UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

La compactación de Čech-Stone de los números reales.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ ADRIÁN GALLARDO QUIROZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., MAYO DE 2019

RESUMEN

Cuando hablamos de la compactación de Čech-Stone de ciertos espacios particulares, probablemente una de las más estudiadas sea la de los números naturales (con la topología discreta). Puede ser que una de las razones de que esto suceda es que la compactación de Čech-Stone de los números naturales puede estudiarse mediante dos herramientas: Topología y Álgebra.

Caso contrario sucede con la compactación de Čech-Stone de la recta real. Parece ser que no ha atraído la atención que merece y el avance en su estudio no es tan significativo. Es por eso, que este trabajo pretende ser un acercamiento a la compactación de Čech-Stone de $\mathbb{R}$.

La tesis está dividida en tres capítulos. En el primer capítulo estableceremos las definiciones y resultados que necesitaremos a lo largo de la tesis. Daremos una introducción a la construcción de la compactación de Čech-Stone de un espacio X de Tychonoff, así como de las propiedades de la misma. Desarrollaremos la teoría sobre u-límites que será necesaria en el capítulo tres. Por último, enunciaremos algunos resultados sobre continuos que serán útiles en el capítulo 2.

En el capítulo dos trabajaremos con la recta real y con el espacio $\mathbb{H} = [0, \infty)$. Uno de los resultados principales de este capítulo es que el residuo de $\beta\mathbb{R}$ se puede descomponer como la suma topológica de dos copias del residuo de $\mathbb{H}$. Es por eso que nos enfocamos en estudiar el residuo de $\mathbb{H}$. Probamos que el vacío y $\beta\mathbb{H} \setminus \mathbb{H}$ son los únicos subconjuntos nulos de $\beta\mathbb{H} \setminus \mathbb{H}$ que son conexos. Definimos una clase especial de subconjuntos abiertos de $\beta\mathbb{H} \setminus \mathbb{H}$, los abiertos estándar. Para finalizar el capítulo, probaremos que $\mathbb{H}^*$ es un espacio indescomponible, es decir, $\mathbb{H}^*$ no puede ser expresado como la unión de dos de sus subcontinuos propios.

Uno de los avances más recientes en el estudio de $\beta\mathbb{H} \setminus \mathbb{H}$ trata acerca de el número de subcontinuos de $\beta\mathbb{H} \setminus \mathbb{H}$. Si suponemos que la Hipótesis del Continuo es cierta como si no, la máxima cardinalidad de una familia de subcontinuos de $\beta\mathbb{H} \setminus \mathbb{H}$ no homeomorfos entre sí es $2^{\mathfrak{c}}$. El propósito del tercer capítulo es desarrollar las herramientas necesarias

para probar dichos resultados. Debido a la extensión del trabajo, no fue posible incluir las demostraciones estos resultados. En este capítulo estudiaremos la compactación de Čech-Stone de la suma topológica de continuos, en particular, la compactación de Čech-Stone del espacio $\mathbb{M} = [0,1] \times \omega$. Trabajaremos con una clase muy especial de sucesiones en $\mathbb{M}$, las sucesiones transversales. Diremos que una sucesión $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{M}$ es transversal si $x_n \in [0,1] \times \{n\}$ para cada $n \in \omega$. Dado u un ultrafiltro libre de ω, comprobamos que toda sucesión transversal posee un único u-límite en $\beta\mathbb{M}$. Definimos un orden parcial para el conjunto de todos los u-límites de sucesiones transversales y lo utilizamos para definir otra clase de subcontinuos de $\beta\mathbb{M}$, los llamados estratos.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

En esta primera sección, vamos a establecer la notación que usaremos a lo largo de la tesis.

Los libros de Topología y Teoría de Conjuntos que usaremos como referencia serán [5] y [7], debemos aclarar que en [5], cuando se habla acerca de un espacio topológico compacto también se supone que es un espacio de Hausdorff. En este texto siempre haremos explícitas ambas propiedades del espacio en cuestión, es decir, para nosotros no todos los espacios compactos son de Hausdorff.

Cualquier símbolo que no se encuentre definido explícitamente aquí, deberá ser entendido como en [5] o como en [7].

1.1 Notación

Dados X y Y dos conjuntos, $E \subseteq X$ y una función $f : X \to Y$, convengamos en lo siguiente.

1. Utilizaremos $f \upharpoonright E$ para representar a la restricción de la función f al conjunto E.
2. Si $z \in Y$, entonces la fibra de z bajo f es $f^{-1}\{z\} = \{x \in X : f(x) = z\}$.
3. La imagen de E bajo f es el conjunto $f[E] = \{f(x) : x \in E\}$.

Para cualesquiera dos conjuntos A y B, diremos que A está contenido propiamente en B, y lo denotaremos mediante $A \subsetneq B$, si y sólo si $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

Dado S, un conjunto, emplearemos la notación de abajo.

1. $\mathcal{P}(S)$ será el conjunto potencia de S.
2. $[S]^{<\omega}$ será el conjunto de todos los subconjuntos finitos de S.
3. $[S]^{\omega}$ representará a la colección de todos los subconjuntos infinitos numerables de S.

La letra ω denotará el primer ordinal infinito, esto es, el conjunto de todos los números naturales incluyendo al cero. Para los fines de esta tesis, $\mathbb{R}$ siempre denotará al espacio topológico que resulta de equipar a los números reales con la topología euclideana y $\mathfrak{c}$ representará la cardinalidad de $\mathbb{R}$.

Dado X un espacio topológico, diremos que

1. X es un espacio T_3 si es un espacio regular y de Hausdorff.

2. X es un espacio de Tychonoff si es un espacio completamente regular que también es de Hausdorff.

3. X es un espacio T_4 si es un espacio de Hausdorff que es normal.

Si $E \subseteq X$, entonces $\mathrm{cl}_X E$ e $\mathrm{int}_X E$ (o, si el espacio es claro por el contexto, simplemente $\mathrm{cl}\, E$ e $\mathrm{int}\, E$) van a denotar la cerradura y el interior del conjunto E en X, respectivamente.

Diremos que X es localmente compacto si todo punto de X posee una vecindad compacta. Si X es localmente compacto y de Hausdorff, entonces para cualquier $x \in X$ y cualquier U, abierto en X con $x \in U$, existe V, un abierto en X, de tal suerte que $\mathrm{cl}_X V$ es compacto y $x \in V \subseteq \mathrm{cl}_X V \subseteq U$ (ver [5, Proposition 1.5.5, p. 38]).

Dados X y Y dos espacios topológicos y una función $f : X \to Y$, decimos que f es cerrada si y sólo si para cualquier F, subconjunto cerrado de X, se cumple que $f[F]$ es un subconjunto cerrado de Y.

1.2 Filtros y ultrafiltros

Definición 1.1. Sean X un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Diremos que $\mathcal{A}$ es un anillo de conjuntos en X si cumple que:

1. $\emptyset$ y X son elementos de $\mathcal{A}$.

2. Para cualesquiera E y F elementos de $\mathcal{A}$ se tiene que $E \cup F \in \mathcal{A}$ y $E \cap F \in \mathcal{A}$.

Definición 1.2. Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos en X. Diremos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{A}$-filtro si cumple que:

1. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$.

2. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ y $X \in \mathcal{F}$.

3. Para cualesquiera $E \in \mathcal{F}$ y $F \in \mathcal{A}$ tales que $E \subseteq F$ se tiene que $F \in \mathcal{F}$.

4. Para cualesquiera E y F elementos de $\mathcal{F}$ se tiene que $E \cap F \in \mathcal{F}$.

Además, si $\mathcal{F}$ es un elemento maximal, respecto a la contención, en la colección de todos los $\mathcal{A}$-filtros, entonces diremos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{A}$-ultrafiltro, es decir, si $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{A}$-filtro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Definición 1.3. Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos en X. Diremos que una familia $S \subseteq \mathcal{A}$ es centrada si para cualquier R subconjunto finito y no vacío de S se cumple que $\bigcap R \neq \emptyset$.

Lema 1.4. *Sean X un conjunto y $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos en X. Si $S \subseteq \mathcal{A}$ es una familia centrada no vacía, entonces existe U un $\mathcal{A}$-ultrafiltro de tal manera que $S \subseteq U$.*

Demostración. Para demostrar este resultado utilizaremos el Lema de Zorn. Denotemos por $\mathcal{L}$ a la familia de todos los $\mathcal{A}$-filtros que contienen a S, la cual estará ordenada por la contención directa.

Para probar que $\mathcal{L}$ no es vacía, definimos

$$U(S) = \left\{ E \in \mathcal{A} : \exists R \in [S]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \left(\bigcap R \subseteq E \right) \right\}.$$

Veamos que $U(S)$ es un $\mathcal{A}$-filtro que contiene a S.

Empecemos probando que $\emptyset \notin U(S)$. Sea R un subconjunto finito no vacío de S. Como S es una familia centrada, sabemos que $\bigcap R \neq \emptyset$ y por lo tanto para cada $R \in [S]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ se cumple que $\bigcap R \nsubseteq \emptyset$, es decir, $\emptyset \notin U(S)$.

Para mostrar que $X \in U(S)$, fijemos $D \in S$. De esta forma tenemos que $\{D\}$ es un subconjunto finito de S y $\bigcap \{D\} = D \subseteq X$.

Sean $E \in U(S)$ y $F \in \mathcal{A}$ tales que $E \subseteq F$. Como $E \in U(S)$, existe $R \in [S]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\bigcap R \subseteq E$. De esta forma $\bigcap R \subseteq F$ y, por lo tanto, $F \in U(S)$.

Sean E y F elementos de $U(S)$ y $R_E, R_F \in [S]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ de tal forma que $\bigcap R_E \subseteq E$ y $\bigcap R_F \subseteq F$. Hagamos $R = R_E \cup R_F$. De esta manera R también es un subconjunto finito y no vacío de S. Como $R_E \subseteq R$ y $R_F \subseteq R$, obtenemos que $\bigcap R \subseteq \bigcap R_E$ y $\bigcap R \subseteq \bigcap R_F$. Por lo tanto $\bigcap R \subseteq \bigcap R_E \cap \bigcap R_F \subseteq E \cap F$. Esto muestra que $E \cap F \in U(S)$.

Por último, veamos que $S \subseteq U(S)$. Sea $E \in S$. Como $\{E\}$ es un subconjunto finito de S y $\bigcap\{E\} = E \subseteq E$, tenemos que $E \in U(S)$. Con esto hemos probado que $U(S)$ es un $\mathcal{A}$-filtro que contiene a S.

Sea C una cadena no vacía en $(\mathcal{L}, \subseteq)$ y veamos que está acotada superiormente. Claramente $F \subseteq \bigcup C$ para cada $F \in C$, así que basta demostrar que $\bigcup C \in \mathcal{L}$. Vamos a probar que $\bigcup C$ es un $\mathcal{A}$-filtro que contiene a S.

Notemos que $\emptyset \notin F$ para cada $F \in C$, así que $\emptyset$ no es elemento de $\bigcup C$. Por otra parte, $C \neq \emptyset$ implica que existe $F \in C$ y así, $X \in F \subseteq \bigcup C$.

Sean $E \in \bigcup C$ y $D \in \mathcal{A}$ tales que $E \subseteq D$. De esta forma, existe $U_E \in C$ tal que $E \in U_E$. Como U_E es un $\mathcal{A}$-filtro, obtenemos que $D \in U_E$ y, por lo tanto $D \in \bigcup C$.

Sean E y D elementos de $\bigcup C$. Existen U_E y U_D, elementos de C, tales que $E \in U_E$ y $D \in U_D$. Como $C \subseteq \mathcal{L}$ es una cadena, sabemos que $U_E \subseteq U_D$ ó $U_D \subseteq U_E$ y, por lo tanto, existe $F \in C$ de tal forma que $E, D \in F$. Como F es un $\mathcal{A}$-filtro, $E \cap D \in F \subseteq \bigcup C$.

Por último, vamos a mostrar que $S \subseteq \bigcup C$. Fijemos $F \in C$ y recordemos que $S \subseteq F \subseteq \bigcup C$.

Mediante el Lema de Zorn podemos obtener U, un elemento maximal de la familia $\mathcal{L}$.

□

Proposición 1.5. *Sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos en el conjunto X. Si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{A}$-filtro, los enunciados siguientes son equivalentes.*

1. *$\mathcal{F}$ es un $\mathcal{A}$-ultrafiltro.*
2. *Para cada $D \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$ existe $E \in \mathcal{F}$ con $D \cap E = \emptyset$.*

Demostración. Para mostrar que la negación de (1) es consecuencia de la negación de (2), suponga que existe $D \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$ de tal manera que $D \cap E \neq \emptyset$, cuando $E \in \mathcal{F}$. Luego, $S = \mathcal{F} \cup \{D\}$ es un subconjunto centrado de $\mathcal{A}$ y por el lema previo, hay U, un $\mathcal{A}$-ultrafiltro, con $S \subseteq U$; en particular, $\mathcal{F}$ es un subconjunto propio de U y así, (1) falla.

Sobre la implicación restante: si $\mathcal{F}$ no es un $\mathcal{A}$-ultrafiltro, entonces hay $\mathcal{G}$ y $D \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ de tal modo que $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{A}$-filtro con $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. De esta forma, si $E \in \mathcal{F}$, se sigue que $E \in \mathcal{G}$ y, naturalmente, $D \cap E \neq \emptyset$, esto es, (2) es falso siempre que (1) lo es. $\square$

Lema 1.6. *Sean $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos en el conjunto X y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$-ultrafiltro. Si A, $B \in \mathcal{A}$ son tales que $A \cup B \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$ ó $B \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos que $A \notin \mathcal{F}$. Por la proposición 1.5, existe $E \in \mathcal{F}$ de tal forma que $A \cap E = \emptyset$. Obtenemos que $E \cap (A \cup B) = E \cap B \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{A}$-filtro y $E \cap B \subseteq B$, tenemos que $B \in \mathcal{F}$. $\square$

Definición 1.7. Sea $\mathcal{A}$ un anillo de conjuntos en el conjunto X. Diremos que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{A}$-ultrafiltro libre si y sólo si $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

1.3 La compactación de Čech-Stone

A continuación hablaremos de una construcción de la compactación de Čech-Stone que difiere de la presentada en [5]. Esta construcción se encuentra en [6].

Definición 1.8. Dado X, un espacio topológico, denotaremos mediante $C(X)$ a todas las funciones continuas que tienen como dominio a X y como contradominio a $\mathbb{R}$. De manera similar, denotaremos mediante $C^*(X)$ a todas las funciones continuas y acotadas que tienen como dominio a X y como contradominio a $\mathbb{R}$.

Es importante mencionar que $C(X)$ posee una estructura natural de álgebra vectorial. De manera precisa: si $f, g \in C(X)$ y $r \in \mathbb{R}$, definimos las funciones $(f+g) : X \to \mathbb{R}, (rf) : X \to \mathbb{R}$ y $(fg) : X \to \mathbb{R}$ mediante $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(rf)(x) = r \cdot f(x)$ y $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para cualquier $x \in X$. Observe que $f + g$, rf y fg son funciones continuas.

Definición 1.9. Sean X, un espacio topológico, y $f \in C(X)$. Definimos el conjunto nulo de f como $z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

Supongamos que X es un espacio topológico. Denotaremos a la familia de todos los conjuntos nulos de X mediante $Z(X) = \{z(f) : f \in C(X)\}$.

Mostremos que $Z(X)$ es un anillo de conjuntos en X.

En primer término, el conjunto nulo de la función constante 1 es $\emptyset$, mientras que el conjunto nulo de la constante 0 es X. De este modo, $\emptyset$, $X \in Z(X)$.

Ahora tomemos $E, F \in Z(X)$ y fijemos $f, g \in C(X)$ con $E = z(f)$ y $F = z(g)$. Argumentos rutinarios muestran que $E \cap F = z(f^2 + g^2)$ y $E \cup F = z(fg)$; luego, $E \cap F$, $E \cup F \in Z(X)$.

Lema 1.10. *Sea X un espacio topológico y $f \in C(X)$. Para cualesquiera a, $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se cumple que $f^{-1}[(-\infty, a]]$ y $f^{-1}[[b, \infty)]$ son elementos de $Z(X)$.*

Demostración. Definimos la función $F : X \to \mathbb{R}$ mediante $F(x) = \max\{f(x) - a, 0\}$ para cada $x \in X$. De esta forma, $F \in C(X)$ y $z(F) = f^{-1}[(-\infty, a]]$. Para verificarlo, sea $x \in z(F)$, es decir, $F(x) = 0$. De la definición de F se sigue que $f(x) - a \leqslant 0$. Luego, $f(x) \leqslant a$ y, por lo tanto $x \in f^{-1}[(-\infty, a]]$. Para probar la contención restante, sea $x \in X$ de tal forma que $f(x \in (-\infty, a]$. De esta forma tenemos que $f(x) \leqslant a$. Luego, $f(x) - a \leqslant 0$ y, por lo tanto, $F(x) = 0$.

De manera análoga, podemos comprobar que $f^{-1}[(b, \infty]] \in Z(X)$ definiendo a la función $F : X \to \mathbb{R}$ mediante $F(x) = \min\{f(x) - a, 0\}$. □

Corolario 1.11. *Sea X un espacio topológico y $f \in C(X)$. Para cualesquiera a, $b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se cumple que el complemento de $f^{-1}[(-\infty, a)]$ y de $f^{-1}[(b, \infty)]$ son conjuntos nulos.*

Demostración. Notemos que $X \setminus f^{-1}[(-\infty, a)] = f^{-1}[[a, \infty)]$ y, por el Lema 1.10 tenemos que $X \setminus f^{-1}[(-\infty, a)] \in Z(X)$.

De manera análoga se prueba que $X \setminus f^{-1}[(b, \infty)] \in Z(X)$. □

En aras de simplificar la lectura, usaremos las frases *z-filtro en X* y *z-ultrafiltro en X* (o, simplemente, *z-filtro* y *z-ultrafiltro* si el espacio X es claro por el contexto) en lugar de *$Z(X)$-filtro* y *$Z(X)$-ultrafiltro*, respectivamente.

Definición 1.12. Sea X un espacio topológico. Definimos

$$\beta X = \{p \subseteq Z(X) : p \text{ es un } z\text{-ultrafiltro}\}$$

y, para cada $A \in Z(X)$, hagamos

$$A^{\sim} = \{p \in \beta X : A \notin p\}.$$

Teorema 1.13. *Si X es un espacio de Tychonoff, entonces los enunciados siguientes son ciertos.*

1. *La colección $\{A^{\sim} : A \in Z(X)\}$ es base para alguna topología de βX.*

2. *Al equipar a βX con la topología del inciso previo se obtiene que βX es un espacio de Hausdorff y compacto.*

3. *La función $e : X \to \beta X$ dada por $e(x) = \{E \in Z(X) : x \in E\}$, para cada $x \in X$, es un encaje topológico y $e[X]$ es un subconjunto denso de βX.*

Demostración. Para probar que la familia $\{A^{\sim} : A \in Z(X)\}$ es base para alguna topología de βX, tomemos $p \in \beta X$. Notemos que $\emptyset \notin p$ porque p es un z-filtro. De esta forma $p \in \emptyset^{\sim}$. Dedos A, $B \in Z(X)$. observemos que $(A \cup B)^{\sim} = A^{\sim} \cap B^{\sim}$. En efecto, sea $p \in \beta X$ de tal forma que $p \in A^{\sim} \cap B^{\sim}$. Supongamos que $A \cup B \in p$, por el lema 1.6, tendríamos que $A \in p$ ó $B \in p$. Esto no es posible en vista de que $p \in A^{\sim} \cap B^{\sim}$. Por lo anterior, debe ocurrir que $A \cup B \notin p$ y así, $p \in (A \cup B)^{\sim}$. Esto prueba que $A^{\sim} \cap B^{\sim} \subseteq (A \cup B)^{\sim}$. Para verificar que $(A \cup B)^{\sim} \subseteq A^{\sim} \cap B^{\sim}$ tomemos $q \in (A \cup B)^{\sim}$, luego, $(A \cup B) \notin q$. Observemos que si $A \in q$, entonces $A \cup B \in q$ porque $A \subseteq A \cup B$ y q es un z-filtro. Esto no es posible. Obtenemos la misma contradicción si suponemos que $B \in q$. Por lo tanto $A \notin q$ y $B \notin q$, es decir, $q \in A^{\sim} \cap B^{\sim}$.

Para el inciso (2), comencemos probando que βX es un espacio de Hausdorff. Sean p, $q \in \beta X$ tales que $p \neq q$. Tomemos $A \in p \setminus q$. Por la proposición 1.5, existe $B \in q$ de tal forma que $A \cap B = \emptyset$. Vamos a definir E, $F \in Z(X)$ de tal suerte que $p \in E^{\sim}$, $q \in F^{\sim}$ y $E^{\sim} \cap F^{\sim} = \emptyset$. Sean f, $g \in C(X)$ de tal forma que $A = z(f)$ y $B = z(g)$. Definamos la función $h : X \to \mathbb{R}$ como sigue

$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)},$$

para cada $x \in X$.

Notemos que $h \in C(X)$. Los conjuntos $U = h^{-1}[-\infty, 1/3)$ y $V = h^{-1}(2/3, \infty]$ son abiertos en X y además, $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Hagamos $E = X \setminus U$ y $F = X \setminus V$. Por el corolario 1.11, E y F son elementos de $Z(X)$. Como $E \cap A = \emptyset$, tenemos que $E \notin p$. Concluimos que $p \in E^{\sim}$. De manera análoga, $q \in F^{\sim}$. Por último, observemos que $E^{\sim} \cap F^{\sim} = \emptyset = (E \cup F)^{\sim} = (X \setminus (U \cap F))^{\sim} = X^{\sim} = \emptyset$.

Veamos que βX es un espacio compacto. Sea $S \subseteq Z(X)$ no vacío de tal forma que $\mathcal{F} = \{\beta X \setminus A^{\sim} : A \in S\}$ es una familia centrada. Vamos a probar que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

En primer lugar, veamos que $\{A : A \in S\}$ es una familia centrada. Sea $R \in [S]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Como $\mathcal{F}$ es una familia centrada, $\bigcap\{\beta X \setminus A^{\sim} : A \in R\} \neq \emptyset$. Fijemos q un elemento de $\bigcap\{\beta X \setminus A^{\sim} : A \in R\}$. Si $A \in R$, entonces $q \in \beta X \setminus A \sim$. De esta forma, tenemos que $A \in q$. Como q es un z-filtro y R es finito, tenemos que $\bigcap\{A : A \in R\} \in q$ Recordemos que $\emptyset \notin q$, así que $\bigcap\{A : A \in R\} \neq \emptyset$.

Por el lema 1.4, existe $p \in \beta X$ de tal forma que $\{A : A \in S\} \subseteq p$. Afirmamos que $p \in \mathcal{F}$. Sea $A \in S$. Por lo dicho anteriormente $A \in p$ y, de esta manera $p \in \beta X \setminus A^{\sim}$. Esto demuestra que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. □

Observe que si $x \in X$, entonces $e(x)$ es un z-filtro. En efecto, $\emptyset \notin e(x)$ porque todos los elementos de $e(x)$ tienen como elemento a x y $X \in e(x)$ porque $x \in X \in Z(X)$. Supongamos que $E \in e(x)$ y $F \in Z(X)$ tales que $E \subseteq F$, esto implica que $x \in E \subseteq F$ y de esta forma, $F \in e(X)$. Sean $E, F \in e(x)$, $E \cap F \in Z(X)$ y $x \in E \cap F$. Por lo tanto, $E \cap F \in e(x)$.

Lo dicho previamente se puede reescribir en el lenguaje de compactaciones como sigue.

Definición 1.14. Dado un espacio topológico Y, una compactación para Y es una pareja (h, K) de tal forma que:

1. K es un espacio compacto de Hausdorff y
2. la función $h : Y \to K$ es un encaje topológico con imagen densa (esto es, $h[Y]$ es denso en K).

Así, $(e, \beta X)$ es una compactación de X a la que llamaremos la compactación de Čech-Stone de X.

Dada una compactación (h, K) de un espacio Y, es costumbre identificar a Y con $h[Y]$ y, de hecho, suponer que Y es un subespacio denso de K. En el presente texto seguiremos esta tradición e identificaremos a cada $x \in X$ con $e(x) \in \beta X$.

De este modo, en [6, 4.5, p. 72] y [6, Theorem 4.6, p. 73] se prueba que si X es un espacio de Tychonoff, entonces βX satisface lo siguiente:

Teorema 1.15. *Sea X un espacio de Tychonoff.*

(1) Para cada función continua $f : X \to K$, donde K es un espacio compacto de Hausdorff, existe una única función continua $\beta f : \beta X \to K$ de tal forma que $\beta f \restriction X = f$.

(2) Para cualesquiera $A, B \in Z(X)$ que satisfagan $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $\mathrm{cl}_{\beta X}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(B) = \emptyset$.

Además, en [6, 4.4, p. 72] se puede hallar la demostración del resultado de abajo.

Proposición 1.16. *Si X es un espacio de Tychonoff y $F \in Z(X)$, entonces*

$$\mathrm{cl}_{\beta X} F = \{p \in \beta X : F \in p\}.$$

Definición 1.17. Sea X un espacio de Tychonoff y $E \subseteq X$. Diremos que E está C^*-encajado en X si para cualquier función $f \in C^*(E)$, existe $F \in C^*(X)$ de tal forma que $F \restriction E = f$.

Por ejemplo, si X es un espacio de Tychonoff, se deduce de la propiedad (1) que X está C^*-encajado en βX. Más aún (ver [6, III 4.8, p. 74]), tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.18. *Sea X un espacio de Tychonoff. Si K es una compactación de X y X está C^*-encajado en K, entonces K es equivalente a βX, esto es, existe un homeomorfismo $h : \beta X \to K$ de tal modo que $h(x) = x$, para cualquier $x \in X$.*

Definición 1.19. Sea X un espacio de Tychonoff. Definimos el residuo de Čech-Stone del espacio X como el subespacio $\beta X \setminus X$ de βX y lo denotaremos mediante X^*.

A continuación demostraremos que los elementos del residuo de Čech-Stone son, precisamente, los z-ultrafiltros libres.

Proposición 1.20. *Si X es un espacio de Tychonoff, entonces*

$$X^* = \left\{p \in \beta X : \bigcap p = \emptyset\right\}.$$

Demostración. Sea $p \in \beta X$. Si $x \in \bigcap p$, entonces $e(x)$ es un z-filtro, p es un z-ultrafiltro y $p \subseteq e(x)$. Luego, $p = e(x)$ y, por ende, $p \in X \subseteq \beta X \setminus X^*$.

En la otra dirección: $p \notin X^*$ implica que $p \in X$, es decir, hay $x \in X$ con $p = e(x)$ y, claramente, $x \in \bigcap p$. □

Consideremos ahora el siguiente fortalecimiento de la propiedad (2) enunciada arriba.

(2') Para cualesquiera A y B, subconjuntos cerrados de X, se tiene que

$$\mathrm{cl}_{\beta X}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(B) = \mathrm{cl}_{\beta X}(A \cap B).$$

Teorema 1.21. *Si X es un espacio T_4, entonces la condición (2') es satisfecha.*

Demostración. Como mencionamos previamente, la propiedad (2) es cierta, así que sólo debemos probar que, en presencia de la normalidad del espacio, (2) implica (2'). Para esto, tomemos A y B, subconjuntos cerrados de X.

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces por el Lema de Urysohn, existe una función $f : X \to [0,1]$ de tal forma que $A \subseteq f^{-1}\{0\}$ y $B \subseteq f^{-1}\{1\}$. Como $\{0\}$ y $\{1\}$ son cerrados en $[0,1]$, entonces (ver párrafo que sigue a [6, Theorem 3.1, p. 69]) deducimos que $f^{-1}\{0\}, f^{-1}\{1\} \in Z(X)$. Por la propiedad (2), tenemos que $\mathrm{cl}_{\beta X}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(B) = \emptyset$. Por otro lado, como $A \cap B = \emptyset$, se sigue que $\mathrm{cl}_{\beta X}(A \cap B) = \emptyset$. De esta forma, la igualdad $\mathrm{cl}_{\beta X}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(B) = \mathrm{cl}_{\beta X}(A \cap B)$ es cierta cuando A y B son ajenos.

Ahora, si A y B no son ajenos, la contención $\mathrm{cl}_{\beta X}(A \cap B) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(B)$ siempre es válida. Así que sólo resta probar que $\mathrm{cl}_{\beta X}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(B) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(A \cap B)$. Sean $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(A) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(B)$ y $U \subseteq \beta X$, abierto de tal forma que $p \in U$. Como X es T_4, en particular es T_3, así que existe $V \subseteq \beta X$ abierto de tal forma que $p \in V \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(V) \subseteq U$.

Afirmamos que $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap A)$. Sea $W \subseteq \beta X$, un abierto con $p \in W$. Entonces $V \cap W$ es un subconjunto abierto de βX que tiene a p como elemento. Como $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(A)$, entonces $V \cap W \cap A \neq \emptyset$. De esta manera, la contención $V \cap W \cap A \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap W \cap A$

nos garantiza que $\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap W \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap A)$. De manera análoga se demuestra que $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap B)$.

Al principio de nuestro argumento, probamos que cualesquiera dos subconjuntos ajenos y cerrados en X tienen cerraduras ajenas en βX. Notemos que $\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap B$ y $\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap A$ son cerrados en X. Como $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap A) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap B)$, entonces $(\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap A) \cap (\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap B) \neq \emptyset$, esto es, $\mathrm{cl}_{\beta X}(V) \cap A \cap B$ es un subconjunto no vacío de $U \cap A \cap B$. Por lo tanto, $U \cap A \cap B \neq \emptyset$, y así, $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(A \cap B)$. □

Para este trabajo, nuestro objeto de estudio será la compactación de Čech-Stone de algunos subespacios de $\mathbb{R}$, así que utilizaremos la propiedad (2') en múltiples ocasiones a lo largo de nuestro texto.

Lema 1.22. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces X^* es compacto.*

Demostración. Veamos que X es un subconjunto abierto de βX. Sea $p \in X$. Como X es localmente compacto, existe V, un subconjunto abierto de X, de tal forma que $p \in V$ y $\mathrm{cl}_X V$ es compacto. Sea U un subconjunto abierto de βX de tal forma que $V = U \cap X$.

Dado que βX es un espacio de Hausdorff, $\mathrm{cl}_X V$ es un subconjunto cerrado de βX. Esto implica que $U \cap (\beta X \setminus \mathrm{cl}_X V)$ es un subconjunto abierto de βX. Afirmamos que $U \cap (\beta X \setminus \mathrm{cl}_X V) = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, que $U \cap (\beta X \setminus \mathrm{cl}_X V) \neq \emptyset$. Como X es un subconjunto denso de βX, tenemos que $X \cap U \cap (\beta X \setminus \mathrm{cl}_X V)$ es un conjunto no vacío. De esta forma, tenemos que

$$V = U \cap X \nsubseteq \mathrm{cl}_X V,$$

lo cual es una contradicción. Esto muestra que $U \cap (\beta X \setminus \mathrm{cl}_X V) = \emptyset$.

De lo anterior se sigue que $p \in U \subseteq \mathrm{cl}_X V \subseteq X$. Luego, X es un subconjunto abierto de βX. Como X^* es un subconjunto cerrado de βX, tenemos que X^* es compacto. □

Para nuestro siguiente resultado utilizaremos la proposición 1.18.

Lema 1.23. *Sean X un espacio de Tychonoff y $Y \subseteq X$. Si Y está C^*-encajado en X, entonces $\mathrm{cl}_{\beta X} Y$ es equivalente a βY.*

Demostración. Como $\mathrm{cl}_{\beta X} Y$ es cerrado en βX, tenemos que $\mathrm{cl}_{\beta X} Y$ es un espacio compacto y de Hausdorff. Además, Y es denso en $\mathrm{cl}_{\beta X} Y$. Para probar que Y está C^*-encajado en $\mathrm{cl}_{\beta X} Y$, tomemos $g \in C^*(Y)$ y fijemos $f \in C^*(X)$ de tal modo que $f \restriction Y = g$. Así, existe $M \in \mathbb{R}$ de tal modo que $f : X \to [-M, M]$. Entonces $\beta f : \beta X \to [-M, M]$ y, por ende, si hacemos $F = \beta f \restriction \mathrm{cl}_{\beta X} Y$, se sigue que $F \restriction Y = g$, lo cual finaliza la prueba. □

Dado un espacio de Tychonoff X y un abierto U de X, existe al menos un abierto V de βX de tal suerte que $V \cap X = U$. Ahora, de entre todos los abiertos de βX que satisfacen esta propiedad seleccionaremos uno particular para el resto del trabajo. De manera precisa:

Definición 1.24. Sea X un espacio de Tychonoff. Si U es un subconjunto abierto de X, entonces definimos $\mathrm{Ex}(U) = \beta X \setminus \mathrm{cl}_{\beta X}(X \setminus U)$. A este abierto de βX se le suele llamar la extensión de U.

Mostremos que $\mathrm{Ex}(U)$ es el subconjunto abierto de βX más grande (con respecto a la contención directa) de tal forma que $X \cap \mathrm{Ex}(U) = U$. Para probar que $X \cap \mathrm{Ex}(U) \subseteq U$, veamos que $X \cap \mathrm{Ex}(U) \cap (\beta X \setminus U) = \emptyset$. En efecto,

$$\begin{aligned} X \cap \mathrm{Ex}(U) \cap (\beta X \setminus U) &= X \cap (\beta X \setminus \mathrm{cl}_{\beta X}(X \setminus U)) \cap (\beta X \setminus U) \\ &= (X \setminus U) \cap (\beta X \setminus \mathrm{cl}_{\beta X}(X \setminus U)), \end{aligned}$$

y como $X \setminus U \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(X \setminus U)$, entonces $(X \setminus U) \cap (\beta X \setminus \mathrm{cl}_{\beta X}(X \setminus U)) = \emptyset$.

Para probar la contención restante, tomemos $p \in U$. Sabemos que existe V, un subconjunto abierto de βX, de tal forma que $V \cap X = U$. Así, tenemos que $p \in V$. Pero $V \cap (X \setminus U) = \emptyset$ y, por lo tanto, $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X}(X \setminus U)$. Esto prueba que $p \in X \cap \mathrm{Ex}(U)$.

Ahora, veamos que $\mathrm{Ex}(U)$ es el conjunto más grande que posee esta propiedad. Sea V un subconjunto abierto de βX de tal forma que $V \cap X = U$. Entonces, $X \setminus U = X \setminus V \subseteq \beta X \setminus V$ y, por ende, $\mathrm{cl}_{\beta X}(X \setminus U) \subseteq \beta X \setminus V$; luego, $V \subseteq \mathrm{Ex}(U)$.

Proposición 1.25. *Si X es un espacio de Tychonoff, entonces para cualesquiera U y V, subconjuntos abiertos de X, se tiene lo siguiente:*

1. $\mathrm{Ex}(U) \cap \mathrm{Ex}(V) = \mathrm{Ex}(U \cap V)$.

2. Si $U \subseteq V$*, entonces* $\operatorname{Ex}(U) \subseteq \operatorname{Ex}(V)$.

Demostración. Empecemos por probar (1).

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ex}(U \cap V) &= \beta X \setminus \operatorname{cl}_{\beta X}(X \setminus (U \cap V)) \\
&= \beta X \setminus \operatorname{cl}_{\beta X}((X \setminus U) \cup (X \setminus V)) \\
&= \beta X \setminus (\operatorname{cl}_{\beta X}(X \setminus U) \cup \operatorname{cl}_{\beta X}(X \setminus V)) \\
&= (\beta X \setminus \operatorname{cl}_{\beta X}(X \setminus U) \cap (\beta X \setminus \operatorname{cl}_{\beta X}(X \setminus V)) \\
&= \operatorname{Ex}(U) \cap \operatorname{Ex}(V).
\end{aligned}$$

Ahora, vamos a verificar (2). Como $U \subseteq V$, tenemos que $\operatorname{cl}_{\beta X}(X \setminus V) \subseteq \operatorname{cl}_{\beta X}(X \setminus U)$. De esta forma, obtenemos que $\beta X \setminus \operatorname{cl}_{\beta X}(X \setminus U) \subseteq \beta X \setminus \operatorname{cl}_{\beta X}(X \setminus V)$, es decir, $\operatorname{Ex}(U) \subseteq \operatorname{Ex}(V)$.

□

Note que $\mathcal{A}$, la colección de todos los subconjuntos cerrados de un espacio topológico X, es un anillo de conjuntos, así que tiene sentido hablar de $\mathcal{A}$-filtros y $\mathcal{A}$-ultrafiltros. De hecho, emplearemos los términos *filtro de conjuntos cerrados* y *ultrafiltro de conjuntos cerrados* para referirnos a estos.

Definición 1.26. Sea X un espacio de Tychonoff. Para cada $p \in \beta X$, definimos:

$$\mathcal{F}_p = \{F \subseteq X : \operatorname{cl}_X(F) = F \text{ y } p \in \operatorname{cl}_{\beta X}(F)\}.$$

Lema 1.27. *Sea* X *un espacio* T_4*. Para cada* $p \in \beta X$*,* $\mathcal{F}_p$ *es un ultrafiltro de subconjuntos cerrados de* X*.*

Demostración. Sea $p \in \beta X$. Veamos que $\mathcal{F}_p$ es un filtro de conjuntos cerrados. Primero, $\emptyset \notin \mathcal{F}_p$ porque $p \notin \operatorname{cl}_{\beta X}(\emptyset) = \emptyset$. Además, $X \in \mathcal{F}_p$ porque X es un subconjunto cerrado de X y $p \in \beta X = \operatorname{cl}_{\beta X}(X)$.

Ahora, si $A, B \in \mathcal{F}_p$, veamos que $A \cap B \in \mathcal{F}_p$. Como A y B son subconjuntos cerrados de X, entonces $A \cap B$ también lo es. Por hipótesis, $p \in \operatorname{cl}_{\beta X}(A) \cap \operatorname{cl}_{\beta X}(B)$. Como X es un espacio T_4, el teorema 1.21 nos dice que $p \in \operatorname{cl}_{\beta X}(A \cap B)$.

Finalmente, sean A y F dos subconjuntos cerrados de X de tal forma que $A \in \mathcal{F}_p$ y $A \subseteq F$. Luego, $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(A) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(F)$ y de esta forma tenemos que $F \in \mathcal{F}_p$.

Ahora veamos que $\mathcal{F}_p$ es, de hecho, un ultrafiltro de cerrados. Sea $\mathcal{G}$ un filtro de subconjuntos cerrados de X de tal forma que $\mathcal{F}_p \subseteq \mathcal{G}$. Vamos a probar que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_p$. Sea $A \in \mathcal{G}$ y, en busca de una contradición, supongamos que $A \notin \mathcal{F}_p$. Como A es un subconjunto cerrado de X, nuestra suposición implica que $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X}(A)$. El espacio βX es T_3, así que existen $U, V \subseteq \beta X$ abiertos ajenos, de tal forma que $p \in U$ y $\mathrm{cl}_{\beta X}(A) \subseteq V$. En particular, $\mathrm{cl}_{\beta X}(U) \subseteq \beta X \setminus V$.

Definamos $B = \mathrm{cl}_{\beta X}(U) \cap X$. Afirmamos que $\mathrm{cl}_{\beta X}(U) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(B)$. Como $U \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(U)$, tenemos que $U \cap X \subseteq B$, y así, $\mathrm{cl}_{\beta X}(U \cap X) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(B)$. El que X sea denso en βX implica (ver [5, Theorem 1.3.6, p. 25]) que $\mathrm{cl}_{\beta X}(U) = \mathrm{cl}_{\beta X}(U \cap X)$ y, por lo tanto, $\mathrm{cl}_{\beta X}(U) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X}(B)$. Por otro lado, $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(U)$, así que $p \in \mathrm{cl}_{\beta X}(B)$. Como B es cerrado en X, tenemos que $B \in \mathcal{F}_p$ y, por lo tanto, $B \in \mathcal{G}$. Esto implica que $A \cap B \in \mathcal{G}$. Observemos que

$$A \cap B = A \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(U) \cap X = A \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(U) \subseteq V \cap (\beta X \setminus V) = \emptyset.$$

Lo cual es una contradición porque $\emptyset \notin \mathcal{G}$.

De esta forma tenemos que $A \in \mathcal{F}_p$. Esto prueba que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_p$ y, por lo tanto, $\mathcal{F}_p = \mathcal{G}$.

□

1.4 La compactación de Čech-Stone de ω

Cuando consideremos al ordinal ω como espacio topológico, siempre lo pensaremos equipado con la topología discreta. Para cualquier subconjunto A de los números naturales, existe una función continua f tal que $z(f) = A$. Dicha función es la función característica de $\omega \setminus A$. En otras palabras $Z(\omega) = \mathcal{P}(\omega)$.

Los z-filtros y los z-ultrafiltros en ω serán llamados simplemente filtros y ultrafiltros en ω. De este modo, los elementos de $\beta\omega$ son, precisamente, los ultrafiltros en ω. Más aún, los elementos de ω^* serán llamados ultrafiltros libres.

La demostración del resultado siguiente se sigue de la Proposición 1.5.

Proposición 1.28. *Para cualesquiera $A \subseteq \omega$ y $u \in \beta\omega$ se tiene que $A \notin u$ si y sólo si*

$\omega \setminus A \in u$.

Como mencionamos en la sección previa, la colección $\{A^{\sim} : A \in \mathcal{P}(\omega)\}$ es una base para la topología de $\beta\omega$. En particular, si $A \subseteq \omega$ se sigue de la proposición previa que $A^{\sim} = \{u \in \beta\omega : \omega \setminus A \in u\}$.

Definición 1.29. Para cada $A \subseteq \omega$, definimos

$$A^{-} = \{u \in \beta\omega : A \in u\} = (\omega \setminus A)^{\sim}.$$

Definición 1.30. Decimos que un espacio topológico X es cero-dimensional si y sólo si X posee una base de conjuntos cerrado-abiertos.

De este modo, $\{A^{-} : A \subseteq \omega\}$ es una base para la topología de $\beta\omega$; más aún (ver [6, Theorem 1.1, p. 63]), $A^{-} = \beta\omega \setminus (\omega \setminus A)^{-}$, siempre que $A \subseteq \omega$. En consecuencia, cada A^{-} es, simultáneamente, abierto y cerrado en $\beta\omega$. En otras palabras:

Proposición 1.31. *$\beta\omega$ es cero-dimensional.*

El resultado siguiente es corolario de la proposición 1.16.

Proposición 1.32. *Si $A \subseteq \omega$, entonces $\mathrm{cl}_{\beta\omega} A = A^{-}$.*

Tal y como fue mencionado en la sección previa, cada $n \in \omega$ será identificado con el ultrafiltro $\{A \subseteq \omega : n \in A\}$. En particular, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.33. *Las condiciones siguientes son equivalentes para cualesquiera $n \in \omega$ y $A \subseteq \omega$.*

1. *$n \in A$.*
2. *$n \in A^{-}$.*
3. *$n \in \mathrm{cl}_{\beta\omega} A$.*

1.5 Funciones continuas

En esta sección presentamos resultados concernientes a ciertas clases especiales de funciones continuas.

Definición 1.34. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que:

(1) f es monótona si y sólo si $f^{-1}\{y\}$ es conexo para cada $y \in Y$.

(2) f es perfecta si y sólo si f es suprayectiva, cerrada y $f^{-1}\{y\}$ es compacto para cada $y \in Y$.

Dados X y Y dos espacios topológicos de Tychonoff y una función continua $f : X \to Y$ podemos definir la funcion $\beta f : \beta X \to \beta Y$ de la siguiente forma: Componemos a la función f con la función $e : Y \to \beta Y$ (el encaje topológico que hay entre Y y su compactación) para obtener una función de X a βY. Como βY es un espacio compacto y de Hausdorff, existe una única función $\beta f : \beta X \to \beta Y$ de tal forma que $\beta f \restriction X = f$.

Proposición 1.35. *Sean X y Y dos espacios topológicos de Tychonoff y una función continua $f : X \to Y$.*

1. *Si Y es un espacio T_4 y f es un encaje cerrado (es decir, $f[X]$ es un subconjunto cerrado de Y), entonces $\beta f : \beta X \to \beta Y$ también es un encaje.*
2. *Si f es suprayectiva, entonces $\beta f : \beta X \to \beta Y$ también es suprayectiva.*
3. *Si X y Y son dos espacios T_4 y f es un homeomorfismo, entonces $\beta f : \beta X \to \beta Y$ también es un homeomorfismo.*
4. *Si f es perfecta, entonces $\beta f : \beta X \to \beta Y$ también es perfecta.*

Demostración. Para probar (1), primero observemos que βf es una función continua y cerrada porque su dominio es un espacio compacto y su codominio es un espacio de Hausdorff. Sólo resta probar que βf es inyectiva. Para ello, sean $p_0, p_1 \in \beta X$ tales que $p_0 \neq p_1$. Como βX es un espacio T_4, para cada $i < 2$ existe U_i, un subconjunto abierto de βX, de tal forma que $p_i \in U_i$ y $\mathrm{cl}_{\beta X}(U_0) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(U_1) = \emptyset$. Dado $i < 2$, definimos $F_i = \mathrm{cl}_{\beta X}(U_i) \cap X$. De esta manera, F_0 y F_1 son dos subconjuntos cerrados en X y ajenos. Notemos que

$$p_i \in U_i \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} U_i = \mathrm{cl}_{\beta X}(U_i \cap X) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} F_i,$$

para cualquier $i < 2$. De esta forma, obtenemos que

$$\beta f(p_i) \in \beta f[\mathrm{cl}_{\beta X} F_i] \subseteq \mathrm{cl}_{\beta Y} \beta f[F_i] = \mathrm{cl}_{\beta Y} f[F_i].$$

Como $f[X]$ es un subconjunto cerrado de Y, tenemos que $f[F_i]$ es cerrado en Y para cada $i < 2$; además, $\bigcap_{i<2} f[F_i] = \emptyset$. Ahora, como Y es un espacio normal, tenemos que $\bigcap_{i<2} \mathrm{cl}_{\beta Y} f[F_i] = \emptyset$ y, por lo tanto, $\beta f(p_0) \neq \beta f(p_1)$.

Para probar (2), notemos que $Y = f[X] \subseteq \beta f[\beta X] \subseteq \beta Y$. Como βf es cerrada, tenemos que $\mathrm{cl}_{\beta Y} Y \subseteq \beta f[\beta X]$, pero Y es denso en βY, así que $\mathrm{cl}_{\beta Y} Y = \beta Y \subseteq \beta f[\beta X]$. Esto prueba que $\beta Y = \beta f[\beta X]$ y, por lo tanto, βf es suprayectiva.

El inciso (3) es consecuencia de los dos incisos anteriores.

Por último, para demostrar (4), únicamente debemos probar que cada fibra de βf es compacta. Sea $y \in \beta Y$. Como βf es continua, tenemos que $(\beta f)^{-1}\{y\}$ es un subconjunto cerrado de βX. Ahora, βX es compacto, así que $(\beta f)^{-1}\{y\}$ debe ser compacto. $\square$

Sea Y un espacio de Tychonoff que no es normal. Por el Teorema de Extensión de Tietze, existe F un subconjunto cerrado de Y y una función continua $g : F \to [0, 1]$ que no puede ser extendida de manera continua a Y.

Con el ejemplo siguiente, veamos que la conclusión del inciso (1) de la proposición 1.35 es false, si Y es un espacio de Tychonoff que no es T_4.

Hagamos $Y = \mathbb{R}_l^2$ el plano de Sorgenfrey, el cual es un espacio de Tycnonoff que no es T_4 (ver [4, Example 3, p. 144]). Por el teorema de extensión de Tietze, existe X, un subconjunto cerrado de Y, y una función continua $h : X \to [0, 1]$ que no puede extenderse de manera continua a Y. Por el inciso (1) del Teorema 1.15, existe una función continua $\beta h : \beta X \to [0, 1]$ de tal forma que $\beta h \restriction X = h$. La función inclusión $f : X \to Y$ es un encaje cerrado. Supongamos que $\beta f : \beta X \to \beta Y$ es un encaje. Como βf es una función cerrada, podemos ver a βX como un subconjunto cerrado de βY. Nuevamente, por el teorema de extensión de Tietze, existe una función $H : \beta Y \to [0, 1]$ que extiende a βh. Por último, probemos que la función $H \restriction Y$ extiende a h de manera continua. Para cada $x \in X$, $H \restriction Y(x) = \beta h(x) = h(x)$.

Esto es una contradicción porque elegimos a h como una función que no se puede extender de manera continua a Y.

Para probar el lema 1.37 utilizaremos el siguiente resultado.

Lema 1.36. *Sean X y Y dos espacios topológicos y una función perfecta $f : X \to Y$. Si Z es un espacio topológico y de Hausdorff que cumple que $X \subsetneq Z$ y que $\mathrm{cl}_Z(X) = Z$, entonces no es posible encontrar una función continua $F : Z \to Y$ de tal manera que $F \restriction X = f$.*

Demostración. La demostración de este resultado se puede encontrar en [5, Lemma 3.7.4, p. 183]. $\square$

Lema 1.37. *Sean X y Y dos espacios de Tychonoff y una función $f : X \to Y$. Si f es perfecta, entonces $\beta f[X^*] = Y^*$.*

Demostración. En busca de una contradicción, supongamos que existe $p \in X^*$ de tal forma que $\beta f(p) \in Y$. De esta forma tenemos que $Z = X \cup \{p\}$ es un subespacio de βX con $X \subsetneq Z$ y $\mathrm{cl}_Z(X) = Z$. Además, la función $\beta f \restriction Z : Z \to Y$ es continua y extiende a f. Esto es una contradicción al resultado anterior. Por lo tanto, $\beta f[X^*] \subseteq Y^*$.

Para probar la contención restante, tomemos $y \in Y^*$. Como βf es suprayectiva (inciso (2) de la proposición 1.35), existe $x \in (\beta f)^{-1}\{y\}$. Si tuviésemos $x \in X$, tendríamos que $y = \beta f(x) = f(x) \in Y$, lo cual es imposible pues $y \in Y^*$. Por lo tanto, $x \in X^*$, y así, $y \in \beta f[X^*]$. $\square$

Lema 1.38. *Sean X y Y dos espacios de Tychonoff y una función $f : X \to Y$ perfecta y monótona. Entonces la función $\beta f : \beta X \to \beta Y$ también es monótona.*

Demostración. Sea $z \in \beta Y$.

Primer caso: $z \in Y$. Por el lema 1.37, tenemos que $(\beta f)^{-1}\{z\} \subseteq X$. Recordemos que $\beta f \restriction X = f$ y, por ende, $(\beta f)^{-1}\{z\} = f^{-1}\{z\}$. Como f es una función monótona, podemos concluir que $(\beta f)^{-1}\{z\}$ es conexo.

Segundo caso: $z \in Y^*$. Vamos a probar que si A_0 y A_1 son subconjuntos cerrados de $(\beta f)^{-1}\{z\}$ de tal forma que $\bigcup_{i<2} A_i = (\beta f)^{-1}\{z\}$ y $\bigcap_{i<2} A_i = \emptyset$, entonces existe $i < 2$ de tal forma que $A_i = \emptyset$.

Como A_i es cerrado en $(\beta f)^{-1}\{z\}$ para cada $i < 2$ y $(\beta f)^{-1}\{z\}$ es cerrado en βX, podemos concluir que A_i es cerrado en βX. Ahora, βX es un espacio normal, así que para cada $i < 2$ existe U_i, subconjunto abierto de βX, de tal forma que $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ y $A_i \subseteq U_i$.

Definimos $O = \beta Y \setminus \beta f[\beta X \setminus (\bigcup_{i<2} U_i)]$. Como βf es una función cerrada tenemos que O es un subconjunto abierto de βY. Veamos que $z \in O$. Como $(\beta f)^{-1}\{z\} \subseteq \bigcup_{i<2} U_i$, no existe $q \in \beta X \setminus (\bigcup_{i<2} U_i)$ tal que $\beta f(q) = z$. Por lo tanto $z \notin \beta f[\beta X \setminus (\bigcup_{i<2} U_i)]$, y así, $z \in O$.

Afirmamos que $(\beta f)^{-1}[O] \subseteq \bigcup_{i<2} U_i$. En efecto:

$$(\beta f)^{-1}[O] = (\beta f)^{-1}[\beta Y] \setminus (\beta f)^{-1}[\beta f[\beta X \setminus (U_0 \cup U_1)] \subseteq \beta X \setminus (\beta X \setminus (U_0 \cup U_1)) = \bigcup_{i<2} U_i.$$

Hagamos $F_i = (\beta f)^{-1}[O] \cap U_i$ para cada $i < 2$. Claramente F_i es un subconjunto abierto de βX. Además, notemos que:

$$\bigcup_{i<2} F_i = \bigcup_{i<2}((\beta f)^{-1}[O] \cap U_i) = (\beta f)^{-1}[O] \cap \bigcup_{i<2} U_i = (\beta f)^{-1}[O].$$

Empleando esta última igualdad y la pertenencia $z \in O$, deducimos que

$$A_0 \cup A_1 = (\beta f)^{-1}\{z\} \subseteq (\beta f)^{-1}[O] = F_0 \cup F_1 \subseteq U_0 \cup U_1.$$

Ahora, el que para cada $i < 2$ se tengan las contenciones $A_i \subseteq U_i$ y $F_i \subseteq U_i$ nos garantiza que $A_i \subseteq F_i$. Esta propiedad será empleada en el último párrafo de nuestra prueba.

En el primer caso de esta demostración probamos que $(\beta f)^{-1}\{y\}$ es conexo, para cada $y \in Y$. Como F_i es un subconjunto abierto de βX, para cualquier $i < 2$, y $\bigcap_{i<2} F_i = \emptyset$, tenemos que para cada $y \in O \cap Y$ existe un único $i < 2$ de tal forma que $(\beta f)^{-1}\{y\} \subseteq F_i$. Esta observación será empleada varias veces en lo que sigue.

Definamos $F_i' = f[F_i \cap X]$ para cada $i < 2$. Note que, por definición, cada F_i' es un subconjunto de $O \cap Y$.

Mostraremos que F_0' y F_1' son un par de abiertos ajenos en Y con $O \cap Y = F_0' \cup F_1'$.

Sea $y \in F_0'$. Vamos a probar que $y \notin F_1'$. Sabemos que existe $p \in F_0 \cap X$ de tal forma que $f(p) = y$, es decir, $f^{-1}\{y\} \cap F_0 \neq \emptyset$. Pero $f^{-1}\{y\} \cap F_0 \subseteq (\beta f)^{-1}\{y\} \cap F_0$, así que

$(\beta f)^{-1}\{y\} \cap F_0 \neq \emptyset$. Por la observación hecha arriba tenemos que $(\beta f)^{-1}\{y\} \subseteq F_0$. Como $\bigcap_{i<2} F_i \subseteq \bigcap_{i<2} U_i = \emptyset$, deducimos que $(\beta f)^{-1}\{y\} \cap F_1 = \emptyset$. Por lo tanto $y \notin F_1'$, y en consecuencia, $\bigcap_{i<2} F_i' = \emptyset$.

Para verificar que F_0' y F_1' son abiertos en Y, primero probaremos que

$$O \cap f[X \setminus F_i] = (O \cap Y) \setminus F_i' \text{ para cada } i < 2.$$

Tomemos $i < 2$ y sea $p \in O \cap f[X \setminus F_i]$. Claramente, $p \in O \cap Y$. Además, existe $q \in X \setminus F_i$ de tal forma que $f(q) = p$. En particular, $q \in f^{-1}\{p\} \setminus F_i$ y, por ende, $q \in f^{-1}\{p\} \subseteq F_{1-i}$. Luego, $p = f(q) \in F_{1-i}'$ y así, $p \notin F_i'$.

Para probar la contención restante tomemos $p \in O \cap Y \setminus F_i'$. Naturalmente, $p \in O$. Ahora, $p \notin F_i' = f[X \cap F_i]$ implica que $f^{-1}\{p\} \cap F_i = \emptyset$ y, en consecuencia, $f^{-1}\{p\} \subseteq F_{1-i}$. Empleemos ahora la suprayectividad de f para fijar $q \in F_{1-i}$ con $f(q) = p$. Luego, $p \in f[X \setminus F_i]$.

Sea $i < 2$. Como hicimos notar antes, F_i es abierto en βX y dado que, por hipótesis, f es cerrada, deducimos que $O \cap Y \setminus F_i' = O \cap f[X \setminus F_i]$ es un subconjunto cerrado de $O \cap Y$, esto es, $F_i' = O \cap Y \cap F_i'$ es un abierto en $O \cap Y$. Ahora note que $O \cap Y$ es abierto en Y para concluir que F_i' es abierto en Y.

Nos resta probar que $O \cap Y = F_0' \cup F_1'$. Empecemos por tomar $p \in O \cap Y$. Notemos que $(\beta f)^{-1}\{p\} \subseteq (\beta f)^{-1}[O] = F_0 \cup F_1$. Fijemos $q \in (\beta f)^{-1}\{p\}$ y observemos que existe $j < 2$ de tal forma que $q \in F_j$. Por el lema 1.37 tenemos que $q \in X$ y así, $q \in X \cap F_j$. De esta forma, $f(q) \in F_j'$, es decir, $p \in \bigcup_{i<2} F_i' \subseteq Y$. Para probar la contención restante, tomemos $p \in \bigcup_{i<2} F_i'$. Entonces existe $j < 2$ de tal forma que $p \in F_j'$, esto es, existe $q \in F_j \cap X$ de tal forma que $f(q) = p$. Como $q \in X$, sabemos que $\beta f(q) = f(q) = p$. Observemos que la definición de F_j nos garantiza que $q \in (\beta f)^{-1}[O]$, y por ende, $p = \beta f(q) \in O$. Esto prueba que $p \in O \cap Y$.

Afirmamos que $(\bigcap_{i<2} \mathrm{cl}_{\beta Y}(F_i')) \cap O = \emptyset$. Para esto supondremos que $x \in O \cap \mathrm{cl}_{\beta Y} F_0'$ y verificaremos que $x \notin \mathrm{cl}_{\beta Y} F_1'$. Como βY es un espacio de Tychonoff, existe una función continua $g : \beta Y \to [0,1]$ de tal forma que $g(x) = 1$ y $g[\beta Y \setminus O] \subseteq \{0\}$.

De las igualdades

$$(Y \setminus F_0') \cap (Y \setminus F_1') = Y \setminus (F_0' \cup F_1') = Y \setminus (O \cap Y) = Y \setminus O$$

se deduce que la función $h : Y \to [-1, 1]$ dada por (recuerde que $F_0' \cap F_1' = \emptyset$)

$$h(y) = \begin{cases} g(y) & \text{si } y \in Y \setminus F_1' \\ -g(y) & \text{si } y \in Y \setminus F_0' \end{cases}$$

está bien definida. Más aún, el que F_0' y F_1' sean abiertos de Y implica que h es continua.

Sea $i < 2$. Si $y \in F_i'$, entonces $y \notin F_{1-i}'$. Así que $\beta h(y) = h(y) = (-1)^i g(y)$. Esto muestra que $\beta h[F_i'] \subseteq [(-1)^i i, 1 - i]$. Por otro lado, la continuidad de βh nos da:

$$\beta h[\operatorname{cl}_{\beta Y} F_i'] \subseteq \operatorname{cl}_{[-1,1]} \beta h[F_i'] \subseteq \operatorname{cl}_{[-1,1]}[(-1)^i i, 1 - i] = [(-1)^i i, 1 - i].$$

En particular, la hipótesis $x \in \operatorname{cl}_{\beta Y} F_0'$ implica que $\beta h(x) \in [0, 1]$.

Por otro lado, un cálculo rutinario muestra que $g \upharpoonright Y = |h| = |\beta h| \upharpoonright Y$. Luego, la densidad de Y en βY implica que $|\beta h| = g$. Esto, junto con lo dicho en el párrafo previo, implica que $\beta h(x) = g(x) = 1$ y, por ende, $\beta h(x) \notin [-1, 0]$. Luego, $x \notin \operatorname{cl}_{\beta Y} F_1'$, tal y como se deseaba.

El último paso antes de finalizar nuestra prueba será mostrar que si $i < 2$, entonces $F_i \cap X = f^{-1}[F_i']$. Recordemos que $F_i \cap X \subseteq f^{-1}[f[F_i \cap X]] = f^{-1}[F_i']$. Para probar la contención restante, tomemos $p \in f^{-1}[f[F_i \cap X]]$. Entonces, $f(p) \in f[F_i \cap X]$, esto es, $f^{-1}\{f(p)\} \cap F_i \neq \emptyset$ y como $f^{-1}\{f(p)\}$ es conexo, se sigue que $f^{-1}\{f(p)\} \subseteq F_i \cap X$. Así, $p \in F_i \cap X$.

Estamos listos para concluir el argumento: como $(\bigcap_{i<2} \operatorname{cl}_{\beta Y}(F_i')) \cap O = \emptyset$ y $z \in O$, existe $j < 2$ de tal forma que $z \notin \operatorname{cl}_{\beta Y} F_j'$. El que F_j sea abierto en βX, junto con la continuidad de βf, implica que $\operatorname{cl}_{\beta X} F_j \subseteq \operatorname{cl}_{\beta X}(F_j \cap X) \subseteq \operatorname{cl}_{\beta X}((\beta f)^{-1}[F_j']) \subseteq (\beta f)^{-1}[\operatorname{cl}_{\beta Y} F_j']$. Como explicamos arriba, $A_j \subseteq F_j$ y, por ende,

$$A_j \subseteq F_j \cap (\beta f)^{-1}\{z\} \subseteq (\beta f)^{-1}[\operatorname{cl}_{\beta Y} F_j'] \cap (\beta f)^{-1}\{z\} = \emptyset.$$

Por lo tanto, $A_j = \emptyset$, tal y como se necesitaba. $\square$

1.6 Límites de sucesiones

Denotemos por FR a la colección de todos los subconjuntos de ω cuyo complemento es finito. En otras palabras,

$$\mathsf{FR} = \{A \subseteq \omega : |\omega \setminus A| < \omega\}.$$

Argumentos rutinarios muestran que FR es un filtro en ω, al que se le suele llamar *el filtro de Fréchet*. Observe que FR no es un ultrafiltro. En efecto, el complemento del conjunto de números naturales pares son los números impares, ninguno de estos dos conjuntos es finito así que ninguno de ellos pertenece a FR. Por lo tanto $\mathsf{FR} \notin \beta\omega$. Exploremos la conexión que hay entre FR y la convergencia de sucesiones.

Suponga que $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en el espacio topológico X y que $p \in X$. Entonces, sucede que p es un límite para $\{x_n\}_{n\in\omega}$ si y sólo si para cualquier V, abierto en X con $p \in V$, se tiene que $\{n < \omega : x_n \notin V\}$ es finito; equivalentemente, p es un límite de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ si, y únicamente si, cada vez que V es un abierto en X que satisface $p \in V$, se sigue que $\{n < \omega : x_n \in V\} \in \mathsf{FR}$. Con esto en mente, el siguiente concepto es una generalización natural de la convergencia de sucesiones.

Definición 1.39. Sean X un espacio topológico, $\{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq X$ una sucesión y $u \in \beta\omega$. Decimos que $p \in X$ es un u-límite de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ si y sólo si para cada V, subconjunto abierto de X que tenga a p, se cumple que $\{n < \omega : x_n \in V\} \in u$.

Lema 1.40. *Sean X, un espacio topológico compacto y de Hausdorff, y $u \in \beta\omega$. Si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en X, entonces el conjunto*

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{\beta X}\{x_n : n \in A\} : A \in u\}$$

consiste de un solo punto y éste es el único u-límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$.

Demostración. Para cada $A \in u$, definimos $F_A = \mathrm{cl}_X(\{x_n : n \in A\})$. Hagamos $\mathcal{F} = \{F_A : A \in u\}$. Observe que si $G \in [u]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y $n \in \bigcap G$, entonces $x_n \in F_A$, para cada $A \in G$. En otras palabras, para cualquier $G \in [u]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, $F_{\bigcap G} \subseteq \bigcap\{F_A : A \in G\}$.

Lo hecho en el párrafo anterior muestra que $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados en X con la propiedad de la intersección finita. Como X es compacto, $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Así que tomemos $z \in \bigcap \mathcal{F}$. Ahora vamos a probar que si y es un punto en X distinto de z, entonces $y \notin \bigcap \mathcal{F}$ y, por lo tanto, $\{z\} = \bigcap \mathcal{F}$. Dado que X es un espacio de Hausdorff, existen U y V, subconjuntos abiertos de X, ajenos y tales que $z \in U$ y $y \in V$. Definamos $B = \{n \in \omega : x_n \in U\}$. En busca de una contradicción, vamos a suponer que $B \notin u$. Esto implica que $\omega \setminus B \in u$ porque u es un ultrafiltro. Por la elección de z, esto quiere decir que $z \in F_{\omega \setminus B}$. De esta forma tenemos que $U \cap \{x_n : n \in \omega \setminus B\} \neq \emptyset$, así que fijemos $m \in \omega \setminus B$ de tal forma que $x_m \in U$. Esto implica que $m \notin B$ y, por la definición de B, $x_m \notin U$. El absurdo que estabamos buscando.

Hemos probado que $B \in u$. De aquí podemos deducir que $F_B \in \mathcal{F}$. Por otro lado, la igualdad $\{x_n : n \in B\} \cap V = \emptyset$ es consecuencia directa de nuestra definición de B; consecuentemente, $y \notin F_B$. Esto prueba que $y \notin \bigcap \mathcal{F}$.

Recordemos el resultado siguiente: Dado Y un espacio topológico compacto, si W es un subconjunto abierto de Y y $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos cerrados de Y de tal forma que $\bigcap \mathcal{G} \subseteq W$, entonces existe $J \in [\mathcal{G}]^{<\omega}$ tal que $\bigcap J \subseteq W$. La prueba de este resultado se puede encontrar en [5, Corollary 3.1.5, p. 124]

Regresemos a la demostración, afirmamos que z es un u-límite de $\{x_n\}_{n\in\omega}$. Para probarlo, sea U un subconjunto abierto de X de tal forma que $z \in U$. Como $\bigcap \mathcal{F} \subseteq U$ y todos los elementos de $\mathcal{F}$ son cerrados, el resultado mencionado en el párrafo anterior nos garantiza que existe $H \in [u]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ de tal forma que $\bigcap \{F_A : A \in H\} \subseteq U$. De lo discutido en el primer párrafo de esta prueba tenemos que

$$\left\{x_n : n \in \bigcap H\right\} \subseteq F_{\bigcap H} \subseteq \bigcap \{F_A : A \in H\} \subseteq U,$$

lo cual implica que $\bigcap H \subseteq \{n \in \omega : x_n \in U\}$. Como $\bigcap H \in u$, tenemos que $\{n \in \omega : x_n \in U\} \in u$. Por lo tanto, z es un u-límite de $\{x_n\}_{n<\omega}$.

Para probar que z es el único u-límite, supongamos que existe $y \in X \setminus \{z\}$ de tal forma que y es un u-límite de $\{x_n\}_{n<\omega}$. Como X es de Hausdorff, existen V_0 y V_1, subconjuntos ajenos y abiertos de X, tales que $z \in V_0$ y $y \in V_1$. Dado que z y y son u-límites de $\{x_n\}_{n<\omega}$, tenemos que $A = \{n < \omega : x_n \in V_0\}$ y $B = \{n < \omega : x_n \in V_1\}$ son elementos de u. Como u es un filtro, $A \cap B \in u$, es decir, $\emptyset \in u$, lo cual es una contradicción. $\square$

El resultado anterior nos permite definir lo siguiente:

Definición 1.41. Para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en un espacio compacto de Hausdorff X y para cada $u \in \beta\omega$ usaremos el símbolo $x_u = \lim_{n \to u} x_n$ para abreviar la frase x_u *es el u-límite de* $\{x_n\}_{n\in\omega}$.

Lema 1.42. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos y sea $u \in \beta\omega$. Si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión en X y z es un u-límite para dicha sucesión, entonces $f(z)$ es un u-límite para la sucesión $\{f(x_n)\}_{n<\omega}$ en Y.*

Demostración. Sea V un subconjunto abierto de Y de tal forma que $f(z) \in V$. Como f es una función continua, tenemos que $f^{-1}[V]$ es abierto y $z \in f^{-1}[V]$. Por hipótesis, z es el u-límite de la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ así que $\{n < \omega : x_n \in f^{-1}[V]\} \in u$. Observemos que $\{n < \omega : x_n \in f^{-1}[V]\} \subseteq \{n < \omega : f(x_n) \in V\}$. Como u es un filtro, deducimos que $\{n < \omega : f(x_n) \in V\}$ también es un elemento de u. $\square$

1.7 Topología de continuos

Dado X, un espacio topológico, el símbolo $X = A \mid B$ abreviará la frase A *y* B *son dos subconjuntos ajenos de* X *no vacíos con* $X = A \cup B$.

Definición 1.43. Un espacio topológico X será llamado un continuo si X es de Hausdorff, compacto y conexo.

Definición 1.44. Si X es un continuo, entonces diremos que C es un subcontinuo de X si y sólo si C es un subconjunto cerrado y conexo de X.

Comencemos con un resultado que será de utilidad más adelante.

Teorema 1.45. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia subespacios de X de tal forma que cada uno de los elementos de $\mathcal{F}$ es un continuo. Si para cualesquiera F y G elementos de $\mathcal{F}$ existe $H \in \mathcal{F}$ de tal manera que $H \subseteq F \cap G$, entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es un continuo.*

Demostración. La prueba de este resultado se puede encontrar en [5, Theorem 6.1.18, p. 355] □

Lema 1.46. *Sea X un continuo y C un subcontinuo de X. Si $X \setminus C = U \mid V$, donde U y V son subconjuntos abiertos de $X \setminus C$, entonces $C \cup U$ y $C \cup V$ son subcontinuos de X.*

Demostración. Como V es un subconjunto abierto de $X \setminus C$ y $X \setminus C$ es subconjunto abierto de X, entonces V es un subconjunto abierto de X. Esto implica que $X \setminus V = C \cup U$ es un subconjunto cerrado de X. De manera análoga, $C \cup V$ es un subconjunto cerrado de X.

Vamos a demostrar que $C \cup U$ es conexo. Buscando una contradicción, supongamos que $C \cup U$ no es conexo, es decir, que existen M y N, subconjuntos cerrados de $C \cup U$, tales que $C \cup U = M \mid N$. Ahora, como C es conexo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $C \subseteq N$ y, de esta forma, $M \subseteq U$.

El que M y N no sean vacíos implica que $M \neq \emptyset$ y $N \cup V \neq \emptyset$.

Veamos que $X = M \mid (N \cup V)$ En primer lugar,

$$M \cup (N \cup V) = (M \cup N) \cup V = C \cup U \cup V = C \cup (X \setminus C) = X$$

y, además,

$$M \cap (N \cup V) = (M \cap N) \cup (M \cap V) = M \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset.$$

Por último, veamos que M y $N \cup V$ son subconjuntos cerrados de X. Como M es un subconjunto cerrado de $C \cup U$ y $C \cup U$ es un subconjunto cerrado de X, entonces M es subconjunto cerrado de X (observe que el mismo argumento muestra que N también es un subconjunto cerrado de X). Para probar que $N \cup V$ es cerrado, empecemos por notar que

$$\operatorname{cl}_X(N \cup V) = \operatorname{cl}_X N \cup \operatorname{cl}_X V = N \cup \operatorname{cl}_X V.$$

Ahora, la igualdad $\operatorname{cl}_X C = C \subseteq N$ y el hecho de que $C \cup V$ es cerrado en X nos llevan las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} N \cup \mathrm{cl}_X V &= (N \cup \mathrm{cl}_X C) \cup \mathrm{cl}_X V = N \cup (\mathrm{cl}_X C \cup \mathrm{cl}_X V) \\ &= N \cup \mathrm{cl}_X(C \cup V) = N \cup C \cup V = N \cup V. \end{aligned}$$

Esto muestra que $N \cup V$ es un subconjunto cerrado de X y, por lo tanto, M y $N \cup V$ forman una disconexión del espacio X. Esto es una contradicción a la hipótesis de que X es conexo.

Por lo tanto $C \cup U$ es conexo. De manera análoga se puede probar que $C \cup V$ es conexo.

□

Definición 1.47. Un continuo X es indescomponible si X no puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios.

Teorema 1.48. *Un continuo X es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.*

Demostración. Sea $H \subsetneq X$ un subcontinuo de X y supongamos que $\mathrm{int}(H) \neq \emptyset$. Entonces $X \setminus \mathrm{int}(H)$ es subconjunto propio y cerrado de X. Si $X \setminus \mathrm{int}(H)$ es conexo, entonces $X \setminus \mathrm{int}(H)$ es un subcontinuo propio de X y podemos escribir a X como la unión de H y $X \setminus \mathrm{int}(H)$. De esta manera hemos probado que X se puede descomponer como la unión de dos subconjuntos propios. Ahora, si $X \setminus \mathrm{int}(H) = \mathrm{cl}(X \setminus H)$ no es conexo, entonces $X \setminus H$ tampoco puede ser conexo. De esta forma, existen U y V, subconjuntos abiertos de $X \setminus H$, de tal forma que $X \setminus H = U \mid V$. Por el lema 1.46, tenemos que $H \cup U$ y $H \cup V$ son subcontinuos propios de X y, por lo tanto, X se puede puede escribir como la unión de los subcontinuos propios $H \cup U$ y $H \cup V$.

Para demostrar el recíproco, supongamos que X es descomponible. Entonces existen H y K, subcontinuos propios de X, de tal forma que $X = H \cup K$. Observemos que $X \setminus H$ es un subconjunto abierto y no vacío de X; además, $X \setminus H \subseteq K$. Esto implica que $\mathrm{int}\, K \neq \emptyset$.

□

Definición 1.49. Sea X un continuo. Un punto $p \in X$ es un punto de corte si y sólo si $X \setminus \{p\}$ es un subespacio disconexo.

Lema 1.50. *Sea X un continuo. Las siguientes enunciados son equivalentes.*

(1) $p \in X$ es un punto de corte.

(2) Existen F y G, dos subconjuntos cerrados de X, de tal forma que $|F| \geqslant 2$, $|G| \geqslant 2$, $F \cap G = \{p\}$ y $F \cup G = X$.

Demostración. Argumentemos primero que (1) implica (2). Si $X \setminus \{p\}$ es disconexo, entonces existen A y B, subconjuntos abiertos de $X \setminus \{p\}$, tales que $X \setminus \{p\} = A \mid B$. Definamos a F y G como $A \cup \{p\}$ y $B \cup \{p\}$ respectivamente. Como $A \neq \emptyset \neq B$, tenemos que tanto F como G tienen al menos dos elementos.

Veamos que F y G son subconjuntos cerrados de X. Para ello, notemos que $X \setminus F = X \setminus (A \cup \{p\}) = B$, el cual, es abierto en $X \setminus \{p\}$. Dado que X es un espacio de Hausdorff, tenemos que $X \setminus \{p\}$ es un subconjunto abierto de X. Por lo tanto, $X \setminus F$ es un subconjunto abierto de X. De forma análoga, $X \setminus G$ es un subconjunto abierto de X. Así, obtenemos que F y G son cerrados en X.

Además,

$$F \cap G = (A \cup \{p\}) \cap (B \cup \{p\}) = (A \cap B) \cup \{p\} = \emptyset \cup \{p\} = \{p\}$$

y

$$F \cup G = (A \cup \{p\}) \cup (B \cup \{p\}) = (A \cup B) \cup \{p\} = (X \setminus \{p\}) \cup \{p\} = X.$$

Ahora verifiquemos que (2) implica (1). Sean F y G como en las hipótesis. Definamos $A = F \setminus \{p\}$ y $B = G \setminus \{p\}$. Tenemos entonces que A y B son subconjuntos cerrados de $X \setminus \{p\}$, y como $|F| \geqslant 2$ y $|G| \geqslant 2$, se sigue que $A \neq \emptyset \neq B$.

Además,

$$A \cap B = (F \setminus \{p\}) \cap (G \setminus \{p\}) = (F \cap G) \setminus \{p\} = \{p\} \setminus \{p\} = \emptyset$$

y

$$A \cup B = (F \setminus \{p\}) \cup (G \setminus \{p\}) = (F \cup G) \setminus \{p\} = X \setminus \{p\}.$$

Por lo tanto A y B forman una disconexión del espacio $X \setminus \{p\}$. $\square$

CAPÍTULO 2: $\beta\mathbb{R}$ Y $\beta\mathbb{H}$

Emplearemos los símbolos $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^-$ para denotar a los subespacios $[0,\infty)$ y $(-\infty,0]$ de $\mathbb{R}$, respectivamente.

2.1 Una descomposición de $\mathbb{R}^*$

El propósito central de esta sección es demostrar que el residuo $\mathbb{R}^*$ es homeomorfo a la suma topológica (ver [5, §2.2, pp. 74–77]) de dos copias ajenas de $\mathbb{H}^*$. Para esto, probaremos una serie de resultados preliminares.

Recuerde que en un espacio métrico X la colección $Z(X)$ coincide con la familia de todos los subconjuntos cerrados de X. En lo que sigue, se hará libre uso de esta observación cuando $X = \mathbb{R}$ o $X = \mathbb{H}$.

Lema 2.1. $\mathbb{H}^* = \bigcap_{n<\omega} \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[n,\infty)$.

Demostración. Empecemos por probar que $\mathbb{H}^* \subseteq \bigcap_{n<\omega} \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[n,\infty)$. Sea $n<\omega$. Supongamos que $p \notin \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[n,\infty)$. De acuerdo a la proposición 1.16, $[n,\infty) \notin p$. Como p es un z-ultrafiltro, la proposición 1.5 implica que existe $E \in p$ de tal forma que $E \cap [n,\infty) = \emptyset$. Definamos $K = [0, n+1]$ y notemos que $K \in Z(\mathbb{H})$ y $E \subseteq K$. Como p es un z-filtro, esto implica que $K \in p$.

Hagamos $\mathcal{H} = \{K \cap F : F \in p\}$ y notemos que la pertenencia $K \in p$ nos da la contención $\mathcal{H} \subseteq p$. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es una familia de subconjuntos cerrados del compacto K y, por lo tanto, $\bigcap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Además, un argumento rutinario muestra que $\bigcap p = \bigcap \mathcal{H}$. Así, $\bigcap p \neq \emptyset$. De acuerdo a la proposición 1.20, se sigue que $p \notin \mathbb{H}^*$.

Para probar que $\bigcap_{n<\omega} \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[n,\infty) \subseteq \mathbb{H}^*$, tomemos $p \in \bigcap_{n<\omega} \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[n,\infty)$, esto es (ver proposicón 1.16), $\{[n,\infty) : n<\omega\} \subseteq p$. Claramente,

$$\bigcap p \subseteq \bigcap_{n<\omega} [n,\infty) = \emptyset$$

y por la proposición 1.20, $p \in \mathbb{H}^*$. $\square$

Sea $\mathcal{D} = \{\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[n, \infty) : n < \omega\}$. Como cada intervalo es un subconjunto conexo de $\mathbb{H}$ y $\beta\mathbb{H}$ es compacto, se sigue que $\mathcal{D}$ es una familia de continuos. Más aún, $\mathcal{D}$ está dirigida por la contención inversa: si $m, n < \omega$, entonces $\ell = \max\{m, n\}$ satisface que

$$\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[m, \infty) \supseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[\ell, \infty) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[n, \infty) \supseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[\ell, \infty).$$

Luego, el teorema 1.45 nos garantiza que $\bigcap \mathcal{D}$ es un continuo. De este modo, hemos probado lo siguiente.

Proposición 2.2. *El residuo $\mathbb{H}^*$ es un continuo.*

Lema 2.3. *Sea $X \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mathbb{H}^-\}$. Sea U un subconjunto abierto de βX. Si $U \cap X^* \neq \emptyset$, entonces $U \cap X$ no está acotado en X.*

Demostración. Supongamos que $U \cap X$ está acotado y vamos a probar que $U \cap X^* = \emptyset$. Como $U \cap X$ está acotado, existe $m < \omega$ de tal forma que $U \cap X \subseteq [-m, m]$. Observemos que $X \cap [-m, m]$ es un subconjunto compacto de X porque es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$. De esta forma, $X \cap [-m, m]$ también es compacto en βX y, por lo tanto, $X \cap [-m, m]$ es un subconjunto cerrado de βX. De lo anterior y de la densidad de X en βX, obtenemos que:

$$U \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} U = \mathrm{cl}_{\beta X}(U \cap X) \subseteq X \cap [-m, m] \subseteq X.$$

Esto muestra que $U \subseteq X$ y, por lo tanto, $U \cap X^* = \emptyset$. $\square$

Proposición 2.4. *Los enunciados siguientes son ciertos.*

1. $\beta\mathbb{R} = (\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}\, \mathbb{H}) \cup (\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}\, \mathbb{H}^-)$.

2. $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H} = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{R}$.

3. $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{H}^- = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{R}$.

4. $\mathbb{R}^* = (\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}) \cup (\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{H}^-)$.

Demostración. Para probar (1), observemos que

$$\beta\mathbb{R} = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}} \mathbb{R} = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H} \cup \mathbb{H}^-) = (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}} \mathbb{H}) \cup (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}} \mathbb{H}^-).$$

Con respecto a (2), observemos que $\mathbb{R}$ es localmente compacto así que $\mathbb{R}$ es un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{R}$ (lema 1.22). En particular, $U = (-\infty, 0)$ es un abierto en $\beta\mathbb{R}$ que es ajeno con $\mathbb{H}$ y en consecuencia, $U \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}} \mathbb{H} = \emptyset$. Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{R} &= \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus (U \cup \mathbb{H}) = (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus U) \cap (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}) \\ &= \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \cap (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}) = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}.\end{aligned}$$

La prueba del inciso (3) es análoga al inciso anterior.

Por último, para probar el inciso (4) notemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^* &= \beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R} = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H} \cup \mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{R} \\ &= (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \cup \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}^-)) \setminus \mathbb{R} \\ &= (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{R}) \cup (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{R}) \\ &= (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}) \cup (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{H}^-).\end{aligned}$$

□

Proposición 2.5. *La suma topológica* $\mathbb{H}^* \oplus \mathbb{H}^*$ *es homeomorfa al residuo* $\mathbb{R}^*$.

Demostración. Con la intención de simplificar nuestra notación, hagamos $F = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{R}$ y $G = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{R}$. La compacidad local de $\mathbb{R}$ implica (lema 1.22) que tanto F como G son subespacios cerrados de $\beta\mathbb{R}$. Más aún, de acuerdo a la proposición previa, $\mathbb{R}^* = F \cup G$ y, por otro lado (ver teorema 1.21),

$$\begin{aligned}F \cap G &= (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{R}) \cap \big(\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{R}\big) = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{R} \\ &= \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H} \cap \mathbb{H}^-) \setminus \mathbb{R} = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\{0\}) \setminus \mathbb{R} = \{0\} \setminus \mathbb{R} = \emptyset.\end{aligned}$$

De esta forma, $\mathbb{R}^*$ es la suma topológica $F \oplus G$. Únicamente nos resta comprobar que F y

G son homeomorfos a $\mathbb{H}^*$. Comencemos con F.

Por el Teorema de Extensión de Tietze, $\mathbb{H}$ está C^*-encajado en $\mathbb{R}$. Luego (lema 1.23), hay un homeomorfismo $h : \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}\, \mathbb{H} \to \beta\mathbb{H}$ de tal modo que $h(t) = t$, siempre que $t \in \mathbb{H}$. En consecuencia (inciso (2) de la proposición previa),

$$h[F] = h[\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \setminus \mathbb{H}] = \beta\mathbb{H} \setminus \mathbb{H} = \mathbb{H}^*.$$

De modo similar se argumenta que G es homeomorfo a $(\mathbb{H}^-)^*$. Ahora, la función $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}^-$ dada por $f(t) = -t$ es un homeomorfismo y por el inciso (4) de la proposición 1.35, $\beta f : \beta\mathbb{H} \to \mathbb{H}^-$ es un homeomorfismo también. Finalmente (inciso (3) de la proposición previa),

$$\beta f\,[\mathbb{H}^*] = \beta f\,[\beta\mathbb{H} \setminus \mathbb{H}] = \beta f\,[\beta\mathbb{H}] \setminus \beta f\,[\mathbb{H}] = \beta\mathbb{H}^- \setminus f\,[\mathbb{H}] = \beta\mathbb{H}^- \setminus \mathbb{H}^-,$$

en otras palabras, $\mathbb{H}^*$ y $(\mathbb{H}^-)^*$ son homeomorfos. $\square$

2.2 Algunas funciones cardinales topológicas

Proposición 2.6. *Si* $X \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}\}$*, entonces* $|\beta X| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Demostración. En esta prueba emplearemos un par de veces un caso particular de [5, Theorem 3.6.11, p. 174], a saber, que la cardinalidad de $\beta\omega$ es $2^{\mathfrak{c}}$.

Sea $f : \omega \to \mathbb{Q} \cap \mathbb{H}$ una función suprayectiva. Observemos que f es continua porque ω es un espacio discreto. Del inciso (2) de la proposición 1.35, se sigue que la función $\beta f : \beta\omega \to \beta X$ es suprayectiva y, por lo tanto, $|\beta X| \leqslant |\beta\omega| \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$.

Para probar la otra desigualdad, empecemos por notar que el Teorema de Extensión de Tietze implica que ω está C^*-encajado en X. Luego, por el lema 1.23, tenemos que $\mathrm{cl}_{\beta X}\, \omega$ es homeomorfo a $\beta\omega$. Esto implica que $2^{\mathfrak{c}} = |\,\mathrm{cl}_{\beta X}\, \omega| \leqslant |\beta X|$. $\square$

Definición 2.7. Sea X un espacio topológico no vacío.

1. El peso de X, denotado por $w(X)$, es la mínima cardinalidad de una base para X.

2. La densidad de X, denotada por $d(X)$, es la mínima cardinalidad de un subconjunto denso de X.

3. Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos abiertos de X no vacíos será llamada celular en X si es ajena por pares. La celularidad de X, que será denotada por $c(X)$, se define como $\sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular}\}$.

A continuación presentamos algunas relaciones de orden entre estas funciones cardinales que se deducen inmediatamente de la definición.

Lema 2.8. *Para cualquier X, espacio topológico no vacío, se cumple que $c(X) \leqslant d(X) \leqslant w(X)$.*

Demostración. Para probar que $c(X) \leqslant d(X)$, sea $\mathcal{C}$ una familia celular y D un subconjunto denso de X. Para cada $U \in \mathcal{C}$, fijemos $x_U \in U \cap D$. Esto es posible porque todos los elementos de $\mathcal{C}$ son subconjuntos abiertos de X no vacíos. Observemos que $x_U \neq x_V$ si $U \neq V$ porque la familia $\mathcal{C}$ es ajena por pares. Tenemos las siguientes desigualdades

$$|\mathcal{C}| = |\{x_U : U \in \mathcal{C}\}| \leqslant |D| \leqslant d(X).$$

Esto muestra que $d(X)$ es una cota superior de el conjunto $\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular}\}$ y, por lo tanto, $c(X) \leqslant d(X)$.

Para probar que $d(X) \leqslant w(X)$, sea $\mathcal{B}$ una base para X que satisface $|\mathcal{B}| = w(X)$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, fijemos $x_B \in B$. Observemos que $D = \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$ es denso en X. De esta forma, tenemos que $d(X) \leqslant |D| \leqslant |\mathcal{B}| = w(X)$. □

Proposición 2.9. $w(\mathbb{H}^*) = d(\mathbb{H}^*) = c(\mathbb{H}^*) = \mathfrak{c}$.

Demostración. Empecemos citando algunos teoremas que nos ayudarán a probar este resultado.

1. Si κ es un cardinal infinito dotado con la topología discreta, entonces $|\beta\kappa| = 2^{2^\kappa}$ y $w(\beta\kappa) = 2^\kappa$ [5, III Theorem 3.6.11, p. 174].

2. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Si Y es continua y f es suprayectiva, entonces $w(Y) \leqslant w(X)$ [5, III Theorem 3.1.22 p. 128].

El inciso (1) nos garantiza que $w(\beta\omega) = \mathfrak{c}$. En la demostración de el lema 2.6, obtuvimos que $\beta\mathbb{H}$ es imagen continua de $\beta\omega$ y, como $\beta\mathbb{H}$ es compacto, el inciso (2) nos dice que $w(\beta\mathbb{H}) \leqslant w(\beta\omega)$. De esta forma, tenemos las siguientes desigualdades:

$$c(\mathbb{H}^*) \leqslant d(\mathbb{H}^*) \leqslant w(\mathbb{H}^*) \leqslant w(\beta\mathbb{H}) \leqslant w(\beta\omega) = \mathfrak{c}.$$

Para concluir la demostración, basta probar que $\mathfrak{c} \leqslant c(X^*)$. Para cada $n < \omega$, definimos el intervalo abierto $U_n = (2n, 2n+1)$. Fijemos $\mathcal{A}$, una familia casi ajena maximal de cardinalidad $\mathfrak{c}$ [7, II Theorem 1.3, p. 48], esto es, $\mathcal{A}$ es una colección consistente de $\mathfrak{c}$ subconjuntos infinitos de ω de tal modo que $A \cap B$ es finito siempre que A y B sean elementos distintos de $\mathcal{A}$ y para cualquier $E \in [\omega]^\omega$ hay $A \in \mathcal{A}$ con $|A \cap E| = \omega$. Para cada $A \in \mathcal{A}$, definimos $G_A = \mathbb{H}^* \cap \operatorname{Ex}(\bigcup_{n \in A} U_n)$ (ver definición 1.24). Afirmamos que $\{G_A : A \in \mathcal{A}\}$ es una familia celular en $\mathbb{H}^*$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Sea $A \in \mathcal{A}$. Claramente G_A es abierto en $\mathbb{H}^*$. Para probar que $G_A \neq \emptyset$, sea $f : \omega \to A$ una función biyectiva. Ahora, dado $n < \omega$, fijemos $x_n \in U_{f(n)}$ y notemos que esta elección nos garantiza que $F = \{x_k : k < \omega\}$ y $\mathbb{H} \setminus \bigcup_{k \in A} U_k$ son un par de subconjuntos cerrados ajenos de $\mathbb{H}$. Luego (ver teorema 1.21),

$$\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} F \subseteq \beta\mathbb{H} \setminus \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \left(\mathbb{H} \setminus \bigcup_{k \in A} U_k \right) = \operatorname{Ex} \bigcup_{k \in A} U_k.$$

Tomemos $u \in \omega^*$ y denotemos por p al u-límite de la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en $\beta\mathbb{H}$ (lema 1.40). La condición $\omega \in u$ implica la pertenencia $p \in \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} F$. Así, bastará probar que $p \in \mathbb{H}^*$ para concluir que $p \in G_A$.

Empecemos por argumentar que $p \notin F$: si $\ell < \omega$, la proposición 1.20 nos da $B \in u$ con $\ell \notin B$; de este modo, $E = \{x_k : k \in B\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{H}$ con $x_\ell \notin E$, y por las igualdades

$$E = \operatorname{cl}_{\mathbb{H}} E = \mathbb{H} \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} E, \tag{2.1}$$

se deduce que $x_\ell \notin \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} E$, o sea, x_ℓ no es el u-límite de $\{x_n\}_{n<\omega}$.

Finalmente, como F es cerrado en $\mathbb{H}$, igualdades similares a las presentadas en (2.1) nos dan $p \notin \mathbb{H}$.

Sean $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \neq B$. Tenemos que (ver proposición 1.25)

$$\begin{aligned} G_A \cap G_B &= \mathbb{H}^* \cap \operatorname{Ex}\left(\bigcup_{n\in A} U_n\right) \cap \operatorname{Ex}\left(\bigcup_{n\in B} U_n\right) \\ &= \mathbb{H}^* \cap \operatorname{Ex}\left(\left(\bigcup_{n\in A} U_n\right) \cap \bigcup_{n\in B} U_n\right) \\ &= \mathbb{H}^* \cap \operatorname{Ex}\left(\bigcup_{n\in A\cap B} U_n\right). \end{aligned}$$

Ahora, en vista de que $\operatorname{Ex}\left(\bigcup_{n\in A\cap B} U_n\right)$ es un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{H}$ cuya intersección con $\mathbb{H}$ es el conjunto acotado (recuerde que $A \cap B$ es finito) $\bigcup_{n\in A\cap B} U_n$, el lema 2.3 nos da $\operatorname{Ex}(\bigcup_{n\in A\cap B} U_n) \cap \mathbb{H}^* = \emptyset$. Concluimos que $G_A \cap G_B = \emptyset$ y, por lo tanto, $\{G_E : E \in \mathcal{A}\}$ es una familia celular. Más aún, lo anterior también demuestra que $|\{G_E : E \in \mathcal{A}\}| = \mathfrak{c}$, lo cual implica que $\mathfrak{c} \leqslant c(\mathbb{H}^*)$. $\square$

La última función cardinal topológica que analizaremos aquí es *el carácter*: dado un espacio topológico X y un punto $p \in X$, el símbolo $\chi(p, X)$ (léase *el carácter de p en X*) representará a la menor cardinalidad de una base local para X en p; de este modo, *el carácter de X* se define como

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Por ejemplo, si $X \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}, \mathbb{H}^-\}$, entonces $\chi(X) = \omega$.

Observe que para cualquier espacio X y cualquier $p \in X$ se tiene que las condiciones $\chi(p, X) < \omega$ y $\chi(p, X) = 1$ son equivalentes.

Estamos interesados en verificar que $\chi(\mathbb{H}^*) = \mathfrak{c}$ y para esto necesitaremos algunos resultados sobre $\beta\omega$.

Para el resto de la sección, denotemos por $\mathcal{C}$ a la colección de todos los subconjuntos de ω cuyo complemento es finito, es decir,

$$\mathcal{C} = \left\{\omega \setminus A : A \in [\omega]^{<\omega}\right\}.$$

Lema 2.10. *Si E es un subconjunto infinito de ω, entonces existe $p \in \omega^*$ con $E \in p$.*

Demostración. Un argumento rutinario muestra que la familia $\{E\} \cup \mathcal{C}$ es centrada (definición 1.3), así que podemos aplicar el lema 1.4 para obtener $p \in \beta\omega$ con $\{E\} \cup \mathcal{C} \subseteq p$. Luego, $E \in p$ y como $\bigcap p \subseteq \bigcap \mathcal{C} = \emptyset$, la proposición 1.20 nos da $p \in \omega^*$. □

Una propiedad que se deduce de la prueba previa es que si $\mathcal{C} \subseteq p \in \beta\omega$, entonces $p \in \omega^*$. Este hecho será empleado en el resultado siguiente.

Lema 2.11. *Existe un ultrafiltro $u \in \omega^*$ con $\chi(u, \omega^*) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. En la demostración de [1, Proposition 3.23, p. 51] se construye una familia independiente en ω de tamaño $\mathfrak{c}$, esto es, una colección $\mathcal{I}$ formada por $\mathfrak{c}$ subconjuntos de ω y de tal modo que para cualesquiera $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 \in [\mathcal{I}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ que satisfagan $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_1 = \emptyset$ se tiene que $|(\bigcap \mathcal{E}_0) \setminus \bigcup \mathcal{E}_1| = \omega$.

A continuación mostraremos que

$$\mathcal{S} = \mathcal{I} \cup \left\{\omega \setminus \bigcap \mathcal{E} : \mathcal{E} \in [\mathcal{I}]^{\omega}\right\} \cup \mathcal{C}$$

es un conjunto centrado.

Comencemos por tomar $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}$, $n \in \omega$, $\{\mathcal{E}_k : k \leqslant n\} \subseteq [\mathcal{I}]^{\omega}$ y $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^{<\omega}$, de tal modo que tanto $\mathcal{D}$ como $\mathcal{F}$ sean finitos y no vacíos. Hagamos $\mathcal{H} = \mathcal{D} \cup \{\omega \setminus \bigcap \mathcal{E}_k : k \leqslant n\} \cup \{\omega \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ y fijemos, para cada $k \leqslant n$, un conjunto $E_k \in \mathcal{E}_k \setminus \mathcal{D}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\bigcap \mathcal{H} &= \left(\bigcap \mathcal{D}\right) \cap \bigcap_{k=0}^{n} \left(\omega \setminus \bigcap \mathcal{E}_k\right) \cap \bigcap \{\omega \setminus F : F \in \mathcal{F}\} \\
&= \left(\left(\bigcap \mathcal{D}\right) \setminus \bigcup_{k=0}^{n} \bigcap \mathcal{E}_k\right) \setminus \bigcup \mathcal{F} \supseteq \left(\left(\bigcap \mathcal{D}\right) \setminus \bigcup_{k=0}^{n} E_k\right) \setminus \bigcup \mathcal{F}
\end{aligned}$$

y, por ende, $\bigcap \mathcal{H}$ es un conjunto infinito (en particular, no vacío). De aquí se deduce fácilmente que $\mathcal{S}$ es centrada.

Invoquemos ahora el lema 1.4 para obtener $u \in \beta\omega$ con $\mathcal{S} \subseteq u$. Luego, la contención $\mathcal{C} \subseteq u$ nos da $u \in \omega^*$.

Dado $A \subseteq \omega$, hagamos $A^* = \omega^* \cap A^-$ (ver definición 1.29). Entonces, el hecho de que $\{A^- : A \subseteq \omega\}$ sea base para $\beta\omega$ nos dice que $\{A^* : A \subseteq \omega\}$ es base para ω^*. En consecuencia, hay $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ de tal suerte que $\{V^* : V \in \mathcal{V}\}$ es base local para ω^* en u y $|\mathcal{V}| = \chi(u, \omega^*)$. Claramente, $\chi(u, \omega^*) \leqslant \mathfrak{c}$. El resto de nuestro argumento tiene por fin convencernos de que la desigualdad estricta es imposible.

Verifiquemos que $\mathcal{V} \subseteq u$: si $V \in \mathcal{V}$, se sigue que $u \in V^* \subseteq V^-$ y así, $V \in u$.

Note que si $A \in [\omega]^{<\omega}$, entonces $\omega \setminus A \in \mathcal{C} \subseteq u$ y de este modo, $A \notin u$. Luego, cada elemento de $\mathcal{V}$ es infinito. Empleemos este hecho para comprobar que $|V^*| \geqslant 2$, siempre que $V \in \mathcal{V}$.

Sea $V \in \mathcal{V}$. La infinitud de V nos proporciona dos conjuntos $V_0, V_1 \in [\omega]^\omega$ tales que $V_0 \cup V_1 = V$ y $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. De acuerdo al lema 2.10, hay $p_0, p_1 \in \omega^*$ con $V_0 \in p_0$ y $V_1 \in p_1$. Dado que V_0 y V_1 son ajenos, se obtiene que $p_0 \neq p_1$. Por otro lado, si $i < 2$, se tiene que la contención $V_i \subseteq V$ implica que $V \in p_i$ o, equivalentemente, $p_i \in V^*$.

Probemos por contradicción que $\chi(u, \omega^*) \geqslant \omega$: la condición $\chi(u, \omega^*) < \omega$ implica que hay $V \subseteq \omega$ con $\mathcal{V} = \{V\}$ y como ω^* es de Hausdorff, se deduce que $V^* = \{u\}$; una contradicción a lo establecido en el párrafo de arriba. En conclusión, $\mathcal{V}$ es infinita.

Hagamos $\mathcal{W} = \{V \setminus n : V \in \mathcal{V} \ \wedge \ n < \omega\}$ y tomemos $V \in \mathcal{V}$ y $n < \omega$. En vista de que $\omega \setminus n \in \mathcal{C} \subseteq u$ y $V \setminus n = V \cap (\omega \setminus n)$, deducimos que $\mathcal{W} \subseteq u$. Además, $V = V \setminus 0 \in \mathcal{W}$ y, en consecuencia, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Luego,

$$|\mathcal{V}| \leqslant |\mathcal{W}| \leqslant |\mathcal{V}| \cdot \omega = |\mathcal{V}|,$$

es decir, $|\mathcal{W}| = |\mathcal{V}|$.

Nuestra intención ahora es exhibir una función $f : \mathcal{I} \to \mathcal{W}$ de tal modo que $f(A) \subseteq A$, para cada $A \in \mathcal{I}$. Para esto, será conveniente verificar, en primer término, que si $A, B \subseteq \omega$ satisfacen $A^* \subseteq B^*$, entonces $A \setminus B$ es finito. Hagamos esto por contrapuesta: si $E = A \setminus B$ es infinito, el lema 2.10 nos da $p \in \omega^*$ con $E \in p$ y como $E \subseteq A$, deducimos que $A \in p$ (es decir, $p \in A^*$); por otro lado, la igualdad $E \cap B = \emptyset$ garantiza que $B \notin p$, esto es, $p \notin B^*$.

Con respecto a nuestra función f, para cada $A \in \mathcal{I}$ se tiene que $u \in A^*$ y como $\{V^* : V \in \mathcal{V}\}$ es base local para ω^* en u, podemos fijar $V \in \mathcal{V}$ con $V^* \subseteq A^*$. Por lo hecho en el párrafo precedente, existe $\ell < \omega$ con $V \setminus A \subseteq \ell$. Así, basta con hacer $f(A) = V \setminus \ell \in \mathcal{W}$.

En busca de una contradicción, supongamos que $\chi(u, \omega^*) < \mathfrak{c}$. Esto implica que alguna fibra de f es infinita, es decir, hay $\mathcal{E} \in [\mathcal{I}]^\omega$ y $A \in \mathcal{I}$ de tal modo que $f(A) = f(E) \subseteq E$, para cualquier $E \in \mathcal{E}$. Entonces, como resultado de la contención $f(A) \subseteq \bigcap \mathcal{E}$ obtenemos la pertenencia $\bigcap \mathcal{E} \in u$, lo cual es imposible ya que, por definición, $\omega \setminus \bigcap \mathcal{E} \in \mathcal{S} \subseteq u$. En resumen, $\chi(u, \omega^*) = \mathfrak{c}$. □

Suponga que X es un espacio topológico. Si $q \in Y \subseteq X$ y $\mathcal{V}$ es una base local para X en q con $|\mathcal{V}| = \chi(q, X)$, entonces $\{Y \cap V : V \in \mathcal{V}\}$ es una base local para Y en q y, de este modo, $\chi(q, Y) \leqslant \chi(q, X)$.

Ahora, cuando $\mathcal{B}$ es una base para X con $|\mathcal{B}| = w(X)$ y $p \in X$ es arbitrario, se tiene que $\{B \in \mathcal{B} : p \in B\}$ es base local para X en p. Luego, $\chi(X) \leqslant w(X)$ y, en particular, $\chi(\mathbb{H}^*) \leqslant \mathfrak{c}$.

Proposición 2.12. *El carácter de $\mathbb{H}^*$ es $\mathfrak{c}$; más aún, hay $p \in \mathbb{H}^*$ con $\chi(p, \mathbb{H}^*) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Denotemos por Y al subespacio $(\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \omega) \setminus \mathbb{H}$ de $\mathbb{H}^*$. Como ω es un subconjunto cerrado de $\mathbb{H}$, obtenemos que $\omega = \operatorname{cl}_{\mathbb{H}} \omega = \mathbb{H} \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \omega$ y así, $Y = (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \omega) \setminus \omega$.

De acuerdo al lema 1.23, existe un homeomorfismo $h : \beta\omega \to \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \omega$ de tal modo que $h(n) = n$, siempre que $n < \omega$, y entonces, $h[\omega^*] = (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \omega) \setminus \omega = Y$. Luego, si u es como en el lema 2.11 y $p = h(u)$, se sigue que $\chi(p, Y) = \chi(u, \omega^*) = \mathfrak{c}$. Además, el que Y sea subespacio de $\mathbb{H}^*$ implica que

$$\mathfrak{c} = \chi(p, Y) \leqslant \chi(p, \mathbb{H}^*) \leqslant \mathfrak{c}.$$

□

2.3 Nulos conexos de $\mathbb{H}^*$

En la sección previa vimos que las funciones cardinales peso, densidad, celularidad y carácter cambian radicalmente para $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$. Ahora veremos otra diferencia entre estos espacios: mientras que $\mathbb{H}$ es abundante en nulos conexos (el vacío y todos los intervalos cerrados), $\mathbb{H}^*$ sólo posee dos, tal y como demostraremos a continuación.

Para esta sección, fijemos un conjunto $E \in Z(\mathbb{H}^*)$ con $\emptyset \neq E \neq \mathbb{H}^*$ y $p \in \mathbb{H}^* \setminus E$. El objetivo es probar que E no es conexo.

Lema 2.13. *Existe $f \in C(\beta\mathbb{H})$ de tal modo que $\operatorname{ran}(f)$, la imagen de f, es un subconjunto de $[0,1]$, $E = \mathbb{H}^* \cap f^{-1}\{0\}$ y $f(p) = 1$.*

Demostración. Sea $g \in C(\mathbb{H}^*)$ de tal forma que $E = g^{-1}\{0\}$. Notemos que $g(p) \neq 0$. Definimos a la función $h : \mathbb{H}^* \to \mathbb{R}$ mediante

$$h(x) = \max\{0, \min\{g(x)/g(p), 1\}\}.$$

Observemos que $h \in C(\mathbb{H}^*)$, $\operatorname{ran}(h) \subseteq [0,1]$, $E = h^{-1}\{0\}$ y $h(p) = 1$. En efecto, si $x \in E$ tenemos que $g(x) = 0$. De esta forma, $h(x) = \max\{0, \min\{0/g(p), 1\}\} = 0$. Esto muestra que $E \subseteq h^{-1}\{0\}$. Para probar la otra contención, supongamos que $x \in \mathbb{H}^* \setminus E$ y probaremos que $x \in \mathbb{H}^* \setminus h^{-1}\{0\}$. Como $x \notin E$, $g(x) \neq 0$. De esta forma, $\min\{g(x)/g(p), 1\} \leqslant h(x)$.

Debido al lema 1.22, sabemos que $\mathbb{H}^*$ es un subconjunto cerrado de $\beta\mathbb{H}$. Por el Teorema de Extensión de Tietze, existe $f \in C(\beta\mathbb{H})$ de tal manera que $h \subseteq f$ y $\operatorname{ran}(f) \subseteq [0,1]$. □

Por el resto de la sección, f será tal y como fue enunciada en el lema previo. Ahora, definimos

$$G = \mathbb{H} \cap f^{-1}\left[[0, 1/2]\right] = \{t \in \mathbb{H} : f(t) \leqslant 1/2\}.$$

Lema 2.14. *Los enunciados siguientes son ciertos.*

1. $E \subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G$.

2. *G no está acotado.*

3. *Para cada $x \in \mathbb{H}$ existe $y \in \mathbb{H} \setminus G$ tal que $x < y$.*

Demostración. Para probar (1), sean $x \in E$ y V un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{H}$ tal que $x \in V$. Hagamos $W = V \cap f^{-1}[[0, 1/2)]$. Observemos que W es un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{H}$ y, además, $x \in W$ porque $f(x) = 0$. Como $\mathbb{H}$ es un subconjunto denso de $\beta\mathbb{H}$, existe

$t \in W \cap \mathbb{H}$. De esta forma, $t \in V \cap \mathbb{H}$ y $f(t) < 1/2$. Esto implica que $V \cap G \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $x \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} G$.

Ahora, para probar (2), notemos que G es cerrado en $\mathbb{H}$ porque $G = f^{-1}[[0, 1/2]] \cap \mathbb{H}$. En busca de una contradicción, supongamos que G sí es acotado. Entonces existe $M > 0$ de tal manera que $G \subseteq [0, M]$. El intervalo $[0, M]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{H}$ y, por ende, también de $\beta\mathbb{H}$. Como $\beta\mathbb{H}$ es un espacio de Hausdorff, $[0, M]$ es un subconjunto cerrado de $\beta\mathbb{H}$. De esta forma obtenemos que $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} G \subseteq [0, M]$, una contradicción a $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{H}^*$.

Nuestro argumento para probar (3) será por contradicción: vamos a suponer que existe $x \in \mathbb{H}$ de tal forma que $[x, \infty) \subseteq G$. Como $x \in \mathbb{H}$, existe $n \in \omega$ tal que $[n, \infty) \subseteq [x, \infty)$. De esta manera obtenemos que (ver lema 2.1)

$$\mathbb{H}^* \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[n, \infty) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}[x, \infty) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} G$$

y, por lo tanto,

$$1 = f(p) \in f[\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} G] \subseteq \mathrm{cl}_{[0,1]} f[G] \subseteq [0, 1/2],$$

que es el absurdo que estabamos buscando □

Definición 2.15. Para cada $n < \omega$, definimos $U_n = f^{-1}\left[\left[0, \frac{1}{n+2}\right)\right]$.

Dado $n < \omega$, observemos que $f[U_n \cap \mathbb{H}] \subseteq [0, 1/2)$ y, por lo tanto, $U_n \cap \mathbb{H} \subseteq G$. Además, tenemos que

$$E \subseteq f^{-1}\{0\} \subseteq U_n$$

y, por ende, $\emptyset \neq E \subseteq U_n \cap \mathbb{H}^*$. Esto muestra que $U_n \cap \mathbb{H}^*$ no es vacío y, por el lema 2.3, $U_n \cap \mathbb{H}$ no está acotado en $\mathbb{H}$.

Lema 2.16. *Existen dos sucesiones $\{s_n\}_{n<\omega}$ y $\{t_n\}_{n<\omega}$ de tal modo que las propiedades siguientes son ciertas para cualquier $n < \omega$.*

1. *$s_n \in \mathbb{H} \setminus G$.*

2. *$t_n \in U_n \cap \mathbb{H}$,*

3. *$s_n + 1 < t_n$ y $t_n + 1 < s_{n+1}$.*

Demostración. Construiremos las sucesiones por recursión. De acuerdo al inciso (2) del lema 2.14, existe $s_0 \in \mathbb{H} \setminus G$ de tal manera que $0 < s_0$. Ahora, como $U_0 \cap \mathbb{H}$ no es acotado en $\mathbb{H}$, existe $t_0 \in U_0 \cap \mathbb{H}$ de tal suerte que $s_0 + 1 < t_0$. Supongamos que ya hemos definido $\{s_i : i \leqslant n\}$ y $\{t_i : i \leqslant n\}$ para algún $n \in \omega$. Nuevamente, el inciso (2) del lema 2.14 nos produce $s_{n+1} \in \mathbb{H} \setminus G$ de tal forma que $t_n + 1 < s_{n+1}$. Dado que $U_{n+1} \cap \mathbb{H}$ no es acotado en $\mathbb{H}$, existe $t_{n+1} \in U_{n+1} \cap \mathbb{H}$ de tal modo que $s_{n+1} + 1 < t_{n+1}$. □

Ahora, definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{H}$

$$G_0 = G \cap \left([0, s_1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [s_{2n}, s_{2n+1}]\right) \text{ y } G_1 = G \cap \bigcup_{n<\omega} [s_{2n+1}, s_{2n+2}].$$

Lema 2.17. *Los enunciados siguientes son ciertos.*

1. *G_0 y G_1 son cerrados ajenos de $\mathbb{H}$.*

2. *$G = G_0 \cup G_1$.*

3. *$E \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}\, G_0 \neq \emptyset \neq E \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}\, G_1$.*

Demostración. En primer lugar, G_0 y G_1 son cerrados porque

$$\mathbb{H} \setminus G_0 = (\mathbb{H} \setminus G) \cup (s_1, s_2) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (s_{2n+1}, s_{2n+2})$$

es un subconjunto abierto de $\mathbb{H}$. De manera análoga se verifica que G_1 es un subconjunto cerrado de $\mathbb{H}$.

Ahora, probaremos que $G_0 \cup G_1 = G$.

$$\begin{aligned} G_0 \cup G_1 &= G \cap \left([0, s_1] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [s_{2n}, s_{2n+1}] \cup \bigcup_{n<\omega} [s_{2n+1}, s_{2n+2}]\right) \\ &= G \cap \mathbb{H} = G. \end{aligned}$$

Con la intención de verificar que E intersecta a $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}\, G_0$, definamos, para cada $n < \omega$, $C_n = \{t_{2k} : k \in \omega \setminus n\}$. Como consecuencia del inciso (3) del lema 2.16 obtenemos que C_n es un subconjunto cerrado de $\mathbb{H}$ que está contenido en G_0.

Dado que $\mathbb{H}$ es metrizable, se deduce que $\{C_n : n < \omega\}$ es una familia centrada de subconjuntos nulos de $\mathbb{H}$. Luego, por el lema 1.4, existe $q \in \beta\mathbb{H}$ de tal forma que $\{C_n : n < \omega\} \subseteq q$. Afirmamos que $q \in \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_0$ y que $f(q) = 0$.

Sea $n < \omega$ arbitrario. De la proposición 1.16 deducimos que $q \in \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} C_n$ y, por ende, $f(q) \in f[\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} C_n]$. Para cada $k \in \omega \setminus n$, el inciso (2) del lema 2.16 nos da $t_{2k} \in U_{2k}$ y de este modo

$$f(t_{2k}) < \frac{1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{n+2},$$

lo cual implica que

$$f[C_n] \subseteq \left[0, \frac{1}{n+2}\right).$$

En resumen,

$$f(q) \in f[\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} C_n] \subseteq \operatorname{cl}_{[0,1]} f[C_n] \subseteq \left[0, \frac{1}{n+2}\right].$$

Lo anterior muestra que

$$f(q) \in \bigcap_{n<\omega} \left[0, \frac{1}{n+2}\right] = \{0\},$$

esto es, $q \in f^{-1}\{0\}$. Por otro lado, la contención $\{C_n : n < \omega\} \subseteq q$ nos da $\bigcap q \subseteq \bigcap_{n<\omega} C_n = \emptyset$, es decir (proposición 1.20), $q \in \mathbb{H}^*$. Así (lema 2.13), $q \in E$.

Para concluir la prueba de la primera parte del inciso (3), note que $C_0 \subseteq G_0$ implica que $q \in \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} C_0 \subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_0$. De manera análoga podemos probar que $E \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_1 \neq \emptyset$. □

Hagamos $F_0 = E \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_0$ y $F_1 = E \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_1$. Entonces F_0 y F_1 son subconjuntos cerrados de E y, además, son no vacíos. Por otra parte (teorema 1.21),

$$F_0 \cap F_1 = E \cap (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_0) \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_1 = E \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}(G_0 \cap G_1) = E \cap \emptyset = \emptyset.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}F_0 \cup F_1 &= (E \cap (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_0)) \cup (E \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_1) \\ &= E \cap ((\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_0) \cup \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G_1) = E \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}(G_0 \cup G_1) \\ &= E \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} G = E.\end{aligned}$$

Esto muestra que $E = F_0 \mid F_1$ y, por lo tanto, E no es conexo.

2.4 Abiertos estándar de $\mathbb{H}^*$

Finalizaremos este capítulo con la prueba de que $\mathbb{H}^*$ es indescomponible y para esto emplearemos una clase particular de subconjuntos abiertos de $\beta\mathbb{H}$, misma que definimos a continuación.

En primer término, una *sucesión estándar* es una sucesión $\{t_n\}_{n<\omega}$ en $\mathbb{H}$ que es estrictamente creciente y diverge a infinito.

Definición 2.18. Suponga que $\{t_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión estándar.

1. Cuando $t_0 = 0$, el conjunto (ver definición 1.24)

$$\operatorname{Ex}\left([t_0, t_1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (t_n, t_{n+1})\right)$$

recibirá por nombre *abierto dado por* $\{t_n\}_{n<\omega}$, mientras que

2. Si $t_0 \neq 0$, entonces *el abierto dado por* $\{t_n\}_{n<\omega}$ es

$$\operatorname{Ex}\left(\bigcup_{n<\omega}^{\infty} (t_n, t_{n+1})\right).$$

De esta forma, la frase *W es un abierto estándar* significa que W es igual al abierto dado por alguna sucesión estándar.

Definición 2.19. Diremos que $(\{a_n\}_{n<\omega}, \{b_n\}_{n<\omega})$ es *una pareja estándar* si los enunciados siguientes son satisfechos.

1. Tanto $\{a_n\}_{n<\omega}$ como $\{b_n\}_{n<\omega}$ son sucesiones estándar.

2. Para cualquier $n < \omega$, $a_n < b_n < a_{n+1}$.

3. $a_0 = 0$.

Suponga que $(\{a_n\}_{n<\omega}, \{b_n\}_{n<\omega})$ es una pareja estándar y note que si definimos

$$V_0 = [a_0, b_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{2n}, b_{2n}) \qquad \text{y} \qquad V_1 = \bigcup_{n<\omega} (a_{2n+1}, b_{2n+1}), \tag{2.2}$$

entonces $\mathrm{Ex}(V_0)$ y $\mathrm{Ex}(V_1)$ son abiertos estándar. Estos serán llamados *abiertos dados por* $(\{a_n\}_{n<\omega}, \{b_n\}_{n<\omega})$. Además, convendremos en que el orden es importante: siempre que empleemos la frase *U y V son los abiertos dados por la pareja estándar* $(\{a_n\}_{n<\omega}, \{b_n\}_{n<\omega})$ estaremos suponiendo que $0 \in U$.

Lema 2.20. *Si W_0 y W_1 son los abiertos dados por alguna pareja estándar, entonces*

$$\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} W_0 \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} W_1 = \emptyset.$$

Demostración. Fijemos $(\{a_n\}_{n<\omega}, \{b_n\}_{n<\omega})$, una pareja estándar, de tal modo que, para cada $i < 2$, $W_i = \mathrm{Ex}\,(V_i)$, donde V_0 y V_1 son como en (2.2).

Sea $i < 2$. El que $\mathbb{H}$ sea denso en $\beta\mathbb{H}$ implica que

$$\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} W_i = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}}(W_i \cap \mathbb{H}) = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} V_i \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \mathrm{cl}_{\mathbb{H}} V_i,$$

y como $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}} V_i = \bigcup_{k<\omega} [a_{2k+i}, b_{2k+i}]$, sólo nos resta invocar el teorema 1.21. □

Observemos que si U es un abierto en $\beta\mathbb{H}$ con $U \cap \mathbb{H}^* \neq \emptyset$, entonces (lema 2.3) $U \cap \mathbb{H}$ es un subconjunto no acotado de la recta real. De este modo, para cualquier $t \in \mathbb{H}$ se tiene que $U \cap (t, \infty)$ es un conjunto no vacío y acotado inferiormente por t. En consecuencia, $\inf\,(U \cap (t, \infty))$, el ínfimo de $U \cap (t, \infty)$, existe; más aún, este número real es un elemento de $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U$.

Proposición 2.21. *Para cada $i < 2$, sea U_i un abierto en $\beta\mathbb{H}$ con $U_i \cap \mathbb{H}^* \neq \emptyset$. Si $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_0 \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_1 = \emptyset$ y*

$$\inf(U_0 \cap \mathbb{H}) \leqslant \inf(U_1 \cap \mathbb{H}), \tag{2.3}$$

entonces existen W_0 *y* W_1*, abiertos dados por una pareja estándar, de tal modo que* $U_0 \subseteq W_0$ *y* $U_1 \subseteq W_1$*.*

Demostración. Recordemos que si k y ℓ son un par de números enteros, entonces el símbolo $k \equiv \ell \mod 2$ significa que, una de dos, tanto k como ℓ son pares ó k y ℓ, ambos, son impares.

Afirmación 1. Existen dos sucesiones en $\mathbb{H}$, $\{a_n\}_{n<\omega}$ y $\{b_n\}_{n<\omega}$, de tal modo que los enunciados siguientes son ciertos para cualquier $n < \omega$.

1. $a_0 = 0$.

2. $a_n < b_n < a_{n+1}$.

3. El intervalo cerrado $[b_n, a_{n+1}]$ tiene intersección vacía con $U_0 \cup U_1$.

4. Si $i < 2$ satisface $n \equiv i \mod 2$, entonces

$$[a_n, b_n] \cap U_i \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{H} \setminus U_{1-i}.$$

Antes de probar este enunciado, veamos cómo éste puede ser utilizado para nuestro argumento.

En primer término verifiquemos que las condiciones de arriba implican que la pareja $(\{a_n\}_{n<\omega}, \{b_n\}_{n<\omega})$ es una pareja estándar. En vista de (1) y (2), sólo requerimos probar que $A = \{a_n : n < \omega\}$ no está acotado. Para esto, supongamos lo contrario y pongamos $x = \sup A$. De acuerdo a (2), $B = \{b_n : n < \omega\}$ también está acotado y $x = \sup B$. Fijemos $i < 2$ y mostremos que $x \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_i$ (esta es la contradicción buscada porque $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_0 \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_1 = \emptyset$).

Sea G un abierto en $\beta\mathbb{H}$ con $x \in G$. Entonces, $G \cap \mathbb{H}$ es un abierto en $\mathbb{H}$ que contiene a x y como $x > 0$, hay $c \in \mathbb{H}$ con $c < x$ y $(c, x) \subseteq G$. Tomemos $m < \omega$ de tal modo que $a_m \in (c, x)$ y observemos que esto implica la contención $[a_{2m+i}, b_{2m+i}] \subseteq G$. Ahora empleemos (4) para deducir que $[a_{2m+i}, b_{2m+i}] \cap U_i \neq \emptyset$ y concluir que G tiene intersección no vacía con U_i. Por lo tanto $x \in \mathrm{cl}_{\beta H} U_i$.

Definamos V_0 y V_1 tal y como aparecen en (2.2). Una consecuencia importante de las condiciones (1)-(4) y del hecho de que las sucesiones $\{a_n\}_{n<\omega}$ y $\{b_n\}_{n<\omega}$ divergen a infinito es que $U_i \subseteq V_i \subseteq \mathrm{Ex}(V_i)$, para cualquier $i < 2$. De esta forma, $W_0 = \mathrm{Ex}(V_0)$ y $W_1 = \mathrm{Ex}(V_1)$ son los abiertos que necesitamos.

Demostremos la afirmación 1. Para esto nos será útil la siguiente convención:

$$\text{si } r \in \mathbb{H} \text{ e } i < 2, \text{ entonces } U_i^r = U_i \cap (r, \infty).$$

De acuerdo a lo hecho en el párrafo que precede a esta proposición, $\inf U_i^r$ siempre existe y es un elemento de $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_i$.

Afirmación 2. Si $r \in \mathbb{H}$ e $i < 2$ son tales que $\inf U_i^r < \inf U_{1-i}^r$, entonces hay $s, t \in \mathbb{H}$ con

(α) $r < s < t$,

(β) el intervalo abierto (r, s) tiene intersección no vacía con U_i,

(γ) $[s, t] \cap (U_0 \cup U_1) = \emptyset$ y

(δ) $\inf U_{1-i}^t < \inf U_i^t$.

Hagamos $t = \inf U_{1-i}^r$ y $t' = \inf U_i^r$. De este modo, $0 \leqslant r \leqslant t' < t$.

En vista de que $t \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_{1-i}^r$, deducimos que $t \notin \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_i^r$, esto es, existen $s, w \in \mathbb{H}$ con $s < t < w$ y $[s, w] \subseteq \mathbb{H} \setminus \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_i^r$. Así, la pertenencia $t' \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_i^r$ implica que $t' < s$ ó $w < t'$. Como $t < w$, la segunda posibilidad es imposible, esto es, se tiene que $t' < s$.

Del párrafo previo se sigue que $t' < s < t$, lo cual garantiza que (α) y (β) son ciertas.

Con respecto a (γ), la elección de s nos da $[s, t] \cap U_i = \emptyset$. Por otro lado, las condiciones $s \in (r, \infty)$ y $s < t$ aseguran que $[s, t) \cap U_{1-i} = \emptyset$. Finalmente, para convencernos de que $t \notin U_{1-i}$ basta con notar que U_{1-i}^r es abierto en $\mathbb{H}$ y $r < t = \inf U_{1-i}^r$.

De la definición de t y (γ) se sigue que $U_{1-i}^r = U_{1-i}^t$ y, naturalmente, $t = \inf U_{1-i}^t$. Sea $v = \inf U_i^t$. Claramente, $t \leqslant v$ y $v \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_i$. Luego, la pertenencia $t \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} U_{1-i}$ nos permite concluir que $v \neq t$, esto es, $t < v$, tal y como se requiere en (δ). Esto finaliza la prueba de la afirmación 2.

Construiremos por recursión las sucesiones que se necesitan en la afirmación 1. Para la base, definamos $a_0 = 0$ y notemos que las condiciones (1)-(4) son satisfechas trivialmente para cualquier $n < 0$. Por otro lado, la hipótesis de que U_0 y U_1 tienen cerraduras ajenas nos permite deducir que la desigualdad en (2.3) es estricta, esto es, $\inf U_0^{a_0} < \inf U_1^{a_0}$.

Demos por hecho que, para alguna $k < \omega$, hemos obtenido $\{a_n : n \leqslant k\}$ y $\{b_n : n < k\}$ de tal forma que (1)-(4) se cumplen para cada $n < k$ y, además, $\inf U_i^{a_k} < \inf U_{1-i}^{a_k}$, donde $i < 2$ satisface $k \equiv i \mod 2$. De acuerdo a la afirmación 2, existen $b_k, a_{k+1} \in \mathbb{H}$ de tal modo que los enunciados (α)-(δ) se verifican cuando uno toma $r = a_k$, $s = b_k$ y $t = a_{k+1}$. En consecuencia, (1)-(4) son ciertos siempre que $n < k + 1$ y, adicionalmente, $\inf U_{1-i}^{a_{k+1}} < \inf U_i^{a_{k+1}}$. Esto completa la recursión porque, claramente, $k + 1 \equiv 1 - i \mod 2$. $\square$

Ahora presentamos un par de consecuencias del resultado previo que ilustran la importancia de los abiertos estándar en el estudio de $\mathbb{H}^*$.

Corolario 2.22. *Si F_0 y F_1 son cerrados ajenos no vacíos de $\mathbb{H}^*$, entonces existen W_0 y W_1, abiertos dados por una pareja estándar, tales que $F_i \subseteq W_i$, para cada $i < 2$.*

Demostración. Empecemos por notar que el lema 1.22 nos dice que $\mathbb{H}^*$ es un subconjunto cerrado de $\beta\mathbb{H}$ y, por lo tanto, F_0 y F_1 son subconjuntos cerrados y ajenos del espacio normal $\beta\mathbb{H}$. Por ende, existen O_0 y O_1, subconjuntos abiertos de $\beta\mathbb{H}$, de tal forma que $F_i \subseteq O_i$ $(i < 2)$ y $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} O_0 \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} O_1 = \emptyset$.

Pongamos $t = \inf(O_0 \cap \mathbb{H})$ y definamos $U_0 = O_0$ y $U_1 = O_1 \setminus [0, t]$. Entonces, la compacidad del intervalo $[0, t]$ nos garantiza que U_0 y U_1 son abiertos de $\beta\mathbb{H}$ con cerraduras ajenas y tales que $F_i \subseteq U_i$ $(i < 2)$; más aún, $\inf(U_0 \cap \mathbb{H}) = t \leqslant \inf(U_1 \cap \mathbb{H})$, así que podemos emplear la proposición de arriba para hallar W_0 y W_1, abiertos dados por alguna pareja estándar, de tal manera que $U_i \subseteq W_i$ $(i < 2)$. $\square$

Mostraremos a continuación que los abiertos estándar forman una base para $\mathbb{H}^*$; formalmente:

Corolario 2.23. *Si U es un abierto en $\mathbb{H}^*$, entonces para cualquier $p \in U$ existe V, un abierto estándar, con $p \in V \cap \mathbb{H}^* \subseteq U$.*

Demostración. Apliquemos el corolario previo a los cerrados $\{p\}$ y $\mathbb{H}^* \setminus U$ para hallar V y W, abiertos dados por alguna pareja estándar, con $p \in V$ y $\mathbb{H}^* \setminus U \subseteq W$. De esta manera, $V \subseteq \beta\mathbb{H} \setminus W$ y, por ende, $p \in V \cap \mathbb{H}^* \subseteq \mathbb{H}^* \setminus W \subseteq U$. $\square$

2.5 Indescomponibilidad de $\mathbb{H}^*$

Nos encontramos listos para presentar el último resultado del capítulo.

Teorema 2.24. $\mathbb{H}^*$ *es indescomponible.*

Demostración. Por el teorema 1.48, basta probar que cualquier subcontinuo propio de $\mathbb{H}^*$ tiene interior vacío.

Sea K un subcontinuo propio de $\mathbb{H}^*$. Probemos que $\operatorname{int} K = \emptyset$. Sea $x \in \mathbb{H}^* \setminus K$. Del corolario 2.22 se sigue que los cerrados $\{x\}$ y K pueden ser separados por abiertos dados por alguna pareja estándar $(\{c_n\}_{n<\omega}, \{d_n\}_{n<\omega})$. Ahora definamos $\{a_n\}_{n<\omega}$ y $\{b_n\}_{n<\omega}$ mediante $a_n = c_{2n+1}$ y $b_n = c_{2n}$ para obtener las desigualdades $a_n < b_n < a_{n+1}$ para cada $n < \omega$ y además, $K \subseteq \operatorname{Ex}(O)$, donde $O = \bigcup_{n<\omega}(a_n, b_n)$.

Definimos la siguiente familia de subconjuntos de ω:

$$u = \left\{ A \subseteq \omega : K \subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in A} [a_n, b_n] \right\}.$$

Afirmamos que u es un ultrafiltro.

Para empezar, $\emptyset \notin u$ porque $K \nsubseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in\emptyset}[a_n, b_n] = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \emptyset = \emptyset$. Veamos que $\omega \in u$. Notemos que $(\mathbb{H} \setminus O) \cup \operatorname{cl}_{\mathbb{H}} O = \mathbb{H}$. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}
\emptyset &= \beta\mathbb{H} \setminus \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}((\mathbb{H} \setminus O) \cup \operatorname{cl}_{\mathbb{H}} O) \\
&= \beta\mathbb{H} \setminus (\operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}(\mathbb{H} \setminus O) \cup \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}(\operatorname{cl}_{\mathbb{H}} O)) \\
&= (\beta\mathbb{H} \setminus \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}(\mathbb{H} \setminus O)) \cap (\beta\mathbb{H} \setminus \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}(\operatorname{cl}_{\mathbb{H}} O)) \\
&= \operatorname{Ex}(O) \cap (\beta\mathbb{H} \setminus \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}(\operatorname{cl}_{\mathbb{H}} O)).
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\operatorname{Ex}(O) \cap (\beta\mathbb{H} \setminus \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}(\operatorname{cl}_{\mathbb{H}} O)) = \emptyset$ y, por lo tanto, $\operatorname{Ex}(O) \subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}}(\operatorname{cl}_{\mathbb{H}} O) = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n<\omega}[a_n, b_n]$. Como $K \subseteq \operatorname{Ex}(O)$, tenemos que $K \subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n<\omega}[a_n, b_n]$.

Sean $A, B \in u$. De este modo (teorema 1.21)

$$\begin{aligned} K &\subseteq \left(\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in A} [a_n, b_n]\right) \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in B} [a_n, b_n] \\ &= \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \left(\left(\bigcup_{n\in A} [a_n, b_n]\right) \cap \bigcup_{n\in B} [a_n, b_n]\right) \\ &= \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in A\cap B} [a_n, b_n] \end{aligned}$$

De esta forma, $A \cap B$ también es un elemento de u. Ahora, sean $A \in u$ y $B \subseteq \omega$ tal que $A \subseteq B$. Como

$$K \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in A} [a_n, b_n] \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in B} [a_n, b_n],$$

concluimos que $B \in u$.

Para mostrar que u es un filtro maximal, supongamos que $A \subseteq \omega$ y $A \notin u$. Vamos a demostrar que $\omega \setminus A \in u$. Sabemos que

$$K \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n<\omega} [a_n, b_n] = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \left(\bigcup_{n\in A} [a_n, b_n]\right) \cup \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in\omega\setminus A} [a_n, b_n].$$

Como $K \nsubseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in A}[a_n, b_n]$, tenemos que $K \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in\omega\setminus A}[a_n, b_n] \neq \emptyset$. Además (ver teorema 1.21),

$$\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \left(\bigcup_{n\in A} [a_n, b_n]\right) \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in\omega\setminus A} [a_n, b_n] = \emptyset.$$

Si $\omega \setminus A \notin u$, entonces $K \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in A}[a_n, b_n] \neq \emptyset$ y así, hemos encontrado una disconexión para el espacio K, lo cual es una contradicción porque K es conexo. De esta manera, $\omega \setminus A \in u$ y, por lo tanto, u es un ultrafiltro.

Para probar que $\mathrm{int}(K) = \emptyset$ veamos que ningún subconjunto abierto de $\beta\mathbb{H}$ está contenido en K. Sea W un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{H}$ de tal forma que $K \cap W \neq \emptyset$. Vamos a probar que $\mathbb{H}^* \cap W \nsubseteq K$.

Fijemos $p \in W \cap K$. Como $p \in W$ y $\beta\mathbb{H}$ es un espacio regular, existe V, un subconjunto abierto de $\mathbb{H}$, tal que $p \in V$ y $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} V \subseteq W$. Así las cosas, basta que probemos que $\mathbb{H}^* \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} V \nsubseteq K$.

Comprobemos que el conjunto $A = \{n < \omega : V \cap [a_n, b_n] \neq \emptyset\}$ es un elemento de

u. Para esto, hagamos $E = \omega \setminus A$ y notemos que $V \cap \bigcup_{n\in E}[a_n, b_n] = \emptyset$. Dado que V es un abierto que contiene a p, deducimos que $p \notin \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in E}[a_n, b_n]$ y, en consecuencia, $K \nsubseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in E}[a_n, b_n]$. Así, $\omega \setminus A$ no es un elemento del ultrafiltro u, es decir, $A \in u$.

Si A fuese finito, tendríamos que $\bigcup_{n\in A}[a_n, b_n]$ sería un subconjunto compacto de $\beta\mathbb{H}$ y, por ende,

$$K \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in A}[a_n, b_n] = \bigcup_{n\in A}[a_n, b_n] \subseteq \mathbb{H};$$

un absurdo. De este modo, A es infinito.

Sean $B, C \in [\omega]^\omega$ tales que $B \cup C = A$ y $B \cap C = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $B \notin u$. Como u es un ultrafiltro, tenemos que $\omega \setminus B \in u$ y, por lo tanto, $K \subseteq \bigcup_{n\in\omega\setminus B}[a_n, b_n]$. Para cada $n \in B$, sea $x_n \in (a_n, b_n) \cap V$. Hagamos $S = \{x_n : n \in B\}$ y $F = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} S$.

Si M es un subconjunto finito y no vacío de B, entonces $m = \max M$ satisface que $x_m \in S \cap \bigcap\{[x_n, \infty) : n \in M\}$. En particular, la familia

$$\mathcal{A} = \{S\} \cup \{[x_n, \infty) : n \in B\}$$

es centrada y está formada por subconjuntos nulos de $\mathbb{H}$. Luego, de acuerdo al lema 1.4, existe $q \in \beta\mathbb{H}$ con $\mathcal{A} \subseteq q$.

Argumentemos que $q \in \mathbb{H}^* \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} V$. En primer lugar, $\bigcap q \subseteq \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$, es decir (ver proposición 1.20), $q \in \mathbb{H}^*$. Por otro lado, la proposición 1.16 y la contención $S \subseteq V$ nos permiten deducir que $q \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} V$.

Como $K \subseteq \bigcup_{n\in\omega\setminus B}[a_n, b_n]$, tenemos que $K \cap \bigcup_{n\in B}[a_n, b_n] = \emptyset$. Notemos que

$$S \subseteq \bigcup_{n\in B}[a_n, b_n],$$

así que $F \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in B}[a_n, b_n]$. Esto implica que $q \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} \bigcup_{n\in B}[a_n, b_n]$ y, por lo tanto, $q \notin K$. Esto prueba que $\mathbb{H}^* \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{H}} V \nsubseteq K$. $\square$

CAPÍTULO 3: SUMA DE CONTINUOS.

Observemos que si K es un subespacio de $\mathbb{H}$ que resulta ser un continuo, entonces K debe ser un intervalo cerrado y acotado (note que para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $[t,t] = \{t\}$). Ahora, en vista de las diferencias entre $\mathbb{H}$ y $\beta\mathbb{H}$ que hemos presentado en el capítulo previo, tiene sentido preguntarse lo siguiente: ¿cuál es la máxima cardinalidad de una familia $\mathcal{K}$ con las propiedades mencionadas abajo?

1. Cada elemento de $\mathcal{K}$ es un subcontinuo de $\mathbb{H}^*$
2. Si $K, L \in \mathcal{K}$ satisfacen $K \neq L$, entonces los subespacios K y L no son homeomorfos.

En vista de que el peso de $\mathbb{H}^*$ es $\mathfrak{c}$, se sigue que el número total de subconjuntos cerrados de $\mathbb{H}^*$ es, a lo más, $2^{\mathfrak{c}}$. Luego, si $\mathcal{K}$ es una familia como la descrita arriba, entonces $|\mathcal{K}| \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$.

Uno puede hallar en [2, Theorem 3.2, p. 1751] la prueba de lo siguiente: si la Hipótesis del Continuo falla, se tiene que hay una familia $\mathcal{K}$ que satisface (1), (2) y $|\mathcal{K}| = 2^{\mathfrak{c}}$. Por otro lado (ver [3, Theorem 3.7, p. 103]), esta misma conclusión es consecuencia de suponer la Hipótesis del Continuo. En resumen, tanto si suponemos la Hipótesis del Continuo como si no, la respuesta a la pregunta hecha en el primer párrafo de este capítulo es $2^{\mathfrak{c}}$.

Aunque no expondremos las demostraciones de los resultados mencionados arriba, sí nos concentraremos en desarrollar la herramienta básica para entender dichas pruebas.

Supongamos que K_n es un continuo no vacío para cada $n < \omega$. Hagamos $X = \bigoplus_{n<\omega}(K_n \times \{n\})$, esto es, X es la suma topológica de los espacios K_n. Definimos a la función $\pi : X \to \omega$ mediante $\pi(x,n) = n$.

Definición 3.1. Dado X un espacio topológico decimos que una componente conexa de X es un subconjunto C de X que es conexo y para cualquier $Y \subseteq X$ de tal forma que $C \subsetneq Y$ se cumple que Y no es conexo.

Proposición 3.2. *Para cada $n < \omega$, sea K_n un continuo. Las componentes conexas de βX son las fibras de la función $\beta\pi$.*

Demostración. Notemos que si $m < \omega$, entonces $\pi^{-1}\{m\} = K_m \times \{m\}$, el cual es un subconjunto abierto compacto y conexo de X. Ahora, en vista de que ω es discreto y $K_m \neq \emptyset$, se deduce que π es cerrada y suprayectiva. Por lo tanto, π es una función perfecta y monótona.

De acuerdo a los lemas 1.38 y 1.35(2), $\beta\pi : \beta X \to \beta\omega$ es monótona y suprayectiva. Luego, $\{(\beta\pi)^{-1}\{u\} : u \in \beta\omega\}$ es una partición de βX en conexos no vacíos. Veamos que este conjunto es, de hecho, la famila de componentes conexas de βX.

Sea C una componente conexa de βX. Fijemos $x \in C$, hagamos $u = \beta\pi(x)$ y notemos que $\beta\pi[C]$ es un subconjunto conexo de $\beta\omega$ con $u \in \beta\pi[C]$. Como $\beta\omega$ es cero-dimensional (ver proposición 1.31), deducimos que $\beta\pi[C] = \{u\}$, esto es, $C \subseteq (\beta\pi)^{-1}\{u\}$. Ahora, la maximalidad de C nos da $C = (\beta\pi)^{-1}\{u\}$.

Sea $u \in \beta\omega$. Tomemos C, una componente conexa de βX, con $(\beta\pi)^{-1}\{u\} \subseteq C$. Por el párrafo anterior, existe $v \in \beta\omega$ con $C = (\beta\pi)^{-1}\{v\}$. De este modo, $u = v$ y $C = (\beta\pi)^{-1}\{u\}$. Esto finaliza la prueba. $\square$

Definición 3.3. Para cada $u \in \beta\omega$ definimos $K_u = (\beta\pi)^{-1}\{u\}$.

Note que la proposición 3.2 nos garantiza que cada K_u es un continuo. La sección siguiente está dedicada a explorar algunas propiedades de estos continuos y a lo largo de ella siempre supondremos que $\{K_n : n \in \omega\}$, X y π son como se presentaron arriba.

3.1 Límites de sucesiones de conjuntos

En aras de simplificar nuestra notación para este capítulo nos desharemos de la segunda coordenada en cada uno de los K_n, esto es, escribiremos expresiones como $K_n \subseteq \beta X$ y $\mathrm{cl}_{\beta X} K_n$ en lugar de $K_n \times \{n\} \subseteq \beta X$ y $\mathrm{cl}_{\beta X}(K_n \times \{n\})$ (ver, por ejemplo, el enunciado del lema 3.4).

Es interesante comparar la expresión que aparece centrada en el enunciado del lema 1.40 con la que se da en el resultado siguiente. También creemos conveniente el mencionar que estaremos usando la notación presentada en la definición 1.29, así como los resultados que aparecen después de ésta.

Lema 3.4. *Si $u \in \beta\omega$, entonces*

$$K_u = \bigcap \left\{ \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in A} K_n : A \in u \right\}.$$

Demostración. Empecemos por definir $F = \bigcap \left\{ \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in A} K_n : A \in u \right\}$.

Sean $p \in K_u$, $A \in u$ y V, un subconjunto abierto de βX, de tal forma que $p \in V$. Como $A \in u$, tenemos que $u \in A^-$. Dado que $\beta\pi$ es continua, $(\beta\pi)^{-1}[A^-]$ es un subconjunto abierto de βX. Notemos que $p \in V \cap K_u = V \cap (\beta\pi)^{-1}\{u\} \subseteq V \cap (\beta\pi)^{-1}[A^-]$, así que $V \cap (\beta\pi)^{-1}[A^-]$ es subconjunto abierto de βX no vacío. El que X sea un subconjunto denso de βX implica que existe un punto $(q, m) \in V \cap (\beta\pi)^{-1}[A^-] \cap X$ (observe que $(q, m) \in K_m$). De este modo, $m = \pi(q, m) = \beta\pi(q, m) \in A^-$, esto es, $m \in A$. Resumiendo, $(q, m) \in V \cap \bigcup_{n \in A} K_n$. Esto prueba que $p \in \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in A} K_n$, y el hecho de que A fue arbitrario nos permite concluir que $p \in F$.

Con respecto a la contención restante, notemos lo siguiente: para cualquier $A \subseteq \omega$ se tiene que $\beta\pi \left[\bigcup_{n \in A} K_n\right] = \pi \left[\bigcup_{n \in A} K_n\right] = A$. Esta observación, junto con la continuidad de $\beta\pi$ y la proposición 1.32 nos da:

$$\begin{aligned}
\beta\pi[F] &\subseteq \bigcap \left\{ \beta\pi \left[\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in A} K_n \right] : A \in u \right\} \\
&\subseteq \bigcap \left\{ \mathrm{cl}_{\beta\omega} \left(\beta\pi \left[\bigcup_{n \in A} K_n \right] \right) : A \in u \right\} \\
&= \bigcap \{ \mathrm{cl}_{\beta\omega} A : A \in u \} \\
&= \bigcap \{ A^- : A \in u \}.
\end{aligned}$$

Continuando con esta idea, si $v \in \beta\omega$ y $u \neq v$, entonces existe $B \in u \setminus v$ (la contención $u \subseteq v$ y la maximalidad de u nos darían $u = v$), así que $v \notin B^-$. De aquí obtenemos que $\bigcap\{A^- : A \in u\} \subseteq \{u\}$ y, por ende, $\beta\pi[F] \subseteq \{u\}$ o, en otras palabras, $F \subseteq (\beta\pi)^{-1}\{u\} = K_u$.

□

Definición 3.5. Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \omega}$ en X es una sucesión transversal si para cada $n \in \omega$ se tiene que $x_n \in K_n$.

Para el siguiente resultado recuerde que si Y es un espacio de Tychonoff, entonces

$Y^* := \beta Y \setminus Y$.

Lema 3.6. *Sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión transversal en X. Si $u \in \beta\omega$, entonces el u-límite de $\{x_n\}_{n<\omega}$ en βX es un elemento de X^* si y sólo si $u \in \omega^*$.*

Demostración. Supongamos que $u \in \omega$ y probemos que el u-límite de $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es un elemento de X. Como $u \in \omega$ y $u \in \{u\} = \mathrm{cl}_{\beta\omega}\{u\}$, la proposición 1.16 nos da $\{u\} \in u$. Así, para cada $A \in u$, $A \cap \{u\} \neq \emptyset$, es decir, $u \in A$. Luego,

$$\{x_u\} \subseteq \bigcap\{\mathrm{cl}_{\beta X}\{x_n : n \in A\} : A \in u\}$$

y, por ende (lema 1.40), $x_u \in X$ es el u-límite de $\{x_n\}_{n\in\omega}$.

Partamos ahora de que $u \in \omega^*$. Probaremos que si $z \in X$, entonces z no es el u-límite de $\{x_n\}_{n\in\omega}$. Sea $n < \omega$ de tal forma que $z \in K_n$. Como K_n es un subconjunto abierto de X, existe V, subconjunto abierto de βX, tal que $X \cap V = K_n$. De esta forma, $z \in V$ y $\{m \in \omega : x_m \in V\} = \{n\}$. Por otro lado, la condición $\{n\} \in u$ implica (ver proposición 1.32) que $u \in \{n\}^- = \mathrm{cl}_{\beta X}\{n\} = \{n\}$, esto es, $u = n \in \omega$; una contradicción a $u \in \omega^*$. En resumen, $\{m \in \omega : x_m \in V\} \notin u$ y, por ende, z no es el u-límite de $\{x_n\}_{n\in\omega}$. □

De este modo, el lema 3.6 dice que el u-límite de una sucesión transversal en X pertenece a X^* si y sólo si $u \in \omega^*$.

Definición 3.7. Suponga que $u \in \beta\omega$. Si para cada $n \in \omega$ tenemos $E_n \subseteq K_n$, entonces definimos

$$E_u = \bigcap\left\{\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A} E_n : A \in u\right\}.$$

Observemos que, en general, si Y es un espacio de Tychonoff y $\{y_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en Y, entonces $\{y_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en βY. Luego (ver lema 1.40), para cualquier $u \in \beta\omega$, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\omega}$ posee un u-límite en βY. Convengamos en denotar a dicho u-límite por y_u (de modo similar, si $\{z_n\}_{n\in\omega}$ fuese otra sucesión en Y, entonces z_u sería su u-límite en βY).

Lema 3.8. *Suponga que $u \in \beta\omega$ y que $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión en X. Si, para cada $n \in \omega$, $x_n \in E_n \subseteq K_n$, entonces $x_u \in E_u \subseteq K_u$.*

Demostración. Empecemos por probar que $x_u \in \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A} E_n$, para cada $A \in u$. Tomemos $A \in u$ y notemos que $\{x_n : n \in A\} \subseteq \bigcup_{n\in A} E_n$. Recordemos que el lema 1.40 nos dice que $\{x_u\} = \bigcap\{F_A : A \in u\}$, donde $F_A = \mathrm{cl}_{\beta X}\{x_n : n \in A\}$. De esta forma, tenemos que $x_u \in F_A \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A} E_n$. Luego, por la definición de E_u concluimos que $x_u \in E_u$.

Para probar que $E_u \subseteq K_u$, notemos que $\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in B} E_n \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in B} K_n$, para cada $B \in u$. Por lo tanto, $\bigcap\{\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in B} E_n : B \in u\} \subseteq \bigcap\{\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in B} K_n : B \in u\}$ y de esta forma, $E_u \subseteq K_u$. □

En particular, el lema anterior nos dice que si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión transversal, entonces $x_u \in K_u$ para cualquier $u \in \beta\omega$.

Lema 3.9. *Si F_n y G_n son subconjuntos cerrados de K_n para cada $n \in \omega$ y $u \in \beta\omega$, entonces*

$$F_u \cap G_u = \bigcap\{\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A} (F_n \cap G_n) : A \in u\}.$$

Demostración. Sea $A \in u$. Definamos $F_A = \bigcup\{F_m : m \in A\}$ y $G_A = \bigcup\{F_n : n \in A\}$. Entonces $F_u \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} F_A$ y $G_u \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} G_A$. Note que tanto F_A como G_A son subconjuntos cerrados de X porque dado $m \in \omega$, $K_m \cap F_A = F_m$ o $K_m \cap F_A = \emptyset$, F_m y $\emptyset$ son subconjuntos cerrados de K_m. Como X es T_4, el teorema 1.21 nos garantiza que

$$\mathrm{cl}_{\beta X} F_A \cap \mathrm{cl}_{\beta X} G_A = \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{m\in A} \bigcup_{n\in A} (F_m \cap G_n).$$

Ahora observe que que si $m, n \in \omega$ satisfacen $m \neq n$, entonces $F_m \cap F_n \subseteq K_m \cap K_n = \emptyset$ y en consecuencia,

$$\mathrm{cl}_{\beta X} F_A \cap \mathrm{cl}_{\beta X} G_A = \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A} (F_n \cap G_n).$$

Esto prueba la contención de izquierda a derecha enunciada en nuestro lema.

En aras de comprobar la contención restante, tomemos $A \in u$ y observemos que para cualquier $n \in A$ se tiene que $F_n \cap G_n \subseteq F_n$ y $F_n \cap G_n \subseteq G_n$. Luego, $\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A}(F_n \cap G_n) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} F_A$ y $\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A}(F_n \cap G_n) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} G_A$. □

Suponga que $u \in \beta\omega$ y que $\varphi(x)$ es una propiedad matemática. Más aún, denote por B al conjunto de números naturales n para los que $\varphi(n)$ es cierta. Entonces, tiene sentido preguntarse si B es un conjunto *grande con respecto a* u, esto es, si $B \in u$. Los últimos resultados de esta sección están dedicados a analizar algunas consecuencias de que el conjunto B sea grande con respecto a u para ciertas propiedades $\varphi(x)$.

Lema 3.10. *Sean $B \in u \in \beta\omega$. Si $\{D_n : n \in \omega\}$ y $\{E_n : n \in \omega\}$ satisfacen:*

1. *Para cada $n \in \omega$, $D_n \cup E_n \subseteq K_n$ y*

2. *$D_n = E_n$ siempre que $n \in B$,*

entonces $D_u = E_u$.

Demostración. Con la intención de mostrar que $D_u \subseteq E_u$, sea $A \in u$. Luego, $D_u \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A\cap B} D_n = \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A\cap B} E_n \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A} E_n$. De modo similar se verifica que $E_u \subseteq D_u$. $\square$

Lema 3.11. *Sean $B \in u \in \beta\omega$. Si $\{F_n : n \in \omega\}$ y $\{G_n : n \in \omega\}$ satisfacen:*

1. *Para cada $n \in \omega$, $F_n \cup G_n \subseteq K_n$ y*

2. *F_n y G_n son cerrados ajenos en K_n siempre que $n \in B$,*

entonces $F_u \cap G_u = \emptyset$.

Demostración. Como $F = \bigcup_{n\in B} F_n$ y $G = \bigcup_{n\in B} G_n$ son cerrados ajenos en X, tenemos (ver teorema 1.21) que $F_u \cap G_u \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} F \cap \mathrm{cl}_{\beta X} G = \emptyset$. $\square$

A continuación presentamos algunos corolarios que serán importantes para el presente trabajo.

Lema 3.12. *Si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ y $\{y_n\}_{n\in\omega}$ son un par de sucesiones transversales en X y $u \in \beta\omega$, entonces los enunciados siguientes son equivalentes.*

1. *$x_u = y_u$.*

2. *$\{n < \omega : x_n = y_n\} \in u$.*

Demostración. Hagamos $B_0 = \{n < \omega : x_n = y_n\}$ y $B_1 = \omega \setminus B_0 = \{n < \omega : x_n \neq y_n\}$.

Suponga que (2) es falso y emplee el hecho de que u es un ultrafiltro en ω para deducir que $B_1 \in u$. En el lema 3.11 haga $F_n = \{x_n\}$ y $G_n = \{y_n\}$, para cada $n \in \omega$, y deduzca que $\emptyset = F_u \cap G_u = \{x_u\} \cap \{y_u\}$, es decir, que (1) falla.

Con respecto a la implicación restante, demos por hecho que (2) es cierto. En el lema 3.10 tome $D_n = \{x_n\}$ y $E_n = \{y_n\}$, siempre que $n \in \omega$, para obtener la igualdad $\{x_u\} = D_u = E_u = \{y_u\}$, esto es, (1) es cierto. □

Lema 3.13. *Para cada $n \in \omega$ sea G_n un subconjunto cerrado de K_n. Si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión transversal en X, entonces $x_u \in G_u$ si y sólo si $\{n < \omega : x_n \in G_n\} \in u$.*

Demostración. Supongamos que $\{n < \omega : x_n \in G_n\} \notin u$, esto es, que $\{n < \omega : x_n \notin G_n\} \in u$. En el lema 3.11 pongamos $F_n = \{x_n\}$, $n \in \omega$, para obtener que $\emptyset = F_u \cap G_u = \{x_u\} \cap G_u$, o sea, $x_u \notin G_u$.

Ahora, tomemos $B \in u$ y supongamos que $A = \{n < \omega : x_n \in G_n\} \in u$. Del lema 1.40 sabemos que $x_u \in \mathrm{cl}_{\beta X}\{x_n : n \in A \cap B\}$. Observemos que

$$\mathrm{cl}_{\beta X}\{x_n : n \in A \cap B\} \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in A\cap B} G_n \subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n\in B} G_n.$$

Como B fue arbitrario, concluimos que $x_u \in G_u$. □

Lema 3.14. *Sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión transversal en X y defina $A \subseteq \omega$ mediante la siguiente fórmula: $n \in A$ si y sólo si x_n es un punto de corte de K_n (definición 1.49). Entonces, la pertenencia $A \in u$ implica que x_u es un punto de corte de K_u.*

Demostración. Supongamos que $A \in u$. Por el lema 1.50, para cada $n \in A$, existen F_n y G_n, subconjuntos cerrados de K_n, de tal forma que $|F_n| \geqslant 2$, $|G_n| \geqslant 2$, $F_n \cap G_n = \{x_n\}$ y $F_n \cup G_n = K_n$. Además, para cada $n \in \omega \setminus A$ fije un punto $x_n \in K_n$ y haga $F_n = G_n = K_n$. De acuerdo al lema 1.50, todo se reduce a probar que $|F_u| \geqslant 2$, $|G_u| \geqslant 2$, $F_u \cap G_u = \{x_u\}$ y $F_u \cup G_u = K_u$ (note que nuestra definición de F_u y G_u hace que estos sean subconjuntos cerrados de βX).

Por el lema 3.8, tenemos que $\{x_u\} \subseteq F_u \cap G_u$. Para probar que $F_u \cap G_u \subseteq \{x_u\}$, tomemos $p \in \beta X \setminus \{x_u\}$. Como $p \neq x_u$, existe $B \in u$ de tal forma que $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X}\{x_n : n \in B\}$ (ver lema 1.40). Hagamos $C = A \cap B \in u$. De esta forma, tenemos que $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X}\{x_n : n \in C\}$. En busca de una contradicción, supongamos que $p \in F_u \cap G_u$. Del lema 3.9 tenemos que $F_u \cap G_u = \bigcap\{\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in E}(F_n \cap G_n) : E \in u\}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
p \in \bigcap\left\{\mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in E}\left(F_n \cap G_n\right) : E \in u\right\} &\subseteq \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in C}\left(F_n \cap G_n\right) \\
&= \mathrm{cl}_{\beta X}\{x_n : n \in C\}.
\end{aligned}
$$

Pero esto no es posible porque $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X}\{x_n : n \in C\}$. Esto muestra que $p \notin F_u \cap G_u$ y, por lo tanto, $F_u \cap G_u \subseteq \{x_u\}$. De esta forma hemos probado que $F_u \cup G_u = \{x_u\}$.

Por el lema 3.8, tenemos que $F_u \cup G_u \subseteq K_u$. Para probar que $K_u \subseteq F_u \cup G_u$, tomemos $p \in \beta X \setminus (F_u \cup G_u)$. Entonces, existen $B, C \in u$ de tal forma que $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in B} F_n$ y $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in C} G_n$. Hagamos $D = B \cap C \in u$. De esta forma,

$$
p \notin \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in D} F_n \cup \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in D} G_n = \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in D} (F_n \cup G_n) = \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in D} K_n.
$$

Hemos encontrado un $D \in u$ de tal forma que $p \notin \mathrm{cl}_{\beta X} \bigcup_{n \in D} K_n$ y, por lo tanto, $p \notin K_u$. En conclusión, hemos probado que $F_u \cup G_u = K_u$.

Ahora, para cada $n \in A$ fijemos $y_n \in F_n \setminus \{x_n\}$ y $z_n \in G_n \setminus \{x_n\}$; además, hagamos $y_n = z_n = x_n$, siempre que $n \in \omega$. Observe que tanto $\{n < \omega : y_n \neq x_n\}$ como $\{n < \omega : z_n \neq x_n\}$ contienen al conjunto A y, en consecuencia, son elementos de u. Por los lemas 3.8 y 3.12, $y_u \in F_u \setminus \{x_u\}$ y $z_u \in G_u \setminus \{x_u\}$. Esto concluye la prueba. $\square$

3.2 El espacio $\mathbb{M}$.

En esta sección utilizaremos a $\mathbb{I}$ para denotar al intervalo $[0, 1]$ equipado con la topología que hereda de $\mathbb{R}$. Definimos al espacio $\mathbb{M} = \mathbb{I} \times \omega$ equipado con la topología producto.

En lo que sigue, emplearemos libremente la notación y propiedades de la suma topológica de espacios establecidas en [5, Section 2.2, pp. 74-77].

Dado $n \in \omega$, hagamos $\mathbb{I}_n = \mathbb{I} \times \{n\}$ y denotemos por 0_n y 1_n a las parejas ordenadas $(0, n)$ y $(1, n)$, respectivamente. Observe que $\mathbb{M} = \bigoplus_{n \in \omega} \mathbb{I}_n$ y que si $\pi : \mathbb{M} \to \omega$ es como en la sección anterior, entonces, de hecho, π es la proyección en la segunda coordenada. Por otro lado, si $u \in \beta\omega$, sea $\mathbb{I}_u = (\beta\pi)^{-1}\{u\}$.

Si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión en $\mathbb{I}$ y $u \in \beta\omega$, entonces denotaremos por x_u a $\lim\limits_{n \to u}(n, x_n)$. Además,

$$0_u = \lim_{n \to u}(0, n) \qquad \text{y} \qquad 1_u = \lim_{n \to u}(1, n).$$

Estamos interesados en el espacio $\mathbb{M}$ porque a través de él vamos a obtener muchos subcontinuos de $\mathbb{H}^*$.

Nuestro primer resultado de la sección es consecuencia de lo discutido en el párrafo posterior a la definición 3.3.

Lema 3.15. *Para cualquier $u \in \beta\omega$, $\mathbb{I}_u$ es un continuo.*

Vamos a definir la función $e : \mathbb{M} \to \mathbb{H}$ como $e(t, n) = 2n + t$ para cualesquiera $n < \omega$ y $t \in \mathbb{I}$. Dado $n < \omega$, definimos J_n como el intervalo cerrado $[2n, 2n+1]$ en $\mathbb{R}$. Afirmamos que e es un encaje cerrado de $\mathbb{M}$ en $\mathbb{H}$.

Empecemos por notar que $\operatorname{ran}(e)$, el conjunto imagen de la función e, es igual a $\bigcup_{n<\omega} J_n$. En particular, $\operatorname{ran}(e)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{H}$. Además, nuestra definición de los J_n implica que $\operatorname{ran}(e) = \bigoplus_{n<\omega} J_n$. Finalmente, cálculos rutinarios muestran que, para cada $n \in \omega$, la restricción $e \restriction \mathbb{I}_n : \mathbb{I}_n \to J_n$ es un homeomorfismo y, en consecuencia, e misma es un homeomorfismo entre $\mathbb{M}$ y $\operatorname{ran}(e)$.

Como corolario del inciso (1) de la proposición 1.35 se sigue que βe es un un encaje de $\beta\mathbb{M}$ en $\beta\mathbb{H}$.

A continuación explicaremos cómo hallar copias de los continuos $\mathbb{I}_u$, $u \in \omega^*$, en $\mathbb{H}^*$ usando el encaje cerrado e. Para esto, necesitamos un resultado preliminar.

Lema 3.16. *$\beta e[\mathbb{M}^*] \subseteq \mathbb{H}^*$.*

Demostración. Por reducción al absurdo: suponga que hay $p \in \mathbb{M}^*$ con $\beta e(p) \in \mathbb{H}$. Analicemos dos casos.

Si sucediese que $\beta e(p) \in \operatorname{ran}(e)$, habría $q \in \mathbb{M}$ para el que $\beta e(p) = e(q) = \beta e(q)$ y como βe es inyectiva, se tendría que $p = q \in \mathbb{M}$. Un absurdo.

Cuando $\beta e(p) \notin \operatorname{ran}(e)$, se sigue que existe $m \in \omega$ de tal modo que el intervalo $U = (2m+1, 2m+2)$ es un abierto en $\mathbb{H}$ que satisface $\beta e(p) \in U$. Ahora, la compacidad local de $\mathbb{H}$ implica (lema 1.22) que, de hecho, U es un abierto en $\beta\mathbb{H}$. Luego, $(\beta e)^{-1}[U]$ es un abierto en $\beta\mathbb{M}$ que contiene al punto p. Empleemos la densidad de $\mathbb{M}$ en $\beta\mathbb{M}$ para fijar $r \in \mathbb{M} \cap (\beta e)^{-1}[U]$ y obtener: $e(r) = \beta e(r) \in U \subseteq \mathbb{H} \setminus \operatorname{ran}(e)$. Nuevamente, una contradicción. $\square$

Sea $u \in \omega^*$. Dado que $\pi : \mathbb{M} \to \omega$ es perfecta, el lema 1.35 nos dice que $\beta\pi[\mathbb{M}^*] = \omega^*$. En particular, $\mathbb{I}_u = (\beta\pi)^{-1}\{u\} \subseteq \mathbb{M}^*$ y por el lema previo, $\beta e[\mathbb{I}_u]$ es un subespacio de $\mathbb{H}^*$ que es homeomorfo a $\mathbb{I}_u$.

Convengamos en denotar por T a la colección de todas las sucesiones transversales en $\mathbb{M}$, es decir (note que ${}^{\omega}\mathbb{M}$ es la colección de todas las funciones de ω en $\mathbb{M}$)

$$T = \{x \in {}^{\omega}\mathbb{M} : \forall n \in \omega(x(n) \in \mathbb{I}_n)\}.$$

Para lo que resta de la tesis denotaremos por $<$ al *orden antilexicográfico* en $\mathbb{M}$, esto es, dados $(s, m), (t, n) \in \mathbb{M}$, se tiene que

$$(s, m) < (t, n) \text{ si y sólo si } m < n \text{ ó } m = n \text{ y } s < t,$$

donde los símbolos $m < n$ y $s < t$ hacen referencia a los órdenes usuales para ω y $\mathbb{R}$, respectivamente.

Vamos a fijar $u \in \omega^*$ para establecer algunas propiedades básicas de $\mathbb{I}_u$.

Teorema 3.17. *Sean $A \in u \in \beta\omega$ arbitrarios. Si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión transversal en $\mathbb{M}$ y para cada $n \in A$, $0_n < x_n < 1_n$, entonces x_u es un punto de corte de $\mathbb{I}_u$.*

Demostración. Notemos que x_n es un punto de corte de $\mathbb{I}_n$ para cada $n \in A$. De esta forma tenemos que si B denota al conjunto de todos los números naturales n para los que x_n es un punto de corte de $\mathbb{I}_n$, entonces $A \subseteq B$ y, por ende, $B \in u$. Así, por el lema 3.14 tenemos que x_u es un punto de corte de $\mathbb{I}_u$. $\square$

Emplearemos el símbolo P_u para representar al conjunto de todos los u-límites de sucesiones en T, es decir,

$$P_u = \left\{ \lim_{n \to u} x(n) : x \in T \right\}.$$

Lema 3.18. *Sea* $u \in \beta\omega$. *Si* x_0, y_0, x_1, $y_1 \in T$ *son tales que* $\lim_{n\to u} x_0(n) = \lim_{n\to u} x_1(n)$ *y* $\lim_{n\to u} y_0(n) = \lim_{n\to u} y_1(n)$, *entonces los enunciados siguientes son equivalentes.*

1. $\{n < \omega : x_0(n) \leqslant y_0(n)\} \in u$.

2. $\{n < \omega : x_1(n) \leqslant y_1(n)\} \in u$.

Demostración. Sean $p, q \in P_u$ y $x_0, x_1, y_0, y_1 \in T$ de tal forma que $p = \lim_{n\to u} x_0(n) = \lim_{n\to u} x_1(n)$ y $q = \lim_{n\to u} y_0(n) = \lim_{n\to u} y_1(n)$. Por el lema 3.12, $C = \{n < \omega : x_0(n) = x_1(n)\} \in u$ y $D = \{n < \omega : y_0(n) = y_1(n)\} \in u$.

Supongamos que $A = \{n < \omega : x_0(n) \leqslant y_0(n)\} \in u$. Afirmamos que $A \cap C \cap D \subseteq \{n < \omega : x_1(n) \leqslant y_1(n)\}$. En efecto, sea $m \in A \cap C \cap D$. De esta forma tenemos que

$$x_1(m) = x_0(m) \leqslant y_0(m) = y_1(m).$$

Como u es un filtro, de lo anterior obtenemos que $\{n < \omega : x_1(n) \leqslant y_1(n)\} \in u$.

La implicación recíproca es análoga y por esta razón omitimos los detalles de ésta. □

Fijemos $u \in \beta\omega$. Si $p, q \in P_u$, entonces existen $x, y \in T$ de tal modo que $p = \lim_{n\to u} x(n)$ y $q = \lim_{n\to u} y(n)$. Ahora, según el resultado previo, la relación $\leqslant_u$ dada por $p \leqslant_u q$ si y sólo si $\{n \in \omega : x(n) \leqslant y(n)\} \in u$ está bien definida.

Teorema 3.19. *Para cada* $u \in \beta\omega$, *la relación binaria* $\leqslant_u$ *es un orden lineal en* P_u.

Demostración.

1. Reflexividad. Sea $x \in T$ de tal forma que $p = \lim_{n\to u} x(n)$. Observemos que

   $$\{n < \omega : x(n) \leqslant x(n)\} = \omega \in u.$$

   De esta forma, $p \leqslant_u p$.

2. Antisimetría. Sean $p, q \in P_u$ de tal modo que $p \leqslant_u q$ y $q \leqslant_u p$. Fijemos $x, y \in T$ de manera que $p = \lim_{n\to u} x(n)$ y $q = \lim_{n\to u} y(n)$. Por hipótesis, $A = \{n < \omega : x(n) \leqslant y(n)\}$ y $B = \{n < \omega : y(n) \leqslant x(n)\}$ son elementos de u. En consecuencia, tenemos que $A \cap B = \{n < \omega : x(n) = y(n)\} \in u$ y por el lema 3.12 concluimos que $p = q$.

3. Transitividad. Sean $p, q, r \in P_u$ de tal forma que $p \leqslant_u q \leqslant_u, r$. Fijemos $x, y, z \in T$ con $p = \lim_{n\to u} x(n)$, $q = \lim_{n\to u} y(n)$ y $r = \lim_{n\to u} z(n)$. Por hipótesis, $A = \{n < \omega : x(n) \leqslant y(n)\}$ y $B = \{n < \omega : y(n) \leqslant z(n)\}$ son elementos de u. Notemos que $A \cap B \subseteq \{n < \omega : x(n) \leqslant z(n)\}$. Como $A \cap B \in u$ y u es un filtro, tenemos que $\{n < \omega : x(n) \leqslant z(n)\} \in u$. Por lo tanto $p \leqslant_u r$.

Para probar que $(P_u, \leqslant_u)$ es un orden lineal, tomemos $p, q \in P_u$. Sean $x, y \in T$ de tal manera que $p = \lim_{n\to u} x(n)$ y $q = \lim_{n\to u} y(n)$. Hagamos $A = \{n < \omega : x(n) \leqslant y(n)\}$ y $B = \{n < \omega : y(n) \leqslant x(n)\}$. Observemos que $A \cup B = \omega \in u$. Como u es un ultrafiltro, se sigue (ver [6, 6.2, p. 15]) que $A \in u$ ó $B \in u$, es decir, $p \leqslant_u q$ ó $q \leqslant_u p$. $\square$

Notemos que $(P_u, \leqslant_u)$ es un orden lineal con extremos: para cualquier $p \in P_u$ se cumple que $0_u \leqslant_u p \leqslant_u 1_u$.

Si $p, q \in P_u$, usaremos el símbolo $p <_u q$ para expresar que $p \leqslant_u q$ y $p \neq q$.

Proposición 3.20. *Sean $p, q \in P_u$ y $x, y \in T$ de tal forma que $p = \lim_{n\to u} x(n)$ y $q = \lim_{n\to u} y(n)$. Entonces*

$$p <_u q \text{ si y sólo si } \{n < \omega : x(n) < y(n)\} \in u.$$

Demostración. Supongamos que $p \leqslant_u q$ y $p \neq q$. De la definición de $\leqslant_u$ tenemos que $A = \{n < \omega : x(n) \leqslant y(n)\} \in u$ y, por el lema 3.12, tenemos que $B = \{n < \omega : x(n) \neq y(n)\} \in u$. Como u es un filtro, $A \cap B = \{n < \omega : x(n) < y(n)\}$ también es un elemento de u.

Para probar la implicación recíproca, empecemos por suponer que $p \not<_u q$. Como $(P_u, \leqslant_u)$ es un orden lineal, tenemos que $q \leqslant_u p$ y de esta forma, $A = \{n < \omega : y(n) \leqslant x(n)\} \in u$. Dado que u es un filtro, $\omega \setminus A = \{n < \omega : x(n) < y(n)\}$ no puede ser un elemento de u. $\square$

Dados X, un continuo, y $p, q \in X$, diremos que X es irreducible entre p y q si ningún subcontinuo propio de X contiene a p y a q.

Proposición 3.21. *Si $u \in \beta\omega$, entonces $\mathbb{I}_u$ es irreducible entre 0_u y 1_u.*

Demostración. Mostraremos que ningún subconjunto propio y cerrado de $\mathbb{I}_u$ que contenga a 0_u y a 1_u puede ser conexo.

Sea K un subconjunto propio y cerrado de $\mathbb{I}_u$ de tal forma que $0_u, 1_u \in K$. De esta manera, $\mathbb{I}_u \setminus K$ es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{I}_u$. Debido al teorema 3.22, tenemos que $P_u \setminus K \neq \emptyset$. Sean $r \in P_u \setminus K$ y $z \in T$ de tal forma que $r = \lim_{n\to u} z(n)$. Como $p \notin \{0_u, 1_u\}$ y P_u es un conjunto linealmente ordenado por $\leqslant_u$, tenemos que $0_u <_u r <_u 1_u$. Luego (ver proposición 3.20), $A = \{n < \omega : 0_n < z(n) < 1_n\}$ es un elemento de u. Definamos $t \in T$ de la siguiente manera:

$$t(n) = \begin{cases} z(n) & \text{si } n \in A \\ (1/2, n) & \text{si } n \in \omega \setminus A. \end{cases}$$

Por el lema 3.12 se tiene la igualdad $\lim_{n\to u} t(n) = r$. Ahora, para cada $n < \omega$, sean $F_n = [0_n, t(n)]$ y $G_n = [t(n), 1_n]$. Vamos a probar que $F_u \cap K$ y $G_u \cap K$ forman una disconexión del espacio K.

Primero, $F_u \cap K$ y $G_u \cap K$ son subconjuntos cerrados de K porque F_u y G_u son subconjuntos cerrados de $\mathbb{I}_u$, y son no vacíos porque (ver lema 3.8) $0_u \in F_u \cap K$ y $1_u \in G_u \cap K$. Veamos que $F_u \cap G_u \cap K = \emptyset$. Por los lemas 3.9 y 1.40, tenemos que

$$\begin{aligned} F_u \cap G_u \cap K &= \bigcap \left\{ \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \left(\bigcup_{n\in B} F_n \cap G_n \right) : B \in u \right\} \cap K \\ &= \bigcap \{ \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \{t(n) : n \in B\} : B \in u\} \cap K = \{r\} \cap K = \emptyset. \end{aligned}$$

Para finalizar la prueba de que K no es conexo, observemos que la existencia de un punto $p \in \mathbb{I}_u \setminus (F_u \cup G_u)$, implicaría que existen $A, B \in u$ de tal suerte que $p \notin (\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in A} F_n) \cup \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in B} G_n$. Luego, $C = A \cap B \in u$ y además,

$$p \notin (\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in C} F_n) \cup \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in C} G_n = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in C} (F_n \cup G_n) = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in C} \mathbb{I}_n;$$

así, $p \notin \mathbb{I}_u$. Lo anterior muestra que $\mathbb{I}_u \subseteq F_u \cup G_u$ y en consecuencia, $F_u \cup G_u = \mathbb{I}_u$.

Finalmente,

$$(F_u \cap K) \cup (G_u \cap K) = (F_u \cup G_u) \cap K = \mathbb{I}_u \cap K = K.$$

$\square$

Teorema 3.22. *El conjunto $P_u \setminus \{0_u, 1_u\}$ es denso en $\mathbb{I}_u$ y todos sus elementos son puntos de corte de $\mathbb{I}_u$. Además, la topología que P_u hereda como subespacio de $\mathbb{I}_u$ es la misma que la topología generada por el orden $\leqslant_u$.*

Demostración. Primero, tomemos $p \in P_u \setminus \{0_u, 1_u\}$ y veamos que p es un punto de corte de $\mathbb{I}_u$. Sea $x \in T$ de tal forma que $p = \lim_{n \to u} x(n)$. Como $p \neq 0_u$ y $p \neq 1_u$, el lema 3.12 nos dice que $A = \{n < \omega : x(n) \neq 0_n\}$ y $B = \{n < \omega : x(n) \neq 1_n\}$ son elementos de u. Observemos que $A \cap B \subseteq \{n < \omega : x(n) \in (0,1)\}$ y en consecuencia, $\{n < \omega : x(n) \in (0,1)\} \in u$. Por el teorema 3.17, p es un punto de corte de $\mathbb{I}_u$.

Ahora veamos que P_u es denso en $\mathbb{I}_u$. Sea V un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{M}$ de tal forma que $V \cap \mathbb{I}_u \neq \emptyset$. Como $\beta\mathbb{M}$ es un espacio regular, existe U, un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{M}$, de tal forma que $U \cap \mathbb{I}_u \neq \emptyset$ y $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} U \subseteq V$.

Afirmamos que $A = \{n < \omega : U \cap \mathbb{I}_n \neq \emptyset\} \in u$. Para probarlo, veamos que $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in u$ (proposición 1.5). Tomemos $B \in u$ y empleemos el lema 3.4 para deducir que $\mathbb{I}_u \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in B} \mathbb{I}_n$. Por hipótesis, $U \cap \mathbb{I}_u \neq \emptyset$ así que $U \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in B} \mathbb{I}_n \neq \emptyset$. Como U es un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{M}$, tenemos que $U \cap \bigcup_{n \in B} \mathbb{I}_n \neq \emptyset$. De esta forma hemos probado que existe $m \in B$ de tal forma que $U \cap \mathbb{I}_m \neq \emptyset$. Esto muestra que $A \cap B \neq \emptyset$.

Para cada $n \in A$ tenemos que $U \cap \mathbb{I}_n \setminus \{0_n, 1_n\}$ es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{I}_n$ y por esta razón podemos fijar $t_n \in U \cap \mathbb{I}_n \setminus \{0_n, 1_n\}$. Definimos a $x \in T$ de la siguiente forma:

$$x(n) = \begin{cases} t_n & \text{si } n \in A \\ 0_n & \text{si } n \in \omega \setminus A. \end{cases}$$

Notemos que si x_u es el u-límite de x, entonces (ver lema 1.40)

$$x_u \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}}\{x(n) : n \in A\} \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} U \subseteq V.$$

De esta forma hemos encontrado $x_u \in P_u \cap V \cap \mathbb{I}_u$ y, por lo tanto, P_u es un subconjunto denso de $\mathbb{I}_u$.

A la topología que P_u hereda como subespacio de $\mathbb{I}_u$ la denotaremos con τ_{P_u} y a la topología del orden la denotaremos con $\tau_{\leqslant_u}$.

Para probar que $\tau_{P_u} \subseteq \tau_{\leqslant_u}$ tomemos U, un subconjunto abierto de $\beta\mathbb{M}$, y $t_u \in U \cap P_u$. Como $\beta\mathbb{M}$ es un espacio regular, existe V, un subconjunto abierto de $\mathbb{M}$, de tal forma que $t_u \in V$ y $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} V \subseteq U$. Sea $t \in T$ de tal forma que $t_u = \lim\limits_{n \to u} t(n)$. La pertenencia $t_u \in V$ implica, por definición de u-límite, que $A_0 = \{n < \omega : t(n) \in V\} \in u$. Dividiremos nuestro argumento en tres casos.

Supongamos, en primer término, que $t_u \notin \{0_u, 1_u\}$ y hagamos

$$A_1 = \{n < \omega : t(n) > 0_u\} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \{n < \omega : t(n) < 1_u\}.$$

De acuerdo a la proposición 3.20, tanto A_0 como A_1 son elementos de u. Así, $A = A_0 \cap A_1 \cap A_2$ pertenece a u. Para cada $n \in A$ fijemos $a_n, b_n \in [0,1]$ de tal forma que $t(n) \in (a_n, b_n) \times \{n\} \subseteq V$.

Definimos las sucesiones $a, b \in T$ como sigue:

$$a(n) = \begin{cases} a_n & \text{si } n \in A \\ 0_n & \text{si } n \in \omega \setminus A \end{cases}$$

$$b(n) = \begin{cases} b_n & \text{si } n \in A \\ 1_n & \text{si } n \in \omega \setminus A. \end{cases}$$

Hagamos $a_u = \lim\limits_{n \to u} a_n$ y $b_u = \lim\limits_{n \to u} b_n$. De la definición de a y de b se deduce que $A \subseteq \{n < \omega : a(n) < t(n)\}$ y que $A \subseteq \{n < \omega : t(n) < b(n)\}$. Como u es un filtro, deducimos que $\{n < \omega : a(n) < t(n)\}$ y $\{n < \omega : t(n) < b(n)\}$ son elementos de u y, por lo tanto (ver proposición 3.20), $a_u <_u t_u <_u b_u$.

Denotemos por (a_u, b_u) al intervalo $\{p \in P_u : a_u <_u p <_u b_u\}$ y mostremos que $(a_u, b_u) \subseteq U \cap P_u$. Dado $p \in (a_u, b_u)$ existe $x \in T$ de tal manera que $p = \lim_{n \to u} x(n)$. Como $p \in (a_u, b_u)$, los conjuntos $B = \{n < \omega : a(n) < x(n)\}$ y $C = \{n < \omega : x(n) < b(n)\}$ son elementos de u. Notemos que $A \cap B \cap C \subseteq \{n < \omega : x(n) \in V\}$ y, de esta forma, obtenemos que $D = \{n < \omega : x(n) \in V\} \in u$. Por otro lado (ver lema 1.40),

$$p \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}}\{x(n) : n \in D\} \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} V \subseteq U.$$

Esto prueba que $p \in U \cap P_u$ y, por lo tanto, $t_u \in (a_u, b_u) \subseteq U \cap P_u$.

Ahora analicemos qué pasa cuando $t_u = 0_u$. En estas circunstancias, para cada $n \in A_0$ hay $b_n \in (0, 1]$ de tal modo que $[0_n, b_n) \times \{n\} \subseteq V$. Elijamos $b \in T$ con $b(n) = b_n$, siempre que $n \in A_0$, y observemos que si b_u es el u-límite de b, entonces el argumento del caso previo se puede modificar para obtener

$$t_u \in [0_u, b_u) \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} V \subseteq U,$$

donde $[0_u, b_u) = \{p \in P_u : p <_u b_u\}$.

Finalmente, si $t_u = 1_u$, se puede mostrar (pero omitimos los detalles) que hay $q \in P_u$ con

$$t_u \in (q, 1_u] \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} V \subseteq U,$$

donde $(q, 1_u] = \{p \in P_u : p >_u q\}$.

Lo anterior muestra que $\tau_{P_u} \subseteq \tau_{\leqslant_u}$. Para probar que $\tau_{\leqslant_u} \subseteq \tau_{P_u}$ veamos que los abiertos subbásicos de $\tau_{\leqslant_u}$ también son abiertos en τ_{P_u}. Sea $p \in P_u$ y consideremos al abierto subbásico $[0_u, p)$. Tomemos a $x \in T$ de tal forma que $p = \lim_{n \to u} x(n)$. Para cada $n < \omega$, definimos $G_n = [x(n), 1_n] \times \{n\}$. Afirmamos que (ver definición 3.7) $[0_u, p) = P_u \setminus G_u$.

Nuestro argumento ser por contrapuesta. Sean $q \in G_u$ y $y \in T$ de tal forma que $q = \lim_{n \to u} y(n)$. Hagamos $B = \{n \in \omega : x(n) \leqslant y(n)\}$. Por el lema 3.13, $A = \{n < \omega : y(n) \in G_n\} \in u$ y como $A \subseteq B$, tenemos que $B \in u$, es decir, $p \leqslant_u q$ y así, $q \notin [0_u, p)$.

Argumentemos ahora que $P_u \setminus G_u \subseteq [0_u, p)$. Sean $q \in P_u \setminus [0_u, p)$ y $y \in T$ de tal forma que $q = \lim_{n \to u} y(n)$. Hagamos $A = \{n < \omega : y(n) \in G_n\}$. Como $\leqslant_u$ es un orden lineal, debe tenerse que $p \leqslant_u q$, esto es, $B = \{n < \omega : x(n) \leqslant y(n)\} \in u$. Notemos que $B \subseteq A$, así que $A \in u$. De esto obtenemos (ver lema 3.13) que $q \in G_u$.

Como G_u es un subconjunto cerrado de $\beta\mathbb{M}$, tenemos que $P_u \setminus G_u \in \tau_{P_u}$ y, por lo tanto, $[0_u, p)$ es un subconjunto abierto de P_u.

La prueba de que el intervalo $(p, 1_u]$ en $\tau_{\leqslant_u}$ también es abierto en τ_{P_u} es análoga y por esa razón la omitimos. $\square$

En lo que sigue, emplearemos la notación de intervalos en P_u establecida en la prueba de nuestro resultado previo.

Lema 3.23. *Fijemos $u \in \beta\omega$. Sean $p, q \in P_u$ de tal forma que $p \leqslant_u q$. Si $x, y, a, b \in T$ satisfacen que $p = \lim_{n \to u} x(n) = \lim_{n \to u} y(n)$ y $q = \lim_{n \to u} a(n) = \lim_{n \to u} b(n)$, entonces*

$$\mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [x(n), a(n)] = \mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [y(n), b(n)].$$

Demostración. Por el lema 3.12, los conjuntos $A = \{n < \omega : x(n) = y(n)\}$ y $B = \{n < \omega : a(n) = b(n)\}$ son elementos de u y, por ende, $C = \{n < \omega : x(n) = y(n) \wedge a(n) = b(n)\}$ también es elemento de u. Recordemos que $\mathbb{I}_u \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in C} \mathbb{I}_n$ y notemos que tanto $\bigcup_{n \in C} \mathbb{I}_n$ como $\bigcup_{n<\omega} [x(n), a(n)]$ son subconjuntos cerrados de $\mathbb{M}$. Luego (por el teorema 1.21),

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in C} \mathbb{I}_n\right) \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [x(n), a(n)] &= \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \left(\left(\bigcup_{n \in C} \mathbb{I}_n\right) \cap \bigcup_{n<\omega} [x(n), a(n)]\right) \\
&= \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in C} [x(n), a(n)] \\
&= \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in C} [y(n), b(n)] \\
&\subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [y(n), b(n)].
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [x(n), a(n)] \subseteq \mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [y(n), b(n)]$. La prueba de la contención restante es análoga y por esa razón la omitimos. $\square$

Definición 3.24. Fijemos $u \in \beta\omega$. Sean $p, q \in P_u$ de tal forma que $p \leqslant_u q$. Definimos el intervalo cerrado de p a q en $\mathbb{I}_u$ como

$$[p,q]_+ = \mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [x(n), y(n)],$$

donde x y y son elementos de T con la propiedad de que $p = \lim_{n\to u} x(n)$ y $q = \lim_{n\to u} y(n)$.

Como consecuencia de el lema previo tenemos que para cualesquiera $p, q \in P_u$ tales que $p \leqslant_u q$, el intervalo $[p,q]_+$ está bien definido. Note también que el símbolo $[p,q]_+$ es ambiguo pues no se hace referencia al ultrafiltro u, pero esto obedece a que en el resto del trabajo siempre será claro por el contexto el ultrafiltro en cuestión.

Proposición 3.25. *Sea $u \in \beta\omega$. Si $x, y \in T$ satisfacen que $x_u \leqslant_u y_u$, entonces se cumple la igualdad*

$$[x_u, y_u]_+ = \bigcap \left\{ \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in A} [x(n), y(n)] : A \in u \right\}.$$

Demostración. De acuerdo al lema 3.4 y al teorema 1.21:

$$\begin{aligned}
[x_u, y_u]_+ &= \mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [x(n), y(n)] \\
&= \bigcap \left\{ \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in A} \mathbb{I}_n : A \in u \right\} \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [x(n), y(n)] \\
&= \bigcap \left\{ \left(\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in A} \mathbb{I}_n \right) \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [x(n), y(n)] : A \in u \right\} \\
&= \bigcap \left\{ \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \left(\left(\bigcup_{n\in A} \mathbb{I}_n \right) \cap \bigcup_{n<\omega} [x(n), y(n)] \right) : A \in u \right\} \\
&= \bigcap \left\{ \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in A} [x(n), y(n)] : A \in u \right\}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.26. *Para cualesquiera $u \in \beta\omega$ y $x \in T$, se tiene que $[x_u, x_u]_+ = \{x_u\}$.*

Demostración. Como $x_u \leqslant_u x_u$, la proposición anterior nos dice que

$$[x_u, x_u]_+ = \bigcap \left\{ \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in A} [x(n), x(n)] : A \in u \right\}.$$

Así que (ver lema 1.40) $[x_u, x_u]_+ = \bigcap\{\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}}\{x_n : n \in A\} : A \in u\} = \{x_u\}$. $\square$

Proposición 3.27. *Para cualesquiera $u \in \beta\omega$ y $p, q \in P_u$ que satisfagan $p \leqslant_u q$ se tienen las igualdades siguientes.*

1. $[p, q]_+ = [0_u, q]_+ \cap [p, 1_u]_+$.

2. $[0_u, p]_+ \subseteq [0_u, q]_+$ *y* $[q, 1_u]_+ \subseteq [p, 1_u]_+$.

3. *Si* $p \neq q$, *entonces* $[0_u, p]_+ \cap [q, 1_u]_+ = \emptyset$.

Demostración. Fijemos $x, y \in T$ de tal forma que $p = \lim_{n\to u} x(n)$ y $q = \lim_{n\to u} y(n)$. Para probar (1), empleemos el teorema 1.21 para deducir las igualdades siguientes.

$$\begin{aligned}
[0_u, q]_+ \cap [p, 1_u]_+ &= \mathbb{I}_u \cap \left(\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [0_n, y(n)]\right) \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [x(n), 1_n] \\
&= \mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} \left([0_n, x(n)] \cap [y(n), 1_n]\right) \\
&= \mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [x(n), y(n)] \\
&= [p, q]_+
\end{aligned}$$

Ahora probemos (2). La condición $p \leqslant_u q$ nos da la pertenencia $A = \{n < \omega : x(n) \leqslant y(n)\} \in u$. De este modo, las sucesiones transversales $\widehat{x}$ y $\widehat{y}$, dadas por $\widehat{x} \upharpoonright A = x \upharpoonright A$, $\widehat{y} \upharpoonright A = y \upharpoonright A$ y, para cada $n \in \omega \setminus A$, $\widehat{x}(n) = 0_n$ y $\widehat{y}(n) = 1_n$, satisfacen (ver lema 3.12)

$$\lim_{n\to u} \widehat{x}(n) = p,\ \lim_{n\to u} \widehat{y}(n) = q \text{ y } \widehat{x}(k) \leqslant \widehat{y}(k),\ \text{siempre que } k < \omega.$$

De esta forma, $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [0_n, \widehat{x}(n)] \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [0_n, \widehat{y}(n)]$. Luego, nuestra definición da $[0_u, p]_+ \subseteq [0_u, 1_u]$. La prueba de la segunda parte de este inciso es análoga y por esa razón la omitimos.

Con respecto a (3), la condición $p \neq q$ nos lleva a que (ver proposición 3.20) $\{n < \omega : x(n) < y(n)\}$ es un elemento de u. Procediendo como en el párrafo previo, existen $x', y' \in T$ con

$$\lim_{n\to u} x'(n) = p,\ \lim_{n\to u} y'(n) = q \text{ y } x'(k) < y'(k),\ \text{siempre que } k < \omega.$$

En particular (teorema 1.21),

$$[0_u, p]_+ \cap [q, 1_u] = \mathbb{I}_u \cap \left(\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [0_n, x'(n)] \right) \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [y'(n), 1_n]$$
$$= \mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} \big([0_n, x'(n)] \cap [y'(n), 1_n] \big) = \emptyset.$$

□

Proposición 3.28. *Sea $u \in \beta\omega$. Si $p, q \in P_u$ satisfacen $p <_u q$, entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{I}_u \to [p, q]_+$ de tal suerte que $h(0_u) = p$ y $h(1_u) = q$.*

Demostración. De la proposición 3.20 obtenemos que $B = \{n < \omega : x(n) < y(n)\} \in u$. Vamos a definir dos sucesiones $x', y' \in T$ de la siguiente forma:

$$x'(n) = \begin{cases} x(n) & si\ n \in B \\ 0_n & si\ n \in \omega \setminus B \end{cases}$$

$$y'(n) = \begin{cases} y(n) & si\ n \in B \\ 1_n & si\ n \in \omega \setminus B \end{cases}$$

De acuerdo al lema 3.12, $p = \lim_{n\to u} x'(n)$ y $q = \lim y'(n)$.

Para cada $n < \omega$, definamos $J_n = [x'(n), y'(n)]$ y denotemos por X al subespacio $\bigcup_{n<\omega} J_n$ de $\mathbb{M}$.

Sea $f : \mathbb{M} \to X$ un homeomorfismo de tal forma que las igualdades siguientes se verifican para cada $n < \omega$: $f[\mathbb{I}_n] = J_n$, $f(0_n) = x'(n)$ y $f(1_n) = y'(n)$. Según la proposición 1.35, $\beta f : \beta\mathbb{M} \to \beta X$ es un homeomorfismo.

Por otro lado, el que X sea un subconjunto cerrado de $\mathbb{M}$ implica, de acuerdo al Teorema de Extensión de Tietze, que X está C^*-encajado en $\mathbb{M}$. Luego (lema 1.23), si hacemos $Y = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} X$, entonces existe un homeomorfismo $g : \beta X \to Y$ de tal suerte que $g(x) = x$ para cualquier $x \in X$.

En resumen, la función $H = g \circ \beta f$ es un homeomorfismo de $\beta\mathbb{M}$ en Y con

$$H[\mathbb{I}_n] = g\left[\beta f\left[\mathbb{I}_n\right]\right] = g\left[f\left[\mathbb{I}_n\right]\right] = g[J_n] = J_n,$$

para cada $n < \omega$. Además, por el lema 1.42,

$$H(0_u) = \lim_{n\to u} H(0_n) = \lim_{n\to u} f(0_n) = \lim_{n\to u} x'(n) = p;$$

y similarmente, $H(1_u) = q$.

Debido a lo anterior, si mostramos que $H[\mathbb{I}_u] = [p, q]_+$, entonces $h = H \restriction \mathbb{I}_u$ será el homeomorfismo que necesitamos. Comencemos por fijar $C \in u$. Por lo explicado en el párrafo previo,

$$H\left[\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in C} \mathbb{I}_n\right] = \mathrm{cl}_Y\, H\left[\bigcup_{n\in C} \mathbb{I}_n\right] = \mathrm{cl}_Y \bigcup_{n\in C} J_n;$$

y como Y es un subconjunto cerrado de $\beta\mathbb{M}$, se sigue que $H\left[\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in C} \mathbb{I}_n\right] = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in C} J_n$. Finalmente, empleemos la inyectividad de H y la proposición 3.25 para obtener

$$\begin{aligned} H\left[\mathbb{I}_u\right] &= H\left[\bigcap_{A\in u} \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in A} \mathbb{I}_n\right] = \bigcap_{A\in u} H\left[\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in A} \mathbb{I}_n\right] \\ &= \bigcap_{A\in u} \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n\in A} J_n = [p, q]_+. \end{aligned}$$

□

3.3 Estratos

El hilo conductor de la sección previa fue el estudio de los subcontinuos de $\beta\mathbb{H}$ que tienen la forma $\mathbb{I}_u$, para algún $u \in \beta\omega$. Ahora nos enfocaremos en otra clase de subcontinuos de $\beta\mathbb{M}$, a saber, los llamados estratos.

Definición 3.29. Para cualesquiera $u \in \beta\omega$ y $p \in \mathbb{I}_u$ definimos a la familia

$$\mathcal{F}_p = \{[q, r]_+ : (q, r \in P_u) \wedge (q \leqslant_u r) \wedge (p \in [q, r]_+)\}.$$

En vista de que

$$[0_u, 1_u] = \mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n<\omega} [0_n, 1_n] = \mathbb{I}_u \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} \mathbb{M} = \mathbb{I}_u \cap \beta\mathbb{M} = \mathbb{I}_u,$$

deducimos que para cualquier $p \in \mathbb{I}_u$, el intervalo $[0_u, 1_u]_+$ es un elemento de $\mathcal{F}_p$ y, por lo tanto, la familia $\mathcal{F}_p$ no es vacía.

Definición 3.30. Para cualesquiera $u \in \beta\omega$ y $p \in \mathbb{I}_u$, definimos al estrato de p como $\bigcap \mathcal{F}_p$. Denotaremos al estrato de p mediante L_p (nuevamente, nuestra notación es ambigua pues no hace referencia al ultrafiltro en ω que estamos empleando para definir el estrato, pero, igual que antes, éste siempre será claro por el contexto).

A continuación mostraremos que cuando el punto p de arriba es un u-límite, el estrato correspondiente se trivializa.

Proposición 3.31. *Para cualesquiera $u \in \beta\omega$ y $p \in P_u$, $L_p = \{p\}$.*

Demostración. La definición de L_p nos garantiza que $\{p\} \subseteq L_p$. Ahora, de acuerdo al corolario 3.26, $\{p\} = [p,p]_+$ y en consecuencia, $\{p\} \in \mathcal{F}_p$. Así, $L_p \subseteq \{p\}$. □

Lema 3.32. *Sean $u \in \beta\omega$ y $p \in \mathbb{I}_u$. Para cualesquiera F y G elementos de $\mathcal{F}_p$, existe $H \in \mathcal{F}_p$ de tal forma que $H = F \cap G$*

Demostración. Sean $q_0, r_0, q_1, r_1 \in P_u$ de tal suerte que, para cada $i < 2$, $q_i \leqslant_u r_i$ y $p \in [q_i, r_i]_+$. De la proposición 3.27, inciso (1), obtenemos la siguiente igualdad:

$$[q_0, r_0]_+ \cap [q_1, r_1]_+ = [0_u, r_0]_+ \cap [q_0, 1_u]_+ \cap [0_u, r_1]_+ \cap [q_1, 1_u]_+.$$

Hagamos $r_2 = \text{mín}\{r_0, r_1\}$ y $q_2 = \text{máx}\{q_0, q_1\}$. Ahora, por el inciso (2) de la misma proposición, tenemos que

$$[0_u, r_0]_+ \cap [q_0, 1_u]_+ \cap [0_u, r_1]_+ \cap [q_1, 1_u]_+ = [0_u, r_2]_+ \cap [q_2, 1_u]_+ = [q_2, r_2]_+.$$

Sólo falta probar que $[q_2, r_2]_+ \in \mathcal{F}_p$. De la elección de q_2 y r_2 sabemos que $q_2 \leqslant_u r_2$. Además, $p \in [q_2, r_2]_+$ porque $p \in [q_0, r_0]_+ \cap [q_1, r_1]_+$. □

Corolario 3.33. *Para cualesquiera $u \in \beta\omega$ y $p \in \mathbb{I}_u$, L_p es un continuo.*

Demostración. Las proposiciones 3.28 y 3.31 junto con el lema 3.15 nos garantizan que todos los elementos de $\mathcal{F}_p$ son continuos. Los lemas 3.32 y 1.45 nos permiten concluir que $\bigcap \mathcal{F}_p$ es un continuo y esto termina la prueba. □

Antes de continuar, es conveniente hacer la siguiente observación: para cualesquiera $u \in \beta\omega$ y $p \in \mathbb{I}_u$, definimos la familia

$$\mathcal{H}_p = \{[q,r]_+ : (q,r \in P_u) \wedge ((q = 0_u) \vee (r = 1_u)) \wedge (p \in [q,r]_+)\}.$$

Afirmamos que $L_p = \bigcap \mathcal{H}_p$. Notemos que $\mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{F}_p$ y, de esta forma, tenemos que $L_p \subseteq \bigcap \mathcal{H}_p$. Para probar la contención restante, sean $x \in \bigcap \mathcal{H}_p$ y $q, r \in P_u$ de tal modo que $q \leqslant_u r$ y $p \in [q,r]_+$. De la proposición 3.27 inciso (1) sabemos que $[q,r]_+ = [0_u, r]_+ \cap [q, 1_u]_+$. Claramente $[0_u, r]_+$ y $[q, 1_u]_+$ son elementos de $\mathcal{H}_p$, así que $x \in [0_u, r]_+ \cap [q, 1_u]_+$. Esto muestra que $x \in [q,r]_+$ y, por lo tanto, $x \in L_p$.

En este trabajo, dado $u \in \beta\omega$, denotaremos por $\mathbb{L}_u$ al conjunto de todos los estratos de elementos de $\mathbb{I}_u$, es decir, $\mathbb{L}_u = \{L_p : p \in \mathbb{I}_u\}$.

Dado $u \in \beta\omega$, la proposición 3.31 nos garantiza que $S = \{\{p\} : p \in P_u\} \subseteq \mathbb{L}_u$. Claramente, uno puede identificar a cada $p \in P_u$ con su correspondiente estrato $\{p\}$ y, de este modo, se puede usar la relación $\leqslant_u$ para imponerle un orden lineal a la colección S, digamos, para cualesquiera $p, q \in P_u$, $L_p \ll_u L_q$ si y sólo si $p \leqslant_u q$. Estamos interesados en extender este orden a una relación binaria en $\mathbb{L}_p$ y para esto será muy útil nuestro resultado siguiente.

Lema 3.34. *Si $u \in \beta\omega$ y $p, q \in P_u$, entonces los enunciados siguientes son equivalentes.*

1. *$p \leqslant_u q$.*

2. *Existe $r \in P_u$ de tal manera que $L_p \subseteq [0_u, r]_+$ y $L_q \subseteq\in [r, 1_u]_+$.*

Demostración. Supongamos que $p \leqslant_u q$ y procedamos como en la prueba del inciso (2) de la proposición 3.27 para fijar $\widehat{x}, \widehat{y} \in T$ de tal suerte que

$$\lim_{n\to u} \widehat{x}(n) = p, \ \lim_{n\to u} \widehat{y}(n) = q \text{ y } \widehat{x}(k) \leqslant \widehat{y}(k), \text{ siempre que } k < \omega.$$

De esta forma, hay $z \in T$ que satisface $z(n) \in [\widehat{x}(n), \widehat{y}(n)]$, para cada $n < \omega$. Hagamos $r = \lim_{n\to u} z(n)$ y observemos que si $n < \omega$, entonces $\widehat{x}(n) \in [0_n, z(n)]$. Así, por el lema 3.8 y la proposición 3.25 se deduce que $p \in [0_u, r]_+$; lo cual, de acuerdo a la proposición 3.31 nos da la contención $L_p \subseteq [0_u, r]_+$. De manera similar se verifica que $L_q \subseteq [r, 1_u]_+$.

Con respecto la implicación restante: sea r como en (2) y fijemos $x, y, z \in T$ con $p = \lim_{n\to u} x(n)$, $q = \lim_{n\to u} y(n)$ y $r = \lim_{n\to u} z(n)$.

Ahora, si la desigualdad $p \leqslant_u r$ no fuese cierta, se tendría (ver proposición 3.12) que $B = \{n < \omega : z(n) < x(n)\} \in u$. Con esto en mente, definamos, para cada $k < \omega$, $F_k = \{x(k)\}$ y $G_k = [0_k, z(k)]$, y notemos que los conjuntos B, $\{F_n : n < \omega\}$ y $\{G_n : n < \omega\}$ satisfacen las hipótesis del lema 3.11. Luego, $\{p\} \cap [0_u, r]_+ = \emptyset$. Este absurdo muestra que $p \leqslant_u r$.

Una modificación rutinaria del argumento expuesto en el párrafo previo puede emplearse para mostrar que $r \leqslant_u q$ y, de esta manera, $p \leqslant_u q$, tal y como se deseaba. □

Con estos preliminares, es razonable definir la relación binaria $\ll_u$ como lo hacemos a continuación.

Definición 3.35. Sea $u \in \beta\omega$. Para cualesquiera $M, N \in \mathbb{L}_u$, diremos que $M \ll_u N$ si y sólo si existe $r \in P_u$ con $M \subseteq [0_u, r]_+$ y $N \subseteq [r, 1_u]_+$.

Analicemos qué propiedades de orden posee $\ll_u$.

Proposición 3.36. *Si $u \in \beta\omega$, entonces $\ll_u$ es antisimétrica. Más aún, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{I}_u$ se tiene que los enunciados siguientes son equivalentes.*

1. *$L_p \ll_u L_q$ y $L_q \ll_u L_p$.*

2. *$p = q$ y $p \in P_u$.*

Demostración. Supongamos que $L_p \ll_u L_q$ y $L_q \ll_u L_p$. Sean $a, b \in P_u$ de tal forma que $L_p \subseteq [0_u, a]_+ \cap [b, 1_u]_+$ y $L_q \subseteq [a, 1_u]_+ \cap [0_u, b]_+$. En particular, $p \in [0_u, a]_+ \cap [b, 1_u]_+$ y $q \in [0_u, b]_+ \cap [a, 1_u]_+$. Así, por el inciso (3) de la proposición 3.27, no sucede que $a <_u b$ ni que $b <_u a$, y como $\leqslant_u$ es un orden lineal, concluimos que $a = b$.

Ahora, de la proposición 3.27 inciso (1) y del corolario 3.26, $L_p \subseteq [0_u, a]_+ \cap [a, 1_u]_+ = [a, a]_+ = \{a\}$, es decir, $L_p \subseteq \{a\}$. De la misma forma, $L_q \subseteq \{a\}$. Dado que $p \in L_p$ y $q \in L_q$, deducimos que $p = a = q$.

En la otra dirección: si $p \in P_u$, entonces $L_p = \{p\} \subseteq [0_u, p]_+ \cap [p, 1_u]_+$ y, en consecuencia, $L_p \ll_u L_p$. □

Una consecuencia rápida de este resultado es como sigue.

Corolario 3.37. *Dados $u \in \beta\omega$ y $p \in \mathbb{I}_u$, se verifica que $p \in P_u$ si y sólo si $L_p \ll_u L_p$.*

Demostración. De acuerdo a la proposición previa, $p \in P_u$ implica que $L_p \ll_u L_p$. Ahora, si $L_p \ll_u L_p$, entonces hay $a \in P_u$ con (ver proposición 3.27) $L_p \subseteq [0_u, a]_+ \cap [a, 1_u]_+ = \{a\}$ y como $p \in L_p$, se deduce que $p = a \in P_u$. $\square$

Lema 3.38. *Para cada $u \in \beta\omega$, $\ll_u$ es transitiva.*

Demostración. Supongamos que $p, q, r \in \mathbb{I}_u$ satisfacen $L_p \ll_u L_q \ll_u L_r$. Sean $a, b \in P_u$ de tal forma que $L_p \subseteq [0_u, a]_+$, $L_q \subseteq [a, 1_u]_+ \cap [0_u, b]_+$ y $L_r \subseteq [b, 1_u]_+$. Por esto último, sólo debemos mostrar que $L_p \subseteq [0_u, b]_+$. En vista de que $q \in [a, 1_u]_+ \cap [0_u, b]_+$, deducimos (ver inciso (3) de la proposición 3.27) que la desigualdad $b <_u a$ es imposible. Así, obtenemos que $a \leqslant_u b$. De la proposición 3.27 inciso (2) tenemos que $L_p \subseteq [0_u, a]_+ \subseteq [0_u, b]_+$. $\square$

Lema 3.39. *Si $u \in \beta\omega$, $p \in \mathbb{I}_u$ y $F \in p$, entonces $\{n < \omega : F \cap \mathbb{I}_n \neq \emptyset\} \in u$.*

Demostración. Supongamos que $A = \{n < \omega : F \cap \mathbb{I}_n \neq \emptyset\} \notin u$. Como u es un ultrafiltro, se sigue (ver [6, Theorem 6.1, p. 15]) que $B = \omega \setminus A \in u$. Hagamos $G = \bigcup_{n \in B} \mathbb{I}_n$ para obtener un subconjunto cerrado de $\mathbb{M}$ que es ajeno con F. Dado que $\mathbb{M}$ es metrizable, el teorema 1.21 nos da $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} F \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} G = \emptyset$. Ahora, por la proposición 1.16, $p \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} F$ y así, $p \notin \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} G$, pero, por otro lado, el lema 3.4 implica que $p \in \mathbb{I}_u \subseteq \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{M}} G$; una contradicción. Luego, $A \in u$. $\square$

Dados $n \in \omega$ y $A, B \subseteq \mathbb{I}_n$, convengamos en emplear el símbolo $A \leqslant B$ cuando la desigualdad $a \leqslant b$ sea satisfecha por cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$.

Proposición 3.40. *Para cualesquiera $u \in \beta\omega$ y $p, q \in \mathbb{I}_u$, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. $L_p \ll_u L_q$.

2. *Existen $F \in p$ y $G \in q$ de tal forma que $\{n < \omega : F \cap \mathbb{I}_n \leqslant G \cap \mathbb{I}_n\} \in u$.*

Demostración. Supongamos que $L_p \ll_u L_q$. Sea $x \in T$ de tal forma que $\lim\limits_{n \to u} x(n) = a$, $L_p \subseteq [0_u, a]_+$ y $L_q \subseteq [a, 1_u]_+$. Como $p \in L_p$ y $q \in L_q$, tenemos que $p \in [0_u, a]_+$ y $q \in [a, 1_u]_+$. Definamos $F = \bigcup_{n<\omega}[0_n, x(n)]$ y $G = \bigcup_{n<\omega}[x(n), 1_n]$ para obtener un par de subconjuntos nulos de $\mathbb{M}$ (recuerde que $\mathbb{M}$ es metrizable, así que todos los cerrados son nulos). De acuerdo a la proposición 3.25, $[0_u, a]_+ \subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} F$ y $[a, 1_u]_+ \subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} G$, y en consecuencia, $p \in \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} F$ y $q \in \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} G$. De esta manera (ver proposición 1.16) se deduce que $F \in p$ y $G \in q$. Finalmente, note que $\{n < \omega : F \cap \mathbb{I}_n \leqslant G \cap \mathbb{I}_n\} = \omega \in u$.

Para probar que (2) implica (1), sean $F \in p$ y $G \in q$ de tal manera que $A = \{n < \omega : F \cap \mathbb{I}_n \leqslant G \cap \mathbb{I}_n\} \in u$. Por la proposición 3.39, los conjuntos $B_0 = \{n < \omega : F \cap \mathbb{I}_n \neq \emptyset\}$ y $B_1 = \{n < \omega : G \cap \mathbb{I}_n \neq \emptyset\}$ son elementos de u, así que $C = A \cap B_0 \cap B_1$ también es elemento de u.

Para cada $n \in C$, definamos $\alpha_n = \sup(F \cap \mathbb{I}_n)$ y $\beta_n = \inf(G \cap \mathbb{I}_n)$; notemos que $\alpha_n \leqslant \beta_n$ y empleemos este hecho para fijar un elemento arbitrario $y(n) \in [\alpha_n, \beta_n]$. Ahora, si $n \in \omega \setminus C$, hagamos $y(n) = 0_n$. De este modo hemos producido una sucesión transversal y.

Afirmamos que $L_p \subseteq [0_u, y_u]_+$ y $L_q \subseteq [y_u, 1_u]_+$. Para verificar la primer contención basta con probar que $p \in [0_u, y_u]_+$. Sea $D \in u$ y veamos que $p \in \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in D}[0_n, y(n)]$. En efecto, de la proposición 1.16, del lema 3.4 y del teorema 1.21 se deduce que

$$
\begin{aligned}
p \in \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} F \cap \mathbb{I}_u &\subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} F \cap \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in C \cap D} \mathbb{I}_n \\
&= \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} \left(F \cap \bigcup_{n \in C \cap D} \mathbb{I}_n \right) \\
&= \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in C \cap D} (F \cap \mathbb{I}_n) \\
&\subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in C \cap D} [0_n, y(n)] \\
&\subseteq \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{M}} \bigcup_{n \in D} [0_n, y(n)].
\end{aligned}
$$

Como D fue arbitrario, esto muestra (ver proposición 3.25) que $p \in [0_u, y_u]_+$ y, por lo tanto, $L_p \subseteq [0_u, y_u]_+$.

De forma análoga se prueba que $L_q \subseteq [y_u, 1_u]_+$. □

CONCLUSIONES

En el capítulo 1, la proposición 1.31 nos dice que $\beta\omega$ es un espacio cero-dimensional, además de ser un espacio compacto y de Hausdorff. Si X es un espacio compacto, de Hausdorff y cero-dimensional, entonces es homeomorfo al espacio de Stone del álgebra de subconjuntos cerrado-abiertos de X (ver [6, Theorem 1.3, p. 65]). Es por eso que podemos utilizar la teoría de Álgebras Booleanas para estudiar a $\beta\omega$.

Desafortunadamente, no podemos utilizar las herramientas algebraicas para estudiar a $\beta\mathbb{R}$ porque este es un espacio conexo y, por lo tanto no es cero-dimensional. Así que, para estudiar a $\beta\mathbb{R}$ la estrategia que seguimos fue expresar a $\mathbb{R}^*$ como la suma topológica de $\mathbb{H}^*$ y $(\mathbb{H}^-)^*$. Estos espacios son homeomorfos entre sí, así que nos enfocamos en las propiedades de $\mathbb{H}^*$ para poder trasladarlas a $\mathbb{R}^*$.

En el tercer capítulo, para cada $u \in \omega^*$, encontramos $\mathbb{I}_u$ un subcontinuo de $\mathbb{M}^*$. Otra clase de subcontinuos de $\mathbb{M}$ son los estratos. Utilizando un encaje de $\beta\mathbb{M}$ a $\beta\mathbb{H}$ podemos hallar copias de los estratos y de los continuos $\mathbb{I}_u$ en $\mathbb{H}^*$. Desafortunadamente no pudimos presentar demostraciones para la afirmación: Tanto si la Hipótesis del Continuo como si no, la cardinalidad de una familia de subcontinuos de $\mathbb{H}^*$ no homeomorfos entre sí es $2^{\mathfrak{c}}$. Probablemente, la extensión y complejidad de estos resultados sea suficiente material para otro trabajo de tesis. Esperamos que esta introducción despierte el interésde la comunidad y, más adelante, podamos ver completadas estas pruebas.

BIBILIOGRAFÍA

[1] R. E. Cepeda Morales, *Minimally generated Boolean algebras*, Tesis de maestría, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2017.

[2] A. Dow, *Some set-theory, Stone-Čech, and F-spaces*, Topology and Its Applications **158** (2011) 1749–1755.

[3] A. Dow y K. P. Hart, *On subcontinua and continuous images of $\beta\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}$*, Topology and Its Applications **195** (2015) 93–106.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics, Allyn and Bacon Inc. 470 Atlantic Avenue, Boston, 1978.

[5] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Berlin: Heldermann, 1989.

[6] R. Frankiewicz y P. Zbierski, *Hausdorff gaps and limits*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 132, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994.

[7] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.