l(C))$, pero recuérdese que $p = s - [(t_3-1) + (t_2-t_1) + l(C) - l(A)]$ entonces

   $$|i-j| = s + (i' - j' + (1-t_3) + (t_1-t_2) + l(A)),$$

   por otro lado nótese que

   $$\begin{aligned} |i'-j'+(1-t_3)+(t_1-t_2)+l(A)| &\leq i'+j'+t_1+t_2+t_3+1+l(A) \\ &\leq l(D)+l(C)+t_1+t_2+t_3+t_4+l(A) \\ &\leq M \end{aligned}$$

   entonces $i' + j' + (t_4 - t_3) + (t_1 - t_2) + l(A) \in F$ y así

   $$s + (i' + j' + (t_4 - t_3) + (t_1 - t_2) + l(A)) \in s + F \subseteq S$$

   lo cual prueba que $|i-j| \in S$.

   Concluimos por tanto que $Q = 0_{t_3-1}\, C\, 0_p\, D$ es S–admisible, como se quería demostrar. Lo cual demuestra la afirmación 1.

Ahora bien, continuando con la prueba original, sean $s \geq m$ y $p := s - [(t_3 - t_4) + (t_2 - t_1) + l(C) - l(A)] \geq 0$, tales que los bloques $P = 0_{t_1-1}\, A\, 0_s\, B$ y $Q = 0_{t_3-1}\, C\, 0_p\, D$ son S–admisibles. Consideremos x_P y x_Q, puesto que P y Q son S–admisibles sabemos de la proposición 4.24 que $x_P, x_Q \in X_S$. Por como están definidas P y

Q es claro que $x_P \in (A, t_1)$ y $x_Q \in (C, t_3)$, entonces $x_P \in (A, t_1)_S$ y $x_Q \in (C, t_3)_S$. Defínase $n = s - [(t_2 - t_1) - l(A)]$, puesto que $s \geq m \geq (t_2 - t_1) - l(A) + 1$ se sigue que $n = s - [(t_2 - t_1) - l(A)] \geq 1$. Calculemos $\sigma_S^n(x_P)$ y $\sigma_S^n(x_P)$; por un lado recordemos que aplicar la función σ_S^n significa eliminar las primeras n entradas del elemento en cuestión. Puesto que $s \geq m \geq t_2 - 1$ y $p \geq t_4 - 1$, podemos escribir los bloques $0_p = 0_{p-(t_4-1)}\, 0_{t_4-1}$ y $0_s = 0_{s-(t_2-1)}\, 0_{t_2-1.}$ y por consiguiente:

$$P = 0_{t_1-1}\, A\, 0_{s-(t_2-1)}\, 0_{t_2-1.}\, B = P'\, 0_{t_2-1.}\, B$$

$$Q = 0_{t_3-1}\, C\, 0_{p-(t_4-1)}\, 0_{t_4-1}\, D = Q'\, 0_{t_4-1}\, D$$

donde $P' = 0_{t_1-1}\, A\, 0_{s-(t_2-1)}$ y $Q' = 0_{t_3-1}\, C\, 0_{p-(t_4-1)}$, con lo que $l(P') = (t_1 - 1) + l(A) + (s - (t_2 - 1))$ y $l(Q') = (t_3 - 1) + l(C) + (p - (t_4 - 1))$. Por como definimos n y p, realizando unas cuentas podemos llegar a que $n = (t_1 - 1) + l(A) + (s - (t_2 - 1)) = l(P')$ y $n = (t_3 - 1) + l(C) + (p - (t_4 - 1)) = l(Q')$,

$$P = \overbrace{0_{t_1-1}\, A\, 0_{s-(t_2-1)}}^{n\text{-términos}}\, 0_{t_2-1.}\, B = \overbrace{P'}^{l(P')=n}\, 0_{t_2-1.}\, B$$

$$Q = \overbrace{0_{t_3-1}\, C\, 0_{p-(t_4-1)}}^{n\text{-términos}}\, 0_{t_4-1}\, D = \overbrace{Q'}^{l(Q)=n}\, 0_{t_4-1}\, D,$$

con esto podemos deducir que eliminar las primeras n entradas de x_P y de x_Q es lo mismo que eliminar los términos de P' y Q', respectivamente, en palabras más cortas lo que se muestra aquí es:

$$\sigma_S^n(x_P) = x_{0_{t_2-1.}\, B},$$

$$\sigma_S^n(x_Q) = x_{0_{t_4-1}\, D},$$

lo cual implica que $\sigma_S^n(x_P) \in (B, t_2)$ y $\sigma_S^n(x_Q) \in (D, t_4)$ y como $x_p, x_Q \in X_S$ implica $\sigma_S^n(x_P), \sigma_S^n(x_Q) \in X_S$, entonces $\sigma_S^n(x_P) \in (B, t_2)_S$ y $\sigma_S^n(x_Q) \in (D, t_4)_S$.

En síntesis, lo que probamos para $n \geq 1$ es:

$$x_P \in (A, t_1)_S \quad \text{y} \quad \sigma_S^n(x_P) \in (B, t_2)_S$$

lo cual nos indica que $\sigma_S^n(x_P) \in \sigma_S^n((A, t_1)_S) \cap (B, t_2)_S$ o bien que $n \in N((A, t_1)_S, (B, t_2)_S)$;

$$x_Q \in (C, t_3)_S \quad \text{y} \quad \sigma_S^n(x_Q) \in (D, t_4)_S$$

que muestra que $\sigma_S^n(x_Q) \in \sigma_S^n((C,t_3)_S) \cap (D,t_4)_S$ y así $n \in N((C,t_3)_S,(D,t_4)_S)$.

Por tanto $n \in N((A_1,t_1)_S,(B,t_2)_S) \cap N((C,t_3)_S,(D,t_4)_S)$, lo que prueba que este conjunto no es vacío, y a su vez prueba que σ_S es débilmente mezclante. $\square$

Proposición 4.32. *Si $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ es tal que $\mathbb{N} - S$ es infinito, entonces $\sigma_S : X_S \longrightarrow X_S$ no es mezclante.*

Demostración. Consideremos el bloque $A = 1$ que consta de un sólo término igual a 1, claramente éste bloque es $S-$admisible (lo es para todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$), luego por la proposición 4.30 podemos considerar el abierto no vacío $U = (A,1)_S$ de X_S. Se afirma que $N(U,U) \subseteq S$. En efecto si $n \in N(U,U)$ entonces $\sigma_S^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Por tanto existe $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in U$ tal que $\sigma^n(x) \in U$. Nótese que $\sigma^n(x) = (x_i)_{i=n+1}^{\infty} \in U = (A,1)_S$ por lo que $x_{n+1} = 1$, del mismo modo $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in U = (A,1)$ implica $x_1 = 1$. Como el bloque $B = x_1 \dots x_{n+1}$ es S admisible por ser un bloque que aparece en x y $x \in X_S$, entonces del hecho $x_1 = 1 = x_{n+1}$ se sigue que $n = n+1-1 \in S$ (esto pues $n \geq 1$ hace que $n+1 \neq 1$). Eso prueba que $N(U,U) \subseteq S$. De lo cual $\mathbb{N} - S \subseteq \mathbb{N} - N(U,U)$ que por la hipótesis muestra que $\mathbb{N} - N(U,U)$ es infinito y por ello σ_S no puede ser mezclante. $\square$

Proposición 4.33. *Sean X, Y espacios topológicos y $h : X \longrightarrow Y$ homeomorfismo. Sean $f : X \longrightarrow X$ y $g : Y \longrightarrow Y$ funciones tales que $h \circ f = g \circ h$. Entonces:*

a) f es mapeo mezclante si y sólo si g es mapeo mezclante,

b) f es mapeo débilmente mezclante si y sólo si g es mapeo débilmente mezclante.

Demostración. Hagamos la observación general de que si $h \circ f = g \circ h$ entonces por un argumento inductivo se muestra que para todo $n \in \mathbb{N}$, $h \circ f^n = g^n \circ h$.

a) Primero supongamos que f es mapeo mezclante, como h es homeomorfismo entonces $g = h \circ g \circ h^{-1}$ es composición de fucnciones continuas y suprayectivas, por tanto g es un mapeo en Y. Para ver que g es mezclante, sean $U, V \subseteq Y$ abiertos no vacíos, luego $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos de X por lo cual existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$ si $k \geq n$. Entonces, para todo $k \geq n$ se cumple que

$$\begin{aligned} g^k(U) \cap V &= g^k(h(h^{-1}(U))) \cap h(h^{-1}(V)) = h(f^k(h^{-1}(U))) \cap h(h^{-1}(V)) \\ &= h(f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V)) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Lo cual muestra que g es mezclante. El converso es totalmente análogo pues $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

b) La prueba es similar a la del inciso a).

□

Proposición 4.34. *Existe $\alpha : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ un mapeo débilmente mezclante pero no mezclante.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de los números naturales compuestos. Consideremos el mapeo $\sigma_{\mathcal{C}} : X_{\mathcal{C}} \longrightarrow X_{\mathcal{C}}$, puesto que $\mathbb{N} - X_{\mathcal{C}}$ contiene a los números primos, entonces $\mathbb{N} - X_{\mathcal{C}}$ es infinito y por la proposición 4.32, tenemos que $\sigma_{\mathcal{C}}$ no es mapeo mezclante. Para mostrar que $\sigma_{\mathcal{C}}$ sí es mapeo débilmente mezclante, por la proposición 4.31, es suficiente mostrar que $\mathcal{C}$ es un subconjunto repleto: para ello sea $F = \{a_1, \ldots, a_m\}$ un subconjunto finito de naturales donde $|F| = m \in \mathbb{N}$, defínase

$$k = \begin{cases} a_1 + 2 & \text{si } \ 1 \leq m = 1 \\ \prod_{i=1}^{m}(a_i + 1) + 1 & \text{si } \ m \geq 2 \end{cases}$$

si $m = 1$ entonces $a_1 + k = 2(a_1 + 1)$ es un número compuesto pues $a_1 + 1 \geq 2$ por lo que $F + k \subseteq \mathcal{C}$, en otro caso, si $m \geq 2$ entonces para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que

$$a_i + k = (a_i + 1)\left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m}(a_j + 1) + 1\right)$$

el cual también resulta el producto de dos números mayores que 1, por lo que $a_i + 1 \in \mathcal{C}$ y así $F + k \subseteq \mathcal{C}$, lo que muestra que es repleto y por tanto $\sigma_{\mathcal{C}}$ es débilemte mezclante. Por el corolario 4.28 sabemos que Σ y $X_{\mathcal{C}}$ son homeomorfos, luego existe $h : \Sigma \longrightarrow X_{\mathcal{C}}$ un homeomorfismo, luego si definimos $\alpha = h^{-1} \circ \sigma_{\mathcal{C}} \circ h : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, por la proposición 4.33, resulta que α es débilmente mezclante pero no es mezclante. □

Para terminar consideremos $f : \Sigma \times [0,1] \longrightarrow \Sigma \times [0,1]$ de tal forma que $f(x,t) = (\alpha(x), \beta(t))$ para todo $(x,t) \in \Sigma \times [0,1]$ y donde $\beta : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es un mapeo mezclante tal que $\beta^{-1}(0) = \{0\}$ y α como en la proposición 4.34. De las proposiciones 2.13 y 4.12 sabemos que f resulta en un mapeo débilmente mezclante y *bien portado*, por la proposición 2.12 puesto que α no es mezclante entonces f tampoco lo puede ser. En síntesis, f es un mapeo débilmente mezclante, *bien portado* pero no mezclante. Como $f(\Sigma \times \{0\}) = \Sigma \times \{0\}$ (véase 4.13) esta función pasa al cociente y podemos definir $F : C(\mathcal{K}(\Sigma)) \longrightarrow C(\mathcal{K}(\Sigma))$ como $F([x,t]) = [f(x,t)]$ para todo $(x,t) \in \Sigma \times [0,1]$, la cual cumple con $F \circ \rho = \rho \circ f$, por la proposición 4.14 la función F es un mapeo débilmente mezclante pues f

es débilmente mezclante y *bien portado*, sin embargo como f no es mezclante, de la proposición 4.16 concluimos que F no es mezclante. Lo que exhibe nuestro ejemplo buscado.

Capítulo 5

Continuos tipo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ generalizado

En este capítulo se abordan los continuos llamados *tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado*, éstos proveen (como su nombre sugiere) una generalización al conocido continuo *la curva del topólogo*.en éstos continuos, se probarán ciertas peculiaridades semejantes a las de una gráfica y concluiremos que (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2) del teorema 2.9, mientras que la implicación (2) $\Longrightarrow$ (1) no es en general cierta para este tipo de continuos, proveyendo un ejemplo.

Comencemos con la definición de una función monótona.

Definición 5.1. *Una función continua $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ entre dos espacios topológicos se dice monótona si para todo $y \in Y$ el subespacio $f^{-1}(\{y\})$ es conexo.*

Proposición 5.1. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo cerrado, entonces f es monótona si y sólo si para todo conexo $C \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(C)$ es conexo.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos primero que f es monótona, sea $C \subseteq Y$ conexo, supongamos que $A, B \subseteq X$ son cerrados ajenos tales que $f^{-1}(C) \subseteq A \cup B$ queremos probar que $f^{-1}(C) \subseteq A$ o $f^{-1}(C) \subseteq B$. Así bien como f es suprayectiva se sigue que $C = f(f^{-1}(C)) \subseteq f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ y entonces $C = P \cup Q$ donde $P = f(A) \cap C$ y $Q = f(B) \cap C$.

Se afirma que $P \cap Q = \emptyset$, pues si por el contrario existen $y \in P \cap Q = f(A) \cap f(B) \cap C$ entonces $y = f(a) = f(b) \in C$ para algunos $a \in A$ y $b \in B$, nótese además que $a, b \in f^{-1}(\{y\})$ y que del hecho $y \in C$ se sigue $f^{-1}(\{y\}) \subseteq f^{-1}(C) \subseteq A \cup B$ pero al ser f monótona, $f^{-1}(\{y\})$ es un conexo contenido en la unión de dos cerrados ajenos, luego necesariamente ocurre que $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$ o $f^{-1}(\{y\}) \subseteq B$, en el primer caso tendríamos que $b \in A \cap B$ mientras que en el segundo que $a \in A \cap B$ en cualquier caso contradiciendo que A y B son ajenos, por tanto $P \cap Q = \emptyset$.

Ahora bien, como f es cerrada, $f(A)$ y $f(B)$ son cerrados en Y por lo que P, Q son cerrados ajenos en C, como C es conexo se tiene necesariamente que P o Q alguno es vacío, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $Q = \emptyset$ por tanto $C \cap f(B) = \emptyset$ y entonces $f^{-1}(C) \cap B \subseteq f^{-1}(C) \cap f^{-1}(f(B)) = f^{-1}(C \cap f(B)) = \emptyset$ por lo cual $f^{-1}(C) \cap B = \emptyset$ lo que prueba, combinado con $f^{-1}(C) \subseteq A \cup B$, que $f^{-1}(C) \subseteq A$ y por tanto $f^{-1}(C)$ es conexo.

$\Longleftarrow$] Recíprocamente suponiendo que para todo conexo $C \subseteq Y$ se tiene que $f^{-1}(C)$ es conexo. Luego para todo $y \in Y$, entonces sabemos que $\{y\}$ es un conexo, por tanto $f^{-1}(\{y\})$ es conexo, y por consiguiente f es monótona. $\square$

El siguiente corolario es inmediato de la proposición 5.1:

Corolario 5.2. *Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son mapeos monótonos en continuos, entonces $g \circ f$ es monótona.*

Demostración. Como X, Y, Z son continuos, en particular son compactos y T_2, por lo que los mapeos f, g son también mapeos cerrados. Para ver que $g \circ f$ es monótona, sea $z \in Z$, entonces $g^{-1}(\{z\})$ es un conexo en Y pues g es monótono. Como f es un mapeo cerrado y monótono, por la proposición 5.1 se tiene que $(g \circ f)^{-1}(\{z\}) = f^{-1}(g^{-1}(\{z\}))$ es un conexo en X. Mostrando así que $g \circ f$ es monótona. $\square$

5.1. Definición y propiedades

Definición 5.2. *Un continuo X es un continuo tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado si existe una gráfica G y un mapeo monótono $\phi : X \longrightarrow G$ que cumple las siguientes dos propiedades:*

(1) $\phi^{-1}(D)$ es denso en X donde $D := \{g \in G : \phi^{-1}(\{g\})$ es degenerado$\}$;

(2) para cualesquiera $g \in G$, Y subcontinuo de $\phi^{-1}(\{g\})$ y $\varepsilon > 0$, existe un arco $[a, b] \subseteq G$ tal que $d_H(Y, \phi^{-1}([a, b])) < \varepsilon$.

A los subcontinuos $\phi^{-1}(g)$ que no sean degenerados se les llamará fibras límites, en el caso particular cuando éstos resulten ser arcos recibirán el nombre de barras límites. Una observación inmediata es que, como mapeos mandan subconjuntos densos en subconjuntos densos, entonces $D = \phi(\phi^{-1}(D))$ es denso en G. Además como ϕ es mapeo (en particular suprayectiva) se sigue que $|X| \geq |G| > 1$ pues toda gráfica es no degenerada, entonces X siempre es un continuo no degenerado. Por

simplicidad denotaremos $\phi^{-1}(g) = \phi^{-1}(\{g\})$, en algunas ocasiones cuando $\phi^{-1}(g)$ conste de un solo punto nos referiremos a éste con la misma notación. De la definición, mostrar que $x \in \phi^{-1}(D)$ es equivalente a mostrar que $\phi^{-1}(\phi(x)) = \{x\}$ y como la contención $\{x\} \subseteq \phi^{-1}(\phi(x))$ es válidad para cualquier función, basta demostrar que $\phi^{-1}(\phi(x)) \subseteq \{x\}$.

Como ejemplos sencillos, toda gráfica es un un continuo tipo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ generalizado, pues la función identidad en la gráfica cumple las propiedades enunciadas en la definición 5.2. A continuación veremos que el continuo *la curva del topólogo* es uno de estos continuos, lo cual explica que la definición es una generalización de éste.

Para los siguientes ejemplos, y a lo largo de la siguiente sección utilizaremos el plano $\mathbb{R}^2$, al cual consideraremos con la topología euclidiana inducida por la métrica $d = d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$ tal que $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \operatorname{máx}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. Consideremos las proyecciones $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, esto es, $\pi_1(x, y) = x$ y $\pi_2(x, y) = y$.

Ejemplo 5.3. ***La curva del topólogo.*** *(Figura 5.1). Se define como el continuo*

$$X = \{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right) : x \in (0, 1] \right\}.$$

Considérese la función proyección $\phi : X \longrightarrow [0, 1]$, es decir $\phi(x, y) = x$ para todo

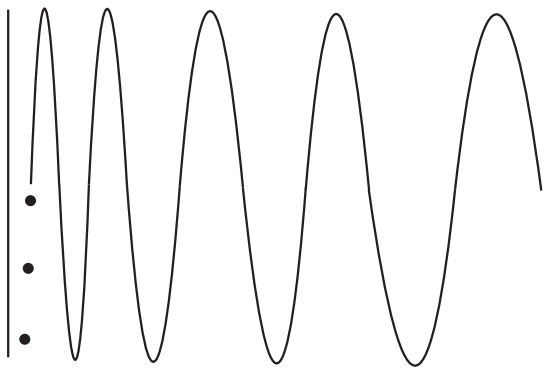

Figura 5.1: Curva del topólogo

$(x,y) \in X$. *Este es un mapeo del continuo* X *en la gráfica* $[0,1]$, *es monótona pues*

$$\phi^{-1}(t) = \begin{cases} \{0\} \times [-1,1] & \text{si } t = 0, \\ \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right)\right\} & \text{si } t \in (0,1]. \end{cases}$$

Nótese que $(0,1] = \{t \in [0,1] : \phi^{-1}(\{t\})$ *es degenerado*$\}$ *cumple que*

$$\phi^{-1}((0,1]) = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}$$

es denso en X. *Por último, para verificar la segunda propiedad de la definición, consideremos* $\varepsilon > 0$.

Si $t \in (0,1]$ *entonces el único subcontinuo de* $\phi^{-1}(t)$ *es él mismo así bien sea* $\varepsilon' = \text{mín}\{t, \varepsilon\} > 0$ *y de la continuidad de la función* $f(x) = (x, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right))$ *en* $(0,1]$ *existe* $0 < \delta < \varepsilon'$ *tal que* $f([t-\delta, t+\delta]) \subseteq B_\varepsilon^X(f(t))$. *Puesto que* $f : (0,1] \longrightarrow f((0,1])$ *es biyección con inversa* ϕ *se sigue que* $\phi^{-1}([t-\delta, t+\delta]) \subseteq B_\varepsilon^X(\phi^{-1}(t)) = N_\varepsilon(\phi^{-1}(t))$ *y como* $\phi^{-1}(t) \subseteq \phi^{-1}([t-\delta, t+\delta])$, *entonces concluimos que* $d_H(\phi^{-1}([t-\delta, t+\delta]), \phi^{-1}(t)) < \varepsilon$.

Ahora para $t = 0$, *sea* $\{0\} \times [a,b] \subseteq \phi^{-1}(0) = \{0\} \times [-1,1]$ *un subcontinuo. Sea* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{n} < \varepsilon$ *puesto que la función seno es inyectiva y monótona en los intervalos de la forma* $\left[(k+\frac{1}{2})\pi, (k+1+\frac{1}{2})\pi\right]$ *con* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces existe un intervalo* $[c,d] \subseteq \left[\frac{1}{n+1+\frac{1}{2}}, \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right] \subseteq (0,\varepsilon)$ *tal que si* $f_2 : (0,1] \longrightarrow [-1,1]$ *es la función* $f_2(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ *entonces* $f_2([c,d]) = [a,b]$, *que de otro modo se traduce a que* $\pi_2(\phi^{-1}([c,d])) = [a,b] = \pi_2(\{0\} \times [a,b])$, *y como* $\pi_1(\phi^{-1}([c,d])) = [c,d] \subseteq (0,\varepsilon)$ *entonces* $\{0\} \times [a,b] \subseteq N_\varepsilon(\phi^{-1}([c,d]))$ *y* $\phi^{-1}([c,d]) \subseteq N_\varepsilon(\{0\} \times [a,b])$, *en conclusión* $d_H(\phi^{-1}([c,d]), \{0\} \times [a,b]) < \varepsilon$. *Lo que muestra el ejemplo.*

A continuación veamos como modificar el seno del topólogo continuamente, esto nos ayudará para el ejemplo requerido en la siguiente sección:

Ejemplo 5.4. *Consideremos* $A = \{t_0\} \times [a,a']$, $B = \{t_1\} \times [b,b']$, $[t_0,p], [t_1,q]$ *arcos. Supongamos que* $f : (t_0,p] \longrightarrow [a,a']$ *es un mapeo y sea*

$$X = A \cup \{(x, f(x)) : x \in (t_0,p]\}$$

un continuo tipo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado con la función* $\phi = \pi_1|_X : X \longrightarrow [t_0,p]$ *cumpliendo las propiedades de la definición. Sean* $h : [t_1,q] \longrightarrow [t_0,p]$ *y* $j : [a,a'] \longrightarrow [b,b']$ *mapeos estrictamente crecientes (en particular son biyectivos, y como sus dominios y codominios son arcos, resultan homeomorfismos) y consideremos el*

mapeo $g = j \circ f \circ h|_{(t_1,q]} : (t_1, q] \longrightarrow [b, b']$. *Sean*

$$Y = B \cup \{(x, g(x)) : x \in (t_1, q]\}$$

y la función $F : X \longrightarrow Y$ *tal que* $F(t_0, t) = (t_1, j(t))$ *si* $(t_1, t) \in A$ *y* $F(x, f(x)) = (h^{-1}(x), g(h^{-1}(x)))$ *si* $x \in (t_0, p]$. *Lo que se afirma es que* $\rho = \pi_1|_Y : Y \longrightarrow [t_1, q]$ *es un mapeo monótono que hace a* Y *un continuo tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado, y que* F *es un homeomorfismo. Primero veamos que* F *es biyectiva y continua, la biyectividad es sencilla pues podemos dar la función inversa, en efecto* $F^{-1} : Y \longrightarrow X$ *dada por* $F^{-1}(t_1, s) = (t_0, j^{-1}(s))$ *si* $(t_1, s) \in B$ *y* $F^{-1}(x, g(x)) = (h(x), f(h(x)))$ *si* $x \in (t_1, q]$, *resulta ser la inversa de* F. *Para ver que la función es continua, basta reescribir* F *de otra forma, en efecto si* $(x, y) \in X$ *entonces* $F(x, y) = (h^{-1}(x), j(y))$, *la definición de* F *coincide en* A, *si* $(x, y) \in X - A$ *entonces nótese que* $y = f(x)$ *y así* $j(y) = j(f(x)) = g(h^{-1}(x))$. *Puesto que* F *es continua y* X *es un continuo, se sigue que* $Y = F(X)$ *es un continuo, más aún al ser biyección se sigue que* F *es homeomorfismo como queríamos ver. Finalmente verifiquemos que* Y *es un continuo tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado, para ello primero obsérvese que* $h^{-1} \circ \phi = \rho \circ F$ *y de forma más general tenemos el siguiente resultado:*

Proposición 5.5. *Sean* X, Y *continuos,* G, G' *gráficas y* $\alpha : X \longrightarrow Y, \beta : G \longrightarrow G'$ *homeomorfismos. Sean* ϕ, ρ *mapeos tales que* $\beta \circ \phi = \rho \circ \alpha$. *Supongamos que* X *es un continuo tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado con* ϕ *satisfaciendo la definición, entonces* Y *es un continuo tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado.*

Demostración. Puesto que ϕ, α^{-1}, β son mapeos monótonos entre continuos (los últimos dos por ser homeomorfismos) se sigue del corolario 5.2 que $\rho = \beta \circ \phi \circ \alpha^{-1}$ es monótona. Para la primera condición, sea $D = \{g \in G' : \rho^{-1}(g)$ es degenerado$\}$, queremos ver que $\rho^{-1}(D)$ es denso en Y y puesto que α es un homeomorfismo, basta mostrar que $\alpha^{-1}(\rho^{-1}(D))$ es denso en X, y para esto considérese $E = \{k \in G : \phi^{-1}(k)$ es degenerado$\}$, mostremos que $\phi^{-1}(E) = \alpha^{-1}(\rho^{-1}(D))$ lo que por hipótesis demuestra lo que se afirma. Sea $x \in \phi^{-1}(E)$ entonces esto significa que $\phi^{-1}(\phi(x)) = \{x\}$, queremos mostrar que $\alpha(x) \in \rho^{-1}(D)$ lo cual es equivalente a que $\rho^{-1}(\rho(\alpha(x))) \subseteq \{\alpha(x)\}$; así bien consideremos $y \in \rho^{-1}(\rho(\alpha(x)))$ entonces $\beta(\phi(\alpha^{-1}(y))) = \phi(\alpha(\alpha^{-1}(y))) = \rho(y) = \rho(\alpha(x)) = \beta(\phi(x))$ y como β es homeomorfismo, se sigue que $\phi(\alpha^{-1}(y)) = \phi(x)$ lo cual muestra que $\alpha^{-1}(y) \in \phi^{-1}(\phi(x)) = \{x\}$ entonces $y = \alpha(x)$ lo cual queríamos mostrar, y por tanto $x \in \alpha^{-1}(\rho^{-1}(D))$. De modo inverso si $x \in \alpha^{-1}(\rho^{-1}(D))$ entonces $\rho^{-1}(\rho(\alpha(x))) = \{\alpha(x)\}$, mostremos que $\phi^{-1}(\phi(x)) \subseteq \{x\}$, sea $z \in \phi^{-1}(\phi(x))$ entonces $\phi(z) = \phi(x)$ lo cual implica que

$\rho(\alpha(z)) = \beta(\phi(z)) = \beta(\phi(x)) = \rho(\alpha(x))$ y por tanto $\alpha(z) \in \rho^{-1}(\rho(\alpha(x))) = \{\alpha(x)\}$ por lo que $\alpha(z) = \alpha(x)$ y como α es un homeomorfismo, concluimos que $z = x$ lo que muestra la contención y a su vez que $x \in \phi^{-1}(E)$. Por tanto $\rho^{-1}(D)$ es denso en Y.

Ahora mostremos la segunda parte de la definición, sean $g \in G'$, $\varepsilon > 0$ y $C \subseteq \rho^{-1}(g)$ un subcontinuo. Del lema 1.8 existe $\delta > 0$ tal que si $\emptyset \neq U, V \subseteq X$ son tales que $d_H^X(U,V) < \delta$ entonces $d_H^Y(\alpha(U), \alpha(V)) < \varepsilon$. Nótese que $\alpha^{-1}(C) \subseteq \alpha^{-1}(\rho^{-1}(g)) = \phi^{-1}(\beta^{-1}(g))$ donde $\beta^{-1}(g) \in G$ pues β e sun homeomorfismo, así como α es homeomorfismo resulta que $\alpha^{-1}(C)$ es un subcontinuo, y de la hipótesis existe un arco $[a,b] \subseteq G$ tal que $d_H^X(\alpha^{-1}(C), \phi^{-1}([a,b])) < \delta$ y por tanto $d_H^Y(C, \alpha(\phi^{-1}([a,b]))) < \varepsilon$. Por último, veamos que

$$\rho^{-1}(\beta([a,b])) = \alpha(\alpha^{-1}(\rho^{-1}(\beta([a,b])))) = \alpha(\phi^{-1}(\beta^{-1}(\beta([a,b])))) = \alpha(\phi^{-1}([a,b]))$$

y $\beta([a,b])$ es un arco en G', por ello $d_H^Y(C, \rho^{-1}(\beta([a,b]))) < \varepsilon$. Lo que termina esta proposición. $\square$

Regresando a nuestro ejemplo, y usando que h y F son homeomorfismos tales que $h^{-1} \circ \phi = \rho \circ F$ concluimos que Y es un continuo tipo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado concluyendo este ejemplo.*

El ejemplo 5.4 en realidad debe resultar intuitivo (véase la figura ...), pero es necesario formalizarlo debido a que en el ejemplo de la siguiente sección esta será nuestra mayor herramienta de construcción. En nuestro ejemplo, los conjuntos A y B son *barras límites*. Cabe añadir que en el ejemplo 5.4, podemos cambiar de forma apropiada la hipótesis de las funciones h y j por monótonas decrecientes o combinarlas, lo esencial del ejemplo es colocar *"bien"* las barras límites.

Como últimos ejemplos, presentemos la doble curva del topólogo con una y con dos barras límites.

Ejemplo 5.6. *Al continuo construido como $X = X_1 \cup X_2$ donde*

$$X_1 = \left\{\left(-x, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\} \cup \{0\} \times [-1,1]$$

$$X_2 = \{0\} \times [-1,1] \cup \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}$$

lo llamaremos la doble curva del topólogo con una barra límite (véase la figura 5.2).

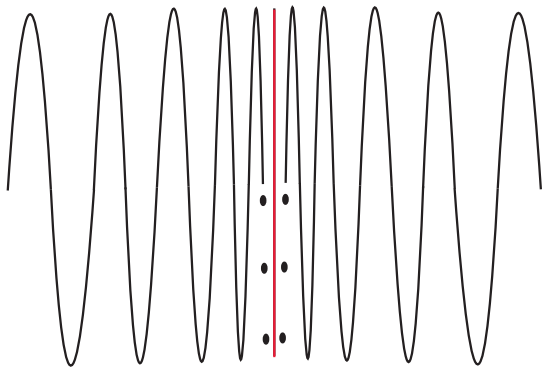

Figura 5.2: Doble curva del topólogo con una barra límite

Mientras que al continuo $Y = Y_1 \cup Y_2$ *donde*

$$Y_1 = \{-1\} \times [-1,1] \cup \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x+1}\right)\right) : x \in (-1,0]\right\}$$

$$Y_2 = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{1-x}\right)\right) : x \in [0,1)\right\} \cup \{1\} \times [-1,1]$$

será la doble curva del topólogo con dos barras límite. (Figura 5.3).

Puesto que la definición de estos continuos reside en una serie de traslaciones y/o reflexiones (junto con un buen pegado de espacios) lo cual es un caso particular del ejemplo 5.4, estos ejemplos constituyen un claro ejemplo de continuos tipo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado donde el mapeo monótono, una vez más resulta ser la proyección* π_1 *en su respectivo dominio. Nótese que* X *está formada por dos copias de la curva del topólogo que se pegan en la barra límite, mientras que* Y *son dos copias de la curva del topólogo pegados por el único punto que no está en la barra límite y que no desconecta a los espacios.*

Proposición 5.7. *Si* X *es un continuo tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado entonces para todo* $g \in G$ *el conjunto* $\phi^{-1}(\{g\})$ *es denso en ninguna parte en* X.

Demostración. Por contradicción supongamos que existe $g \in G$ tal que $\phi^{-1}(\{g\})$ no es *denso en ninguna parte* de X, esto es que $\operatorname{int}_X(\phi^{-1}(\{g\})) \neq \emptyset$, así bien sea $x \in \operatorname{int}_X(\phi^{-1}(\{g\})) \subseteq \phi^{-1}(\{g\})$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon^X(x) \subseteq$

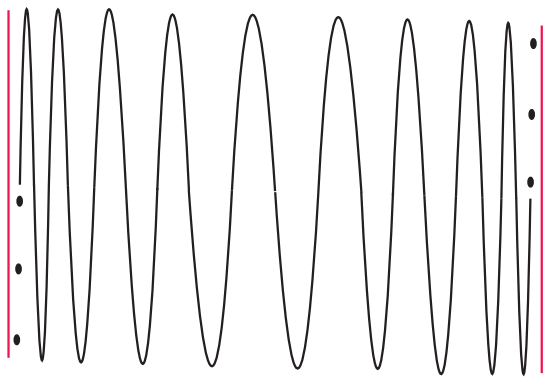

Figura 5.3: Doble curva del topólogo con dos barras límite

$\phi^{-1}(\{g\})$. Puesto que $\phi^{-1}(D)$ es denso en X, existe $y \in \phi^{-1}(D) \cap B_\varepsilon^X(x)$ y así por un lado $\phi(y) \in D$ y por el otro $y \in \phi^{-1}(\{g\})$ por lo que $\phi(y) = g$, entonces $g \in D$ por tanto $\phi^{-1}(\{g\})$ es un conjunto degenerado, es decir, consiste de un sólo punto y como $x \in \phi^{-1}(\{g\})$ se sigue que $\phi^{-1}(\{g\}) = \{x\}$, de esto obtenemos $\{x\} \subseteq B_\varepsilon^X(x) \subseteq \phi^{-1}(\{g\}) = \{x\}$ y por tanto $\{x\} = B_\varepsilon^X(x)$ luego $\{x\}$ es un cerrado (pues X es métrico) y abierto no vacío en X que es un conexo, por lo que $X = \{x\}$ un absurdo porque X no puede ser degenerado. Concluimos que para todo $g \in G$ el conjunto $\phi^{-1}(\{g\})$ es *denso en ninguna parte* en X. $\square$

Proposición 5.8. *Sea $Y \subseteq X$ subconjunto cerrado y supongamos que $U \subseteq G$ es un abierto no vacío tal que $U \subseteq \phi(Y)$, entonces $\phi^{-1}(U) \subseteq Y$ y por tanto $\mathrm{int}_X(Y) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $x \in \phi^{-1}(U)$ entonces $\phi(x) \in U$ por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon^G(\phi(x)) \subseteq U$, de la continuidad de ϕ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $\phi(B_\delta^X(x)) \subseteq B_\varepsilon^G(\phi(x)) \subseteq U \subseteq \phi(Y)$ por ende $\phi(B_\delta^X(x)) \subseteq \phi(Y)$. Ahora bien sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \delta$ entonces para cada $n \geq N$ existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}^X(x) \cap \phi^{-1}(D)$ por tanto se tiene lo siguiente: $d_X(x_n, x) < \frac{1}{n}$ para todo $n \geq N$ y por ende $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ y además $\{x_n\}_{n \geq N} \subseteq B_\delta^X(x)$ y por tanto ocurre que $\phi(x_n) \in \phi(Y)$ lo cual junto con $x_n \in \phi^{-1}(D)$ implica $x_n \in Y$ y esto para todo $n \geq N$, así bien en resumidas cuentas tenemos que $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ y $\{x_n\}_{n \geq N} \subseteq Y$ y usando que Y es un cerrado concluimos que $x \in Y$, lo que demuestra que $\phi^{-1}(U) \subseteq Y$. Por último, como U es abierto no vacío de G y ϕ es mapeo entonces $\phi^{-1}(U)$ es abierto no vacío contenido en Y lo cual implica $\mathrm{int}_X(Y) \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 5.9. *Si X es un continuo tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado, entonces el conjunto*

$$\mathcal{H} := \{Y \in C(X) : int(Y) \neq \emptyset\}$$

es denso en $C(X)$.

Demostración. Primero hagamos la siguiente observación que se deduce de la proposición 5.8, si $Y \in C(X)$ es tal que existe un intervalo abierto $(a, b) \subseteq G$ tal que $(a, b) \subseteq \phi(Y)$ entonces $Y \in \mathcal{H}$.

Para probar la proposición basta probar que si $Y \in C(X) - \mathcal{H}$ y $\epsilon > 0$ entonces existe $W \in \mathcal{H}$ tal que $d_H(Y, W) < \varepsilon$. Así bien consideremos $Y \in C(X) - \mathcal{H}$ y $\varepsilon > 0$. Se afirma que ϕ es constante en Y, es decir existe $g \in G$ tal que $Y \subseteq \phi^{-1}(\{g\})$, supongamos por contradicción que esto no ocurre entonces existen $x, y \in Y$ tales que $\phi(x) \neq \phi(y)$ lo cual quiere decir que $\phi(Y)$ es un conexo no degenerado de G, como G es una gráfica se sabe que los conexos no degenerados contienen intervalos abiertos, entonces existe un intervalo abierto $(a.b) \subseteq \phi(Y)$ pero por la observación anterior esto implica que $Y \in \mathcal{H}$ contrario a nuestro supuesto, por tanto existe $g \in G$ tal que $Y \subseteq \phi^{-1}(\{g\})$. Usando la definición de continuo tipo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ generalizado, existe un arco $[c, d] \subseteq G$ tal que $d_H(Y, \phi^{-1}([c, d])) < \varepsilon$ así haciendo $W = \phi^{-1}([c, d])$ se tiene que éste es un conexo (pues ϕ es monótona) y cerrado (ϕ es continua) en X y por tanto igual es compacto, así tenemos que $W = \phi^{-1}([c, d]) \in C(X)$ pero además como ϕ es suprayectiva se cumplen las contenciones $(c, d) \subseteq [c, d] = \phi(\phi^{-1}([c, d])) \subseteq \phi(W)$ lo cual implica que $W \in \mathcal{H}$, concluyendo la demostración. $\square$

Proposición 5.10. *Sea U abierto no vacío de X. Entonces existe abierto no vacío de V de G tal que $\phi^{-1}(V) \subseteq U$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que para todo abierto no vacío V de G se tiene que $\phi^{-1}(V) \nsubseteq U$. Recordemos que por definición, el conjunto $D = \{g \in G : \phi^{-1}(\{g\})$ es degenerado$\}$ cumple que $\phi^{-1}(D)$ es denso en X, así bien sea $x \in U \cap \phi^{-1}(D)$. Por nuestro supuesto tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}, \phi^{-1}(B^G_{\frac{1}{n}}(\phi(x))) \nsubseteq U$ esto quiere decir que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un elemento $x_n \in \phi^{-1}(B^G_{\frac{1}{n}}(\phi(x))) - U$ por lo que $d_G(\phi(x_n), \phi(x)) < \frac{1}{n}$ y $x_n \notin U$, a su vez esto implica que $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x)$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es una sucesión convergente digamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = y \in X$, además como $x_n \in X - U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $X - U$ es un cerrado en X, entonces $y \in X - U$ de lo cual se desprende que $x \neq y$ (pues $x \in U$). Por

último nótese que

$$\phi(y) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x)$$

lo que implica que $x = y$ puesto que $x \in \phi^{-1}(D)$, una contradicción. Por tanto existe abierto no vacío de V de G tal que $\phi^{-1}(V) \subseteq U$. $\square$

Corolario 5.11. *Si U abierto no vacío de X entonces existe un arco libre $[a,b] \subseteq G$ (y por ende un intervalo abierto en G, a saber, (a,b)) tal que $\phi^{-1}((a,b)) \subseteq \phi^{-1}([a,b]) \subseteq U$.*

Demostración. Por la proposición 5.10 existe un abierto no vacío de G digamos V tal que $\phi^{-1}(V) \subseteq U$, por ser V abierto de una gráfica, se sabe que existe un arco libre $[a,b] \subseteq V$, por lo que $\phi^{-1}((a,b)) \subseteq \phi^{-1}([a,b]) \subseteq \phi^{-1}(V) \subseteq U$. $\square$

Proposición 5.12. *Sea G una gráfica y $C \subseteq G$ un subespacio conexo no degenerado y $U \subseteq G$ abierto, si $U \cap C \neq \emptyset$ entonces $U \cap int(C) \neq \emptyset$.*

Demostración. La razón principal de esta demostración reside en el hecho de que los abiertos no vacíos de los arcos son subconjuntos no degenerados. Así bien, para la demostración sea $x \in U \cap C$, puesto que C es no degenerado existe $y \in C - \{x\}$, como G es una gráfica y C es un conexo de ésta, existe un arco con extremos x y y, digamos $[x,y]$ contenido en C, además podemos suponer que es un arco libre (con la correcta elección del punto y). Luego $U \cap [x,y]$ es un abierto no vacío de $[x,y]$ (pues $x \in U \cap [x,y]$) y por tanto podemos considerar $z \in U \cap (x,y)$, pero $U \cap (x,y)$ es un abierto de G y está contenido en C, esto muestra que $z \in \mathrm{int}(C)$ y por tanto $z \in U \cap \mathrm{int}(C)$ lo cual termina la demostración. $\square$

Proposición 5.13. *Supongamos que $f : G \longrightarrow G$ es un mapeo débilmente mezclante y $F : X \longrightarrow X$ un mapeo tal que $f \circ \phi = \phi \circ F$. Entonces F es débilmente mezclante.*

Demostración. Sean U_1, V_1, U_2, V_2 abiertos no vacíos de X. Por el corolario 5.11 existen abiertos conexos no vacíos de G, digamos A_1, B_1, A_2, B_2 tales que

$$\phi^{-1}(A_i) \subseteq \phi^{-1}\left(\overline{A_i}\right) \subseteq U_i$$

y

$$\phi^{-1}(B_i) \subseteq \phi^{-1}\left(\overline{B_i}\right) \subseteq V_i$$

para $i = 1, 2$. Ahora, ya que $\phi^{-1}\left(\overline{A_1}\right)$ es un cerrado, y por ende compacto en X y $\phi^{-1}\left(\overline{A_1}\right) \subseteq U_1$ del hecho de que X es un espacio regular (por ser métrico), entonces

sabemos que existe W_1 abierto de X tal que

$$\phi^{-1}\left(\overline{A_1}\right) \subseteq W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq U_1,$$

del mismo modo existe W_2 abierto de X tal que

$$\phi^{-1}\left(\overline{A_2}\right) \subseteq W_2 \subseteq \overline{W_2} \subseteq U_2,$$

lo anterior implica que, dado que ϕ es suprayectiva;

$$A_i \subseteq \overline{A_i} \subseteq \phi\left(\overline{W_i}\right)$$

para $i = 1, 2$.

Como f es débilmente mezclante, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(A_i) \cap B_i \neq \emptyset$ si $i = 1, 2$. Entonces

$$\operatorname{int}(f^m(A_i)) \subseteq f^m(A_i) \subseteq f^m\left(\phi\left(\overline{W_i}\right)\right) = \phi\left(F^m\left(\overline{W_i}\right)\right)$$

para $i = 1, 2$. De la proposición 5.8, como $\operatorname{int}(f^m(A_i)) \subseteq \phi\left(F^m\left(\overline{W_i}\right)\right)$, y $F^m\left(\overline{W_i}\right)$ es un cerrado de X y $\operatorname{int}(f^m(A_i))$ es un abierto de G, se sigue que $\phi^{-1}(\operatorname{int}(f^m(A_i))) \subseteq F^m\left(\overline{W_i}\right)$ y por tanto

$$\phi^{-1}(\operatorname{int}(f^m(A_i))) \subseteq F^m(U_i)$$

si $i = 1, 2$.

Entonces

$$F^m(U_i) \cap V_i \supseteq \phi^{-1}(\operatorname{int}(f^m(A_i))) \cap \phi^{-1}(B_i) = \phi^{-1}(\operatorname{int}(f^m(A_i)) \cap B_i)$$

pero como $f^m(A_i) \cap B_i \neq \emptyset$ y A_i es conexo, luego $f^m(A_i)$ también es conexo, y dado que A_i es abierto de una gráfica y en particular f es transitiva, tenemos de la proposición 1.25 que $f^m(A_i)$ es un conexo no degenerado, así que aplicando la proposición 5.12 se sigue que $\operatorname{int}(f^m(A_i)) \cap B_i \neq \emptyset$, por último usando que ϕ es suprayectiva concluimos que

$$F^m(A_i) \cap B_i \supseteq \phi^{-1}(\operatorname{int}(f^m(A_i)) \cap B_i) \neq \emptyset$$

para $i = 1, 2$, lo cual muestra que F es débilmente mezclante. $\square$

Lema 5.14. *Sea $[a, b] \subseteq G$ arco libre. Si $C \subseteq X$ es un conexo y cerrado y $a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < b$ son tales que $\phi^{-1}((a, x_1)) \cap C \neq \emptyset$ y $\phi^{-1}((y_1, x_2)) \cap C \neq \emptyset$, entonces*

$\phi^{-1}((x_1, y_1)) \subseteq C$ *o* $\phi^{-1}((x_2, y_2)) \subseteq C$.

Demostración. De la hipótesis se sigue que $(a, x_1) \cap \phi(C) \neq \emptyset$ y $(y_1, x_2) \cap \phi(C) \neq \emptyset$ y del lema 3.3 se tiene que $(x_1, y_1) \subseteq \phi(C)$ o $(x_2, y_2) \subseteq \phi(C)$ y haciendo uso de la proposición 5.8 se sigue que $\phi^{-1}((x_1, y_1)) \subseteq C$ o $\phi^{-1}((x_2, y_2)) \subseteq C$. $\square$

Teorema 5.15. *Sea $f : X \longrightarrow X$ mapeo en un continuo tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado.*

a) Sea $[a, b] \subseteq G$. Si f es débilmente mezclante entonces existen $a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < b$ y $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $(x_1, y_1) \subseteq f^n((x_1, y_1))$ y $(x_1, y_1) \subseteq f^m((x_1, y_1))$.

b) Si f es débilmente mezclante entonces f es mezclante.

c) Si f es mezclante entonces f es débil completamente expansivo por continuos.

Demostración. a) Consideremos $a < w_1 < z_1 < w_2 < z_2 < \frac{a+b}{2}$. Sean $w_1 < r < s < z_1$ y consideremos los siguientes abiertos conexos no vacíos de X (pues ϕ es mapeo monótono):

$$\phi^{-1}((a, w_1)), \phi^{-1}((r, s)), \phi^{-1}((z_1, w_2)), \phi^{-1}(((r, s)),$$

entonces para estos dos pares de abiertos, por ser f débilmente mezclante, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi^{-1}((a, w_1)) \cap f^p(\phi^{-1}((r, s))) \neq \emptyset$$

$$\phi^{-1}((z_1, w_2)) \cap f^p(\phi^{-1}((r, s))) \neq \emptyset$$

de lo cual se sigue que

$$\phi^{-1}((a, w_1)) \cap f^p(\phi^{-1}([r, s])) \neq \emptyset$$

$$\phi^{-1}((z_1, w_2)) \cap f^p(\phi^{-1}([r, s])) \neq \emptyset,$$

como f es continua y cerrada, y $\phi^{-1}([r, s])$ es conexo cerrado, entonces $f^p(\phi^{-1}([r, s]))$ es conexo cerrado, por tanto por el lema 5.14 sabemos que ocurre alguna de las siguientes contenciones: $\phi^{-1}((w_1, z_1)) \subseteq f^p(\phi^{-1}([r, s]))$ o $\phi^{-1}((w_2, z_2)) \subseteq f^p(\phi^{-1}([r, s]))$ y como $[r, s] \subseteq (w_1, z_1)$, se sigue que

$$\phi^{-1}((w_1, z_1)) \subseteq f^p(\phi^{-1}((w_1, z_1))) \quad \text{o} \quad \phi^{-1}((w_2, z_2)) \subseteq f^p(\phi^{-1}((w_1, z_1))).$$

De manera análoga se demuestra que existe $q \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\phi^{-1}((w_1, z_1)) \subseteq f^q(\phi^{-1}((w_2, z_2))) \quad \text{o} \quad \phi^{-1}((w_2, z_2)) \subseteq f^q(\phi^{-1}((w_2, z_2))).$$

Así bien tenemos cuatro casos posibles:

(1) $\phi^{-1}((w_1, z_1)) \subseteq f^p(\phi^{-1}((w_1, z_1)))$ y $\phi^{-1}((w_1, z_1)) \subseteq f^q(\phi^{-1}((w_2, z_2)))$,

(2) $\phi^{-1}((w_1, z_1)) \subseteq f^p(\phi^{-1}((w_1, z_1)))$ y $\phi^{-1}((w_2, z_2)) \subseteq f^q(\phi^{-1}((w_2, z_2)))$,

(3) $\phi^{-1}((w_2, z_2)) \subseteq f^p(\phi^{-1}((w_1, z_1)))$ y $\phi^{-1}((w_1, z_1)) \subseteq f^q(\phi^{-1}((w_2, z_2)))$,

(4) $\phi^{-1}((w_2, z_2)) \subseteq f^p(\phi^{-1}((w_1, z_1)))$ y $\phi^{-1}((w_2, z_2)) \subseteq f^q(\phi^{-1}((w_2, z_2)))$.

Nótese que (4) implica que $\phi^{-1}((w_1, z_1)) \subseteq f^{p+q}(\phi^{-1}((w_1, z_1)))$ y $\phi^{-1}((w_2, z_2)) \subseteq f^{p+q}(\phi^{-1}((w_2, z_2)))$, por tanto en cualquiera de los cuatro casos podemos elegir $i \in \{1, 2\}$ tal que $(w_i, z_i) \subseteq f^n((w_i, z_i))$ para algún $n \in \mathbb{N}$, así bien definamos $x_1 = w_i$ y $y_1 = z_i$ para obtener que existen $a < x_1 < y_1 < \frac{a+b}{2}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\phi^{-1}((x_1, y_1)) \subseteq f^n(\phi^{-1}((x_1, y_1)))$. Realizando el mismo razonamiento para el arco $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, se muestra que existen $\frac{a+b}{2} < x_2 < y_2 < b$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $\phi^{-1}((x_2, y_2)) \subseteq f^m(\phi^{-1}((x_2, y_2)))$. Lo que termina la demostración de este inciso.

b) Del inciso anterior, sean $a < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < b$ y $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $\phi^{-1}((x_1, y_1)) \subseteq f^n(\phi^{-1}((x_1, y_1)))$ y $\phi^{-1}((x_2, y_2)) \subseteq f^m(\phi^{-1}((x_2, y_2)))$. Mostremos que la colleción $\{\phi^{-1}((x_1, y_1)), \phi^{-1}((x_2, y_2))\}$ cumple las hipótesis del lema 2.11. Sea U abierto no vacío de X, del corolario 5.11 existe $[c, d] \subseteq G$ arco tal que $\phi^{-}([c, d]) \subseteq U$. Razonando como en el ejercicio anterior, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^{-1}((a, x_1)) \cap f^k(\phi^{-}([c, d])) \neq \emptyset$ y $\phi^{-1}((y_1, x_2)) \cap f^k(\phi^{-}([c, d])) \neq \emptyset$ y por tanto ocurre alguna de las siguientes: $\phi^{-1}((x_1, y_1)) \subseteq f^k(\phi^{-}([c, d])) \subseteq f^k(U)$ o $\phi^{-1}((x_2, y_2)) \subseteq f^k(\phi^{-}([c, d])) \subseteq f^k(U)$, lo que muestra lo que se quería. Por tanto f es mezclante.

c) Se sigue de las proposiciones 2.14 y 5.9.

$\square$

5.2. Un mapeo en un continuo tipo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ generalizado débil completamente expansivo por continuos y no completamente expansivo por continuos

Para describir la construcción de esta sección, recuérdese que utilizaremos la métrica del plano dada por d_∞ (la cual abreviaremos simplemente por d) y π_1, π_2 denotan las proyecciones canónicas del plano real en la recta real. Si $\emptyset \neq Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ son subconjuntos acotados tales que $\pi_1(Y_1) = \pi_1(Y_2)$ entonces denotaremos

$$D(Y_1, Y_2) := \sup\{|y_1 - y_2| : (x, y_1) \in Y_1, (x, y_2) \in Y_2\}.$$

Para dos arco $[a, b]$ y $[c, d]$, nos referiremos por el mapeo lineal entre $[a, b]$ y $[c, d]$ a la función

$$f(t) = \frac{d-c}{b-a}\, t + \frac{bc - ad}{b-a}$$

la cual cumple que $f(a) = c$ y $f(b) = d$.

Para nuestro ejemplo, será necesario definir la función *Tienda* en el intervalo, ésta se define como $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ tal que

$$T(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2 - 2t & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

La función tienda, aunque sencilla de definir, esconde un inmenso poder caótico en el intervalo. Se demuestra que es una función *mezclante*, más aún, sin recurrir al teorema 3.6 se puede demostrar que es *completamente expansiva por continuos* con el siguiente hecho:

Proposición 5.16. *Para la función tienda $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, si $U \subseteq [0, 1]$ es un abierto no vacío, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(U) = [0, 1]$.*

La demostración de este hecho es similar a la técnica usada en la demostración de la proposición 4.4, la prueba se puede consultar en [King y Méndez, Proposición 7.2, p. 99].

Para construir el continuo X que buscamos, primero se construirán de manera recursiva una sucesión de continuos tipo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ generalizado $\{X_n\}_{n\in\omega}$.

Construcción de X_0. Definamos $X_0 = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{1-x}\right)\right) : x \in [0, 1)\right\} \cup \{1\} \times [-1, 1]$, entonces de los ejemplos 5.3 y 5.4 se sigue que X_0 es un continuo ti-

po sen$(\frac{1}{x})$ generalizado con la función $\phi_0 = \pi_1|_{X_0}$, defínanse $Q_0 = \{1\}, C_1 = \{1\} \times [-1,1] = \phi_0^{-1}(1)$ y $L_1 = [0,1]$. Sea la función $f_1 : L_1 \longrightarrow \phi_0^{-1}(0)$ como el mapeo constante.

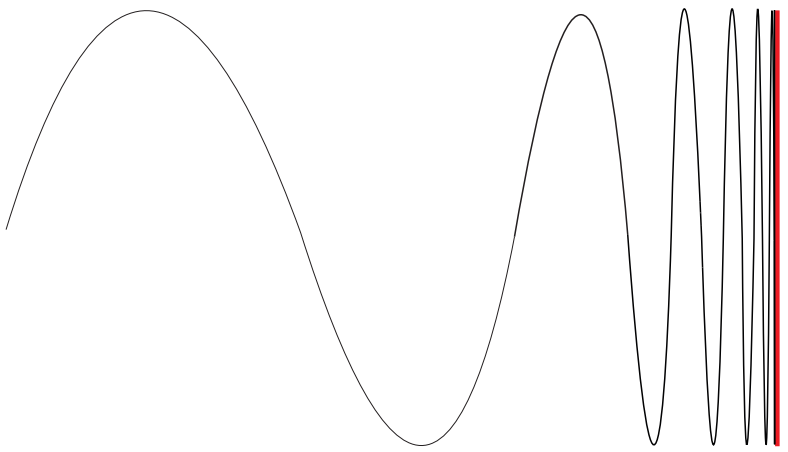

Figura 5.4: X_0. La línea roja indica el arco vertical C_1.

Construcción de X_1. Nótese que ϕ_0 es un homeomorfismo en $X_0 - \phi_0^{-1}(1)$, por tanto de la continuidad de la función inversa, existe $0 < 2\delta_1 < \frac{1}{2}$ tal que diám$\left(\phi_0^{-1}\left(\frac{1}{2} - 2\delta_1, \frac{1}{2} + 2\delta_1\right)\right) < \frac{1}{4}$. Ahora definamos $C_{\frac{1}{2}}$ el arco vertical de longitud $\frac{1}{2}$ y punto medio en $\phi_0^{-}\left(\frac{1}{2}\right)$, más precisamente es el arco $C_{\frac{1}{2}} = \left\{\pi_1\left(\phi_0^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\} \times L_{\frac{1}{2}}$ donde

$$L_{\frac{1}{2}} = \left[\pi_2\left(\phi_0^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{4}, \pi_2\left(\phi_0^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\right].$$

Consideremos el mapeo lineal $f_{\frac{1}{2}} : L_{\frac{1}{2}} \longrightarrow L_1$ entre los arcos $L_{\frac{1}{2}}$ y L_1, sean los continuos $\phi_0^{-1}\left(\left[T\left(\frac{1}{2} - \delta_1\right), T(\frac{1}{2})\right]\right) = \phi_0^{-1}\left(\left[T\left(\frac{1}{2} - \delta_1\right), 1\right]\right)$ y $\phi_0^{-1}\left(\left[T\left(\frac{1}{2} + \delta_1\right), T\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right) = \phi_0^{-1}\left(\left[T\left(\frac{1}{2} + \delta_1\right), 1\right]\right)$, no es difícil convencerse que resulta ser continuos tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado con la función ϕ_0, del ejemplo 5.4 podemos considerar un continuo tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado, digamos $X_{\frac{1}{2}}^{-}$, usando los mapeos $T|_{\left[\frac{1}{2}-\delta_1, \frac{1}{2}\right]} : \left[\frac{1}{2} - \delta_1, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \left[T\left(\frac{1}{2} - \delta_1\right), 1\right]$ y $f_{\frac{1}{2}}$ de tal forma que la función $F_{\frac{1}{2}}^{-} : X_{\frac{1}{2}}^{-} \longrightarrow \phi_0^{-1}\left(\left[T\left(\frac{1}{2} - \delta_1\right), 1\right]\right)$ dado por $F_{\frac{1}{2}}^{-}(r,s) = (T(r), f_{\frac{1}{2}}(s))$ resulte en un homeomorfismo, por último consi-

deremos el segmento de recta $I_{\frac{1}{2}}$ entre los puntos $\phi_0^{-1}\left(\frac{1}{2}-2\delta_1\right)$ y $F_{\frac{1}{2}}^{-1}\left(\phi_0^{-1}\left(T\left(\frac{1}{2}-\delta_1\right)\right)\right)$, y el segmento de recta $D_{\frac{1}{2}}$ entre los puntos $\phi_0^{-1}\left(\frac{1}{2}+2\delta_1\right)$ y $F_{\frac{1}{2}}^{-1}\left(\phi_0^{-1}\left(T\left(\frac{1}{2}+\delta_1\right)\right)\right)$. Es importante señalar que, de como se construye $F_{\frac{1}{2}}$, se tienen las sigientes composiciones: $\pi_1 \circ F_{\frac{1}{2}}^{-} = T \circ \pi_1|_{X_{\frac{1}{2}}^{-}}$ y $\pi_2 \circ F_{\frac{1}{2}}^{-} = f_{\frac{1}{2}} \circ \pi_2|_{X_{\frac{1}{2}}^{-}}$. De manera análoga construimos un continuo tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado, $X_{\frac{1}{2}}^{+}$ de forma que $\pi_1\left(X_{\frac{1}{2}}^{+}\right) = \left[\frac{1}{2}+\delta_1\right]$ y $\pi_2\left(X_{\frac{1}{2}}^{+}\right) = L_{\frac{1}{2}}$, y que cumpla que la función $F_{\frac{1}{2}}^{+} : X_{\frac{1}{2}}^{+} \longrightarrow \phi_0^{-1}\left(\left[T\left(\frac{1}{2}+\delta_1\right), 1\right]\right)$ dado por $F_{\frac{1}{2}}^{+}(r,s) = (T(r), f_{\frac{1}{2}}(s))$ es un homeomorfismo. Nuevamente por construcción se verifica las igualdades $\pi_1 \circ F_{\frac{1}{2}}^{+} = T \circ \pi_1|_{X_{\frac{1}{2}}^{+}}$ y $\pi_2 \circ F_{\frac{1}{2}}^{+} = f_{\frac{1}{2}} \circ \pi_2|_{X_{\frac{1}{2}}^{+}}$. finalmente se define

$$X_1 = \left(X_0 - \phi^{-1}\left(\frac{1}{2}-2\delta_1, \frac{1}{2}+2\delta_1\right)\right) \cup D_{\frac{1}{2}} \cup I_{\frac{1}{2}} \cup X_{\frac{1}{2}}^{-} \cup X_{\frac{1}{2}}^{+}$$

el cual resulta ser un continuo tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado con la función monótona $\phi_1 = \pi_1|_{X_1}$. De la condición diám$\left(\phi_0^{-1}\left(\frac{1}{2}-2\delta_1, \frac{1}{2}+2\delta_1\right)\right) < \frac{1}{4}$, se sigue que toda la nueva construcción, $\phi_1^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}-2\delta_1, \frac{1}{2}+2\delta_1\right]\right)$, así como la previa, $\phi_0^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}-2\delta_1, \frac{1}{2}+2\delta_1\right]\right)$, se hicieron en el rectángulo

$$\left[\frac{1}{2}-2\delta_1, \frac{1}{2}+2\delta_1\right] \times L_{\frac{1}{2}},$$

y por tanto, se deriva sin problemas que para todo $t \in [0,1) = [0,1] - Q_0$,

$$D\left(\phi_0^{-1}(t), \phi_1^{-1}(t)\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Las únicas fibras límites de X_1, son las barras límites dadas por C_1 y $C_{\frac{1}{2}}$, de allí viene que definamos ahora $Q_1 = \{\frac{1}{2}, 1\}$.

Construcción de X_{n+1}. Supongamos que para cierto $n \geq 1$ tenemos construido el continuo tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado, X_n, con el mapeo monótono $\phi_n = \pi_1|_{X_n}$ de modo que las fibras límites son de hecho barras límites y se localizan como $\phi_n^{-1}(t)$ si $t \in Q_n = \left\{\frac{k}{2^n} : k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq 2^n\right\}$.

Por un argumento similar a la construcción de X_1, existe $0 < 2\delta_n < \frac{1}{2^{n+1}}$ tal que para todo $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ se cumpla que diám$\left(\phi_n^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} - 2\delta_n, \frac{2k+1}{2^{n+1}} + 2\delta_n\right)\right) < \frac{1}{2^{n+2}}$. Ahora fijemos $k \in \{0, \ldots 2^n - 1\}$, se describirá la misma construcción que en paso uno: definamos $C_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ el arco vertical de longitud $\frac{1}{2^{n+1}}$ y punto medio en

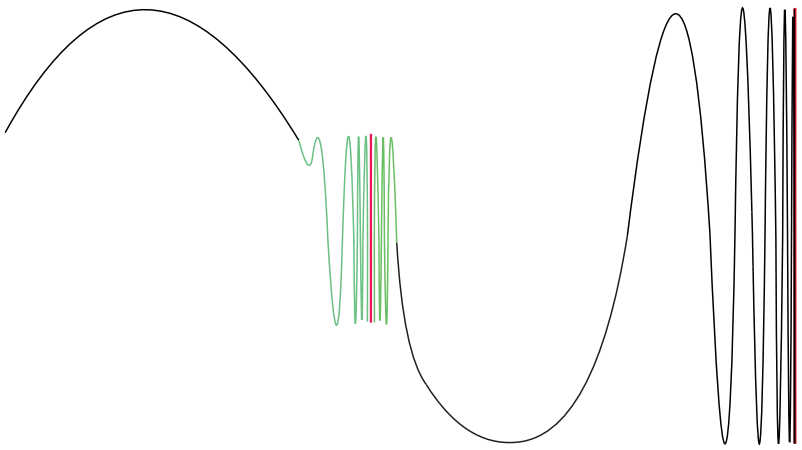

Figura 5.5: X_1. La línea roja indica el arco $C_{\frac{1}{2}}$ que junto con la parte en verde representa la doble curva del topólogo con una barra límite $X^-_{\frac{1}{2}} \cup X^+_{\frac{1}{2}}$.

$\phi_n^-\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$, es decir, $C_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = \left\{\pi_1\left(\phi_n^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right)\right\} \times L_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = \left\{\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right\} \times L_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ donde

$$L_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = \left[\pi_2\left(\phi_n^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right) - \frac{1}{4}, \pi_2\left(\phi_n^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right) + \frac{1}{4}\right].$$

Consideremos el mapeo lineal $f_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ entre los arcos $L_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ y $L_{T\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)}$, sean los continuos

$\phi_n^{-1}\left(T\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}} - \delta_n, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right]\right)$ y $\phi_n^{-1}\left(T\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} + \delta_n\right]\right)$,

nótese que $T\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \in Q_n$ por lo cual de nuestra construcción previa $C_{T\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)} = \phi_n^{-1}\left(T\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right)$ es un arco y resulta que dichos continuos son continuos tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado con la función ϕ_n (son de hecho copias homeomorfas de la curva del topólogo), del ejemplo 5.4 podemos considerar continuos tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado, digamos $X^-_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ y $X^+_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ usando los mapeos $T|_{\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}-\delta_1, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right]}, T|_{\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}+\delta_1\right]}$ y $f_{\frac{1}{2}}$, de tal forma que las funciones

$$F^-_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} : X^-_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \longrightarrow \phi_n^{-1}\left(T\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}} - \delta_n, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right]\right),$$

$$F^{+}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} : X^{+}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \longrightarrow \phi_n^{-1}\left(T\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} + \delta_n\right]\right)$$

dadas por $F^{-}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}(r,s) = (T(r), f_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}(s))$ y $F^{+}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}(r,s) = (T(r), f_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}(s))$ sean homeomorfismos. Por último consideremos los segmentos de recta siguientes:

- $I_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ entre los puntos $\phi_n^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} - 2\delta_n\right)$ y $F^{-1}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}\left(\phi_n^{-1}\left(T\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} - \delta_n\right)\right)\right)$,
- $D_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ entre los puntos $\phi_n^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} + 2\delta_n\right)$ y $F^{-1}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}\left(\phi_n^{-1}\left(T\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} + \delta_n\right)\right)\right)$.

Por como se construyen $F^{-}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ y $F^{+}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ se tienen las sigientes composiciones:

- $\pi_1 \circ F^{-}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = T \circ \pi_1|_{X^{-}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}}$, $\pi_2 \circ F^{-}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = T \circ \pi_2|_{X^{-}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}}$ y
- $\pi_1 \circ F^{+}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = T \circ \pi_1|_{X^{+}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}}$, $\pi_2 \circ F^{+}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = T \circ \pi_2|_{X^{+}_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}}$.

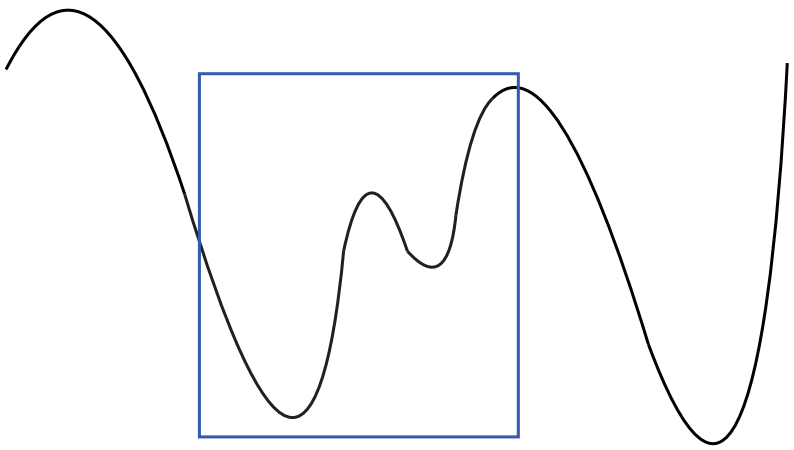

Figura 5.6: En el cuadrado en azul centrado en $\phi_n^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$ se construirá una doble curva del topólogo con barra límite $C_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$.

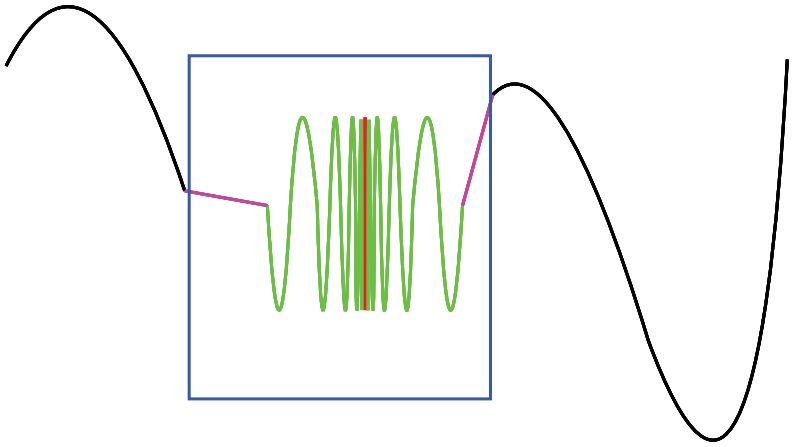

Figura 5.7: La barra roja representa la barra límite $C_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ que junto con la parte en verde será la doble curva del topólogo con una barra límite $X^-_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \cup X^+_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$. La parte rosada representa los arcos $D_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ y $I_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$

Finalmente se define

$$X_{n+1} = \left(X_n - \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left(\phi_n^{-1} \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} - 2\delta_n, \frac{2k+1}{2^{n+1}} + 2\delta_n \right) \right) \right) \cup \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left(D_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \cup I_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \cup X^-_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \cup X^+_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \right)$$

el cual resulta ser un continuo tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado con la función monótona $\phi_{n+1} = \pi_1|_{X_{n+1}}$. De la condición diám$\left(\phi_n^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}} - 2\delta_n, \frac{2k+1}{2^{n+1}} + 2\delta_n\right)\right) < \frac{1}{2^{n+2}}$ y de la construcción dentro de los rectángulos $\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}} - 2\delta_n, \frac{2k+1}{2^{n+1}} + 2\delta_n\right] \times L_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ para todo $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ se sigue que para todo $t \in [0,1] - Q_n$,

$$D\left(\phi_n^{-1}(t), \phi_{n+1}^{-1}(t)\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Las fibras límites del nuevo continuo X_{n+1} son las barras límites $C_t = \phi_{n+1}^{-1}(t)$ si

$$t \in Q_{n+1} := \left\{ \frac{k}{2^{n+1}} : k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^{n+1} \right\}.$$

Por último definimos el continuo $X = \bigcap_{n\in\omega} \overline{\bigcup_{k\geq n} X_k}$ (es un continuo por el teorema 3.13). Sean los números diádicos, $Q = \bigcup_{n\in\omega} Q_n$, mostraremos que X es un continuo tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado con el mapeo $\phi : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $\phi = \pi_1|_X$.

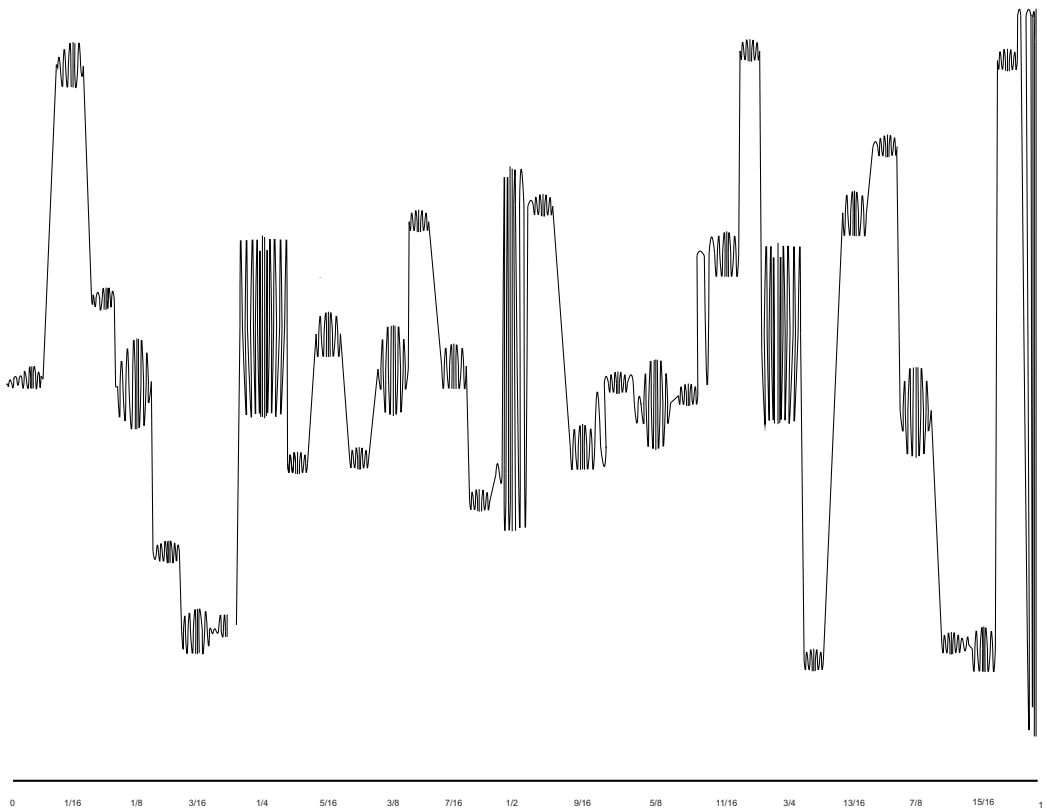

Figura 5.8: El continuo tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado $X = \bigcap_{n\in\omega} \overline{\bigcup_{k\geq n} X_k}$.

Notemos que para todo $n \in \omega$ los conjuntos de la forma $\phi_n^{-1}(t)$ con $t \in [0,1]$ son espacios de un solo punto o bien arcos verticales. Si $t \notin Q$ entonces $\phi_n^{-1}(t)$ es un singulete para todo $n \in \omega$, entonces tratándolo como puntos en el plano y de la construcción se tiene que $d(\phi_n^{-1}(t), \phi_{n+1}^{-1}(t)) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ para todo $n \in \omega$, esto nos dice que la sucesión $\{\phi_n^{-1}(t)\}_{n\in\omega}$ es de Cauchy, por tanto converge a un punto $u_t \in \mathbb{R}^2$, puesto que para todo $n \in \omega$ la subsucesión $\{\phi_k^{-1}(t)\}_{k\geq n} \subseteq \bigcup_{k\geq n} X_k$ converge a x_t, entonces $u_t \in \overline{\bigcup_{k\geq n} X_k}$ lo cual muestra que $u_t \in X$, y de la continuidad de π_1 se

tiene que $\pi_1(u_t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \pi_1(\phi_n^{-1}(t)) = t$ lo que muestra que $u_t \in \phi^{-1}(t)$. Por otro lado, si $t \in Q$ digamos $t \in Q_m$ y m es el mínimo natural con esta propiedad, entonces $\phi_k^{-1}(t)$ es un singulete si $0 \leq k < m$ y $\phi_n^{-1}(t) = \phi_m^{-1}(t) = C_t$ es un arco para todo $n \geq m$. De la construcción nuevamente tenemos que $d\left(\phi_k^{-1}(t), \phi_{k+1}^{-1}(t)\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ si $0 \leq k < k+1 < m$ y $\phi_{m-1}^{-1}(t)$ es el punto medio de C_t. En particular tenemos que $C_t \subseteq X_n$ si $n \geq m$ por lo cual $C_t \subseteq X$, y como $\pi_1(C_t) = \{t\}$ entonces $C_t \subseteq \phi^{-1}(t)$. Lo anteriormente mencionado también muestra que para todo $t \in [0,1]$ y $n \in \omega$ se cumple que

$$\operatorname{dist}(\phi_n^{-1}(t), \phi_{n+1}^{-1}(t)) < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Nuestro primer propósito es demostrar que:

$$\phi^{-1}(t) = \begin{cases} \{u_t\} & \text{si } \ t \notin Q, \\ C_t & \text{si } \ t \in Q. \end{cases}$$

lo cual en particular probaría que ϕ es un mapeo monótono.

Proposición 5.17. *Para todo $t \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y $n \in \omega$ tales que:*

a) $(\bigcup_{k\geq n} X_k) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq B_\varepsilon(u_t)$, *si* $t \notin Q$;

b) $(\bigcup_{k\geq n} X_k) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq N_\varepsilon(C_t)$, *si* $t \in Q$.

Demostración. Sean $t \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$.

a) Si $t \notin Q$, sea $n \in \omega$ tal que $d(\phi_n^{-1}(t), u_t) < \frac{\varepsilon}{3}$ y $\displaystyle\sum_{k\geq n} \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{3}$. Puesto que ϕ_n es localmente un homeomorfismo en una vecindad de t que no contenga puntos de Q_n, entonces existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $\phi_n^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{3}}(\phi_n^{-1}(t)))$. Probemos que

$$\left(\bigcup_{k\geq n} X_k\right) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq B_\varepsilon(u_t).$$

Sea $(x,y) \in (\bigcup_{k\geq n} X_k) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta))$ entonces $x \in (t-\delta, t+\delta)$ y existe $k \geq n$ de forma que $(x,y) \in X_k$, haciendo $\phi_n^{-1}(x) = (x,b)$ tenemos que

$$|y-b| \leq \sum_{j=n}^{k} \operatorname{dist}(\phi_j^{-1}(x), \phi_{j+1}^{-1}(x)) < \sum_{j\geq n} \frac{1}{2^{j+1}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

por lo que $d(\phi_n^{-1}(x), (x,y)) < \frac{\varepsilon}{3}$, como $\phi_n^{-1}(x) \in \phi_n^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{3}}(\phi_n^{-1}(t)))$ entonces $d(\phi_n^{-1}(x), \phi_n^{-1}(t)) < \frac{\varepsilon}{3}$ y finalmente

$$d(u_t, (x,y)) \leq d(\phi_n^{-1}(x), \phi_n^{-1}(t)) + d(\phi_n^{-1}(x), (x,y)) + d(\phi_n^{-1}(t), u_t) < \varepsilon$$

lo que muestra que $(x,y) \in B_\varepsilon(u_t)$.

b) Si $t \in Q$, tomemos $n \in \omega$ de forma que $t \in Q_n$ y $\sum_{k \geq n} \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$, entonces $\phi_n^{-1}(t) = C_t$. Consideremos $\delta = \delta_{n-1} < \frac{1}{2^{n+1}}$ y nótese que $\delta < \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon$. Probemos que

$$\left(\bigcup_{k \geq n} X_k\right) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq N_\varepsilon(C_t).$$

Sea $(x,y) \in (\bigcup_{k \geq n} X_k) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta))$ entonces $x \in (t-\delta, t+\delta)$. Existe $k \geq n$ de forma que $(x,y) \in X_k$ lo cual nos dice que $(x,y) \in \phi_k^{-1}(x)$. Puesto que $\phi_n^{-1}(t) = C_t$ es una barra límite en X_n, de la elección de $\delta > 0$ sabemos que el continuo $\phi_n^{-1}([t-\delta, t+\delta])$ se ve como una doble curva del topólogo construido en el cuadrado $[t-\delta, t+\delta] \times L_t$ por lo que $\phi_n^{-1}(x) = (x,b)$ donde $b \in L_t$ y entonces tomando $(t,b) \in C_t$ se tiene que

$$|y-b| \leq \sum_{j=n}^{k} \operatorname{dist}(\phi_j^{-1}(x), \phi_{j+1}^{-1}(x)) < \sum_{j \geq n} \frac{1}{2^{j+1}} < \varepsilon$$

pues $(x,y) \in \phi_k^{-1}(x)$ y $(x,b) \in \phi_n^{-1}(x)$. Y como $|x-t| < \delta < \varepsilon$ se sigue que $d((x,y),(y,b)) < \varepsilon$, mostrando así que $(x,y) \in N_\varepsilon(\phi^{-1}(t))$ pues $(t,b) \in C_t$. Así tenemos la contención $(\bigcup_{k \geq n} X_k) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq N_\varepsilon(C_t)$.

Lo que prueba la proposición. $\square$

Proposición 5.18.

$$\phi^{-1}(t) = \begin{cases} \{u_t\} & \text{si } t \notin Q, \\ C_t & \text{si } t \in Q. \end{cases}$$

lo cual implica que ϕ es un mapeo monótono.

Demostración. Primero consideremos $t \in Q$, por las observaciones antes hechas basta mostrar que $\phi^{-1}(t) \subseteq C_t$, sea $x \in \phi^{-1}(t)$ y sea $\varepsilon > 0$, por la proposición 5.17 existen $n \in \omega$ y $\delta > 0$ tales que $(\bigcup_{k \geq n} X_k) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_t)$. Como $x \in X = \bigcap_{m \in \omega} \overline{\bigcup_{k \geq m} X_k}$ entonces con $\rho = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}\}$ se tiene que $B_\rho(x) \cap (\bigcup_{k \geq n} X_k) \neq \emptyset$, sea $y \in B_\delta(x) \cap (\bigcup_{k \geq n} X_k)$ entonces

$$y \in \left(\bigcup_{k \geq n} X_k\right) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_t)$$

de lo cual existe $z \in C_t$ tal que $d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$ y por tanto

$$\operatorname{dist}(x, C_t) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \rho + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

de la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ concluimos que $\operatorname{dist}(x, C_t) = 0$ y como C_t es cerrado, se sigue que $x \in C_t$. Por tanto $\phi^{-1}(t) = C_t$ si $t \in Q$.

Si $t \notin Q$ y por un argumento similar al anterior haciendo notar que $B_\varepsilon(u_t) = N_\varepsilon(\{u_t\})$ para todo $\varepsilon > 0$, se muestra que $\phi^{-1}(t) = \{u_t\}$ si $t \notin Q$.

Finalmente, como C_t y $\{u_s\}$ son conexos para $t \in Q$ y $s \notin Q$, respectivamente, se sigue que ϕ es función monótona. $\square$

Proposición 5.19. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\emptyset \neq A \subseteq [0,1]$, entonces*

$$d_H(\phi^{-1}(A), \phi_n^{-1}(A)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Demostración. Primero observemos que para todo $t \in [0,1]$ se tiene que $\phi^{-1}(t) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi_n^{-1}(t))$ y $\phi_n^{-1}(t) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi^{-1}(t))$. Hagamos dos casos:

a) Si $t \notin Q$ entonces $\phi_n^{-1}(t)$ consiste en un solo punto digamos $u_{t,n}$ y $\phi^{-1}(t) = \{u_t\}$ Habíamos visto que $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_{t,n} = u_t$ y que $d(u_{t,k}, u_{t,k+1}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces si $m > n$ se tiene que

$$d(u_{t,n}, u_{t,m}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(u_{t,k}, u_{t,k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{2^n}$$

y en el límite tenemos que $d(u_{t,n}, u_t) = \lim\limits_{m \longrightarrow \infty} d(u_{t,n}, u_{t,m}) \leq \lim\limits_{m \longrightarrow \infty} \dfrac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{2^n} = \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$, lo cual prueba que $\phi^{-1}(t) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi_n^{-1}(t))$ y $\phi_n^{-1}(t) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi^{-1}(t))$.

b) Si $t \in Q$, sea $m \in \omega$ el mínimo natural tal que $t \in Q_m$. Si $n \geq m$ entonces $\phi_n^{-1}(t) = C_t = \phi^{-1}(t)$ y entonces es claro que $\phi^{-1}(t) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi_n^{-1}(t))$ y $\phi_n^{-1}(t) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi^{-1}(t))$. Por otro lado, si $n < m$ entonces para todo $k \in \{n, \ldots, m-1\}$ el conjunto $\phi_k^{-1}(t)$ consta de un solo punto, digamos $u_{t,k}$, y por un razonamiento análogo al inciso anterior tendremos que

$$d(u_{t,n}, u_{t,m-1}) \leq \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n-1}}}{2^n},$$

dado $x \in \phi_m^{-1}(t) = C_t$, al ser $u_{t,m-1}$ el punto medio de éste arco de longitud $\frac{1}{2^m}$,

entonces $d(u_{t,m-1}, x) \leq \frac{1}{2^{m+1}}$ y por tanto

$$d(u_{t,n}, x) \leq \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n-1}}}{2^n} + \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

lo que se está demostrando es que los elementos de $\phi_n^{-1}(t)$ y $\phi^{-1}(t) = C_t$ distan menos que $\frac{1}{2^{n-1}}$, de ésto se concluye que $\phi^{-1}(t) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi_n^{-1}(t))$ y $\phi_n^{-1}(t) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi^{-1}(t))$.

Por último, observemos que

$$\phi_n^{-1}(A) = \bigcup_{t \in A} \phi_n^{-1}(t) \subseteq \bigcup_{t \in A} N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi^{-1}(t)) = N_{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\bigcup_{t \in A} \phi^{-1}(t)\right) = N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi^{-1}(A)),$$

$$\phi^{-1}(A) = \bigcup_{t \in A} \phi^{-1}(t) \subseteq \bigcup_{t \in A} N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi_n^{-1}(t)) = N_{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\bigcup_{t \in A} \phi_n^{-1}(t)\right) = N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi_n^{-1}(A)),$$

lo cual muestra que $\phi_n^{-1}(A) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi^{-1}(A))$ y $\phi^{-1}(A) \subseteq N_{\frac{1}{2^{n-1}}}(\phi_n^{-1}(A))$, por tanto $d_H(\phi^{-1}(A), \phi_n^{-1}(A)) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. $\square$

Proposición 5.20. *X es un continuo tipo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ *generalizado con el mapeo ϕ*

Demostración. De la proposición 5.18 sabemos que ϕ es mapeo monótono y que el conjunto $D := \{t \in [0,1] : \phi^{-1}(t) \text{ es degenerado}\} = [0,1] - Q$. Tenemos que probar que $\phi^{-1}(D)$ es denso en X, para ello basta mostrar que si $x \in \phi^{-1}(Q)$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe $y \in \phi^{-1}([0,1] - Q)$ tal que $d(x,y) \leq \varepsilon$. Así bien sean $x \in \phi^{-1}(Q)$ y $\varepsilon > 0$, escojamos $n \in \omega$ tal que $\phi(x) \in Q_n$ y $\sum_{k \geq n} \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Puesto que en vecindades muy pequeñas de $\phi_n^{-1}(\phi(x)) = C_{\phi(x)}$, éste se ve como una doble curva del topólogo, existe $z \in (\phi(x) - \delta, \phi(x))$ tal que $d(x, \phi_n^{-1}(z)) < \frac{\varepsilon}{2}$ donde $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, de igual forma podemos pedir que ϕ_n sea un homeomorfismo en $\phi_n^{-1}((\phi(x) - \delta, \phi(x)))$ por lo que existe $\rho > 0$ tal que $\phi_n^{-1}((z - \rho, z + \rho)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\phi_n^{-1}(z))$. Como $[0,1] - Q$ es denso en $[0,1]$, existe $y \in [0,1] - Q$ tal que $y \in (z - \rho, z + \rho)$ y entonces $d(\phi_n^{-1}(z), \phi_n^{-1}(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pero $d(\phi_n^{-1}(y), \phi^{-1}(y)) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ lo cual concluye que $d(\phi^{-1}(y), x) < \varepsilon$. Por tanto $\phi^{-1}(D)$ es denso en X.

Para mostrar la segunda condición, sea $t \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Hay dos casos:

a) Si $t \notin Q$, entonces el único subconitnuo de $\phi^{-1}(t) = \{u_t\}$ es él mismo. Por la

proposición 5.17 existen $n \in \omega$ y $\delta > 0$ de forma que

$$\left(\bigcup_{k \geq n} X_k\right) \cap \pi_1^{-1}((t-\delta, t+\delta)) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u_t)$$

entonces tomando $m \geq n$ de forma que $\frac{1}{2^{m-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ se sigue que $\phi_m^{-1}([t-\rho, t+\rho]) = X_m \cap \pi_1^{-1}([t-\rho, t+\rho]) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u_t)$ donde $\rho = \frac{\delta}{2}$. Como $\phi_{-1}(t) = \{u_t\}$ lo anterior implica que $\phi^{-1}(t) \subseteq N_{\frac{\varepsilon}{2}}(\phi_m^{-1}([t-\rho, t+\rho]))$ y $\phi_m^{-1}([t-\rho, t+\rho]) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(u_t) = N_{\frac{\varepsilon}{2}}(\phi^{-1}(t))$ por lo que $d_H(\phi^{-1}(t), \phi_m^{-1}([t-\rho, t+\rho])) < \frac{\varepsilon}{2}$, haciendo uso de la proposición 5.19 se tiene que

$$\begin{aligned} d_H(\phi^{-1}(t), \phi^{-1}([t-\rho, t+\rho])) &\leq d_H(\phi^{-1}(t), \phi_m^{-1}([t-\rho, t+\rho])) \\ &\quad + d_H(\phi^{-1}([t-\rho, t+\rho]), \phi_m^{-1}([t-\rho, t+\rho])) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

terminando este caso.

b) Ahora si $t \in Q$, luego debemos tomar $C \subseteq C_t = \phi^{-1}(t)$ subcontinuo, sea $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $t \in Q_n$, como $\phi_n^{-1}(t) = C_t$ y X_n es un continuo tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado existe $[a, b] \subseteq [0, 1]$ arco de forma que $d_H(\phi_n^{-1}([a, b]), C) < \frac{\varepsilon}{2}$ y por la proposición 5.19 se sigue que

$$d_H(\phi^{-1}([a, b]), C) \leq d_H(\phi_n^{-1}([a, b]), C) + d_H(\phi_n^{-1}([a, b]), \phi^{-1}([a, b])) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Lo cual termina de probar la segunda propiedad y por tanto X es un continuo tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado con el mapeo ϕ. $\square$

Ahora que hemos construido el espacio sigue construir la función requerida. Primero obsérvese que la función tienda $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ cumple que $T(Q) = Q$ y $T([0, 1] - Q) = [0, 1] - Q$ por tanto podemos definir la función $F : X \longrightarrow X$ de forma que $F(x) = \phi^{-1}(T(\phi(x)))$ si $\phi(x) \in [0, 1] - Q$ y F mapea lineal mente el arco C_t en $C_{T(t)}$ si $t \in Q$, más precisamente $F(t, s) = (T(t), f_t(s))$ (recuérdese que f_t es el mapeo lineal entre los arcos L_t y $L_{T(t)}$). De la supreyictividad de la función tienda no es difícil convencerse que la función F es suprayectiva, además es inmediato por como lo definimos que $T \circ \phi = \phi \circ F$, así que de demostrar que F es continua, y haciendo uso de 5.13 y 5.15, como la función T es mezclante, se seguiría que F es un mapeo débil completamente expansivo por continuos, pero

éste no sería un mapeo completamente expansiva por continuos pues $\phi^{-1}(1) = C_1$ es un subcontinuo no degenerado de X tal que $F(C_1) = \phi^{-1}(0)$ el cual es un conjunto de un solo punto el cual además es un punto fijo de F, por ello

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d_H(F^n(C_1), X) = d_H(\phi^{-1}(0), X) > 0.$$

Por tanto, nuestro último objetivo es mostrar que la función F es en efecto continua.

Proposición 5.21. *$F : X \longrightarrow X$ es un mapeo débil continuamente expansiva por continuos, pero no continuamente expansiva por continuos.*

Demostración. Nuevamente basta ver que F es continua. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Realicemos dos casos:

a) Si $\phi(x) \in Q$, consideremos $n \in \omega$ de forma que $\phi(x) \in Q_n$ y $\frac{1}{2^{n-2}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Fijémosnos en el continuo X_n, por construcción en una vecindad de $C_{\phi(x)}$, digamos para $0 < \rho < \varepsilon$ se tiene que la función

$$F_{\phi(x)} : \phi_n^{-1}([\phi(x) - \rho, \phi(x) + \rho]) \longrightarrow \phi_{n-1}^{-1}(T([\phi(x) - \rho, \phi(x) + \rho]))$$

dada por $F_{\phi(x)}(t, s) = (T(t), f_{\phi(x)}(s))$ es continua (de hecho es homeomorfismo cuando $\phi(x) \neq \frac{1}{2}, 1$).

Lo primero que se debe notar, es que de la construcción del continuo X_n se tiene que si $y \in \phi_n^{-1}([\phi(x) - \rho, \phi(x) + \rho]) - C_{\phi(x)}$ entonces $F_{\phi(x)}(y) = \phi_{n-1}^{-1}(T(\phi(y)))$ y que $F|_{C_{\phi(x)}} = F_{\phi(x)}|_{C_{\phi(x)}}$.

De la continuidad de $F_{\phi(x)}$, y como $x \in C_{\phi(x)} = \phi_n^{-1}(\phi(x)) \subseteq \phi_n^{-1}([\phi(x)-\rho, \phi(x)+\rho])$, existe $0 < \delta_1 < \rho$ tal que

$$F_{\phi(x)}\left(\phi_n^{-1}([\phi(x) - \rho, \phi(x) + \rho]) \cap B_{\delta_1}(x)\right) \subseteq \phi_{n-1}^{-1}(T([\phi(x)-\rho, \phi(x)+\rho])) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F_{\phi(x)}(x)).$$

Por último, nótese que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\frac{1}{2^{n-1}} < \delta_1$, de lo contrario elegimos $m \geq n$ con $\frac{1}{2^{m-1}} < \delta_1$, y elegiendo una vecindad posiblemente más pequeña de $C_{\phi(x)}$ en X_m digamos $\phi_m^{-1}([\phi(x) - \rho', \phi(x) + \rho'])$ de forma que $\phi_m^{-1}([\phi(x) - \rho', \phi(x) + \rho']) \subseteq \phi_n^{-1}([\phi(x) - \rho, \phi(x) + \rho])$ (esto ocurre porque al construir el paso inductivo no se altera la construcción alrededor de $C_{\phi(x)}$ en vecindades muy pequeñas) lo cual nos daría que

$$F_{\phi(x)} : \phi_m^{-1}([\phi(x) - \rho', \phi(x) + \rho']) \longrightarrow \phi_{m-1}^{-1}(T([\phi(x) - \rho', \phi(x) + \rho']))$$

sigue siendo continua de la cual δ_1 sigue cumpliendo que

$$F_{\phi(x)}\left(\phi_m^{-1}([\phi(x)-\rho,\phi(x)+\rho])\cap B_{\delta_1}(x)\right)\subseteq \phi_{m-1}^{-1}(T([\phi(x)-\rho,\phi(x)+\rho]))\cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(F_{\phi(x)}(x)).$$

Así bien suponiendo que $\frac{1}{2^{n-1}}<\delta_1$, sea $0<\delta<\delta_1-\frac{1}{2^{n-1}}$, claramente $0<\delta<\delta_1$. Mostremos que $F\left(B_\delta^X(x)\right)\subseteq B_\varepsilon^X(F(x))$. Sea $y\in B_\delta^X(x)$, si $y\in C_{\phi(x)}$ entonces $y\in F_{\phi(x)}\left(\phi_n^{-1}([\phi(x)-\rho,\phi(x)+\rho])\cap B_{\delta_1}(x)\right)$ y por tanto

$$d(F(y),F(x))=d(F_{\phi(x)}(y),F_{\phi(x)}(x))<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

por lo que $F(y)\in B_\varepsilon^X(F(x))$. Supongamos ahora que

$$\phi(y)\in[\phi(x)-\rho,\phi(x))\cup(\phi(x),\phi(x)+\rho]$$

por tanto $\phi_n^{-1}(\phi(y))\in\phi_n^{-1}([\phi(x)-\rho,\phi(x)+\rho])-C_{\phi(x)}$ y como

$$\begin{aligned}d(\phi_n^{-1}(\phi(y)),x)&\leq d(x,y)+d(\phi_n^{-1}(\phi(y)),y)\\&\leq\delta+\ \mathrm{dist}(\phi_n^{-1}(\phi(y)),\phi{-}1(\phi(y)))\\&\leq\delta+\frac{1}{2^{n-1}}<\delta_1,\end{aligned}$$

(aquí se usó 5.19) por tanto $\phi_n^{-1}(\phi(y))\in\phi_n^{-1}([\phi(x)-\rho,\phi(x)+\rho])\cap B_{\delta_1}(x)$ y así

$$d(\phi_{n-1}^{-1}(T(\phi(y))),F(x))=d(F_{\phi(x)}(y),F_{\phi(x)}(x))<\frac{\varepsilon}{2}$$

Pero usando nuevamente 5.19 se tiene que

$$\mathrm{dist}\left(\phi_{n-1}^{-1}(T(\phi(y))),\phi^{-1}(T(\phi(y)))\right)\leq\frac{1}{2^{n-2}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

de lo cual se sigue que $\mathrm{dist}(F(x),\phi^{-1}(T(\phi(y))))<\varepsilon$ y en particular como $F(y)\in\phi^{-1}(T(\phi(y)))$ entonces $d(F(x),F(y))<\varepsilon$, o bien $F(y)\in B_\varepsilon^X(F(x))$. Concluimos que $F\left(B_\delta^X(x)\right)\subseteq B_\varepsilon^X(F(x))$ y por tanto F es continua en x.

b) Ahora supongamos que $\phi(x)\notin Q$. Usando lo que se demostró en la proposición 5.20, como $\phi(F(x))\notin Q$ sabemos que existe $\varepsilon'>0$ de forma que

$$d_H(\phi^{-1}(\phi(F(x))),\phi^{-1}([\phi(F(x))-\varepsilon',\phi(F(x))+\varepsilon']))<\varepsilon'$$

y en particular tenemos que

$$\phi^{-1}([\phi(F(x)) - \varepsilon', \phi(F(x)) + \varepsilon']) \subseteq N_\varepsilon(\phi^{-1}(\phi(F(x)))) \subseteq B_\varepsilon^X(F(x)).$$

De la continuidad de T, existe $\delta > 0$ tal que

$$T((\phi(x)-\delta, \phi(x)+\delta)) \subseteq (T(\phi(x))-\varepsilon', T(\phi(x))+\varepsilon') = (\phi(F(x))-\varepsilon', \phi(F(x))+\varepsilon')$$

donde se usó que $\phi \circ F = T \circ \phi$. Por tanto

$$\phi^{-1}(T((\phi(x) - \delta, \phi(x) + \delta))) \subseteq B_\varepsilon^X(F(x)).$$

Mostremos que $F(B_\delta^X(x)) \subseteq \phi^{-1}(T((\phi(x) - \delta, \phi(x) + \delta)))$, en efecto sea $y \in B_\delta^X(x)$ en particular se tiene que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq d(x, y) < \delta$ por lo que $\phi(y) \in (\phi(x) - \delta, \phi(x) + \delta)$ y por tanto

$$\phi(F(y)) = T(\phi(y)) \in T((\phi(x) - \delta, \phi(x) + \delta)),$$

y por tanto

$$F(y) \in \phi^{-1}(T((\phi(x) - \delta, \phi(x) + \delta)))$$

lo que muestra la contención

$$F(B_\delta^X(x)) \subseteq \phi^{-1}(T((\phi(x) - \delta, \phi(x) + \delta))) \subseteq B_\varepsilon^X(F(x))$$

y finalmente concluye la prueba de que F es continua en x.

Demostramos que F es continua y la conclusión de la proposición. $\square$

Conclusión

El trabajo abarcó cuatro condiciones caóticas de interés:

(1) Completamente expansiva por continuos,

(2) Débil completamente expansiva por continuos,

(3) Mezclante y

(4) Débilmente mezclante.

El teorema 2.9 concluye la cadena de implicaciones:

$$(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4).$$

Y aunque en general, las implicaciones recíprocas no siempre son ciertas, se hallaron condiciones para los continuos donde se puede dar la equivalencia, mostrando aquéllas que son válidas como aquéllas que no son ciertas, mostrando sus respectivos contraejemplos. resumimos esta información en la siguiente tabla 5.1

Continuos	$(4) \Longrightarrow (3)$	$(3) \Longrightarrow (2)$	$(2) \Longrightarrow (1)$
Gráficas	Sí	Sí	Sí
Dendritas	No	Sí	No
Abanico de cantor	No	No	No
Tipo sen$(\frac{1}{x})$ generalizado	Sí	Sí	No

Cuadro 5.1: Tabla resumen. Continuos y sus equivalencias caóticas.

Bibliografía

[Banks 1] Banks, Jhon. *Chaos for induced hyperspace maps.* Chaos Solitons Fractals 25. No. 3, págs. 1581-1583. 2005.

[Banks 2] Banks, Jhon. *Topological mappings properties defined by digraphs.* Discret Contin. Dynam. Systems 5. No. 1, págs. 83-92. 1999.

[Barragán et al.] Barragán, Franco; Romero, A.; Sanchez Perales, S.; Grijalva, Víctor. *Breve introducción a la métrica de Hausdorff.* Sistemas dinámicos III (Editores: J. J. Angoa, J. Arrazola, R. Escobedo, A. Illanes, M. Osorio, J. Poisot, G. Sierra, A. Tamariz), Dirección de Fomento Editorial, Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2014.

[Dugundji] Dugundji, James. *Topology.* Allyn and Baccon, Inc., Boston, Mass. 1966.

[Engelking] Engelking, Ryszard. *General topology.* Translated from the Polish by the author. Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[Engelking y Sieklucki] Engelking, R. y Sieklucki, K. *Topology: A Geometric Approach.* Sigma Series in Pure Mathematics (Book 4). Heldermann Verlag. 1992

[Folland] Folland, Gerald B. *Real analysis. Modern techniques and their applications.* Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1999.

[Fragalá] Fragalá, Marina. *Teoría de homotopía y aplicaciones.* Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2003.

[Furstenberg] Furstenberg, H. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory.* M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1981

[Glasner] Glasner, Eli. *Classifying dynamical systems by their recurrence properties.* Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center. Volume 24, págs. 21-40, 2004.

[Hatcher] Hatcher, Allen. *Algebraic topology.* Cambridge: Cambridge University Press. (2002)

[Hausdorff] Hausdorff, F. *Grundzge der Mengenlehre.* Viet, Leipzig, 1914.

[Hernández] Hernández, Rodrigo. *Dendritas.* Tesis de licenciatura. Facultad de ciencias, UNAM. 2007.

[Hoehn y Mouron] Hoehn, Logan y Mouron, Christopher. *Hierarchies of Chaotic Maps on Continua.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, 34(6), 1897-1913, 2014.

[Illanes] Illanes, Alejandro. *Hiperespacio de Continuos.* Aportaciones Matemáticas, Soc. Mat. Mex.,2004.

[Juárez] Juárez, Rígel. *Conjuntos Z en productos simétricos.* Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM. 2013.

[Lau y Zame] Lau, K. y Zame, A. *On weak mixing cascades.* Math. Systems Theory 6 (1972-73), págs. 307-311.

[King y Méndez] King, Jefferson y Méndez, Héctor. *Sistemas Dinámicos Discretos.* Las prensas de ciencias. Facultad de ciencias, UNAM, México, 2014.

[Méndez] Méndez, Héctor. *Caos.* Tesis de de doctorado. Facultad de Cienicas, UNAM. 1995.

[Munkres] Munkres, James R. *Topology.* Second edition. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.

[Nadler] Nadler, Sam B., Jr. *Continuum Theory. An introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[Ponpeiu] Ponpeiu, D. *Sur la continuité des fonctions de variables complexes.* Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques, Série 2, Volume 7 (1905) no. 3, págs. 265-315.

[Rudin] Rudin, Walter. *Real and complexe analysis.* 3° ed., McGraw-Hill, Inc. New York, NY, USA. 1987.

[Willard] Willard, Stephen. *General Topology.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970.