Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Selecciones en Continuos y sus Propiedades

T E S I S

Que para obtener el título de

Matemático

Presenta

Edder Yair Valeriano Reyes.

Director de tesis:

Dra. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla.

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 23 de abril de 2019

Hoja de Datos del jurado

1. Datos del alumno
   Valeriano
   Reyes
   Edder Yair
   58 61 56 36
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   309280729

2. Datos del tutor
   Dra
   Verónica
   Martínez de la Vega
   y Mansilla

3. Datos del sinodal 1
   Dra
   María Isabel
   Puga
   Espinosa

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Jorge Marcos
   Martínez
   Montejano

5. Datos del sinodal 3
   Dr
   Rodrigo Jesús
   Hernández
   Gutiérrez

6. Datos del sinodal 4
   M en C
   Miguel Ángel
   Corona
   García

7. Datos del trabajo escrito
   Selecciones en Continuos y sus Propiedades
   79p
   2019

Agradecimientos

A mis padres

Por todo ese apoyo incondicional que me han mostrado a lo largo de mi vida, por formar en mi la persona que soy ahora.

A mi hermana

Gracias por ser parte de mi vida y por estar ahí cuando lo necesito.

A mis amigos

Gracias por todas esos momentos que hemos pasado, por todas esas palabras de aliento.

A mis profesores

Por compartir todos sus conocimientos, ideas y vivencias conmigo porque todo eso ha influido para ser la persona que ahora soy.

A ti Arely

Por todo todo el apoyo y el cariño incondicional.

A mi asesora, Vero

Por darme la confianza y permitirme trabajar con usted, por toda la paciencia, dedicación y esfuerzo que ha puesto en mi y en este trabajo. De verdad, muchas gracias.

También quisiera agradecer a todas esas personas que aunque no he puesto aquí, me han dado una palabra de aliento, un consejo o me han brindado su ayuda.

Por último agradezco a los proyectos ”Teoría de Continuos, hiperespacios y sistemas dinámicos II(IN101216) y III(N106319)” de PAPIIT, DGAPA, UNAM.

Índice general

Introducción

Este trabajo está dirigido para estudiantes de la licenciatura en matemáticas o alguna carrera afín, que hayan llevado un curso de Análisis Matemático I y Topología I, además de estar familiarizados con los conceptos de espacio métrico, conexidad y compacidad.

Dado un espacio métrico (X, d). Decimos que X es un continuo si X es un espacio compacto, conexo y no vacío.

Si X es un continuo definimos el hiperespacio de subcontinuos de X como sigue:

$$C(X) = \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset,\ A \text{ es cerrado y conexo}\}$$

Una *selección* es una función continua $s : C(X) \longrightarrow X$ tal que para todo $A \in C(X)$ se tiene que $s(A) \in A$. Si un continuo X admite una selección, diremos que X es selectible.

Uno de los principales problemas, aún abiertos en el tema de selecciones, es poder caracterizar a los continuos que son selectibles.

En el Capítulo 1 daremos algunas definiciones básicas, explicaremos brevemente lo que son modelos para $C(X)$ y mencionaremos algunos algunos resultados importantes que nos serán de utilidad a lo largo de este trabajo.

Para el segundo Capítulo estudiaremos más a fondo las selecciones y veremos que todo continuo selectible es un dendroide.

Durante el tercer Capítulo estudiaremos la relación que hay entre las selecciones y los conjuntos de doblez. Dicha relación es la siguiente. Dado un continuo selectible X, A un subcontinuo de X y B un conjunto de doblez de A, si $s : C(X) \longrightarrow X$ es una selección, entonces $s(A) \in B$. Dicha propiedad se menciona en el artículo *Continuous selections for* $C(X)$ realizado por Mackowiak [6].

En el cuarto Capítulo trataremos dendroides suaves, donde veremos que todo dendroide suave es selectible y analizaremos ejemplos que se presentaron en el artículo *Contractibility and continuous selections* de J. J. Charatonik [2].

Para el último capítulo analizaremos varios ejemplos interesantes expuestos en el artículo de Mackowiak [6], en donde uno de ellos tiene un error y explicaremos el por qué.

Es importante hacer la observación de que en las pruebas usaremos resultados de Cálculo y Análisis que no demostraremos.

Capítulo 1

Hiperespacios y Métrica de Hausdorff

1.1. Preliminares

En esta parte veremos algunas definiciones y proposiciones de Análisis I y Topología I que se utilizarán a lo largo de este trabajo.

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que d* ***es una distancia*** *en X si:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *para cualesquiera* $x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para cualesquiera* $x, y, z \in X$.

A la pareja (X, d) le llamaremos espacio métrico.

Definición 1.1.2. *Sean* (X, d), $\varepsilon > 0$ *y* $p \in X$, *definimos la* ***bola abierta de radio*** ε ***con centro en*** p *como* $B_\varepsilon(p) = \{q \in X \mid d(p, q) < \varepsilon\}$.

Definición 1.1.3. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$, *definimos el* ***diámetro*** *de* A *como* $diam(A) = \sup\{d(p, q) \mid x, y \in A\}$.

Denotaremos por τ_d a la topología generada por la base $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(p) \mid \varepsilon > 0 \text{ y } p \in X\}$.

Proposición 1.1.4. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$, *entonces, la siguientes afirmaciones son verdaderas.*

1. A *es abierto si y sólo si* $int(A) = A$.

2. A *es cerrado si y sólo si* $\overline{B} = B$.

Definición 1.1.5. *Sean* (X, d), (Y, d') *espacios métricos y* $f : X \longrightarrow Y$, *decimos que* f *es* ***continua*** *si* $f^{-1}(B_\varepsilon^{d'}(p))$ *es abierto en* X, *para toda* $\varepsilon > 0$ *y* $p \in Y$.

Definición 1.1.6. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *de elementos en* X, *decimos que* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ***converge*** *a* $x \in X$ *si para toda* $\varepsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x) < \varepsilon$, *para toda* $n \geq N$.

Definición 1.1.7. *Sean* (X, d) *un espacio métrico,* $a, b \in X$, *una* ***trayectoria*** *entre* a *y* b *es una función continua* $f : [0, 1] \longrightarrow X$ *tal que* $f(0) = a$ *y* $f(1) = b$.

Definición 1.1.8. *Sean* (X, d), (Y, d') *espacios métricos y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función, decimos que* f *es* ***uniformemente continua*** *si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, para cualesquiera* $x_1, x_2 \in X$ *si* $d(x_1, x_2) < \delta$, *entonces* $d'(f(x_1, x_2) < \varepsilon$.

Proposición 1.1.9. *Sean* (Y, d') *un espacio métrico,* (X, d) *un espacio métrico compacto y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función continua, entonces* f *es uniformemente continua.*

Proposición 1.1.10. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces f alcanza su máximo y su mínimo.*

Proposición 1.1.11. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, entonces $diam(X)$ está acotado.*

1.2. Definiciones y Métrica de Hausdorff

Antes de definir la métrica de Hausdorff y hacer uso de ella, definiremos el concepto de continuo y algunos hiperespacios que serán de utilidad para nuestro propósito.

Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es un ***continuo*** si X es compacto y conexo.

Sea X un continuo, definimos:

$$2^X = \{A \subseteq X \mid A \neq \emptyset, A \quad \text{es cerrado}\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X \mid A \ \text{ es conexo}\}$$

$$F_1(X) = \{\{p\} \mid p \in X\}$$

Definición 1.2.1. *Dados, $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$, definimos* ***la nube de radio*** ε ***con centro en*** *A como: (Ver figura 1.1)*

$$N(\varepsilon, A) = \{p \in X \mid \textit{existe } x \in A \textit{ tal que } d(x, p) < \varepsilon\}$$

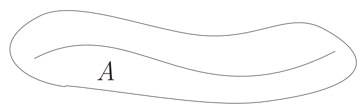


Figura 1.1: Nube de radio ε con centro en A

Definición 1.2.2. *Dados $A, B \in C(X)$, podemos definir la* ***métrica de Hausdorff*** *como:*

$$H : C(X) \times C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\}$$

Lo siguiente será probar que en realidad es una métrica.

Proposición 1.2.3. $H : C(X) \times C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una métrica para* $C(X)$.

Demostración. Antes de probar las condiciones para que H sea una métrica veamos que está bien definida. Para esto tomemos $A, B \in C(X)$ y $M = \{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\}$ y veamos que M es acotado inferiormente y no vacío.

Dados $x, y \in X$ sabemos que $d(x, y) < diam(X) + 1$. Si tomamos $x \in A$, entonces, para toda $y \in B$, se tiene que $d(x, y) < diam(X) + 1$. Por lo que $x \in N(diam(X) + 1, B)$. De manera similar si tomamos $x \in B$, entonces $x \in N(diam(X) + 1, A)$. Por lo tanto $diam(X) + 1 \in M$, es decir $M \neq \emptyset$.

Notemos que M está acotado inferiormente por 0 ya que estamos tomando $\varepsilon > 0$. Con esto garantizamos que H está bien definida.

No negativa.

Para ver que $H(A, B) \geq 0$, recordemos que 0 es una cota inferior de M por lo que $0 \leq \text{ínf}\, M = H(A, B)$.

Simetría.

Lo siguiente a probar es que $H(A, B) = H(B, A)$. Notemos que $H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq N(\varepsilon, B), B \subseteq N(\varepsilon, A)\} = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 \mid B \subseteq N(\varepsilon, A), A \subseteq N(\varepsilon, B)\} = H(B, A)$. Así $H(A, B) = H(B, A)$.

Axioma de coincidencia.

Ahora probemos que si $H(A, B) = 0$ entonces $A = B$. Sea $x \in A$, como $H(A, B) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B$ tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$, lo cual implica que $x \in \overline{B}$ pero $\overline{B} = B$ pues B es cerrado. Así $x \in B$ y $A \subseteq B$. De manera similar si tomamos $x \in B$ podemos concluir que $x \in A$ y así garantizamos que $B \subseteq A$. Por tanto $A = B$. Por lo que, si $H(A, B) = 0$ entonces $A = B$.

Dados $A \in C(X)$ y $\varepsilon > 0$, notemos que $A \subseteq N(\varepsilon, A)$ pues para todo $x \in A$ se tiene que $d(x, x) = 0$, de manera que $H(A, A) = 0$. Supongamos ahora que $A = B$, entonces $H(A, B) = H(A, A) = 0$. Lo anterior nos dice que $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.

Desigualdad del triángulo.

Por último mostremos que $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$. Para esto recordemos la siguiente propiedad:

Si $S, T \subseteq \mathbb{R}$, entonces, $\text{ínf}(S) + \text{ínf}(T) = \text{ínf}(S + T)$, donde $S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$. Sean $K = \{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq N(\varepsilon, C), C \subseteq N(\varepsilon, A)\}$, $L = \{\delta > 0 \mid A \subseteq N(\delta, B), B \subseteq N(\delta, A)\}$ y $M = \{\gamma > 0 \mid B \subseteq N(\gamma, C), C \subseteq N(\gamma, B)\}$.

Lo que habrá que probar en realidad es que $\text{ínf}(K) \leq \text{ínf}(L + M)$. Sean, $a \in A$, $\delta \in K$ y $\gamma \in M$, por lo que, existen $b \in B$ y $c \in C$ respectivamente para los cuales $d(a, b) < \delta$ y $d(b, c) < \gamma$. Ahora, como $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < \delta + \gamma$, entonces $A \subseteq N(\delta + \gamma, C)$.

Para la otra contención tomemos $c \in C$, como $c \in N(\gamma, B)$, existe $b \in B$ tal que $d(b, c) < \gamma$, de manera similar, existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \delta$ y así $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < \delta + \gamma$ de modo que $C \subseteq N(\delta + \gamma, A)$. Esto muestra que $\delta + \gamma \in K$, en consecuencia $\text{ínf}(K) \leq \delta + \gamma$, puesto que la elección de $\delta \in K$ y $\gamma \in M$ fue arbitraria, $\text{ínf}(K) \leq \text{ínf}(L + M)$ que es lo que se deseaba probar. Así $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$.

Esto termina la demostración de que H es una métrica para $C(X)$. $\square$

De aquí en adelante, $B_\varepsilon^H(A) = \{B \in C(X) \mid H(A, B) < \varepsilon\}$ denotará a la bola abierta con centro en A y radio ε en $C(X)$.

Proposición 1.2.4. *Sean X un continuo, $A \in C(X)$, $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ dos sucesiones de* *subcontinuos de X tales que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen al subcontinuo A, entonces $\{A_n \cup B_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $H(A_n, A) < \varepsilon$ y $H(B_n, A) < \varepsilon$, para toda $n \geq N_0$, veamos que si $n \geq N_0$, se tiene que $H(A_n \cup B_n, A) < \gamma$. Para esto, tomemos $n \geq N_0$ y bastará probar que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$ y $A_n \cup B_n \subseteq N(\varepsilon, A)$.

Como $H(A_n, A) < \varepsilon$ entonces $A \subseteq N(\gamma, A_n)$, además $N(\varepsilon, A_n) \subseteq N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$. Así $A \subseteq N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$.

Puesto que $H(A_n, A) < \varepsilon$ y $H(B_n, A) < \varepsilon$ se tiene que $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$ y $B_n \subseteq N(\varepsilon, A)$, de manera que $A_n \cup B_n \subseteq N(\varepsilon, A)$. Por tanto, si $n \geq N_0$, $H(A_n \cup B_n, A) < \varepsilon$. Así, $\{A_n \cup B_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al subcontinuo A. $\square$

Proposición 1.2.5. *Sean X un continuo, $A \in C(X)$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de subcontinuos de X tales que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen al subcontinuo A, $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, tal que $A_n, B_n, A_n \cup B_n \in B_{\varepsilon}^{H}(A)$. Si $C \in C(X)$ es tal que $A_n \subseteq C \subseteq A_n \cup B_n$, entonces $H(C, A) < \varepsilon$.*

Demostración. Por hipótesis sabemos que $A_n \subseteq C$ y $A_n \in B_{\varepsilon}^{H}(A)$, entonces $N(\varepsilon, A_n) \subseteq N(\varepsilon, C)$ y $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$, de esta manera $A \subseteq N(\varepsilon, C)$. Ahora, como $A_n \cup B_n \in B_{\varepsilon}^{H}(A)$ y $C \subseteq A_n \cup B_n$, esto implica que $A_n \cup B_n \subseteq N(\varepsilon, A)$, en consecuencia $C \subseteq N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto $H(C, A) < \varepsilon$. $\square$

1.3. Modelos para $C(X)$

Trabajar con un hiperespacio $\mathcal{L} \subseteq 2^X$ puede resultar complicado pensando que los elementos de $\mathcal{L}$ son subconjuntos cerrados de X. Es por esto que se trata de visualizar a los hiperespacios como un conjunto de puntos en un espacio con el cual nos sea más fácil trabajar.

Dar un modelo, es encontrar un conjunto de puntos M con el cual estemos más familiarizados y que $\mathcal{L}$ sea homeomorfo a M.

Para acostumbrarnos a este concepto daremos modelos de $C(X)$ para el intervalo $[0,1]$ y la circunferencia S^1.

La idea de este trabajo no es hablar de modelos por lo que solamente se darán ideas intuitivas de cómo se construyen y no se harán las pruebas rigurosas de los homeomorfismos. Si el lector desea conocer más acerca de modelos puede encontrar información en [4].

Antes de dar un modelo para el caso del intervalo, notemos que los subcontinuos del intervalo $[0,1]$ se pueden escribir de la siguiente manera:

Si $A \in C([0,1])$ entonces $A = [a,b]$ donde $a,b \in [0,1]$ y $a \leq b$. Esto nos dice que los subcontinuos del intervalo son subintervalos cerrados ó conjuntos de un elemento.

La forma como se pueden describir los subcontinuos del intervalo nos dá una manera intuitiva de relacionar puntos en $\mathbb{R}^2$ con dichos subcontinuos.

Tomemos la función $f : C([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $f(A) = f([a,b]) = (a,b)$. Para más referencia el lector puede consultar [4, pág29]

La imagen de esta función es:

$$M = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

(Ver figura 1.2)

que es un modelo para $C([0,1])$.

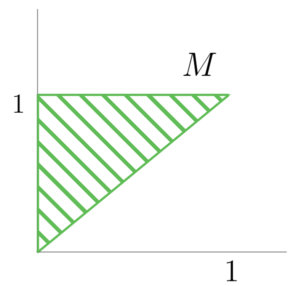


Figura 1.2: Modelo para C([0,1])

Veamos cuales son las imágenes bajo la función f de los conjuntos $F_1([0,1])$, $N = \{[0,b] \mid b \in [0,1]\}$ y $R = \{[a,1] \mid a \in [0,1]\}$.

Para el conjunto $F_1([0,1])$ notemos que $f(\{t\}) = f([t,t]) = (t,t)$ por lo que $F_1([0,1]) = \{(t,t) \mid t \in [0,1]\}$.

De manera similar podemos ver que $N = \{[0,b] \mid b \in [0,1]\}$ y $R = \{[a,1] \mid a \in [0,1]\}$ tienen como imagen a los conjuntos $\{(0,b) \mid b \in [0,1]\}$ y $\{(a,1) \mid a \in [0,1]\}$, respectivamente (Ver figura 1.3).

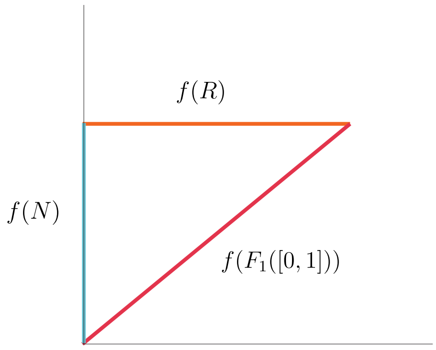


Figura 1.3: Imagen bajo f de los conjuntos N, R y $F_1([0,1])$

Para el modelo de $C(S^1)$ notemos que hay tres tipos de subcontinuos de S^1, la circunferencia, arcos y puntos. Una manera de diferenciar los arcos de S^1 es mediante su longitud y su punto medio. Si tenemos un arco A de S^1, denotemos por $l(A)$ y $m(A)$ a la longitud y el punto medio de A, respectivamente.

La función $f : C(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(A) = \begin{cases} \left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) m(A) & si \quad A \in C(X) \setminus \{S^1\} \\ \\ (0,0) & si \quad A = S^1 \end{cases}$$

es un homeomorfismo.

Primero notemos que para todo $A \in C(S^1)$ se tiene que $0 \leq l(A) \leq 2\pi$ y por consecuencia $0 \leq \left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) \leq 1$, por lo que si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 1\}$ entonces $f(A) \in D$.(Ver figura 1.4)

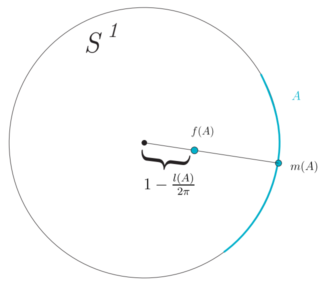


Figura 1.4: Imagen del subcontinuo A bajo el homeomorfismo f

Para los subcontinuos de la forma $\{p\}$ con $p \in S^1$ tenemos que $f(\{p\}) = \left(1 - \frac{0}{2\pi}\right) p = p$ lo que nos indica que los unitarios quedan fijos bajo la función .

Sea $p \in S^1$ y denotemos por $M_p = \{A \in C(S^1) \mid p \text{ es el punto medio de } A\}$, entonces $f(A) = sp$ para algún $s \in [0, 1]$ y $A \in M_p$, esto nos indica que $f(M_p) = \overline{Op}$ donde $\overline{Op}$ es el segmento que une a O con p.

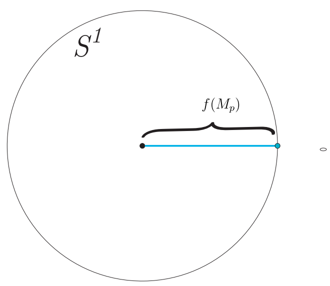


Figura 1.5: Imagen de M_p bajo f

Sean, $r \in [0, 2\pi]$ y $L_r = \{A \in C(S^1) \mid l(A) = r\}$. Para ver quién es $f(L_r)$ notemos que si $A \in L_r$ entonces $f(A) = \left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) m(A) = \left(1 - \frac{r}{2\pi}\right) m(A)$ pero como el valor r es fijo y el parámetro que cambia es $m(A)$, $f(L_r)$ es una circunferencia de radio $1 - \frac{r}{2\pi}$ con centro en 0. (Ver figura 1.6).

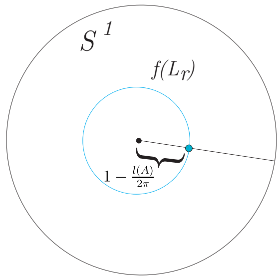


Figura 1.6: Imagen de L_r bajo f

Proposición 1.3.1. *Sea X un continuo, entonces X y $F_1(X)$ son homeomorfos.*

Demostración. Para ver que estos espacios son homeomorfos consideremos la siguiente función, $h : F_1(X) \longrightarrow X$ definida como $h(\{p\}) = p$.

Veamos que la función es inyectiva, tomemos $\{p\}, \{q\} \in F_1(X)$ tal que $p \neq q$, entonces $h(\{p\}) = p \neq q = h(\{q\})$. Por lo que h es inyectiva.

Para mostrar que h es suprayectiva, consideremos $p \in X$. Entonces $\{p\} \in F_1(X)$ y $h(\{p\}) = p$, de manera que h es suprayectiva. Como h es inyectiva y suprayectiva, podemos concluir que h es biyectiva.

Por último, para la continuidad de h, tomemos $\varepsilon > 0$, $p \in X$ y consideremos $B_\varepsilon(p)$, ahora $h^{-1}(B_\varepsilon(p)) = \{\{q\} \in F_1(X) \mid d(p, q) < \varepsilon\}$. Sea $A = \{\{q\} \in F_1(X) \mid d(p, q) < \varepsilon\}$ y $B = \{\{q\} \in F_1(X) \mid H(\{p\}, \{q\}) < \varepsilon\}$, veamos ahora que $A = B$.

Sea $\{q\} \in A$ para probar que $\{q\} \in B$ bastará probar que $q \in N(\varepsilon, \{p\})$ y $p \in N(\varepsilon, \{q\})$ pero ambas contenciones son ciertas pues $d(p,q) < \varepsilon$, de esta manera, $\{q\} \in B$.

Tomemos ahora $\{q\} \in B$, entonces, $H(\{p\},\{q\}) < \varepsilon$, en particular se tiene que $\{q\} \in N(\varepsilon,\{p\})$, por lo cual $d(p,q) < \varepsilon$, así $\{q\} \in A$. Por lo tanto $A = B$.

Con lo anterior tenemos la siguiente igualdad $h^{-1}(B_\varepsilon(p)) = A = B = B_\varepsilon^H(\{p\}) \cap F_1(X)$ donde este último es un abierto en $F_1(X)$, de esta manera h es continua.

Para terminar, veamos que h es abierta. Recordemos que el conjunto de bolas abiertas de radio ε en $F_1(X)$ es una base para la topología inducida por la métrica de Hausdorff en $F_1(X)$, por esta razón para que h sea una función abierta es suficiente probar que la imagen de básicos es abierto en X. Sean $\{p\} \in F_1(X)$, $\varepsilon > 0$ y $U = B_\varepsilon^H(\{p\}) \cap F_1(X) = \{\{q\} \in F_1(X) \mid d(\{p\},\{q\}) < \varepsilon\}$, primero notemos que U es un abierto de $F_1(X)$, ahora $h(U) = \{q \in X \mid d(p,q) < \varepsilon\} = B_\varepsilon(p)$, es decir $h(U)$ es un abierto en X. Por lo que h es una función abierta.

Como h es biyectiva, continua y abierta, entonces h es un homeomorfismo, que es lo que queríamos demostrar. □

Una herramienta muy utilizada en la Teoría de Continuos e Hiperespacios son los arcos ordenados. Los cuales definiremos a continuación.

Definición 1.3.2. *Dada $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ decimos que α es un **arco ordenado** entre $A \in C(X)$ y $B \in C(X)$, con $A \subseteq B$, si cumple lo siguiente:*

1. *α es continua.*

2. *$\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$*

3. *Para cualesquiera s, $t \in [0,1]$ con $s < t$, se tiene que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$*

Una manera intuitiva de pensar a los arcos ordenados es empezar con el subcontinuo A e ir "agrandándolo" hasta llegar al subcontinuo B.

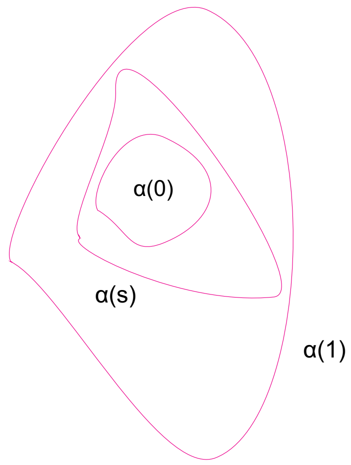


Figura 1.7: Arco ordenado entre A y B

Probar la existencia y algunas propiedades acerca de los arcos ordenados nos desviaría del propósito de este trabajo, por lo que supondremos su existencia y daremos por hecho algunas proposiciones que serán utilizadas más adelante.

Antes de mencionar algunos de los resultados más interesantes que se tienen gracias a los arcos ordenados, daremos una definición.

Definición 1.3.3. *Sea X un continuo, diremos que X es* ***arcoconexo*** *si para cualesquiera p, $q \in X$ tal que $p \neq q$, existe una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$.*

Teorema 1.3.4. *Dado un continuo X el hiperespacio $C(X)$ es arcoconexo [4, pág92].*

Si el lector desea profundizar en estos temas puede revisar [4].

Capítulo 2

Selecciones

En este capítulo abordaremos la definición de selección, veremos algunos continuos y determinaremos si son o no selectibles, además, daremos la definición de dendroide y probaremos que todo continuo selectible es un dendroide.

Definición 2.0.1. *Dado un continuo X, una* ***selección*** *es una función continua $s : C(X) \longrightarrow X$ tal que para todo $A \in C(X)$, se tiene que $s(A) \in A$.*

Diremos que X es selectible o X admite selecciones si dicha función s existe.

Uno de los primeros continuos en donde resulta natural preguntarse si admite o no selecciones es el intervalo $[0, 1]$, veamos que en efecto existen.

Ejemplo 2.0.2. *El intervalo* $[0, 1]$ *admite selecciones.*

Recordemos que si $A \in C(X)$ entonces $A = [a, b]$ donde $a, b \in [0, 1]$ y $a \leq b$. Así, definimos, $s : C(X) \longrightarrow X$ como sigue, $s(A) = s([a, b]) = a$. Una manera de pensarlo es que $s(A) = \text{mín}\{A\}$ (el extremo izquierdo del intervalo $[a, b]$).

Veamos que dicha función es una selección. Por definición $s(A) \in A$. Para ver que es continua, tomemos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos en $C(X)$ tal que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$, para algún $A \in$

$C(X)$ y, veamos que $\{s\,(A_n)\,\}_{n=1}^{\infty} \to s(A)$. Sean, $A = [a,b]$ y $A_n = [a_n, b_n]$, entonces $a = s(A)$ y $a_n = s(A_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \varepsilon$, para toda $n \geq N$, es decir, $A_n \subseteq N(\varepsilon, A)$ y $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$.

Por la definición de $N(\varepsilon, A)$, existe $p_n \in A_n$ para el cual $|a - p_n| < \varepsilon$, consideremos la desigualdad $p_n - a < \varepsilon$, Como $a_n, p_n \in A_n$ y $a_n = \min A_n$, entonces $a_n \leq p_n$, por lo que $a_n - a \leq p_n - a < \varepsilon$. Por tanto, $a_n - a < \varepsilon$.

Para probar que $a - a_n < \varepsilon$ notemos que $A \subseteq N(\varepsilon, A_n)$ de modo que existe $p \in A$ tal que $|a_n - p| < \varepsilon$. Como $a \leq p$, entonces $a - a_n \leq p - a_n < \varepsilon$.

De manera que $|a - a_n| < \varepsilon$, para toda $n \geq N$. Así probamos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \to a$ por lo que la función s es continua y una selección.

Un resultado sencillo pero útil es el siguiente.

Proposición 2.0.3. *Sea $s : C(X) \longrightarrow X$ una selección. Si $Y \in C(X)$ entonces $s|_{C(Y)} : C(Y) \longrightarrow X$ es una selección.*

Demostración. Como $s|_{C(Y)}$ es la restricción de una función continua, entonces $s|_{C(Y)}$ es continua. Veamos que $s|_{C(Y)}(A) \in A$, para todo $A \in C(Y)$. Sea $A \in C(Y)$, como $s|_{C(Y)}(A) = s(A) \in A$. Por lo tanto $s|_{C(Y)} : C(Y) \longrightarrow X$ es una selección.

□

Una pregunta natural es la siguiente ¿ Existen continuos de manera que no admitan selecciones ? La respuesta a esta interrogante es sí.

Proposición 2.0.4. *La curva cerrada simple S^1 no admite selecciones.*

Demostración. Supongamos que existe una selección $s : C(S^1) \longrightarrow S^1$.

Recordemos que $C(S^1)$ es homeomorfo a $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$, donde $\|x\|$ denota la norma usual en $\mathbb{R}^2$, dicho esto podemos pensar a la selección como una función $s : D \longrightarrow S^1$.

Además, por el homeomorfismo definido en la proposición 1.3.1 $s(\{p\}) = p$, para todo $p \in S^1$.

Lo anterior implica que $s : D \longrightarrow S^1$ es una función continua donde $s(\{p\}) = p$ para todo $p \in S^1$, es decir, s es una retracción de D en S^1. Lo cual es una contradicción pues no existen retracciones del disco en su frontera [8, pág 348].

Esta contradicción vino de suponer que la curva cerrada simple S^1 admite selecciones. Por lo tanto S^1 no es un continuo selectible. $\square$

2.1. Dendroides

Hasta ahora sabemos que no todos los continuos admiten selecciones, por lo que uno podría preguntarse si existen condiciones necesarias y suficientes para que un continuo sea selectible.

En el teorema 2.1.4 se dará una condición necesaria para que un continuo admita selecciones.

Definición 2.1.1. *Dado un continuo X, decimos que X es* ***hereditariamente unicoherente*** *si para cualesquiera $A, B \in C(X)$, se tiene que $A \cap B \in C(X)$.*

Definición 2.1.2. *Dado un continuo X, decimos que X es* ***arcoconexo*** *si para cuaesquiera par de puntos a, $b \in X$, existe una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.*

Definición 2.1.3. *Dado un continuo X,decimos que X es un* ***dendroide*** *si es arcoconexo y hereditariamente unicoherente.*

Para familiarizarnos con este concepto veamos si los continuos antes estudiados, dígase $[0,1]$ y S^1, son o no dendroides.

En el intervalo $[0,1]$ dados cualesquiera dos puntos a y b se pueden unir parametrizando el subintervalo $[a,b]$, lo anterior nos dice que el intervalo es arcoconexo.

Para ver que el intervalo es hereditariamente unicoherente basta ver que la intersección de cualesquiera dos subintervalos $[a_1, b_1]$ y $[a_2, b_2]$ es conexa.

La intersección $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ tiene dos posibilidades.

1. $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = [a, b]$ con $0 \leq a < b \leq 1$.

2. $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \{c\}$ para algún $c \in \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$.

En cualquiera de los dos casos la intersección es conexa. (Ver figura 2.1)

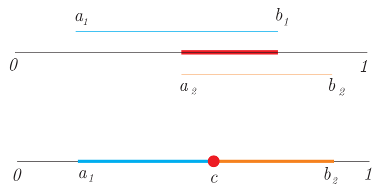


Figura 2.1: Posibles intersecciones de dos subcontinuos del intervalo $[0, 1]$.

Por lo que el intervalo es hereditariamente unicoherente y por tanto, un dendroide.

Para el caso de la circunferencia, podemos encontrar dos subcontinuos A y B tal que la intersección no es conexa, como se muestra en la figura 2.2.

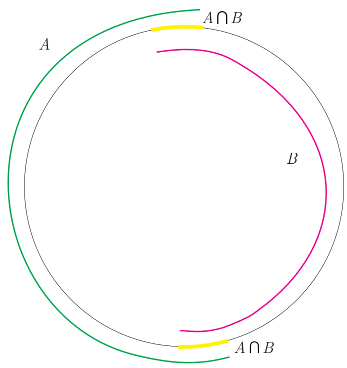
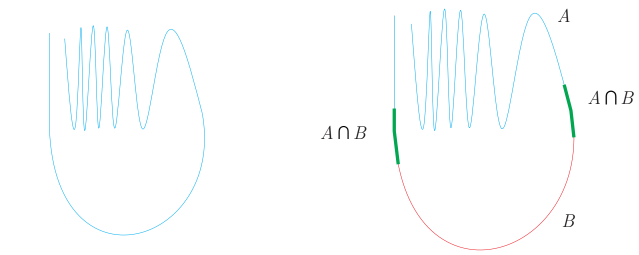


Figura 2.2: Ejemplo de dos subcontinuos de S^1 cuya intersección no es conexa

Por lo tanto la circunferencia no es hereditriamente unicoherente.

Con los ejemplos anteriores, uno podría conjeturar que los dendroides son continuos arcoconexos que no contienen circunferencias, pero esto no es así.

Si consideramos el círculo de Varsovia (figura 2,3 a), este continuo no contiene circunferencias, pero tampoco es hereditariamente unicoherente ya que los subcontinuos A y B que se muestran en la figura 2,3 b, no tienen intersección conexa.



(a) (b)

Figura 2.3: En la primera imagen se muestra el círculo de Varsovia. En la segunda se muestran los subcontinuos cuya intersección nos conexa.

En la siguiente proposición daremos una característica que tienen los continuos que son selectibles.

Proposición 2.1.4. *Sea X un continuo. Si X admite una selección, entonces es un dendroide.*

Demostración. Sea $s : C(X) \longrightarrow X$ una selección.

Afirmación 1. X es arcoconexo.

Prueba: Por el teorema 1.3.4 sabemos que $C(X)$ es arcoconexo y como s es una función continua, $s(C(X))$ es arcoconexo. Además, $s(\{x\}) = x$, para todo $x \in X$, por lo que s es una función suprayectiva. De este modo X es arcoconexo. ■

Afirmación 2. X es hereditariamente unicoherente.

Prueba: Para ver que X es hereditariamene unicoherente, tomemos $A, B \in C(X)$ y veamos que $A \cap B \in C(X)$. Basta probar que $A \cap B$ es compacto y conexo. Dado que tanto A como B son cerrados y están contenidos en el conjunto compacto X, $A \cap B$ es un conjunto cerrado de un compacto. Por tanto, $A \cap B$ es compacto.

Supongamos ahora que $A \cap B$ no es conexo, y sean $M, N \subseteq X$ cerrados ajenos, tales que $A \cap B = M \cup N$. Tomemos $x_0 \in M$, x_1 N. Por la proposición 2.0.3, las restricciones $s|_A : C(A) \longrightarrow A$ y $s|_B : C(B) \longrightarrow B$ son selecciones. En consecuencia A y B son arcoconexos.

Como $M, N \subseteq A \cap B \subseteq A$, existe $\alpha : [0,1] \longrightarrow A$ un arco tal que $\alpha([0,1]) \subseteq A$, $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Análogamente existe $\beta : [0,1] \longrightarrow B$ donde $\beta([0,1]) \subseteq B$ y $\beta(0) = x_0$, $\beta(1) = x_1$ (Ver figura 2.4).

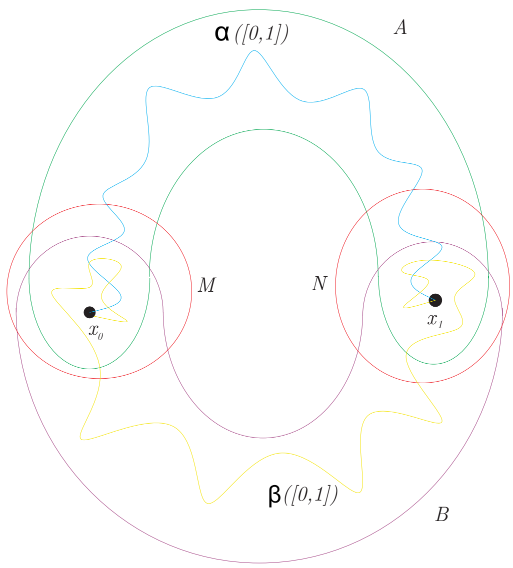


Figura 2.4: Imagen de los arcos α y β

Si $\alpha([0,1]) \subseteq B$, entonces, $\alpha([0,1]) \subseteq A \cap B \subseteq M \cup N$, además, $\alpha(0) \in A$ y $\alpha(1) \in B$ esto no es posible ya que $\alpha([0,1])$ es un conjunto conexo contenido en $M \cup N$ que no es conexo.

Por lo tanto, existe $s_0 \in [0,1]$ tal que $\alpha(s_0) \notin B$.

Definimos

$$d_0 = \text{máx}\{t \in [0,1] \mid \beta(t) \in \alpha([0,s_0]) \cap M\}$$

y

$$d_1 = \text{mín}\{t \in [0,1] \mid \beta(t) \in \alpha([s_0,1]) \cap N\}$$

ahora, tomemos $e_0 \in [0,1]$ tal que $\alpha(e_0) = \beta(d_0)$, análogamente sea $e_1 \in [0,1]$ tal que $\alpha(e_1) = \beta(d_1)$. Como $\alpha(d_0) \in \alpha([0,s_0])$, y $\alpha(d_1) \in \alpha([s_0,1])$, se tiene que $d_0 < s_0 < d_1$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $e_0 < e_1$ y consideremos las funciones $\widehat{\alpha} = \alpha|_{[e_0,e_1]}$ y $\widehat{\beta} = \beta|_{[d_0,d_1]}$ que son continuas ya que son las restricciones de α y β. (Ver figura 2.5)

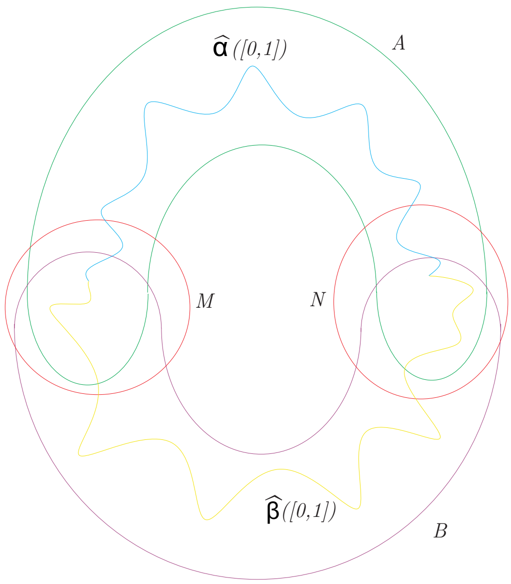


Figura 2.5: Restricciones de las funciones α y β.

Afirmación 3. $\widehat{\alpha}([e_0,e_1]) \cap \widehat{\beta}([d_0,d_1]) = \{\widehat{\alpha}(e_0), \widehat{\alpha}(e_1)\}$.

Prueba. Dado que $\widehat{\alpha}(e_0) = \alpha(e_0) = \beta(d_0) = \widehat{\beta}(d_0)$, entonces $\widehat{\alpha}(e_0) \in \widehat{\alpha}([e_0,e_1]) \cap \widehat{\beta}([d_0,d_1])$, de manera similar $\widehat{\alpha}(e_1) \in \widehat{\alpha}([e_0, e_1]) \cap \widehat{\beta}([d_0, d_1])$, por lo tanto $\{\widehat{\alpha}(e_0), \widehat{\alpha}(e_1)\} \subseteq \widehat{\alpha}([e_0, e_1]) \cap \widehat{\beta}([d_0, d_1])$.

Supongamos que existe $x \in \widehat{\alpha}([e_0, e_1]) \cap \widehat{\beta}([d_0, d_1])$ tal que $\widehat{\alpha}(e_0) \neq x \neq \widehat{\alpha}(e_1)$. Por tanto, existe $t_0 \in (e_0, e_1)$ tal que $\widehat{\alpha}(t_0) = x$ y existe $t_1 \in (d_0, d_1)$ tal que $\widehat{\beta}(t_1) = x$, lo que implica que $x \in A \cap B = M \cup N$.

Ahora consideremos los siguientes casos:

Caso 1 $x \in M$.

Sabemos que $d_0 < t_1 < d_1$, en consecuencia, $t_1 \in \{t \in [0, 1] \mid \beta(t) \in \alpha([0, 1]) \cap M\}$, lo que nos lleva a una contradicción pues d_0 es el máximo de dicho conjunto.

Caso 2 $x \in N$.

Como $d_0 < t_1 < d_1$, entonces $t_1 \in \{t \in [0, 1] \mid \beta(t) \in \alpha([0, 1]) \cap N\}$, contradiciendo que d_1 es el mínimo.

Estas contradicciones vinieron de suponer la existencia del elemento x, por lo que $\widehat{\alpha}([e_0, e_1]) \cap \widehat{\beta}([d_0, d_1]) \subseteq \{\widehat{\alpha}(e_0), \widehat{\alpha}(e_1)\}$.

Ahora, sea $S = \widehat{\alpha}([e_0, e_1]) \cup \widehat{\beta}([d_0, d_1])$, notemos que $S \subseteq X$ es la unión de dos arcos que únicamente se intersectan en sus puntos extremos, por lo que S es homeomorfo a S^1. De modo que para $S^1 \subseteq X$ tenemos que $s|_{S^1} : C(S^1) \longrightarrow S^1$ es una selección para S^1, lo cual es una contradicción a la proposición 2.0.4.

Esto concluye que $A \cap B$ es conexo, es decir, $A \cap B \in C(X)$, lo que muestra que X es hereditariamente unicoherente. Como X es arcoconexo y hereditariamente unicoherente, X es un dendroide. $\square$

Capítulo 3

Conjuntos de doblez

En este capítulo desarrollaremos algunos resultados y ejemplos expuestos en el artículo [6], como lo son la prueba de la siguiente Proposición: Dado un dendroide selectible X, $A \in C(X)$ y B un conjunto de doblez de A, se tiene que $s(A) \in B$, donde s es una selección de X.

Además daremos un ejemplo de un dendroide que para cada subcontinuo $A \in C(X)$ la intersección de los conjuntos de doblez es no vacío pero no es selectible. En el capítulo 2, vimos que los únicos continuos que admiten selecciones son los dendroides.

Los conjuntos de doblez son una herramienta útil, ya sea, para decidir si un dendroide admite o no selecciones, o bien darnos una idea sobre cuál sería la selección para ciertos subcontinuos.

En el siguiente ejemplo veremos cuáles son las ideas claves para la demostración de la proposición 3.0.3 que se formulará posteriormente.

Ejemplo 3.0.1. *Sean* $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$ *donde* $T_0 = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\}$, $T_n = \{(x, \frac{x}{n}) \mid x \in [0, 1]\}$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *y* $v = (0, 0)$. *Si* $s : C(X) \longrightarrow X$ *es una selección, entonces* $s(T_0) = v$. *(Ver figura 3.1)*

Primero mostremos algunas afirmaciones.

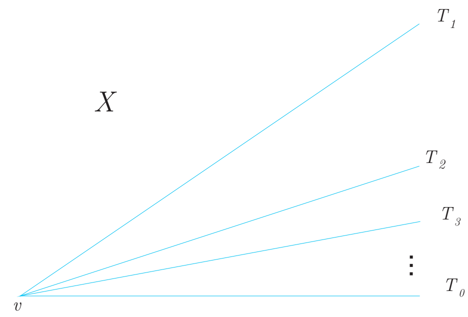


Figura 3.1: Abanico armónico

Afirmación 1. $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow T_0$

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(T_n, T_0) < \varepsilon$, para toda $n \geqslant N$.

Por la propiedad arquímediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. La siguiente observación nos ayudará a demostrar la afirmación 1.

Observación. Dada $n \geq N$ y $x \in [0,1]$,

$$\| \left(x, \frac{x}{n}\right), (x,0) \| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Con lo anterior garantizamos que para toda $n \geqslant N$, $T_0 \subseteq N(\varepsilon, T_n)$ y $T_n \subseteq N(\varepsilon, T_0)$ de modo que $H(T_0, T_n) < \varepsilon$. Por lo tanto $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow T_0$.

Para toda $n \geq 1$, definimos $A_n = T_{2n-1}$ y $B_n = T_{2n}$. Notemos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son subsucesiones de $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de manera que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to T_0$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow T_0$.

La siguientes afirmaciones se tienen por las proposiciones 1.2.4 y 1.2.5 respectivamente.

Afirmación 2. $\{A_n \cup B_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow T_0$.

Afirmación 3. Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $A_n, B_n, A_n \cup B_n \in B_{\varepsilon}^{H}(T_0)$, entonces $H(C, T_0) < \varepsilon$ para todo $A_n \subseteq C \subseteq A_n \cup B_n$.

Afirmación 4. Sean $C \in C(X)$ y $n \geq N_0$ tal que $B_n \subseteq C \subseteq A_n \cup B_n$, entonces $H(C, T_0) < \varepsilon$.

Teniendo la afirmaciones $1, 2, 3$ y 4, podemos proseguir con la prueba.

Supongamos que $s(T_0) = t$ con $t \neq v$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $v \notin B_\varepsilon(t)$ y, por la continuidad de la función s aplicada puntualmente en T_0, existe $\delta > 0$ tal que $s\left(B_\delta^H(T_0)\right) \subseteq B_\varepsilon(t)$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, se tiene que $A_n, B_n, A_n \cup B_n \in B_\delta^H(T_0)$. Por tanto, $s\left(A_n \cup B_n\right) \in B_\varepsilon(t)$. Aquí se desprenden dos casos:

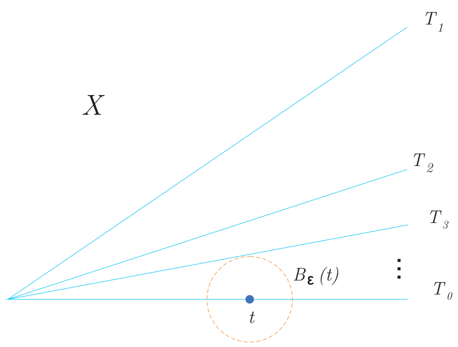


Figura 3.2: Bola de radio ε con centro en $s(T_0)$

Caso 1. $s\left(A_n \cup B_n\right) \in A_n$

Consideremos la función $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$, donde $\alpha(t) = \overline{v\left(t, \frac{t}{2n-1}\right)} \cup B_n$ y $\overline{v\left(t, \frac{t}{2n-1}\right)}$ es el segmento de recta que une a los puntos v y $\left(t, \frac{t}{2n-1}\right)$. Veamos que α es un arco ordenado entre B_n y $A_n \cup B_n$.

Sean $r, t \in [0,1]$ tales que $r < t$. Como $\left(t, \frac{t}{2n-1}\right) \notin \overline{v\left(r, \frac{r}{2n-1}\right)}$, entonces $\overline{v\left(r, \frac{r}{2n-1}\right)} \subsetneq \overline{v\left(t, \frac{t}{2n-1}\right)}$.Dado que $B_n \cap \overline{v\left(u, \frac{u}{2n-1}\right)} = \{v\}$ para toda $u \in [0,1]$. Entonces $B_n \cup \overline{v\left(r, \frac{r}{2n-1}\right)} \subsetneq B_n \cup \overline{v\left(t, \frac{t}{2n-1}\right)}$. Así, si $r < t$, se tiene que $\alpha(r) \subsetneq \alpha(t)$.

Para ver que α es continua, tomemos un sucesión $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$, donde $t_m \in [0,1]$ tal que

$\{t_m\}_{m=1}^{\infty} \longrightarrow t$, para algún $t \in [0,1]$ y veamos que $\{\alpha(t_m)\}_{m=1}^{\infty} \longrightarrow \alpha(t)$.

Puesto que $\{t_m\}_{m=1}^{\infty} \longrightarrow t$, se tiene que $\{\frac{t_m}{2n-1}\}_{m=1}^{\infty} \longrightarrow \frac{t}{2n-1}$. De esta manera $\{\left(t_m, \frac{t_m}{2n-1}\right)\}_{m=1}^{\infty} \longrightarrow (t, \frac{t}{2n-1})$. Para simplificar la notación tomemos $x_m = \left(t_m, \frac{t_m}{2n-1}\right)$ y $x = \left(t, \frac{t}{2n-1}\right)$. Ahora, dada $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $m \geq M$, se tiene que $\|x_m, x\| < \varepsilon$. Con lo cual obtenemos que el diámetro del arco $\overline{x_m, x}$ es menor que ε. Por lo tanto $\overline{vx_m} \subseteq N\left(\varepsilon, \overline{vx}\right)$ y $\overline{vx} \subseteq N\left(\varepsilon, \overline{vx_m}\right)$. Lo cual implica que para $m \geq M$, se tiene que $H\left(\overline{vx}, \overline{vx_m}\right) < \varepsilon$. Por lo que $\{\overline{vx_m}\}_{m=1}^{\infty} \longrightarrow \overline{vx}$ y por la definición de α, $\{\alpha(t_m)\}_{m=1}^{\infty} \longrightarrow \alpha(t)$. Hemos mostrado entonces que α es continua.

Observemos que la función $s \circ \alpha : [0,1] \longrightarrow X$, es una trayectoria. Dado que α es un arco ordenado donde $\alpha(0) = B_n$ y $\alpha(1) = A_n \cup B_n$, para toda $t \in [0,1]$, $B_n \subseteq \alpha(t) \subseteq A_n \cup B_n$. Por la afirmación 4, $H\left(\alpha(t), T_0\right) < \delta$, para toda $t \in [0,1]$. De la continuidad de s, tenemos que $s(\alpha[0,1]) \subseteq B_{\varepsilon}(t)$.

Veamos que $s(\alpha[0,1]) \subseteq B_{\varepsilon}(t)$ resulta ser una contradicción, primero notemos que $B_{\varepsilon}(t)$ no es conexo pues $v \notin B_{\varepsilon}(t)$, además $s(\alpha(0)) \in B_n \cap B_{\varepsilon}(t)$ y $s(\alpha(1)) \in A_n \cap B_{\varepsilon}(t)$ que son componentes distintas. Por lo que $s(\alpha[0,1])$ al ser conexo no puede estar contenido en dos componentes distintas de $B_{\varepsilon}(t)$.

Caso 2. $s\left(A_n \cup B_n\right) \in B_n$

Así como en el caso 1, consideremos el arco ordenado $\beta : [0,1] \longrightarrow C(X)$, donde $\beta(t) = \overline{v\left(t, \frac{t}{2n}\right)} \cup A_n$, con extremos A_n y $A_n \cup B_n$. Al tomar $s \circ \beta : [0,1] \longrightarrow X$ procedemos como en el caso anterior y obtenemos una contradicción.

La contradicción vino de suponer que $s(T_0) \neq v$.

Así $s(T_0) = v$.

La respuesta a la pregunta ¿ Admite selecciones el abanico del ejemplo 3.0.1? se dará en el Capítulo 4.

Definición 3.0.2. *Sean un continuo X, $A \in C(X)$, $B \in 2^A$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de subcontinuos de X . Decimos que B es un* ***conjunto de doblez*** *de A si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $A_n \cap A'_n \neq \emptyset$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

2. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$ *y* $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$.

3. $\{A_n \cap A'_n\}_{n=1}^{\infty} \to B$.

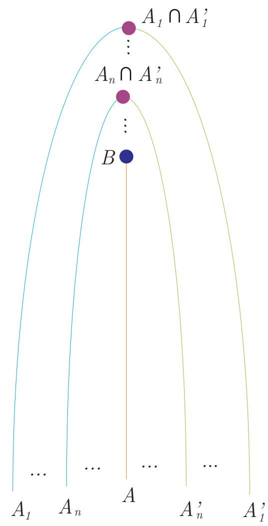


Figura 3.3: B es conjunto de doblez del subcontinuo A.

Proposición 3.0.3. *Sea X un dendroide tal que existe un subcontinuo A que contiene un subconjunto de doblez B. Si existe una selección $s : C(X) \longrightarrow X$, entonces $s(A) \in B$.*

Demostración. Supongamos que $s(A) \notin B$.

Como X es T_3, existen abiertos U y V tales que $U \cap V = \emptyset$, $B \subseteq U$ y $s(A) \in V$.

Sean $a \in A \setminus B$ tal que $s(A) = a$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset V$, en particular se tiene que $B_\varepsilon(a) \cap B = \emptyset$.

Puesto que s es una función continua, existe $\delta > 0$ tal que $s(B_\delta^H(A)) \subseteq B_\varepsilon(a)$.

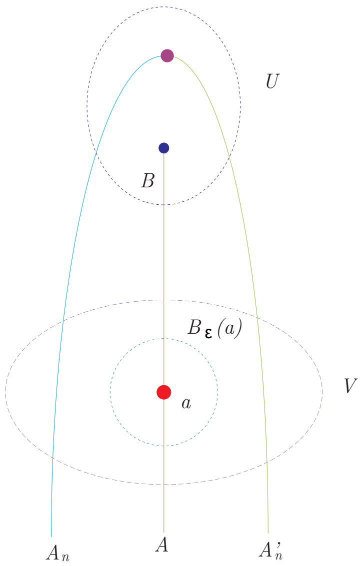


Figura 3.4: Abiertos U y V.

La siguiente afirmación es una consecuencia directa de la proposición 1.2.4.

Afirmación 1. $\{A_n \cup A'_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$.

De las condiciones 1, 2 y 3 podemos asegurar la existencia de $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, entonces:

a) $A_n \in B_\delta{}^H(A)$.

b) $A'_n \in B_\delta{}^H(A)$.

c) $A_n \cup A'_n \in B_\delta{}^H(A)$

d) $A_n \cap A'_n \subseteq U$.

Los incisos a) , b) y c) se cumplen pues las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A_n \cup A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a A. Para el inciso d), recordemos que la sucesión $\{A_n \cap A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a B por lo que a partir de algún momento los elementos $A_n \cap A'_n \subseteq U$.

Afirmación 2. Sea $C \in C(X)$. Si $n \geq N$ y $A_n \subseteq C \subseteq A_n \cup A'_n$, entonces $C \in B_\delta{}^H(A)$.

Afirmación 3. Sea $C \in C(X)$. Si $n \geq N$ y $A'_n \subseteq C \subseteq A_n \cup A'_n$, entonces $C \in B_\delta{}^H(A)$.

Las afirmaciones 2 y 3 se siguen de la proposición 1.2.5.

Ya teniendo las afirmaciones 1, 2 y 3 podemos continuar con la prueba. Dado que, para toda $n \geq N$, los conjuntos $A_n, A'_n, A_n \cup A'_n \in B_\delta{}^H(A)$, por la continuidad de s, se tiene que $s(A_n), s(A'_n), s(A_n \cup A'_n) \in B_\varepsilon(a)$.

Por otro lado $s(A_k \cup A'_k) \in A_k \cup A'_k$, entonces, $s(A_k \cup A'_k) \in A_k$ o $s(A_k \cup A'_k) \in A'_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

En particular, lo anterior se cumple si tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N$.

Caso 2.1. $s(A_k \cup A'_k) \in A_k$.

Consideremos un arco ordenado $L \subseteq C(X)$ con extremos A'_k y $A_k \cup A'_k$, por la afirmación 2 y la continuidad de s, para cada $C \in L$, con $H(A, C) < \delta$ se tiene que $s(C) \in B_\varepsilon(a)$. Así $s(L) = \{s(C) \mid C \in L\} \subseteq B_\varepsilon(a)\}$. Como L es subcontinuo de $C(X)$ y s es una función continua, entonces $s(L)$ es un subcontinuo de X.

Sea $z \in A_k \cap A'_k$. Recordemos que A_k es arcoconexo, entonces, existe un arco $M \subseteq A_k$ que une a $s(A_k \cup A'_k)$ con z.

De manera análoga, existe $K \subseteq A'_k$ un arco, con extremos $s(A'_k)$ y z.

Notemos que $s(L) \cup M$ y $s(L) \cup K$ son subcontinuos pues tanto $s(L)$, M y K son subcontinuos de X, además $s(L) \cap M \neq \emptyset \neq S(L) \cap K$ ya que $s(A_k \cup A'_k) \in s(L) \cap M$, $s(A'_k) \in s(L) \cap K$. Además $z \in M \cup N$, de esta manera $s(L) \cup M \cup N$ contiene una curva cerrada simple S (Ver figura 3.5) . Esto es una contradicción ya que X es selectible y no debe contener curvas cerradas simples.

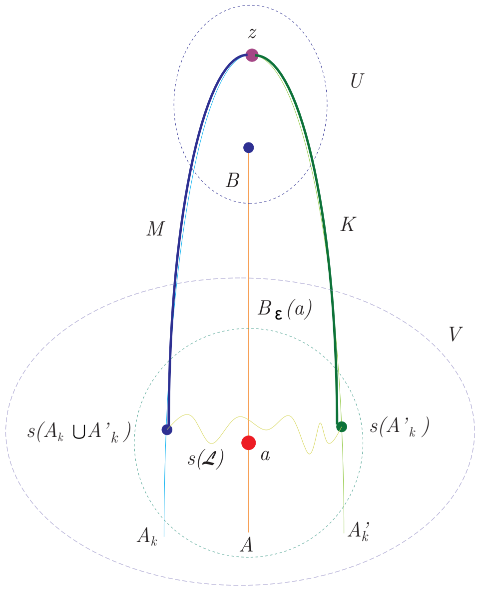


Figura 3.5: Subcontinuo $M \cup K \cup s(L)$.

Caso 2.2. $s(A_k \cup A'_k) \in A'_k$.

Tomemos un arco ordenado $L' \subseteq C(X)$ con extremos A_k y $A_k \cup A'_k$. Por la afirmación (3), tenemos que $L' \subseteq B_\delta{}^H(A)$ y así $s(L') \subseteq B_\varepsilon(a)$.

Tomemos $w \in A_k \cap A'_k$ y $M' \subseteq A_k$ un arco que une a $s(A_k)$ con w y $K' \subseteq A'_k$ un arco con extremos $s(A_k \cup A'_k)$ y w.

De manera análoga, $s(L') \cup M'$ y $s(L') \cup K'$ son subcontinuos de X, así $s(L') \cup M' \cup K'$ es un subcontinuo de X que contiene una curva cerrada simple.

En ambos casos obtuvimos una contradicción, la cual vino de suponer que $s(A) \notin B$. Así concluimos que $s(A) \in B$. $\square$

Corolario 3.0.4. *Sean X un continuo selectible y $A \in C(X)$, entonces la intersección de todos* *los conjuntos de doblez de A es no vacía.*

Demostración. Sea $s : C(X) \longrightarrow X$ una selección. Para cualquier conjunto de doblez $B \subseteq A$. Por la proposición 3.0.3 $s(A) \in B$, de esta manera $s(A)$ es un elemento de la intersección de los conjuntos de doblez. $\square$

Este corolario nos da una manera de saber si un continuo X admite o no selecciones, ya que si la intersección de los conjuntos de doblez es vacía entonces X no admite selecciones.

Consideremos ahora el siguiente continuo:

Ejemplo 3.0.5. *Sean $p = (0,0)$, $q = (1,0)$, $q_n = (1, \frac{1}{n})$, $q'_n = (\frac{n+1}{n}, 0)$, $q''_n = (1, \frac{-1}{n})$, $p_n = (0, \frac{-1}{n})$, $A_n = \overline{pq_n}$, $B_n = \overline{q_nq'_n}$, $C_n = \overline{q'_nq''_n}$ y $D_n = \overline{q''_np_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Sea $X = \overline{pq} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n]$ (Ver figura 3.6)

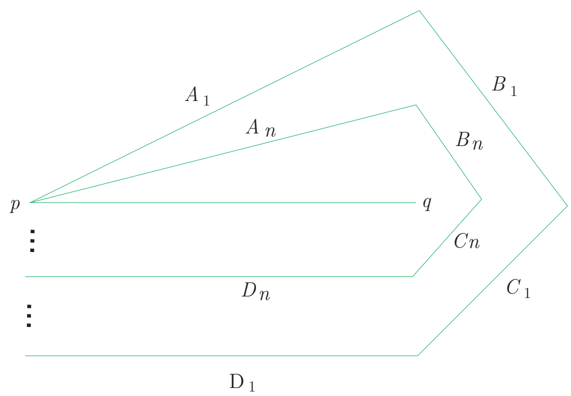


Figura 3.6: Chafaldrana

Para ver que este continuo no admite selecciones, haremos uso de la proposición 3.0.3. Consideremos las sucesiones $T_n = A_{2n+1} \cup B_{2n+1} \cup C_{2n+1} \cup D_{2n+1}$ y $S_n = A_{2n} \cup B_{2n} \cup C_{2n} \cup D_{2n}$ *(Ver figura 3.7)*, ambas sucesiones $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a $\overline{pq}$ y la sucesión $\{T_n \cap S_n\}_{n=1}^{\infty}$

converge a $\{p\}$.

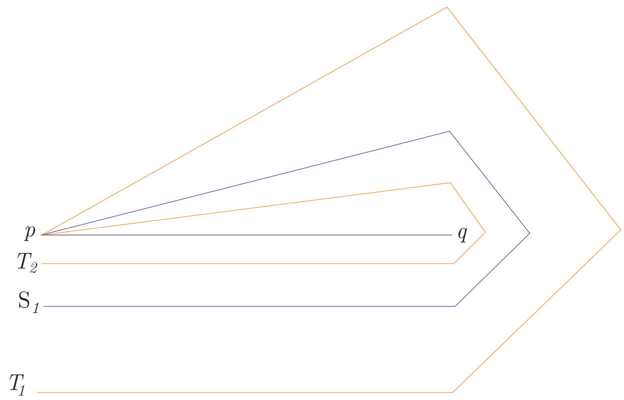


Figura 3.7: Sucesiones $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

Por otro lado, si consideramos las sucesiones $T'_n = A_n \cup B_n$ y $S'_n = C_n \cup D_n$ *(Ver figura 3.8)*, ambas sucesiones $\{T'_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a $\overline{pq}$ y $\{T'_n \cap S'_n\}_{n=1}^{\infty} = \{q'_n\}_{n=1}^{\infty}$, por lo que la sucesión $\{T'_n \cap S'_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{q\}$.

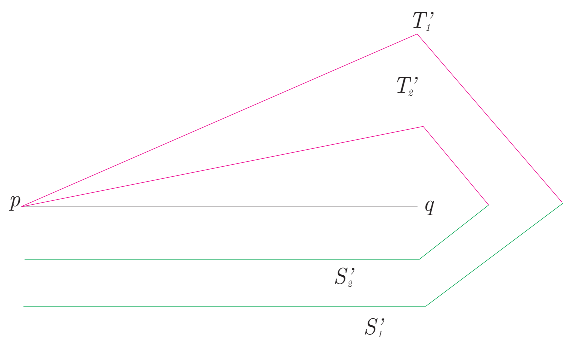


Figura 3.8: Sucesiones $\{T'_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$

Lo anterior asegura que $\{p\}$ y $\{q\}$ son conjuntos de doblez de $\overline{pq}$ pero $\{p\} \cap \{q\} = \emptyset$ y así X no admite selecciones.

El corolario 3.0.4 nos dice que la intersección de los conjuntos de doblez de un subcontinuo A en un continuo X que admite seleciones es no vacía. Uno podría pensar que si la intersección de los conjuntos de doblez de un subcontinuo A es no vacía, es porque el continuo X admite selecciones pero esto es falso. Es decir, el regreso al corolario 3.0.4 no es cierto.

En el siguiente ejemplo daremos un dendroide X, en el cual dado un subcontinuo A, la intersección de los conjuntos de doblez, es no vacía pero dicho continuo no admite selecciones.

Ejemplo 3.0.6. *Sean* $p = (0,0)$, $q = (1,0)$, $a = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $b = (\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$, $a_n = (\frac{-(n+2)}{2n}, \frac{n\sqrt{3}+2}{2n})$, $b_n = (\frac{-(n+2)}{2n}, \frac{-(n\sqrt{3}+2)}{2n})$, $p_n = (\frac{-1}{n}, 0)$, $p'_n = (0, \frac{1}{n})$, $p''_n = (0, \frac{-1}{n})$ *(Ver figura 3.9).*

Definimos $A_0 = \overline{pq} \cup \overline{pa} \cup \overline{pb}$,

$A_n = \overline{qp''_{2n}} \cup \overline{p''_{2n}b_{2n}} \cup \overline{b_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}a_{2n}}$

$B_n = \overline{qp'_{2n+1}} \cup \overline{p'_{2n+1}a_{2n+1}} \cup \overline{a_{2n+1}p_{2n+1}} \cup \overline{p_{2n+1}b_{2n+1}}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Sea $X = A_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) \right)$.

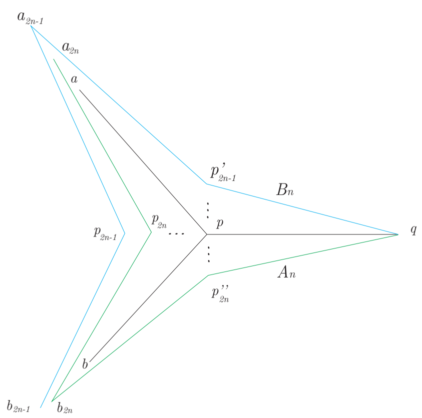


Figura 3.9: Dendroide del ejemplo 3.0.6

Para ver que X no admite selecciones, supongamos lo contrario, es decir, que X admite una selección $s : C(X) \longrightarrow X$.

Consideremos el conjunto $R_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq t$ para cada $t \in [0, 1]\}$ y sean $A_t(n) = A_n \cap R_t$ y $B_t(n) = B_n \cap R_t$ (Ver figura 3.10).

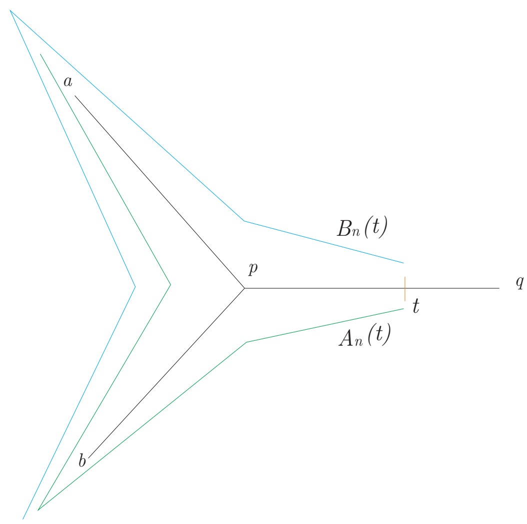


Figura 3.10: Conjuntos $A_t(n)$ y $B_t(n)$

Afirmación 1. Existe $m \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n > m$, se cumple una de las siguientes dos afirmaciones:

1. $s(A_n(0)) \in \overline{b_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}a_{2n}}$.
2. $s(B_n(0)) \in \overline{a_{2n+1}p_{2n+1}} \cup \overline{p_{2n+1}b_{2n+1}}$.

Prueba. Sea $z = s(\overline{ap \cup pb})$. Como s es una función, z es diferente a alguno de los puntos a y b; en el caso en el que z sea distinto de b, veamos que se cumple la condición 1.

Supongamos que para toda $m \in \mathbb{N}$, existe $n > m$ tal que $s(A_n(0)) \notin \left(\overline{b_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}a_{2n}}\right)$.

Sea $\varepsilon > 0$, tal que $b_{2n} \notin B_\varepsilon(z)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como s es continua, existe $\delta > 0$ tal que, si $A \in C(X)$ y $H(A, \overline{ap} \cup \overline{pb}) < \delta$, entonces $s(A) \in B_\varepsilon(z)$.

Notemos que $\{A_n(0)\} \to \overline{ap} \cup \overline{pb}$, por lo cual existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n(0), \overline{ap} \cup \overline{pb}) < \delta$ para toda $n > m$.

Para dicha $m \in \mathbb{N}$, existe $n > m$ tal que $s(A_n(0)) \notin \overline{b_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}a_{2n}}$, es decir, $s(A_n(0)) \in \overline{b_{2n}p''_{2n}} \setminus \{b_{2n}\}$ (Ver figura 3.11).

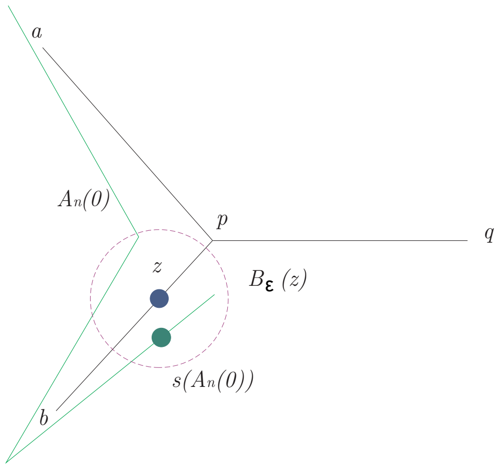


Figura 3.11: Selección del conjunto $s(A_n(0))$

Consideremos ahora $\alpha : [0,1] \longrightarrow C(X)$ la función dada por:

$$\alpha(t) = \overline{a_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}b_{2n}} \cup \overline{b_{2n}w_{2n}(t)}$$

donde $w_{2n}(t) = (1-t)b_{2n} + tp''_{2n}$. Como $w_{2n}(t) = (1-t)b_{2n} + tp''_{2n}$ es continua, entonces α es continua.

Por otro lado, observemos que $\overline{a_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}b_{2n}} \subseteq \alpha(t) \subseteq A_n(0)$ para toda $t \in [0,1]$. Por lo que, $H(\alpha(t), \overline{ap} \cup \overline{pb}) < \delta$ y así $s(\alpha([0,1])) \subseteq B_\varepsilon(z)$.

Como $\alpha([0,1])$ es conexo, entonces $s(\alpha([0,1]))$ es conexo, pero esto no es posible ya que $s(\alpha(0)) = s(\overline{a_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}b_{2n}}) \in \overline{a_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}b_{2n}}$ y $s(\alpha(1)) = s(A_n(0)) \in \overline{b_{2n}p''_{2n}} \setminus \{b_{2n}\}$, es decir, $s(\alpha(0))$ y $s(\alpha(1))$ se encuentran en componentes diferentes de $B_\varepsilon(z)$ pues $b_{2n} \notin B_\varepsilon(z)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s(A_n(0)) \in \overline{b_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}a_{2n}}$, para toda $n > m$.

Si $z \neq a$ se procede de manera análoga a lo hecho anteriormente para concluir que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s(B_n(0)) \in \overline{a_{2n+1}p_{2n+1}} \cup \overline{p_{2n+1}b_{2n+1}}$ para toda $n > m$ y así concluir la condición 2. Con esto terminamos la prueba de la afirmación anterior.

Como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a A_0 y $A_n \cap B_n = \{q\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces por la proposición 3.0.3, $s(A_0) = q$.

Por la continuidad de s, existe $m' \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m'$, entonces, $d(s(A_n), q) < \frac{1}{3}$ y $d(s(B_n), q) < \frac{1}{3}$, donde d representa la métrica de X. Como $C(X)$ es compacto y s una función continua, se tiene que s es una función uniformemente continua 1.1.9. Así, por la continuidad uniforme, existe $\delta > 0$ tal que, siempre que $H(A,B) < \delta$, entonces $d(s(A), s(B)) < \frac{1}{3}$.

Dado que ambas sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a A_0, entonces la sucesión $\{H(A_n, B_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0, es decir, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n(t), B_n(t)) < \delta$, para toda $m \geq M$. Sea $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $m_0 > m'$, $m_0 > m$ y $m_0 > M$ para toda $n > m_0$ y $t \in [0,1]$.

Tomemos $n > m_0$, por la elección de m_0 sabemos que si $n > m_0$, entonces $s(A_n(0)) \in \overline{b_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}a_{2n}}$ o $s(B_n(0)) \in \overline{a_{2n+1}p_{2n+1}} \cup \overline{p_{2n+1}b_{2n+1}}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $s(A_n(0)) \in \overline{b_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}a_{2n}}$, además, $H(A_n, A) < \delta$, esto implica que $d(s(A_n), q) < \frac{1}{3}$, como s es una función continua, existe $t \in [0,1]$ tal que $s(A_n(t) = b_{2n}$. Tomemos ahora $t_0 = \max\{t \in [0,1] \mid s(A_t) \in \overline{b_{2n}p_{2n}}\}$. (Ver figura 3.12).

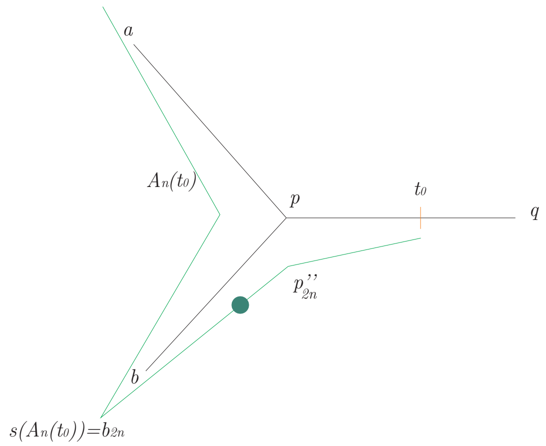


Figura 3.12: Elección del valor $t_0 = \text{máx}\{t \in [0,1] \mid s(A_t) \in \overline{b_{2n}p_{2n}}\}$.

Esto quiere decir que $s(B_n(t_0)) \in \overline{a_{2n+1}p_{2n+1}} \cup \overline{p_{2n+1}b_{2n+1}} \setminus \{a_{2n+1}\}$ pues $d(b_{2n}, a_{2n+1}) > \frac{1}{3}$(Ver figura 3.13).

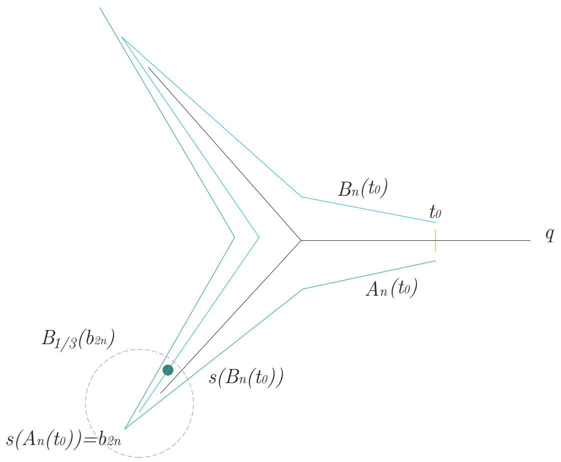


Figura 3.13: Selecciones del subcontinuo $A_n(t_0)$ y $B_n(t_0)$.

Como $s(B_n(1)) = s(B_n)$ y $d(s(B_n), q) < \frac{1}{3}$, existe $t_0' \in [0,1]$, $t_0' > t_0$ tal que $s(B_n(t_0')) = a_{2n+1}$, lo cual es una contradicción. Así $s(A_n(t_0')) \in \overline{b_{2n}p_{2n}} \cup \overline{p_{2n}a_{2n}} \setminus \{b_{2n}\}$.

Esta conclusión implica que existe t_0'', donde $t_0 < t_0'' < t_0'$, $s(A_n(t_0'')) = b_{2n}$ y esto contradice la elección de t_0 (Ver figura 3.14).

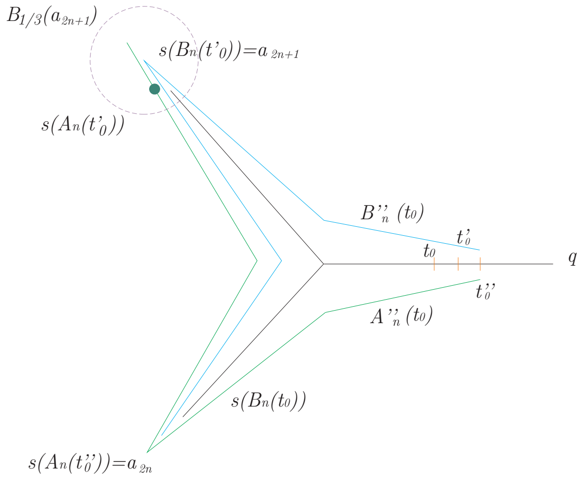


Figura 3.14: Elección de punto t_0'.

En el caso donde $s(B_n(t_0)) = a_{2n}$ se procede de manera análoga para llegar a una contradicción. Por lo tanto X no admite selecciones.

Capítulo 4

Dendroides Suaves

En la búsqueda de conocer todos los dendroides que admiten selecciones nos encontramos con los dendroides suaves, los cuales, como más adelante se verá son selectibles pero no son los únicos. También, probaremos que el abanico armónico es suave y daremos una selección para dicho dendroide. Además daremos la siguiente característica para los puntos de suavidad: Todo punto de suavidad es un punto de conexidad local. Por último veremos un ejemplo del artículo [2, pág 111] donde un dendroide no suave admite selecciones y daremos las razones por las cuales las dendritas son suaves y así selectibles.

En la siguiente proposición probaremos que los arcos en los dendroides son únicos. Dados dos puntos p y $q \in X$, dicho arco lo denotaremos por $\overline{pq}$.

Proposición 4.0.1. *Sean un dendroide X, $A \in C(X)$ y $p \in X \setminus A$, entonces existe un único punto $x_A \in A$ tal que el arco $\overline{px_A} \cap A = \{x_A\}$ y $x_A \in \overline{pq}$ para todo $q \in A$. (Ver figura 4.1)*

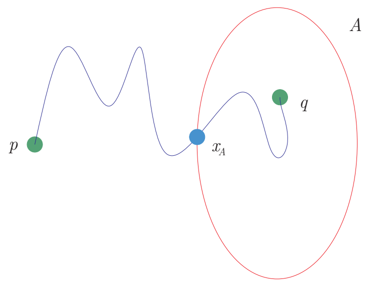


Figura 4.1: Primer punto x_A

Demostración. Sea $q \in A$, y $\overline{pq}$ el arco en X. Dado que $\overline{pq}$ y A son subcontinuos de X que es un dendroide, entonces $\overline{pq} \cap A$ es un subcontinuo contenido en A y en el arco $\overline{pq}$. Así, $\overline{pq} \cap A$ es un subarco contenido en A. Sea $r \in A$ tal que $\overline{pq} \cap A = \overline{rq}$, es decir, $\overline{pr} \cap A = \{r\}$ (Ver figura 4.2).

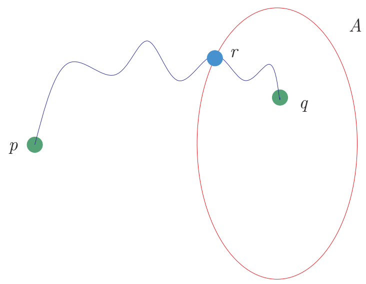


Figura 4.2: Elección del punto r.

Tomemos ahora un punto $q' \in A \setminus \{r\}$. De manera similar, existe $r' \in A$ tal que $r' \in \overline{pq'}$ y $\overline{pr'} \cap A = \{r'\}$ (Ver figura 4.3).

Como A es arcoconexo y $\{r', q\} \subseteq A$, entonces el arco $\overline{r'q} \subseteq A$, además, $\overline{pr'} \cap \overline{r'q} = \{r'\}$ y así $\overline{pr'} \cup \overline{r'q} = \overline{pq}$ pues los arcos en dendroides son únicos.

De manera similar podemos ver que $\overline{pr} \cup \overline{rq'} = \overline{pq'}$.

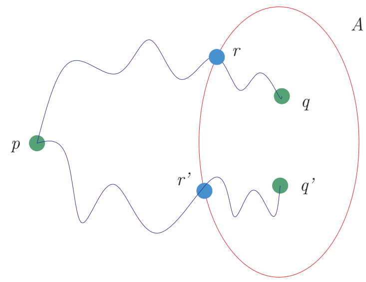


Figura 4.3: Elección de los puntos r y r'.

Veamos que $r = r'$. Como $r \in \overline{pq} = \overline{pr'} \cup \overline{r'q}$, entonces, $r \in \overline{pr'}$ ó $r \in \overline{r'q}$.

De manera análoga, como $r' \in \overline{pq'} = \overline{pr} \cup \overline{rq'}$, entonces $r' \in \overline{pr}$ o $r' \in \overline{rq'}$.

Si $r \in \overline{r'q}$, entonces el arco $\overline{pr'} \subseteq \overline{pr}$. Como $r, r' \in A$, y $\{r, r'\} \subseteq \overline{pq} \cap A = \{r\}$, entonces $r = r'$.

De manera análoga, si $r' \in \overline{rq'}$, entonces el arco $\overline{pr} \subseteq \overline{pr'}$. Como $\{r, r'\} \subseteq \overline{pr'} \cap A = \{r'\}$, entonces $r = r'$.

Esto nos deja los casos en que $r' \in \overline{pr}$ y $r \in \overline{pr'}$(Ver figura 4.4).

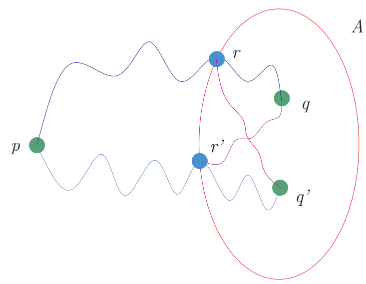


Figura 4.4: Aquí $r' \in \overline{pr}$ y $r \in \overline{pr'}$.

De los casos posibles tenemos lo siguiente, $\overline{pr'} \subseteq \overline{pr}$ y $\overline{pr} \subseteq \overline{pr'}$. Por tanto $\overline{pr} = \overline{pr'}$, es decir, los extremos de dichos arcos son iguales.

Con esto mostramos que, para todo $q \in A$ y $r \in \overline{pq}$, $\overline{pr} \cap A = \{r\}$, que es lo que se quería demostrar.

$\square$

Definición 4.0.2. *Sean X un dendroide y $p \in X$, decimos que X **es suave en** p si para todo $q \in X$ y toda sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \to q$ entonces la sucesión de arcos $\{\overline{pq_n}\}_{n=1}^{\infty} \to \overline{pq}$. Decimos que X es un dendroide suave si existe $p \in X$ tal que X es suave en p, a tales puntos p se les conoce como puntos de suavidad.* (Ver figura 4.5)

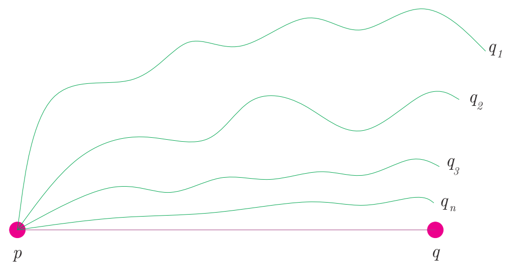


Figura 4.5: Dendroides suaves

Proposición 4.0.3. *Sean X un dendroide suave y $p \in X$ un punto de suavidad, entonces $s : C(X) \longrightarrow X$ definida como:*

$$s(A) = x_A$$

es una selección para X, donde x_A es el primer punto de A con respecto a p de la proposición 4.0.1.

Demostración. Por la proposición 4.0.1, $x_A \in A$, de esta manera, $s(A) \in A$.

Para ver que s es continua, tomemos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X y $A \in C(X)$ tal que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$. Para simplificar la notación, denotemos por $x = s(A)$ y $x_n = s(A_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$.

De la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tomemos una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $y \in A$ tal que $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to y$.

Veamos que $x = y$. Como $y \in A$ y x es el primer punto de A con respecto a p , sabemos que el arco $\overline{px} \subseteq \overline{py}$.

Ahora como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$, existe $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in A_n$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow x$. Por otro lado, como x_n es el primer elemento de A_n con respecto a p, el arco $\overline{px_{n_k}} \subseteq \overline{pz_{n_k}}$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Por la suavidad de X en p, se tiene que $\{\overline{px_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty} \to \overline{py}$ y $\{\overline{pz_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty} \to \overline{px}$, lo cual implica que $\overline{py} \subseteq \overline{px}$.

De ambas contenciones se sigue que $\overline{px} = \overline{py}$ y en consecuencia, $x = y$.

Lo que hemos probado es que toda subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x, por lo que la sucesión $\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x que es lo que queríamos demostrar.

Por lo tanto $s : C(X) \longrightarrow X$ es continua y así, una selección.

$\square$

Ejemplo 4.0.4. *Consideremos X el abanico armónico descrito en el ejemplo 3.0.1.*

Para dar una selección a dicho dendroide, utilizando la proposición 4.0.3 es necesario ver que X es suave.

Veamos que el vértice v es un punto de suavidad de X. Sea $p \in X$ con $p \neq v$ y una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \to p$. Para probar que la sucesión $\{\overline{vp_n}\}_{n=1}^{\infty} \to \overline{vp}$, consideremos los siguientes casos.

Caso 1. $p \in T_k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$.

Como la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ a partir de la cual $p_n \in T_k$, para toda $n \geq N$, de esta manera, $\overline{vp_n} \subseteq T_k$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subseteq T_k$.

Veamos que $\overline{vp_n} \subseteq N(\varepsilon, \overline{vp})$ y $\overline{vp} \subseteq N(\varepsilon, \overline{vp_n})$. Como $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \to p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(p_n, p) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Tomemos que $n \geq N$ y notemos que $\overline{vp} \subseteq \overline{vp_n}$ o bien $\overline{vp_n} \subseteq \overline{vp}$.

Si $\overline{vp} \subseteq \overline{vp_n}$, entonces, $\overline{vp} \subseteq N(\varepsilon, \overline{vp}) \subseteq N(\varepsilon, \overline{vp_n})$.

Resta ver que $\overline{vp_n} \subseteq N(\varepsilon, \overline{vp})$, para esto tomemos $q \in \overline{vp_n}$, si $q \in \overline{vp}$, entonces, $q \in N(\varepsilon, \overline{vp})$. Ahora, si $q \in \overline{vp_n} \setminus \overline{vp}$, entonces $d(q,p) \leq d(p,p_n) < \varepsilon$, de esta manera, $q \in N(\varepsilon, \overline{vp})$. Por lo tanto $H(\overline{vp}, \overline{vp_n}) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$ y $\{\overline{vp_n}\}_{n=1}^{\infty} \to \overline{vp}$.

De manera análoga, si $\overline{vp_n} \subseteq \overline{vp}$, podemos concluir que $H(\overline{vp}, \overline{vp_n}) < \varepsilon$ y así $\{\overline{vp_n}\}_{n=1}^{\infty} \to \overline{vp}$.

Caso 2. $p \in T_0$.

Como la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p, consideremos los siguientes conjuntos, $A = \{n \in \mathbb{N} \mid p_n \notin T_0\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} \mid p_n \in T_0\}$.

Caso 2.1. B es finito.

Como B es finito, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $p_n \notin T_0$, para toda $n \geq N_0$.

Sea $\varepsilon > 0$, por la convergencia de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(p,p_n) < \varepsilon$, para toda $n \geq N_1$, y consideremos $N = \text{máx}\{N_0, N_1\}$.

Para ver que $\{\overline{vp_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\overline{vp}$, basta probar que $\overline{vp_n} \subseteq N(\varepsilon, \overline{vp})$ y $\overline{vp} \subseteq N(\varepsilon, \overline{vp_n})$, para toda $n \geq N$.

La siguiente observación nos ayudará a probar lo que queremos.

Observación. Si $d(p,p_k) < \varepsilon$, se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Para todo $q \in \overline{vp}$, existe $r_q \in \overline{v,p_k}$, tal que $d(q,r_q) < \varepsilon$.

2. Para todo $t \in \overline{vp_k}$, existe $s_t \in \overline{v,p}$, tal que $d(t,s_t) < \varepsilon$.

Sea $q \in \overline{vp}$, por la observación anterior, existe $r_q \in \overline{v,p_n}$, tal que $d(q,r_q) < \varepsilon$, de esta manera $q \in N(\varepsilon, \overline{vp_n})$, en conclusión, $\overline{vp} \subseteq N(\varepsilon, \overline{vp_n})$.

De manera análoga, si tomamos $t \in \overline{vp_n}$, existe $s_t \in \overline{v,p}$, tal que $d(t,s_t) < \varepsilon$ por lo que $\overline{vp_n} \subseteq N(\varepsilon, \overline{vp})$. Así $\{\overline{vp_n}\}_{n=1}^{\infty} \to \overline{vp}$.

Caso 2.2. A es finito.

Eso quiere decir que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in T_0$, para toda $n \geq N$. Por lo que procedemos igual que en el Caso 1.

Caso 2.3. A y B son infinitos.

En este caso, consideramos las siguientes subsucesiones $\{\overline{vp_n}\}_{n\in A}$ y $\{\overline{vp_n}\}_{n\in B}$, de los casos 2.1 y 2.2 tenemos que existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, tales que $H(\overline{vp}, \overline{vp_n}) < \varepsilon$, para toda $n \in A$, $n \geq N_1$ y $H(\overline{vp}, \overline{vp_n}) < \varepsilon$, para toda $n \in B$, $n \geq N_2$, respectivamente. Tomemos ahora $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, por lo cual $H(\overline{vp}, \overline{vp_n}) < \varepsilon$, para toda $n \geq N$. De esta manera probamos que $\{\overline{vp_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\overline{vp}$. Así, X es un dendroide suave.

Por lo cual podemos definir una selección $s : C(X) \longrightarrow X$, como en el teorema anterior.

$$s(A) = x_A$$

donde x_A es el primer punto con respecto v.

Como una aplicación del ejemplo anterior, veamos si el doble abanico admite o no selecciones.

Ejemplo 4.0.5. *Definimos* $v_1 = (0,0)$ *y* $v_2 = (0,1)$ *y* $T_0 = \overline{v_1v_2}$, $K_0 = T_0$, *además,* $a_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$, $b_n = \left(0, \frac{-1}{n}\right)$ *y* $T_n = \overline{v_1a_n}$, $K_n = \overline{v_2b_n}$. *Sea* $X = A \cup B$ *donde* $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$ *y* $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$. *Entonces* X *no es selectible.*

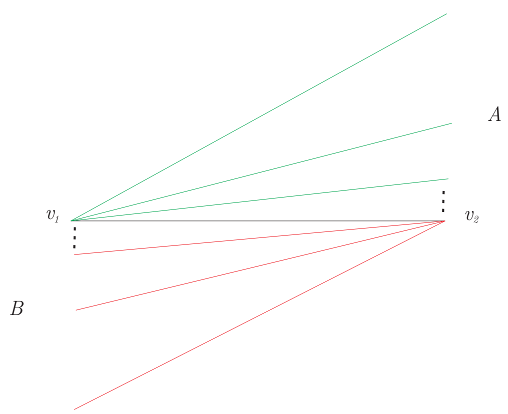


Figura 4.6: Doble abanico armonico

Notemos que X tiene dos abanicos donde la barra límite es el segmento $\overline{v_1v_2} = T_0$.

Tomemos una selección $s : C(X) \longrightarrow X$. Por la proposición 2.0.3 sabemos que $s|_{C(A)} : C(A) \longrightarrow A$ y $s|_{C(B)} : C(B) \longrightarrow B$ son selecciones. Además $\overline{v_1v_2} \in C(A)$ y $\overline{v_1v_2} \in C(B)$, así, por el ejemplo 3.0.1, $s\left(\overline{v_1v_2}\right) = s|_{C(A)}\left(\overline{v_1v_2}\right) = v_1$. De igual manera, $s\left(\overline{v_1v_2}\right) = s|_{C(B)}\left(\overline{v_1v_2}\right) = v_2$ lo cual es una contradicción pues $v_1 \neq v_2$.

Por lo que el abanico doble no admite selecciones.

Definición 4.0.6. *Sean X un continuo y $p \in X$, decimos que X es localmente conexo en p si para todo abierto V de X, existe un abierto conexo U tal que $p \in U \subseteq V$.*

Proposición 4.0.7. *Sea X un dendroide suave en p, entonces X es localmente conexo en p.*

Demostración. Sea $p \in X$ un punto donde X es suave y V un abierto tal que $p \in V$. Definimos $U = \{x \in X \mid \overline{px} \subseteq V\}$. Observemos que $U \subseteq V$.

Afirmación 1. U es abierto y conexo.

Prueba. Para cada $x \in U$, $\overline{px} \subseteq V$, así $U = \bigcup_{x \in U} \overline{px}$ es arcoconexo, por lo que U es conexo [12, pág 108].

Ahora, supongamos que U no es abierto, por lo que existe $x \in U \setminus int(U)$ o bien $x \in \overline{X \setminus U}$. Por tanto existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ donde $x_n \in X \setminus U$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como $x_n \notin U$, entonces el arco $\overline{px_n} \nsubseteq V$, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in \overline{px_n} \setminus V$. Como X es compacto, la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, tiene una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Sea $y \in X$ tal que $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to y$.

Puesto que X es suave en p, $x \in U$ y $y_{n_k} \in \overline{px_{n_k}}$ para toda $k \geq 1$, se tiene que $y \in \overline{px} \subseteq V$.

Por otro lado $X \setminus V$ es cerrado, además $y_n \in \overline{px_n} \setminus V \subseteq X \setminus V$, para toda $n \geq 1$, en particular $y_{n_k} \in X \setminus V$ y así $y \in X \setminus V$.

Esta contradicción surgió de suponer que $U \setminus int(U) \neq \emptyset$, por lo tanto $U = int(U)$, es decir,

U es abierto.

Finalmente, por la afirmación 1, hemos encontrado un abierto conexo U tal que $x \in U \subseteq V$, así X es localmente conexo en p. $\square$

La proposición 4.0.3 nos dice que si un dendroide es suave, entonces admite selecciones. Sería natural pensar que si un dendroide admite selecciones es porque el dendroide es suave, pero esta afirmación es falsa. En el siguiente ejemplo se muestra un dendroide que admite selección pero no es suave.

Ejemplo 4.0.8. *Sean $z = (0,0)$, $v_1 = (-1,0)$, $v_2 = (1,0)$, $S_0 = \overline{v_1 z}$, $T_0 = \overline{z v_2}$, $S_n = \overline{v_1(0, \frac{1}{2n})}$ y $T_n = \overline{(0, \frac{1}{2n-1})v_2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$ y $X_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$. (Ver figura 4.7)*

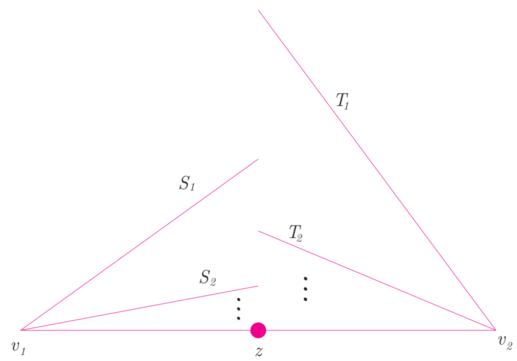


Figura 4.7: Dendroide del ejemplo 4.0.8

Lo primero que hay que notar de este dendroide es que no es suave. Por la proposición 4.0.7, los puntos que son posibles candidatos a ser de suavidad son los puntos de conexidad local. Los puntos que no son de conexidad local se encuentran en $S_0 \cup T_0$ exceptuando los extremos (v_1 y v_2).

Tomemos un punto $p \in X_1$ de conexidad local y veamos que no es un punto suave, para esto tomemos sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $x_n = (0, \frac{1}{2n-1})$, para toda $n \in \mathbb{N}$, notemos ahora que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to z$ pero $\{\overline{p,x_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \overline{pv_2} \neq \overline{pz}$, esto nos dice que X no es suave en p. *(Figura* 4,8*)*

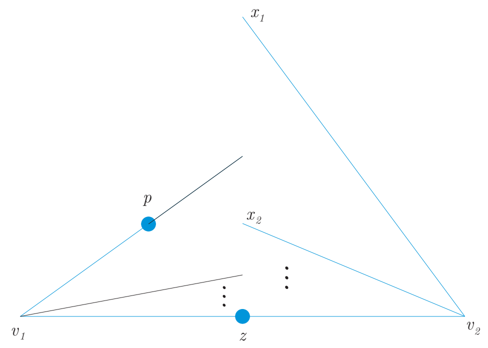


Figura 4.8: EL punto p no es de suavidad.

Sea $q \in X_2$ un punto de conexidad local y consideremos la sucesión $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $x'_n = (0, \frac{1}{2n})$, para toda $n \in \mathbb{N}$, la cual converge al punto z, pero la sucesión de los arcos $\{\overline{qx'_n}\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \overline{qv_1} \neq \overline{qz}$. Por lo que X no es un dendroide suave. *(Figura* 4,9*)*

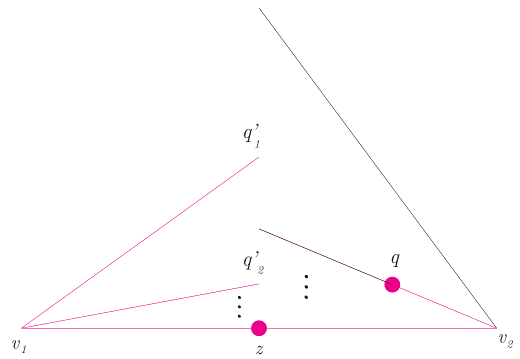


Figura 4.9: El punto q no es de suavidad.

Falta ver que este dendroide sí admite selecciones. Antes de eso haremos algunas observaciones sobre los subcontinuos de X.

1. Si $A \in C(X)$ es tal que $z \notin A$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{z\} \notin B_{\varepsilon}^{H}(A) \subseteq C(X_i)$, para

alguna $i \in \{1, 2\}$.

2. Si $A \in C(X)$ y $z \in A$ entonces $A \cap \overline{v_1 v_2} = \overline{(x_A, 0)(y_A, 0)}$, $x_A \in [-1, 0]$ y $y_A \in [0, 1]$.

Por último definimos $C_z(\overline{v_1 v_2}) = \{A \in C(\overline{v_1 v_2}) \mid z \in A\}$, también $w : C_z(\overline{v_1 v_2}) \longrightarrow \overline{v_1 v_2}$ de la siguiente manera:

$$w(A) = (x_A + y_A, 0)$$

Recordemos que para los subcontinuos X_i se tienen las selecciones $s_i : C(X_i) \longrightarrow X_i$ definidas en el Ejemplo 4.0.4, descritas como sigue:

$$s_i(A) = x_i$$

donde x_i representa al primer punto con respecto a v_i.

Definimos $s : C(X) \longrightarrow X$ como:

$$\text{-}s(A) = \begin{cases} s_i(A) & si \quad A \subseteq X_i \\ & \\ w(A \cap \overline{v_1 v_2}) & si \quad A \cap (X_1 \cap X_2) \neq \emptyset \end{cases}$$

Para ver que esta función es una selección, primero veamos que es continua. Para esto tomemos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A para algún $A \in C(X)$ y veamos que $\{s(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \to s(A)$.

Caso 1. $z \notin A$

En este caso, por la observación 1, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{z\} \notin B_{\varepsilon}^{H}(A) \subseteq C(X_i)$, para algún $i \in \{1, 2\}$. Como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \in B_{\varepsilon}^{H}(A)$ para toda $n \geq N$, por lo que $s(A) = s_i(A)$ y $s(A_n) = s_i(A_n)$, como s_i es continua se tiene que $\{s(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \to s(A)$.

Caso 2. $z \in A$

Caso 2.1. Dada la convergencia de la sucesión, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \cap \overline{v_1 v_2} \neq \emptyset$, para toda $n \geq N$.

Como $z \in A$, entonces $A \cap \overline{v_1 v_2} = \overline{(x_A, 0)(y_A, 0)}$, para $-1 \leq x_A \leq 0 \leq y_A \leq 1$ y $A_n \cap \overline{v_1 v_2} = \overline{(x_n, 0)(y_n, 0)}$, donde $-1 \leq x_n \leq 0 \leq y_n \leq 1$, para toda $n > N$. Además $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$, por lo tanto $\{A_n \cap \overline{v_1 v_2}\}_{n=1}^{\infty} = \{\overline{(x_n, 0)(y_n, 0)}\}_{n=1}^{\infty} \to A \cap \overline{v_1 v_2} = \overline{(x, 0)(y, 0)}$, esto quiere decir que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to y$.

De manera que $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \to x + y = w$

Así, $\{s(A_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_n + y_n, 0)\}_{n=1}^{\infty} = \{(w_n(A\overline{v, v_2}))\}_{n=1}^{\infty} \to (w = s(A)$.

Caso 2.2 $M = \{m \in \mathbb{N} \mid (A_m \cap \overline{v_1 v_2}) \setminus \{v_1, v_2\} = \emptyset\}$ es infinito.

Como $z \notin A_m$, para toda $m \in M$, entonces $A_m \subseteq X_1$ o $A_m \subseteq X_2$.

Sean, $M_1 = \{m \in M \mid A_m \subseteq X_1\}$ y $M_2 = \{m \in M \mid A_m \subseteq X_2\}$. Observemos que $M = M_1 \cup M_2$, como M es infinito, entonces M_1 o M_2 es infinito.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que M_1 es infinito.

Afirmación 2. $A \subseteq X_1$

Prueba. Sea $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente de $\{A_m \mid m \in M_1\}$. Como $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \to A$, entonces $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \to A$. Puesto que $A_{m_k} \subseteq X_1$ y X_1 es cerrado, entonces $A \subseteq X_1$.

De manera análoga, si M_2 es infinito, se tiene que $A \subseteq X_2$.

En ambas situaciones regresamos al caso 1, donde $A \subseteq X_i$ para $i = 1, 2$, en el cual ya se probó que s es continua. Por lo tanto s es una función continua.

Veamos a ahora que cumple la siguiente propiedad: $s(A) \in A$.

Caso 1. $s(A) = s_i(A)$

Como s_i es una selección, entonces $s(A) = s_i(A) \in A$.

Caso 2. $s(A) = (w, 0)$

Primero notemos que como $x \in [-1, 0]$, entonces $x \leq 0$, además, $y \in [0, 1]$, por lo cual $0 \leq y$, así, $x \leq x + y \leq y$, es decir, $x \leq w \leq y$, de esta manera, $(w, 0) \in \overline{(x, 0)(y, 0)} \subseteq A$.

Por tanto $s(A) \in A$ para todo $A \in C(X)$.

Con esto concluimos que la función s es una selección.

Así, terminamos el ejemplo de un dendroide que no es suave pero sí admite selecciones.

A continuación definiremos qué es una dendrita y probaremos que éstas son suaves.

Definición 4.0.9. *Sea X un dendroide. Decimos que X es una dendrita si es localmente conexo.*

Proposición 4.0.10. *Sea X una dendrita, entonces X es suave.*

Demostración. Sean $p \in X$, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$.

Veamos que $\{\overline{px_n}\}_{n=1}^{\infty} \to \overline{px}$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$.

Como X es localmente conexo y T_3, existe un abierto y conexo U tal que $\overline{U} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Como U es conexo, entonces $\overline{U}$ es conexo, además $\overline{U}$ es un cerrado contenido en un compacto por lo que es compacto, de esta manera $\overline{U}$ es un subcontinuo de X.

Por la proposición 4.0.1, existe $w \in \overline{U}$ tal que $w \in \overline{py}$, para toda $y \in \overline{U}$ y, $[p, w] \cap \overline{U} = \{w\}$.

Observación 1. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U \subseteq \overline{U}$ y $\overline{px_n} = \overline{pw} \cup \overline{wx_n}$, para toda $n \geq N$.

Para ver que $H(\overline{px_n}, \overline{px}) < \varepsilon$, veamos que $\overline{px} \subseteq N(\varepsilon, \overline{px_n})$ y $\overline{px_n} \subseteq N(\varepsilon, \overline{px})$ para toda $n \geq N$. Por la observación 1 sólo tenemos que probar que $\overline{wx} \subseteq N(\varepsilon, \overline{wx_n})$ y $\overline{wx_n} \subseteq N(\varepsilon, \overline{wx})$.

Observación 2. Notemos que $\overline{wx} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ y para cada $n \geq N$, $\overline{wx_n} \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Así, si tomamos $r \in \overline{wx}$ y $s \in \overline{wx_n}$ entonces, $d(r, s) < \varepsilon$ donde d representa la métrica de X.

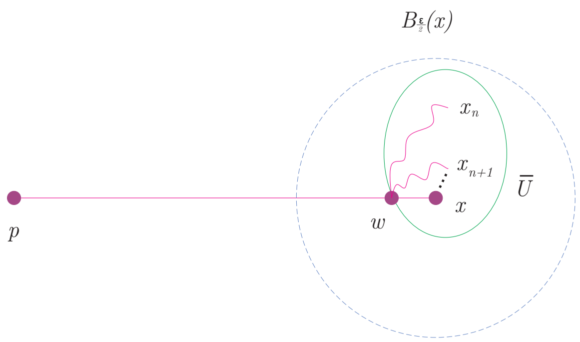


Figura 4.10: Sucesión de arcos $\{\overline{px_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Sean $z \in \overline{wx}$ y $n \geq N$. Por la observación 2 se tiene que existe $s \in \overline{wx_n}$ tal que $d(z,s) < \varepsilon$, por tanto $z \in N(\varepsilon, \overline{wx_n})$ y así $\overline{px} \subseteq N(\varepsilon, \overline{px_n})$.

Análogamente si tomamos $y \in \overline{wx_n}$ por la observación 2, existe $r \in \overline{wx}$ para la cual $d(y,r) < \varepsilon$. Por lo tanto $\overline{wx_n} \subseteq N(\varepsilon, \overline{wx})$.

De esta manera, $H(\overline{px_n}, \overline{px}) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$, lo que que muestra que: $\{\overline{px_n}\}_{n=1}^{\infty} \to \overline{px}$, es decir, X es suave. $\square$

Como consecuencia de las proposiciones 4.0.3 y 4.0.10, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.0.11. *Si X es una dendrita, entonces X admite selecciones.*

Capítulo 5

Algunos ejemplos interesantes

En este capítulo desarrollaremos un ejemplo de [2] y dos ejemplos del artículo [6]. En el primero revisaremos un ejemplo acerca de un dendroide contráctil que además resulta ser selectible.

Aunque es interesante el objetivo de este ejemplo es justificar las razones por las cuales unos de los dendroides del segundo ejemplo es selectible y de esa manera dar una respuesta a la siguiente pregunta: ¿ Es cierto que ser selectible es una propiedad que se preserva bajo funciones monótonas?

En el artículo [6] Mackowiak da un dendroide selectible, el cual bajo una función abierta, la imagen no es selectible. El problema que existe en dicho ejemplo es que define una selección para un subcontinuo P, la función que afirma ser una selección para P tiene un problema con la continuidad.

Por último en este tercer ejemplo, explicaremos el por qué del error.

Lema 5.0.1. *Sea X un continuo, K un subconjunto cerrado de X y Y un subcontinuo no degenerado de X, entonces $\mathcal{K} = \{A \in C(X) : K \subset A\}$ y $\mathcal{Y} = \{A \in C(X) : A \subset Y\}$ son subconjuntos cerrados de $C(X)$*

Demostración. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{K}$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, veamos que $A \in \mathcal{K}$. Como $C(X)$ es compacto (4.17, [9]), entonces $A \in C(X)$, como $K \subset A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $K = \lim_{n\to\infty} K \subset \lim_{n\to\infty} A_n = A$ por tanto $K \subset A$, $A \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ es cerrado. Para ver que $\mathcal{Y}$ es cerrado, notemos que $\mathcal{Y} = C(Y)$ y como para todo continuo Y tenemos que $C(Y)$ es compacto, entonces $\mathcal{Y}$ es cerrado. □

5.1. Dendroide contráctil y selectible.

Ejemplo 5.1.1. *Sean $v = (0,0)$, $p_0 = (1,0) = r_0$, $q_0 = (2,0)$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$, $q_n = (2, \frac{2}{n})$ y $r_n = (1, \frac{2n+1}{2n(n+1)})$, definimos $L_0 = \overline{vq_0}$ y $L_n = \overline{vq_n} \cup \overline{q_n r_n}$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. (Ver figura 5.1)*

Veremos que X es selectible.

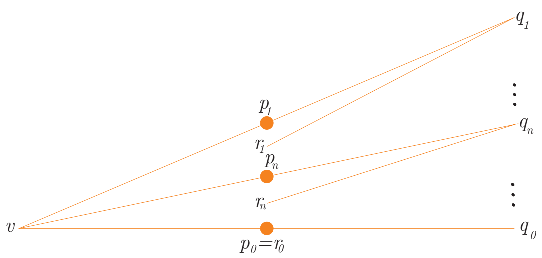


Figura 5.1:

Definición 5.1.2. *Dado un punto $p \in L_0 = \overline{vq_0}$ notemos que es de la forma $p = (p_1, 0)$, definimos el siguiente orden, diremos que $p = (p_1, 0) \leq q = (q_1, 0)$ si y sólo si $p_1 \leq q_1$.*

Definición 5.1.3. *En el arco $L_0 = \overline{vq_0}$, y con el orden definido en 5.1.2, sean:*

$$m : C(L_0) \to L_0$$

y

$$M : C(L_0) \to L_0$$

definidas como

$$m(A) = \text{mín}(A) = m_A$$

y

$$M(A) = \text{máx}(A) = M_A$$

Como máx y mín son funciones continuas, tenemos que m y M son continuas.

Definición 5.1.4. *Definimos* $s : C(L_0) \to L_0$ *como*

$$s(A) = \begin{cases} (1 - \|m_A\|)m_A + \|m_A\|M_A & si\ \|m_A\| \leq 1, \\ M_A & si\ \|m_A\| \geq 1. \end{cases}$$

Observación. 5.1.5. s es una selección.

De la definición de s podemos ver que si $\|m_A\| = 1$, entonces $s(A) = 0 \cdot m_A + 1 \cdot M_A = M_A$, de manera que s está bien definida y es continua.

Veamos ahora que s es una selección. Notemos que si $\|m_A\| \leq 1$, $s(A)$ es un punto en el arco $A = \overline{m_A M_A}$ y en el caso que $\|m_A\| \geq 1$, $s(A) = M_A \in A$ Por tanto s es una selección.

Definición 5.1.6. *Sea* π *la proyección de* X *en el arco* L_0*, dada por* $\pi(x) = \pi((x_1, x_2)) = (x_1, 0)$ *y consideramos* $s \circ \pi : C(X) \to L_0$ *como* $s \circ \pi(A) = s(\pi(A))$

Observación. 5.1.7. La función $s \circ \pi$ es continua

Como $s \circ \pi$ está bien definida y es composición de funciones continuas, entonces $s \circ \pi$ continua.

Para poder definir la selección en $C(X)$ haremos una lista de de las propiedades que tienen las funciones $s \circ \pi$ y π.

Observación. 5.1.8. $s \circ \pi(A) = v$ si y sólo si $v \in A$.

Supongamos por el contrario que $v \notin A$, entonces $v \notin \pi(A)$, por la Observación 5.1.5 s es selección, entonces $v \in \pi(A)$ lo cual es una contradicción, de manera que $v \in A$.

Como $v \in A$, tenemos que $v \in \pi(A)$, además $m_A = v$ y $\|m_A\| = 0$ de manera que $s \circ \pi(A) = (1 - \|m_A\|)m_A + \|m_A\|M_A = m_A = v$.

Observación. 5.1.9. Sean $\pi_n : \pi \mid_{\overline{vq_n}} : \overline{vq_n} \to \overline{vq_0}$ y $\pi'_n = \pi \mid_{\overline{q_n r_n}} : \overline{q_n r_n} \to \overline{pq}$. Entonces π_n y π'_n son homeomorfismos.

Como π_n y π'_n son funciones continuas y biyectivas entre espacios compactos, entonces son homeomorfismos.

Observación. 5.1.10. Si $A \subset L_n$ y $p_n, q_n \in A$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $\pi(A) = \pi(A \cap \overline{vq_n})$.

Si $A \subset L_n$, entonces $A = (A \cap \overline{vq_n}) \cup (A \cap \overline{q_n r_n})$, así que

$$\pi(A) = \pi(A \cap \overline{vq_n}) \cup \pi(A \cap \overline{q_n r_n}) \subset \pi(A \cap \overline{vq_n}) \cup \overline{p_0 q_0}.$$

Como $p_n, q_n \in A \cap \overline{vq_n}$, tenemos que $\overline{p_n q_n} \subset (A \cap \overline{vq_n})$ así que

$$\overline{p_0 q_0} = \pi(\overline{p_n q_n}) \subset \pi(A \cap \overline{vq_n})$$

de modo que $\pi(A \cap \overline{vq_n}) \cup \overline{p_0 q_0} = \pi(A \cap \overline{vq_n})$ por tanto $\pi(A) \subset \pi(A \cap \overline{vq_n})$.
Como $A \cap \overline{vq_n} \subset A$, entonces $\pi(A \cap \overline{vq_n}) \subset \pi(A)$.

Antes de definir una selección para X, definiremos algunos subconjuntos de $C(X)$.

Definición 5.1.11. *Sea X como en el Ejemplo 5.1.1, definimos:*

$$\mathcal{A} = \{A \in C(X) : v \in A\}$$

$$\mathcal{B} = \{A \in C(X) : A \subset L_n, \text{ para alguna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$$\mathcal{B}_1 = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \overline{vq_n} \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{A \in \mathcal{B} : A \subset \overline{q_n r_n} \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{A \in \mathcal{B} : p_n, q_n \in A \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \{A \in \mathcal{B} : q_n \in A \text{ y } A \subset \overline{p_n q_n} \cup \overline{q_n r_n} \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$$

Observación. 5.1.12. Los conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son cerrados en $C(X)$.

Notemos que $\{v\}$ es un subconjunto cerrado de X, utilizando el Lema 5.0.1 concluimos que $\mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$.

Ahora para ver que $\mathcal{B}$ es cerrado en $C(X)$ tomemos $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{B}$ tal que $A_m \to A$. Veremos que $A \in \mathcal{B}$, es decir, existe un $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $A \subset L_n$

Caso 0.1. *Existe una subsucesión* $\{A_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *y* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $A_{m_k} \subset L_N$, *para toda* $k \in \mathbb{N}$.

En este caso tenemos que $A_{m_k} \to A$, por el Lema 5.0.1, $A \subset L_N$ y por tanto $A \in \mathcal{B}$.

Caso 0.2. *Toda subsucesión* $\{A_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *no cumple con las condiciones el caso 0.1.*

En este caso existen dos sucesiones crecientes de naturales $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que, $A_{m_k} \subset L_{s_k}$, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Tenemos que $A_{m_k} \to A \in C(X)$. Sea $a \in A$, entonces existe una sucesión de puntos $\{a_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $a_{m_k} \in A_{m_k}$, para toda $k \in \mathbb{N}$ y, $a_{m_k} \to a$. Notemos que $a_{m_k} = (a_1^{m_k}, a_2^{m_k})$ y $a = (a_1, a_2)$ donde $a_1^{m_k} \to a_1$ y $a_2^{m_k} \to a_2$. Como $a_{m_k} \in A_{m_k} \subset L_{s_k}$, tenemos que $a_1^{m_k} \in [0,2]$ y $a_2^{m_k} < \frac{1}{k}$. De aquí podemos concluir que $a_1 \in [0,2]$ y $a_2 = 0$, por tanto $a \in L_0$. Como esto ocurre para toda $a \in A$, concluimos que $A \subset L_0$. Esto implica que $A \in \mathcal{B}$ y por tanto $\mathcal{B}$ es cerrado. Con esto terminamos la prueba de la observación.

Observación. 5.1.13. Los conjuntos $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$ son cerrados.

Sea $i \in \{1,2,3,4\}$. Para ver que $\mathcal{B}_i$ es cerrado en $C(X)$, tomemos $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{B}_i$ tal que $A_m \to A$. Por la observación 5.1.12 sabemos que $A \subset L_N$ para alguna $N \in \mathbb{N}$ o $A \subset L_0$.

Caso 0.3. $A \subset L_N$ *para alguna* $N \in \mathbb{N}$.

(a) Si $i = 1 (i = 2)(i = 4)$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, $A_m \subset \overline{vq_N}(A_m \subset \overline{q_N r_N})(A_m \subset \overline{p_N q_N} \cup \overline{q_N r_N})$ para toda $m \geq M$. Por el Lema 5.0.1 podemos concluir que $A \subset \overline{vq_N}(A \subset \overline{q_N r_N})(A \subset \overline{p_N r_N} \cup \overline{q_N r_N})$ y por tanto $A \in \mathcal{B}_1(A \in \mathcal{B}_2)$. Si $i = 4$ podemos concluir únicamente que $(A \subset \overline{p_N q_N} \cup \overline{q_N r_N})$.

(b) Si $i = 3(i = 4)$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, $p_N, q_N \in A_m(q_N \in A_m)$ para toda $m \geq M$. Por el Lema 5.0.1 podemos concluir que $p_N, q_N \in A(q_N \in A)$, de manera que $A \in \mathcal{B}_3$.

Para $i = 4$, como por (a) tenemos que $A \subset \overline{p_N q_N} \cup \overline{q_N r_N}$ y por (b) $q_N \in A$, entonces $A \in \mathcal{B}_4$.

Caso 0.4. $A \subset L_0$.

Si existe una subsucesión $\{A_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $A_{m_k} \subset L_0$, tenemos que $A_{m_k} \to A$, por el Lema 5.0.1, $A \subset L_0$ y procedemos como en el caso 0.3.

De lo contrario existen dos sucesiones crecientes $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que, $A_{m_k} \subset L_{s_k}$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B}_i$ es cerrado.

(a) Para $i = 1$, tenemos que $A_{m_k} \subset \overline{vq_{m_k}}$. Como $A \subset L_0$, entonces $A \subset \overline{vq_0}$ por tanto $A \in \mathcal{B}_1$

(b) Para $i = 2(i = 4)$, tenemos que $A_{m_k} \subset \overline{q_{m_k} r_{m_k}}(A_{m_k} \subset \overline{p_{m_k} q_{m_k}} \cup \overline{q_{m_k} r_{m_k}})$, procediendo como en la observación 5.1.12 caso 0.2, como $A \in L_0$ y $a_1^{m_k} \in [1, 2]$ para toda $a_{m_k} \in A_{m_k}$ y para toda $k \in \mathbb{N}$ entonces para toda $a \in A$ tenemos que $a_1 \in [1, 2]$ por lo que $a \in \overline{q_0 r_0}(a \in \overline{p_0 q_0} \cup \overline{q_0 r_0} = \overline{p_0 q_0})$ y $a \in \mathcal{B}_2$.

(c) Para $i = 3(i = 4)$ tenemos que $p_{m_k}, q_{m_k} \in A_{m_k}(q_{m_k} \in A_{m_k})$ y como $q_{m_k} \to q_0$, $p_{m_k} \to p_0$ y $A_{m_k} \to A$, podemos concluir que $p_0, q_0 \in A(q \in A)$. Por tanto $A \in \mathcal{B}_3$.

Para $i = 4$, por (a) tenemos que $A \subset \overline{p_0 q_0} \cup \overline{q_0 r_0}$ y por (b) $q_0 \in A$, entonces $A \in \mathcal{B}_4$. Hemos probado que si $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ entonces $\mathcal{B}_i$ es cerrado.

Observación. 5.1.14. $C(X) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$

Por definición $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset C(X)$. Ahora sea $A \in C(X)$, si $v \in A$, entonces $A \in \mathcal{A}$. Si $v \notin A$, entonces $A \subset L_n$ para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de manera que $A \in \mathcal{B}$. Por tanto $C(X) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Observación. 5.1.15. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$

Por definición $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$ son subconjuntos de $\mathcal{B}$ por tanto $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4 \subset \mathcal{B}$.

Sea $A \in \mathcal{B}$, entonces $A \subset L_n$ para alguna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si $q_n \notin A$, entonces $A \subset C(\overline{vq_n}) = \mathcal{B}_1$ o $A \subset C(\overline{q_n r_n}) = \mathcal{B}_2$ de manera que $A \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Si $q_n \in A$, tenemos dos casos. Si $p_n \in A$, entonces $p_n, q_n \in A$ y $A \in \mathcal{B}_3$. Si $p_n \notin A$, entonces $A \subset \overline{p_n q_n} \cup \overline{p_n q_n}$ y $A \in \mathcal{B}_4$ en cualquier caso $A \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$. Por tanto $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$.

Observación. 5.1.16. Las siguientes intersecciones se satisfacen:

(I) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1 = \{A \in \mathcal{B} : v \in A \subset \overline{vq_n}\}$.

(II) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3$.

(III) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_3 = \{A \in \mathcal{B} : v, q_n, p_n \in A\}$.

(IV) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \{q_n\}$.

(V) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_3 = \{A \in \mathcal{B} : \overline{p_n q_n} \subset A \subset \overline{vq_n}\}$.

(VI) $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_4 = \{A \in \mathcal{B} : q_n \in A \text{ y } A \subset \overline{p_n q_n}\}$.

(VII) $\mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_4 = \{A \in \mathcal{B} : q_n \in A \text{ y } A \subset \overline{q_n r_n}\}$.

(VIII) $\mathcal{B}_3 \cap \mathcal{B}_4 = \{A \in \mathcal{B} : \overline{p_n q_n} \subset A \subset \overline{p_n q_n \cup q_n r_n}\}$.

Las afirmaciones de la observación anterior de las definiciones de los conjuntos $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$.

Esta observación no se probará pues es un simple ejercicio de conjuntos.

Observación. 5.1.17. Para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $A \in \mathcal{B}_i$ existe un único $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $A \subseteq L_n$.

Esta observación se sigue de la definición 5.1.11.

Definición 5.1.18. *Sea* $A \in C(X)$*, si* $A \in \mathcal{B}_i$ *para* $i \in \{1,2,3,4\}$*, tomemos* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *garantizada por la observación 5.1.17 y* π*,* π_n*,* π'_n *como en la definición 5.1.6 y la observación 5.1.9. Definimos* $\sigma : C(X) \longrightarrow X$ *como:*

$$\sigma(A) = \begin{cases} v & si\ A \in \mathcal{A}, \\ (\pi_n)^{-1}(s(\pi(A)) & si\ A \in \mathcal{B}_1, \\ (\pi'_n)^{-1}(s(\pi(A)) & si\ A \in \mathcal{B}_2, \\ (\pi_n)^{-1}(s(\pi(A)) & si\ A \in \mathcal{B}_3, \\ q_n & si\ A \in \mathcal{B}_4 \end{cases}$$

Teorema 5.1.19. *La función* σ *definida en 5.1.18 está bien definida, es continua y* $\sigma(A) \in A$ *para toda* $A \in C(X)$.

Demostración. Para ver que σ está bien definida y es continua notemos que por las Observaciones 5.1.14 y 5.1.15 σ está definida en todo $C(X)$. Por otro lado, $\sigma|_{\mathcal{A}} = v$ y $\sigma|_{\mathcal{B}_4} = q_n$ son funciones constantes y, por lo tanto continuas. Ahora $\sigma|_{\mathcal{B}_1}(A) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi(A))$ y como $A \in \mathcal{B}_1$ tenemos que $A \subset \overline{vq_n}$, y por la Observación 5.1.9, $\pi|_{\overline{vq_n}} = \pi_n$ es un homeomorfismo, tenemos que $\sigma|_{\mathcal{B}_1}(A) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi_n(A))$, está bien definida y es continua. De igual manera $\sigma|_{\mathcal{B}_2}(A) = (\pi'_n)^{-1}(s(\pi(A))$ donde $\pi|_{\overline{q_n r_n}} = \pi'_n$ es un homeomorfismo, por lo que $\sigma|_{\mathcal{B}_2}$ está bien definida y es continua.

Por último $\sigma|_{\mathcal{B}_3}(A) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi(A))$ y como $A \in \mathcal{B}_3$, $p_n, q_n \in A$. Por la Observación 5.1.10, $\pi(A) = \pi(A \cap \overline{vq_n})$ y como $\pi|_{\overline{vq_n}} = \pi_n$ es un homeomorfismo, $\sigma|_{\mathcal{B}_3}(A) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi_n(A \cap \overline{vq_n}))$, es decir, está bien definida y es continua.

Por las Observaciones 5.1.12 y 5.1.13 los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$ son cerrados, entonces sólo resta probar que en las intersecciones de la observación 5.1.16, la definición de σ coincide.

(I) Sea $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1 = \{A \in \mathcal{B} : v \in A \subset \overline{vq_n}\}$ entonces $\sigma(A) = v$ y $\sigma(A) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi(A))$, por la Observación 5.1.8, tenemos que $s(\pi(A)) = v$ y por la Observación 5.1.9 $(\pi_n)^{-1}(v) = v$, de manera que $(\pi_n)^{-1}(s(\pi(A)) = v$. Por tanto, en este caso σ está bien definida y como $v \in A$ tenemos que $\sigma(A) \in A$.

(II) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_2 = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_4 = \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3 = \emptyset$.

(III) Sea $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_3 = \{A \in \mathcal{B} : v, q_n, p_n \in A\}$, entonces $\sigma(A) = v$ y $\sigma(A) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi(A))$, por la Observación 5.1.8, tenemos que $s(\pi(A)) = v$ y por la Observación 5.1.9 $(\pi_n)^{-1}(v) = v$ de manera que $(\pi_n)^{-1}(s(\pi(A)) = v$. Por tanto, en este caso σ está bien definida y como $v \in A$ tenemos que $\sigma(A) \in A$.

(IV) Sea $A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \{q_n\}$. Como $A \in \mathcal{B}_1$, entonces $\sigma(A) = \sigma(\{q_n\}) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi(q_n)) = (\pi_n)^{-1}(s(q)) = (\pi_n)^{-1}(q) = q_n$ y como $A \in \mathcal{B}_2$, entonces $\sigma(A) = q_n$. Por tanto, en este caso σ está bien definida y como $A = \{q_n\}$, entonces $\sigma(A) \in A$.

(V) Sea $A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_3 = \{A \in \mathcal{B} : \overline{p_n q_n} \subset A \subset \overline{v q_n}\}$. En cualquier caso, $\sigma(A) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi(A))$ y σ está bien definida. Por la Observación 5.1.5, s es selección y $s(\pi(A)) \in \pi(A) \subset \overline{vq}$. Por la Observación 5.1.9 $(\pi_n)^{-1} : \overline{vq} \to \overline{vq_n}$ es un homeomorfismo y $A \subset \overline{vq_n}$, entonces $(\pi_n)^{-1}(s(\pi(A)) \in (\pi_n)^{-1}(\pi(A)) = A$, por lo que $\sigma(A) \in A$.

(VI) Sea $A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_4 = \{A \in \mathcal{B} : q_n \in A$ y $A \subset \overline{p_n q_n}\}$. Como $A \in \mathcal{B}_1$, $\sigma(A) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi(A))$, debido a que $A \subset \overline{p_n q_n}$, $\|m_A\| \geq 1$ y como $q_n \in A$, $M_A = q$, por lo que $(s(\pi(A)) = M_A = q$ y $(\pi_n)^{-1}(s(\pi(A)) = (\pi_n)^{-1}(q) = q_n$. Por otro lado como $A \in \mathcal{B}_4$, entonces $\sigma(A) = q_n$. Por lo tanto, σ está bien definida. Notemos que $\sigma(A) = q_n$ y $q_n \in A$, entonces $\sigma(A) \in A$.

(VII) Sea $A \in \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_4 = \{A \in \mathcal{B} : q_n \in A$ y $A \subset \overline{q_n r_n}\}$. Como $A \in \mathcal{B}_2$, $\sigma(A) = (\pi'_n)^{-1}(s(\pi(A)))$. Como $q_n \in A \subset \overline{q_n r_n}$ tenemos que $q \in \pi(A) \subset \overline{pq}$ de manera que $\|m_{\pi(A)}\| \geq 1$ y $M_{\pi(A)} = q$ por lo que $s(\pi(A)) = q$ y $(\pi'_n)^{-1}(s(\pi(A))) = q_n$. Por otro lado como $A \in \mathcal{B}_4$, $\sigma(A) = q_n$ por lo que σ está bien definida y, como $q_n \in A$, entonces $\sigma(A) \in A$.

(VIII) Sea $A \in \mathcal{B}_3 \cap \mathcal{B}_4 = \{A \in \mathcal{B} : \overline{p_n q_n} \subset A \subset \overline{p_n r_n}\}$. Como $A \in \mathcal{B}_3$ tenemos que $\sigma(A) = (\pi_n)^{-1}(s(\pi(A)))$. Como $\overline{p_n q_n} \in A \subset \overline{p_n r_n}$ tenemos que $q \in \pi(A) \subset \overline{pq}$ de manera que $\|m_{\pi(A)}\| \geq 1$ y $M_{\pi(A)} = q$ por lo que $s(\pi(A)) = q$ y $(\pi_n)^{-1}(s(\pi(A))) = q_n$. Por otro lado como $A \in \mathcal{B}_4$, $\sigma(A) = q_n$ por lo que σ está bien definid y, como $q_n \in A$, entonces $\sigma(A) \in A$.

Con esto probamos que σ está bien definida, es continua y $\sigma(A) \in A$ para toda $A \in C(X)$. □

Proposición 5.1.20. *La función $\sigma : C(X) \to X$, definida en 5.1.18 es una selección.*

Demostración. Directamente de la definición de selección y del Teorema 5.1.19. □

Con la proposición 5.1.20 hemos terminado la demostración de que X es selectible y con esto cerramos este ejemplo.

Contestando el ejercicio 75.26 que aparece en [5, pág 369] daremos dos dendroides X, Y y construiremos una función monótona en la cual la imagen no resulta ser selectible.

5.2. Imagen monótona de un dendroide selectible que no es selectible.

Definición 5.2.1. *Sean X, Y continuos y $f : X \longrightarrow Y$, decimos que es una **función monótona** si para todo $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(\{p\})$ es un conjunto conexo.*

Ejemplo 5.2.2. *Sean $v = (-1, 0)$, $q = (0, 0)$, $p = (1, 0)$, $p_n = \left(\frac{2n}{2n-1}, \frac{4n-1}{2(2n-1)^2}\right)$, $q_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{4n^2}\right)$ y $r_n = \left(0, \frac{1}{2n-1}\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $X = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{vp_n} \cup \overline{p_n q_n}\right] \cup \overline{vp}$.*

Para construir el dendroide Y, consideremos ahora las siguientes funciones.

Sea $f_n : \left[0, \frac{n+1}{n}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definidas como $f_n(t) = \left(t, \frac{1}{2n+2}\sqrt{t\left(\frac{n+1}{n} - t\right)}\right)$ y $g_n : \left[\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por $g_n(t) = \left(t, \frac{-1}{2n+2}\sqrt{t\left(\frac{n+1}{n} - t\right)}\right)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

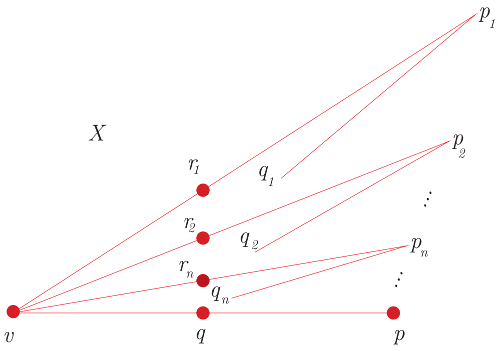


Figura 5.2: Dendroide X del ejemplo 5.2.2

Sean $A_n = f_n\left([0, \frac{n+1}{n}]\right)$ *y* $B_n = g_n\left([\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}]\right)$, $q' = (0,0)$ *y* $p' = (1,0)$, *definimos* $Y = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)\right] \cup \overline{q'p'}$.

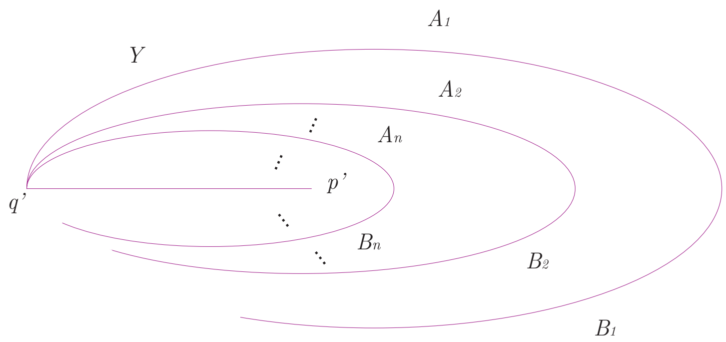


Figura 5.3: Dendroide Y del ejemplo 5.2.2

Recordemos que el dendroide del ejemplo 5.1.1 es selectible y notemos que X es homeomorfo a dicho dendroide, por lo que X es selectible.

Por otro lado, si consideramos las sucesiones $\{A_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, ambas, convergen a $\overline{q'p'}$, además la sucesión $\{A_{2n} \cap A_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{q'\}_{n=1}^{\infty}$ por lo cual $\{q'\}$ es un conjunto de doblez del arco $\overline{q'p'}$.

Ahora si tomamos las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, ambas convergen al segmento $\overline{q'p'}$ pero la sucesión $\{A_n \cap B_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\{p'\}$, de esta manera $\{p'\}$ es un conjunto de doblez de $\overline{q'p'}$. Aplicando el Corolario 3.0.4, concluimos que Y no admite selecciones.

Ahora construiremos una función $h : X \longrightarrow Y$ continua, monótona y suprayectiva.

Sea π_1 la proyección sobre el eje X. Definimos la función $h : X \longrightarrow Y$ como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} q' & si \quad \pi_1(x) \leq 0, \\ \\ (f_n \circ \pi_1)(x) & si \quad x \in r_n p_n, \\ \\ (g_n \circ \pi_1)(x) & si \quad x \in p_n q_n, \\ \\ (\pi_1(x), 0) & si \quad x \in qp, \end{cases}$$

Notemos que X se puede escribir como $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ donde $X_1 = \overline{vq} \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{vr_n}\right]$, $X_2 = \overline{qp} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{r_n p_n}$ y $X_3 = \overline{qp} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{p_n q_n}$.

Ahora, veamos que h es una función suprayectiva. Para esto notemos que $\pi_1(\overline{r_n p_n}) = \left[0, \frac{n+1}{n}\right]$, $\pi_1(\overline{p_n q_n}) = \left[\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right]$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora al aplicar las funciones f_n y g_n, se sigue que $h\left(\overline{r_n p_n}\right) = f_n\left(\pi_1(\overline{r_n p_n})\right) = f_n\left(\left[0, \frac{n+1}{n}\right]\right) = A_n$ y $h\left(\overline{p_n q_n}\right) = g_n\left(\pi_1(\overline{p_n q_n})\right) = g_n\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}\right]\right) = B_n$. Por último, $h\left(\overline{qp}\right) = \overline{q'p'}$. De esta manera $h\left(X_2 \cup X_3\right) = Y$, lo que nos garantiza que h es suprayectiva.

Para probar la continuidad, veamos que h es continua en X_i y que en las intersecciones las restricciones coinciden. Para ver que las $h|_{X_i}$ son continuas, notemos que $h|_{X_1} = q'$, $h|_{X_2} = (f_n \circ \pi_1)(x)$, $h|_{X_3} = (g_n \circ \pi_1)(x)$ y $h|_{\overline{qp}} = (\pi_1(x), 0)$, donde, en cada una de ellas se utilizan funciones continuas y así cada restricción lo es.

Veamos que $h|_{X_2}$ es continua. Por definición $h|_{X_2}$ está dado por la siguiente regla de correspondencia:

$$h|_{X_2}(x) = \begin{cases} (f_n \circ \pi_1)(x) & si \quad x \in r_n p_n \\ \\ (\pi_1(x), 0) & si \quad x \in qp \end{cases}$$

Tomemos ahora una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to x$ para algún $x \in X_2$ y veamos que $\{h|_{X_2}(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \to h|_{X_2}(x)$.

Caso 1. $x \in \overline{r_n p_n}$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Como $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to x$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, $x_m \in \overline{r_n p_n}$, para toda $m \geq M$, de modo que $h|_{X_2}(x_m) = (f_n \circ \pi_1)(x_m)$. Por otro lado $(f_n \circ \pi_1)$ es continua, con lo cual se deduce que $\{h|_{X_2}(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \to h|_{X_2}(x)$.

Caso 2. $x \in \overline{qp}$.

Caso 2.1. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \overline{qp}$, para toda $n \geq N$.

En este caso, al tomar $h|_{X_2}(x_n)$ se tiene que $h|_{X_2}(x_n) = (\pi_1(x_n), 0)$ y así, como la función $\pi_1(x)$ es continua, entonces $\{h|_{X_2}(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \to h|_{X_2}(x)$.

Caso 2.2. El conjunto $\{m \in \mathbb{N} \mid \text{existe } k_m,\ x_{k_m} \in \overline{r_m p_m}\}$ es infinito.

Sean $\varepsilon > 0$, $K_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \overline{qp}\}$ y $K_2 = \mathbb{N} \setminus K_1$. Observemos que si $k \in K_2$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in \overline{r_m p_m}$.

Consideremos las subsucesiones $\{x_k\}_{k \in K_1}$ y $\{x_k\}_{k \in K_2}$. Aplicando los Casos 1 y 2.1 a las anteriores subsucesiones, tenemos que $\{h|_{X_2}(x_k)\}_{k \in K_1}$ converge a $h|_{X_2}(x)$ y $\{h|_{X_2}(x_k)\}_{k \in K_2}$ converge a $h|_{X_2}(x)$. De esta manera concluimos $\{h|_{X_2}(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $h|_{X_2}(x)$.

De manera análoga, podemos ver que la función $h|_{X_3}(x)$ es continua.

Lo único que resta ver para que la función h sea continua es que coinciden en las intersecciones. Primero notemos que $X_1 \cap X_2 = \{v\} \cup \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $X_1 \cap X_3 = \{v\}$ y $X_2 \cap X_3 = \{v\} \cup \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Tomemos ahora $x \in X_1 \cap X_2$, como $\pi_1(x) = 0$, para todo $x \in X_1 \cap X_2$, entonces $h|_{X_1}(x) = (\pi_1(x), 0) = h|_{X_2}(x) = q'$.

Si $x \in X_1 \cap X_3$, entonces $x = v$ y así $h|_{X_1}(x) = h|_{X_1}(v) = h|_{X_3}(v) = h|_{X_3}(x) = q'$.

Por último, si $x \in X_2 \cap X_3$, entonces $x \in \overline{qp}$ o $x \in \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Si $x \in \overline{qp}$, se tiene que $h|_{X_2}(x) = q' = h|_{X_3}(x)$.

Si $x \in \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, entonces $x = p_m$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, ahora, $h|_{X_2}(x) = (f_m \circ \pi_1)(x) = f_m\left(\frac{m+1}{m}\right) = \left(\frac{m+1}{m}, 0\right)$. Por otro lado $h|_{X_3}(x) = (g_m \circ \pi_1)(x) = g_m\left(\frac{m+1}{m}\right) = \left(\frac{m+1}{m}, 0\right)$. De esta manera, $h|_{X_2}(x) = h|_{X_3}(x)$.

Con esto concluimos que h coincide en las intersecciones $X_1 \cap X_2$, $X_1 \cap X_3$ y $X_2 \cap X_3$.

Finalmente como h es una función continua en los conjuntos cerrados X_1, X_2 y X_3 y que además coincide en las intersecciones, podemos concluir que la función h es continua[12, pág.45].

Para ver que la función es monótona, tomemos $y \in Y$ y veamos que $h^{-1}(\{y\})$ es conexo.

Caso1. Si $y = q'$.

Entonces $h^{-1}(\{y\}) = X_1$ que es conexo.

Caso 2. Si $y \in A_n$.

Entonces $h^{-1}(\{y\})$ es el único punto $x \in \overline{r_n p_n}$ tal que $\pi_1(x) = \pi_1(y)$ y así $h^{-1}(\{y\})$ es conexo.

Caso 3. Si $y \in A_n$.

Entonces $h^{-1}(\{y\})$ es el único punto $x \in \overline{q_n p_n}$ tal que $\pi_1(x) = \pi_1(y)$ y así $h^{-1}(\{y\})$ es conexo.

Caso 4. Si $y \in \overline{q'p'}$.

Se tiene que $h^{-1}(\{y\}) = \{y\}$ que también es conexo.

Así, la función h resulta ser monótona.

Con esto hemos probado que la imagen monótona de un dendroide selectible no necesariamente resulta ser selectible.

5.3. Error en el ejemplo de Mackowiak

En [6, pág. 549] Mackowiak intenta una respuesta a la pregunta ¿ La propiedad de ser selectible es una propiedad invariante bajo funciones abiertas?, que aparece en [5, pág 376]. El problema está en la continuidad de la selección.

Ejemplo 5.3.1. *Sean* $p = (0,0)$, $a = (1,0)$, $b = (0,1)$, $c = (-1,0)$, $d = (0,-1)$, $P = \overline{pa} \cup \overline{pb} \cup \overline{pc} \cup \overline{pd}$, $p_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $b_n = \left(0, \frac{n+1}{n}\right)$, $p'_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $a_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$, $q_n = -p_n$, $d_n = -b_n$, $q'_n = -p'_n$, $c_n = -a_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *definimos* $X = P \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{cp_n} \cup \overline{p_n b_n} \cup \overline{b_n p'_n} \cup \overline{p'_n a_n} \cup \overline{aq_n} \cup \overline{q_n d_n} \cup \overline{d_n q'_n} \cup \overline{q'_n c_n}\right)\right]$ *(Ver figura 5.4).*

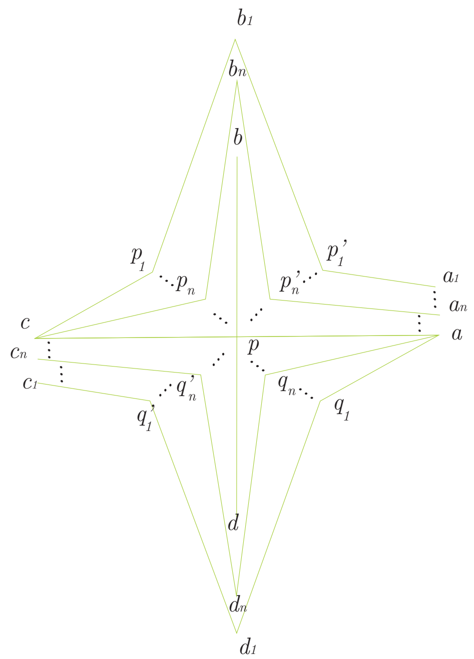


Figura 5.4: Dendroide del ejemplo 5.3.1

En [6] Mackowiak demuestra que X es selectible. La manera de hacerlo es dar una selección para el subcontinuo P y posteriormente extenderla a too el continuo X, sin embargo, cuando revisamos el artículo con cuidado, encontramos un error, pues la selección que describe para dicho subcontinuo P no es una función continua.

Describiremos ahora este trabajo y el motivo de este error.

Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Si $\|x\| \neq \|y\|$, tomamos $z \in \{x,y\}$ tal que $\|z\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$.

Para el subcontinuo P definimos la siguiente función $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$s(x,y) = \begin{cases} p & si \quad \|x\| = \|y\| \\ \\ \frac{z|\|x\|-\|y\||}{2} & si \quad \|x\| \neq \|y\| \end{cases}$$

Una manera de interpretar lo que hace la función s es la siguiente. Si $\|x\| = \|y\|$ la función le asigna el punto p, en el caso contrario, si $\|x\| \neq \|y\|$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\|x\| > \|y\|$. Ahora, en la recta que pasa por p y x tomamos el punto z tal que $\|z\| =| \|x\| - \|y\| |$.

Dados, $u \in \mathbb{R}^2$ y $K \in C(P)$. Sea $\alpha(K,u) = w$, donde $w \in \overline{pu} \cap K$ y cuya norma es máxima, dicho w se puede escoger de esa manera pues K es compacto.

Si $K \in C(P)$ y $p \in K$ entonces existen puntos $a' \in \overline{pa}$, $b' \in \overline{pb}$ $c' \in \overline{pc}$ y $d' \in \overline{pd}$ tales que $K = \overline{pa'} \cup \overline{pb'} \cup \overline{pc'} \cup \overline{pd'}$.

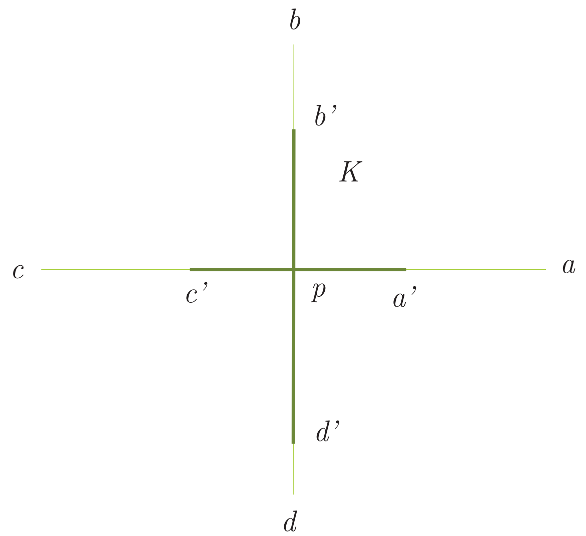


Figura 5.5: Los puntos a', b', c' y d' determinan al continuo K.

Nótese que no hay ninguna restricción para que alguno de los puntos a', b',c' o d' sean p.

Dicho lo anterior podemos definir $\sigma : C(P) \longrightarrow P$ como sigue:

$$\sigma(K) = \begin{cases} x & si \quad p \notin K \\ \\ \alpha\left(K, 8s\left(s\left(s(2c', b'), s(b', a')\right), s\left(s(2a', d'), s(d', c')\right)\right)\right) & si \quad p \in K \end{cases}$$

donde $x \in K$ y x tiene norma máxima.

Para tratar de entender que es lo que hace esta función demos algunos subcontinuos particulares $K \in C(P)$.

Si $K = \overline{\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{3}{4}\right)}$, entonces $\sigma'(K) = \left(0, \frac{3}{4}\right)$.

Ahora, tomemos $v = \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ y $K = \overline{pv} \cup \overline{pb} \cup \overline{pa} \cup \overline{pd}$, para encontrar quién es $\sigma(K)$, notemos que $s(2v, b) = s(b, a) = p$, $s(2a, d) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $s(v, d) = \left(0, \frac{-1}{4}\right)$. A continuación debemos calcular $s(s(2v, b), s(a, b))$ y $s(s(2a, d), s(v, d))$. Como $s(2v, b) = p$ y $s(a, b) = p$, entonces $s(s(2v, b), s(a, b)) = s(p, p) = p$.

De manera análoga, $s(2a, d) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $s(v, d) = \left(0, \frac{-1}{4}\right)$, por lo tanto $s(s(2a, d), s(v, d)) = s(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{-1}{4}\right)) = \left(\frac{1}{8}, 0\right)$.

Posteriormente, para saber quien es $8s\left(s\left(s(2v, b), s(b, a)\right), s\left(s(2a, d), s(d, v)\right)\right)$, veamos que $s(s(2v, b), s(a, b)) = p$ y $s(s(2a, d), s(v, d)) = \left(\frac{1}{8}, 0\right)$ de manera que $8s\left(s\left(s(2v, b), s(b, a)\right), s\left(s(2a, d), s(d, v)\right)\right) = 8s\left(p, \left(\frac{1}{8}, 0\right)\right) = 8\left(\frac{1}{16}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Finalmente $\sigma(K) = \alpha\left(K, \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Esta función σ tiene un problema y este es que no es continua. Para ello tomemos el subcontinuo $K = \overline{pb}$ y elijamos $K_n = \overline{\left(0, \frac{1}{n}\right)(0, 1)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow K$ y $\sigma(K) = p$ pero $\sigma(K_n) = (0, 1) \neq p$.

De manera que si σ fuera continua, tendríamos que $\{\sigma(K_n)\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \sigma(K)$ pero $\sigma(K_n) = (0, 1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, el cual es distinto a $\sigma(K) = p$.

Con esto concluímos que el Ejemplo 5.3.1 del artículo de Mackoviak [6] está mal.

No hemos encontrado en la literatura un ejemplo en que X, Y sean dendroides, X selectible y $f : X \longrightarrow Y$ continua y abierta pero Y no sea selectible. Debido a que el ejemplo de Mackowiak tiene un error, esto sigue siendo una pregunta abierta.

Otra pregunta abierta que queda por resolver es si el dendroide del ejemplo 5.3.1 es selectible. De ser negativa la respuesta a esta cuestión dejaría muchas otras interrogantes por resolver.

Si el lector desea encontrar más información, así como preguntas abiertas sobre selecciones puede revisar [4], [5] y [10].

Bibliografía

[1] Bartle, R.G., *The elements of Real Analysis*, New York:J. Willey, 1976.

[2] Charatonik J.J., *Contractiblity and continuous selections*, Fund. Math. 108 (1980), 109-118. `http://web.mst.edu/~wjcharat/JJC/publications/p34.pdf`

[3] Dugundji James, *Topology*, Allyn and Bacon, INC.(1966).

[4] Illanes Alejandro, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas; Textos, vol. 28, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.

[5] Illanes Alejandro, S. B. Nadler, Jr., *Fundamentals and recents advances*, Marcel Decker, Inc., 1999.

[6] Mackowiak T., *Continuous selections for $C(X)$*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 21(1978), 547-551.

[7] Martínez de la Vega y Mansilla Verónica, *El hiperespacio de continuos con la topología producto*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM (1998).`http://132.248.9.195/pdbis/263346/Index.html`

[8] Munkres James R., *Topology*, Prentice Hall,(2000).

[9] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction* , A Series of Monographs and Textbooks Pure and Applied Mathematics 158 (1992),Marcel Decker Inc. New York.

[10] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets. A text with research questions*, Aportaciones Matemáticas; Textos, vol. 33, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006.

[11] Torres Flores Miriam, *Caracterizaciones de dendritas*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM (2001). `http://132.248.9.195/pd2001/295227/Index.html`

[12] Willard Stepehen, *General Topology*, Addison-Wesley publishing company, 1970.