UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
COLEGIO DE FILOSOFÍA

ALGUNAS IMPLICACIONES FILOSÓFICAS DEL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM: REFLEXIONES SOBRE LA TEORÍA DE MODELOS EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS DE ZERMELO-FRAENKEL MÁS AXIOMA DE ELECCIÓN EXPRESADA EN LENGUAJE DE PRIMER ORDEN

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN FILOSOFÍA

PRESENTA:

RAYMUNDO ROBERTO MEZA RIVERA

TUTOR: DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ
(FFyL-UNAM)

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO. MAYO DE 2019

Esta tesis de licenciatura fue elaborada como parte del proyecto de investigación PIFFyL 01 006 2019
"El lugar de la lógica en los estudios filosóficos".

A mi familia y amigos

Tras una larga convivencia con el problema y tras haber intimado con él, de repente, como la luz que salta de la chispa, surge la verdad en el alma y crece ya espontáneamente.

—Platón, *Carta VII*

AGRADECIMIENTOS

La realización de este trabajo fue posible gracias al apoyo incondicional de un gran número de personas con las cuales siempre estaré completamente agradecido. El sacrificio y esfuerzo que significó para mí la elaboración del presente escrito fue diminuto comparado con el me han dedicado algunas personas a lo largo de todos estos años, y es con ellas con quienes me encuentro especialmente en deuda.

A mis padres, Blanca Estela Rivera Bermeo y Raymundo Meza Garza, y a mi hermano, Renato Alejandro Meza Rivera, quienes me han apoyado como nadie durante todos mis estudios, les estoy particularmente agradecido; su paciencia, cariño y confianza en gran medida me ha permitido llegar a donde estoy. A mi novia, Itzel Arenis Vazquez Escobedo, le agradezco toda su comprensión, cariño y atención en cada momento; ha sido en ella en quien durante más de cuatro años he encontrado la inspiración que he necesitado para superarme y convertirme en quien soy ahora. A los cuatro, muchas gracias por todo.

A mi tutor, Cristian Alejandro Gutiérrez Ramírez, le debo principalmente la realización de este trabajo. Cristian, sin duda la deuda que tengo contigo es enorme. He corrido con la buena suerte de tenerte como maestro y te agradezco mucho toda la disposición y consideración que constantemente has tenido conmigo desde que te conocí. Jamás sabré como pagarte toda la paciencia y el tiempo que me has dedicado día y noche. Agradezco muchísimo toda la confianza que has depositado en mí, así como la ayuda, orientación y amistad que me has brindado durante todo este proceso. Te agradezco también la oportunidad que me ofreciste para trabajar contigo; por ti fue posible, entre otras cosas, elaborar este escrito en tan escaso periodo de tiempo. Realmente las palabras nunca alcanzarán para expresarte todo mi agradecimiento.

Agradezco también a mis lectores Nydia Guadalupe Lara Zavala, Javier García-Salcedo, Gabriel Ramos García y Carlos Alberto Romero Castillo por su dedicación y disposición para leerme en tan poco tiempo, a pesar de la extensión y del carácter técnico del texto. Los comentarios, observaciones y sugerencias de cada uno de ustedes fueron muy pertinentes y valiosos, y han contribuido de manera invaluable en la calidad del presente. Gabriel y Carlos, gracias a este proceso tuve la fortuna de conocerlos, verdaderamente les agradezco mucho a ambos toda la ayuda y el cuidado que me dedicaron, además del tiempo que me concedieron para revisar y discutir el tema.

Nydia y Javier, a ustedes también les debo muchísimo y les estoy infinitamente agradecido por cada una de las atenciones y su compromiso conmigo a lo largo de todos estos años. Me alegra mucho haberlos tenido como maestros en incontables ocasiones; tanto la orientación que me han brindado como el conocimiento que me han compartido ha favorecido de manera muy importante mi formación académica. Nydia, en particular quiero agradecerte no solamente por haberme apoyado en este asunto, sino por todas las otras veces que, sin dudarlo y muchas veces sin pedirlo, me has ofrecido tu ayuda. Javier, el tuyo también es uno de esos casos donde las palabras no alcanzan para terminar de agradecer todo lo que has hecho por mí. Has sido una figura indispensable para mi formación prácticamente desde el primer año de la carrera. Realmente no sabes cuánto te agradezco cada oportunidad y cada detalle, ni lo mucho que aprecio la amistad que me has extendido durante todo este tiempo.

También quiero agradecer a los miembros de los seminarios de filosofía de las matemáticas y de los talleres de teoría de conjuntos con los he podido aprender constantemente y complementar mis estudios de lógica y matemática. Gracias Cristian Gutiérrez, Pedro Ramos, Denise Vazquez, Samuel Lomelí, Eduardo Granados, Cristina Flores, Abraham Olivetti, Juan Sandoval, Jazmín Cruz y César Escobedo.

Asimismo, agradezco a los miembros de los seminarios de teoría homotópica de tipos y filosofía de la información con quienes pude aprender sobre temas que me eran desconocidos y pude sumergirme dentro de un mundo completamente nuevo e interesante. Gracias Lourdes González, Francisco Martínez, Carlos César Jiménez y Aline Thome. Francisco, en especial te agradezco siempre tu disposición para atender mis dudas y por haberme prestado indefinidamente el libro sobre la paradoja de Orayen, sin el cual, debo decir, me habría sido imposible redactar una gran porción de la segunda parte de este trabajo.

De nuevo muchas gracias, Cristian, por presentarme y permitirme participar dentro de estos círculos de gente tan brillante y excelente.

También me gustaría agradecerle de manera muy especial a mi amigo Francisco Maradiaga, quien no sólo es de mis amigos más cercanos, sino que, sin importar la hora, siempre ha estado dispuesto a resolver mis dudas repentinas sobre teoría de conjuntos y que, cuando lo he necesitado, se ha prestado para explicarme en persona lo que no me ha quedado claro. Muchas gracias, Paco.

Este trabajo fue realizado como parte del proyecto de investigación PIFFyL 01 006 2019 "El lugar de la lógica en los estudios filosóficos" aprobado por la Comisión de Investigación de la Facultad de Filosofía y Letras (FFyL) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Finalmente, reitero mi agradecimiento a todos aquellos que me brindaron el apoyo que hizo posible la elaboración del presente escrito.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En la actualidad es común asumir cierta intervención de la matemática en prácticamente cualquier disciplina científica, sea esta última de carácter natural o social. En ocasiones es colaboradora y, como ciencia formal, presta su maquinaria abstracta para caracterizar y esclarecer las propiedades de las estructuras que subyacen bajo los sistemas físicos y sociales; otras veces también suministra los recursos conceptuales para describir y modelar los fenómenos que estudian las ciencias empíricas; y en otras permite precisar y justificar los diferentes resultados obtenidos a partir de los procedimientos empíricos de dichas ciencias. Por otra parte, la matemática sirve como fundamento a las instituciones científicas y posibilita su interacción al ofrecerles un terreno formal y común sobre el cual pueden trasladar sus problemas de unas a otras, de forma que muchas veces facilita su resolución y fomenta el avance científico.

No obstante, la utilidad de la matemática y su contribución a la ciencia dista mucho de ser reciente: ya desde la antigüedad la importancia de la geometría y de la aritmética estaba presente; su fácil adaptabilidad a diferentes actividades y su alta precisión para la resolución de problemas impulsó inevitablemente su aplicación a una amplia variedad de áreas del conocimiento. Visto de este modo, no es de extrañar que sus métodos fueran implementados rápidamente a los estudios de la astronomía y la dinámica, y que ahora, tras siglos de continuo progreso, sean la base para la práctica y desarrollo de la mayoría de estas disciplinas.

El amplio alcance de la matemática y la certeza de la cual dota a las prácticas que la acogen difícilmente podía pasar desapercibida y la filosofía, maravillada, no tardó en hacerla uno de sus principales objetos de análisis casi desde sus inicios. Hoy, la matemática continúa siendo pieza central de los mejores esfuerzos para estudiar el conocimiento (Shapiro, 2009, p. 4), razón por la cual frecuentemente es estudiada por la epistemología, pero, a diferencia de otras ciencias analizadas por ésta, usualmente se considera la matemática no presupone conocimiento de hechos contingentes ni materiales y que tampoco depende de procedimientos empíricos para ser practicada. De aquí el carácter *a priori* que tradicionalmente se le atribuye. Asimismo, suele decirse de ella que sus proposiciones son "necesarias". Precisamente, parte de los esfuerzos de la filosofía de la matemática consiste en dar cuenta de esta (posiblemente aparente) *aprioricidad* y necesidad[1] y, por otro lado, explicar cómo es posible que la matemática pueda ser aplicada a las ciencias empíricas cuando ella misma parece ser absolutamente independiente de la experiencia. ¿Cómo puede la matemática aportar algo a las disciplinas que estudian fenómenos materiales? ¿Cómo puede ajustar su metodología a las de ellas? ¿Cómo puede muchas veces dotarlas de sentido y precisión? ¿Qué la hace tan fundamental para el desarrollo de las ciencias y para ampliar la comprensión del mundo físico? La respuesta o, mejor dicho, posibles respuestas no son obvias y requieren ser analizadas cuidadosamente.[2]

Por otra parte, un gran número de asuntos discutidos por la filosofía de la matemática tiene su origen en inquietudes de carácter meramente filosófico:

> ¿De qué, si es que de algo, trata la matemática? ¿Cómo se realiza la matemática? ¿Sabemos matemáticas y, en dado caso, cómo sabemos matemáticas? ¿Cuál es la metodología de la matemática y en qué medida es esta metodología confiable? ¿Qué lógica es la adecuada para la matemática? ¿En qué medida son los principios de la matemática objetivos e independientes de la mente, el lenguaje y la estructura social de los matemáticos? (Shapiro, 2009, p. 5)[3]

Aparte de lo anterior, el filósofo de la matemática tiene que dar cuenta o por lo menos brindar respuestas suficientemente satisfactorias con respecto del estado ontológico de los objetos matemáticos: si existen (o no) o si existen con independencia del matemático (o no), cuál es su naturaleza, cómo tenemos acceso a ellos, etcétera. También debe establecer de qué manera esto repercute en la práctica del matemático, aclarar cuál es la naturaleza de sus demostraciones y su correspondencia con el discurso matemático informal, así como su utilidad en general y el valor de su empresa.

A pesar de que la solución a las cuestiones presentadas en los párrafos de arriba resulta de gran interés para quienes hacen filosofía de la matemáti-

[1] Una respuesta común, cuyo origen se remonta a principios del siglo pasado, es que esto se debe a que las proposiciones más básicas de la matemática son analíticas, es decir, verdaderas en virtud de su significado. No obstante, esta respuesta no resulta satisfactoria para todos.

[2] Tal vez uno de los primeros en ofrecer una respuesta seria a estas cuestiones fue Kant con su tesis acerca de que tanto la aritmética como la geometría son sintéticas *a priori*. Como dice Shapiro (2009): "De acuerdo con Kant, la matemática se relaciona con las formas ordinarias de la percepción en el espacio y tiempo. Desde esta perspectiva, la matemática se aplica al mundo físico porque se ocupa de las maneras en que percibimos el mundo físico." (p.5). La traducción es propia.

[3] La traducción es propia.

ca, y aunque en última instancia buscan dar respuesta en menor o mayor grado a una o varias de ellas, la realidad es que el filósofo contemporáneo dedicado al análisis de la matemática concentra sus esfuerzos en tareas un tanto más reducidas o quizá un tanto más específicas, como por ejemplo en interpretar o darle un determinado sentido a ciertos resultados obtenidos por la comunidad matemática, o "en articular e interpretar teorías y conceptos matemáticos particulares" (Shapiro, 2009, p. 9).[4] Este es exactamente el tipo de acercamiento al cual se dirige el presente trabajo.

En este caso, la teoría particular a interpretar es la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel junto con el axioma de elección expresada en primer orden (ZFC) y el concepto matemático a discutir y analizar es el de la *interpretación* misma o, mejor dicho, interpretaciones de esa teoría desde la teoría de modelos. ¿A qué se refiere esto? La contribución de uno de los primeros grandes resultados (si no es que el primero) de la teoría de modelos fue demostrar algo sustancial y aparentemente paradójico acerca de la relación entre una teoría formal y su interpretación, esto se refiere, por supuesto, al teorema de Löwenheim-Skolem. Este teorema suele ser presentado en dos versiones (una descendente y otra ascendente), pero por ahora basta con presentar una versión general de él, a saber: si un conjunto contable de fórmulas de un lenguaje de primer orden tiene un modelo de cardinalidad infinita, entonces tiene un modelo de cualquier cardinalidad infinita.

Pero, ¿qué es eso sustancial que demuestra el teorema acerca de la relación entre la teoría y sus modelos? ¿Qué es lo paradójico? Para contestar estas preguntas resulta útil hacer una distinción entre teorías: las algebraicas y las no-algebraicas. Las primeras se refieren a aquellas que no cuentan con un modelo pretendido, por la que cualquier modelo puede considerarse sin preferencia alguna; las segundas, a aquellas que sí poseen un modelo pretendido y, por ende, hablan de una estructura particular. Además de esta distinción, resulta pertinente hacer una más, a saber, aquella entre teorías categóricas y no-categóricas: una teoría es categórica si y sólo si todos sus modelos son isomorfos.[5] Una teoría es no-categórica en el caso contrario. Cabe señalar que prácticamente cualquier teoría no-algebraica es categórica en segundo orden o κ-categórica en primer orden.[6] Con todo esto, una primera pregunta que salta a la vista es: ¿Qué tipo de teoría es ZFC, algebraica o no-algebraica? Usualmente la respuesta a esta pregunta es que es no-algebraica, después

[4] La traducción es propia.

[5] Se dice que dos modelos son isomorfos si y sólo si existe una biyección entre sus dominios que hace verdadero a los mismos enunciados de la teoría y que preserva las relaciones y funciones.

[6] Se dice que una teoría es κ-categórica si y sólo si todos los modelos de cardinalidad κ son isomorfos. Véase Enderton (2004, p. 230).

de todo se tiene una idea clara de lo que son los conjuntos, ¿no es así? En realidad, no. Resulta que la noción intuitiva o *preteórica* de lo que son los conjuntos no es tan clara como uno quisiera. Pero entonces, ¿cuál es la interpretación informal que se pretende capturar con los axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel más axioma de elección? La llamada *jerarquía acumulativa de los conjuntos bien-fundados* se ha convertido en una interpretación un tanto estándar para esto.[7]

Por supuesto falta hacerse otra pregunta: ¿Es ZFC categórica? Es aquí donde el teorema de Löwenheim-Skolem entra en acción. Recuérdese que la teoría de conjuntos aquí considerada es de primer orden y que ésta posee un modelo infinito (pues usualmente se asume que la teoría es consistente e incluye el axioma de infinito que es satisfecho por el modelo, *i.e.*, tiene a lo menos un modelo de tamaño numerable), por tanto, como consecuencia del teorema, ZFC posee un modelo de cualquier cardinalidad infinita. Esto significa que ZFC (en primer orden) no es categórica, es decir, que tiene modelos no-estándar que no son isomorfos con sus modelos estándar. Más aún, la no-categoricidad de ZFC implica que no puede distinguirse dentro de la teoría aquello que es distinguible desde fuera en la metateoría. En este trabajo resulta particularmente relevante que las nociones cardinales se relativizan como consecuencia de lo anterior. Y si esto no suena lo suficientemente problemático, estos resultados traen como consecuencia, entre otras cosas, dos paradojas, quizá aparentes, pero que aun así requieren de cierta explicación, a saber, la conocida paradoja de Skolem y la llamada paradoja de Orayen.

Así pues, el objetivo de este trabajo es llevar a cabo un análisis del teorema de Löwenheim-Skolem y de sus implicaciones sobre la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel más axioma de elección con el fin de establecer su verdadera importancia, principalmente para la teoría de modelos de la teoría de conjuntos expresada en primer orden. *Formalmente*, el teorema en cuestión no es problemático, pero es una vez que se realiza una serie de reflexiones de carácter filosófico que la interpretación de este resultado genera un cierto desconcierto digno de ser investigado. Sin embargo, de modo un tanto irónico, es con la perplejidad que se descubre un horizonte de posibilidades para el esclarecimiento de algunas de las dificultades más íntimas dentro de la teoría de modelos de la teoría de conjuntos y que la relevancia del teorema adquiere sentido pleno. El análisis filosófico motivado por el teorema de Löwenheim-Skolem permite, por lo menos, ofrecer ciertas soluciones y arrojar algunas respuestas sobre las cuestiones mencionadas arriba y que probablemente siquiera se habrían considerado de no ser por él. Entre tales, se encuentra la que promueve la hipótesis defendida por este trabajo, a saber, que el lugar que

[7]Véase Boolos (1971).

ocupa ZFC dentro de la clasificación de teorías algebraicas y no-algebraicas no se encuentra en una ni otra, sino más bien en una suerte de lugar intermedio que suscita una serie de consideraciones aceptables y de la que se desprende un mejor entendimiento de las nociones preteóricas que motivan el desarrollo de la teoría. Es a partir de estas consideraciones que justamente al final se podrá establecer una justificación filosófica de ciertas entidades extra-teóricas que permitirán recuperar las nociones conjuntistas perdidas como consecuencia del teorema de Löwenheim-Skolem. Se sostiene que esta solución permite obtener un resultado análogo al de cuasi-categoricidad de Zermelo, con la ventaja de que aquél se obtiene dentro de la lógica clásica de primer orden y, por tanto, permite que el tratamiento de ZFC expresada en orden uno preserve todas las cualidades deseables de dicha lógica.

La discusión principal en este trabajo, esta es, la desarrollada en la segunda parte y de la cual depende tanto el cumplimiento del objetivo como la defensa de la hipótesis, antes descritas, requiere de cierto conocimiento previo sobre lógica de primer orden y teoría de conjuntos, es por ello que la primera parte estará dedicada a la presentación de las nociones básicas necesarias para el adecuado seguimiento de las cuestiones a abordar posteriormente.

Así, primeramente, se presentará el objeto de estudio de la lógica, algunas posibles motivaciones y usos, así como ciertas distinciones y definiciones relacionadas con ella. Luego se describirá con cierto detalle la construcción de un lenguaje formal de primer orden, para introducir, en el siguiente par de secciones, un cálculo deductivo adecuado para los intereses a perseguir y una semántica basada en la teoría de modelos. Asimismo, en cada sección se ofrecerán definiciones conceptuales de utilidad para la discusión posterior y que facilitará la comprensión de ciertos resultados metateóricos importantes, y que a su vez se relacionan con el resultado obtenido por Löwenheim y Skolem. (Dichos resultados únicamente serán enunciados en el apartado 1.1.4., pero se remitirá al lector a la fuente donde puede encontrar sus respectivas pruebas.) En la siguiente sección, se introducirán las nociones conjuntistas y la concepción intuitiva detrás del sistema axiomático desarrollado por Zermelo en 1930. A continuación, se presentarán los axiomas de ZFC y algunas nociones elementales especialmente relevantes para el desarrollo de una teoría de ordinales y cardinales. Conceptos como ordinal, cardinal y cardinal fuertemente inaccesible aparecerán en la última sección de esta primera parte.

Después se dará lugar a la segunda parte, donde en un inicio se intentará establecer la importancia e interés tanto de trabajar teorías formalizadas en primer orden en general, como de estudiar la teoría de conjuntos y su formalización particular en orden uno, a pesar de las dificultades que pueden surgir de esto. En seguida, se pasará a introducir el teorema de Löwenheim-Skolem y las diferentes versiones en las que suele encontrarse, y podrá apreciarse de qué modo puede aplicarse fácilmente este resultado sobre la teoría de conjuntos. Así, en el siguiente apartado, se comenzará con el estudio de su interpretación y con el análisis filosófico de sus consecuencias: Se empezará por explorar la pérdida de categoricidad suscitada por el teorema y por manifestar el papel que juega en la generación de múltiples modelos estándar y no-estándar para ZFC. Se verá de qué manera la no-categoricidad implica la incapacidad de la teoría para distinguir formalmente lo que puede distinguirse de modo intuitivo y por esclarecer el significado de ello. Luego se caracterizarán las maneras frecuentes de aproximarse al estudio de las teorías formales, estas son, mediante la consideración "algebraica" y la "no-algebraica", y se ofrecerán elementos a favor y en contra de cada una, principalmente para establecer criterios de demarcación de modelos estándar y no-estándar. A partir de lo anterior, se optará por proponer una consideración adicional, llamada aquí aproximación "híbrida", y se argumentará en favor de ella como la más adecuada para abordar tal distinción en el caso de la teoría de conjuntos. Se hará énfasis en cómo esta alternativa es capaz de superar ciertas dificultades acerca de la relación entre la matemática formal, la informal y la teoría de conjuntos que las otras dos aproximaciones no logran superar.

Posteriormente, se planteará la paradoja de Skolem, la cual surge como consecuencia directa del teorema de Löwenheim-Skolem y que, en última instancia, lleva a la relativización indeseable de ciertas nociones importantes para la teoría de conjuntos. Adicionalmente, se presentará la paradoja de Orayen como una dificultad a la cual debe ofrecer respuesta el partidario de la consideración híbrida y la cual motiva una cierta comprensión favorable respecto de la teoría de modelos de la teoría de conjuntos; en particular, se resaltará la respuesta que Amor ofrece a las inquietudes de Orayen, la cual será de gran utilidad para el establecimiento de una solución a la relativización originada por la paradoja de Skolem. Finalmente, la última sección de este trabajo se dedicará justamente al desarrollo de dicha solución. Para ello se optimizarán los criterios de caracterización de modelos estándar anteriormente introducidos y se examinará qué nociones no sufren la relativización provocada por la no-categoricidad de ZFC originada por Löwenheim-Skolem (estas son, las expresadas por las llamadas Δ_0-fórmulas). La alternativa propuesta en este trabajo consiste en admitir la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles en la metateoría para restringir la estructura expresada por ZFC al mínimo nivel necesario para capturar toda noción conjuntista de interés, incluidas las nociones relativizadas por el teorema. En la última parte se pretende ofrecer una justificación filosófica para sostener la existencia metateórica de tales cardinales y así poder implementar la estrategia sugerida. Para concluir, se reflexionará respecto del modo en que esta alternativa permite obtener un resultado análogo al de cuasi-categoricidad de Zermelo y se esclarecerá en qué sentido es suficiente para generar un modelo de ZFC apropiado para la reconstrucción de las teorías de la matemática clásica que conserve sus estructuras pretendidas.

PRIMERA PARTE: NOCIONES PRELIMINARES

En tiempos recientes se ha visto el desarrollo del cálculo de la lógica, como es llamado, o lógica matemática, una teoría que ha ido mucho más allá de la lógica aristotélica. Ha sido desarrollada por matemáticos; filósofos profesionales han tenido muy poco interés en ella, presumiblemente porque la han encontrado muy matemática. Por otro lado, la mayoría de los matemáticos, asimismo, han tenido muy poco interés en ella, porque la han encontrado muy filosófica.

—Thoralf Skolem (1928)

Como es de suponer, el presente análisis requiere considerar ciertos conceptos y resultados elementales, tanto de la lógica de primer orden como de la teoría de conjuntos en la versión de Zermelo-Fraenkel más el axioma de elección. Es por ello que esta primera parte está dedicada a presentar de manera general el contenido relevante para llevar a cabo la discusión filosófica de la segunda parte. Así, el propósito principal de esta breve exposición es ofrecer la terminología y los resultados formales necesarios para examinar apropiadamente la teoría de modelos de la teoría de conjuntos y, a su vez, formular justificadamente las dos versiones del teorema de Löwenheim-Skolem, de cuyo análisis consiste el trabajo en cuestión. Además, se espera que esta parte permita establecer una serie de distinciones conceptuales entre sintaxis y semántica de los lenguajes formales que dé cuenta de las ventajas o atractivos de trabajar con lenguajes de primer orden. En manera alguna este tratamiento es exhaustivo, mas se espera sea suficiente para dar un panorama general para articular de manera adecuada las reflexiones de los propósitos de manejar una lógica con tales características.

1.1. *Lógica de primer orden*

Es común considerar que la lógica está íntimamente relacionada con la manera de razonar correctamente o, quizá más precisamente, con el análisis de las inferencias adecuadas. Tampoco es inusual encontrar que la matemática está envuelta dentro del estudio de los diferentes aspectos y propiedades de tales inferencias. Con todo, advertir las relaciones entre una y otra no es trivial, y merece ser examinada con cuidado. Propiamente, el lógico tradicional tiene preferencia por un tipo particular de inferencia, a saber, la *inferencia deductiva*. Pero, ¿qué tiene de especial este tipo de inferencia? ¿Cuál es el papel que juega la matemática en todo esto?

Una *inferencia* es el proceso[8] mediante el cual uno es capaz de concluir algo a partir de cierta información; tanto la conclusión como la información que la sugiere son presentadas en forma de enunciados o proposiciones.[9] La expresión lingüística que permite reproducir una inferencia es el *argumento*. Un argumento, *grosso modo*, es un conjunto de enunciados, uno de los cuales está designado para ser la conclusión y los demás como premisas,[10] es en virtud de estas últimas que se espera justificar o dar razón de lo expresado por la primera. No obstante, como es de esperarse, la manera de justificar razonablemente una conclusión no es única y es lo que da origen a distintas clases de argumento. Entre estos pueden mencionarse los del tipo deductivo, inductivo y abductivo.[11] Un *argumento deductivo* es aquel que preserva ver-

[8]Este proceso es usualmente mental, de ahí que sea asociado con el razonamiento.

[9]Algunos sostienen una diferencia entre enunciados y proposiciones. Los enunciados son un tipo especial de oración (expresiones lingüísticas sin variables libres) y las proposiciones son aquello que afirma o niega una oración. Sin embargo, en esta primera aproximación no resulta realmente relevante profundizar dentro de tal distinción.

[10]La discusión sobre si un argumento puede tener más de una conclusión está vigente, no obstante, lo usual es considerar un conjunto (posiblemente vacío) de premisas y una sola conclusión. En el presente trabajo únicamente se considerarán argumentos de esta última forma, pero es importante señalar la posibilidad de trabajar con argumentos de diferente estructura. De hecho, originalmente Aristóteles únicamente aceptaba argumentos que consistieran tan solo en un par de premisas y una única conclusión, el progreso en el estudio de la lógica mostró lo innecesario de dicha restricción y actualmente es posible considerar conjuntos infinitos de premisas.

[11]En realidad, esta taxonomía no es totalmente clara: hay quienes sostienen que los argumentos únicamente deben dividirse entre deductivos e inductivos, hay otros que afirman la existencia de una amplia variedad de tipos de argumentos (probabilísticos, conductivos, por analogía, etcétera); por otro lado, más radicalmente hay quien sostiene que el único tipo genuino de argumento es el deductivo. En fin, hay una gran cantidad de posiciones al respecto. Afortunadamente, para los fines de la presente exposición, no es necesario ahondar en posibles clasificaciones, es más, siquiera es necesario exponer exhaustivamente los diferentes tipos de argumentos, basta con presentar el criterio mínimo para distinguir un argumento deductivo de los que no lo son.

dad de las premisas a la conclusión o, dicho de otro modo, que garantiza la transmisión de verdad de las premisas a la conclusión. Otra forma frecuente de caracterizarlos es como aquellos cuya conclusión se sigue *necesariamente* de las premisas.[12] Por otro lado, cualquier argumento que no satisfaga las condiciones anteriores no es del tipo deductivo.

De modo un tanto impreciso, se ha dicho cuál es el objeto de estudio de la lógica y el tipo de inferencia que estudia regularmente. Sin embargo, resulta pertinente ser más claro al respecto si es que su relación con la matemática y su propósito (o propósitos) han de ser entendidos, o, más aún, si es que se pretende comprender su importancia para el conocimiento y su papel en el desarrollo de la ciencia y la matemática misma.

Anteriormente se dijo que la lógica estaba relacionada con el análisis de las inferencias adecuadas; se dijo también que el lógico presta especial interés por las inferencias de carácter deductivo; no obstante, uno puede ser más puntual al sustituir uno de los términos en el primero de los enunciados y afirmar que la lógica está, entre otras cosas, en relación íntima con el análisis de las inferencias *deductivamente válidas*. ¿Qué quiere decir esto? La validez es una propiedad principalmente atribuida a argumentos;[13] en general, un argumento es válido si y sólo si es *imposible*[14] que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa. De manera equivalente, un argumento es válido si y sólo si toda interpretación que hace verdadera a sus premisas hace a su vez verdadera a la conclusión. Es precisamente en este tipo de argumentos donde se dice que la conclusión se sigue *lógicamente* de las premisas. Dicho esto, no resulta muy difícil asociar un argumento válido con un razonamiento correcto.

Pero si es verdad que hay muchas clases de inferencia, ¿por qué hasta ahora se ha hecho tanto énfasis en una sola de ellas? ¿Por qué parece sugerirse, si bien muy implícitamente, que la lógica únicamente dedica su estudio de manera seria a la inferencia deductiva? ¿Cuál es el lugar de la matemática?

[12]El sentido modal de la palabra en cursiva puede entenderse en términos de "necesidad metafísica", *i.e.*, en el sentido de que aquello que afirman sus enunciados es el caso en cualquier mundo posible; sin embargo, esta concepción de la palabra no es unánime entre los filósofos y tiene sus problemas. Explorar las diferentes alternativas no deja de ser interesante, desgraciadamente hacerlo aquí desviaría demasiado los propósitos introductorios de esta sección.

[13]No es raro encontrar en algunos textos que la validez es un atributo exclusivo de los argumentos y no aplicable a los enunciados o proposiciones y que, por su parte, la verdad es una propiedad de la cual gozan solamente estos últimos. Sin embargo, es frecuente encontrar en otros textos el término "enunciado válido" para referirse a los enunciados lógicamente verdaderos. Estos conceptos serán explorados de manera precisa más adelante.

[14]Esta expresión puede ser entendida de forma similar a la que se indicó en la nota *12*, esto es, en el sentido de "imposibilidad metafísica".

Para responder estas preguntas es necesario examinar algunas motivaciones y aplicaciones de la lógica simbólica moderna.

Como dice Shapiro (2003), el papel de la lógica depende en gran medida del uso que se hace de ella: sus objetivos fueron varios con el paso del tiempo y con ellos su modo de hacerse. Lejos de ser exhaustivo, algunos de ellos han sido los siguientes:

> *i)* desarrollar cálculos que (más o menos) describan de manera precisa los patrones inferenciales (correctos) de la matemática –cada cálculo pretende describir inferencias correctas para una o más áreas;
>
> *ii)* llevar a cabo el programa logicista y codificar la lógica subyacente bajo todo discurso racional o científico –y así capturar las características más generales de la competencia racional;
>
> *iii)* proveer un marco de referencia dentro del cual toda (o la mayoría de) la matemática puede ser (re)formulada –en breve, un fundamento;
>
> *iv)* formalizar una rama particular de la matemática, como la aritmética, el análisis, la geometría o la teoría de conjuntos, que puede involucrar *a)* la codificación de las proposiciones cognoscibles (o deducibles) o las verdades de dicha rama, o *b)* describir la estructura (o estructuras) estudiadas por tal rama, o *c)* ambas.
>
> *v)* optimizar la razón humana;
>
> *vi)* llevar a cabo el programa logicista y establecer un lenguaje canónico para la ciencia. (p. 10)[15]

Aunque algunos de los puntos de arriba resultan controversiales u obsoletos, estos permiten dar cuenta (quizá parcialmente) de los presupuestos filosóficos que los motivan. Por ejemplo: en *i)* se presupone la existencia de cálculos que adecuadamente pueden capturar inferencias en diferentes áreas de la matemática; en *ii)* se asume un reduccionismo y que hay una lógica subyacente bajo todo discurso científico; en *iii)*, la (posible) existencia de un fundamento para la matemática; en *iv)*, que hay proposiciones cognoscibles y estructuras dentro de diferentes ramas matemáticas; en *v)*, que existe algo como "la razón humana"; y en *vi)*, el deflacionismo metafísico y empirismo característico del programa positivista; véase (Shapiro, 2003, p. 11).

Como puede apreciarse, fuera de los presupuestos filosóficos bajo los objetivos anteriormente citados, la mayor parte de ellos sugiere (explícita o implícitamente) el manejo de un lenguaje apropiado para describir las proposiciones y estructuras dentro de las diferentes áreas de la matemática y

[15] La traducción es propia.

la ciencia, así como de un cálculo adecuado para describir las inferencias realizadas dentro de ellas. Por la naturaleza de su empresa, tanto la ciencia como la matemática requieren que las inferencias dentro de sus disciplinas preserven la verdad de sus proposiciones y que sus proposiciones puedan ser debidamente representadas.[16] Inevitablemente, el rigor que esto demandaba llevó a que el lógico, a su vez, recurriera a maquinaria matemática para lograrlo. Es en gran medida por estas condiciones que surgió la lógica simbólica como se conoce en la actualidad.

La lógica simbólica surge, pues, como un modelo matemático de la inferencia deductiva. Como el lector seguramente sabe, la matemática axiomática consiste en gran parte de inferencias de este tipo, cuya *correctud lógica* depende de su forma o estructura y es independiente de su contenido (Enderton, 2004, p. 10). La forma de los argumentos está determinada por la posición de las *constantes lógicas* dentro de los enunciados que los componen; por el momento no se dirá más al respecto, pues este tipo de términos se mencionarán con mayor detalle más adelante en la sección destinada a la semántica de los lenguajes formales. El modelo matemático elegido para representar la matemática en el presente trabajo, más específicamente la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel más axioma de elección, es el de la lógica clásica de primer orden. Pero antes de pasar a los detalles, es conveniente hacer ciertas anotaciones.

Una *lógica* está completamente determinada (*a full logic*, como la llama Shapiro) por un lenguaje formal, un cálculo deductivo y una semántica (posiblemente representada en la teoría de modelos),[17] aunque bien podría llamarse lógica (si bien parcialmente determinada) a un lenguaje formal junto con un cálculo deductivo o a un lenguaje formal junto con una semántica.[18] Ahora, un *lenguaje formal* es, a grandes rasgos, un modelo matemático que representa un fragmento del lenguaje natural (quizá aumentado con expresiones de origen matemático).[19] Por su parte, un *cálculo deductivo* es un modelo matemático de una serie de razonamientos o inferencias expresadas a través

[16] La capacidad expresiva del lenguaje debe ser suficiente para representar las proposiciones de las diferentes disciplinas de manera precisa y sin ambigüedad.

[17] Aunque la teoría de modelos (clásica) se ha convertido en la manera estándar de representar la semántica de los lenguajes formales, no es la única manera de hacerlo: uno bien podría formularla apelando a la teoría de categorías, a la teoría de modelos-clase, etcétera.

[18] Un lenguaje formal por sí solo difícilmente puede considerarse como una lógica (sin importar la precisión de su formulación). Por otro lado, cualquier cálculo deductivo y cualquier semántica requieren de un lenguaje de base para ser formulados; evidentemente, estos últimos tampoco pueden considerarse como una lógica por sí mismos.

[19] Algunos componentes del lenguaje formal se corresponden con elementos del lenguaje natural *e. g.* las constantes lógicas.

del lenguaje modelado por el lenguaje formal. Por último, una *semántica* (*modelo-teórica*) es un modelo matemático que refleja la relación entre las expresiones del lenguaje natural y sus referencias en el mundo real[20] (Shapiro, 2003). Cabe señalar que la formulación del cálculo deductivo apela meramente a elementos sintácticos del lenguaje y nunca a posibles significados de sus términos, es por ello que gran parte de los conceptos del cálculo llevan el adjetivo "sintáctico" para especificarlos y diferenciarlos de sus análogos semánticos. El propósito de los modelos matemáticos, en general, es exhibir ciertas propiedades de los lenguajes naturales y de los razonamientos expresados en ellos.[21]

"El marco de referencia general utilizado para formular y discutir el lenguaje, sistema deductivo y/o semántica de una lógica se conoce como *metateoría*" (Shapiro, 2003, p. 9).[22] Como se verá en las próximas secciones, los elementos que conforman una lógica completamente determinada deben ser especificados con rigor y precisión, para ello es menester un lenguaje, frecuentemente un lenguaje natural (con expresiones de la matemática añadidas), llamado *metalenguaje*. Cabe señalar que este metalenguaje no requiere ser el mismo lenguaje modelado por la lógica en cuestión (Shapiro, 2003). El lenguaje cuya sintaxis (gramática), cálculo deductivo y semántica son precisados por medio del metalenguaje comúnmente es conocido como *lenguaje-objeto*. Para llevar a cabo la formulación del lenguaje-objeto (y de su cálculo y su semántica), la metateoría de la lógica o *metalógica* debe contar con los recursos suficientes para describirlo,[23] es decir, debe asumir algo de aritmética y/o teoría de conjuntos,[24] pues, como se dijo en la introducción, la lógica usualmente se sirve de maquinaria matemática para definir y modelar sus lenguajes formales, sus sistemas de deducción y su semántica (*e.g.* en la teoría de modelos).

La lógica clásica de primer orden es uno de los infinitos modelos matemáticos para representar teorías, a diferencia de otras lógicas de primer orden[25]

[20]Quizá aquí el complemento circunstancial resulta un tanto excesivo. En rigor no habría razón para exigir una referencia "real" para entablar tal relación con los elementos del lenguaje. Es por esta razón que en adelante se preferirá omitir dicho complemento al hablar de esta relación, la única razón para mantenerlo aquí fue con fines ilustrativos.

[21]En este trabajo, los lenguajes formales se refieren únicamente a aquellos relacionados con lógica, pues es posible encontrar lenguajes formales no relacionados con los estudios lógicos.

[22]La traducción es propia.

[23]A diferencia de la lógica definida por el metalenguaje, la metateoría sí tiene compromisos ontológicos.

[24]O asumir los axiomas que expresan tales teorías.

[25]Lógicas de primer orden, como la intuicionista, relevantista, lineal, entre otras, representan diferentes selecciones de propiedades en las inferencias. La lógica clásica de primer

es particularmente intuitiva y, probablemente, mínimamente apropiada para modelar inferencias de la matemática. Es posible que una lógica de orden mayor sea más adecuada para formular las prácticas del matemático activo (esta es la posición de Shapiro, 2003); sin embargo, la lógica de primer orden posee ciertas propiedades "deseables" que permiten un tratamiento uniforme de las nociones sintácticas y semánticas, pues, como es sabido, dicha lógica es *correcta* y *completa*, lo que implica que las propiedades semánticas y sintácticas son extensionalmente equivalentes y se corresponden unas con otras. Además, el tratamiento de la lógica de primer orden es necesario para introducir el teorema de Löwenheim-Skolem y que es el asunto principal en este trabajo, pues la lógica, dígase, de segundo orden, por ejemplo, no está sujeta a dicho teorema.[26] Y si se pregunta por qué no emplear la lógica de orden cero (proposicional) aun cuando varios de sus sistemas son completos y correctos, la respuesta es simple: tal lógica resulta terriblemente inadecuada para modelar inferencias interesantes de la matemática y no preserva las suficientes propiedades inferenciales para el análisis adecuado de las cuestiones que atañen a la discusión de la segunda parte.[27]

Hasta aquí se ha visto brevemente el objeto de estudio de la lógica, algunas posibles motivaciones y usos, así como ciertas distinciones y definiciones de su incumbencia. Entre estas se mencionaron de manera burda lo que son los lenguajes formales, los cálculos deductivos y las semánticas. Es momento de darles un tratamiento más detallado.

1.1.1. *Los lenguajes formales de primer orden*

Para poder investigar las propiedades de los enunciados de la teoría de conjuntos,[28] se requiere formalizar el lenguaje de esta última,[29] para esto se recurrirá a un lenguaje de primer orden que contenga las expresiones convenientes para simbolizar sus afirmaciones. No obstante, antes de sumergirse en el lenguaje de primer orden para la teoría de conjuntos, en este apartado se

---

orden junto con sus propiedades es la estándar (véase, sección 2.1.).

[26]Esto sucede cuando se toman en cuenta semánticas estándar en las que los cuantificadores de segundo orden corren sobre el conjunto potencia del dominio y no sobre un subconjunto de él.

[27]La lógica de orden cero no es suficientemente expresiva para recuperar la estructura interna de las oraciones.

[28]Se asume que el lector está lo suficientemente relacionado con la teoría de conjuntos para seguir la exposición sin problema; en caso contrario, puede dirigirse al apartado destinado a la teoría de conjuntos y regresar una vez que esté más familiarizado con la notación y conceptos elementales (Sección 1.2.).

[29]El lenguaje de la teoría de conjuntos sin formalizar puede ser un lenguaje natural como el español aumentado con expresiones de origen conjuntista.

desarrollarán los elementos que conforman esta clase de lenguajes en general.

Como se mencionó en la sección pasada, los lenguajes formales de primer orden son modelos matemáticos de fragmentos del lenguaje natural, y, aunque estos permiten representar de manera precisa y sin ambigüedad los enunciados de este último, con todo, su grado de expresividad es muy limitado en comparación con el de sus contrapartes modeladas.

La descripción de un lenguaje formal depende principalmente de: *i)* un conjunto (no-vacío) de símbolos o *alfabeto*; y *ii)* reglas rigurosas (habitualmente *recursivas*)[30] para formar sucesiones finitas de símbolos gramaticalmente correctas. Así, más concretamente un lenguaje formal es una colección de sucesiones sobre un alfabeto fijo definidas recursivamente.

En lo sucesivo se asumirá un conjunto infinito de símbolos distintos clasificados como sigue:

a) Símbolos lógicos[31]

   1. Símbolos de conectiva para enunciados y fórmulas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

   2. Variables (una cantidad *numerable*):[32] v_1, v_2,...

   3. Símbolo de igualdad (opcional): $=$.

b) Símbolos no-lógicos o Parámetros[33]

   1. Símbolos de cuantificador: $\forall$, $\exists$.

   2. Símbolos[34] de predicado[35] (un conjunto numerable, posiblemente

[30] *Grosso modo*, el proceso de recursión consiste en determinar el valor de una función al apelar a otros valores de la misma función.

[31] También conocidos como *constantes lógicas*. Su condición como "constantes" se hará presente en la sección sobre la teoría de modelos.

[32] En este trabajo, el adjetivo "numerable" alude a la biyección entre un determinado conjunto y todos los naturales. Por su parte, "contable" alude a la biyección de un cierto conjunto con los naturales o entre aquél y un subconjunto propio de estos últimos, es decir, alude tanto a conjuntos cuya cardinalidad es a lo más la de los naturales, como a aquellos cuya cardinalidad es finita. Algunos autores como Hunter (1981, p. 32) optan por llamar *enumerables* a los conjuntos numerables y *numerable* a los contables finitos. Sin embargo, aquí se preferirá la primera caracterización.

[33] También conocidos como *constantes no-lógicas*. Aunque su calidad de "constantes" es más "variable" que en el caso de las lógicas, en la sección 1.1.3. se verá que su título como "constantes" está bien merecido.

[34] Tanto los símbolos de predicado como los de función, en ocasiones son llamados letras (de predicado y de función, respectivamente).

[35] Algunos prefieren distinguir entre los símbolos de predicado los de cero argumentos, los de uno y los de dos o más; estos son llamados símbolos proposicionales, de propiedad

vacío) de n argumentos (donde n es un número natural):[36] P_1, P_2,...

3. Símbolos de función[37] (un conjunto numerable, posiblemente vacío) de n argumentos (donde n es un natural):[38] f_1, f_2,...

c) Símbolos auxiliares

1. Separadores o paréntesis (una cantidad numerable): (,).

Antes de continuar, es importante señalar que cada símbolo es distinto y no es una sucesión finita de otros. También es pertinente mencionar que el símbolo de igualdad no está presente en todo lenguaje de primer orden y que en rigor es meramente un símbolo de predicado de dos argumentos; con todo, su comportamiento semántico manifestará su condición como símbolo lógico, más que como parámetro. Además, respecto de los símbolos de conectivo, normalmente basta con elegir un conjunto *completo* de ellos, esto es, uno que permita definir el resto de los conectivos en sus términos. Entre los más populares están: $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\rightarrow, \bot\}$.

Con frecuencia, en la literatura es posible encontrar que los símbolos no-lógicos son definidos por medio de una sucesión $\sigma = \langle S_{fun}, S_{rel}, ar\rangle$[39] conocida como *signatura algebraico-relacional* (o simplemente *signatura*). Si la signatura no contiene símbolos funcionales, entonces es llamada *signatura*

---

y de relación, respectivamente. En los últimos dos casos se puede prescindir de tal distinción sin riesgo alguno, de hecho, hasta cierto punto resulta deseable, pues posibilita un manejo uniforme de estos símbolos. A diferencia de los anteriores, el caso de los símbolos proposicionales muchas veces sí resulta más útil señalarlo, estos se comportan de la misma manera que los símbolos no-lógicos de la lógica proposicional.

[36]Véase nota *38*.

[37]De igual manera, estos símbolos suelen ser divididos entre los de cero y los de uno o más argumentos. Los primeros se conocen como símbolos de constante; los segundos, como símbolos funcionales (o de función) a secas. De nuevo, la ventaja de prescindir de esta distinción es la uniformidad en su manejo, no obstante, en este trabajo hacer la distinción facilita en gran medida la exposición y es por ello que cuando se hable de símbolos de constante se debe tener presente que se trata únicamente de una forma de referirse a los símbolos funcionales de cero argumentos.

[38]"De n argumentos" hace referencia a la *aridad* de una relación o una función. Rápidamente, la aridad es una función $ar : S_{fun} \cup S_{rel} \rightarrow \mathbb{N}$, *i. e.*, una función que asigna un natural a cada símbolo de función y relación. Dicho de otro modo, la aridad de una función es el número de variables independientes que requiere tomar para poder determinar su imagen; por su parte, la aridad de una relación se refiere a la dimensión o longitud de las sucesiones que la conforman. (Como se verá en el capítulo sobre la teoría de conjuntos, una relación consiste en un conjunto de sucesiones.)

[39]S_{fun}, S_{rel} y ar se refieren al conjunto de símbolos funcionales, al de los símbolos relacionales y al de la función aridad, respectivamente.

relacional; si no contiene símbolos de relación, entonces se llama *signatura algebraica*. Esta notación, muy empleada en el álgebra abstracta, es muy útil para señalar de manera explícita qué símbolos caracterizan el lenguaje en cuestión. Más específicamente, en el álgebra abstracta, la signatura permite establecer con precisión qué elementos conforman una determinada estructura algebraica. Estas nociones resultarán de utilidad más adelante cuando se presenten las estructuras algebraico-relacionales para la teoría de modelos.

En fin, regresando a los lenguajes formales, lo que sigue estará dedicado a la construcción de los *términos* y *fórmulas* de estos lenguajes. Los términos juegan el papel de sustantivos y pronombres en el lenguaje, nombran objetos o son frases nominales; las fórmulas, de enunciados o proposiciones que cuando son interpretadas afirman o niegan algo respecto de esos objetos.[40] Más precisamente: tanto los términos como las fórmulas son expresiones peculiares del lenguaje; una *expresión* es cualquier sucesión finita de símbolos del lenguaje. El objetivo aquí es determinar clara y distintamente un conjunto muy peculiar de expresiones, a saber, los términos y las fórmulas. Como se dijo párrafos arriba, esto se hará de manera recursiva. Para hacerlo, se define para cada símbolo de función f de n argumentos (de los que hay una cantidad numerable) una operación $n-$aria[41] de construcción de términos $\mathcal{F}t_f$ sobre el conjunto de las expresiones:

$$\mathcal{F}t_f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = f\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$$

En caso de que f sea de cero argumentos: $\mathcal{F}t_f() = f$.

También se define una sucesión de construcción de términos como una sucesión finita $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ de expresiones tal que, para cada $i \leq n$, sucede que: *i)* ε_i es una variable; *ii)* ε_i es un símbolo de constante; o *iii)* $\varepsilon_i = \mathcal{F}t_f(\varepsilon_j, \ldots, \varepsilon_k) = f\varepsilon_j, \ldots, \varepsilon_k$ para algunas $j < i$ y $k < i$.

De este modo, el conjunto de términos es el conjunto de expresiones que pueden construirse a partir de los símbolos de constante y variables al aplicar cero o más veces las operaciones $\mathcal{F}t_f$ (que es una cantidad numerable pues hay una por cada símbolo funcional). Esta definición genera el siguiente *principio de inducción*: Si T es un conjunto de expresiones que contiene todos los símbolos de constante y variable, y está cerrado[42] bajo todas las operaciones de construcción de términos, entonces T es el conjunto de todos los términos.[43]

[40] Esto sucede con fórmulas sin variables libres, es decir, con enunciados.

[41] Una *operación $n-$aria* definida sobre A es una función $f : A^n \to A$ (donde n es natural).

[42] Se dice que un conjunto A está cerrado bajo una operación f si y sólo si $f(a_1, \ldots, a_n) \in A$ siempre que $a_i \in A$.

[43] La prueba es sencilla, por inducción numérica fuerte: el paso base, cuando los símbolos

Una vez visto cómo construir términos, se construirán las *fórmulas bien formadas* (o simplemente *fórmulas*). Para ello, se requieren definir antes las *fórmulas atómicas*, pues es a partir de ellas que se formarán todas las demás. Las fórmulas atómicas pueden definirse de manera análoga a los términos, esto es, mediante operaciones $n-$arias de construcción de fórmulas atómicas $\mathcal{F}fa_P$ para cada símbolo P de predicado (también hay una cantidad numerable) de n argumentos, definidas sobre el conjunto de los términos:

$$\mathcal{F}fa_P(t_1, \ldots, t_n) = Pt_1, \ldots, t_n$$

Si P es un símbolo proposicional (de cero argumentos): $\mathcal{F}fa_P() = P$.

Nótese que este caso no se trata de una definición recursiva, uno no debe dejarse engañar por la similitud con las operaciones de construcción de términos. En esta ocasión, uno tan solo se ha limitado a decir explícitamente cuáles son las fórmulas atómicas, obviamente esto no genera un principio de inducción.[44] Es importante resaltar que dentro de las fórmulas atómicas también se encuentran aquellas que poseen el predicado binario de identidad.

Sin embargo, el caso de las fórmulas bien formadas[45] es distinto al de las atómicas y sí se definen por recursión. Así, las fórmulas “son aquellas expresiones que pueden construirse a partir de fórmulas atómicas mediante el uso (cero o más veces) de los símbolos de conectivo y [los] símbolo[s] de cuantificador” (Enderton, 2004, p. 114). De nuevo, para construir las fórmulas uno puede definir operaciones de construcción de fórmulas (una por cada símbolo de cuantificador[46] y por cada símbolo de conectivo) sobre el conjunto de las expresiones como sigue: *i)* $\mathcal{E}_\neg(\phi) = \neg\phi$; *ii)* $\mathcal{E}_\wedge(\phi, \psi) = \phi \wedge \psi$; *iii)* $\mathcal{E}_\vee(\phi, \psi) = \phi \vee \psi$; *iv)* $\mathcal{E}_\rightarrow(\phi, \psi) = \phi \rightarrow \psi$; *v)* $\mathcal{E}_\leftrightarrow(\phi, \psi) = \phi \leftrightarrow \psi$; *vi)* $\mathcal{Q}_{i\forall}(\psi) = \forall v_i\psi$; *vii)* $\mathcal{Q}_{i\exists}(\psi) = \exists v_i\psi$. Un resultado importante es que cada fórmula se *genera libremente*[47] a partir del conjunto de fórmulas atómicas al aplicar las operaciones anteriores. Este resultado comúnmente se conoce

---

de constantes y variables están bajo consideración, es trivial. El paso inductivo supone que la afirmación se cumple para todos los términos $\varepsilon_i < \varepsilon_n$. Evidentemente, $\varepsilon_n \in T$, pues la operación $\mathcal{F}t_f$ necesariamente tomó términos como argumento. Por ende, ε_n es término.

[44]Para ello se requeriría que el conjunto de fórmulas atómicas fuera inductivo y obviamente no lo es: los términos por sí solos no son fórmulas atómicas, y las operaciones de construcción de fórmulas atómicas solamente son aplicables a términos, no a fórmulas atómicas.

[45]También son conocidas como *moleculares* o *compuestas*.

[46]En realidad, es suficiente con uno de los cuantificadores, pues el otro puede definirse en virtud de aquél y la negación.

[47]Esto quiere decir que *i)* las siete operaciones de construcción de fórmulas son uno-a-uno; y *ii)* que tanto el rango de las siete operaciones es disjunto dos-a-dos, así como con el conjunto de fórmulas atómicas.

como "teorema de unicidad de lectura para fórmulas"[48] y es el responsable de evitar la ambigüedad sintáctica (*amphiboly*, en inglés) en los lenguajes formales.[49]

Como sea, en el caso anterior sí se genera un principio de inducción: Si F es el mínimo conjunto de expresiones que contiene todas las fórmulas atómicas y está cerrado[50] bajo todas las operaciones de construcción de fórmulas, entonces F es el conjunto de todas las fórmulas. La prueba por inducción, aunque tediosa, es rutinaria.

A continuación se definirá la noción de *variable libre* y *variable ligada*, pero antes, reflexiónese un poco sobre el papel que juegan las variables en los lenguajes de primer orden. El *role* de las variables, a diferencia de las constantes y símbolos funcionales, no es representar nombres de objetos ni frases nominales, sino que especifica una posición en una expresión dada, es decir, se comporta como un marcador de lugar (*placeholder*, en inglés). No obstante, esta no es su única función, también sirve para tomar un valor o un conjunto de valores cuando ocurre de forma peculiar en ciertas expresiones. Lo anterior, *grosso modo*, figura lo que significa ser libre y ligada; sin embargo, la definición precisa de ambos conceptos se hace por recursión: Para una variable arbitraria x y una fórmula atómica ψ, x ocurre libre en ψ si y sólo si x ocurre en (es símbolo de) ψ; para cualquier variable x y fórmulas ψ y ϕ, x ocurre libre en $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \rightarrow \psi$, y $\phi \leftrightarrow \psi$ si y sólo si x ocurre libre en ψ y ϕ. Por último, x ocurre libre en $\forall v_i \phi$ y en $\exists v_i \phi$ si y sólo si x ocurre libre en ϕ y $x \neq v_i$.[51] Por otra parte, se dice que x está ligada a un cuantificador si en el último caso $x = v_i$.

Cabe hacer otra observación, cuando no existen ocurrencias libres de una variable dentro de una fórmula ϕ, entonces se dice que ϕ es un *enunciado*, es decir, "de manera intuitiva, las fórmulas que pueden traducirse sin espacios

[48]Un resultado análogo puede encontrarse para los términos. Una prueba de esto puede encontrarse en Enderton (2004, pp. 158-160).

[49]La prueba es por casos, si el lector está interesado en estudiarla con mayor detenimiento puede encontrarla en Enderton (2004, pp. 161-162) y en Shapiro y Kouri Kissel (2018).

[50]Véase la nota *42*.

[51]Implícitamente esta definición emplea el teorema de la recursión (Enderton, 2004, p. 116). La enunciación y demostración de este teorema puede encontrarse en varios lugares, por ejemplo, en Enderton (2004, pp. 65-72), en Enderton (1977, pp. 73-75) y Jech (2006, p. 22). Mientras que en Enderton (1977) el teorema está restringido solamente a los naturales, en Jech el teorema es presentado de manera más general y toma bajo consideración todo ordinal límite; por otro lado, Enderton (2004) no se limita a considerar el teorema únicamente para ordinales, sino que el estado ontológico de los objetos a los cuales el teorema puede ser aplicado no lo restringe a contextos enteramente matemáticos. Es por esto que la presentación en este último podría decirse ser la más general de todas; no obstante, la presentación más rigurosa sin duda es la que aparece en el texto de Jech.

en blanco al español, una vez que se [...] ha dicho cómo interpretar los parámetros." (Enderton, 2004, p. 116).[52]

Antes de concluir esta sección, deténgase a pensar que fue lo que se hizo. Primero, se describió un conjunto de símbolos y se separaron en tres categorías; como tal, hasta el momento estas categorías no tienen significado alguno, si se mencionó el propósito de tal o cual tipo de símbolo fue exclusivamente con la intención de sugerirle algún sentido intuitivo y no una arbitrariedad absoluta. En segundo lugar, se establecieron reglas precisas y estrictas para determinar y estipular qué concatenación de dichos símbolos contaban como gramaticalmente aceptables. La otra intención de "dotar provisionalmente" de significado a estos símbolos y sucesiones de símbolos fue mostrar con qué partes del lenguaje natural se corresponden. Con todo, se alienta a que el lector mantenga en claro que el contenido de este apartado pudo ofrecerse enteramente sin estos apoyos conceptuales. Por otro lado, la construcción de estos lenguajes también permitió notar lo que se dijo en la sección pasada respecto de la metateoría: en efecto, si ella no contara con elementos previos, intuitivos o informales de teoría de conjuntos y aritmética, no habría sido posible ofrecer ciertas pruebas como las de inducción matemática, ni tampoco las definiciones de varias nociones aquí presentadas.

Por último, es pertinente destacar que la cantidad de los símbolos lógicos y no-lógicos de los lenguajes de primer orden presentados en esta sección es, en cada caso, a lo más numerable, es decir, la cardinalidad de estos lenguajes en su totalidad es a lo más numerable,[53] pues la cardinalidad de un lenguaje está completamente determinada por la cantidad de símbolos que lo componen. En realidad, esto quiere decir que el lenguaje tiene una cantidad a lo más numerable de fórmulas. Lo anterior es un corolario del siguiente teorema: El conjunto de las sucesiones finitas de elementos de un conjunto numerable A, es numerable. En el caso que compete a los lenguajes formales, el conjunto A es el conjunto numerable de los símbolos del lenguaje (lógicos y no-lógicos) y el conjunto de las sucesiones finitas de sus elementos es el conjunto de las expresiones. Si el teorema se cumple para el conjunto de todas las expresiones, evidentemente se cumple para el conjunto de todas las fórmulas, pues esta

[52] Algunos autores prefieren imponer algunas restricciones *ad hoc* para evitar el tratamiento de fórmulas con variables libres. Aunque estas medidas permiten facilitar en gran parte el manejo de un lenguaje de primer orden, esto impide la *definibilidad* de ciertas relaciones $n-$arias en una estructura mediante variables libres.

[53] Sin embargo, esta no es una exigencia que necesariamente deba ser satisfecha. Es perfectamente posible considerar lenguajes no-numerables de primer orden, pero esto trae consecuencias controversiales. Por ejemplo, como se verá en el siguiente apartado, en gran medida lo que otorga su *status* a una deducción como una demostración en sentido informal es que esta pueda reproducirse para alguien más, esto principalmente es posible gracias a que los lenguajes bajo consideración son a lo más numerables.

última es un subconjunto propio del primero.[54]

También es posible contar lenguajes no-numerables, esto resulta conveniente indicarlo puesto que el teorema de Löwenheim-Skolem en sus versiones más generales no se restringe a lenguajes numerables. En el caso de estos lenguajes es posible a su vez obtener un teorema análogo al anterior cuando A es en general infinito (numerable o no-numerable), este es: si A es un conjunto infinito, el conjunto $\bigcup_n A^{n+1}$ de todas las sucesiones finitas de elementos de A tiene cardinalidad igual a A.[55]

Con esto concluye la presentación de los lenguajes formales de primer orden, en la siguiente sección se describirá uno de los infinitos cálculos deductivos que pueden darse para estos lenguajes.

1.1.2. *Un cálculo deductivo para los lenguajes formales de primer orden*

Recuérdese la sección primera: Los cálculos deductivos son modelos matemáticos de una serie de razonamientos o inferencias expresadas a través del lenguaje modelado por el lenguaje formal. Pero esto aún no es del todo claro. Este apartado, aunque más breve que los demás, se propone abordar con mayor detenimiento las cuestiones que rodean el desarrollo del cálculo deductivo; asimismo, otro de los propósitos será describir y elegir uno de entre los muchos posibles.

Seguramente, el lector haya escuchado alguna vez que "[q]uizá la cuestión principal dentro de la filosofía de la lógica [es la que] concierne la naturaleza, o naturalezas, de la consecuencia lógica" (Shapiro, 2009, p. 24).[56] El debate respecto de la verdadera naturaleza de la consecuencia lógica suele estar dividido entre dos tradiciones: la teoría de modelos y la teoría de la demostración.[57] Es de esta última de la que se ocupará la presente sección; mientras

[54]La prueba de esto recuerda bastante a la estrategia de la numeración de Gödel: la demostración consiste en construir una función uno-a-uno $g : S \to \mathbb{N}$; donde S es el conjunto de todas las sucesiones finitas en A. La ecuación que describe el conjunto S es: $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{n+1}$. Como A es numerable entonces existe $f : A \to \mathbb{N}$ uno-a-uno. Ahora sólo falta encontrar la manera de asociar a cada secuencia $\langle a_0, \dots, a_m\rangle$ un número natural, esto se hace mediante la función g, tal que $g(\langle a_0, \dots, a_m\rangle) = 2^{f(a_0)+1} \cdot \dots \cdot p_m^{f(a_m)+1}$; donde p_m es el $(m+1)-$ésimo primo (Enderton, 2004, p. 20).

[55]La prueba utiliza el "teorema de aritmética cardinal" que dice: si κ y λ son cardinales tal que $\kappa \leq \lambda$ y λ tiene cardinalidad infinita, entonces $\kappa + \lambda = \lambda$; además, si $\kappa \neq 0$, entonces $\kappa \cdot \lambda = \lambda$. La prueba del teorema en cuestión es, pues, como sigue: por el teorema anterior, la cardinalidad de cada $A^{n+1} = \text{card } A$; entonces, la unión de una cantidad $\aleph_0$ conjuntos de tamaño card A es $\aleph_0 \cdot \text{card } A = \text{card } A$.

[56]La traducción es propia.

[57]Para una breve introducción de esta discusión, véase Caret y Hjortland (2015).

que la siguiente, de la primera.

Como dice Hunter (1981),

> [l]a teoría de la demostración es aquella parte de la teoría de los sistemas formales (es decir, de los lenguajes formales dotados de mecanismos deductivos) que no entraña de manera esencial una teoría de modelos (es decir, que no requiere de ninguna referencia a interpretaciones de los lenguajes) (p. 22)

Pero, ¿en qué consiste, realmente, la teoría de la demostración?[58] Probablemente, *la teoría de la demostración* se remonta a 1935 cuando Gentzen presentó la idea de que el "significado"[59] de los conectivos lógicos está definido por sus reglas de introducción (las reglas de eliminación están justificadas con base en la correspondencia que tienen con la estipulación de las introductorias) (Caret y Hjortland, 2015, p. 8). Pero antes de ver a qué se refiere uno con estas reglas, considérese lo siguiente.

Informalmente, "una demostración es un argumento que se da a otra persona y que la convence completamente de la correctud de nuestra aseveración" (Enderton, 2004, p. 162).[60] El enunciado anterior, por lo menos intuitivamente, sugiere que tal argumento necesita ser de longitud finita (de otro modo, jamás podría darse completo a otra persona) y que, en caso de tener una cantidad infinita de premisas, baste una cantidad finita para sacar la conclusión deseada (Enderton, 2004, p. 162). En pocas palabras, una demostración, de nuevo, de manera informal, deberá consistir en un *método efectivo*[61] para determinar si es correcto inferir alguna conclusión de un conjunto (posiblemente vacío) de premisas. Por tanto, una demostración, al

[58]También conocida como *teoría de la prueba* o *teoría de la deducción*.

[59]Recuérdese que la construcción de un cálculo no depende de elementos semánticos.

[60]Esto puede resultar cuestionable para muchos, pero la afirmación tan solo pretende ilustrar lo que idealmente podría tomarse como una demostración, la idea de fondo presupone el hecho de que una cierta persona ya posee los recursos conceptuales y el entrenamiento suficientes para comprender el desarrollo de la prueba.

[61]Este es un concepto intuitivo, la siguiente es su definición informal. Un *método efectivo* o *procedimiento efectivo* es aquel que satisface las siguientes condiciones: *i)* es establecido por una serie de instrucciones exactas y finitas (esto es, un *programa* o *algoritmo*) que indiquen cómo ejecutarlo; *ii)* debe producir el resultado correcto (o dar la respuesta adecuada) en un número finito de pasos si el procedimiento es ejecutado sin error; y *iii)* debe poderse implementar mecánicamente por cualquiera sin requerir por parte del ejecutor ingenio, originalidad ni intuición en paso alguno (Enderton, 2004, pp. 94-95). Una definición formal de este concepto, dada por Alan Turing en 1936, es: Un método es efectivo si y sólo si puede ser computado por una máquina de Turing. Una definición equivalente fue determinada independientemente por Alonzo Church el mismo año. Estas definiciones (conocidas como *la tesis de Turing* y *la tesis de Church*, respectivamente), al ser equivalentes, se conocen como *la tesis de Chruch-Turing*. Véase Copeland (2017).

menos, debe poder ser verificable y reproducible cuantas veces sea necesario. Pero, ¿qué se requiere para tener una demostración de este tipo?

Bueno, en primer lugar se necesita que el conjunto de demostraciones a partir del conjunto vacío de premisas sea *decidible*.[62] Usualmente, la noción de consecuencia lógica capturada por las demostraciones está inspirada por los argumentos deductivamente válidos que se mencionaron en la primera sección.[63] Es por eso que, al considerar este enfoque "tradicional" de la consecuencia (que es el único considerado con seriedad en este trabajo), uno puede "traducir" el argumento a un enunciado que conserve tanto su fuerza modal[64] como su forma sintáctica,[65] esto es, un enunciado cuyos conectivos son símbolos de implicación material:[66] $(\sigma_1 \to \cdots \to (\sigma_n \to \tau)\ldots)$; donde $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ pertenece al conjunto de premisas y τ es la conclusión. Con base en lo dicho más arriba, un enunciado de la forma anterior y que represente un argumento deductivamente válido deberá pertenecer al conjunto de demostraciones a partir del conjunto vacío de premisas. Que este conjunto sea decidible[67] implica que es *efectivamente enumerable*.[68] Esto se puede ver fácilmente ya que los lenguajes de primer orden en cuestión son numerables: Al final del apartado anterior se describió un método para asignar un número natural a cada expresión, por tanto, pueden colocarse en una lista (*e. g.* de acuerdo con la relación de orden usual entre naturales) y mientras se genera tal lista uno puede ir examinando sus elementos; cada vez que aparezca una fórmula que pertenezca al conjunto decidible de demostraciones sin hipótesis se colocará en una segunda lista, respetando el orden de aparición de la

[62]Se dice que un conjunto Σ es *decidible* si y sólo si existe un procedimiento efectivo tal que, dado un objeto α, decida si $\alpha \in \Sigma$ o no. Por ejemplo, el conjunto de fórmulas de los lenguajes de primer orden, como los presentados en la sección anterior, es decidible (véase el teorema 5 de la sección 2.4 en Shapiro y Kouri Kissel, 2018). Por otro lado, un conjunto es *semidecidible* si y sólo si existe un procedimiento efectivo tal que, dado un objeto α, produce la respuesta "sí" solamente si $\alpha \in \Sigma$. Nótese que, a diferencia del primero, este último procedimiento no produce la respuesta "no" cuando $\neg(\alpha \in \Sigma)$. Cabe mencionar que todo conjunto decidible es semidecidible.

[63]Una vez más, esto y lo que sigue se menciona con la intención de mostrar las motivaciones de fondo.

[64]Recuérdese la nota 12.

[65]El metateorema de la deducción en cierto modo justifica esta traducción.

[66]La implicación material es verdadera si y sólo si no es el caso que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. La analogía entre la definición anterior y la definición de argumento válido en la primera sección es más que evidente.

[67]La decidibilidad de este conjunto se debe totalmente a la cardinalidad numerable de los lenguajes formales aquí considerados.

[68]Un conjunto A es *efectivamente enumerable* si y sólo si existe un procedimiento efectivo que produzca una lista (sucesión), en algún orden, de los elementos de A. Un conjunto de expresiones es efectivamente enumerable si y sólo si es semidecidible (véase Enderton, 2004, pp. 98-99).

primera.

El segundo requisito está en relación con lo que se dijo antes: aunque de un conjunto infinito Σ de premisas se siga necesariamente una conclusión τ, una cantidad finita de premisas $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ debe ser suficiente para derivarla. De acuerdo con el párrafo de arriba, cualquier argumento deductivamente válido puede traducirse a un enunciado de la forma $(\sigma_1 \to \cdots \to (\sigma_n \to \tau) \ldots)$ y que pertenece al conjunto decidible de demostraciones sin hipótesis. Como dicho conjunto es decidible, uno puede producir una lista con sus elementos. Para determinar que de Σ se sigue τ, basta con examinar dicha lista hasta que $(\sigma_1 \to \cdots \to (\sigma_n \to \tau) \ldots)$ aparezca; una vez que ha aparecido se procede a verificar que cada $\sigma_i \in \Sigma$ (tal que $i \leq n$).

Este procedimiento, en efecto, puede considerarse como una demostración del tipo descrito anteriormente.[69] Los dos requisitos aquí referidos se corresponden con el metateorema de numerabilidad de fórmulas válidas y con el de compacidad, respectivamente. Ambos se enunciarán con más precisión más adelante.

A continuación, se enunciarán formalmente los conceptos que conforman la teoría de la demostración y que permiten formular un concepto matemáticamente preciso de demostración formal. Un *argumento* (en su versión formal) es un par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ donde Γ es un conjunto de fórmulas del lenguaje formal (las premisas) y φ una fórmula (la conclusión). Un *cálculo deductivo* (o *sistema deductivo*) consiste en un conjunto Λ (posiblemente vacío) de fórmulas llamadas *axiomas*[70] o de metafórmulas llamadas *esquemas de axioma*,[71] junto con una regla (o conjunto de reglas) llamada(s) *regla(s) de inferencia*.[72] Una *demostración formal* o *deducción* de φ a partir de Γ es una sucesión finita $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ de fórmulas tal que $\alpha_n = \varphi$ y para $k \leq n$, o bien *i)* $\alpha_k \in \Lambda \cup \Gamma$; o

[69]Esta parte estuvo completamente inspirada en Enderton (2004, pp. 162-163).

[70]Los axiomas pueden ser de dos tipos: *lógicos* y *no-lógicos* (o *matemáticos*). Los primeros "pretenden ser principios básicos de razonamiento que carecen de contenido, mientras que los axiomas matemáticos son fórmulas que reflejan los principios básicos de la teoría matemática que se pretende formalizar" (Gutiérrez, 2011, p. 3). El símbolo Λ se ocupará exclusivamente para nombrar al conjunto de axiomas lógicos; para los no-lógicos se empleará alguna letra mayúscula griega.

[71]A diferencia de los axiomas, que son fórmulas bien formadas del lenguaje formal, los esquemas de axioma son fórmulas expresadas en el metalenguaje (de ahí el nombre "metafórmula"), donde una o más *variables esquemáticas* (o *metavariables*) aparecen. Las metavariables pueden ser instanciadas por subfórmulas del lenguaje formal; una vez que todas han sido instanciadas, la fórmula resultante es una fórmula bien formada del lenguaje formal.

[72]Es posible construir cálculos sobre lenguajes no formalizados (como los lenguajes naturales), de hecho, la historia muestra que así se hizo en un principio; no obstante, aquí se considerarán únicamente aquellos construidos sobre lenguajes formales. No es raro que algunos autores los llamen *sistemas formales*.

bien, *ii)* α_k se obtiene a partir de fórmulas anteriores en la sucesión mediante la aplicación de la(s) regla(s) de inferencia un número finito de veces. Si tal deducción existe entonces se dice que φ es *deducible a partir de*, que es *derivable a partir de*,[73] que es *demostrable a partir de*, que es *una consecuencia sintáctica de*, o que *se sigue deductivamente de* Γ, y se escribe $\Gamma \vdash \varphi$. Si Γ es vacío, entonces se dice que φ es un *teorema*.[74] Por otro lado, se dice que un conjunto de fórmulas Γ es *simplemente consistente* si y sólo si no hay una fórmula φ de Γ, tal que $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Finalmente, un conjunto de fórmulas Γ es *absolutamente consistente* si y sólo si hay al menos una fórmula φ en el lenguaje de Γ tal que $\Gamma \nvdash \varphi$. Sin embargo, desde el punto de vista de la lógica clásica, ambos conceptos generalmente coinciden,[75] es por ello que suelen conocerse sencillamente con el nombre de *consistencia.* Un conjunto de fórmulas Γ es *maximalmente consistente* si y sólo si para toda fórmula φ del lenguaje, si $\Gamma \cup \varphi$ es consistente, entonces $\varphi \in \Gamma$.

Ahora bien, el cálculo que se elegirá, de entre todos los posibles, es el trabajado por Enderton (2004).[76] Éste contiene un número infinito de axiomas y una única regla de inferencia, a saber, *modus ponens*.[77] Si el lector no se encuentra familiarizado con él, se recomienda revisar las páginas 167-189, pues se asumirán los metateoremas ahí demostrados.

Antes de concluir esta sección cabe señalar un parecido con las sucesiones de construcción introducidas más atrás. Las deducciones aquí presentadas también generan el siguiente principio de inducción: Si S es un conjunto de fórmulas que incluye $\Lambda \cup \Gamma$ y está cerrado bajo *modus ponens*, entonces S es el conjunto de todas las fórmulas demostrables a partir de Γ. La prueba por inducción numérica fuerte es rutinaria. Sin embargo, es pertinente manifestar un par de diferencias con respecto de las sucesiones en el apartado anterior: la operación *modus ponens* está parcialmente definida sobre el conjunto de fórmulas con la forma $\langle \alpha, \alpha \to \beta \rangle$; y el conjunto de fórmulas demostrables no

[73]Hay quienes gustan de marcar una diferencia entre *deducción* y *derivación* (o *prueba*) (*e. g.* Hunter, 1981). La primera se refiere a una secuencia donde cada fórmula es un teorema; la segunda, a una secuencia donde no sólo aparecen teoremas sino también fórmulas que pertenecen al conjunto no-vacío Γ.

[74]Hay autores que no diferencian un teorema de cualquier otra fórmula derivable a partir de un conjunto Γ no-vacío (*e. g.* Enderton, 2004). Sin embargo, se sostiene que esta distinción resulta de utilidad en algunos casos.

[75]La prueba de esto por reducción al absurdo es prácticamente inmediata.

[76]La razón de elegir este cálculo y no otro, es por familiaridad y comodidad para la demostración de varios metateoremas que se introducirán más adelante; pero bien podría haberse utilizado, por ejemplo, el de Mendelson (1997) o el de Shapiro y Kouri Kissel (2018), por mencionar un par.

[77]Su nombre completo en latín es *modus ponendo ponens* y quiere decir “el modo de afirmar afirmando”.

se genera libremente a partir de $\Lambda \cup \Gamma$ mediante *modus ponens* (Enderton, 2004, pp. 165-166).

Por último, aún permanece la deuda respecto de las reglas aludidas por Gentzen. Como seguramente el lector sabe, las reglas de introducción y eliminación de conectivos estipuladas funcionan como reglas de inferencia (o reglas de transformación); con todo, no cualquier regla de introducción puede asociarse con cualquier regla de eliminación sin riesgo de caer en la trivialidad. Para evitarlo es necesario que exista un tipo de "armonía" (como la llama Dummet) entre una y otra (Caret y Hjortland, 2015, p. 8), es decir, deben formularse restricciones apropiadas sobre las reglas de inferencia para determinar satisfactoriamente el comportamiento de los conectivos tradicionales y excluir el mal comportamiento de posibles conectivos adicionales.

1.1.3. *La teoría de modelos de primer orden*

En el apartado anterior fueron mencionadas las dos tradiciones principales para el estudio de la consecuencia lógica. Es momento de presentar *la teoría de modelos*. Como se dijo previamente, de manera un tanto impropia, ésta se trata de una descripción semántica o, dicho de otro modo, de un modelo matemático que refleja la relación entre las expresiones del lenguaje natural y sus referencias. Sin embargo, en esta sección se definirá una semántica formal que únicamente considera describir la relación entre los elementos de un lenguaje formal y sus interpretaciones.

Si bien varios elementos que conforman la teoría de modelos como se conoce en la actualidad puede ubicarse en el artículo publicado por Alfred Tarski y Robert Vaught en 1956, su origen puede situarse en 1933 cuando el polaco se propuso examinar los criterios que una definición de verdad debía cumplir. Desde entonces, la teoría de modelos se ha mantenido como la manera estándar de hacer semántica para lenguajes formales de cualquier orden y en el modo principal para analizar la relación de consecuencia lógica. Pero, a todo esto, ¿qué es un *modelo*? Aquí el término "modelo" no se utiliza exactamente en el mismo sentido que en, por decir algo, "modelo matemático", sin embargo, tampoco está del todo alejado. Tal vez traer a colación el *slogan* que Shapiro atribuye a Hodges (2003, p. 6) sea de utilidad: " 'verdad en un *modelo*' es un *modelo* de 'verdad' ".[78] En efecto, el sentido del término en cursivas parece distinto dentro y fuera de las comillas: dentro del entrecomillado tiene el sentido ofrecido por la teoría de modelos; mientras que el que se encuentra afuera, el utilizado en "modelo matemático", es decir, el sentido más usual de "representación" o "esquema teórico". Pero hasta el momento,

[78]La traducción es propia. El énfasis en cursivas fue añadido.

aún con todo y *slogan*, el sentido *modelo-teórico* de "modelo" continúa sin ser del todo claro, para esclarecerlo permítase explorar rápidamente la motivación de fondo al desarrollo de tal teoría.

Sin lugar a dudas, modelar dentro de la matemática la relación entre símbolos de un lenguaje y sus posibles referencias[79] es muy significativo; no obstante, el propósito último de esto y la importancia real de la empresa reside en poder proporcionar una definición matemáticamente precisa sobre lo que quiere decir que un enunciado sea verdadero de acuerdo con una interpretación (poco a poco el *slogan* de Hodges va cobrando sentido) y, a la larga, una definición de consecuencia lógica. Precisamente, esto es lo que Tarski perseguía en 1933[80] y que ingeniosamente pudo formular una vez que reconoció que la definición de verdad[81] para un lenguaje-objeto debía darse en el metalenguaje,[82] y de esta manera evitar la paradoja del mentiroso.[83] Pero actualmente, ¿de qué modo se hace?

Primeramente, se define el concepto matemático de *estructura algebraico-relacional*[84] (o sencillamente *estructura*),[85] $\langle |\mathfrak{A}|, I \rangle$, que consiste tradicional-

[79]También llamadas *extensiones*.

[80]Para más información al respecto, véase Hodges (2010, 2018) y David (2010).

[81]Esta definición debía ser "formalmente correcta" (o ser de la *forma T*): Para cualquier enunciado x, x es verdadero si y sólo si $\psi(x)$, donde ψ es una fórmula del metalenguaje y la equivalencia es demostrable en la metateoría. Y cumplir con la condición o criterio de adecuación material (conocida como *Convención T*), esto es, que los enunciados que satisfacen ψ? sean efectivamente aquellos que intuitivamente son enunciados verdaderos en el lenguaje-objeto.

[82]Hoy día, lo más usual es considerar algún lenguaje informal para la teoría de conjuntos.

[83]También conocida como *antinomia del mentiroso*, se trata de una paradoja semántica clásica que surge al pretender asignar un valor de verdad (binario) al enunciado "este enunciado es falso", lo que deriva en una contradicción: si el enunciado en cuestión es verdadero, entonces es falso; si, por otro lado, es falso, entonces resulta verdadero. Tarski atribuye la paradoja a lenguajes *semánticamente cerrados*, es decir, lenguajes con el suficiente poder expresivo para predicar verdad o falsedad de enunciados expresados en el mismo lenguaje. Tarski evita la paradoja al definir el predicado de verdad en el metalenguaje y no en el lenguaje-objeto.

[84]El término *algebraico-relacional* se utiliza exactamente en el sentido mencionado anteriormente respecto de las signaturas.

[85]También conocida como *interpretación*. Este nombre refleja el propósito de estos constructos matemáticos pues, de alguna forma, cada uno brinda una suerte de diccionario para traducir o *interpretar* los símbolos que conforman un lenguaje formal determinado. Personalmente, es preferible utilizar el nombre de "estructura", ya que dentro del contexto de la matemática eso es lo que son.

mente en un conjunto[86] no-vacío de objetos[87] $|\mathfrak{A}|$ llamado *dominio*[88] o *universo de discurso*, y en una función I que señala qué denotan los parámetros (los símbolos de la signatura y cuantificadores) llamada *función interpretativa.* Propiamente, esta última es una función cuyo dominio[89] es el conjunto de los símbolos no-lógicos y cuya imagen es:

i) Un conjunto[90] no-vacío $|\mathfrak{A}|$ (el dominio de discurso) asignado al símbolo de cuantificador $\forall$.

ii) Una relación $n-$aria $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$ asignada a cada símbolo de relación P de n argumentos.

iii) Un elemento $c^{\mathfrak{A}}$ de $|\mathfrak{A}|$ asignado a cada símbolo de constante (o símbolo funcional $0-$ario) c.

iv) Una operación $n-$aria $f^{\mathfrak{A}}$ definida sobre $|\mathfrak{A}|$, *i. e.*, $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$.[91]

En segundo lugar, y antes de poder definir cuándo un enunciado σ es verdadero en una estructura (o de acuerdo con la interpretación) $\mathfrak{A}$, $\models_{\mathfrak{A}} \sigma$, se define un concepto general relativo a fórmulas y no sólo a enunciados,[92]

[86]Que esta colección sea o no necesariamente un conjunto (en el sentido de la concepción iterativa [véase el apartado sobre la teoría de conjuntos]) sigue sujeto a discusión. Podría decirse que la teoría de modelos clásica considera tan solo conjuntos, pero que esto deba ser necesariamente así no parece tener una auténtica justificación. De hecho, es precisamente de esto último de lo que parte Gómez-Torrente para desestimar la paradoja de Orayen (que se estudiará más adelante) como una auténtica paradoja. Tanto Gómez-Torrente como Amor no desechan la idea de concebir modelos cuyo dominio sea una clase propia (*modelos-clase*) o algún otro tipo de colección matemática. En efecto, más adelante se propondrá un modelo cuyo dominio sea de cardinalidad fuertemente inaccesible, la existencia de esta clase de cardinales es independiente de ZFC, *i. e.*, es indecidible; por tanto, en rigor no se sabe si se trata de un conjunto en el sentido de ZFC, no obstante, es un modelo de esta teoría. Suponer la existencia de esta clase de cardinales debe estar justificada, uno de los asuntos principales a defender en este trabajo es precisamente que su existencia tiene una justificación filosóficamente relevante.

[87]El *status* ontológico de estos objetos puede ser muy variado. En este caso, dado el interés auténticamente matemático del presente análisis, en la sección dedicada a la teoría de conjuntos se considerará que son únicamente objetos representables mediante la teoría de conjuntos, es decir, objetos de una teoría pura de conjuntos: conjuntos hereditarios. Esto no quiere decir que aquí se comprometa uno con que el dominio deba ser un conjunto, sino con que sus elementos deban serlo.

[88]No confundir con el otro uso del término en, por ejemplo, dominio de una función.

[89]Ahora sí en el sentido conjuntista.

[90]Véase la nota 86.

[91]Únicamente se considerarán funciones totalmente definidas.

[92]Recuérdese que un enunciado es una fórmula dentro de la cual no hay ocurrencias libres de una o más variables.

este es, el concepto de *satisfacción* (para fórmulas). De manera informal, se dice que $\mathfrak{A}$ satisface φ con s (donde $\mathfrak{A}$ es una estructura; φ, una fórmula; y s, una función $s : V \to |\mathfrak{A}|$ del conjunto V de todas las variables en el universo $|\mathfrak{A}|$ de $\mathfrak{A}$), escrito $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$, "si y sólo si la traducción de φ determinada por $\mathfrak{A}$, donde la variable x se traduce como $s(x)$ en cualquier lugar donde ocurra libre, es verdadera" (Enderton, 2004, p. 125). Sin embargo, formalmente, la definición se hace por recursión como sigue:

Para términos, se define una extensión[93] de s, $\bar{s} : T \to |\mathfrak{A}|$, del conjunto de todos los términos T (ahora ya no sólo las variables) en $|\mathfrak{A}|$;[94] donde *i)* para cada variable x, $\bar{s}(x) = s(x)$; *ii)* para cada símbolo de constante c, $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$; y *iii)* para cada símbolo funcional $n-$ario $ft_1, \ldots, t_n$ (donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos), $\bar{s}(ft_1, \ldots, t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, , \bar{s}(t_n))$. Para fórmulas atómicas, se define *i)* para el caso del símbolo de igualdad, $\models_{\mathfrak{A}} t_i = t_{j_{[s]}}$ si y sólo si $\bar{s}(t_i) = \bar{s}(t_n)$ (donde $i \leq n$ y $j \leq n$); y *ii)* para símbolos de predicado P $n-$arios, $\models_{\mathfrak{A}} Pt_i, \ldots, t_{j_{[s]}}$ si y sólo si $\langle \bar{s}(t_i), \ldots, \bar{s}(t_j) \rangle$ (donde $i \leq n$ y $j \leq n$). Finalmente, en el caso de las fórmulas bien formadas, se define *i)* para fórmulas atómicas como antes; *ii)* $\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi_{[s]}$ si y sólo si $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$; *iii)* $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \wedge \psi_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$ y $\models_{\mathfrak{A}} \psi_{[s]}$; *iv)* $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \vee \psi_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$ ó $\models_{\mathfrak{A}} \psi_{[s]}$ (o ambas); *v)* $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \to \psi_{[s]}$ si y sólo si o bien $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$ ó $\models_{\mathfrak{A}} \psi_{[s]}$ (o ambas); *vi)* $\models_{\mathfrak{A}} \varphi \leftrightarrow \psi_{[s]}$ si y sólo si, o bien $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$ y $\models_{\mathfrak{A}} \psi_{[s]}$, o bien $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s]}$ y $\not\models_{\mathfrak{A}} \psi_{[s]}$; *vii)* $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi_{[s]}$ si y sólo si para toda $d \in |\mathfrak{A}|$, $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s(x|d)]}$, (donde o bien el valor de la función es $s(x|d)(y) = s(y)$ si $y \neq x$, o bien $s(x|d)(y) = d$ si $y = x$, pero no ambas); y *viii)* $\models_{\mathfrak{A}} \exists x\varphi_{[s]}$ si y sólo si para alguna $d \in |\mathfrak{A}|$, $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_{[s(x|d)]}$, (donde o bien el valor de la función es $s(x|d)(y) = s(y)$ si $y \neq x$, o bien $s(x|d)(y) = d$ si $y = x$, pero no ambas).

Una vez definido el concepto de satisfacción para fórmulas en general, la definición de verdad para un enunciado σ en una estructura $\mathfrak{A}$, surge casi naturalmente:[95] *σ es verdadero en* $\mathfrak{A}$, escrito $\models_{\mathfrak{A}} \sigma$, si y sólo si $\mathfrak{A}$ satisface σ con cualquier función $s : V \to |\mathfrak{A}|$; por otro lado, *σ es falso en* $\mathfrak{A}$, en símbolos $\not\models_{\mathfrak{A}} \sigma$, si y sólo si $\mathfrak{A}$ no satisface σ con alguna función s.[96] Por fin, un *modelo* (en sentido *modelo-teórico*) de un enunciado es una estructura que cumple con la primera alternativa. Por su parte, un modelo de un conjunto Γ de enunciados es una estructura que es modelo de todos los miembros de Γ.

---

[93] La existencia de una única extensión $\bar{s}$ está justificada por el teorema de la recursión.

[94] $\bar{s}(t)$ es el elemento del universo de $\mathfrak{A}$ nombrado por el término t.

[95] En realidad, se trata de un corolario del siguiente teorema: si dos funciones s_1 y s_2 (ambas de $V \to |\mathfrak{A}|$) coinciden en todas las variables libres (si las hay) que ocurren en la fórmula ϕ, $\models_{\mathfrak{A}} \phi_{[s_1]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{A}} \phi_{[s_2]}$. La prueba es por inducción (véase Enderton (2004, pp. 129-130). El corolario alude justamente al caso cuando no hay ocurrencias libres de variables en la fórmula ϕ.

[96] Puesto que el dominio de $\mathfrak{A}$ es no-vacío, no pueden cumplirse ambas alternativas.

Ahora bien, se dice que un conjunto Γ de fórmulas *implica lógicamente* a una fórmula φ (o que φ es una *consecuencia lógica* de Γ), en símbolos $\Gamma \models \varphi$, si y sólo para toda estructura $\mathfrak{A}$ y toda función $s : V \to |\mathfrak{A}|$, si $\mathfrak{A}$ satisface cada elemento de Γ con s, entonces $\mathfrak{A}$ también satisface φ con s.[97] Por otra parte, se dice que una fórmula φ es *válida* (o una *verdad lógica*)[98] si y sólo si $\emptyset \models \varphi$ (o simplemente $\models \varphi$), *i. e.*, si toda estructura $\mathfrak{A}$ satisface φ con toda función $s : V \to |\mathfrak{A}|$.[99] Por último, se dice que un conjunto de fórmulas Γ es *satisfacible* (o *modelo-teórico consistente*) si y sólo si hay algunas $\mathfrak{A}$ y $s : V \to |\mathfrak{A}|$ tales que $\models_{\mathfrak{A}} \Gamma_{[s]}$.

Como puede apreciarse en los párrafos de arriba, la semántica modelo-teórica permite la presencia de enunciados cuyo valor de verdad varía dependiendo del contexto donde tienen lugar. Por tanto, las constantes no-lógicas, a pesar de cambiar su significado o referencia de acuerdo con la estructura mediante la cual son interpretadas, no son variables; son, mejor dicho, nombres (de objetos, propiedades o relaciones) cuyo significado es fijado una vez que cierta estructura es determinada para ofrecerlo. Igualmente, los cuantificadores tienen esta cualidad de "indexación",[100] pues el universo sobre el que son mapeados también varía de estructura a estructura. Todo esto resulta particularmente útil al lógico (y, por qué no, al matemático), ya que en muchas ocasiones le interesa trabajar diferentes estructuras en un mismo lenguaje, *e. g.* cuando trabaja con homomorfismos[101] entre estructuras (Hodges, 2018a).

En cuanto a las constantes lógicas, éstas tienen un lugar predilecto en los estudios del lógico hasta el punto de ser consideradas por muchos como su objeto central. Desde el momento en que la estructura de un argumento depende de la *forma* de los enunciados que lo componen y que, en primera instancia, está determinada por su posición dentro de ellos, la importancia de estas partículas del lenguaje difícilmente puede pasar desapercibida. Aunque la distinción entre símbolos no-lógicos y lógicos más frecuentemente se menciona desde la "posición semántica" para los lenguajes formales, el criterio de

[97]Si Γ es un conjunto de enunciados y ϕ es un enunciado, entonces $\Gamma \models \phi$ si y sólo si todo modelo de Γ es modelo de ϕ.

[98]No confundir *verdad lógica* con *tautología* pues, aunque todas las tautologías son verdades lógicas, no todas las verdades lógicas son tautologías. Una tautología, de manera grosera, puede considerarse como una metafórmula con la misma forma lógica que una verdad lógica de la lógica proposicional y donde cada metavariable puede ser reemplazada uniformemente por una fórmula de algún lenguaje de primer orden.

[99]Véase Enderton (2004, pp. 132-133).

[100]No obstante, hay quien considera los cuantificadores como parte de la terminología lógica, en tanto que se comportan de la misma manera aun cuando su interpretación varía según el dominio.

[101]Este concepto cobrará importancia un poco más adelante.

demarcación de estos últimos no es unánime.[102] Así, a diferencia de sus compañeras no-lógicas, y de acuerdo con la distinción semántica, informalmente, el significado de estas constantes no está "materialmente" determinado por una cierta estructura ni, de hecho, por estructura alguna; en su lugar, la interpretación de las constantes lógicas permanece invariante en toda estructura[103] y, en dado caso, su significado es proporcionado, quizá implícitamente, por la misma lógica cuantificacional en la medida que se desarrolla.

A continuación, la presente exposición se concentrará en brindar una serie de definiciones conceptuales que serán de gran utilidad más adelante.

Una *teoría formal* T (o sencillamente *teoría*) es un conjunto de enunciados cerrado bajo la relación de consecuencia lógica, esto es, $T \models \sigma \;\Rightarrow\; \sigma \in T$; donde σ es un enunciado cualquiera del lenguaje. Por su parte, para una clase $\mathcal{K}$ de estructuras para el lenguaje, la *teoría de* $\mathcal{K}$, Th $\mathcal{K}$, es el conjunto de enunciados verdaderos en toda estructura de $\mathcal{K}$;[104] esta última definición permite una suerte de definibilidad de un conjunto de enunciados a partir de una clase de estructuras.[105] De manera conversa, también es posible definir una clase de estructuras a través de un conjunto de enunciados: Para un conjunto de enunciados Σ, Mod Σ es la clase de todos los modelos de Σ, *i. e.*, la clase de todas las estructuras para el lenguaje que hacen verdadero a todo elemento de Σ.[106] Esta notación al mismo tiempo sirve para definir la relación

---

[102] La dificultad de caracterizar las constantes lógicas usualmente se atribuye a la llamada *antinomia de la neutralidad de tópico* (*antonomy of topic-neutrality*, en inglés). La neutralidad de tópico surge como una propuesta respecto de la tradicional universalidad y neutralidad atribuida a la lógica; *groso modo*, ambas nociones pueden entenderse, respectivamente, en el sentido de *i)* su aplicabilidad universal a cualquier razonamiento independientemente del tópico de su interés, y de *ii)* su neutralidad e insensibilidad a las características distintivas entre individuos dentro de un área particular de estudio. El caso *i)* suele abordarse desde el punto de vista gentzeniano donde las constantes lógicas son consideradas tan solo como aquellas expresiones que pueden definirse por medio de un conjunto de reglas inferenciales de introducción y eliminación (recuérdese lo dicho en la sección 1.1.2.); por lo que se refiere a *ii)*, este caso suele recuperarse mediante la llamada *invariancia a la permutación* (*permutation invariance*, en inglés). Este último es precisamente el que motiva el tratamiento semántico mencionado hace unos momentos. Véase la sección 4 en MacFarlane (2017).

[103] Obviamente esta "definición semántica" para las constantes lógicas tiene sus problemas. Para más detalle, se recomienda revisar la quinta sección en MacFarlane (2017).

[104] Cuando $\mathcal{K} = \{\mathfrak{A}\}$, entonces Th $\{\mathfrak{A}\}$, escrito sencillamente Th $\mathfrak{A}$, es el conjunto de enunciados verdaderos en esa estructura $\mathfrak{A}$.

[105] Ver Enderton (2004, pp. 226-228).

[106] Análogamente a la nota pasada, si $\Sigma = \{\tau\}$, entonces Mod $\{\tau\}$ simplemente se escribe Mod τ y se refiere a la clase de todos los modelos que hacen verdadera a τ. Para una clase de estructuras $\mathcal{K}$ para el lenguaje, si $\mathcal{K} =$ Mod τ, se dice que $\mathcal{K}$ es una clase elemental (EC); si $\mathcal{K} =$ Mod Σ, entonces $\mathcal{K}$ es una clase elemental en sentido amplio (EC_Δ). Véase Enderton (2004, p. 138).

de consecuencia lógica de un modo alternativo y en términos conjuntistas, a saber, $\Sigma \models \sigma$ si y sólo si Mod $\Sigma \subseteq$ Mod σ; donde Σ es un conjunto de enunciados y σ un enunciado.[107]

Además, las definiciones anteriores resultan útiles para definir el llamado *conjunto de consecuencias* de Σ, Cn Σ, como el conjunto de todos los enunciados que son verdaderos en todos los modelos de Σ, es decir, Cn $\Sigma = \{\sigma | \Sigma \models \sigma\} =$ Th Mod Σ. A su vez, una teoría T puede caracterizarse como $T =$ Cn T. Siguiendo lo anterior, una teoría T es *axiomatizable* si y sólo si hay un conjunto decidible de enunciados Σ tal que $T =$ Cn Σ.[108] Por último, una teoría T se dice *completa* (*semánticamente*) si y sólo si para cualquier enunciado σ, o bien $\sigma \in T$ o $(\neg\sigma) \in T$.[109]

Finalmente, y para concluir esta sección, se mencionará un concepto de gran relevancia para la futura discusión, este es, el concepto de *homomorfismo*. "Cuando los matemáticos introducen una clase de estructuras, les gusta definir lo que consideran mapas básicos entre estas estructuras" (Hodges y Scanlon, 2018). Propiamente,[110] un homomorfismo h entre dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ para el lenguaje es una función $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ tal que preserva las relaciones y las funciones, es decir: *i)* para cada símbolo de función $n-$aria f y cada sucesión de longitud n de elementos de $|\mathfrak{A}|$, $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$;[111] y *ii)* para cada parámetro relacional $n-$ario P y cada $n-$ada como antes, $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in P^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $\langle h(a_1), \ldots, h(a_n)\rangle \in P^{\mathfrak{B}}$.

> Si, además, h es uno-a-uno, entonces se le llama *isomorfismo* (o *inmersión isomorfa*) de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. Si hay un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$ (es decir, un isomorfismo h para el cual ran $h = |\mathfrak{B}|$), entonces se dice que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son *isomorfas* (y se escribe $|\mathfrak{A}| \cong |\mathfrak{B}|$). (Enderton, 2004, p. 141)

Si dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen la misma signatura, $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ y la interpretación de los símbolos de la signatura en $\mathfrak{A}$ son justamente la restricción de sus interpretaciones de $\mathfrak{B}$ a $|\mathfrak{A}|$, entonces se dice que $\mathfrak{A}$ es una *subestructura*

---

[107] Esta definición es aplicable exclusivamente a enunciados.

[108] Si Σ es finito, entonces se dice que T es *finitamente axiomatizable*. Véase, Enderton (2004, p. 228).

[109] Existe una definición similar para la negación que empata semántica con sintaxis términos de teoría de la prueba (por lo que también se conoce como *sintácticamente completa* o *deductivamente completa*); de esta manera, una teoría T es completa en este sentido si y sólo si, para cualquier enunciado σ del lenguaje, o bien $T \vdash \sigma$ o $T \nvdash \sigma$. Puesto que añadir un enunciado no-deducible τ a T provocaría la inconsistencia del conjunto $\{T \cup \tau\}$, el nombre *maximalmente completo* también suele utilizarse para referir esta forma de completud.

[110] Todas las definiciones a continuación fueron tomadas de Enderton (2004, pp. 140-146).

[111] Si f es de cero argumentos: $h(f^{\mathfrak{A}}) = f^{\mathfrak{B}}$.

de $\mathfrak{B}$, o que $\mathfrak{B}$ es una *extensión* de $\mathfrak{A}$. Cabe mencionar que las estructuras isomorfas son *elementalmente equivalentes* (en símbolos $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, esto es, para cualquier enunciado τ, $\models_{\mathfrak{A}} \tau \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} \tau$.[112]

Una teoría o un conjunto de enunciados T es *categórica* si y sólo si posee un único modelo salvo isomorfismo, *i. e.*, si cualesquiera dos modelos de T son isomorfos. Para terminar, una teoría o un conjunto de enunciados T es $\kappa-$*categórica* si y sólo si posee un único modelo de cardinalidad κ salvo isomorfismo, *i. e.*, si todos los modelos de T de cardinalidad κ son isomorfos.

Así pues,

> [l]a teoría de modelos clásica se refiere al estudio en general de los modelos de las teorías formales y sus relaciones con los lenguajes de los que son interpretaciones. Está claro que en la teoría de modelos se utiliza una teoría de conjuntos con su significado estándar, ya que todas sus definiciones están basadas en conceptos conjuntistas intuitivos, empezando por el universo de un modelo, que debe ser un conjunto no vacío en el sentido usual. (Amor, 2008, p. 86)

En unos momentos más se verá (no de manera muy precisa) qué quiere decir uno con "su significado *estándar*" y con "conceptos conjuntistas *intuitivos*", pero antes considérese los siguientes resultados importantes de la lógica clásica de primer orden.

1.1.4. *Algunos metateoremas importantes de la lógica de primer orden*

Como el título lo indica, en esta breve sección se presentarán algunos metateoremas tradicionales e importantes de la lógica clásica de primer orden. La importancia de estos resultados podrá apreciarse en la segunda parte de este trabajo.

- *Teorema de correctud* (Los siguientes enunciados son equivalentes)[113]

  a) Sea Γ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula de un lenguaje de primer orden. Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$.

  b) Sea Γ un conjunto cualquiera de fórmulas en un lenguaje de orden uno. Si Γ es satisfacible, entonces Γ es consistente.

- *Teorema de completud* (Los siguientes enunciados son equivalentes)[114]

[112] Esto es un corolario del teorema del homomorfismo. Véase la siguiente sección.

[113] Para la prueba, véase Enderton (2004, pp. 193-198) y la sección 5 de Shapiro y Kouri Kissel (2018).

[114] Para la prueba, véase Enderton (2004, pp. 198-208) y la sección 5 de Shapiro y Kouri Kissel (2018).

a) Sea Γ un conjunto cualquiera de fórmulas en un lenguaje de orden uno. Si Γ es consistente, entonces Γ es satisfacible.

b) Sea Γ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula de un lenguaje de primer orden. Si $\Gamma \models \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

- *Teorema de compacidad* (Los siguientes enunciados son equivalentes)[115]

  a) Sea Γ un conjunto cualquiera de fórmulas en un lenguaje de orden uno. Si todo subconjunto finito Γ_0 de Γ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

  b) Sea Γ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula de un lenguaje de primer orden. Si $\Gamma \models \varphi$, entonces existe un subconjunto Γ_0, tal que $\Gamma_0 \models \varphi$.[116]

- *Teorema de numerabilidad*[117]
  En un lenguaje a lo más numerable, el conjunto de fórmulas válidas es efectivamente numerable.
  Corolario: Sea Γ un conjunto decidible de fórmulas en un lenguaje a lo más numerable.

  a) El conjunto de teoremas de Γ es efectivamente numerable.

  b) El conjunto de las fórmulas implicadas lógicamente por Γ es efectivamente numerable.[118]

- *Lema de Lindenbaum*[119]
  Sea Γ_0 cualquier conjunto consistente de fórmulas para un lenguaje a lo más numerable de primer orden, entonces hay un conjunto Γ tal que $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ y Γ es maximalmente consistente.[120]

- *Teorema del homomorfismo*[121]
  Sea h un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, y sea $s : V \to |\mathfrak{A}|$, entonces:

[115] Para la prueba, véase Enderton (2004, p. 208) y la sección 5 de Shapiro y Kouri Kissel (2018).

[116] En la sección 2.1. se estudiará más minuciosamente el sentido y relevancia de los teoremas de corrección, completud y compacidad.

[117] Para la prueba, véase Enderton (2004, pp. 209-211).

[118] Si Γ es el conjunto decidible de axiomas de ZFC (A_{ZFC}), entonces el conjunto de teoremas, *i. e.*, de fórmulas implicadas lógicamente por A_{ZFC}, es efectivamente numerable.

[119] Para la prueba, véase la sección 3 de Shapiro y Kouri Kissel (2018).

[120] Este resultado utiliza el principio de tercero excluido y es particularmente útil para demostrar compacidad y completud.

[121] Para la demostración, ver Enderton (2004, pp. 143-145).

a) Para cualquier término t, $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$.

b) Para cualquier fórmula α sin cuantificadores ni símbolo de igualdad, $\models_{\mathfrak{A}} \alpha_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{B}} \alpha_{[h \circ s]}$.

c) Si h es uno-a-uno, es decir, una inmersión isomorfa de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, entonces la restricción sobre el símbolo de igualdad en *b)* puede omitirse y $\models_{\mathfrak{A}} \alpha_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{B}} \alpha_{[h \circ s]}$.

d) Si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces la restricción sobre los cuantificadores en *b)* puede omitirse y $\models_{\mathfrak{A}} \alpha_{[s]}$ si y sólo si $\models_{\mathfrak{B}} \alpha_{[h \circ s]}$.

Corolario: Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos estructuras, si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

- *Teorema de Löwenheim-Skolem*[122]
  Sea Γ un conjunto de fórmulas en un lenguaje contable de primer orden, si Γ es satisfacible en una estructura de cardinalidad infinita, entonces es satisfacible en estructuras de cualquier cardinalidad infinita.

  a) *Teorema descendente de Löwenheim-Skolem*: Sea Γ un conjunto satisfacible de fórmulas en un lenguaje de cardinalidad $\lambda = \aleph_0$, entonces Γ es satisfacible en alguna estructura de tamaño *igual a*[123] λ.

  b) *Teorema ascendente de Löwenheim-Skolem*:[124] Sea Γ un conjunto de fórmulas en un lenguaje de cardinalidad $\lambda = \aleph_0$, y supóngase que Γ es satisfacible en alguna estructura infinita, entonces para todo cardinal $\kappa \geq \lambda$ hay una estructura de cardinalidad κ en la que Γ es satisfacible.

1.2. *La teoría de conjuntos*

La primera aproximación a la noción de *conjunto* suele ser particularmente simple e intuitiva: se trata de una colección bien determinada por los objetos que la componen. Aunque el *status* ontológico de estos objetos (llamados *elementos* o *miembros de un conjunto*), en principio, puede ser variado,[125]

[122] Obviamente, este teorema y sus diferentes versiones se analizarán más adelante. Para un esbozo de las pruebas, véase la sección 2.2. del presente trabajo.

[123] Para el caso de lenguajes no-numerables esta igualdad se sustituye por $\leq$.

[124] También este resultado puede aplicarse a lenguajes no-numerables, análogamente a lo afirmado en la nota anterior, sencillamente sustitúyase λ de manera uniforme en las apariciones que ocurran a continuación por algún número cardinal transfinito mayor que $\aleph_0$.

[125] Los objetos que no son conjuntos, pero que aun así fungen como elementos de un conjunto se conocen como *urelementos*.

la teoría de conjuntos muy usualmente limita su estudio a las colecciones que consisten en nada más que conjuntos (esto principalmente por relevancia matemática, economía y uniformidad en el tratamiento de una única clase de objetos dentro de la teoría). En este caso, se dice que se trata de una teoría *pura* de conjuntos (o de conjuntos *hereditarios*).[126] Sin embargo, esta caracterización inicial de "conjunto", si bien puede ser aprehendida con relativa facilidad, carece de claridad conceptual (de hecho, el lector probablemente haya notado que la "definición" ofrecida líneas arriba, si no totalmente circular, parece descansar en otro término de naturaleza similar, a saber, el de "colección"). En cierto modo, la teoría de conjuntos no pretende elucidar el concepto de "conjunto" ni la "relación con sus elementos" (*i. e.*, *la relación de pertenencia*) mediante definiciones explícitas, en su lugar, es la teoría en su totalidad la que espera brindar tal esclarecimiento y de manera un tanto "implícita" (Boolos, 1971, p. 216). Entonces, ¿cómo se promovió el surgimiento de la teoría de conjuntos actual?

Originalmente, la teoría de conjuntos surgió de manera no-axiomática y estuvo motivada absolutamente por una concepción intuitiva y poco precisa (del tipo que se mencionó al inició del presente apartado).[127] Esta *concepción ingenua de conjunto* (como de hecho se le conoce) se remonta posiblemente a 1873, cuando sus estudios sobre la recta real llevaron a Georg Cantor a publicar una serie de trabajos respecto de conjuntos abstractos y números transfinitos (Enderton, 1977, p. 14), y se basa en dos principios para la formación de esta clase de "conjuntos", a saber, el llamado *principio de comprensión irrestricto* y el *principio de extensionalidad*. El primero establece que cada propiedad determina un conjunto cuyos objetos gozan tal propiedad; el segundo, que todo conjunto está completamente determinado por los objetos que lo conforman.[128]

Desgraciadamente para los pioneros de la teoría, la suposición de tales principios resulta en su inconsistencia: Por *reductio*, supóngase que existe el conjunto de los conjuntos que tienen la propiedad de no pertenecerse a sí mismos. Ahora, si tal conjunto se pertenece a sí mismo, entonces satisface la propiedad de no pertenecerse a sí mismo y, por tanto, no se pertenece a sí

[126]Naturalmente, el término *hereditario* alude al hecho de que los elementos de los conjuntos son también conjuntos, y que los elementos de estos últimos son a su vez conjuntos, y así sucesivamente.

[127]Boolos (1971) precisamente inicia su famoso artículo citando la serie de definiciones oscuras de "conjunto" dadas por el mismísimo Cantor: "cualquier colección... en un todo de objetos definidos y bien-distinguidos... de nuestra intuición o pensamiento", "muchos, que pueden considerarse como uno, *i. e.*, una totalidad de elementos definidos que pueden combinarse en un todo mediante una ley" (p. 215). La traducción es propia.

[128]Es decir, si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales.

mismo. Por el otro lado, si tal conjunto no se pertenece a sí mismo, entonces es uno de los conjuntos que satisface la propiedad de no pertenecerse a sí mismo y, por tanto, se pertenece a sí mismo. Así, puesto dicho conjunto se pertenece a sí mismo si y sólo si no se pertenece a sí mismo, entonces no existe el conjunto de los conjuntos que tienen la propiedad de no pertenecerse a sí mismos; pero una de las instancias del principio de comprensión irrestricto establece que ese conjunto sí existe. Por tanto, la teoría demuestra un enunciado y su negación, es decir, en efecto, es inconsistente.[129]

Resultados paradójicos en la teoría ingenua, como el anterior, fueron la razón de impulsar un tratamiento axiomático de la teoría de conjuntos, el cual, entre otras cosas, permite poner de manifiesto los supuestos en los que descansa para examinarlos e identificar si algunos de ellos, aunque plausibles, generan inconsistencia.

A pesar de lo natural y simple que pudiera resultar la concepción ingenua de conjunto, la crisis planteada por las paradojas que tenían lugar en ella estimuló la búsqueda de otras concepciones informales que pudieran servir como fundamento para la descripción de lo que intuitivamente se toma por "conjunto" o por "relación de pertenencia". No obstante, muchas de ellas, si bien podían evitar la inconsistencia, daban la impresión de ser formuladas artificialmente para hacerlo. No así el caso de la llamada *concepción iterativa de conjunto* que, aunque no tan simple y natural como la ingenua, parece ser consistente y gozar de cierta naturalidad. Sin embargo, antes de presentar la teoría axiomática que pretende capturar y describir las "intuiciones" que puede despertar dicha concepción, y que es la que tradicionalmente se trabaja (este trabajo no es la excepción), véase rápidamente de qué trata.

La concepción iterativa de conjunto consiste en formar parte del conocido *universo de von Neumann* (o *jerarquía acumulativa de conjuntos de von Neumann* [V])[130] que no es sino la clase de los conjuntos hereditarios bienfundados:[131] Se inicia la jerarquía en el nivel 0 con el conjunto vacío.[132] En el nivel 1 se forman todas las posibles colecciones del conjunto en el nivel 0, es decir, solamente una, el conjunto unitario del vacío. Después, en el siguiente nivel se forman todas las posibles colecciones del conjunto formado en el nivel anterior; y en el siguiente, las posibles colecciones de conjuntos formados en el nivel anterior. El proceso continúa de manera sucesiva, en cada nivel

[129]Este resultado se conoce como la *paradoja de Russell.*

[130]Véase Jech, 2006, p. 64.

[131]Un conjunto P está *bien-fundado* si y sólo si todo subconjunto no-vacío X de P tiene un elemento $E-$minimal a, es decir, $a \in X$ y no hay una $x \in X$ tal que xEa, donde E es una relación binaria.

[132]Como su nombre lo indica, *el conjunto vacío* (nombrado por el símbolo $\emptyset$) es el conjunto que no contiene elemento alguno.

formando las posibles colecciones de conjuntos formados en el nivel anterior. Una vez que se han generado todos estos, se llegará a un nivel, llámese *omega* (ω), donde se formarán todas las posibles colecciones de conjuntos formados en los niveles anteriores $0, 1, 2, \ldots$ Posteriormente, en el nivel $\omega + 1$ se forman todas las posibles colecciones de conjuntos formados en el nivel anterior, y así sucesivamente. . . [133]

Los axiomas de la teoría de conjuntos que se presentará a continuación pretenden justificarse *via* el papel que juegan en la descripción de la jerarquía descrita arriba.

1.2.1. *La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel más axioma de elección (ZFC) en primer orden*

La teoría axiomática de conjuntos que se presenta a continuación usualmente es expresada en un lenguaje de primer orden con igualdad, cuyos únicos parámetros son el símbolo relacional $\in$ conocido como *símbolo relacional de pertenencia* (o *membresía*) y el símbolo de cuantificador universal $\forall$.[134] Como se mencionó en la sección pasada, la noción informal de conjunto y la relación de pertenencia no se encuentran definidas explícitamente dentro de la teoría y, en su lugar, se adopta un conjunto de axiomas que involucra exclusivamente los símbolos que representan tales nociones. “Los demás símbolos usados como las constantes $\emptyset$, ω; los símbolos de operación como unión [$\cup$], intersección [$\cap$], par, potencia [$\mathcal{P}$]; los símbolos de relación como inclusión [$\subseteq$], equipotencia [$\sim$], etc., se definen todos con el símbolo $\in$ y lógica” (Amor, 2008, p. 84). Además, en palabras de Enderton (1977):

> (Los axiomas puede pensarse que divulgan información parcial respecto del significado de las nociones primitivas). Una vez adoptada una lista de axiomas procedemos a derivar enunciados que son *consecuencias lógicas* (o *teoremas*) de los axiomas [. . .] Antes hemos esbozado, de manera informal y ocasionalmente vaga, lo que “conjunto” y “miembro” *pretenden* significar. Pero para que un enunciado sea una consecuencia lógica de los axiomas, debe ser verdadero *sea* lo que “conjunto” y “miembro” signifiquen, siempre que los axiomas sean verdaderos. (pp. 11-12)

Los axiomas de la teoría de conjuntos tradicional, conocida como *teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel más axioma de elección* (ZFC) en su versión de primer orden son los siguientes:

[133] Véase, Boolos (1971, pp. 221-222).
[134] El existencial se define de la manera usual mediante la negación y el universal.

a) Axioma de extensionalidad: Si dos conjuntos poseen exactamente los mismos elementos, entonces son iguales.[135]

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B$$

b) Axioma de conjunto vacío: Existe un conjunto sin elementos. Se representa por $\emptyset$.

$$\exists A \forall y(y \notin A)$$

c) Axioma de par: Para cualesquiera conjuntos u y v, existe un conjunto que tiene como elementos exactamente u y v.

$$\forall u \forall v \exists A \forall x(x \in A \leftrightarrow (x = u \vee x = v))$$

d) Axioma de unión (generalizada):[136] Para un conjunto A, existe un conjunto cuyos elementos son los elementos de algún elemento de A. Se simboliza $\bigcup A$.

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow \exists a(a \in A \wedge x \in a))$$

e) Axioma de conjunto potencia: Para un conjunto A, existe un conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. La relación de subconjunto (simbolizada por $\subseteq$) puede definirse, como todas las demás, en términos de los símbolos primitivos.

$$\forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow \forall y(y \in x \to y \in A))$$

f) Axioma de infinito: Existe un conjunto inductivo.[137]

$$\exists A(\emptyset \in A \wedge \forall a(a \in A \to a \cup \{a\} \in A))$$

g) Axioma de regularidad (o de *buena-fundación*): Todo conjunto no-vacío X tiene un elemento y con el que no tiene elementos en común.[138]

$$\forall X(X \neq \emptyset \to \exists y(y \in X \to y \cap X = \emptyset))$$

[135] Nótese que el otro sentido del condicional es trivial.

[136] En algunos textos suele ofrecerse una versión más débil del axioma, el adjetivo "generalizada" sirve para distinguirlos. En este caso no es necesario, pues solamente se considerará la versión general que es lo suficientemente poderosa para expresar la versión débil.

[137] Un conjunto A es *inductivo* si y sólo si $\emptyset \in A$ y está cerrado bajo la operación sucesor, *i. e.*, para cualquier a, si $a \in A$, entonces $a \cup \{a\} \in A$.

[138] Es decir, X y y son *disjuntos* (o *ajenos*) o, lo que es lo mismo, su intersección es vacía. La intersección (simbolizada por $\cap$), representa el conjunto cuyos elementos son los elementos de todo elemento de un conjunto A. Su existencia puede demostrarse mediante una aplicación del esquema de axioma de separación que se verá en unos momentos.

h) Axioma de elección:[139] Para cualquier conjunto X cuyos elementos son conjuntos no-vacíos y *disjuntos dos-a-dos*,[140] existe un conjunto de elección para X que contiene exactamente un elemento de cada uno de los elementos de X.[141]

$$\forall X(((X \neq \emptyset \wedge \forall y(y \in X \to y \neq \emptyset)) \wedge \forall y \forall z(((y \in X \wedge z \in X) \wedge y \neq z)$$

$$\to y \cap z = \emptyset)) \to \exists y \forall z(z \in X \to \exists w(w \in y \cap z \wedge \forall v(v \in y \cap z \to v = w))))$$

i) Esquema de axioma de separación (también conocido como *de comprensión estricta* o *de subconjunto*): Para cualquier conjunto A y fórmula φ del lenguaje de primer orden para la teoría de conjuntos que tenga a $x, w_1, \ldots, w_n, A$ como variables libres, existe un conjunto B que tiene como elementos a las x que pertenecen a A y que satisfacen la fórmula $\varphi(x)$ con parámetros $w_1, \ldots, w_n, A$ (B no ocurre libre en $\varphi(x, w_1, \ldots, w_n, A)$).[142]

$$\forall w_1, \ldots, w_n \forall A \exists B \forall x(x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x, w_1, \ldots, w_n)))$$

j) Esquema de axioma de reemplazo: Para cualquier conjunto A y fórmula φ del lenguaje de la teoría de conjuntos en primer orden cuyas variables

---

[139] El axioma de elección ocasionó controversia (de hecho, aún lo hace) cuando Zermelo puso de manifiesto su presencia en varios resultados de la matemática. En la actualidad, prácticamente cualquier matemático lo defiende por su evidencia, no obstante,

> la característica más problemática del axioma de elección es que postula la existencia de una función sin presentarla explícitamente. Para aquellos que consideran que una función expresa un procedimiento que relaciona unos objetos con otros, la idea de postular una función sin dar un procedimiento es inaceptable. (Gutiérrez, 2015, p. 214).

Ver Boolos (1971, p. 230) para una muy breve muestra de la dificultad inherente a la derivación del axioma.

[140] Esto es que cualesquiera dos miembros de la colección son disjuntos.

[141] En realidad, hay una gran variedad de formulaciones equivalentes al axioma de elección, todas bastante útiles, entre ellas pueden mencionarse, el *teorema del buen-orden*, que en pocas palabras dice que todo conjunto puede ser bien-ordenado; y también, el *lema de Zorn*, que afirma que si todo conjunto *parcialmente ordenado* P (*i. e.*, un conjunto cuya relación de orden es antireflexiva y transitiva) tiene *cotas superiores* (*i.e.*, elementos mayores o iguales que todo elemento de un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado) para cada uno de sus subconjuntos *totalmente ordenados* S (*i.e.*, un conjunto parcialmente ordenado que además es tricotómico), entonces P contiene al menos un elemento maximal (*i.e.*, un elemento que no es menor que cualquier elemento de S).

[142] Esta restricción es necesaria, pues es precisamente la existencia de B la que se está afirmando. La fórmula no puede tener a B porque en ese caso la instancia de axioma estaría apelando a un conjunto cuya existencia ella misma intenta establecer.

libres sean $x, y, w_1, \ldots, w_n, A$, si para cada x en A existen una *única* y que satisface la fórmula $\varphi(x, y)$ con parámetros $w_1, \ldots, w_n, A$, entonces existe un conjunto B cuyos elementos son todas las y que satisfacen $\varphi(x, y, w_1, \ldots, w_n, A)$ para algún elemento x de A.[143]

$$\forall w_1, \ldots, w_n, \forall A(\forall x(x \in A \to (\exists y\varphi(x, y, w_1, \ldots, w_n)\wedge$$

$$(\forall y_1 \forall y_2(\varphi(x, y_1, w_1, \ldots, w_n) \wedge \varphi(x, y_2, w_1, \ldots, w_n)) \to y_1 = y_2))) \to$$

$$\exists B\forall y(y \in B \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \varphi(x, y, w_1; \ldots, w_n))))$$

Los axiomas de *a)*, *b)*, *c)*, *d)*, *e)*, *f)* e *i)* forman parte del llamado sistema axiomático de Zermelo (Z), y si se añade *j)* se obtiene el sistema de Zermelo-Fraenkel (ZF); finalmente, si se considera también *g)*, evidentemente el sistema resultante es ZFC. Tanto Z como ZF son subsistemas de ZFC, es decir, este último demuestra al menos los mismos teoremas que los primeros.

Antes de concluir esta primera parte, se presentarán una serie de conceptos y definiciones útiles para la futura discusión.[144]

El *producto* de dos conjuntos A y B,[145] escrito $A \times B$, es el conjunto de pares $\langle x, y\rangle$ para alguna $x \in A$ y alguna $y \in B$. Una *relación* R es un conjunto de $n-$adas. En el caso $n = 2$ el *dominio de* R (escrito dom R) es el conjunto de todas las x tales que $\langle x, y\rangle \in R$ para alguna y; por su parte, el *rango de* R (escrito ran R) es el conjunto de todas las x tales que $\langle y, x\rangle \in R$ para alguna y. El *campo de* R (cam R) es la unión de dom R y ran R. Una *relación* $n-$aria *definida sobre* A, es un subconjunto de A^n. Una *función* f es un tipo particular de relación donde para cada $x \in$ dom f hay una única y tal que $\langle x, y\rangle \in f$. Una función f de A *en* B, escrito $f : A \to B$, es una función tal que dom $f = A$ y ran $f \subseteq B$; si ran $f = B$ entonces se dice que es de A *sobre* B. Por otra parte, f es una *función uno-a-uno* si y sólo si para cada y en ran f existe una única x tal que $\langle x, y\rangle \in f$. Por su parte, una *relación de equivalencia* es una relación *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.[146] Si R es una relación de equivalencia sobre A, entonces para cada $x \in A$, la *clase de equivalencia* $[x]$ de x es el conjunto de todas las $y \in A$ tal que $\langle x, y\rangle \in R$. El *conjunto cociente* (A/R) es el conjunto de todas las clases de equivalencia generadas por R en A.

---

[143]La consideración de este axioma está apoyada por el principio sobre que la propiedad que distingue los conjuntos de las clases propias es la de estar limitados en tamaño (Enderton, 1971, p. 179).

[144]Para una exposición más detallada véanse los capítulos 2 y 3 de Enderton (1977).

[145]Donde posiblemente $B = A$. Si este es el caso, el conjunto de todas las $n-$adas de elementos de A, se escribe A^n.

[146]Véase las notas *150*, *151* y *152*.

1.2.2. *Una teoría de ordinales y cardinales en ZFC*

Históricamente,[147] la teoría de conjuntos fue desarrollada por Cantor principalmente con el propósito de representar por medio de ella una teoría tanto de ordinales como de cardinales transfinitos. El concepto de ordinal surgió como una abstracción del concepto de número natural empleado para describir la posición de un objeto dentro de una colección. En particular, Cantor introdujo dicho concepto inicialmente para arreglar secuencias infinitas mientras estudiaba series de Fourier en 1883.[148] Por su parte, el concepto de cardinal se remonta probablemente a diez años atrás, cuando Cantor demostró que el conjunto de los números reales no podía ponerse en correspondencia uno-a-uno con los enteros.[149] A partir de entonces, el matemático alemán publicó una serie de artículos en los que formuló los conceptos de conjunto abstracto y de números transfinitos. La prueba de Cantor implicaba la existencia de infinitos de distinto tamaño como consecuencia de su nueva definición para "medir tamaños" de conjuntos de objetos, es decir, su cardinalidad.

Desde entonces, los conceptos de ordinalidad y cardinalidad han evolucionado y se han hecho más precisos gracias a la implementación del método axiomático. Actualmente, la definición estándar de tales conceptos dentro de ZFC se debe a von Neumann quien definió los números ordinales a partir del conjunto vacío y al aplicarle la operación "sucesor" hasta llegar al límite, y así sucesivamente. El concepto de número cardinal se define a partir del concepto de ordinal. A continuación se definirán estos conceptos de manera más precisa.

Un conjunto α es un *número ordinal* (o sencillamente *ordinal*) si y sólo si *i)* es transitivo y *ii)* está bien-ordenado por la relación de pertenencia. Se dice que un conjunto A es transitivo si y sólo si todo elemento de un elemento de A es él mismo un elemento de A o, equivalentemente, $\bigcup A \subseteq A$, $a \in A$ sólo si $a \subseteq A$, o bien $A \subseteq \mathcal{P}A$. Por su parte, un conjunto B está bien-ordenado por la relación R si y sólo si: *i)* R es irreflexiva,[150] transitiva[151] y tricotómica;[152] y *ii)* R es un buen-orden definido sobre B,[153] es decir, todo subconjunto

[147] Para el contenido de esta sección, véase especialmente Gutiérrez (2011, pp. 19-24) y Jech (2006, pp. 19-33).

[148] El estudio de estas series trigonométricas fue frecuente a lo largo del siglo XIX, éstas se presentaban usualmente como soluciones a ecuaciones diferenciales que representaban problemas físicos (Enderton, 1977, p. 14).

[149] Este es un famoso resultado, se trata de un corolario del llamado teorema de Cantor. Para ver su enunciación y un esbozo de prueba, véase la sección 2.2.1.1. de este trabajo.

[150] $\forall x \in B \neg xRx$.

[151] $\forall x, y, z \in B((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$.

[152] $\forall x, y \in B(xRy \vee yRx \vee x = y)$.

[153] $\forall x \subseteq B(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \forall z \in x(z \neq y \rightarrow yRz))$.

no-vacío de B tiene elemento mínimo.[154]

Dada la definición de ordinal se tiene que $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$, $\alpha = \{\beta | \beta < \alpha\}$ y $0 = \emptyset$ es un ordinal. Asimismo, se tiene como consecuencia que para todo ordinal α, $\alpha \cup \{\alpha\}$ es un ordinal tal que $\alpha \cup \{\alpha\} = \inf\{\beta | \alpha < \beta\}$,[155] de modo que $\alpha \cup \{\alpha\}$ es el *sucesor* de α. Además, se tiene que dado un conjunto no-vacío de ordinales X, $\bigcup X = \sup X$[156] y es un ordinal. Cabe mencionar que los números ordinales finitos son representaciones conjuntistas de los números naturales y que el conjunto de todos ellos, llamado ω, es a su vez un número ordinal y es el ordinal infinito más pequeño.

Usualmente se consideran dos tipos de ordinales: los *ordinales sucesor* y los *ordinales límite*.[157] (Los primeros ya se han presentado en el párrafo de arriba.) Un ordinal α es límite si y sólo si α no es sucesor, entonces $\alpha = \sup\{\beta | \beta < \alpha\} = \sup \alpha$. Adicionalmente, resulta útil introducir el concepto de *ordinal inicial*: un ordinal α es inicial si y sólo si no hay un ordinal $\beta < \alpha$ con el que sea biyectable. Este concepto facilita la formulación de la definición de número cardinal de un conjunto bien-ordenado. Sea X un conjunto bien-ordenado, el *número cardinal* (o *cardinalidad*) *de* X, card X,[158] es el único ordinal inicial con el que es biyectable. Cabe señalar que todo conjunto bien-ordenado es isomorfo a un único ordinal, llamado su *tipo-ordinal*.

Otro concepto importante para caracterizar los cardinales a cabalidad es el de *los números de Hartogs*. Para un ordinal α, su número de Hartogs ($H(\alpha)$), es el menor ordinal que no es biyectable con subconjunto alguno de α.[159] Es mediante los números de Hartogs que uno puede definir por recursión la conocida jerarquía de los *alephs*: *i)* $\omega_0 = \omega$; *ii)* $\omega_{\alpha+1} = H(\omega_\alpha)$, para todo ordinal α; y *iii)* $\omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta | \beta < \alpha\}$, cuando $\alpha \neq \emptyset$ es límite. De este modo, para cualquier ordinal infinito inicial α hay un β tal que $\alpha = \omega_\beta$, y todo ω_β es un ordinal inicial (donde β es cualquier ordinal). Los *alephs* son precisamente los cardinales infinitos de la forma ω_β (con β ordinal), es decir, $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ (con α un ordinal).[160]

A continuación, se introducirá la noción de *cofinalidad*, la cual servirá

[154] Para un conjunto parcialmente ordenado $(P, <)$, un subconjunto no-vacío X de P y $a \in P$, a es un *elemento mínimo de* X si y sólo si $a \in X$ y $\forall x(x \in X \to a \leq x)$ (Jech, 2006, p. 17).

[155] Para un conjunto parcialmente ordenado $(P, <)$, $X \neq \emptyset$, $X \subseteq P$ y $a \in P$, a es el *ínfimo de* X ($\inf X$) si y sólo si a es la máxima cota inferior de X (Jech, 2006, p. 17).

[156] Para un conjunto parcialmente ordenado $(P, <)$, $X \neq \emptyset$, $X \subseteq P$ y $a \in P$, a es el *supremo de* X ($\sup X$) si y sólo si a es la mínima cota superior de X.

[157] Algunos prefieren separar el vacío de los ordinales límite, pues es límite por vacuidad.

[158] También puede encontrarse en algunos textos como $|X|$, $\bar{\bar{X}}$ o $\#X$.

[159] Si α es infinito $H(\alpha)$ debe ser un ordinal límite.

[160] Si se acepta la hipótesis generalizada del continuo los *alpehs* se corresponden con los *beths*.

para definir los primeros de los llamados "cardinales grandes", a saber, los *cardinales fuertemente inaccesibles*. Como se dijo, para todo ordinal límite λ, $\lambda = \sup \lambda$, esto es, todo ordinal límite es igual al supremo del conjunto de todos los ordinales menores que él. No obstante, no es necesario considerar *cada uno* de tales ordinales, es perfectamente posible encontrar $S \subseteq \lambda$ tal que $\lambda = \sup S$. El tamaño de S depende de quien sea λ, tal S se dice es *cofinal* en λ. Así pues, se define la *cofinalidad* de un ordinal límite λ, escrito cf λ, como el menor cardinal κ tal que λ es el supremo de κ ordinales menores (Enderton, 1977, p 257).[161] En pocas palabras, la cofinalidad "representa el 'modo de terminar' de un ordinal" (Amor, Campero y Miranda, 2010, p. 141). Del concepto de cofinalidad pueden desprenderse las siguientes afirmaciones: *i)* para todo ordinal α, cf α es un cardinal; *ii)* para todo ordinal α, cf $\alpha \leq \alpha$; y *iii)* para todo ordinal α, cf $\alpha = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}\ \alpha)$.

Ahora bien, un cardinal λ es *regular* si y sólo si cf $\lambda = \lambda$. Por su parte, un cardinal λ es *singular* si y sólo si cf $\lambda < \lambda$. Por ejemplo, $\aleph_0$ es regular mientras que $\aleph_\omega$[162] es singular. Se puede demostrar que todo cardinal sucesor es regular; esto implica que todos los cardinales singulares son límites, pero no se sabe (con la excepción de $\aleph_0$) si existen cardinales límites regulares. Finalmente, se dice que un cardinal κ es fuertemente inaccesible si y sólo si *i)* $\kappa > \omega$;[163] *ii)* κ es límite regular; y *iii)* κ es fuerte. Un cardinal κ es *fuerte* si y sólo si para cualesquiera $\lambda < \kappa$ e $\iota < \kappa$, $\lambda^\iota < \kappa$. En resumen, un cardinal inaccesible fuerte es aquel mayor que ω y tal que no puede ser alcanzado por sumas cardinales (uniones y reemplazos) ni exponenciación cardinal (potencias). Es importante dejar muy en claro que, aunque actualmente la existencia de estos cardinales grandes es sostenida por la mayor parte de la comunidad matemática, en realidad su existencia es independiente de ZFC, es decir, no puede demostrarse su existencia a partir de los axiomas de la teoría. (En la sección 2.2.1.3., esto será examinado con mayor detenimiento.)[164]

[161]Para el $\emptyset = 0$, se define cf $0 = 0$; para ordinales sucesores $\alpha + 1$, cf $\alpha + 1 = 1$.

[162]El consejo de Fraenkel y Skolem para incluir el axioma de reemplazo dentro del sistema axiomático de Zermelo fue crucial para poder construir $\aleph_\omega = \{\omega, \mathcal{P}\omega, \mathcal{P}(\mathcal{P}\omega), \ldots\}$.

[163]Algunos omiten esta condición, de modo que para ellos ω es un cardinal fuertemente inaccesible.

[164]Véase la nota *293*.

SEGUNDA PARTE: ALGUNAS IMPLICACIONES FILOSÓFICAS DEL TEOREMA DE LÖWENHEIM-SKOLEM

Nosotros podemos, después de todo, preguntar: ¿Qué significa para un conjunto existir si quizá nunca puede ser definido? Parece claro que esta existencia puede ser solamente una manera de hablar, lo que puede conducir solamente hacia proposiciones puramente formales –quizá compuestas de muy bellas palabras–acerca de objetos llamados conjuntos. Pero la mayoría de los matemáticos quiere que la matemática lidie, en última instancia, con operaciones computables realizables y no consista de proposiciones acerca de objetos llamados de esta o aquélla manera.

—Thoralf Skolem (1922)

La contribución de uno de los primeros grandes resultados de la teoría de modelos (si no es que el primero) fue demostrar algo sustancial y aparentemente paradójico acerca de la relación entre una teoría formal, expresada en lenguaje[165] de primer orden, y su interpretación (Arsenijevic, 2012, p. 64).

[165] A partir de ahora se asumirá que el lenguaje en cuestión es a lo más numerable. Cabe señalar que en realidad esta restricción no es completamente necesaria y que los resultados de la presente discusión pueden reproducirse para lenguajes no-numerables. Sin embargo, la razón de su omisión es que hacerlo simplifica la exposición sin comprometer la relevancia filosófica del análisis; además, trabajar con lenguajes numerables tiene ciertas consecuencias "favorables", por ejemplo: el conjunto de todas sus fórmulas es también a lo más numerable, lo que a su vez posibilita que el conjunto de fórmulas implicadas lógicamente a partir de un conjunto decidible Γ (posiblemente vacío) de fórmulas sea efectivamente enumerable. Los beneficios que esto trae tal vez a primera vista no es muy

Esto se refiere, por supuesto, al teorema de Löwenheim-Skolem.[166] Pero, ¿qué es exactamente esto sustancial y aparentemente paradójico?

Formalmente, el teorema no parece muy problemático:[167] si un conjunto de enunciados en un lenguaje contable de primer orden tiene un modelo de cardinalidad infinita, entonces tiene un modelo de cualquier cardinalidad infinita. Sin embargo, es al momento de interpretarlo filosóficamente cuando surge la controversia y el desconcierto.

En particular, el presente trabajo está consagrado al estudio de este resultado sobre la teoría de conjuntos (específicamente, ZFC expresada en primer orden), razón por la cual la discusión estará ubicada dentro de *la teoría de modelos de la teoría de conjuntos*, es decir, formará parte del "estudio en general de los modelos de la teoría de conjuntos y sus relaciones con el lenguaje del que son interpretación." (Amor, 2008, p. 87). Pero, antes de sumergirse propiamente dentro de estas cuestiones, cabe preguntarse, ¿por qué el interés de estudiar teorías formalizadas en primer orden? ¿Qué tiene de especial la lógica de primer orden? Además, ¿qué razón hay para trabajar la teoría de conjuntos desde la lógica clásica de primer orden? ¿Realmente vale la pena enfrentar las dificultades que esto implica? Y, a todo esto, ¿cuál es la importancia de estudiar la teoría de conjuntos en primer lugar?

El propósito de la siguiente sección será ofrecer una respuesta a estas cuestiones.

2.1. *La lógica de primer orden y la teoría de conjuntos*

En la actualidad, no es difícil advertir que, con frecuencia, la comunidad matemática y filosófica tiene cierta preferencia por la lógica de primer orden; sin embargo, esta tendencia no es arbitraria, de hecho, es el resultado de un

evidente, pero esto es precisamente lo que permite la transparencia y verificación que uno esperaría de una demostración para convencer a alguien de que, por decir algo, un determinado enunciado de ZFC (cuyos axiomas son decidibles y, por ende, puede verificarse su uso en la prueba) es efectivamente una consecuencia lógica de la teoría, *i. e.*, miembro de la teoría. (Recuérdese que $\mathrm{Cn}\ \Gamma = \Gamma$.)

[166]De hecho, igualmente es posible obtener este resultado en lógicas de segundo orden con semánticas tipo Henkin y algunas restricciones extra, pero el verdadero interés del presente análisis radica en su aplicabilidad a lógicas de primer orden por las razones exhibidas a continuación. Por lo anterior, en adelante el tratamiento y cualquier referencia estará dirigido hacia estas últimas lógicas.

[167]En realidad, normalmente el teorema suele ser presentado en dos versiones (una ascendente y otra descendente), pero por ahora basta únicamente con una versión general de él.

largo proceso que tuvo origen durante la segunda mitad del siglo XIX tras una serie de cambios en la concepción tradicional de la lógica y que, a la larga, motivaron el surgimiento de la lógica simbólica moderna.[168] No obstante, tal predilección no tiene solamente una razón de naturaleza histórica, sino también una de naturaleza metalógica.

Sin importar qué contingencia histórica hubiese ocurrido, muy probablemente la preeminencia de que goza la lógica de primer orden no se habría manifestado de no ser por una serie de propiedades muy características, pero sobre todo particularmente "deseables" o "convenientes" de algunos de sus sistemas formales deductivos; como son, su simultánea *correctud*, *completud*, *compacidad* y *efectividad*;[169] así como también una adecuada *capacidad expresiva* de sus lenguajes. En breve, el atractivo de disponer de sistemas deductivos con tales propiedades está en relación íntima con la aprehensión de ciertos atributos que intuitivamente esperan encontrarse en los razonamientos apropiados y que pretenden modelarse. Por ejemplo, como ya se ha mencionado en la sección 1.1.2., compacidad garantiza que siempre que pueda inferirse algo de un conjunto (posiblemente infinito) de premisas, es

[168] Alrededor de 1850, la confluencia entre la tradición lógica y la matemática, así como el creciente interés por el análisis de la lógica de las matemáticas promovieron su ampliación a unas, si bien primitivas, teoría de conjuntos, lógica de enunciados y de predicados. Para principios del siglo XX, la fiebre logicista ya había motivado la aparición del sistema fregeano que incluía una aún imprecisa teoría de conjuntos y lógica de orden superior. No obstante, el descubrimiento de las paradojas (como la de Russell) al interior del sistema suscitó la revisión de los fundamentos de la teoría de conjuntos, su relación con la lógica y la lógica misma; asimismo, impulsó la formalización rigurosa del lenguaje matemático. Uno de los intentos más importantes para esto fue la teoría de tipos desarrollada por Russell y Whitehead en 1908, e incorporada dentro de su famoso *Principia Mathematica*. Durante el siguiente cuarto de siglo, la teoría de tipos permaneció como el sistema lógico más natural y como el favorito de los lógicos de la época. Sin embargo, el primer tratado de lógica formal donde por primera vez aparece un estudio independiente de la lógica de primer orden es el *Grundzüge der theoretischen Logik* de Hilbert y Ackerman. Aunque en él la lógica de primer orden solamente es presentada como un subsistema interesante, en aquél por primera vez son formuladas cuestiones metateóricas acerca de sus posibles propiedades. Pero fueron realmente los autores de tendencias constructivistas, más precisamente, Weyl y Skolem, los primeros quienes, tras llevar a cabo una reflexión crítica respecto del papel fundacional de la teoría de conjuntos, propusieron la lógica de primer orden como el sistema adecuado para la labor fundacionista. Fue en la década de los treinta, cuando finalmente la comunidad lógica manifestó paulatinamente su apoyo a las sugerencias de Weyl y Skolem, y terminó por aceptar la lógica de primer como requisito suficiente para la fundación de la matemática, en concreto, para el desarrollo de la teoría de conjuntos y la metamatemática hilbertiana. Para una exposición más completa y detallada de este proceso histórico, se recomienda vehementemente la lectura de Ferreirós (2001).

[169] Seguramente el lector reconoce algunas de estas nociones de la sección 1.1.4. Para la formulación precisa de tales resultados metateóricos sobre los sistemas de deducción respecto de una semántica dada, véase dicha sección.

suficiente un subconjunto finito de ellas para hacerlo;[170] por lo menos, esto a primera vista parece sugerir[171] que las demostraciones formales deben ser de longitud finita (aun cuando el tiempo de vida del universo no alcanzara para terminar de describir la sucesión). Esto resulta especialmente conveniente si se espera que las demostraciones sean reproducibles y verificables, o sencillamente transmisibles. En lo que se refiere a la efectividad de un sistema de deducción, esto quiere decir que puede verificarse de manera efectiva si una supuesta deducción es realmente una deducción del sistema. Esta propiedad se obtiene como corolario del metateorema de numerabilidad.

Por su parte, la correctud de un sistema formal, como su nombre lo indica, "nos dice que nuestras deducciones nos llevan únicamente a conclusiones 'correctas' " (Enderton, 2004, p. 193). En efecto, quizá de manera un tanto optimista (y sospechosa para algunos), uno quisiera creer que un razonamiento impecable inevitablemente llevaría a alguien a concluir cosas verdaderas. Es por ello que si el sistema careciera de esta propiedad, de alguna forma se vería desacreditado, pues esto significa que permite deducir una conclusión falsa a partir de un conjunto verdadero de premisas, de acuerdo con una interpretación particular. En otras palabras, si el sistema no es correcto, entonces algún conjunto de fórmulas del lenguaje Γ podría ser satisfecho por una estructura $\mathfrak{A}$ y una función $s : V \to |\mathfrak{A}|$, y, sin embargo, ser inconsistente, *i. e.*, derivar contradicciones.

En cuanto a la completud del sistema, comúnmente es considerada como la propiedad conversa de la correctud, y, quizá de manera controvertida y aún más optimista que esta última, recupera la intuición (seguramente no aceptada de manera universal) de que si algo es verdadero, entonces uno puede tener acceso a ello por medio de un buen razonamiento o, dicho de otro modo, de que toda verdad es demostrable. Así, que un sistema falte a esta propiedad significa que carece de los recursos para establecer todas las verdades expresables por el lenguaje, es decir, podría tener reglas de inferencia insuficientes (o tal vez deficientes) para deducir cualquier enunciado verdadero. La idea central es que, si el sistema no es completo, una fórmula podría seguirse lógicamente de un conjunto de fórmulas y aún no poderse deducir desde este último. De manera equivalente, que un sistema sea incompleto significa que

[170] Esta es solamente una de las muchas aplicaciones del metateorema de compacidad. Por ejemplo, otra utilidad que usualmente se le da es para obtener estructuras con determinadas propiedades: primero se ofrece un conjunto de enunciados que expresen las propiedades de interés, después se afirma que cualquier subconjunto finito de estos enunciados tiene un modelo; el metateorema garantiza que el conjunto total de enunciados tiene un modelo (véase, Enderton, 2004, p. 216).

[171] Recuérdese que para poder afirmarlo sin apariencias se requiere de otro resultado, a saber, el metateorema de numerabilidad de fórmulas válidas. Véase la sección 1.1.2.

un conjunto de fórmulas del lenguaje Γ es consistente y no satisfacible, o sea, que de ese conjunto no puede deducirse una fórmula y su negación, y además a lo menos un elemento de tal conjunto no puede ser satisfecho por alguna estructura $\mathfrak{A}$ y función $s : V \to |\mathfrak{A}|$, lo cual quiere decir que la negación (clásica) de esos elementos son fórmulas válidas (*i. e.*, satisfechas por toda estructura $\mathfrak{A}$ y función s) que no pueden ser deducidas por el sistema, pues en ese caso Γ sería inconsistente. En pocas palabras, habría verdades lógicas que el sistema no puede deducir. Ahora bien, también es posible que Γ sea consistente y que no sea satisfacible porque alguno de sus subconjuntos finitos no lo es, en cuyo caso la fórmula que resulta de la conjunción entre cada uno de los miembros del subconjunto (que es necesariamente finita) es una formula insatisfacible. A partir de esta última es posible reproducir el argumento anterior y llegar a la misma conclusión.

Que la lógica en cuestión sea completa y correcta es de especial interés y conveniencia para muchos fines, entre otras cosas, porque concede un tratamiento uniforme de las nociones semánticas y sintácticas de los sistemas por ser extensionalmente equivalentes. En particular, la relación consecuencia semántica, la validez de fórmulas y la satisfacibilidad coinciden exactamente con las de consecuencia sintáctica, teoremicidad y consistencia, respectivamente. Por ejemplo, gracias a esto es posible determinar la consistencia de un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden Γ a partir de la existencia de una estructura $\mathfrak{A}$ que lo satisface con una cierta función $s : V \to |\mathfrak{A}|$, y su satisfacibilidad a través de su consistencia.

Finalmente, la capacidad, poder o fuerza expresiva de los lenguajes alude informalmente a "aquello que podemos decir con el lenguaje con el que contamos" (Hernández, 2015, p. 32). Sin embargo, para enunciar esto de manera precisa vale la pena seguir la propuesta de Hernández (2015)[172] quien, al retomar las investigaciones de Lindström sobre el poder de los sistemas lógicos de primer orden, sostiene que la expresividad es una cualidad reconocible de cualquier sistema lógico (por lo menos clásico) y se entiende como "la capacidad que tiene [un sistema lógico] para axiomatizar cierta clase de estructuras del universo matemático e incluso de caracterizar hasta isomorfía[173] algunas de ellas." (p. 33)[174] Dicho lo anterior, que los lenguajes de primer orden posean una capacidad expresiva adecuada apunta a su capacidad para definir clases elementales[175] de interés mediante teorías axiomatizables.

[172]Para más al respecto, se recomienda revisar la sección 1.4.

[173]O salvo isomorfismo.

[174]Aunque, como se verá más adelante, esto último no será posible dentro del contexto de la lógica de primer orden para el caso de estructuras infinitas, precisamente por el teorema de Löwenheim-Skolem.

[175]Véase la sección 1.1.3.

Es posible que el lector se sorprenda por la afirmación de que dichas propiedades de los sistemas formales pretenden recuperan determinadas intuiciones que uno podría tener respecto de una inferencia aceptable, cuando bien podrían no parecer del todo "intuitivas"; sin embargo, uno no debería olvidar que tales modelos inferenciales están pensados principalmente para su aplicación dentro del ámbito de la matemática, donde el estudio de los objetos abstractos o, más cautamente, de las afirmaciones sobre ellos, difícilmente puede ser considerado con seriedad de otro modo.[176]

Pero, ¿qué con la teoría de conjuntos? ¿Por qué la costumbre de expresarla en primer orden? Aunque sería una mentira negar que el descubrimiento (o la sospecha, pues no todas fueron confirmadas desde un inicio) de las propiedades mencionadas en los párrafos de arriba tuvo algo que ver con esto, en realidad, esta costumbre forma parte del mismo proceso histórico que colocó a la lógica de primer orden en su lugar privilegiado.[177] De hecho, los primeros sistemas formalizados en primer orden fueron justamente sistemas axiomáticos para la teoría de conjuntos, *e. g.* el sistema de von Neumann y el de Zermelo (este último por parte de Skolem). Podría decirse de alguna forma que fueron los resultados metalógicos sobre los sistemas de primer orden, en gran medida los ofrecidos por Gödel en la década de los treinta, los que justificaron definitivamente la suficiencia de estos sistemas para formular teorías matemáticas.

No obstante, es verdad que en un inicio la teoría de conjuntos, como prácticamente cualquier otra teoría matemática de finales del siglo XIX y primer cuarto del XX, solía ser trabajada en órdenes superiores,[178] fue el cambio de paradigma en el tratamiento de la deducción, inducido por el novedoso método axiomático moderno,[179] que, entre otras cosas, sugería fuera

[176]Al enfrentarse con objetos abstractos (como los de la matemática) es difícil afirmar algo de ellos sin apelar a suposiciones con diferentes orígenes (como la intuición u otros mecanismos cognitivos poco ortodoxos), pues el acceso a ellos no es directo ni de la misma naturaleza que el de, por ejemplo, los objetos de la experiencia. Es por esto que ciertos enunciados esperan capturar determinadas características supuestas (o quizá impuestas) de dichos objetos; "supuestas" porque actualmente no se cuenta con un método no controvertido que permita la confirmación de las propiedades atribuidas a ellos. De esta forma, irremediablemente uno debe someterse a la aceptación de tales supuestos mientras no se descubra o reconozca (de manera unánime) una forma de conocer este tipo de objetos. Para un breve recorrido histórico acerca del desprendimiento de la matemática de los estudios de las ciencias empíricas, véase Maddy (2019, pp. 2-10).

[177]Ver nota *168.*

[178]La siguiente exposición fue tomada principalmente del apartado 5.1 de Ferreirós (2001).

[179]Como es de saberse, el primer registro del método axiomático se remonta a los *Elementos* de Euclides, no obstante, el método continuó aplicándose en diferentes ámbitos durante los siguientes siglos, pues difícilmente podía ignorarse su claridad y precisión explícita en

realizada con mayor rigor e independencia de significado, lo que llevó a los matemáticos y lógicos de la época a cuestionarse respecto del verdadero sentido de trabajar con estos sistemas de orden superior. Por ejemplo, uno de los problemas que se tienen al implementar sistemas de segundo orden[180] a teorías matemáticas es que su cuantificación refiere también a "todas las propiedades" de los objetos del dominio, pero si la naturaleza de los objetos del dominio es variable, entonces el conjunto de todas las propiedades parece no estar bien definido; además de que parece ser que en matemáticas uno no presupone nunca una totalidad de propiedades, sino que uno va definiendo nuevas propiedades por medios lógicos sobre la marcha. En el caso específico de la teoría de conjuntos, trabajar en segundo orden no parecía ser del todo aceptable, pues, aunque naturalmente uno podría interpretar el dominio de las propiedades como el conjunto de todos los subconjuntos del dominio de objetos, el problema es que para precisar el primero antes debe especificarse unívocamente el segundo, lo cual, en última instancia, equivale a decidir el problema del continuo.[181] Este fue justamente el tipo de consideraciones que llevaron a Weyl y Skolem, tras reflexionar (de manera independiente) sobre el sistema axiomático de Zermelo, a ser los primeros en proponer la idea de manejar este sistema en primer orden. Es cierto que la comunidad lógica y matemática aún tenía bajo consideración alternativas a los sistemas de primer orden, pero también es cierto que estos últimos se mostraron generalmente superiores en simplicidad, poder y practicidad a sus rivales.

Hasta ahora se han ofrecido una serie de respuestas en relación con la ventaja de utilizar la lógica de primer orden para formular teorías de la matemática, particularmente la teoría de conjuntos, pero, ¿cuál es el interés detrás del estudio de la teoría de conjuntos?

No es difícil encontrar en la literatura que la teoría de conjuntos, como ZFC, es suficiente para proporcionar un fundamento a prácticamente toda la matemática clásica. Este hecho remarcable normalmente se asocia con la idea de que cada objeto o estructura matemática estándar puede representarse mediante un sustituto conjuntista y que sus propiedades pueden ser capturadas mediante el lenguaje de la teoría; a su vez, esto se asocia con la idea de que cualquier enunciado matemático puede ser formalizado por medio de este lenguaje, y que cualquier teorema matemático clásico puede derivar-

el desarrollo de teorías. No es extraño que fuese reconsiderada durante el siglo XX.

[180]Basta con presentar el caso de segundo orden para ilustrar de modo general lo que ocurre en órdenes superiores, pues existe un resultado de Hintikka que establece una suerte de reducción de cualquiera de los segundos (siempre y cuando sean de orden superior finito) al primero.

[181]O sea, ¿cuál es la cardinalidad del continuo?

se al utilizar algún cálculo deductivo adecuado[182] (como el presentado por Enderton [2004]) de la lógica de primer orden y desde los axiomas de ZFC. Sin embargo, la concepción de "fundamento" no es única entre los filósofos de la matemática (ni posiblemente entre éstos y los matemáticos),[183] aunque tampoco está absolutamente separada entre unos y otros. Por mencionar algunos,[184] para Tsementzis y Halvorson (2016)[185] la noción de fundamento de la matemática consiste en una *lógica central* (*e. g.* la lógica clásica de primer orden) utilizada para expresar una *teoría* (*e. g.* los axiomas de ZFC expresados con ayuda de "$\in$") que describe un *universo de objetos básicos* (*e. g.* la jerarquía acumulativa de conjuntos de von Neumann); de esta manera, sobre esto puede fundamentarse una *filosofía del análisis lógico* (el nombre russelliano para lo que hoy podría considerarse filosofía analítica) y apreciar su uso en la clarificación y abordaje de problemas filosóficos (pp. 4-5).

Por otro lado, Ladyman y Presnell (2016) identifican una serie de sentidos distintos para el término "fundamento" e intentan ofrecer ciertos criterios de caracterización para el término, aun cuando no se comprometen con que éstos sean definitivos. Un sentido se refiere sencillamente a un lenguaje unificador y marco conceptual; otro sentido va más allá y añade al anterior una serie de definiciones particulares para entidades matemáticas en términos de dicho lenguaje; el último sentido, señalan, tiene que ver con los esfuerzos del filósofo por encontrar un tipo de fundamento más fuerte para la matemática, esto es,

> [m]ás allá de meramente darle un lenguaje para la matemática, un fundamento en este sentido involucra proveer un terreno para la matemática en ideas pre-matemáticas, y responder cuestiones semánticas, metafísicas, epistemológicas y/o metodológicas acerca de la matemática. (p. 5)[186]

Además, parece ser que este sentido de fundamento también requiere que sea autónomo, es decir, que "no esté montado sobre otro sistema fundacional"

[182]Aquí "cálculo deductivo adecuado" podría entenderse como completo y correcto.

[183]Como dicen Ladyman y Presnell (2016), los defensores de diversos programas fundacionistas tienen ideas variadas acerca de lo que es proporcionar un fundamento (p. 5).

[184]Esto en lo más mínimo pretende ser una presentación exhaustiva de posturas al respecto, simplemente se eligieron estos autores con la finalidad de ilustrar que las perspectivas respecto al asunto, aunque distintas, son parecidas en ciertos aspectos.

[185]Vale la pena revisar tanto la primera sección del artículo de Tsementzis y Halvorson (2016), como del de Maddy (2019) para un recorrido histórico de estas cuestiones sobre fundamentación de la matemática. Presentarlo aquí desgraciadamente significaría un desvío innecesario para lo que aquí se pretende rescatar, a saber, la importancia de estudiar la teoría de conjuntos, en particular ZFC. Es por esto que a continuación la exposición solamente se limitará a presentar muy brevemente las características principales de fundamento para la matemática que proponen algunos autores.

[186]La traducción es propia.

(p. 5). Los criterios que Ladyman y Presnell presentan posteriormente tienen que ver exactamente con lo dicho en estas últimas líneas.[187]

Finalmente, Maddy (2019) se declara escéptica con respecto de que haya un concepto de "fundamento" subyacente para ser analizado y que permita evaluar los distintos candidatos propuestos por diferentes autores. No obstante, se dispone a resaltar algunos logros que el estudio de la inmersión de la matemática clásica sobre la teoría de conjuntos ha arrojado y que de alguna manera podrían considerarse "fundamentales" en el "sentido ordinario del término" y no en el sentido fuerte empleado en filosofía. Así pues, desde el punto de vista de Maddy (2019),

> la teoría de conjuntos proporciona [una] *evaluación de riesgo* a teorías matemáticas [*i. e.*, funciona como una especie de parámetro para evaluar o determinar el grado de consistencia de teorías en sus versiones conjuntistas], una *arena generosa* donde pueden seguirse las ramas de la matemática dentro de un entorno unificado [*i. e.*, una especie de ambiente común y unificado suscitado por la inmersión de diferentes ramas de la matemática dentro de una sola teoría de conjuntos y que permite la interrelación entre unas y otras] con un *estándar compartido* de prueba [*i. e.*, un criterio uniforme y compatible de lo que conforma una prueba legítima], y un *corral meta-matemático* de forma que todas las técnicas formales pueden ser aplicadas a toda la matemática a la vez [*i. e.*, un entorno sobre el cual distinguir rasgos y demostrar teoremas generales una vez que la matemática ha sido formalizada mediante la teoría de conjuntos]. (p. 16)[188]

Baste lo anterior para mostrar un poco la posible motivación detrás del estudio de la teoría de conjuntos, más precisamente, de ZFC. Con todo, el papel que ésta tiene para el fundamento de la matemática va acompañado de la serie de ideas y técnicas que su estudio (ya de más de cien años) ha permitido desarrollar e implementar en las diversas áreas de la matemática con resultados importantes. Además, retomando un poco lo de antes, que prácticamente toda la matemática pueda ser formalizada dentro de ZFC y que ello permita formular matemáticamente con precisión cuestiones acerca de la existencia de algún objeto matemático, o de la demostrabilidad de alguna conjetura o hipótesis, hace posible entre otras cosas el estudio matemático de la matemática misma, es decir, la *metamatemática*. Desgraciadamente, puede suceder que si se busca averiguar si alguna hipótesis es demostrable o no dentro del sistema formal de ZFC, la respuesta sea indecidible, esto es,

[187]Para ver explícitamente los componentes que estos autores distinguen respecto de esta noción de fundamento, junto con las cuestiones que cada uno de ellos genera, ver las secciones 2.1 y 2.2 de Ladyman y Presnell (2016).

[188]La traducción es propia.

que para una fórmula φ y un cálculo deductivo tanto $\vdash \varphi$ como $\nvdash \neg\varphi$; la razón de esto es que ZFC de ser consistente, entonces es incompleta.[189]

Con esto se da por terminada esta sección y se espera haya resultado suficiente para exhibir algunas motivaciones detrás del empleo de la lógica de primer orden en la formalización de ZFC y de su estudio. Por fin, en el próximo apartado se iniciará propiamente con el objeto de análisis del presente trabajo.

2.2. *Los teoremas de Löwenheim-Skolem... y Tarski*

Como se ha mencionado, el teorema de Löwenheim-Skolem se trata posiblemente del primer gran resultado de la teoría de modelos; no obstante, sus versiones actuales y más generales, no son exactamente como fue formulado originalmente. Sin embargo, antes de presentarlos debidamente, cabe hacer un par de aclaraciones: Primero, el teorema es prácticamente exclusivo de la lógica clásica de primer orden,[190] de hecho, su versión descendente (véase a continuación) es precisamente uno de los criterios aludidos por Lindström para caracterizar la lógica de primer orden;[191] segundo, en las secciones posteriores únicamente bastará con considerar las versiones más recientes del teorema, incluso a veces solamente será suficiente tomar en cuenta la versión "sintética" que reúne en sí misma las peculiaridades de aquéllas. Es por lo anterior que tan solo se bosquejarán las demostraciones de estos últimos. Con todo, en esta sección se mencionarán casi todas las demás con fines meramente expositivos.

La primera aparición del ahora llamado teorema de Löwenheim-Skolem se remonta a 1915, cuando Leopold Löwenheim publicó el siguiente resultado:[192] sea Γ un conjunto unitario de fórmulas (*i. e.*, una fórmula) satisfacible

[189]Esto en el sentido de incompleta para la negación. Este resultado es una instancia del primer teorema de incompletud de Gödel a ZFC.

[190]Más precisamente, de la teoría de modelos para la lógica clásica de primer orden. Es por ello que, como se dijo anteriormente, lógicas de segundo orden con semántica modelo-teórica de primer orden, como la Henkin, pueden arrojar el resultado. Sin embargo, como también ya se ha señalado, el resultado no se obtiene para lógicas de segundo orden con las llamadas semánticas estándar ni para lógicas debilitadas de primer orden como las construtivistas.

[191]El otro criterio es el teorema de compacidad. *Grosso modo*, el resultado de Lindström señala que la lógica de primer orden es la lógica con mayor poder expresivo que sostiene los resultados de Löwenheim-Skolem (descendente) y compacidad; véase, Hernández (2015, pp. 30-31).

[192]En realidad, la siguiente no es exactamente su formulación original, pero de esta forma

en un lenguaje contable, entonces hay una estructura finita o contable que lo satisface. Como la fórmula en el enunciado anterior podría tratarse de una conjunción entre una cantidad contable de fórmulas,[193] en 1920, Thoralf Skolem pudo extender este resultado al caso en que Γ es un conjunto de fórmulas a lo más numerable.[194] Poco después, dos años más tarde para ser exactos, publicó una versión más refinada de lo anterior; y junto con él, la paradoja que lleva su nombre.[195] Esta última versión del teorema es como sigue: si Γ es un conjunto satisfacible de fórmulas en un lenguaje numerable, entonces hay una estructura numerable que satisface Γ.[196]

Finalmente, en 1928, Alfred Tarski ofreció en un seminario una prueba del que ahora se conoce como *teorema ascendente de Löwenheim-Skolem* (o *teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski* [LST]), mas este resultado nunca fue publicado y solamente aparece mencionado en la nota editorial del artículo de Skolem de 1934.[197] De esta manera, propiamente el resultado aparece por primera vez publicado en un artículo de Anatoly Maltsev de 1936.[198] Poco después, un resultado más general que el ofrecido por Skolem en 1922, atribuido también a Tarski, fue dado a conocer y actualmente se le identifica con el nombre de *teorema descendente de Löwenheim-Skolem*.[199] A continuación, serán presentados ambos resultados con sus respectivos esbozos de prueba, comenzando por éste último:[200]

i) *Teorema descendente de Löwenheim-Skolem*: Sea Γ un conjunto satisfacible de fórmulas en un lenguaje de cardinalidad $\lambda = \aleph_0$, entonces Γ

resulta más claro y conveniente para los propósitos actuales.

[193]Recuérdese que se dijo del lenguaje ser numerable y, por tanto, tiene a lo más una cantidad numerable de fórmulas. Véase la nota *54*.

[194]Esto es evidente, simplemente se separan los conyuntos que podrían componer la fórmula en el teorema de Löwenheim y se agrupan en el conjunto Γ.

[195]Se trata de la conocida paradoja de Skolem. Más adelante se dedicará una sección a ella, pues efectivamente se trata de una de las implicaciones filosóficas del teorema en cuestión.

[196]Véase, Enderton (2004, pp. 221-222).

[197]O sea, en su *Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen.*

[198]Esta presentación puede encontrarse con más detalle en la sección 4.2 de Arsenijevic (2012, pp. 64-65).

[199]Desgraciadamente, la mayor generalidad de este resultado respecto del presentado por Skolem no podrá apreciarse en su formulación próxima, pues en realidad es más general porque permite su aplicación a lenguajes de cardinalidad no-contable y ya se ha establecido que en este trabajo tan solo se considerará el caso de lenguajes contables por las razones señaladas en la nota *53*. No obstante, se señalará muy someramente la restricción que permite su aplicación a aquéllos.

[200]Las pruebas pueden encontrarse en Enderton (2004, pp. 224-226).

es satisfacible en alguna estructura de tamaño *igual a*[201] λ.
Prueba: Como se asume que Γ es satisfacible, entonces por correctud Γ es consistente y por tanto es posible construirle un modelo al modo de Henkin,[202] a saber: se construye una estructura $\mathfrak{A}/E$ a partir de una estructura provisional $\mathfrak{A}$, tal que $|\mathfrak{A}|$ consiste en el conjunto de todos los términos del lenguaje en que se expresa Γ aumentado con una cantidad contable de nuevos símbolos funcionales de cero argumentos (quizá se puede decir, muy figurativamente, que la estructura refleja los términos del lenguaje aumentado como una especie de "espejo"). Nótese que el lenguaje aumentado sigue siendo de cardinalidad numerable y, por lo mismo, $|\mathfrak{A}|$ también. Posteriormente, se define una relación de congruencia $E^{\mathfrak{A}}$ sobre $|\mathfrak{A}|$, es decir, una relación de equivalencia que es compatible con la asignación en la estructura $\mathfrak{A}$ de cada símbolo relacional y cada símbolo funcional.[203] Es con ella se construye la estructura cociente $\mathfrak{A}/E$.[204] Es relativamente evidente que $|\mathfrak{A}/E|$ es también numerable, ya que está compuesto por las clases de equivalencia de elementos de $\mathfrak{A}$. (Si el lector no está convencido, sencillamente defina una función inyectiva de $|\mathfrak{A}/E|$ en $|\mathfrak{A}|$ asignando a cada clase de equivalencia un elemento representante. Esto se puede hacer legítimamente por el axioma de elección.)[205]

ii) Teorema ascendente de Löwenheim-Skolem:[206] Sea Γ un conjunto de fórmulas en un lenguaje de cardinalidad $\lambda = \aleph_0$, y supóngase que Γ es satisfacible en alguna estructura infinita, entonces para todo cardinal $\kappa \geq \lambda$ hay una estructura de cardinalidad κ en la que Γ es satisfacible.
Prueba: Sea $\mathfrak{A}$ la estructura infinita en la que Γ es satisfacible y ex-

---

[201] Para el caso de lenguajes no-numerables esta igualdad se sustituye por $\leq$.

[202] Se trata del mismo método que Leon Henkin empleó en su tesis doctoral (en 1949) para demostrar el teorema de completud de los sistemas de primer orden. De hecho, desde entonces se estandarizó como el método de prueba de dicho teorema.

[203] Para cada símbolo relacional P, $P^{\mathfrak{A}}$ es compatible con $E^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$ y $t_i E^{\mathfrak{A}} t'_i$ (para $1 \leq i \leq n$), entonces $\langle t'_1, \ldots, t'_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$. Por su parte, para cada símbolo funcional f, $f^{\mathfrak{A}}$ es compatible con $E^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $t_i E^{\mathfrak{A}} t'_i$ (para $1 \leq i \leq n$), entonces $f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) E^{\mathfrak{A}} f^{\mathfrak{A}}(t'_1, \ldots, t'_n)$.

[204] Para los detalles, véase la demostración del teorema de completud en Enderton (2004, pp. 198-208).

[205] Para lenguajes no-numerables, sustitúyase λ por algún número cardinal transfinito mayor que $\aleph_0$ y nótese que al momento de añadir las constantes solamente podrán añadirse una cantidad λ de ellas (pues la cardinalidad del lenguaje es λ).

[206] También este resultado puede aplicarse a lenguajes no-numerables, análogamente a lo afirmado en la nota anterior, sencillamente sustitúyase λ de manera uniforme en las apariciones que ocurran a continuación por algún número cardinal transfinito mayor que $\aleph_0$.

tiéndase el lenguaje añadiendo un conjunto de κ nuevos símbolos funcionales de cero argumentos. (Nótese que la cardinalidad del lenguaje es $\lambda + \kappa = \kappa$). Llámese Σ al conjunto que contiene tales κ símbolos distintos, de modo que cada subconjunto finito de $\Gamma \cup \Sigma$ es satisfacible en $\mathfrak{A}$ (como $\mathfrak{A}$ es infinita su dominio tiene elementos suficientes para "reflejar", abusando un tanto de la palabra como en la prueba anterior, cada uno de los nuevos símbolos funcionales de cero argumentos que se hallen en cada uno de los subconjuntos finitos. Así, por compacidad $\Gamma \cup \Sigma$ es satisfacible, por ende, por el teorema anterior[207] puede ser satisfecho en una estructura $\mathfrak{B}$ de tamaño $\leq \kappa$. Cualquier modelo de Σ tiene cardinalidad $\geq \kappa$, por lo que $\mathfrak{B}$ tiene cardinalidad κ; por último, sencillamente se restringe $\mathfrak{B}$ al lenguaje original.

Antes de continuar, resulta muy pertinente hacer un par de observaciones adicionales: en primer lugar, nótese que para cada uno de los teoremas aquí aducidos puede demostrarse una versión análoga que involucre únicamente conjuntos de enunciados en lugar de conjuntos de fórmulas en general, en cuyo caso cabe hablarse de modelos en lugar de estructuras, donde sea necesario; en segundo, como pueden obtenerse perfectamente tales resultados como corolarios, es completamente legítimo considerar que tales conjuntos de enunciados, llámense Σ,[208] se traten de conjuntos de axiomas de alguna teoría. No es muy difícil adivinar donde se quiere llegar con esto. Obviamente, a propósito de lo anterior, sin duda el caso de interés emerge cuando $\Sigma = \mathrm{A}_{\mathrm{ZFC}}$,[209] como la teoría de conjuntos de ZFC es finitamente axiomatizable, entonces $\mathrm{Th\ Mod\ A}_{\mathrm{ZFC}} = \mathrm{Cn\ A}_{\mathrm{ZFC}} = \mathrm{Cn\ T}_{\mathrm{ZFC}}$[210] $= \mathrm{T}_{\mathrm{ZFC}}$.[211] En pocas palabras, ¡los resultados de Löwenheim-Skolem-Tarski pueden ser aplicados prácticamente de manera natural a ZFC expresada en primer orden!

Se destaca el hecho de que se dijo "prácticamente" y no "totalmente", esto aunque no lo parezca es muy significativo. La razón es que, para que esto pueda hacerse, se presupone algo nada trivial, a saber, que $\mathrm{T}_{\mathrm{ZFC}}$ es consistente, y que por tanto tiene modelo (se sigue directamente de completud). Más aún, de ser consistente, ¡su modelo debe ser a lo menos infinito! (Esto porque el modelo tendría que hacer verdadero, entre otras cosas, el axioma de infinito.)

En la siguiente sección se iniciará propiamente el estudio de lo que implica este teorema sobre ZFC. No obstante, aún resta una deuda por saldar: la

[207]En rigor, es por el teorema anterior para el caso de lenguajes no-numerables.
[208]O sea, $\Sigma = \Gamma$ en los teoremas anteriores.
[209]$\mathrm{A}_{\mathrm{ZFC}}$ se refiere a los axiomas de ZFC.
[210]$\mathrm{T}_{\mathrm{ZFC}}$ se refiere a la teoría formal de conjuntos de ZFC.
[211]Véase el final de la sección 1.1.3.

versión "sintética" del teorema. En sentido estricto esta versión no es, por así decirlo, oficial, se trata tan solo de una adaptación que junta los resultados previos en un enunciado de fácil aprehensión, a saber: sea Γ un conjunto de fórmulas en un lenguaje contable de primer orden, si Γ es satisfacible en una estructura de cardinalidad infinita, entonces es satisfacible en estructuras de cualquier cardinalidad infinita.[212]

2.2.1. *¿Un problema de interpretación o de modelos?*

Líneas más arriba se mencionó un requisito especial e importante para poderse aplicar Löwenheim-Skolem sobre ZFC, este es, que ZFC sea consistente. Se sostiene, pues, que, aunque no puede demostrarse dentro de la teoría[213] es suficientemente razonable suponerlo: más de cien años de desarrollo de la teoría de conjuntos y aún no hay rastro de inconsistencia.[214]

Ahora bien, el motivo de esto no es arbitrario, su relevancia se encuentra en la justificación "sensata" de la existencia de un modelo para la teoría. Sin embargo, hay más opciones. Por ejemplo: sencillamente uno podría asumir la existencia de tal modelo y continuar, o uno podría buscar otra alternativa que justifique adecuadamente la existencia de ese modelo y que, a la larga, conceda la aplicación de Löwenheim-Skolem. Precisamente en la sección 2.2.1.3. se optará por una estrategia de este estilo y se propondrá la existencia de ciertas entidades "conjuntistas"[215] que permiten sostener la existencia de un modelo de cierto tamaño adecuado para ZFC y que encima permite probar su consistencia. Pero por ahora, simplemente supóngase que ZFC es consistente y, por ende, que tiene un modelo. ¿Qué resulta de considerar Löwenheim-Skolem sobre ZFC?

[212]También en este caso puede considerarse la alternativa que únicamente considera un conjunto de enunciados y donde las estructuras pueden ser llamadas modelos con todo derecho.

[213]El lector familiarizado con los teoremas de incompletud de Gödel no se dejará sorprender por esto y sabrá que es imposible por el segundo de ellos aplicado a ZFC: si ZFC es consistente, entonces no es teorema de ZFC que ZFC es consistente, *i. e.*, ZFC no puede demostrar su propia consistencia. Explorar más allá de su enunciación este teorema no es relevante para la exposición actual, por tanto, no se dirá más al respecto. Si el lector está interesado en conocer a detalle este resultado (sobre la teoría de conjuntos), vea Enderton (2004, pp. 388-396).

[214]Por supuesto que de ser inconsistente cualquier teorema se seguiría, en particular se seguiría aquel que afirma su propia consistencia. Claro que nadie en su sano juicio se dejaría convencer por esa prueba de consistencia.

[215]Esto se refiere a los cardinales fuertemente inaccesibles. El término se ha entrecomillado porque en realidad la existencia de tales entidades es indecidible en ZFC, por ende, en sentido estricto alguien que sostenga que los conjuntos son únicamente aquellos objetos deducibles en el sistema axiomático podría resistirse a aceptar su naturaleza conjuntista.

Grosso modo, la aplicación del teorema sobre ZFC enuncia algo como lo siguiente: Si T_{ZFC} posee un modelo infinito, entonces posee modelos de cualquier cardinalidad infinita; en particular, posee un modelo numerable. Como se sostiene que T_{ZFC} es consistente y se sabe (por completud) que en caso de ser consistente tiene un modelo (que además es infinito), entonces se sigue que T_{ZFC} tiene un modelo infinito; *ergo*, T_{ZFC} tiene modelos de cualquier cardinalidad infinita (por Löwenheim-Skolem), especialmente posee uno numerable. Como se dijo anteriormente, formalmente el teorema sobre ZFC no parece muy problemático, sin embargo, el desconcierto surge al momento en que este resultado es interpretado filosóficamente. Así que, ¿qué es aquello que realmente dice el teorema acerca de ZFC?

Lo primero que inmediatamente salta a la vista es que el teorema implica la existencia de múltiples modelos para la teoría, muchos de los cuales resultan ser no-estándar. Esto significa que ZFC no es categórica, es decir, que tiene modelos que no son isomorfos con sus modelos estándar. Más aún, "[l]a no-categoricidad de una teoría significa que no podemos distinguir formalmente lo que es distinguible en la teoría informal o semi-formal correspondiente." (Asenijevic, 2012, p. 66).[216] Esto representa un golpe fuerte para la teoría formal predilecta de conjuntos (en realidad para cualquier teoría expresada en primer orden), pues quiere decir, entre otras cosas, que T_{ZFC} es incapaz de rescatar y describir todos los elementos intuitivos que se le adscriben normalmente a la concepción iterativa de conjuntos. Dicho esto, uno podría estar tentado a pensar que esto puede arreglarse fácilmente, que lo que sucede simplemente es que la teoría formal de ZFC está "incompleta" y que agregando los axiomas pertinentes pueden eventualmente capturarse todas las nociones de interés; desgraciadamente, no es tan sencillo: cualquier axiomatización en primer orden de la teoría de conjuntos está sujeta al teorema de Löwenheim-Skolem. Así que, sin importar cuantos axiomas se añadan o cuantas modificaciones se le hagan a los ya considerados, ninguna axiomatización podrá escapar de este resultado (no por nada Lindström vio en Löwenheim-Skolem el papel intrínseco que juega en la caracterización de las lógicas clásicas de primer orden).

Sin embargo, quizá no es del todo apropiado extender tan abiertamente el carácter adverso de esta primera lectura, después de todo no cualquier filósofo o matemático estaría dispuesto a aceptar el presupuesto (casi ontológico) sobre la existencia de una concepción, noción o idea previa, intuitiva, preteórica, informal o preformal de lo que son los conjuntos y que, en última instancia, motiva el desarrollo formal de la teoría. Es por esto que cabe hacer una distinción adicional entre teorías:

[216] La traducción es propia.

> Dada una teoría particular, a veces se puede hablar de un modelo intencional o natural para la teoría. Esto resulta de que ya tenemos una idea previa de lo que debería ser un modelo estándar para la teoría. Por otro lado, otras veces se puede hablar de un modelo cualquiera de una teoría sin ninguna preferencia, en el caso de no tener uno que sea estándar o prototipo. (Amor, 2008, p. 83)

Las primeras son llamadas teorías *no-algebraicas* (*e. g.* la teoría de la aritmética); las segundas, *algebraicas* (*e. g.* la teoría de grupos).[217] La pregunta aquí entonces es, ¿qué tipo de teoría es ZFC? La apuesta platonista[218] (y la más común) es que es no-algebraica; la de Skolem es que es algebraica;[219] la de Amor (2008), con la cual simpatiza el autor del presente texto, es que no es plenamente una ni otra:

> Pues bien, respecto de los modelos de ZFC, podríamos decir que la situación es un tanto intermedia: no cualquier modelo nos va a parecer natural, pero no tenemos una tenemos una concepción intuitiva previa tan clara de todos los conjuntos y sus propiedades como para tener un modelo intencional [o pretendido] estándar muy claro. (p. 85)

Con todo, el lector probablemente se pregunte cuál es el propósito de introducir esta nueva taxonomía y qué relación guarda con lo mencionado cinco párrafos arriba. Considérese lo siguiente. La idea de suponer una relación cercana entre teorías no-algebraicas y teorías categóricas no resulta muy extraña, pues se espera que los axiomas de una teoría no-algebraica, o sea, las que tienen un modelo pretendido, permitan determinar una clase elemental en sentido amplio de estructuras isomorfas. Lo anterior sugiere que la categoricidad de una teoría de algún modo posibilita esclarecer formalmente, con ayuda de la teoría de modelos, lo que significa de una teoría ser no-algebraica: analizar una única estructura particular (salvo isomorfismo). De hecho, se sabe que prácticamente cualquier teoría no-algebraica expresada en segundo orden es categórica,[220] lamentablemente para el caso de la teoría de

[217] Para una exposición más detallada de esta distinción, véase Gutiérrez (2011, pp. 43-45).

[218] El *platonismo matemático* es una postura metafísica que puede definirse mediante la conjunción de tres tesis, a saber, *i)* la tesis de existencia (existen los objetos matemáticos); *ii)* la de abstracción (los objetos matemáticos son abstractos); y *iii)* la de independencia (los objetos matemáticos son independientes de los agentes inteligentes, de su lenguaje, de su pensamiento y de sus prácticas). Véase, Linnebo (2018).

[219] En un momento más se presentará la postura de Skolem con más detalle.

[220] Estos resultados han sido obtenidos para teorías como la aritmética, el análisis real y la geometría euclidiana, principalmente por parte de los partidarios de proyectos estructuralistas para la matemática quienes esperan que las teorías no-algebraicas sean recursivamente axiomatizables, satisfacibles y categóricas. Véase, Gutiérrez (2011).

conjuntos (en segundo orden) solamente puede establecerse un resultado más débil:[221] la *cuasi-categoricidad*.[222] Pero, ¿qué sucede en el caso de las teorías en primer orden?

Como ya se ha dicho, por Löwenheim-Skolem las teorías (con modelos infinitos) pierden categoricidad, por tanto, ¿esto quiere decir que no tiene sentido distinguir teorías algebraicas y no-algebraicas siempre que se expresen en primer orden? La respuesta es negativa. Aunque *formalmente* parece tratarse de una empresa destinada al fracaso (que una teoría formal determine una clase de estructuras isomorfas), lo más seguro es que casi cualquier matemático esté de acuerdo en que hay una, si bien no muy clara, distinción entre, por decir algo, el análisis real y los espacios topológicos, independientemente de si se expresan en segundo o primer orden. Pero si no hay mucho lugar para la categoricidad en esta distinción (por lo menos en el caso de primer orden), ¿entonces de dónde proviene? ¿Es posible dar cuenta de teorías no-algebraicas y no-categóricas? Quizá un caso como la aritmética pueda arrojar algo de luz sobre esto.

El continuo progreso suscitado por la milenaria práctica de la aritmética ha robustecido su concepción intuitiva en "un modelo estándar prototipo, que es la estructura cuyo universo son los números naturales con las relaciones, operaciones e individuos, que corresponden al lenguaje aritmético dado" (Amor, 2008, p. 83). ¿Esto quiere decir que habrá de esperar milenios para que, en caso de serlo, la práctica matemática de la teoría de conjuntos la consolide como teoría no-algebraica? Posiblemente no, en primer lugar porque la concepción intuitiva previa del universo conjuntista (en este trabajo, la concepción iterativa de la sección 1.2.) no es absolutamente clara[223] y su estructura completa seguramente inescrutable. Por ejemplo, la existencia de proposiciones indecidibles del tipo "¿cuál es la cardinalidad de la potencia de un conjunto infinito (el cardinal siguiente o mayor)?", evita conocer totalmente la estructura de la jerarquía acumulativa; en el caso de la aritmética, aún al contar con proposiciones indecidibles (por el primer teorema de incompletud), no afecta de manera significativa la idea que se tiene de su estructura.

[221]Gutiérrez (2011) sostiene que el doble papel que juega ZFC en la fundamentación de la matemática, a saber, como una teoría matemática más y como la metateoría para el análisis del resto de la matemática clásica, justifica la suficiencia del resultado de cuasi-categoricidad (véase la nota siguiente) para que el estructuralista la admita dentro del grupo de teorías no-algebraicas.

[222]Este resultado fue obtenido por Zermelo en 1930 y en pocas palabras quiere decir que "cualesquiera dos modelos que parten de la misma base (que parte de la misma colección de urelementos) son isomorfos o uno es isomorfo con un segmento inicial del otro" (Gutiérrez, 2011, p. viii). En la sección 2.2.1.3. se desarrollará una alternativa que permitirá obtener un resultado análogo al de Zermelo para la lógica de primer orden.

[223]Ver Amor (2008, p. 84).

En segundo lugar, porque, después de todo, podría no tratarse de una teoría no-algebraica.

La concepción algebraica de las teorías se remonta al trabajo de Schröder,[224] que ya en tiempos de Skolem era bastante popular (es la misma concepción detrás de la axiomatización de la geometría de Hilbert). Las razones para sostener este tipo de tratamiento para la teoría de conjuntos son varias, aunque no muy decisivas, y van acompañadas generalmente por un rechazo abierto al platonismo: algunos afirman que el desarrollo matemático del siglo pasado ha mostrado una tendencia a la concepción algebraica por ser la única realmente respetable para la matemática contemporánea al promover el movimiento de aproximaciones ingenuas (como el platonismo) a la axiomatización formal (en especial de primer orden);[225] otros recalcan la ingenuidad del platonismo y que el descubrimiento de las paradojas clásicas (como la de Russell o Burali-Forti) debe orillar a un escepticismo respecto del entendimiento informal de la teoría de conjuntos, de tal forma que el rechazo al platonismo inevitablemente lleva a considerar tan solo la posición algebraica con seriedad.[226] Sin embargo, fuera de motivos a favor o en contra de alguna determinada opinión, la posición algebraica permite el tipo de definición descrita al inicio de la sección 1.2.1., a saber, la definición implícita de conjunto ofrecida únicamente por los axiomas de ZFC. Así, de acuerdo con el defensor fuerte de la postura algebraica no hay modelos estándar para la teoría o, visto de otro modo, cualquier estructura que haga verdadero a los enunciados de la teoría (recuérdese que $\mathrm{Cn}\ \mathrm{A}_{\mathrm{ZFC}} = \mathrm{T}_{\mathrm{ZFC}}$) es modelo de ZFC y es modelo estándar. En pocas palabras, o todo modelo es no-estándar o todo modelo es estándar. Los defensores de esta posición no entran en conflicto con tal indiferencia porque comúnmente sostienen que no tienen razones para creer en una concepción informal y que, aun cuando la hubiese, no hay una concepción lo suficientemente clara de lo que son los conjuntos en primer lugar. Uno podría admitir que dicha respuesta tiene un punto, no obstante, uno de los problemas con este tipo de posición es que esto podría ocasionar una relativización de la noción de consecuencia lógica, ya que si ésta depende de la teoría de modelos y esta última al ser formulada en la metateoría a su vez depende de las nociones conjuntistas, entonces variaría su significado de acuerdo con el modelo bajo consideración; cosa que no ocurre si uno diferencia los modelos estándar y se adhiere a ellos.[227]

[224] Más precisamente, a su *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, publicado de 1890-1905.

[225] Recuérdese el proceso histórico descrito en la sección 2.1.

[226] Véase la sección 3.2 de Bays (2014).

[227] En realidad, para primer orden esto no es un problema, puesto que lo que está en juego es si los modelos son clases propias o conjuntos, pero es gracias a los principios de reflexión

Sin embargo, que ZFC no sea no-algebraica no implica necesariamente que sea algebraica, pues, como se dijo anteriormente, hay aún una tercera alternativa. Hay motivos para creer que ZFC tampoco es algebraica, por ejemplo, un inconveniente aparte del mencionado al final del párrafo pasado es que si uno prescinde completamente de una concepción preformal de conjunto, la elección de los axiomas para la teoría parecería un tanto, si no es que totalmente, arbitraria. De hecho, fue precisamente una estructura como la del universo de von Neumann la que motivó la elección de A_{ZFC} en un inicio;[228] es por ello que, recordando las palabras de Amor, "no cualquier modelo [de la teoría] nos va a parecer natural". En efecto, si uno fuera en serio con la aproximación algebraica de ZFC, ¿cómo se explicaría el hecho de que en la práctica el sistema axiomático para la teoría de conjuntos frecuentemente es sometido a revisión y mejorado? Para dar un ejemplo, Zermelo mismo admitió la sugerencia de Fraenkel de incluir entre los axiomas de su teoría los esquemas de axioma reemplazo en su formulación de 1930, y todavía hoy se discute la pertinencia de añadir nuevos axiomas (como los que permiten la existencia de cardinales grandes o la consistencia misma de ZFC); cosa que difícilmente ocurre en el caso de teorías "genuinamente" algebraicas como la teoría de grupos o la teoría de gráficas.[229]

Por lo anterior, la postura hibrida surge como una alternativa altamente plausible y que evade gran parte de los problemas planteados líneas atrás. Ésta no desprecia la idea de una concepción intuitiva (aunque sea de manera un tanto provisional y no muy clara) que motive la adopción de determinados axiomas, además de que ciertamente reconoce y explota las ventajas de la concepción algebraica: le permite contar con un sistema formal que describe con considerable precisión, si bien no de manera única, casi completamente su estructura intuitiva, a la vez que le permite caracterizar (desde el ámbito formal) implícitamente de regreso sus objetos de acuerdo con el lugar que juegan en cierta estructura. Esto es sumamente útil, pues contribuye con cierto esclarecimiento de las propiedades intrínsecas de la estructura informal y de las relaciones que guardan sus objetos por medios puramente lógicos (sin comprometerse, de hecho, con que tales objetos y la relación de pertenencia sean concretamente de un tipo bien específico), y que quizá solamente habrían podido aprehenderse desde lo formal. Lo anterior es posible en gran medida justamente por la laxitud que concede la aproximación algebraica. Cabe recordar que independientemente de si la teoría es algebraica o no-algebraica, la formalización de la teoría garantiza poner de manifiesto

---

de la teoría de conjuntos que se puede garantizar que, para cualquier modelo-clase de un conjunto Γ de fórmulas, existe un modelo conjuntista de Γ. Véase Gómez-Torrente (2003).

[228]Ver Boolos (1971).

[229]Véase, Bays (2014, sección 3.2).

posibles inconsistencias que pudieran llegar a suscitarse, en el caso de la consideración no-algebraica esto puede mostrar los inconvenientes presentes en la concepción intuitiva pretendida.

Sin embargo, el problema acerca de la distinción entre modelos estándar y no-estándar suscitado por el teorema de Löwenheim-Skolem continúa vigente. La ventaja de aceptar la concepción híbrida de la teoría de conjuntos es que quizá puede arrojar alguna pista sobre cómo hacer esto, y con esto se regresa a la pregunta: si no se cuenta con categoricidad, ¿cómo pueden diferenciarse los modelos estándar de los no-estándar?

Pues bien, gracias a la concepción híbrida pueden sentarse algunas condiciones necesarias para caracterizar un modelo estándar o natural, como las ofrecidas por Amor (2008):

> [P]rimero, que los elementos del modelo que interpretan a los conjuntos sean conjuntos y, segundo, que la relación que interpreta al símbolo $\in$ de pertenencia sea la relación de pertenencia. Por otro lado, ya que al menos para propósitos matemáticos no hay necesidad de considerar individuos, podemos pensar en una teoría sin urelementos y que en el modelo todos los objetos son conjuntos puros o conjuntos "hereditariamente de conjuntos". (p. 85)

De esta manera, uno puede restringir los modelos de interés a aquellos modelos de ZFC (*i. e.*, las estructuras que hacen verdaderos los enunciados de $\mathrm{T}_{\mathrm{ZFC}}$) cuyos dominios sean conjuntos hereditarios no-vacíos (dejando fuera de esta manera dominios de canicas, ajolotes, sillas, en fin, de objetos físicos o cualquier otra cosa que no sea un conjunto puro)[230] y cuya relación binaria $E \subseteq A \times A$ sea tal que $E = \{(c, d) \in A | c \in d\}$.[231] Nótese que para poder hacer esto se debe presuponer una noción adecuada e intuitiva previa de lo que es un conjunto y también la pertenencia. Obviamente esto puede resultar bastante sospechoso para muchos, más cuando se ha admitido que la concepción iterativa de conjunto no es completamente clara.

En este sentido, pues, la relación entre matemática formal e informal es hasta cierto punto esencial para la caracterización de los modelos estándar, luego de que obviamente por Löwenheim-Skolem tal caracterización es imposible *formalmente* (Klenk, 1976, p. 480). Es por esto que a continuación resulta conveniente revisar algunas opiniones respecto de las maneras de in-

[230] Una observación: no se puede hablar tan libremente de excluir objetos abstractos en general, puesto que como se ha dicho la matemática clásica puede representarse de manera conjuntista, entonces en cierto sentido uno aún puede contar con dominios de ciertos objetos abstractos en sus versiones conjuntistas, como números naturales, enteros, racionales, reales, puntos, espacios, etc.

[231] Véase, Amor (2008, p. 87).

terpretar la relación entre la matemática formal e informal y la teoría de conjuntos.[232]

Hay quien sostiene (como Myhill)[233] que cualquier formalización de la teoría de conjuntos se conserva como teoría de conjuntos sólo en la medida que la intuición sobre la pertenencia y los conjuntos no se escabulle al momento de interpretar los símbolos del lenguaje formal, es decir, que la existencia de modelos no-estándar no supone un verdadero peligro siempre que se tenga presente el significado estándar de las nociones conjuntistas cuando se interpreten los símbolos de la teoría formalizada. Por su parte, hay quien afirma (como Resnik)[234] que el propósito principal de los sistemas formales (como aquellos para la teoría de conjuntos) es meramente la formalización de las teorías matemáticas informales previamente disponibles, de tal forma que "[e]s *via* estas teorías que los modelos pretendidos del sistema son amueblados".[235]

Ahora bien, según Klenk (1976), Myhill sugiere que la matemática formal depende de un "entendimiento informal común" (*informal community of understanding*, en inglés) entre matemáticos y que en realidad no se puede asegurar que la interpretación de los conceptos conjuntistas de uno corresponden exactamente con los de los demás; pero si esto último es el caso, entonces parece que quizá es estéril "tratar de decidir, incluso sobre el terreno informal, cuál es el modelo pretendido intuitivo para la teoría de conjuntos", pues "no es como si hubiese otro nivel, informal, sobre el cual la cuestión pudiese ser decidida" (p. 480).[236] Sin embargo, Klenk continúa y propone que tal vez este "entendimiento informal común" debe entenderse algo como el "uso común de la palabra", que es precisamente en los términos que Resnik intenta explicarlo (p. 480). Así, en el terreno formal uno no puede discernir si los términos y enunciados se refieren a conjuntos o a cualquier otra cosa, pero es a partir de su *role* en la totalidad de las matemáticas (que uno aprehende mediante su estudio) que uno entiende el significado de los términos y enunciados conjuntistas, y los distingue de otros en términos del *uso*. Desgraciadamente,

[232]El contenido restante de esta sección fue tomado principalmente de Klenk (1976). En realidad, en tal artículo la autora se concentra en analizar la disputa entre dos posturas muy específicas, a saber, la del skolemita frente a la del platonista. No obstante, el contenido fue adaptado de tal forma que coincidiera naturalmente con los puntos aquí destacados; con todo, se asegura que los argumentos se han conservado conforme a dicho artículo.

[233]Esta es la perspectiva que Klenk (1976, p. 480) le atribuye a Myhill en su artículo "On the Ontological Significance of the Löwenheim-Skolem Theorem".

[234]Este según Klenk (1976, p. 480) es el punto de vista de Resnik en su artículo "On Skolem's Paradox".

[235]Esta cita la retoma Klenk (1976, p. 480) del artículo mencionado en la nota anterior (p. 191). La traducción es propia.

[236]La traducción es propia.

dice Klenk, si bien a primera vista esto parece prometedor, no parece servir de mucho para identificar los modelos estándar de los no-estándar, pues no importa cuanto se juegue dentro de la teoría formal ni cuantos enunciados se deriven dentro de ella, al final, las proposiciones al nivel de la sintaxis siempre estarán abiertas a múltiples interpretaciones semánticas, lo cual, en resumen, no sirve para identificar modelos: aprehender el *role* de la teoría de conjuntos mediante el aprendizaje del uso de sus fórmulas parece tratarse simplemente de aprender procedimientos formales (p. 481).

Posteriormente, Klenk (1976) retoma la perspectiva de Resnik de acuerdo con la cual

> tenenos bastante conocimiento informal acerca de conjuntos previo a cualquier axiomatización, y de hecho, el punto de la formalización es simplemente codificar, y quizá en el proceso hacer más rigoroso y preciso, un dominio matemático ya existente. Nuestro concepto de "conjunto" se encuentra en el nivel informal, y nunca puede ser completamente capturado por la formalización. [...] [L]a formalización puede llevar a cambios en el concepto al señalar inconsistencias, o simplemente al incrementar nuestra precisión. El sistema formal no es tan solo un repositorio de conceptos previamente adquiridos, sino que es en algún sentido creativo... (p. 482)

Esto lleva a la autora a considerar la posibilidad de que la relación entre matemática formal e informal pudiese tratarse en realidad de una relación entre lenguajes: la matemática informal consiste en el lenguaje ordinario, el cual puede ser no muy preciso, consistente ni completo; la matemática formal, por su parte, se encuentra en un lenguaje mucho más preciso, que se espera sea consistente y quizá hasta completo. Sin embargo, Klenk (1976) descalifica casi de inmediato esta alternativa, pues afirma que, aparte de una temporalidad anterior a la formalización, "no hay razón para pensar que el lenguaje ordinario de la matemática informal es de alguna forma superior al lenguaje formal de la lógica de predicados de primer orden" (p. 482), y para que este último sólo proporcione una especificación parcial del concepto informal de conjunto.

Ha de confesarse que la exposición en estos últimos párrafos en modo alguno hace justicia ni espera recuperar en su totalidad la discusión llevada por Klenk en su artículo; sus argumentos van en favor de un tipo de formalismo y de un cambio de paradigma en la concepción de significado en matemáticas que no sea referencial. Asimismo, cabe destacar que los contraargumentos aquí presentados en realidad son un poco más elaborados; lamentablemente, profundizar demasiado en cada uno de ellos superaría los propósitos de su planteamiento en esta sección, que es, dar cuenta de que tales objeciones no suponen un peligro para la aproximación híbrida de la teoría de conjuntos. Así, se comenzará por la indicada en el párrafo anterior.

Aunque no lo dice explícitamente, no es muy difícil asociar el lenguaje ordinario del que habla Klenk con el metalenguaje que, como ya se ha mencionado, recoge y articula los recursos metateóricos mediante los cuales se expresa un cierto lenguaje (como uno de primer orden) y su lógica (como la clásica completamente determinada),[237] es decir, mediante los cuales se formulan los elementos del lenguaje-objeto. En este sentido, la sugerencia de considerar la relación entre matemática formal e informal como una relación entre lenguajes, parece referirse a la relación entre el metalenguaje y el lenguaje-objeto. Sin duda, el metalenguaje puede tratarse sencillamente del lenguaje ordinario aumentado con expresiones matemáticas, y que no requiere ser el mismo lenguaje que el de la lógica del lenguaje-objeto (véase la sección 1.1.); pero aun cuando pudiera tratarse de un lenguaje vago, inconsistente e incompleto (lo que podría no ser siempre el caso),[238] en modo alguno es inferior al formal en por lo menos un par de aspectos indispensables: su poder expresivo y los recursos metateóricos que captura. Es así que Klenk parece olvidarse de uno de los criterios más enfatizados por Tarski respecto de los metalenguajes.

Sin embargo, aunque lo anterior no parece tener demasiada relación con que la teoría de conjuntos no sea algebraica ni no-algebraica, el asunto es que la inquietud de Klenk, y que despertó su aparente escepticismo respecto de la genuina superioridad del conocimiento informal sobre el formal, parece provenir primeramente de una exigencia constante de claridad y precisión en la concepción intuitiva de conjunto, lo que a la larga produce la falta de credibilidad respecto de que el ámbito informal puede realmente arrojar algo de luz sobre el concepto de conjunto y los modelos estándar para la teoría formal de conjuntos; en segundo lugar, y relacionado con lo anterior, la inquietud acerca de la superioridad proviene de la siguiente cuestión: si es verdad que el nivel informal es superior al formal, ¿cómo puede el concepto intuitivo de conjunto ser susceptible de modificación de acuerdo con los resultados arrojados por el sistema formal (*e. g.* al señalar sus inconsistencias, al precisarlo, al mostrar alguna propiedad específica por medios puramente lógicos,

[237] Véase la sección 1.1.

[238] Por ejemplo, uno podría considerar como metalenguaje un lenguaje de segundo orden formalizado, con su cálculo y su semántica, y con los recursos conjuntistas tradicionales (de los que, como se dijo, es razonable suponer su consistencia), que ciertamente puede gozar de determinado grado de precisión. En cuanto a la completud, es posible encontrar algún metalenguaje que no pueda expresar la aritmética pero sí el análisis y que sea lo suficientemente poderoso para contar con los recursos para describir alguna semántica y sintaxis para un lenguaje-objeto.

etcétera)? Lo que en el presente se sostiene es que la primera exigencia no es necesaria y que a su vez la segunda cuestión no es problemática siempre que se permita la consideración híbrida de la teoría de conjuntos. ¿Cómo es esto?

Como se dijo previamente, para la consideración híbrida o intermedia de la teoría de conjuntos no cualquier modelo va a parecer natural, pero tampoco hay una concepción intuitiva tan clara de conjunto como para tener un solo modelo pretendido; en efecto, si bien no se cuenta con una cierta noción informal absolutamente clara y distinta de la estructura a recuperar formalmente, a saber, el universo de von Neumann, ni tampoco del tipo de entidades que viven en él, sí se cuenta con una noción intuitiva suficiente que basta para motivar inicialmente el desarrollo de la teoría (de forma provisional si se quiere). Aun las conocidas definiciones ofrecidas por Cantor,[239] a pesar de su vaguedad, son suficientes para promover una incipiente distinción entre modelos estándar y no-estándar. Simplemente, desde la notación "semiformal", ya familiar para cualquiera que haya iniciado con el estudio de los conjuntos (que emplea llaves y comas), hasta los diagramas de Venn-Euler, parecen estar diseñados de tal manera que reflejan esta idea intuitiva de los conjuntos como una suerte de colecciones o agrupaciones. Asimismo, la idea de la jerarquía acumulativa de conjuntos de von Neumann es lo suficientemente asimilable (por lo menos al principio) para sugerir muy vagamente una pista de la estructura donde habitan las entidades conjuntistas y cómo se engendra. Es a partir de ahora cuando el sentido creativo de la práctica formal entra en juego y cuando una versión ligeramente más caritativa de la propuesta de Resnik, aquélla que habla del discernimiento de modelos con base en el uso, puede cobrar otro sentido.

Sin duda, el uso de los términos y enunciados conjuntistas puede apreciarse explícitamente mediante su manipulación dentro de una teoría formal, pero quizá es un error limitarlo únicamente a eso como hace Klenk. En realidad, el uso usualmente parece ir acompañado de las nociones previas informales (no muy precisas ni tampoco definitivas), las cuales van refinándose, precisándose y comprendiéndose más claramente conforme la práctica formal avanza. Es inevitable no notar a su vez como el parecer de Myhill, ese que anima mantener siempre presente la interpretación intuitiva de los símbolos formales, se abre camino prácticamente por sí mismo de acuerdo con esta propuesta intermedia de la teoría de conjuntos. En otras palabras, en la medida que los procedimientos formales van teniendo lugar y siempre que al menos se le asocien a los símbolos pertinentes unos conceptos conjuntistas intuitivos su-

[239] Véase la nota *127*.

ficientemente adecuados[240] (que irremediablemente retienen cierto grado de vaguedad), es posible mejorar e incrementar la comprensión de tales conceptos (e incluso señalar inconvenientes y en el peor de los casos inconsistencias), así como también fijar y distinguir ciertos modelos como estándar con base en dichos conceptos, estos son, aquellos donde los conjuntos son tales conjuntos intuitivos y la relación de pertenencia es la relación intuitiva de pertenencia.

Pero, ¿por qué habría de aceptarse esta falta de rigor en los criterios de demarcación de modelos estándar? ¿Por qué no hay problema en admitir nociones intuitivas imprecisas y modificables? Bueno, se puede decir que no se necesita una idea previa totalmente exacta y acabada de lo que son los conjuntos principalmente por dos razones: Primero, ¿cuál sería entonces el sentido de desarrollar una teoría formal que pretende establecer implícitamente una definición de conjunto? De otro modo, sencillamente se estipularía desde un principio lo que es un conjunto y listo, no habría por qué seguir con estas discusiones interminables sobre modelos estándar y no-estándar, matemática formal e informal, y demás. No obstante, el propósito de contar con una teoría así es que permite caracterizar estas nociones y descubrir por medios puramente lógicos y matemáticos tanto las propiedades que poseen estos objetos abstractos, como la estructura y relaciones entre ellos. Segundo, no es extraño que la concepción no sea clara ni definitiva sencillamente porque ¡la teoría en sí no está acabada! Y seguramente jamás lo esté. La razón está relacionada con el hecho de que la concepción iterativa de conjunto, esa que en primer lugar inspiró la estructura a capturar formalmente, está "abierta por arriba"[241] y así continuará. De hecho, las soluciones a toda la matemática clásica se encuentran tan solo en los primeros niveles de la jerarquía acumulativa,[242] visto de ese modo, no resulta tan descabellado advertir que la totalidad de la estructura de ZFC sea inaprehensible.

Hasta aquí se han explorado unas cuantas posibles maneras de aproximarse al estudio de la teoría de conjuntos, ya sea como teoría algebraica, no-algebraica o como la que en este texto se ha llamado híbrida o intermedia, y se han revisado rasgos distintivos de cada una de ellas. Sin embargo, es por la última que se ha optado por manifestar cierta preferencia con base

[240]Inmediatamente alguien puede señalar con toda razón que entonces se necesita un criterio de adecuación para estos conceptos y que eso por lo menos sí requiere un grado de claridad y precisión mayor. Por el momento, no hay objeción a ello y solamente queda morder la bala. Con todo, que el concepto conjuntista sea suficientemente adecuado aquí hace alusión sencillamente a tener presente, por lo menos al momento de manipular símbolos, una idea de colección abstracta como las sugeridas por Cantor.

[241]Esto, *grosso modo*, se refiere a que el proceso de construcción del universo de von Neumann descrito en el apartado 1.2. puede seguirse implementando de manera indefinida.

[242]Ver el final de la sección 2.2.1.3.

en las ventajas que recoge de las otras dos y en la superación de algunas dificultades planteadas por Klenk (1976) acerca de la relación entre matemática formal, informal y la teoría de conjuntos. Por otro lado, también se ofreció un criterio que se cree suficientemente plausible para identificar modelos estándar, a saber, aquellos donde los conjuntos son conjuntos y la pertenencia se comporta como la pertenencia.[243] Finalmente, además se mencionó el papel que juega el teorema de Löwenheim-Skolem en la generación de múltiples modelos (estándar y no estándar) para ZFC, lo cual implica la pérdida de categoricidad. La no-categoricidad de ZFC, se recuerda, quiere decir que la teoría es incapaz de distinguir formalmente lo que sí puede informalmente (o intuitivamente). Pero, ¿qué es exactamente eso que es incapaz de distinguir? Para responder esta pregunta, considérese el siguiente resultado.

2.2.1.1. *La paradoja de Skolem y la relativización de nociones conjuntistas*

Como ya se había adelantado, en 1922, Skolem en su artículo "Algunos comentarios sobre la teoría axiomática de conjuntos" introdujo un resultado particularmente curioso e inicialmente desconcertante. Originalmente, su intención al integrar este resultado era interceder por cierto interés filosófico en detrimento de la teoría axiomática de conjuntos:[244] Skolem esperaba que dicho resultado contribuyera en la desestimación de ZFC como un fundamento adecuado para la matemática. En particular, sostenía que ZFC carecía de los recursos para proporcionar un fundamento para la aritmética, la cual, a diferencia de aquélla, consideraba era incuestionablemente más clara y natural. (Parece que Skolem convenientemente decidió ignorar el hecho de que la aritmética expresada en primer orden también está sujeta a múltiples interpretaciones no-estándar.) Para esto, el argumento del matemático noruego partía de defender la aproximación algebraica de ZFC en primer orden (prácticamente por las mismas razones ya señaladas en el apartado previo), para luego mostrar que tal aproximación, la única realmente respetable y seria de conformidad con él, implicaba inevitablemente la relativización de varias nociones conjuntistas básicas: ¿Cómo podría una teoría como ZFC pretender desempeñarse como fundamento cuando es ella misma incapaz de

[243]Si bien se parte de esta caracterización, en la sección 2.2.1.3. se impondrán otras condiciones para mejorar este criterio con base en ciertos resultados ofrecidos por la teoría de modelos de la teoría de conjuntos.

[244]En realidad, diversas interpretaciones del artículo de Skolem acerca de sus verdaderas intenciones continúan sometidas a discusión. En este trabajo se considera especialmente la más popular de ellas. Para el resto de las interpretaciones, véase la sección 3.1 en Bays (2014).

recuperar todas las nociones básicas que la caracterizan? Es precisamente por medio de la llamada *paradoja de Skolem*[245] que el noruego pudo permitirse afirmar tal relativización. Véase a continuación en qué consiste.

La paradoja, pues, surge de considerar un par resultados, más específicamente, un par de teoremas: el primero de ellos, proveniente de la lógica clásica de primer orden, se trata, ni más ni menos, del teorema descendente de Löwenheim-Skolem; el segundo, por su lado, se trata de uno de los teoremas clásicos y más antiguos de la teoría de conjuntos,[246] a saber, del conocido *teorema de Cantor*. (Aunque estrictamente hablando, el resultado que aquí compete es un corolario de este último.) Puesto que en otro lado (en la sección 2.2.) ya han sido presentadas con relativo cuidado las diferentes versiones del teorema de Löwenheim-Skolem (entre ellas, la descendente), por ahora tan sólo se introducirá el segundo:

- *Teorema de Cantor*: Para cualquier conjunto A, el conjunto potencia de A ($\mathcal{P}A$) tiene estrictamente mayor cardinalidad que A mismo. De manera un poco más formal: Sea f una función de A en $\mathcal{P}A$, entonces $f : A \to \mathcal{P}A$ no es biyectiva y, por tanto, para todo conjunto A, card $A <$ card $\mathcal{P}A$.[247]
  Prueba: Se debe demostrar que no hay una función sobreyectiva de A sobre $\mathcal{P}A$, pero sí una inyectiva de A en $\mathcal{P}A$. Considérese la primera cuestión, a saber, que no hay una función f que pueda mapear cada elemento de A a un elemento de $\mathcal{P}A$ y cubrir todos los elementos de este último. Para ello, basta ofrecer algún subconjunto de A distinto de $f(x)$ para cualquier $x \in A$; nótese que $f(x) \in \mathcal{P}A$. Sea tal subconjunto el siguiente *conjunto diagonal de Cantor* para f:

  $$B = \{x \in A | x \notin f(x)\}$$

  Ahora supóngase por *reductio ad absurdum* que f es sobreyectiva; por tanto, para cualquier $x \in A$, o bien $x \in f(x)$ o bien $x \notin f(x)$. B evidentemente por su construcción es un subconjunto de A, mas $B \neq f(x)$ para cualquier x en A, pues de lo contrario en el primer caso: $x \in f(x) \Leftrightarrow x \in B \Leftrightarrow x \notin f(x)$. Y en el segundo caso: $x \notin f(x) \Leftrightarrow x \in B \Leftrightarrow x \in f(x)$. Es decir, ambos casos llevan a la

[245] Ante todo, conviene mencionar que su *status* como genuina paradoja fue desacreditado por el mismo Skolem desde que dio a conocer este resultado. Para él no resultaba paradójico siempre que se mantuviera presente que los axiomas debían considerarse de manera algebraica.

[246] Publicado en 1873 por Cantor.

[247] Para cualesquiera dos conjuntos X e Y, card $X <$ card Y si y sólo si existe una función inyectiva f de X en Y que no es biyectiva, es decir, f es inyectiva pero no sobreyectiva.

contradicción. Es así que efectivamente hay un subconjunto B de A tal que no es imagen de alguna $x \in A$ (*i. e.*, existe $f(x) \neq B \in \mathcal{P}A$), lo que significa que f no es sobreyectiva.

Para concluir la prueba, la segunda parte de la demostración (que hay una función inyectiva $g : A \rightarrow \mathcal{P}A$) se resuelve muy sencillo: simplemente defínase g de tal forma que a cada $x \in A$ le sea asignada su unitario.

Ahora bien, el corolario de interés mencionado líneas arriba se refiere simplemente al caso cuando $A = \omega$. De este modo: card $\omega <$ card $\mathcal{P}\omega$.[248] Lo anterior quiere decir que hay al menos un conjunto X (en este caso $X = \mathcal{P}A$) tal que ω puede ser puesto en correspondencia uno-a-uno en X, pero no sobre X; es decir, no hay una biyección de ω sobre X. A su vez, esto significa que card $\omega = \aleph_0 < X$ o, lo que es lo mismo, que X es no-numerable. Por tanto, en caso de que $\mathrm{T_{ZFC}}$ tenga modelo, entonces habrá una estructura que satisfará la fórmula abierta $\varphi(x)$ que afirma que x es no-numerable.

Lo anterior, junto con el teorema de Löwenheim-Skolem implica una aparente contradicción, pues, como se sabe, $\mathrm{T_{ZFC}}$ posee modelos de cualquier cardinalidad infinita, en particular, posee un modelo de cardinalidad $\aleph_0$ (por su versión descendente); no obstante, ya se ha visto que dentro de la teoría es demostrable un enunciado que afirma la existencia de conjuntos no-numerables, ¿cómo puede un elemento del dominio del modelo, que en su totalidad es a lo más numerable, satisfacer una fórmula de primer orden que dice de un conjunto ser no-numerable? De manera más específica, sea $\mathfrak{A}$ un modelo numerable de $\mathrm{T_{ZFC}}$, entonces hay un objeto $c^{\mathfrak{A}}$ en $|\mathfrak{A}|$ que satisface la fórmula que afirma que $c^{\mathfrak{A}}$ es no-numerable; pero el dominio de $\mathfrak{A}$ es numerable, lo que quiere decir que $c^{\mathfrak{A}}$ solamente puede contar con a lo más una cantidad numerable de elementos, porque para empezar dentro de $|\mathfrak{A}|$ en su totalidad hay a lo más $\aleph_0$ objetos. Por tanto, parece ser que $c^{\mathfrak{A}}$ debería ser a lo más numerable, ¡pero $c^{\mathfrak{A}}$ satisface la fórmula que afirma de ella ser no-numerable! Este es precisamente el resultado paradójico que Skolem resaltó en 1922.

Aunque la paradoja anterior se presenta como una supuesta antinomia, de acuerdo con Skolem no hay aquí una auténtica paradoja, sino la *apariencia* de una paradoja y solamente para aquéllos que aún rechazan "ingenuamente" la consideración algebraica de ZFC. Tal aseveración puede comprenderse al considerar su resolución habitual, la cual fue ofrecida por el mismo Skolem desde su aparición, y que permite dar cuenta más bien de una especie de anomalía en $\mathrm{T_{ZFC}}$; esta es, la pérdida de absolutez de ciertas nociones o propiedades dentro de ella, y que en este caso se ilustra con la relativización

[248] Como se vio en la sección 1.2.1., el axioma de infinito garantiza la existencia de ω; de hecho, se trata del conjunto inductivo más pequeño.

de la noción de cardinalidad.

De acuerdo con esta solución, la paradoja surge solamente cuando uno permanece apegado a las nociones intuitivas y que el partidario de la concepción algebraica rechaza por completo desde un principio. Para el "algebraicista" la relativización de la cardinalidad exhibida mediante la paradoja no resulta realmente problemática, puesto que en realidad las mismas nociones de conjunto y pertenencia de cualquier modo siempre han estado sujetas a la estructura mediante la cual se interpretan los enunciados de T_{ZFC}. Sin embargo, es importante destacar, como hace Bays (2014), que fuera de este tipo de relativización "trivial", que obviamente se genera al considerar múltiples modelos con sus respectivos dominios (distintos o no) y/o $E-$relaciones,[249] la relativización de las nociones conjuntistas señaladas por Skolem también (y principalmente) se refiere a una relativización un tanto más sofisticada. Por ejemplo, el objeto $d^{\mathfrak{A}}$ que satisface la fórmula abierta "$\forall y(y \notin x)$" seguramente varía de estructura en estructura, pero la noción de "conjunto vacío", capturada por la fórmula anterior, se conserva sin importar el dominio o la relación que interpreta los símbolos del lenguaje formal. De hecho, en todos esos modelos $d^{\mathfrak{A}}$, si satisface dicha fórmula, es efectivamente vacío.[250]

En el caso pasado, la propiedad "ser el conjunto vacío" se mantiene y es de algún modo absoluta,[251] a diferencia de lo que ocurre con la propiedad "ser no-numerable"[252] que no puede ser recuperada uniformemente al cambiar de estructura. Esto representa un auténtico problema para el algebraicista que considera ZFC como candidata a fundamentar la matemática, pues es incapaz de recuperar de manera única una noción tan básica como es la de cardinalidad y de la cual depende de algún modo su ontología (es el tamaño lo que distingue un conjunto de una clase).[253]

La solución que propuso Skolem está íntimamente relacionada con lo desarrollado en los párrafos de arriba. La semántica modelo-teórica empleada para asignar significado a los símbolos del lenguaje formal en cuestión asocia a

[249]Es decir, relaciones generalmente distintas a la auténtica pertenencia pero que, no obstante, interpretan el símbolo "$\in$" en algunas estructuras.

[250]Para ilustrar esta afirmación, considérese por ejemplo que el objeto d en la estructura en cuestión y que satisface la fórmula abierta "$\forall y(y \notin x)$" (*i. e.*, que dice "x es el conjunto vacío") es un conjunto de diecisiete elementos. Sin importar que d tenga realmente diecisiete elementos, ningún elemento c de dicha estructura estará en la relación que interpreta el símbolo de pertenencia de modo que $c \in d$; por lo que para T_{ZFC} en este caso d es el conjunto vacío y verdaderamente no tiene elementos, aunque desde fuera de la teoría uno en efecto pueda apreciar que d tiene diecisiete elementos.

[251]Otras propiedades, como tener al menos n cantidad de elementos (donde n es un cardinal finito), también pueden rescatarse de manera absoluta.

[252]Ver la sección 3.1 de Bays (2014).

[253]También a una clase de una hiperclase, etcétera.

"$\in$" una relación binaria definida sobre el dominio de una estructura, llámese $\mathfrak{A}$. En cambio, a "$\forall x$" la función interpretativa de la estructura le asigna el dominio $|\mathfrak{A}|$ de objetos (sean conjuntos o no). Así, dentro de un determinado modelo numerable de la teoría de conjuntos, el término "conjunto" no se refiere a cualquier conjunto, sino solamente a aquéllos delimitados por el dominio del cuantificador universal, es decir, solamente a aquellos conjuntos incluidos dentro del modelo bajo consideración. Es por ello que, dentro de la teoría $\mathrm{T}_{\mathrm{ZFC}}$, los conjuntos aparentan ser no-numerables cuando en realidad fuera de ella son numerables. Esto puede verse de manera más clara si se considera el hecho de que para determinar la cardinalidad de un conjunto se requiere establecer una biyección entre él y algún número cardinal; las biyecciones son funciones y en la teoría de conjuntos las funciones son conjuntos. De esta forma, dentro del modelo no se puede establecer tal biyección porque la función requerida es un conjunto que no se encuentra dentro del dominio en cuestión. La apariencia de la paradoja de Skolem emerge, pues, al apegarse a las nociones intuitivas y meterlas de contrabando al momento de interpretar con diversas estructuras las fórmulas del lenguaje formal. Después de todo, aun cuando uno se limite a considerar estructuras cuyos dominios consistan únicamente en conjuntos, nada exige que la interpretación del símbolo de pertenencia coincida con la noción intuitiva de pertenencia, ni que todas las afirmaciones expresadas en el lenguaje formal de primer orden limiten su significado a lo que intuitivamente representan, tal como es el caso de la fórmula abierta que afirma que "x es un conjunto no-numerable" y que en rigor formal solamente dice que "hay una función inyectiva de ω en x pero no sobreyectiva". De hecho, como se mencionó previamente, el objeto $c^{\mathfrak{A}}$ de una cierta estructura numerable $\mathfrak{A}$ que satisface la fórmula "x es un conjunto no-numerable" contiene a lo más una cantidad numerable de elementos, por lo que forzosamente deben haber $2^{\aleph_0}$ biyecciones "observables" de ω sobre $c^{\mathfrak{A}}$ desde fuera de la teoría. Lo que la paradoja de Skolem muestra es que $|\mathfrak{A}|$ no contiene biyección alguna de entre todas las que intuitivamente se saben existen. Es decir, de manera intuitiva el enunciado formalizado que dice "c es no-numerable" es falso, pero al momento de interpretarlo *via* $\mathfrak{A}$ los cuantificadores en él, y que corren únicamente sobre los objetos de tal estructura, no hallan biyección alguna de ω sobre $c^{\mathfrak{A}}$, motivo por el cual dicho enunciado resulta verdadero en esa estructura. Lo anterior justamente aclara el sentido de "relativización" del cual habla Skolem y que fue mencionado previamente.

Con todo, es probable que aún persista la duda acerca de cómo es posible que una estructura a pesar de ser modelo (ya sea numerable o no-numerable) de todos y cada uno de los axiomas de ZFC, aun así no pueda garantizar la recuperación de todas las nociones conjuntistas de manera "correcta". La respuesta es simple: así como una estructura numerable "malinterpreta" la noción de cardinalidad, igualmente cualquier otra estructura no-estándar[254] malinterpreta los axiomas de ZFC. Quizá el ejemplo más claro de esto es el axioma de conjunto potencia: $\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq A)$. El axioma intuitivamente afirma que para un conjunto A cualquiera existe uno B que contiene todos sus subconjuntos; mas lo que el axioma realmente asegura, al considerar un modelo cualquiera $\mathfrak{A}$ de ZFC, es que existe un conjunto B que contiene exactamente todos los subconjuntos de A y que viven en $\mathfrak{A}$. Sin embargo, cuando A es infinito y $\mathfrak{A}$ numerable, evidentemente la mayoría de tales subconjuntos no se encuentran en el dominio $|\mathfrak{A}|$, pues hay una cantidad $2^{\aleph_0}$ de ellos y A tan solo es de tamaño $\aleph_0$; es decir, B en este caso se trata de un conjunto más pequeño que la auténtica potencia de A (Bays, 2014).[255]

De manera similar, esto ocurre con otros axiomas de ZFC. Por ejemplo, con los esquemas de axioma de separación y de reemplazo.[256] Considérese primero el caso de separación. Pártase de un modelo $\mathfrak{A}$ con dominio numerable. En este caso, lo que sucede es que desde fuera del modelo uno podría apreciar la separación de un determinado conjunto (*e.g.* los cardinales transfinitos) mediante una fórmula particular (sin relativizar al modelo), de modo que efectivamente fueron seleccionados (*i.e.*, separados del dominio de $\mathfrak{A}$) y colocados dentro del conjunto los elementos que *intuitivamente* le pertenecen (en el ejemplo, el conjunto separado *realmente* posee esos cardinales, en concreto el conjunto seleccionado desde fuera del modelo sería el unitario de ω); no obstante, dentro del modelo, dicha fórmula tendría que ser relativizada para poder realizar la separación y como resultado se obtendría un conjunto cuyos elementos satisfacen desde el punto de vista del modelo particular empleado la fórmula. De este modo, el conjunto separado dentro de la modelo puede poseer elementos muy distintos al modelo obtenido desde fuera del modelo; en concreto, desde el punto de vista del modelo muchos ordinales

[254] Restringir esta "malinterpretación" a los modelos no-estándar no es del todo correcto, también los modelos estándar en el sentido hasta ahora considerado participan de ella. La última sección del trabajo se dedicará precisamente a plantear una estrategia para reformular y refinar la noción de "modelo estándar" de tal forma que éstos no sean susceptibles de malinterpretar los axiomas de ZFC ni tampoco cualquier otra noción conjuntista elemental.

[255] Véase su sección 2.4.

[256] Seguramente, con lo mencionado hasta ahora sobra decirlo; de cualquier modo: cuando se afirma que una cierta fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos es satisfecha "desde afuera" de la teoría, lo que se intenta expresar es el hecho de que a través de su interpretación intuitiva dentro de la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien-fundados dicha fórmula resulta verdadera; por otra parte, cuando se dice que una fórmula es satisfecha "desde adentro" de la teoría, lo que se quiere decir es que tal fórmula resulta verdadera-en-un-modelo, es decir, una cierta estructura particular la satisface con toda función de las variables en su universo de discurso. Con esta precisión, se espera sea más sencillo asimilar lo siguiente.

límites numerables serán cardinales transfinitos debido a que dentro del modelo no existen las funciones que los biyectarían con ω (son cardinales dentro del modelo). Así, los conjuntos obtenidos serían muy distintos debido a la relativización de la fórmula que fue usada para realizar la separación.

El caso de reemplazo es parecido al anterior: fuera de la teoría, uno puede notar que efectivamente el rango de una determinada función-clase $\mathcal{F}$ al restringirla a un conjunto A resulta ser parte del universo de von Neumann, es decir, hay algo dentro del universo de von Neumann que hace verdadera la fórmula que expresa que la imagen de A bajo $\mathcal{F}$ es de hecho un conjunto (por ejemplo, el conjunto de los cardinales transfinitos indexados por ω). Sin embargo, adentro de la teoría, el dominio del modelo particular empleado para interpretar el lenguaje puede carecer de $\mathcal{F}[[A]]$ y hacer falsa a la fórmula, o sencillamente puede pasar que $\mathcal{F}[[A]]$ no posea todos los elementos que desde afuera se sabe que tiene; o bien $\mathcal{F}[[A]]$ puede estar conformada por elementos sustitutos pertenecientes al modelo pero que no son exactamente los elementos que pertenecen "realmente" a tal imagen.

Otro caso que se enfrenta con la misma situación es el axioma de regularidad, cuya malinterpretación implica la relativización de la propiedad de "estar bien-fundado": fuera de la teoría uno podría percatarse de que algún conjunto no está bien-fundado (*e. g.* tratarse de un conjunto que se pertenece a sí mismo o de uno que junto con alguno de sus elementos se pertenecen mutuamente), pero adentro el conjunto puede aparecer en un determinado modelo donde la $E-$relación que interpreta al símbolo de pertenencia se halle restringida de forma tal que no considere los pares ordenados que relaciona al conjunto consigo mismo, o a un conjunto con uno de sus elementos y viceversa; o sea, un conjunto que afuera de la teoría no está bien-fundado, adentro de ella sí aparenta estarlo.

En fin, la relativización de las nociones cardinales como puede notarse se propaga como un virus y permea toda la teoría, en este sentido la relativización no es exclusiva de la cardinalidad y es un problema significativo para el lenguaje de orden uno de la teoría de conjuntos.

Hasta aquí se ha visto cómo la objeción de Skolem para justificar su interés personal por desacreditar ZFC en primer orden como posible fundamento para la matemática[257] realmente lleva consigo un problema para el defensor de la concepción algebraica y también de alguna forma para el defensor de la posición no-algebraica. En efecto, el teorema de Löwenheim-Skolem implica una relativización no muy deseable de ciertas nociones conjuntistas básicas

[257]Cabe resaltar que Zermelo consideró el resultado de Skolem como una farsa, ya que aquél siempre consideró que la manera adecuada de expresar la teoría de conjuntos era en segundo orden, donde el teorema y la paradoja Skolem no tienen lugar.

que ambos detractores están obligados a aceptar. No obstante, antes de pasar a una posible alternativa mediante la cual el defensor de la aproximación híbrida puede evadir este problema, es pertinente introducir una segunda paradoja que, estrictamente hablando, no surge como consecuencia directa del teorema estudiado en este trabajo, sino de pasarlo por alto; y que, a diferencia de la paradoja introducida en el presente apartado, nace a partir de un partidario de la aproximación no-algebraica.

2.2.1.2. *La paradoja de Orayen y la consolidación de la aproximación híbrida*

En 1986, durante un simposio sobre la obra de Quine, el lógico argentino Raúl Orayen destacó una observación supuestamente problemática dentro de la teoría de modelos de la teoría de conjuntos. Desde entonces, dicha observación, bautizada un año más tarde por Carlos Alchourrón como la *paradoja de Orayen*, ha sido motivo de reflexión, crítica e incluso polémica para filósofos, lógicos y matemáticos de Iberoamérica principalmente.[258] Por mencionar algunos, Rayo (2008) dedica sus reflexiones en torno de la paradoja a elucidar el propósito último del proyecto de Orayen: si formular la interpretación deseada para el lenguaje de la teoría de conjuntos consiste en caracterizar un predicado de verdad que permita probar cada instancia de la Convención T; o en ofrecer una caracterización semántica de consecuencia lógica para el lenguaje de la teoría de conjuntos; o si se trata de dar una semántica generalizada para los lenguajes de primer orden.[259] Por su parte, Aliseda (2008) mediante su análisis propone renombrar el problema identificado por Orayen y sustituir el término "paradoja" por el de "parapraxis", pues considera que, lejos de surgir a partir de los aspectos fundamentales de las paradojas lógicas y semánticas (no deriva en una contradicción ni se formula por autorreferencia), el problema es de índole práctico y apunta a la imposibilidad de construir un dominio adecuado para la teoría de conjuntos.[260] Gómez-Torrente (2003), en su popular objeción, a su vez concentra sus esfuerzos en cuestionar el *status* de la observación de Orayen como

[258] Aunque no exclusivamente, filósofos americanos también han participado en la discusión, entre los que pueden mencionarse, ni más ni menos, que Willard Van Orman Quine, Hilary Putnam y William Hart.

[259] Ver García de la Sienra (2008, p. 7).

[260] Personalmente, es muy cuestionable la respuesta de Aliseda, ya que apela al significado etimológico del término "parapraxis", *i. e.*, contrario a la práctica, para justificar la sustitución del término "paradoja" (contrario a la opinión). Sin embargo, si se consideran las observaciones de Gómez-Torrente (véase a continuación), es evidente que el problema de Orayen emerge cuando se asume una opinión muy particular e inicialmente plausible (aunque su plausibilidad disminuye a medida que se analiza cuidadosamente el supuesto), a saber, que la teoría de modelos se limita a considerar solamente recursos de índole conjuntista.

paradoja, mas su análisis es considerablemente más detallado y desentraña los supuestos detrás de la consideración paradójica de dicha observación: la contradicción surge sólo si se acepta el supuesto dudoso de que, para ser desarrollada, la teoría de modelos únicamente considera recursos reconocidos por la teoría de conjuntos. En fin, hay una amplia variedad de maneras para aproximarse al problema,

> [m]ientras que algunos opinan que el problema identificado por Orayen no califica como una paradoja auténtica, otros deciden renunciar a la teoría de conjuntos moderna para su solución. El resto de las soluciones propuestas apelan a nuevas nociones de modelo e interpretación de la semántica de la lógica de primer orden. Esta diversidad es sólo el reflejo de que es posible construir varias respuestas para los problemas de la filosofía de la lógica, y que si bien su continuo análisis esclarece los problemas planteados, no ofrece respuestas definitivas. (Aliseda, 2004, p. 170)

La paradoja de Orayen, de modo similar a la de Skolem, no se constituye por una contradicción a nivel formal, sino por un conflicto entre la teoría de modelos y la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel,[261] se trata de una suerte de antinomia casi (pero no exactamente) autorreferencial entre dos niveles, el teórico y el metateórico, el formal y el intuitivo. Sin embargo, como pudo apreciarse líneas arriba, la gran diversidad de abordajes a la cuestión impide un análisis exhaustivo de cada uno. El propósito de esta sección, pues, no es estudiar a fondo esta paradoja ni decidir la cuestión de manera definitiva (si es efectivamente una paradoja o no, o si tal o cual era el proyecto de Orayen, etcétera), sino concentrarse en una de las reflexiones (aún no mencionada) sobre este asunto y que resulta particularmente útil para este trabajo, esta es, la respuesta de José Alfredo Amor (2008). Puesto que su contribución es de semejante importancia para los fines últimos del estudio en cuestión, en primer lugar, resulta conveniente explorar medianamente la consideración de Gómez-Torrente (ya presentada muy superficialmente dos párrafos arriba) y desde ésta desprender directamente el argumento de Amor. Ante todo, véase rápidamente de que va esta paradoja, y qué mejor que presentarla justamente a la manera de Gómez-Torrente (2003):

> Orayen razona esencialmente como sigue. Sería difícil negar que una formalización habitual en un lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos ZFC (digamos) es una formalización que posee un modelo natural que la hace verdadera. Por otro lado, el supuesto habitual de los practicantes de la teoría de modelos es que los modelos aceptables

[261] En realidad, otras teorías de conjuntos también pueden jugar aquí, no obstante, puesto que este trabajo se concentra en ZFC y por simplicidad, se seguirá asumiendo que la teoría de conjuntos se refiere a esta teoría particular.

> de los lenguajes formales son estructuras conjuntistas. Pero el modelo natural que posee la formalización de ZFC no es una estructura conjuntista. Orayen concluye que hay una contradicción entre esta tesis y el supuesto de los practicantes de la teoría de modelos. (p. 84)[262]

La paradoja de Orayen, de acuerdo con el español, "no tiene la fuerza de una paradoja" porque la premisa que asegura que los practicantes de la teoría de modelos de hecho admiten el supuesto que el argentino les adscribe no goza de una "aprobación sólida y generalizada". No obstante, gran parte del análisis de Gómez-Torrente (2003) está dedicado a valorar cuan justificada está la tendencia a suponer que cualquier resultado matemático de la teoría de modelos estándar se corresponde con una verdad análoga acerca de estructuras conjuntistas (ésta es la llamada "tesis conjuntista de la teoría de modelos" [TCM]).[263]

Al contemplar el caso específico para la noción de satisfacibilidad (e indirectamente la de validez), el filósofo español confiesa que tal tendencia parece aceptable solamente para un número restringido de lenguajes formales, a saber, "los cuantificacionales clásicos, finitarios e infinitarios (de cardinalidades conjuntistas), con órdenes de cuantificación tanto finitos como transfinitos". El caso de interés en este trabajo evidentemente se trata del cuantificacional clásico infinitario numerable de orden uno. En este caso, TCM indudablemente es aceptable ya que una versión no conjuntista del teorema descendente de Löwenheim-Skolem garantiza la existencia de un submodelo de tamaño numerable y, por tanto, conjuntista. Sin embargo, cabe destacar que Gómez-Torrente no está considerando aquí el asunto acerca de la relativización de las nociones de ZFC (pues no está dentro de sus propósitos) que dicha estrategia ocasiona y que justamente en el presente trabajo significa un problema que aún espera ser resuelto. Por lo anterior, hay que ir con cuidado cuando se

[262] Otra manera igualmente clara de presentar este problema es al modo de Rayo (2008):

> [E]l lenguaje de la teoría de conjuntos trata sobre todos los conjuntos; por tanto, el dominio de un modelo que capture la interpretación deseada [pretendida] del lenguaje de la teoría de conjuntos tendría que consistir en todos los conjuntos. Pero el dominio de un modelo es un conjunto, y de acuerdo con las teorías de conjuntos estándar [como ZFC], no existe el conjunto de todos los conjuntos. Por tanto, ningún modelo puede capturar la interpretación deseada del lenguaje de la teoría de conjuntos. Este razonamiento es la paradoja de Orayen. (p. 30)

Para la formulación original de esta paradoja, véase Orayen (2003, p. 37). La razón de incluir en este trabajo explícitamente tan sólo este par de reformulaciones es porque personalmente se consideran más claras y precisas que la original.

[263] Véase Gómez-Torrente (2003, p. 83).

hable en general de que tales lenguajes aceptan TCM sin más.

Posteriormente, Gómez-Torrente dirige su atención al caso de los lenguajes clásicos de segundo orden y menciona que en ellos usualmente hay fórmulas que para ser satisfechas apelan a modelos cuya existencia requiere de extensiones de ZFC, como una que incluya cardinales fuertemente inaccesibles o supercompactos. (La alternativa que permitirá recuperar las nociones conjuntistas relativizadas a desarrollar en la próxima sección descansa en algo de este estilo). De esta forma, continúa y dice que la aceptación de este tipo de entidades adicionales es muy habitual entre teórico-conjuntistas, pues no es poco común considerar la teoría de conjuntos como una teoría "máximamente comprensiva", *i. e.*, que contiene toda estructura posible. Esto no significa un problema para TCM siempre que no se considere que estas teorías de conjuntos "incrementadas" se supongan fuera de (o ajenas a) ZFC. La idea de mantener estas nuevas entidades como parte de la teoría de conjuntos, afirma, es lo que inspira propuestas como la de los llamados "principios de reflexión".[264]

En realidad, el asunto de determinar si la tendencia a suponer TCM está justificada o no, señala el lógico español, estrictamente no forma parte de la tarea de Orayen, sino que su propósito parece estar orientado más bien en caracterizar extensionalmente la noción de modelo aceptable de los lenguajes formales "o como mínimo [...] caracterizar una noción suficientemente amplia como para incluir a todos los modelos que pueda convenir mencionar matemáticamente" (Gómez-Torrente, 2003, p. 90), incluyendo el de la teoría de conjuntos. Así, la caracterización de los modelos que Orayen atribuye a los practicantes de la teoría de modelos son conjuntistas y, como esto es inadecuado, propone una nueva caracterización.[265] Es aquí donde entran las dos posibles soluciones que el mismo Orayen proporciona a su propia paradoja.[266] La segunda de ellas consiste precisamente en relajar el supuesto cuestionable, e identificado por Gómez-Torrente al inicio de su artículo, para admitir entre los modelos aceptables, además de las estructuras conjuntistas, "estructuras cuyo dominio es una clase propia incluida en el universo de los conjuntos, y las estructuras que se pueden obtener por medio de la iteración finita de la

[264]Los principios de reflexión afirman que si la jerarquía acumulativa de los conjuntos bien-fundados hace verdadero un enunciado, entonces existe un estrato (conjuntista) de dicha jerarquía que lo refleja, es decir, que también lo hace verdadero.

[265]Ver Gómez-Torrente (2003, p. 90).

[266]La segunda es reconocida por la mayoría como más adecuada. La primera no es muy importante para los propósitos actuales, por lo que no se mencionará con detalle. Ésta consiste en considerar los modelos aceptables como grupos de expresiones significativas en un lenguaje ya interpretado y que proporcionan las interpretaciones del dominio de cuantificación, constantes no-lógicas y variables. Véase Gómez-Torrente (2003, p. 89).

formación de hiper-clases a partir del universo de los conjuntos." (Gómez-Torrente, 2003, p. 90). Esta solución a la larga lleva a la consideración de una tesis más amplia que TCM, la cual supone que "cualquier verdad matemática de la teoría de modelos estándar se corresponde con una verdad análoga acerca de estructuras conjuntistas y/o algunas de las primeras hiper-clases." (Gómez-Torrente, 2003, p. 94).

A pesar de lo interesante que puede resultar esta paradoja por sí misma, el lector probablemente se pregunte por qué motivo se optó por incluirla en este estudio cuando ciertamente no parece haber una conexión muy cercana con el teorema de Löwenheim-Skolem; la razón o, mejor dicho, razones son las siguientes: primero, se trata de un ejemplo auténticamente filosófico del tipo de inquietudes que puede despertar una consideración radicalmente no-algebraica (la mencionada búsqueda de Orayen por la caracterización de la noción de modelo aceptable para la teoría de conjuntos persigue en cierto sentido algo así como un modelo pretendido para la teoría) y a la que inevitablemente debe enfrentarse de algún modo el partidario de la concepción híbrida de las teorías formales; en segundo lugar, las reflexiones críticas realizadas tanto por Gómez-Torrente como por Amor alrededor de este problema (esta última aún está por presentarse) motiva una comprensión particular y favorable respecto de la teoría de modelos de la teoría de conjuntos para el desarrollo de una estrategia afín con la aproximación híbrida de ZFC y que, en última instancia, posibilita el rescate de las nociones conjuntistas víctimas de la relativización suscitada por Löwenheim-Skolem. Así pues, véase ahora el planteamiento de la respuesta de Amor.

Como ya se había adelantado en la sección 2.2.1., Amor (2008) estima que la teoría de conjuntos no se trata de una teoría algebraica ni no-algebraica, sino de una de naturaleza un tanto intermedia y que aquí se ha preferido distinguir con el nombre de "teoría híbrida". También, en la misma sección, se planteó la manera en que el matemático mexicano precisó la referencia a los modelos estándar de la teoría de conjuntos: como estructuras conjuntistas cuyo dominio consista en un conjunto no-vacío de elementos que sean efectivamente conjuntos y cuya relación binaria sea precisamente la relación de pertenencia. Recuérdese que, para poder diferenciar con éxito (parcial si se quiere) tales entidades y tal relación, es menester presuponer una idea al menos vaga de lo que intuitivamente es un conjunto y la pertenencia.

Amor, en su respuesta a Orayen, considera todos estos elementos en menor o mayor grado y asume desde un inicio TCM, aunque tampoco tiene problema en reconocer teorías de modelos no-clásicas que admitan otra suerte de entidades como dominios de discurso (*e. g.* la teoría de modelos-clase). Su crítica contra el argentino se centra inicialmente en el rechazo del supuesto ingenuo de que la teoría de conjuntos debe consentir la existencia del conjunto de todos los conjuntos dentro de ella si es que la semántica modelo-teórica de ZFC presume tener sentido. Quizá una reconstrucción del argumento de Orayen enfocado a poner de manifiesto lo anterior permita ver más fácilmente la cuestión: *i)* de acuerdo con la teoría de modelos clásica, ésta se formula a partir de la teoría de conjuntos que le presta su maquinaria para la construcción de modelos; en particular, el dominio de un modelo es un conjunto no-vacío; *ii)* la teoría de conjuntos (ZFC) es acerca de todos los conjuntos; *iii)* si un modelo de la teoría de modelos pretende capturar *la* interpretación pretendida de ZFC, entonces debería tener el conjunto de todos los conjuntos como dominio; *iv)* el conjunto de todos los conjuntos no forma parte de ZFC (necesariamente, pues es un teorema),[267] se trata de una clase propia; *v)* por tanto, no hay modelo que pueda rescatar la interpretación pretendida de ZFC; *vi)* para contrarrestar *v)* debe admitirse el conjunto de todos los conjuntos dentro de ZFC. Pero esto es imposible.

Por ello, sin dudarlo, Amor rechaza inmediatamente esta falsa pretensión, pues como se sabe es un teorema de ZFC la negación de la existencia del conjunto de todos los conjuntos (*i. e.*, $\exists x \forall y (y \in x)$)[268] El error de Orayen, afirma, es producto de "intuiciones equivocadas que debemos aclarar y desechar" (Amor, 2008, p. 88). El primer error lo comete al pretender sostener siquiera la posibilidad de incluir tal proposición dentro de ZFC. Eso inevitablemente volvería inconsistente la teoría, cosa nada deseable por muy deseable que sea capturar *la* supuesta interpretación pretendida de ZFC. El segundo error reside en una confusión respecto del término "todos":

> el universo de cualquier modelo de la teoría de conjuntos [...] es el universo de *todos* los objetos de la teoría (llamados "conjuntos") y no hay ningún problema con el hecho de que en la teoría de conjuntos es un teorema que "la colección de todos los conjuntos *no* es un conjunto" [...] "Todos" es una cuantificación que describe aquellos objetos que satisfacen lo que se dice en el lenguaje sobre las variables, y el lenguaje nunca nos dice explícitamente que los conjuntos son tal y tal, sino que resulta ser que los conjuntos son aquellos objetos que satisfacen lo que se dice con variables en el lenguaje por medio de axiomas y pueden ser conjuntos o no [...] Lo que se tiene en el lenguaje es una definición implícita dada por los axiomas: todo aquello que los cumpla son *todos* los conjuntos, y eso es muy relativo, incluso en el caso de los modelos que aquí hemos llamado estándar. (Amor, 2008, pp. 87-89)

[267] Aquí se está implementando de forma implícita un axioma modal de necesitación.

[268] De hecho, es muy sencillo demostrarlo. Simplemente basta con demostrar que para cualquier conjunto siempre hay un conjunto que no le pertenece, para esto simplemente se construye, con el uso del esquema de separación, un subconjunto de un conjunto arbitrario cuyos elementos no se pertenezcan a sí mismos. La prueba es rutinaria (véase Enderton, 1977, p. 22).

Así, la confusión surge de la ambigüedad de dicho término, el cual carece de un significado absoluto dentro de la teoría de modelos. Esto emerge en parte por el carácter algebraico de la aproximación híbrida. El tercer y último error, continúa, lo comete Orayen al considerar un *único* modelo estándar para ZFC. Amor coincide con Orayen en que las nociones conjuntistas deben entenderse de la manera usual o natural para que la semántica modelo-teórica tenga sentido como parte de ZFC, pero difiere de él respecto del compromiso con un único modelo estándar. En efecto, y para complementar la objeción de Amor, el teorema de Löwenheim-Skolem garantiza la existencia de múltiples modelos, en especial, la existencia de múltiples modelos estándar, lo cual queda garantizado a su vez por el axioma de elección y que propicia la construcción de submodelos y supermodelos que conservan las nociones de conjunto como conjunto y la de pertenencia como pertenencia a la manera usual. El problema, sin embargo, como ya se ha comentado en repetidas ocasiones, es que Löwenheim-Skolem también garantiza la relativización de ciertas nociones elementales de la teoría y que al final impide la recuperación deseable de un modelo que caracterice fielmente la concepción de conjunto con todos sus matices, cosa que, como señaló Gómez-Torrente, parece formar parte de la empresa del lógico argentino. Tal vez la moraleja de esta historia como dice Agustín Rayo (2008) es que así como "[e]l teorema [de definibilidad] de Tarski nos enseña que [...] es imposible hacer semántica para un lenguaje (suficientemente expresivo) sin utilizar un lenguaje que sea de mayor riqueza expresiva", de modo similar la paradoja de Orayen sugiere que "es imposible hacer semántica generalizada para un lenguaje sin utilizar un lenguaje que no sólo sea de mayor riqueza expresiva, sino también de mayor riqueza lógica u ontológica" (p. 45). En la próxima sección se hará caso de esta moraleja y se intentará justificar un incremento en la ontología de ZFC para optimizar la noción de modelo estándar ofrecida por Amor, y así salvar de algún modo la noción de modelo pretendido anhelada por Orayen (y seguramente por muchos otros más).

2.2.1.3. *Una alternativa fuertemente inaccesible*

Por fin,[269] ha llegado el momento de saldar la deuda ya tanto anunciada y de desarrollar una posible solución a los inconvenientes generados por el teorema de Löwenheim-Skolem. El interés y la importancia por aprehender una noción suficientemente satisfactoria de modelo pretendido para la teoría de conjuntos y, sobre todo, recuperar la absolutez de las nociones conjuntistas elementales, seguramente no es desconocido para la mayoría. De cualquier modo: frenar la relativización que inevitablemente surge a partir del teorema de Löwenheim-Skolem permite contrarrestar de alguna manera las consecuencias un tanto catastróficas de la no-categoricidad de ZFC; a su vez, una comprensión suficientemente satisfactoria de la noción intuitiva de conjunto y de la estructura donde habita permite recuperar la objetividad de las demás estructuras matemáticas y de las referencias abstractas de las oraciones de la matemática. En resumen, el interés por la cuestión, que se remonta hasta Zermelo, reside ciertamente en el carácter máximamente comprensivo de la teoría de conjuntos, o sea, en su capacidad de reconstruir toda la matemática clásica: perder la noción de conjunto y la estructura conjuntista significa perder las estructuras de otras ramas de la matemática que pueden reconstruirse mediante las primeras. El problema en concreto es que cada modelo distinto de ZFC permite reconstruir el resto de las teorías matemáticas (entre ellas, las no-algebraicas) y cada una de esas reconstrucciones, de cada área de la matemática clásica, muy probablemente se erige sobre una estructura diferente; es decir, no hay garantía de que las estructuras sean las mismas *via* los distintos modelos de ZFC, ¡ni incluso al tratarse de las mismas teorías matemáticas!

No es de poca importancia, pues, intentar ofrecer una caracterización satisfactoria de la noción intuitiva de conjunto y de la estructura que está detrás de la axiomatización de Zermelo-Fraenkel. Más aún, la serie de motivaciones para estudiar la teoría de conjuntos introducidas en la sección 2.1. también están presentes aquí. Sin embargo, ¿cómo puede lograrse la recuperación de

[269] Agradezco enormemente una vez más a Cristian Gutiérrez por permitirme desarrollar esta estrategia, producto de su ingenio y admirable inteligencia. Cualquier error que pudiera llegar a existir en el presente desarrollo es únicamente responsabilidad mía, ocasionado por mi ignorancia y la deficiencia de mis habilidades expresivas. Con todo, cabe confesar que mi limitado conocimiento respecto de gran parte de las cuestiones técnicas ha hecho imposible para mí presentar esta alternativa de manera óptima y con el rigor que merece. Me disculpo de antemano por cualquier dificultad y oscuridad que pueda resultar del planteamiento en esta sección, la falta de profundidad y el manejo detallado de varias cuestiones ha restringido el contenido a una exposición relativamente superficial de ciertas nociones, no obstante, se espera que la información aquí incluida sea suficiente para comprender el argumento general de esta propuesta.

estas nociones tan escurridizas y que el teorema de Löwenheim-Skolem se empeña tanto en dificultar?

Como ya se ha visto, la aproximación híbrida de la teoría de conjuntos permite contar con una noción suficiente de conjunto y de pertenencia para promover el desarrollo de la teoría pura de conjuntos, y el hecho de que la jerarquía acumulativa esté inacabada ("por arriba") dificulta la claridad en la concepción de la estructura de fondo a la teoría. Pero, si hubiese un nivel de la jerarquía donde, sin importar cuantas ni cuales aplicaciones de los axiomas de ZFC se efectuaran, se tuviese la garantía de que los objetos de la teoría de hecho caen por debajo de ese nivel, ¿no podría, entonces, acotarse de alguna forma la estructura de la jerarquía al mínimo nivel donde cualquier objeto que satisface los enunciados de la teoría (en su totalidad) forma parte?

El nivel de la jerarquía que precisamente cumple con este propósito es el nivel indexado por un *cardinal fuertemente inaccesible*. Desgraciadamente, la existencia de estas entidades es indecidible dentro de ZFC, o sea, no puede demostrarse la existencia de estos cardinales ni su inexistencia a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos estándar.[270] No obstante, la mayoría de los matemáticos no tienen problema con reconocer su existencia y trabajar con ellos "como si fueran" parte de ZFC. A pesar de esto, apelar al reconocimiento común por parte de la comunidad matemática para admitir estas entidades puede dejar una sensación insatisfactoria en muchos. Por tanto, como formalmente no puede justificarse la existencia de estas entidades, habrá que buscar su justificación con base en ciertos criterios de carácter filosófico que concedan la aceptación de nuevos axiomas; en particular, el axioma que afirma que "hay a lo menos un cardinal fuertemente inaccesible".

Sin embargo, antes de adentrarse de lleno en esta empresa, resulta pertinente ver más minuciosamente en qué consiste la alternativa en cuestión. Ante todo, cabe hacer una importante aclaración: aunque los criterios considerados a continuación para afirmar la existencia de estas entidades especiales pueden implementarse principalmente para promover la aceptación de axiomas formales, en este caso lo que interesa no es complementar ZFC *formalmente*, sino hacer uso de estos criterios para justificar la existencia de tales entidades exclusivamente a nivel informal; pues, como se dijo en la sección 2.2.1., sin importar cuanto se mejore ZFC en orden uno al añadir nuevos axiomas, siempre estará sujeta al resultado de Löwenheim-Skolem y a la relativización que éste significa. Además, si el universo de von Neumann hasta un nivel indexado por un cardinal fuertemente inaccesible es modelo de ZFC, entonces puede probarse la consistencia de ZFC+"no existe un cardinal fuertemente inaccesible", lo que a la larga permite probar la consistencia de ZFC. Fi-

[270]Para esta prueba de independencia, véase Jech (2006, p. 167).

nalmente, y para amarrar los cabos sueltos, si ZFC es consistente entonces tendrá modelo de cualquier cardinalidad infinita y fuera de la teoría (*i. e.*, informalmente) podrá sostenerse la existencia de una estructura de cardinalidad fuertemente inaccesible que haga verdaderos a todos los enunciados de la teoría. Pero, a todo esto, ¿qué tienen de especial estos cardinales?

Recuérdese que un cardinal κ es fuertemente inaccesible si y sólo si *i)* es un cardinal mayor que $\aleph_0$, *ii)* es límite fuerte (*i. e.*, para cualesquiera cardinales $\alpha < \kappa$ y $\beta < \kappa$, $\alpha^\beta < \kappa$), y *iii)* regular.[271] Dicho de otro modo, un cardinal es fuertemente inaccesible si *no* es *alcanzado* por exponenciación cardinal (límite fuerte) ni por uniones de cardinales menores que él (suma cardinal). El interés por este tipo de cardinales está íntimamente relacionado con el hecho de que de este modo puede considerarse un modelo de tal tamaño que permita capturar todo posible conjunto expresable dentro de la teoría de ZFC, cosa que no podía llevarse a cabo con otros modelos de ZFC menores al nivel indexado por un cardinal fuertemente inaccesible: al manejar conjuntos de tamaño infinito, no hay garantía alguna de si, por ejemplo, un modelo efectivamente contiene todos los subconjuntos de un conjunto, o si un reemplazo determina exactamente el conjunto que intuitivamente se esperaba obtener o separar (en el caso de separación). Es más,[272] dada la consideración de múltiples modelos para $\mathrm{T}_{\mathrm{ZFC}}$, la interpretación de una fórmula φ del lenguaje de primer orden para la teoría de conjuntos siempre requiere ser evaluada con relación a un modelo específico $\langle \mathfrak{A}, E \rangle$, por lo que dicha fórmula debe relativizarse respecto de una interpretación particular (escrito $\varphi^{\mathfrak{A},E}$), de modo que las apariciones de $\in$ en φ se correspondan con E y sus cuantificadores se encuentren acotados a $|\mathfrak{A}|$. Así, cuando una fórmula es relativizada a un modelo, sus cuantificadores no corren sobre todos los conjuntos sino solamente sobre los objetos que pertenecen al dominio de $\mathfrak{A}$. Por esto, una fórmula puede ser verdadera dentro de la teoría y falsa desde afuera, y viceversa. Sin embargo, es posible caracterizar un tipo muy particular de fórmulas que "preservan" su verdad fuera y dentro de una teoría, a saber, las *fórmulas absolutas*, que bajo cierta condición "razonable" coinciden con las llamadas fórmulas Δ_0. ¿Qué quiere decir todo esto?

Una fórmula φ es absoluta si y sólo si es verdadera fuera y dentro de una teoría interpretada por medio de la estructura específica $\langle \mathfrak{A}, E \rangle$, en símbolos $\varphi \leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{A},E}$. Por su parte, la condición razonable mencionada en el párrafo de arriba se refiere al supuesto de que los modelos bajo consideración serán únicamente *transitivos*, es decir, aquellos cuyo dominio es transitivo[273] y la

[271] Véase la sección 1.2.2. para una definición más detallada de cardinal, ordinal límite y ordinal regular.

[272] Lo siguiente fue tomado de Gutiérrez (2015, p. 52-55).

[273] Un conjunto o, de manera más general, una colección A es transitiva si y sólo si todo

relación E se comporta precisamente como la pertenencia, es decir, donde E es *extensional*.[274] Quedarse tan solo con modelos transitivos no es peligroso y, por el contrario, es muy conveniente, ya que corresponden justamente con los modelos de interés para el teórico-conjuntista y reúnen las características que uno esperaría poseyera una estructura adecuada para la teoría de conjuntos,[275] en el sentido de que sus objetos son de hecho conjuntos y la $E-$relación *la* pertenencia *real*. Por su parte, formalmente las fórmulas Δ_0 se definen por recursión, de tal modo que una fórmula α es Δ_0 si y sólo si cumple con alguna de las siguientes condiciones:

i) α no tiene cuantificadores;

ii) α es de la forma $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ o $\varphi \leftrightarrow \psi$, tal que φ y ψ son Δ_0-fórmulas;

iii) α es de la forma $(\exists x \in y)\varphi$ o $(\forall x \in y)\varphi$, tal que φ es Δ_0-fórmula.[276]

Así, cuando solamente se consideran modelos transitivos, todas las Δ_0-fórmulas son absolutas, pues la restricción del modelo V (el universo de von Neumann) a un modelo particular de la teoría es lo *suficientemente* semejante al intuitivo como para conservar el valor de verdad de la fórmula en estos casos (Gutiérrez, 2015, p. 55).[277] Entre las nociones conjuntistas expresables como Δ_0-fórmulas, y por ende como fórmulas absolutas dentro de modelos transitivos, pueden mencionarse:

i) $x = \{u, v\}$, $x = (u, v)$, x es vacío, $x \subseteq y$, x es transitivo, x es un ordinal, x es un ordinal límite, x es un número natural, $x = \omega$;

ii) $Z = X \times Y$, $Z = X - Y$, $Z = X \cap Y$, $Z = \bigcup X$, $Z = \text{dom } X$, $Z = \text{ran } X$;

iii) x es una relación, x es una función, $y = f(x)$, $g = f \upharpoonright X$. (Jech, 2006, p. 164).

Son precisamente estas nociones absolutas las que no sufren la relativización suscitada por el teorema de Löwenheim-Skolem y, a primera vista, parece que dicho teorema realmente no significaba una tragedia tan grande, después de todo la mayor parte de los axiomas de ZFC son expresables usando

---

elemento de A es un conjunto y todo miembro de un miembro de A es también miembro de A, *i. e.*, $a \in b \in A \Rightarrow a \in A$ (o bien de manera equivalente, $a \in A \Rightarrow a \subseteq A$).

[274] $E \subseteq |\mathfrak{A}| \times |\mathfrak{A}|$ es extensional si y sólo si E está bien-fundada sobre $\mathfrak{A}$ y $\forall x, y \in \mathfrak{A}(\forall z \in \mathfrak{A}((zEx \leftrightarrow zEy) \rightarrow x = y))$.

[275] De hecho, puede afirmarse sin temor que la jerarquía acumulativa es un modelo-clase transitivo.

[276] Ver Jech (2006, p. 163).

[277] Para la demostración de esto, véase el lema 12. 9 en Jech (2006, pp. 163-164).

Δ_0-fórmulas (Gutiérrez, 2015, p. 55). No obstante, aquéllas no son todas las nociones que intuitivamente desearían recuperarse dentro de la teoría de conjuntos. En especial, "debe enfatizarse que los conceptos cardinales no son absolutos en general" (Jech, 2006, p. 165), por ejemplo: X es un cardinal, $Y = \mathcal{P}X$, card Y = card X, $y = cf(x)$, x es regular.

¿Es realmente necesario que uno deba arreglársela para recuperar las nociones cardinales en la teoría de conjuntos? ¿No podría prescindirse de ellas y simplemente contentarse con las nociones absolutas de la teoría? La respuesta es negativa. Aunque el empleo de la teoría de conjuntos para desarrollar la teoría de modelos ha sido verdaderamente exitoso a lo largo del siglo XX, y aunque este trabajo ha estado orientado principalmente a estudiar esta aplicación de la una sobre la otra, como se mencionó en la sección 1.2.2., la teoría de conjuntos históricamente fue desarrollada por Cantor en un inicio con la finalidad de representar mediante ella una teoría tanto de ordinales como de cardinales transfinitos. Renunciar a esta última por la dificultad que supone capturarla es sencillamente inaceptable. El estudio del orden, pero sobre todo del infinito y sus tamaños, es la piedra angular de la teoría de conjuntos y representa uno de sus primeros y más grandes objetos de estudio, incluso más que cualquier otro estudio colateral de importancia similar que haya surgido en el camino, como es el caso de la teoría de las estructuras o la teoría de modelos.

Para recapitular, la *alternativa fuertemente inaccesible* que se propone en esta sección consiste en justificar la existencia de al menos un cardinal fuertemente inaccesible κ fuera de la teoría con base en ciertos criterios de carácter filosófico (aún por verse), para poder determinar un modelo transitivo de tal cardinalidad que represente la jerarquía acumulativa hasta un nivel indexado por κ (V_κ)[278] y que restrinja la estructura expresada por ZFC al mínimo nivel necesario para capturar toda noción conjuntista de interés. Al ser transitivo, dentro de tal modelo todas las Δ_0-fórmulas tienen el mismo valor de verdad que en cualquier otro modelo transitivo, pues ya se ha dicho que son absolutas (*i. e.*, que fuera y dentro de la teoría tienen el mismo valor de verdad) en modelos de ese tipo. Se sostiene, sin embargo, que tal modelo transitivo de cardinalidad κ a su vez es capaz de recuperar de manera *absoluta* las nociones cardinales relativizadas por la no-categoricidad de ZFC y originada por el teorema de Löwenheim-Skolem. Por tanto, faltan por presentarse esencialmente dos puntos: *i)* los criterios filosóficos de justificación que servirán para justificar satisfactoriamente la existencia de a lo menos

[278] "V_κ" a su vez se utilizará para nombrar el modelo de la teoría de cardinalidad κ, donde κ es un cardinal fuertemente inaccesible. Sin embargo, estrictamente "V_κ" refiere al nombre del nivel del universo de von Neumann indexado por un cardinal κ inaccesible fuerte.

un cardinal inaccesible fuerte; y *ii)* el modo en que la jerarquía acumulativa hasta un nivel indexado por tal cardinal V_κ puede capturar absolutamente las nociones relativizadas por Löwenheim-Skolem. Considérese primero el segundo punto.

Como se sabe, a diferencia de las teorías no-algebraicas que consideran un único modelo estándar salvo isomorfismo, las algebraicas consideran todo modelo como estándar (o como no-estándar); las teorías híbridas, por su lado, consideran una clase no-vacía y no-unitaria de modelos estándar. Sin embargo, aunque la caracterización de Amor (2008) de la sección 2.2.1. para los modelos estándar inicialmente fue muy útil, lamentablemente ahora resulta insuficiente para rescatar todas las nociones de interés para el teórico de conjuntos. Es por ello que, si uno está dispuesto a recuperar estas últimas, es necesario refinar y exigirle algo más a la caracterización que Amor ofrece para los modelos estándar, a saber, que, además de que tales modelos tengan como objetos en sus dominios conjuntos puros y la pertenencia sea la pertenencia, sean transitivos y recuperen de manera un tanto absoluta las nociones conjuntistas básicas y relativizadas por Löwenheim-Skolem. En especial, deben recuperarse los reemplazos, las potencias, la buena-fundación, y los conceptos cardinales. Véase enseguida cómo un modelo de cardinalidad fuertemente inaccesible puede satisfacer los nuevos requisitos impuestos a un modelo para ser considerado estándar.

Por el momento, se pide al lector que conceda ciegamente la existencia de al menos un cardinal fuertemente inaccesible fuera de la teoría, pues de esta forma puede demostrarse que si κ es un cardinal fuertemente inaccesible, entonces V_κ es modelo de ZFC.[279] Adicionalmente, puede demostrarse que:[280]

i) $(x \text{ es un ordinal})^{V_\kappa} \leftrightarrow x$ es un ordinal.

ii) $(x \text{ es un cardinal})^{V_\kappa} \leftrightarrow x$ es un cardinal.

iii) $(x \text{ es un cardinal regular})^{V_\kappa} \leftrightarrow x$ es un cardinal regular.[281]

Es decir, si un conjunto en el modelo transitivo de cardinalidad inaccesible fuerte es un ordinal, entonces realmente es un ordinal; si es un cardinal, en efecto es un cardinal; y si es un cardinal regular, también lo es en realidad.

Ahora bien, el caso de buena-fundación se rescata fácilmente porque se sabe que $V\kappa$ es transitivo, esto implica que la pertenencia se comporta como

[279] Ver el lema 12.13 en Jech (2006, p. 167).

[280] Ver Jech (2006, p. 167).

[281] Las pruebas de lo anterior son algo complicadas, por ello que se ha preferido no introducirlas en este trabajo. Con todo, los resultados son auténticos y el lector interesado puede revisar las pruebas en Jech (2006, p. 167).

la pertenencia, que los elementos de un objeto cualquiera (que es forzosamente un conjunto) en $|V_\kappa|$ son realmente sus elementos y que dichos elementos también se encuentran en el dominio; asimismo, si V_κ es transitivo la $E-$relación está bien fundada sobre la estructura y, por lo que ya se ha dicho, los conjuntos de V_κ necesariamente están bien-fundados.

El caso de reemplazo[282] es ligeramente más complejo: Como κ es inaccesible, card $|V_\kappa| = \kappa$ y para cualquier $X \in V_\kappa$, card $X < \kappa$. Si $\mathcal{F}$ es una función de $X \in V_\kappa$ en V_κ, entonces card $\mathcal{F}(X) \leq$ card $X < \kappa$.[283] Como κ es regular, entonces $\mathcal{F}(X) \subseteq V_\alpha$ para alguna $\alpha < \kappa$. Por tanto, $\mathcal{F} \in V_\kappa$ (Jech, 2006, p. 167).

El caso de potencia es parecido al anterior: Como κ es inaccesible fuerte, card $|V_\kappa| = \kappa$ y para cualquier $X \in V_\kappa$, card $X < \kappa$. Por el teorema de Cantor card $X <$ card $\mathcal{P}(X) = 2^{\text{card } X}$. Como κ es límite fuerte, para cualesquiera $\alpha < \kappa$ y $\beta < \kappa$, $\alpha^\beta < \kappa$; en particular, si $\alpha = 2$ y $\beta =$ card X (obviamente, $2 < \kappa$ y card $X < \kappa$), evidentemente $\mathcal{P}(X) = 2^{\text{card } X} < \kappa$, y $\mathcal{P}(X) \subseteq V_\alpha$ para alguna $\alpha < \kappa$.[284] Por tanto, $\mathcal{P}(X) \in V_\kappa$.[285]

Como el lector puede apreciar, en efecto, el modelo de cardinalidad κ puede capturar las nociones conjuntistas elementales de manera absoluta, aún a aquellas víctimas de la relativización ocasionada por Löwenheim-Skolem. Por tanto, V_κ evidentemente es capaz de sostener la caracterización optimizada de modelo estándar introducida líneas arriba y de capturar satisfactoriamente tanto las nociones conjuntistas intuitivas como la estructura expresada por el lenguaje de primer orden para la teoría de conjuntos de Zermelo-Frenkel. Ahora, considérese qué motivos habría para sostener informalmente la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles.

Como ya se ha dicho, la existencia de estos cardinales grandes pretende sostenerse *extra-teóricamente*; no resulta extraño, pues, que su justificación no dependa formalmente de la teoría de ZFC, sino de ciertos criterios *fuera* de ella. Aunque estos criterios metateóricos usualmente son implementados para la adopción de nuevos axiomas *dentro* de la teoría, en esta ocasión lo que realmente se espera obtener de ellos es una justificación para adoptar entidades adicionales en la metateoría que doten a la teoría de modelos de los recursos suficientes para interpretar satisfactoriamente ZFC, tanto en el sentido de la concepción híbrida optimizada de los párrafos pasados, como

282 Separación se puede tomar como una instancia de reemplazo, por eso basta con mostrar reemplazo.

283 Es posible que card $\bigcup \mathcal{F}(X)$ implique un crecimiento de tamaño, no obstante, que κ sea regular garantiza que aún esa unión caerá por debajo de κ.

284 Es límite fuerte.

285 Como V_α está en un nivel más bajo de la jerarquía que V_κ, V_α necesariamente debe aparecer en V_κ. De nuevo que V_κ sea transitivo juega un papel importante.

en el de recuperar todas las nociones conjuntistas de interés también ya mencionadas.

Los criterios son de carácter filosófico y, de acuerdo con el tipo de evidencia que se les otorga para favorecer la adopción de nuevos axiomas o, en este caso, entidades metateóricas, suelen clasificarse en dos grupos: los criterios internos y los criterios externos.[286] Los primeros se refieren a aquellos cuya evidencia proviene del concepto preteórico de los objetos conjuntistas que se pretenden recuperar y de la naturaleza del universo acumulativo donde habitan, así como de su comportamiento. Sin embargo, esto muchas veces no basta para la justificación de los axiomas u objetos adicionales y por ello se requiere apelar a la segunda clase de criterios. Esta segunda clase apela a la evidencia basada en la utilidad de tales objetos o axiomas dentro de la práctica matemática y en la fecundidad de sus consecuencias adecuadas para los objetivos de la teoría. Con todo, la aplicabilidad de este segundo tipo de criterios no parece ser adecuado para justificar la introducción de cardinales inaccesibles fuertes en la metateoría, esto porque no involucra una interacción formal con los elementos teóricos y, por ende, su añadidura no arroja nuevas herramientas para obtener resultados teóricos más fácilmente ni contribuye realmente en la práctica o desarrollo de la teoría.[287] (La existencia de estos cardinales es rigurosamente extra-teórica.) No obstante, para compensar de alguna forma la ausencia de criterios externos en la consideración metateórica de los cardinales en cuestión, adicionalmente puede apelarse a las llamadas "reglas de pulgar"[288] para incrementar su justificación. Las reglas de pulgar

---

[286]Para mayores detalles respecto de esta clasificación, véase Gutiérrez (2015, p. 175-188). Esto se retoma de Gödel (1947).

[287]Estos son ellos:

> *1)* El axioma tiene consecuencias verificables (tales que su verificación puede ser hecha apelando a otros axiomas de la teoría).
>
> *2)* Ofrece nuevos y poderosos métodos de prueba para resolver problemas abiertos.
>
> *3)* Simplifica y sistematiza la teoría.
>
> *4)* Implica conjeturas previas.
>
> *5)* Implica resultados naturales (naturales de acuerdo a las prácticas de la teoría de conjuntos).
>
> *6)* Establece conexiones interteóricas fuertes.
>
> *7)* Provee nuevas luces para viejos problemas. (Gutiérrez, 2015, p. 184)

[288]Gutiérrez (2015) las llama "reglas de oro", aunque también hay quien las llama "reglas

dentro del contexto actual pueden entenderse como "intuiciones vagas acerca de la naturaleza de los conjuntos, intuiciones tan vagas para ser expresadas directamente como axiomas, pero que pueden emplearse en argumentos de plausibilidad para enunciados más precisos" (Maddy, 1988, p. 484).

En relación con la evidencia para los criterios internos, pueden considerarse los objetivos que la teoría de conjuntos por sí misma persigue con frecuencia, a saber: *i)* servir como marco general para la representación de diferentes objetos y teorías matemáticas; *ii)* garantizar la consistencia del sistema y evitar las paradojas;[289] y *iii)* resolver de forma estructurada y junto con otras disciplinas matemáticas problemas abiertos en la teoría de conjuntos.[290] El punto *i)* está íntimamente relacionado con el carácter máximamente comprensivo de ZFC introducido en la sección pasada y sugiere como criterio interno aceptar objetos adicionales que proporcionen los recursos para aprehender la mayor cantidad de modelos, objetos y estructuras en la teoría. Es prácticamente inmediato que la existencia de cardinales inaccesibles fuertes cumple con este requisito, pues de hecho se ha sostenido que gracias a ellos sería posible capturar todos objetos que forman parte de ZFC (*e. g.* todos los conjuntos generados por potencia) y recuperar todas las nociones conjuntistas elementales de interés para la teoría (*e. g.* los ordinales y cardinales); más aún, la existencia de estos cardinales efectivamente enriquecería la metateoría al punto de permitir, con un principio de reflexión, generar modelos de esa cardinalidad que recuperarían la estructura del modelo-clase de ZFC correspondiente con la jerarquía acumulativa.

Por su parte, el criterio motivado por *ii)* también es satisfecho por los cardinales fuertemente inaccesibles: Como se mencionó, la proposición "hay al menos un cardinal fuertemente inaccesible" (para abreviar, I)[291] es indecidible en ZFC, *i. e.*, es independiente de la teoría, pero de hecho se sabe que ZFC+I implica un modelo estándar V_κ (donde κ es un cardinal inaccesible fuerte) dentro de la jerarquía acumulativa para ZFC, es decir, ZFC+I puede probar la consistencia misma de ZFC. Nótese que esta prueba de consistencia de ZFC no choca con el segundo resultado de incompletud de Gödel: se ha dicho que V_κ es modelo de ZFC, por lo que el enunciado "ZFC es consistente" es demostrable en ZFC+I; pero I no forma parte de la teoría, por tanto, no es un caso de ZFC demostrando su propia consistencia o algo parecido, sino que

pragmáticas" o "reglas heurísticas". Dado que ninguna traducción refleja de manera precisa o clara el sentido genuino de la expresión, en este trabajo se ha preferido conservar la traducción literalmente más cercana del inglés "*rules of thumb*".

[289] Este criterio presupone que la lógica de fondo es clásica o que por lo menos no admite contradicciones dentro de la teoría.

[290] Ver Gutiérrez (2015, p. 178).

[291] La I se refiere a *inacccesible cardinal*, en inglés.

la prueba de consistencia está dada por la metateoría o, más precisamente, por los nuevos elementos meramente extra-teóricos que la han enriquecido hasta el punto de dotarla de los recursos suficientes para generar un modelo adecuado para la teoría. De cualquier modo, cierto lector probablemente esté tentado a objetar que en la metateoría la consistencia de ZFC+I sí entraría en conflicto con el segundo teorema de incompletud, a lo que se responde lo siguiente: es cierto que ZFC+I demostraría su propia consistencia si I es consistente con ZFC,[292] pero en momento alguno se ha hecho el compromiso con que I sea consistente con ZFC, en realidad es irrelevante si es consistente o no (incluso puede demostrarse que no puede demostrarse que la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles sea consistente con ZFC),[293] el objetivo de incluir tales cardinales es simplemente proporcionar un modelo estándar adecuado para ZFC, y en efecto ZFC+I es capaz de concederlo independientemente de si es consistente o no. Así pues, indudablemente la existencia de estos cardinales grandes cumple con *ii)*.

En cuanto al requisito promovido por *iii)*, éste sugiere el establecimiento de conexiones fuertes entre ZFC y otras teorías matemáticas que sean compatibles con los métodos de la primera para la resolución de ciertos problemas relacionados con ella y que, a la larga, precisen de mejor manera la naturaleza de las entidades conjuntistas y su comportamiento.[294] La consideración de este criterio principalmente facilita la justificación para utilizar los criterios externos señalados arriba, por lo que aquél forja un vínculo indirecto con estos últimos. De esta manera, puede señalarse sin profundizar demasiado en ello que este criterio inicialmente también se verifica por los cardinales en cuestión. Por poner un ejemplo: la existencia de estos cardinales fomentaría la conexión entre la teoría de conjuntos y la teoría de categorías. Varias categorías de interés necesitan algo parecido a estas entidades para ser construidas y si la relación entre ambas teorías ha de conservarse lo mejor posible, entonces es claro que la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles es necesaria. Incluso no es difícil encontrar matemáticos y lógicos que sostienen que a partir de la teoría de categorías pueden darse solución

[292]Véase la nota próxima.

[293]La prueba es como sigue: Supóngase que la existencia de cardinales inaccesibles fuertes es consistente con ZFC (en otras palabras: si ZFC es consistente, entonces ZFC+I es consistente). Naturalmente se asume que ZFC es consistente, lo que implica que ZFC+I es consistente. Por su parte, se puede demostrar que en ZFC+I hay un modelo para ZFC, por lo que ZFC es consistente en ZFC+I y, por hipótesis, I es consistente con ZFC, entonces se sigue que ZFC+I es consistente. Pero en ese caso "ZFC+I es consistente" puede demostrarse en ZFC+I, lo cual entra en conflicto con el segundo teorema de incompletud de Gödel. Por tanto, la consistencia de ZFC+I no puede demostrarse. Véase Jech (2006, p. 167).

[294]Véase Gutiérrez (2015, p. 179).

a varios problemas que la teoría de conjuntos es incapaz de resolver por sí misma, la existencia de estos cardinales grandes conservaría, entonces, la compatibilidad entre los resultados de una y otra teoría.[295]

Por su cuenta, las reglas de pulgar que aquí respaldan la consideración de cardinales fuertemente inaccesibles, a su vez, están detrás de la evidencia que favorece la adopción de los ya mencionados criterios internos.[296] La primera de ellas se encuentra íntimamente relacionada con el punto *i)*, se trata de la regla de *maximalización.* Ésta sostiene que es "mejor" admitir nuevos elementos siempre que permitan obtener más estructura, en contraste con el hecho de no admitirlos. En efecto, aumentar la ontología de la metateoría con tales cardinales grandes permite aprehender mediante V_κ (κ es inaccesible fuerte) toda la estructura conjuntista generable por los axiomas de ZFC, esto gracias a que V_κ está cerrado bajo potencias, reemplazos y uniones. Una segunda regla de interés es la de *inexhaustividad.* Ésta se encuentra detrás de la idea de que el universo conjuntista es demasiado complejo como para ser agotado por los axiomas de ZFC y "suponer que cualquier objeto que no pueda ser construido con las operaciones descritas por ZFC no existe es un error" (Gutiérrez, 2015, pp. 219-220). "Por tanto, debe existir un número ordinal después de todos los ordinales generados por reemplazo y conjunto potencia" (Maddy, 1988, p. 502),[297] es decir, un cardinal inaccesible fuerte.[298]

Una tercera regla de pulgar es la de *uniformidad.* Esta regla sostiene que situaciones ocurridas en los niveles previos de la jerarquía deberían reaparecer en niveles posteriores, pues en caso contrario parecería que la estructura ha perdido complejidad en los niveles superiores y más bien uno esperaría que el grado de complejidad fuera en aumento.[299] La existencia de cardinales fuertemente inaccesibles se ve favorecida por esta regla, ya que si se eliminara la restricción de la no-numerabilidad de éstos, ω, al ser un ordinal límite regular fuerte,[300] formaría parte de ellos (de hecho, el conjunto vacío también lo sería). La regla sugiere de este modo que como ω cumple con cierta propiedad, entonces deben existir otros ordinales que también la cumplan más arriba en la jerarquía.[301] De manera semejante, puede señalarse también la

[295]Véase McLarty (2017) y Ernst (2017).

[296]Para mayor información al respecto, véase Gutierrez (2015, pp. 219-220) y Maddy (1988, pp. 501-505).

[297]La traducción es propia.

[298]Esta misma regla puede ser aplicada una y otra vez para justificar la existencia de un segundo cardinal inaccesible después de aquél, y otro más después de este último, y así sucesivamente.

[299]Véase Maddy (1988, p. 502).

[300]En rigor, no es cardinal inaccesible fuerte ya que estos se definen con la restricción de ser mayores que (omega). Véase la sección 1.2.2.

[301]Véase Gutiérrez (2015, p. 220).

regla de *no-unicidad*, la cual promueve la intuición acerca de que no hay razón alguna para atribuirle características únicas a un solo elemento del universo conjuntista, o sea, no hay razones para creer que un elemento es tan especial como para que ningún otro elemento pueda gozar de las mismas cualidades (por supuesto, siempre que éstas no estén determinadas por la extensión de dicho elemento). La aplicación de esta regla a los cardinales en cuestión queda suficientemente mostrada por lo ya dicho respecto de uniformidad.

Finalmente, puede citarse la regla de *reflexión* en favor de la existencia de tales cardinales grandes. Esta regla de pulgar es considerada por muchos como la más poderosa de todas y es precisamente la que está más directamente detrás de la estrategia propuesta en esta sección. Ésta encuentra su inspiración en el hecho de que la estructura conjuntista está inacabada y siempre creciendo, cosa por lo que el universo conjuntista es increíblemente complejo y nunca puede ser totalmente descrito; asimismo, es la regla que está de fondo a los principios de reflexión. La regla propone que cualquier cosa verdadera sobre el universo conjuntista entero debe ser ya verdadero sobre un segmento inicial del universo. En otras palabras, y en relación con los propósitos actuales,

> cualquier intento por describir de manera única a V también aplica a [niveles] R_α [ó V_α] más pequeños que "reflejan" la propiedad atribuida a V. En particular, V está cerrada bajo las operaciones de reemplazo y conjunto potencia, por lo que hay un R_κ [ó V_κ] que está también cerrado. Entonces κ es un inaccesible. De modo similar, V está cerrada bajo reemplazo y conjunto potencia arriba de esta κ, por lo que hay otro inaccesible, y así sucesivamente. (Maddy, 1988, p. 503)[302]

En resumen, si se concede que las exigencias dadas por los criterios internos de los párrafos de arriba son lo suficientemente admisibles para la adopción de ciertas entidades extra, y adicionalmente se concede que las reglas de pulgar detrás de algunos, así como las intuiciones vagas que promueven, son afines con la concepción preteórica de la estructura conjuntista que motiva ZFC, entonces parece perfectamente plausible presumir la existencia de al menos uno de los cardinales fuertemente inaccesibles, aunque sea tan solo a nivel metateórico. De hecho, muchos filósofos de la matemática estarían dispuestos a admitir nuevas entidades (o axiomas) a partir del cumplimiento de unos cuantos criterios; sin embargo, las entidades propuestas no sólo cumplen con algunos, sino que cumplen con todos los internos, los cuales, cabe añadir, son preferidos sobre los externos por un sector de la comunidad filosófica. Además, dado que se tiene buenas razones para sostener la aproximación híbrida de la teoría de conjuntos, la consideración de las reglas de

[302] La traducción es propia.

pulgar puede ser reconocida y utilizarse como factor adicional en apoyo del complemento extra-teórico sugerido en este trabajo. Es más, por sospechoso que parezca el carácter heurístico de las reglas de pulgar aquí aludidas para justificar la adopción de estas nuevas entidades, la práctica actual del matemático y, muy particularmente, del teórico de conjuntos ha mostrado que esto no es tan raro y que, posiblemente, la idea sobre que detrás de la axiomatización se encuentra la "autoevidencia" y la "obviedad", o una señal del *status* epistemológico o metafísico privilegiado de ciertos enunciados y de los cuales se deriva el resto de una teoría, no es del todo adecuada. En realidad, tal como dice Maddy (1988) al inicio de su artículo, la historia ha dejado ver que la metodología para la consideración de ciertos axiomas "tradicionales" (muchos nada obvios) dentro de una teoría tiene gran parecido a la de la formación y probación de hipótesis por parte del científico, muchas veces guiada por criterios pragmáticos y heurísticos que contribuyen al entendimiento filosófico de la naturaleza de la matemática y la búsqueda de nuevos axiomas. (Nótese, como ejemplo de esto, el controvertido axioma de elección.)[303] Así, en concordancia con la filosofía de la práctica matemática que intenta seguir Maddy, quien durante años se dedicó a trabajar con el grupo Cabal para realizar sus estudios en filosofía de la teoría de conjuntos (que, dicho sea de paso, lleva la investigación de punta en el área de teoría de conjuntos), no resulta descabellado, pues, suponer la existencia metateórica de los cardinales grandes en cuestión mediante esta estrategia.

Por último, cabe hacer una observación de cierto interés. Las reflexiones llevadas hasta ahora permiten dar cuenta de un detalle sobre la contribución que la propuesta presentada en esta sección ofrece: el resultado aquí presentado es prácticamente análogo al teorema de cuasi-categoricidad de Zermelo (1930). ¿Qué quiere decir esto?

Como se dijo en secciones anteriores, Zermelo consideraba que el resultado de Skolem no significaba un verdadero problema para ZFC, pues el primero veía en la objeción del segundo una especie de "hombre de paja" producto de la necedad de expresar la teoría de conjuntos en orden uno. Zermelo creía que en realidad ZFC debía ser expresada en segundo orden y admitir urelementos. (Para distinguirla de ZFC, la cual en este trabajo representa la teoría expresada en primer orden y sin urelementos, la teoría de conjuntos aquí introducida se abreviará ZFCU2).[304] Mediante ZFCU2, Zermelo se dispuso a demostrar

[303]De hecho, las razones que normalmente consideraron para aceptar el axioma de elección aquellos que originalmente lo rechazaban, estaban relacionadas directamente con su utilidad para demostrar teoremas en otras áreas de las matemáticas o, más aún, con la necesidad de contar con tal axioma para demostrarlos.

[304]El cambio de orden permite que separación y reemplazo sean expresados por axiomas cuantificados en segundo orden y no por esquemas de axioma; la inclusión de urelementos

un teorema que permitía caracterizar los modelos de dicha teoría como aquellos determinados salvo isomorfismo por la cardinalidad de la totalidad de urelementos y por el tipo-ordinal de todas las "secuencias básicas".[305] Dicho de otro modo, un modelo de ZFCU2 está dado por el ancho de la base y el largo de la altura. Este resultado demostraba la no-categoricidad de la teoría (recuérdese que en segundo orden no se puede apelar a Löwenheim-Skolem para establecer la no-categoricidad de una teoría), sin embargo, contrario a lo que algunos podrían considerar como una desventaja, Zermelo lo veía como una cualidad que "serviría para clarificar la noción de conjunto como un concepto abierto que permitía un desarrollo potencialmente infinito de la teoría" (Gutiérrez, 2011, p. 68), cosa que caracteriza su infinita aplicabilidad. El teorema de Zermelo asimismo demostraba que el tipo-ordinal de la altura de un modelo de ZFCU2 debía ser un ordinal tal, que no esté presente en el dominio del modelo pero que sea el supremo de todas las secuencias básicas representadas en él, en pocas palabras, el tipo-ordinal debía ser un cardinal fuertemente inaccesible.[306] Las razones de esto son básicamente las mismas que las mencionadas en párrafos pasados: el tipo-ordinal debe ser uno que no pueda ser alcanzado por uniones, reemplazos ni potencias.[307]

Cabe señalar que la independencia de la proposición I,[308] impide tener certeza de la existencia de estas entidades. Su no-existencia implica la carencia de modelos para ZFCU2; su existencia, la presencia de modelos para la teoría. Por conveniencia, Zermelo asume la existencia de tales cardinales y no se restringe a considerar únicamente uno. Así, el matemático alemán es capaz de formular el conocido teorema de cuasi-categoricidad, el cual afirma algo como lo siguiente: Para cualesquiera dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ de ZFCU2, existe un submodelo $\mathfrak{A}'$ y $\mathfrak{B}'$ de cada uno, respectivamente, tales que $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{B}'$. Un corolario muy importante de este teorema es la existencia de un modelo mínimo $\mathfrak{M}$, cuya base tiene cardinalidad uno (posiblemente el vacío sea tal base) y cuyo tipo-ordinal es el primer cardinal inaccesible fuerte (el menor de todos), tal que es siempre isomorfo a un submodelo generado por otro modelo cualquiera de ZFCU2.[309]

¿Por qué es este resultado de Zermelo análogo al obtenido como conse-

amplía la base de la estructura conjuntista: en lugar de tratarse de un elemento mínimo (el vacío), ahora se trata de una base con minimales (cada urelemento).

[305]Las secuencias básicas son análogos a los ordinales de von Neumann con la diferencia de que se construyen a partir de urelementos y no únicamente desde el vacío.

[306]Se asume que la teoría contiene el axioma de infinito, de otro modo el tipo-ordinal podría ser ω mismo.

[307]Ver Gutiérrez (2011, pp. 67-69).

[308]Recuérdese que abrevia la proposición "hay a lo menos un cardinal inaccesible fuerte".

[309]Ver Gutiérrez (2011, pp. 75-76).

cuencia de la "alternativa fuertemente inaccesible"? Bien, pues la analogía con el resultado de Zermelo surge de considerar la cardinalidad de la base del modelo igual a uno y tal que ese elemento mínimo es $\emptyset$. El tipo-ordinal de la altura se conserva como antes, es decir, el supremo es igual al primer cardinal inaccesible. (Nótese que ahora la teoría en cuestión es ZFC y no ZFCU2.) Se afirmó que por conveniencia Zermelo admitió la existencia de más de un cardinal inaccesible fuerte, en cambio, en párrafos anteriores se optó por justificar *via* criterios internos y reglas de pulgar la existencia de al menos uno de ellos (posiblemente más de uno) en la metateoría de ZFC. Dadas estas diferencias, es posible afirmar la siguiente equivalencia al teorema de cuasi-categoricidad, ahora para ZFC: Para cualesquiera dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, o bien $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, o bien una es isomorfa con un segmento inicial de la otra. Por si fuera poco, un corolario análogo al mencionado anteriormente también puede derivarse: Existe un modelo mínimo $\mathfrak{N}$[310] isomorfo a un submodelo generado por otro modelo cualquiera de ZFC. Es más, ¡el modelo mínimo de ZFCU2 ($\mathfrak{M}$) y el modelo mínimo de ZFC ($\mathfrak{N}$) son isomorfos![311]

Ahora, si bien es relativamente conveniente admitir más de un cardinal fuertemente inaccesible, la alternativa propuesta previamente no se comprometía explícitamente con conceder la existencia de más de uno, ¿qué consecuencias se desprenden de considerar tan solo uno? Como ya se ha dicho en reiteradas ocasiones, por el carácter máximamente comprensivo usualmente atribuido a la teoría de conjuntos, es común suponer que ésta debe promover la reconstrucción de cualquier teoría de la matemática clásica y que, por ende, en su afán por recuperar cualquier estructura matemática posible, sea razonable admitir que la estructura misma de la teoría de conjuntos no esté completamente determinada o esté inacabada (lo que motiva su desarrollo continuo), y sea no-categórica. De esta forma, la no-categoricidad que este teorema implica y refleja uno de los objetivos intrínsecos de la teoría de conjuntos: la representación de la mayor cantidad de estructuras matemáticas mediante sus objetos y su estructura. Es a través del teorema de Zermelo, y su equivalente dado por la alternativa presentada en este apartado, que uno puede dividir la estructura de la teoría de conjuntos en estratos bien definidos, de modo que el tamaño de cualquier modelo debe ser isomorfo a uno de aquéllos indexado por un cardinal fuertemente inaccesible. Es precisamente la clase de estos modelos indexados por dichos cardinales grandes los que conforman la clase de modelos estándar solicitados por la aproximación híbrida (optimizada o refinada) de la teoría de conjuntos introducida en esta sección. Pero la comprensibilidad máxima tan característica de la teoría de conjuntos, entonces, parece implicar la imposibilidad para determinar o fijar

[310]Por la construcción de los modelos en ZFC, inmediatamente la base cumple con tener cardinalidad uno y ser el vacío.

[311]Véase Gutiérrez (2011, p. 77).

un único tamaño para la altura del modelo, ya que al fijar el tamaño a un cardinal inaccesible fuerte, llámese λ, se limita el poder de ZFC (o ZFCU2 si también se especifica la cardinalidad de la base) para representar teorías, en particular, mediante ese modelo de tamaño λ no podrían modelarse teorías no-algebraicas[312] tal que el dominio de su modelo pretendido sea mayor que λ. Con todo, cabe señalar que la determinación del tamaño de la altura del modelo implicaría la $\lambda-$categoricidad de la teoría. ¿Esto quiere decir, entonces, que forzosamente debe existir más de un cardinal fuertemente inaccesible? En realidad, no. Aún hay una opción de acuerdo con la cual basta nada más sostener la existencia del primer inaccesible fuerte y acotar la jerarquía a la manera requerida por la "alternativa fuertemente inaccesible": La mayoría de la matemática clásica se define en los niveles más inferiores del universo de von Neumann, es decir el valor de verdad de prácticamente todas las oraciones de la matemática está decidido ya en los primeros niveles de la jerarquía acumulativa (independientemente de si puede determinarse dicho valor);[313] tal es el caso de las teorías no-algebraicas tradicionales como la aritmética, el análisis real, la geometría euclidiana. Dicho de otro modo,

> La mayoría de las matemáticas se pueden reconstruir y analizar en el modelo mínimo de la teoría de conjuntos, es decir, en el modelo dado por el nivel indexado por el primer cardinal fuertemente inaccesible. Así, la reconstrucción de dichas teorías es la misma en todos los modelos posibles de la teoría de conjuntos, pues se realiza en la parte que es común a todos. (Gutiérrez, 2011, p. 104)

Es así, pues, que la existencia de un único cardinal fuertemente inaccesible es suficiente para generar un modelo de ZFC apropiado para la reconstrucción de las teorías no-algebraicas más predilectas, a saber, las que conforman la matemática clásica, y conservando su estructura pretendida. Asimismo, se garantiza que cualquier fórmula expresable en el lenguaje de primer orden para la teoría de conjuntos tiene un valor de verdad *determinado*, aunque no sea *determinable* epistémicamente. En este caso, la clase de modelos refinados estándar será unitaria, esto es, ZFC será $\kappa-$categórica pues todos los modelos de cardinalidad κ serán isomorfos. No obstante, el lector familiarizado con los diferentes resultados metateóricos de la lógica de orden uno probablemente en un principio se sobresalte por tal afirmación, pues un corolario del metateorema de Los-Vaught[314] implicaría que si ZFC es $\kappa-$categórica,

[312]El caso de las teorías algebraicas no se considera con seriedad en este caso porque cualquier modelo que satisfaga los axiomas de tales teorías es estándar (o no-estandar). Realmente en estos casos, como se sabe, los términos "estándar" y "no-estándar" no tienen mucho sentido.

[313]Las proposiciones indecidibles de la teoría también tendrán un valor de verdad, aunque tampoco pueda determinarse.

[314]Este teorema afirma que si T es una teoría $\kappa-$categórica para algún cardinal infinito

entonces ZFC es completa (por *modus ponens*, ZFC es completa). Tal lector se sentiría incómodo en un principio por el resultado, pues estima que ZFC no es completa y que puede apelar a la hipótesis del continuo o a cualquier otra proposición independiente de la teoría para respaldarse. Sin embargo, de nuevo debe recalcarse que la $\kappa-$categoricidad a que se alude no se establece a partir de las propiedades de la teoría, únicamente se consigue en virtud de la existencia extra-teórica de un único cardinal fuertemente inaccesible: ZFC solamente será $\kappa-$categórica en tanto que a nivel metateórico su semántica esté dada por una teoría de modelos que admita una estructura enriquecida de cardinalidad inaccesible y que, en última instancia, asigna a cada fórmula de primer orden un valor de verdad específico. Es otras palabras, sólo hay algo como la $\kappa-$categoricidad una vez que se ha establecido que los modelos a considerar son los que acepta la concepción hibrida enriquecida, pero aún la teoría cuenta con otros modelos no isomorfos (aunque no son considerados como relevantes desde la posición asumida). Es únicamente en este sentido que la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel más axioma de elección será $\kappa-$categórica, pero será completa a nivel sintáctico (aunque tenga como consecuencias semánticas más oraciones de las que se pueden derivar).

κ, entonces T es completa. Para la prueba de este teorema, véase Enderton (2004, p. 226).

CONCLUSIÓN

El análisis desarrollado al principio de la segunda parte de este trabajo permitió identificar los factores históricos que motivaron la predilección tradicional por la lógica clásica de primer orden. Sin embargo, pudo observarse que esta tendencia a su vez está justificada de alguna forma en virtud de ciertas cualidades metateóricas deseables de algunos de sus sistemas formales deductivos respecto de la semántica modelo-teórica, como son: su simultánea correctud, completud, compacidad, efectividad, así como una adecuada capacidad expresiva de sus lenguajes. Asimismo, pudieron apreciarse las razones que facilitaron el empleo de la lógica de primer orden para expresar la teoría de conjuntos y la importancia detrás del estudio de esta última con base en su papel como fundamento para la matemática, en el desarrollo de conceptos y técnicas de fácil aplicabilidad en diferentes áreas, y en la posibilidad que ofrece para realizar estudios metamatemáticos.

Una vez que se introdujo el principal objeto de estudio en este trabajo, a saber, el teorema de Löwenheim-Skolem, el examen de este resultado dentro de la teoría de modelos de la teoría de conjuntos permitió dar cuenta de que las dificultades que éste implica no surgen a nivel formal, sino que la controversia y el desconcierto viene con la reflexión e interpretación filosófica sobre este resultado. Al comienzo, el análisis de las implicaciones filosóficas del teorema naturalmente sugirió la pérdida de la categoricidad de ZFC que, como se observó, quiere decir que la teoría es incapaz de distinguir formalmente lo que sí puede informalmente, es decir, es incapaz de rescatar y describir todos los elementos intuitivos que se le adscriben a la concepción iterativa de conjunto. Adicionalmente, se mencionó que la no-categoricidad surge en el momento que Löwenheim-Skolem suscita la existencia de múltiples modelos, muchos de los cuales resultan ser no-estándar.

Lo anterior llevo a considerar la división taxonómica entre teorías algebraicas y no-algebraicas, y se examinó la relación que en principio parece existir entre éstas y la categoricidad: el criterio de categoricidad se levantaba como la manera formal (con el empleo de la teoría de modelos) para determinar la no-algebraicidad de las teorías. No obstante, se sostuvo que, aunque difícilmente puede establecerse de manera formal, la práctica en las diferentes áreas de la matemática apunta a que la distinción entre teorías algebraicas y no-algebraicas existe. Después, el análisis de diversos factores en favor y en contra de tales consideraciones proporcionó elementos para reconocer que la aproximación a la teoría de conjuntos desde una y otra no es del todo satisfactoria, es por ello que se propuso una consideración adicional intermedia, que aquí se llamó "híbrida". Con el fin de establecer la supremacía de esta aproximación sobre las demás, se mostró de qué manera recoge las ventajas de las otras y cómo es que supera algunas dificultades planteadas por Klenk (1976) acerca de la relación entre la matemática formal, informal y la teoría de conjuntos, que las otras dos son incapaces de enfrentar; asimismo, pudo apreciarse el modo en que la consideración híbrida es capaz de ofrecer soluciones más satisfactorias al par de paradojas presentadas en este trabajo. Tras completar el examen de tal aproximación, en el presente no se dudó reconocer su superioridad ni manifestar su preferencia sobre las demás.

Como se sabe, fue desde la aproximación híbrida que se intentaron resolver los problemas suscitados por Löwenheim-Skolem. En particular, desde ella se ofrecieron criterios lo suficientemente plausibles para delimitar modelos estándar, a saber, como aquellos donde los objetos del dominio de discurso son efectivamente conjuntos y la relación $\in$ se comporta como la pertenencia.

Eventualmente, el análisis de las implicaciones del teorema de Löwenheim-Skolem llevó a la reflexión en torno de dos paradojas auténticamente filosóficas que surgían de este resultado: la famosa paradoja de Skolem y la llamada paradoja de Orayen. En relación con la primera, se señaló que Skolem integró el resultado en defensa de su interés filosófico personal contra la capacidad de ZFC para proporcionar un genuino fundamento a la matemática clásica. El análisis de este resultado aquí fue prácticamente inevitable. No obstante, por muy interesante que sea el resultado por sí mismo, la paradoja de Skolem, que surge naturalmente de considerar el teorema de Cantor (en realidad de uno de sus corolarios) y el teorema de Löwenheim-Skolem (más precisamente de su versión descendente), adquiere su verdadera importancia de la interpretación y reflexión crítica alrededor de ella, particularmente la explicación y solución de Skolem a su propio resultado muestra ciertas características de los sistemas formales y su interpretación. En concreto, hace patente una suerte de anomalía, a saber, la relativización de ciertas nociones conjuntistas fundamentales para ZFC, especialmente la cardinalidad se vuelve algo relativo. Tal relativización significó en este trabajo una de las implicaciones filosóficas más sobresalientes del teorema de Löwenheim-Skolem; más aún, es esta consecuencia la que da sentido a lo que se dijo antes respecto de la incapacidad de ZFC para distinguir formalmente lo que puede distinguir intuitivamente.

Sin embargo, las consecuencias que se desprendieron del análisis no se detuvieron ahí, sino que también pusieron de manifiesto de qué manera esta relativización se propaga a lo largo de toda la teoría: Uno ingenuamente podría creer que la existencia de un modelo de los axiomas de ZFC bastaría para garantizar la recuperación adecuada de cualquier noción conjuntista relevante, pero, como se apreció en la sección 2.2.1.1., cada modelo (no lo suficientemente estándar)[315] generado por Löwenheim-Skolem "malinterpreta" las nociones cardinales de la misma manera que malinterpreta ciertos axiomas de ZFC, específicamente los axiomas de potencia, separación, reemplazo y regularidad. La relativización de estas nociones básicas para la teoría de conjuntos emergió como un obstáculo a superar por la aproximación híbrida y motivó, junto con la paradoja de Orayen, la búsqueda de una estrategia para rescatar dichas nociones de interés para el teórico-conjuntista.

Por otro lado, aunque la relación entre la paradoja de Orayen y el teorema de Löwenheim-Skolem no es quizá tan evidente como la que existe entre éste y la de Skolem, el problema identificado por Orayen y su consideración en este trabajo fue crucial para la consolidación de la aproximación híbrida: la inquietud filosófica del lógico argentino acerca de la teoría de modelos de la teoría de conjuntos significa un problema al que necesariamente debe ofrecer respuesta el partidario de dicha aproximación si es que ha de tomarse en serio; asimismo, las reflexiones críticas que el problema de Orayen despertó sobre la comunidad lógica y filosófica (en este trabajo principalmente las de Gómez-Torrente y Amor) han contribuido al esclarecimiento del estudio de la teoría de modelos. Especialmente la crítica de Amor permite dar cuenta de una serie de errores en el razonamiento del argentino, como el que lo dirige a proponer la inclusión del enunciado que afirma la existencia del conjunto de todos los conjuntos dentro ZFC, o el que lo lleva a una comprensión inadecuada de la interpretación del cuantificador universal, o también el que lo hace considerar un único modelo estándar. Esto último ejemplifica el riesgo que se corre al hacer caso omiso de la múltiple generación de modelos como consecuencia del resultado de Löwenheim-Skolem. No obstante, otra de las contribuciones de la paradoja de Orayen en este trabajo fue poner de manifiesto, como dice Rayo, la idea de que para hacer semántica se requiere un lenguaje de mayor riqueza expresiva, lógica, pero también ontológica.

Siguiendo esta línea, la última sección se dedicó justamente al desarrollo de una alternativa para recuperar todas las nociones de relevancia para la teoría de conjuntos desde la aproximación híbrida. Se sostiene que esta al-

[315]Pues como se vio en la sección final, sólo los modelos estándar optimizados ahí introducidos son capaces de interpretar "correctamente" tanto los axiomas como las nociones cardinales.

ternativa depende en gran medida de las peculiaridades de tal aproximación. De modo más puntual: como se dijo en la sección 2.2.1., desde este enfoque no cualquier modelo va a parecer natural ni tampoco hay una concepción intuitiva tan clara de conjunto. Esta vaguedad se debe, entre otras cosas, a que uno de los propósitos de la teoría formal de ZFC es establecer implícitamente una definición de conjunto, pues esto permite caracterizar las nociones conjuntistas y descubrir por medios puramente lógicos y matemáticos tanto las propiedades que poseen estos objetos abstractos, como la estructura donde habitan y las relaciones entre ellos. Otra razón de esta falta de claridad se halla en el hecho de que la estructura de la teoría está inacabada "por arriba". Esta cuestión refleja una de las cualidades más valoradas por Zermelo respecto de ZFC, a saber, la posibilidad de representar mediante tal teoría, sus objetos y su estructura la mayor cantidad posible de estructuras matemáticas. De manera destacable, la aproximación híbrida a ZFC acepta esta falta de precisión y no le exige una claridad absoluta para ser interpretada, en su lugar se conforma con una noción intuitiva suficientemente adecuada (pero no acabada o definitiva) de conjunto, así como de la jerarquía acumulativa que sugiera una idea asimilable (provisional si se quiere) e informativa de la estructura conjuntista, que motive inicialmente el desarrollo de la teoría. A su vez, el enfoque híbrido posibilita el incremento y mejoramiento de la comprensión de los conceptos de ZFC en la medida que los procedimientos formales van teniendo lugar y se le asocian a los símbolos pertinentes conceptos conjuntistas intuitivos suficientemente adecuados: conforme se reinterpretan y renuevan continuamente los símbolos del lenguaje con conceptos intuitivos cada vez más refinados, el entendimiento sobre los conceptos reflejados por la teoría de ZFC aumenta. Es en este sentido que se afirma la creatividad de la práctica formal.

Ahora bien, es gracias a esta flexibilidad de la consideración híbrida que puede promoverse la incipiente distinción entre modelos estándar y no-estándar propuesta por Amor (2008), es decir, la reiterada cinco párrafos atrás. Sin embargo, en este trabajo se sostiene que dicha distinción no basta para caracterizar satisfactoriamente los modelos estándar si se desean recuperar cabalmente (o por lo menos de manera más completa) las nociones conjuntistas. Es por ello que se propuso un criterio más fuerte que le exigiera a la caracterización de Amor que, además de que los modelos estándar tuvieran como objetos en sus dominios conjuntos puros y la pertenencia fuera la pertenencia, sus modelos fueran transitivos y recuperaran de manera un tanto absoluta las nociones conjuntistas básicas y relativizadas por Löwenheim-Skolem (en especial que rescataran los reemplazos, las potencias, la buena-fundación, y los conceptos cardinales). Como se pudo apreciar, la primera y segunda condiciones son posibles por la aproximación híbrida (la segunda particularmente está facilitada a su vez por el axioma de elección); mientras que la tercera fue facilitada por la alternativa introducida en la sección 2.2.1.3. Esta alternativa consistió en determinar un modelo transitivo de cardinalidad fuertemente inaccesible κ que representara la jerarquía acumulativa hasta un nivel V_κ y que restringiera la estructura expresada por la teoría de ZFC al mínimo nivel necesario para capturar todas las nociones conjuntistas básicas. El interés por tal cardinalidad inaccesible del modelo radica en que el universo de von Neumann hasta un nivel indexado por un cardinal inaccesible fuerte está cerrado bajo potencias, reemplazos y uniones.

La cuestión es que la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles es indecidible dentro de ZFC (y que la mayor parte de la comunidad matemática la acepte no parece ser una razón suficiente para apoyarla), no obstante, en este trabajo se sostuvo, con base en ciertos criterios de carácter filosófico, que suponer la existencia a lo menos uno de ellos en la metateoría está razonablemente justificado. (El motivo de restringir la existencia de estos cardinales grandes fuera de la teoría se debe a que al incluirla dentro no podría escapar de Löwenheim-Skolem.) Para respaldar el supuesto, se adujo esencialmente a criterios internos (*i. e.*, aquellos cuya evidencia proviene del concepto intuitivo de los objetos conjuntistas que pretenden ser recuperados y de la naturaleza del universo acumulativo donde habitan, así como de su comportamiento) y a las llamadas "reglas de pulgar" (en particular, la de maximalización, inexhaustividad, uniformidad, no-unicidad y reflexión). En la misma sección 2.2.1.3. se mostró de qué forma estos requisitos pueden ser satisfechos y que, por tanto, es suficientemente razonable suponer su existencia metateórica.

En cuanto al asunto de recuperar todas las nociones conjuntistas básicas, tanto las no-relativizadas como las relativizadas, se observó que dada la suposición de la transitividad del modelo (esto por conveniencia y porque modelos así reúnen características que uno esperaría poseyera una estructura adecuada para la teoría de conjuntos), se afirma que las primeras pueden ser rescatadas en tanto que son expresadas mediante fórmulas absolutas (*i. e.*, aquellas que preservan verdad dentro y fuera de una teoría) y que en el caso de los modelos transitivos coinciden con las Δ_0-fórmulas, pues la restricción del universo de von Neumann a un modelo particular es lo suficientemente parecido al intuitivo como para conservar el valor de verdad de la fórmula en estos casos. (Entre las nociones que se pueden recuperar por medio del empleo de Δ_0-fórmulas está la de par, par ordenado, unión, producto, relación, función, ordinal, ordinal límite, y otras más.) Por su parte, en la medida que se sostiene la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles en la metateoría, y que dentro de ésta se construye la semántica modelo-teórica, pudo afirmarse la existencia de un modelo de cardinalidad inaccesible fuerte, el cual puede demostrarse es modelo de ZFC y que además implica que los cardinales son realmente cardinales, los cardinales regulares realmente cardinales regulares, etcétera. Adicionalmente, en este trabajo se presentó de qué forma a su vez se recupera potencia, reemplazo, separación y regularidad. En suma, mediante la propuesta introducida en este trabajo efectivamente pueden recuperarse *absolutamente* las nociones elementales de interés para la teoría de conjuntos, incluidas las relativizadas por la no-categoricidad de ZFC y a partir del teorema de Löwenheim-Skolem.

Por último, se sostiene que tanto la alternativa de los párrafos anteriores como la aproximación híbrida permiten obtener un resultado análogo al de cuasi-categoricidad de Zermelo (1930). El análisis al final de la sección 2.2.1.3. mostró que ciertamente esto es así en el caso que la cardinalidad de la base del modelo de ZFCU2 es igual a uno. Lo anterior sugiere que si se acota la altura del modelo al primer cardinal inaccesible, es decir, al modelo mínimo, entonces se garantiza que toda oración de la matemática clásica tiene un valor de verdad determinado (aunque no sea accesible epistémicamente el valor en todos los casos), ya que estos se definen en los estratos inferiores de la jerarquía acumulativa.

Por lo tanto, como el presente análisis ha permitido observar, la alternativa propuesta es suficiente para generar un modelo de ZFC apropiado para la reconstrucción de las teorías de la matemática clásica conservando su estructura pretendida y obtener algo parecido a la $\kappa-$categoricidad. Al superar el desafío impuesto por la paradoja de Skolem mediante la estrategia antes mencionada y recuperar todas las nociones conjuntistas básicas y relevantes para el estudio de la teoría de conjuntos, la consideración híbrida ha podido ofrecer elementos significativos para justificar el estudio de ZFC en primer orden y obtener ciertos resultados importantes sin la necesidad de aumentar de orden. La ventaja de todo esto es que permite continuar el estudio de ZFC de manera más segura y confiada al conservar todas las propiedades deseables que poseen los sistemas de orden uno descritas en la sección 2.1., lo cual, sobra decir, no es posible con una teoría de orden dos. Parece, pues, que efectivamente el estudio llevado a cabo en este trabajo ha confirmado que, más que a nivel formal, la importancia del teorema de Löwenheim-Skolem y sus implicaciones radica principalmente en su interpretación y en la reflexión filosófica que origina. El título de este trabajo adelantaba que únicamente se abordarían algunas de estas implicaciones, pero la realidad es que aún queda abierto un horizonte lleno de posibilidades, ¿cuántas reflexiones no restarán aún por hacerse más allá del horizonte antes de ser agotado todo lo que el teorema de Löwenheim-Skolem tiene para ofrecer?

BIBLIOGRAFÍA

Aliseda, A. (2008). Sobre la parapraxis de Orayen. En A. García de la Sienra (ed.), *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* (pp. 49-58). México, UNAM: Instituto de Investigaciones Filosóficas.

———. (2004). Reseña sobre La paradoja de Orayen. En *Dianoia 49*(52), pp. 165-171.

Amor, J. A. (2008). La teoría de modelos de la teoría de conjuntos: Un concepto delicado. En A. García de la Sienra (ed.), *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* (pp. 79-91). México, UNAM: Instituto de Investigaciones Filosóficas.

———, Campero, G. y Miranda F. E. (2010). *Teoría de conjuntos. Curso intermedio.* México, UNAM: Prensas de Ciencias.

Arsenijevic, M. (2012). The Philosophical Impact of the Löweheim-Skolem Theorem. En M. Trobok, N. Miscevic y B. Zarnic (eds.), *Between Logic and Reality: Modeling Inference, Action and Understanding* (pp. 59-81). Nueva York, EUA: Springer.

Bagaria, J. (2019). Set Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/set-theory/>

Bays, T. (2014). Skolem's Paradox. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2014/entries/paradox-skolem/>

Beall, J., Restall, G. y Sagi, G. (2019). Logical Consequence. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/logical-consequence/>

Boolos, G. (1971). The Iterative Conception of Set. En *The Journal of Philosophy 68*(8), pp. 215-231.

Caret, C. R. y Hjortland O. T. (2015). Logical Consequence. En C. R. Caret y O. T. Hjortland (eds.), *Foundations of Logical Consequence* (pp. 3-30). Nueva York, EUA: Oxford University Press. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198715696.001.0001

Copeland, B. J. (2019). Logical Consequence. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/church-turing/>

David, M. (2010). Tarski's Convention T and the Concept of Truth. En D. Patterson (ed.), *New Essays on Tarski and Philosophy* (pp. 133-156). Nueva York, EUA: Oxford University Press. DOI:10.1093/acprof:oso/9780199296309.003.0006.

Enderton, H. B. (2004). *Una introducción matemática a la lógica*. México, UNAM: Instituto de Investigaciones Filosóficas.

———. (1977). *Elements of Set Theory*. Nueva York, EUA: Academic Press.

Ernst, M. (2017). Category Theory and Foundations. En E. Landry (ed.), *Categories for the Working Philosopher* (pp. 69-89). Nueva York, EUA: Oxford University Press.

Ferreirós, J. (2001). The Road to Modern Logic–An Interpretation. En *The Bulletin of Symbolic Logic 7*(4), pp. 441-484.

Frege, G. (2016). Conceptografía. En M. M. Valdés (ed.), *Escritos sobre lógica, semántica y filosofía de las matemáticas* (pp. 39-153). México, UNAM: Instituto de Investigaciones Filosóficas.

García de la Sienra, A. (2008). Introducción. En A. García de la Sienra (ed.), *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* (pp. 7-27). México, UNAM: Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Gómez-Torrente, M. (2003). Notas sobre la paradoja de Orayen. En A. Moretti y G. Hurtado (eds.), *La paradoja de Orayen* (pp. 83-94). Buenos Aires, Argentina: Eudeba.

Gödel, K. (1947). What is Cantor's Continuum Problem?. En *The American Mathematical Monthly 54*(9), pp. 515-525.

Gutiérrez, C. A. (2011). *Estructuralismo, teoría de conjuntos y teoremas de categoricidad* (tesis de maestría). México, UNAM.

———. (2015). *¿Es la hipótesis del continuo una proposición absolutamente indecidible? Un estudio filosófico* (tesis de doctorado). México, UNAM.

Hernández, G. (2015). *Capacidades de los sistemas lógicos formales: El caso de algunos sistemas lógicos clásicos y lógica libre* (tesis de doctorado). Salamanca, España: Universidad de Salamanca.

Hodges, W. (2018a). Tarski's Truth Definitions. The Stanford Encyclopedia of Philosophy, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/tarski-truth/>

———. (2018b). Model Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/model-theory/>

——— y Scanlon, T. (2018). First-order Model Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/modeltheory-fo/>

Hunter, G. (1981). *Metalógica: Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden.* Madrid, España: Paraninfo.

Jech, T. J. (2002). *Set Theory.* Nueva York, EUA: Springer.

Klenk, V. (1976). Intended Models and the Löwenheim-Skolem Theorem. En *Journal of Philosophical Logic 5*, pp. 475-489.

Kunen, K. (1980). *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs.* Amsterdam, Holanda: Elsevier Science Publishers.

Ladyman, J. y Presnell, S. (2016). Does Homotopy Type Theory Provide a Foundation for Mathematics? En *The British Journal for the Philosophy of Science 0*, pp. 1-44.

Linnebo, ∅. Platonism in the Philosophy of Mathematics. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/platonism-mathematics/>

Maddy, P. (1988). Believing the Axioms I. En *The Journal of Symbolic Logic 53*(2), pp. 481-511.

———. (2019). What Do We Want a Foundation to Do?: Comparing Set-Theoretic, Category-Theoretic and Univalent Approaches. Por aparecer en Centrone S., Kant D. y Sarikayana D. (eds.), *Reflections on Foundations: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*: Springer. Descargado de: <https://www.academia.edu/36650692/What_do_we_want_a_4foundation_to_do_Comparing_set-theoretic_category-theoretic_and_univalent_approaches/>

MacFarlane, J. (2017). Logical Constants. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/logical-constants/>

McLarty, C. (2017). The Roles of Set Theories in Mathematics. En E. Landry (ed.), *Categories for the Working Philosopher* (pp. 1-17). Nueva York, EUA: Oxford University Press.

Mendelson, E. (1997). *Introduction to Mathematical Logic*. Londres, Inglaterra: Chapman & Hall.

Orayen, R. (2003). Una paradoja en la semántica de la teoría de conjuntos. En A. Moretti y G. Hurtado (eds.), *La paradoja de Orayen* (pp. 35-59). Buenos Aires, Argentina: Eudeba.

Rayo, A. (2008). Nota crítica sobre la paradoja de Orayen. En A. García de la Sienra (ed.), *Reflexiones sobre la paradoja de Orayen* (pp. 29-47). México, UNAM: Instituto de Investigaciones Filosóficas.

Resnik, M. D. (1966). On Skolem's Paradox. En *The Journal of Philosophy 63*(15), pp. 425-438. DOI: 10.2307/2024063

———. (1969). More on Skolem's Paradox. En *Noûs 3*(2), pp. 185-196.

Shapiro, S. (2003). *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*. Nueva York, EUA: Oxford University Press. DOI: 10.1093/0198250290.001.0001

———. (2009). Philosophy of Mathematics and Its Logic: Introduction. En S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (pp. 3-28). Nueva York, EUA: Oxford University Press. DOI: 10.1093/oxfordhb/9780195325928.003.0001

——— y Kouri Kissel, T. (2018). Classical Logic. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/logic-classical/>

Thomas, W. J. (1968). Platonism and the Skolem Paradox. En *Analysis 28*(6), pp. 193-196. DOI: 10.2307/3327733

———. (1971). On Behalf of the Skolemite. En *Analysis 31*(6), pp. 177-186. DOI: 10.2307/3327755

Tsementzis, D. y Halvorson, H. (2018). Foundations and Philosophy. En *Philosophers' Imprint 18*.

Weston, T. S. (1976). Kreisel, the Continuum Hypothesis and Second Order Set Theory. En *Journal of Philosophical Logic 5*, pp. 281-298.

———. (1977). The Continuum Hypothesis is Independent of Second-Order ZF. En *Notre Dame Journal of Formal Logic 18*(3), pp. 499-503.

Zermelo, E. (1930). On Boundary Numbers and Domains of Sets: New Investigations in the Foundations of Set Theory. En H. Ebbinhaus, C. G. Fraser y A. Kanamori (eds.), *Ernst Zermelo: Collected Works* (2010, pp. 401-430). Berlín, Alemania: Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-79384-7