



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Soluciones consistentes a las paradojas ligadas
a la violación cronológica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Marco Antonio Luna Pacheco

DIRECTOR DE TESIS

César Simón López Monsalvo





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Luna
Pacheco
Marco Antonio
0445540736669
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
310173191.

2. Datos del tutor

Dr.
César Simón
López
Monsalvo.

3. Datos del sinodal 1

Dr.
Quevedo
Cubillos
Hernando.

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Patiño
Jaidar
Erick Leonardo.

5. Datos del sinodal 3

Dra.
Rosales
Zarate
Laura Elena Casandra.

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Nettel
Rueda
Francisco.

7. Datos del trabajo escrito
Soluciones consistentes a las paradojas ligadas a la violación cronológica.
125p.
2019

"El Tao que puede ser expresado no es el verdadero Tao".
Lao Tse.

"Los hombres se equivocan, en cuanto piensan que son libres; y esta opinión sólo consiste en que son conscientes de sus acciones e ignorantes de las causas por las que son determinados".
Arthur Schopenhauer.

¶ mi familia.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICORESUMEN

FACULTAD DE CIENCIAS

Licenciatura en Física**Soluciones consistentes a las paradojas ligadas a la violación
cronológica**

por

Marco Antonio Luna Pacheco

Una paradoja usualmente se refiere a un hecho que va en contra del sentido común. De manera más concreta, una paradoja surge de premisas que se asumen correctas y que llevan a una conclusión que a primera vista parecería contradictoria[3]. En esta tesis se explorará el contexto y las condiciones bajo las cuales la pregunta: ¿Las leyes de la Física prohíben la operación de máquinas del tiempo?[13]. En particular: ¿Las leyes de la física prohíben la existencia de curvas cerradas tipo tiempo, basados en la evolución inconsistente y formación de paradojas?. Se tomará como guía del trabajo la propuesta seminal de David Deutsch: "Mecánica cuántica cerca de curvas cerradas tipo tiempo"[11]. Ahí se hace un estudio detallado y formal acerca de las paradojas clásicas posibles en un espaciotiempo que cuente con regiones donde se viola la condición de cronología, y se hace un análisis de las mismas mediante la teoría de computación cuántica. El objetivo principal de la tesis será presentar y explicar las condiciones de consistencia adicionales que se deben cumplir en un espaciotiempo que admite la existencia de curvas cerradas tipo tiempo. Esto es, las condiciones bajo las cuales las paradojas clásicas son imposibilidades. Los objetivos específicos son estudiar los fundamentos matemáticos de la relatividad general. Se presentarán los fundamentos geométricos y topológicos de la teoría: variedades diferenciables, tensor métrico, orientabilidad, curvas tipo-tiempo, geodésicas, causalidad y cronología, estudiar y presentar la jerarquía causal de Carter para espaciotiempos. Así como mostrar un ejemplo de espaciotiempos totalmente viciosos, el universo de Gödel. Analizar el comportamiento clásico de la evolución de curvas tipo tiempo y sus paradojas [11, 14], como también la evolución de estados cuánticos de información a través de compuertas que simulan un espaciotiempo con curvas cerradas tipo tiempo[11]. Finalmente se presentará el Principio de Church-Turing-Deutsch y las implicaciones que la computabilidad de las curvas cerradas tipo tiempo tiene sobre la realidad y el determinismo.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Resumen | I |
| Índice general | II |
| Lista de figuras | VI |
| Índice de figuras | VI |
| Lista de tablas | VIII |
| Índice de cuadros | VIII |
| Agradecimientos | IX |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Zenón y la paradoja del movimiento | 2 |
| 1.2. Newton; espacio y tiempo absolutos | 4 |
| 1.2.1. El experimento de la cubeta de agua | 5 |
| 1.2.2. Algo más que espacio, el <i>Sensorio Divino</i> | 6 |
| 1.3. Leibniz; espacio y tiempo relativos | 6 |
| 1.4. Espaciotiempo en la teoría de la relatividad | 8 |
| 2. Relatividad General | 9 |
| 2.1. Los principios de la teoría | 10 |
| 2.1.1. El principio de equivalencia débil | 10 |
| 2.1.2. El principio de equivalencia fuerte | 12 |
| 2.2. El principio variacional y las ecuaciones de Einstein | 14 |
| 3. Propiedades del espaciotiempo | 18 |
| 3.1. Causalidad y cronología | 20 |
| 3.2. Propiedades de los pasados y futuros | 23 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 3.3. | Condiciones de causalidad | 24 |
| 3.4. | Hiperbolicidad global | 26 |
| 3.4.1. | Dominios de dependencia | 27 |
| 3.4.2. | Jerarquía causal | 27 |
| 3.5. | La Métrica de Gödel | 28 |
| 3.5.1. | Análisis de las ecuaciones de restricción para la métrica de Gödel | 34 |
| 4. | Violación de la cronología | 35 |
| 4.1. | Aplicando la teoría de la Computación Cuántica | 37 |
| 4.1.1. | Compuertas en teoría de la computación cuántica | 39 |
| 4.1.2. | El modelo de Deutsch | 40 |
| 4.2. | Paradojas clásicas en la violación de la cronología | 42 |
| 4.2.1. | Primera Paradoja | 43 |
| 4.2.2. | Segunda Paradoja; el suicida | 45 |
| 4.2.3. | Tercer Paradoja; la paradoja del abuelo | 46 |
| 4.2.4. | Cuarta Paradoja; paradoja de la información | 47 |
| 4.2.5. | Introduciendo una nueva notación | 49 |
| 4.2.6. | Paradojas compuestas | 50 |
| 4.2.6.1. | Composición de dos paradojas | 50 |
| 4.2.6.2. | Composiciones de tres o más paradojas | 54 |
| 4.3. | Tratamiento cuántico de las paradojas | 60 |
| 4.3.1. | Operador densidad | 60 |
| 4.3.1.1. | Operador densidad reducido | 63 |
| 4.3.2. | Resolviendo las paradojas de Deutsch | 63 |
| 4.3.2.1. | Primera paradoja | 64 |
| 4.3.2.2. | Segunda paradoja | 66 |
| 4.3.2.3. | Tercera paradoja | 67 |
| 4.3.2.4. | Cuarta paradoja | 69 |
| 4.3.3. | Resolviendo las paradojas compuestas | 71 |
| 4.3.3.1. | Primera paradoja | 71 |
| 4.3.3.2. | Segunda paradoja | 72 |
| 4.3.3.3. | Tercera paradoja | 73 |
| 4.3.3.4. | Cuarta paradoja | 74 |
| 4.3.3.5. | Quinta paradoja | 75 |
| 4.3.3.6. | Sexta paradoja | 76 |
| 4.3.3.7. | Séptima y octava paradojas | 77 |
| 4.4. | ¿Qué sucedió con las paradojas? | 78 |

| | |
|--|-----------|
| 5. El principio de Church-Turing-Deutsch | 80 |
| 5.1. Tesis de Turing | 80 |
| 5.2. El problema de la decisión | 82 |
| 5.3. Principio Church-Turing-Deutsch | 83 |
| 5.4. La plausibilidad de las máquinas del tiempo | 84 |
| 6. Conclusiones | 86 |

I Apéndices **91**

| | |
|---|------------|
| A. Geometría Diferencial | 92 |
| A.1. Preliminares | 92 |
| A.2. Curvas | 93 |
| A.2.1. Curvas parametrizadas | 93 |
| A.2.2. Producto interno | 94 |
| A.2.3. Curvas regulares; longitud de arco | 94 |
| A.2.4. Teoría local de curvas parametrizadas por longitud de arco | 95 |
| A.3. Superficies | 95 |
| A.3.1. Superficies regulares | 95 |
| A.3.2. Funciones diferenciales en superficies | 96 |
| A.3.3. Plano tangente; el diferencial de un mapeo | 96 |
| A.4. Variedades | 98 |
| A.4.1. Variedades diferenciables | 98 |
| A.4.2. Espacio tangente | 99 |
| A.5. Uno-formas | 100 |
| A.5.1. Uno-formas como bases y componente de uno-formas . | 101 |
| A.6. Tensores | 101 |
| A.6.1. El tensor métrico | 102 |
| A.7. Conexiones | 103 |
| A.7.1. Transporte paralelo | 106 |
| A.8. Curvatura | 114 |
| A.8.1. Identidad de Bianchi | 115 |
| A.9. Geodésicas | 116 |
| B. El problema de Cauchy en la Relatividad General | 118 |
| B.1. La descomposición $3 + 1$ en Relatividad General | 120 |
| B.1.1. Curvatura extrínseca | 121 |
| B.1.2. Las ecuaciones de Gauss-Codazzi y Codazzi-Mainardi . | 122 |
| B.1.3. Las ecuaciones de restricción | 122 |

| | |
|---|------------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i> | v |
| B.1.4. La forma $3 + 1$ de la métrica | 124 |
| Bibliografía | 125 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. Diagrama de la paradoja de Aquiles y la tortuga. | 3 |
| 3.1. Cono de luz con futuro y pasado cronológico, futuro y pasado causal señalado. | 21 |
| 3.2. El diagrama representa la simetría rotacional alrededor del eje $r = 0$, y la invarianza en el tiempo. El cono de luz se abre y se vuelca conforme r aumenta (línea L), lo que resulta en curvas cerradas tipo tiempo. El diagrama no representa correctamente el hecho de que todos los puntos son equivalentes. | 31 |
| 3.3. El diagrama representa una curva cerrada tipo tiempo que atraviesa el horizonte de Gödel, donde los rayos de luz no pueden pasar y en el que el objeto se ve al menos dos veces, cuando sale de él, en el futuro, y cuando vuelve a entrar en el pasado. . . . | 32 |
| 4.1. En (a) se muestra el diagrama puramente espacial de una red computacional cuántica, con la compuerta G , y el delay temporal, mientras que en (b) puede verse el correspondiente diagrama espacio-temporal en el que G es el espacio de interacción, y el espacio de violación de la cronología. | 41 |
| 4.2. Red computacional que modela el espaciotiempo de la figura 4.1, con las anotaciones de la primera paradoja. | 43 |
| 4.3. Red computacional de la primera paradoja, con las anotaciones y los tiempos señalados. | 44 |
| 4.4. Red computacional de la segunda paradoja, con las anotaciones y los tiempos señalados. | 46 |
| 4.5. Red computacional para la paradoja tradicional del viaje en el tiempo. | 47 |
| 4.6. Red computacional para encontrar un punto fijo de f ; paradoja de la información. | 48 |

| | |
|--|-----|
| 4.7. Red computacional para la composición de la paradoja 3 con la paradoja 1. | 51 |
| 4.8. Red computacional para la composición de la paradoja 1 con la paradoja 3. | 52 |
| 4.9. Red computacional para la composición de la paradoja 2 con la paradoja 1. | 53 |
| 4.10. Red computacional para la composición de la paradoja 1 con la paradoja 2. | 54 |
| 4.11. Red computacional para la composición de tres paradojas 1. | 55 |
| 4.12. Red computacional para la composición de una compuerta de la paradoja 3, y dos de la paradoja 1. | 56 |
| 4.13. Red computacional para la composición de una compuerta de la paradoja 4 de inicio, una de la paradoja 3, y dos de la paradoja 1. | 57 |
| 4.14. Red computacional para la composición de una compuerta de la paradoja 4 y tres paradojas 1, con los tiempos señalados. | 58 |
| 6.1. El diagrama representa una superficie Σ acronal con su dominio de dependencia $D^+(\Sigma)$, en el que se encuentra un punto p , determinado por las condiciones iniciales. | 88 |
| 6.2. El diagrama representa una superficie Σ que se curva sobre sí misma en una espiral con una curva tipo tiempo γ que la interseca más de una vez, y que pasa por p | 89 |
| 6.3. Diagrama en 2 dimensiones de la superficie de la 6.2. | 90 |
| A.1. Superficie regular y el mapeo \mathbf{x} | 96 |
| A.2. Mapeo entre dos superficies regulares y sus planos tangentes | 97 |
| A.3. Variedad diferencial \mathcal{M} con una curva integral γ y campo vectorial X en p | 107 |
| A.4. Variedad diferencial \mathcal{M} con una curva integral γ y campos vectoriales X y Y a lo largo de γ en p y q | 107 |
| A.5. Transporte definido sobre $Y _p$ a lo largo de γ | 108 |
| A.6. Transporte afín de $Y _p$ y $\lambda Y _p$ | 109 |
| A.7. Transporte paralelo y su inversa de $Y _p$ y $Y _q$ respectivamente. | 109 |

Índice de cuadros

| | |
|---|----|
| 4.1. Tabla de verdad del operador $\dot{+}$ | 43 |
|---|----|

Agradecimientos

Agradezco a la UNAM, donde me he formado tanto académica como personalmente, y a la Facultad de Ciencias, que ha sido mi hogar en los momentos más difíciles. Agradezco a mi familia, a mis padres Lilia Edith Pacheco García y Marco Antonio Luna Orozco, que han estado ahí a pesar de todo, y a mi hermana Nirvana Edith Luna Pacheco, quien a pesar de ser la menor, ha sido muchas veces el ejemplo. A mi hermano mayor el Dr. Máximo, por todo su apoyo y sus sabias enseñanzas, sin él no podría haber llegado hasta aquí. Particularmente quiero agradecer a mi abuelito Marcelino Pacheco Guzmán, quien ha sido mi ejemplo desde la infancia, y a quien admiro con todo el corazón. Agradezco a Sandra Daniela Calixto Tlacomulco, quien no sólo se ha mantenido cuando en los momentos más críticos, sino que fue ella quien me impulsó a seguir el sueño de estudiar física, en un momento en el que nadie más creía que podría lograrlo; te amo. Agradezco a mi asesor el Dr. César Simón López Monsalvo por todo su esfuerzo y dedicación que fueron fundamentales durante este proyecto, y sobre todo a su entrega, que fue una de las razones por las que me enamoré de la relatividad.

Agradezco también al Dr. Antonio Eusebio Lazcano Araujo Reyes, por todo su apoyo, tanto académico como personal a lo largo de mi formación. Agradezco a mis sinodales, Hernando Quevedo Cubillos, Erick Leonardo Patiño Jaidar, Laura Elena Casandra Rosales Zarate y Francisco Nettel Rueda, por sus consejos y apoyo en esta etapa. Agradezco también al Dr. Juan Antonio Valiente Kroon, por la todo el apoyo y enseñanza que me brindó durante la estancia en Queen Mary. Agradezco a mis amigos, en particular a Luza, por ser parte de mi vida. Y finalmente quisiera agradecer a la Academia de Ciencias de Vulcano, por el apoyo prestado en la realización de esta tesis y a lo largo de mi formación.

Marco Antonio Luna Pacheco
Ciudad de México,
2019.

Capítulo 1

Introducción

En 1949, Kurt Gödel propuso un nuevo tipo de solución a las ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general [18]. Su solución tenía la particularidad de admitir curvas cerradas tipo tiempo, es decir, curvas sobre las que una partícula podía empezar un viaje hacia el futuro y terminar en el pasado, justo en el momento previo al que empezó el viaje. Las posibilidades que se abrieron frente a este tipo de soluciones inquietaron al mismo Einstein, ya que su teoría, la relatividad general, no prohibía la violación de la cronología.

Pronto fue claro para todos que este tipo de soluciones podían engendrar sucesos que si bien serían encantadores para la ciencia ficción, para la física representarían, cuando menos, un problema. Una partícula que pudiera viajar al pasado, podría interactuar consigo misma e impedir su viaje. El viaje en el tiempo se convirtió en la madre por excelencia de todo tipo de paradojas.

El estudio de las paradojas en la filosofía, ha llevado a grandes discusiones en las que nuevas formas de conocimiento se generan. Ejemplo de esto, podemos encontrar en las paradojas de Zenon de Elea del movimiento. En lo que concierne a la física, el estudio de las paradojas también ha llevado a grandes descubrimientos, basta señalar el caso de la paradoja EPR. Cuando se habla de la violación de la cronología, es decir, cuando se permite el viaje en el tiempo, es común que surjan paradojas en la evolución de los viajeros. Lo anterior ha sido incluso utilizado ampliamente por la industria de la ciencia ficción. Sin embargo también ha servido para descartar la posibilidad física de que el estudio de los espaciotiempos, donde se viola la cronología sea útil y aporte un conocimiento importante sobre la realidad.

Bajo el pretexto de que cualquier solución que diera pie a paradojas no podía tener lugar en el universo, se descalificó a las soluciones que admitían curvas cerradas tipo tiempo como modelos físicos que podían aproximarse a la realidad [36]. Sin embargo no todos los físicos y matemáticos comparten

esa opinión. Quizá el estudio de estos espaciotiempos puede arrojar luz sobre aspectos que aún desconocemos de la realidad.

En 1991 David Deutsch publicó un artículo en *Physical Review D*, en el que se aproximaba a las paradojas típicas del viaje en el tiempo usando mecánica cuántica; en particular computación cuántica. En su artículo, Deutsch resuelve las paradojas y muestra que la evolución inconsistente de los eventos desaparece cuando se usan los postulados de la mecánica cuántica y la teoría de la computación [11]. Es este artículo, y su método para analizar las paradojas, el que sirve como motivación para este trabajo.

Para lograr esta tarea, Deutsch proporciona condiciones de consistencia a las cuales tienen que constreñirse los datos iniciales y la evolución del sistema, haciéndolo primero de manera clásica, para después usar el formalismo del operador densidad. El objetivo de este trabajo es estudiar las paradojas que surgen cuando se trabaja en espaciotiempos que violan la cronología y utilizar el método de Deutsch para resolverlas, probando así que no hay restricciones lógicas para la exclusión de dichas soluciones del estudio de la relatividad general.

Se expondrán cuales son las implicaciones que esto tiene sobre el universo, y la plausibilidad de las máquinas del tiempo, enunciando el principio de Church-Turing-Deutsch, cuya relevancia es también filosófica. Además se analizarán las consecuencias que tiene la existencia de curvas cerradas tipo tiempo sobre el determinismo causal o Laplaciano.

Comenzaremos dando un breve recorrido por la historia de la filosofía del tiempo y el espacio, que nos ayude a entender cómo ha cambiado nuestra concepción de éste y nos dé una visión más profunda de cómo lo comprendemos ahora.

1.1. Zenón y la paradoja del movimiento

El filósofo Zenón de Elea (490-430 AC) es famoso en parte por sus paradojas del movimiento, entre las que se encuentran la paradoja de la flecha y la de Aquiles y la tortuga. Las paradojas de Zenón se enfocan en los aspectos básicos de la filosofía del espacio y el tiempo; se cuestionan la posibilidad del movimiento, en el cual están basadas la mayoría de las ciencias naturales y en particular la mayor parte de la física. Zenón buscaba probar la ausencia del movimiento, su imposibilidad.

La paradoja de Aquiles y la tortuga nos dice que en una carrera entre Aquiles y una tortuga, si esta última comenzara con un tramo de ventaja,

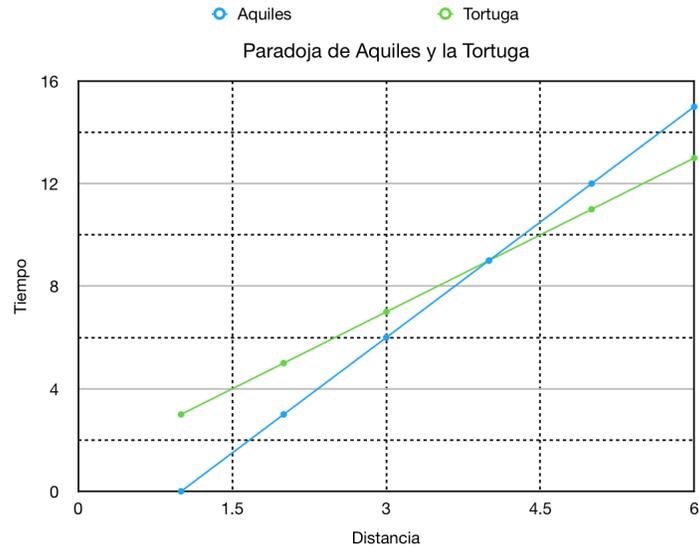


Figura 1.1: Diagrama de la paradoja de Aquiles y la tortuga.

Aquiles jamás podría alcanzarla, ya que para ello, primero tendría que llegar al punto en el que la tortuga empezó, para después tener que llegar al punto en el que la tortuga continuó, y así seguir recorriendo un número infinito de puntos en un tiempo finito. La paradoja se puede ilustrar en un diagrama como el de la figura 1.1, donde Aquiles está representado por la línea azul y la tortuga por la línea verde. De acuerdo con la paradoja, ambas líneas nunca deberían de tocarse, aunque se acercarían asintóticamente. Sin embargo, en el diagrama vemos claramente que sí lo hacen, y que Aquiles incluso supera a la tortuga.

La paradoja que mejor puede enunciar el problema del movimiento es sin duda la paradoja de la flecha en movimiento. Zenón dice que la flecha que vuela por el aire está inmóvil. Una flecha ocupa un lugar en el espacio, y cuando ésta es lanzada, desplaza aire, además de que está ocupando un *presente* definido, por lo que en cada preciso momento de su movimiento, la flecha ocupa un lugar determinado. Si el periodo de tiempo en el que se mueve es lo suficientemente pequeño, la flecha no alcanzará a moverse, por lo que está en el reposo. Ahora si este razonamiento se aplica a todos los intervalos de movimiento de la flecha, ésta nunca se mueve. De donde el estado de movimiento y el de reposo no pueden ser diferentes.

Zenón se aproximaba al problema de la relatividad del movimiento a través de sus paradojas, desde lo que podía parecer un ataque lógico y para algunos puramente filosófico y carente de significado físico.

1.2. Newton; espacio y tiempo absolutos

En su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Isaac Newton establece los pilares de la Mecánica Clásica. Al establecer sus Definiciones, que serán útiles para el desarrollo de la obra, Newton tiene que esclarecer a su vez los conceptos de espacio y tiempo. Es de hecho en el *Scholium* de este apartado donde los clarifica:

- Espacio:

1. *Espacio Absoluto:* Por su propia naturaleza sin relación con algo externo, siempre permanece igual e inmóvil.
2. *Espacio Relativo:* Es una medida o dimensión móvil del espacio absoluto. Está definido por su posición con respecto a los cuerpos de acuerdo con nuestros sentidos, y la gente ordinaria lo toma por un espacio inmóvil.

- Tiempo:

1. *Tiempo Absoluto:* Verdadero y matemático, fluye equitativamente en sí mismo y por su naturaleza sin relación con nada externo, y también se le llama duración.
2. *Tiempo Relativo:* Aparente y común, es alguna medida externa sensible de duración que se establece, comúnmente utilizado en lugar del tiempo verdadero[23].

El espacio y el tiempo que nos interesa analizar en la obra de Newton son los absolutos, ya que tanto el espacio como el tiempo relativos se refieren a medidas o marcos de referencia. Por otro lado, cuando habla del espacio absoluto, Newton describe algo inmaterial e inmóvil, una especie de sustancia homogénea y continua que sumada a la materia resulta en el universo. Podemos también deducir de los Principia, que la descripción del espacio absoluto corresponde a la geometría de Euclides en tres dimensiones, es decir, es plano.

En lo que respecta al tiempo absoluto, Newton establece que éste tampoco es material, sino es de naturaleza matemática y fluye en él mismo, es decir, el tiempo es como un río, sin importar cómo describamos o usemos su agua, ésta no cambia su naturaleza.

Newton también define el movimiento absoluto y el relativo, ejemplifiquemos esto: Sea un barco con un ave dentro de él. Diremos que el movimiento del ave es relativo, cuando describamos su movimiento respecto al barco. Diremos, por el contrario, que su movimiento es absoluto cuando se tome en cuenta el

movimiento del barco y el de la Tierra para describir el del ave. Esto nos remonta a la relatividad de Galileo Galilei.

Tomando el mismo ejemplo del barco, Galileo nos hace notar la imposibilidad de saber si algo está o no en movimiento. Sabemos que si el barco se mueve a velocidad uniforme el movimiento del ave no se verá afectado, de tal manera que no podremos distinguir si el barco se mueve o no a partir del movimiento del ave. Si el barco no tiene ventanas, el ave no sabrá que el barco se mueve, o incluso que se encuentra dentro de un barco. ¿Cómo podemos estar seguros entonces de que el espacio absoluto está inmóvil?

Newton aprovechará lo siguiente para sustentar su concepto de espacio absoluto: Si el barco inicialmente está en reposo, para pasar de una velocidad inicial cero a una velocidad diferente, aunque constante, tendrá que acelerar. El ave dentro del barco sentirá el jalón de la aceleración, y un observador fuera del barco podrá decir que este jalón se debe a ella, sin embargo, recordemos que el ave no sabe que está dentro de un barco así que sentirá los efectos de una fuerza *misteriosa*; los físicos llamamos a este tipo de fuerzas, ficticias.

Lo anterior es de suma importancia, ya que nos lleva a preguntarnos, ¿existirá un sistema de referencia a partir del cual se pueda dar razón de cualquier aceleración que se produzca dentro de él, sin que tengamos que postular la existencia de fuerzas ficticias? Para Newton la respuesta es clara y es afirmativa; este sistema es el espacio absoluto.

1.2.1. El experimento de la cubeta de agua

Imaginemos una cubeta llena de agua que está en reposo. Como sabemos, la superficie del agua es plana. Ahora amarramos una cuerda a la cubeta y la enrollamos de manera que haga girar la cubeta; el agua comenzará a rotar también, generando un pequeño torbellino, sin embargo esto lo hará momentos después de que la cubeta ya esté girando. Esto es posible ya que en al principio del movimiento de la cubeta, el agua está acelerada respecto a las paredes de la cubeta, lo que mantiene su superficie plana.

Cuando el agua comienza a girar y su superficie deja de ser plana, la cubeta y el agua se mueven al mismo ritmo, por lo que podríamos decir que el agua está en reposo respecto a la cubeta. Llegará el momento en el que la cubeta deje de moverse y entonces podremos ver que, por unos momentos, el agua seguirá girando y su superficie seguirá siendo cóncava, por lo que el agua estará acelerada con respecto a la cubeta. Finalmente todo volverá a estar en reposo.

Vemos que la forma de la superficie del agua es independiente del movimiento relativo del agua respecto al balde, y ya que evidentemente actúan

fuerzas sobre el agua, hay aceleraciones absolutas. Si la aceleración que experimenta el agua no está en función de materia alguna, debe existir el espacio absoluto, en relación con el cual se produce la aceleración.

1.2.2. Algo más que espacio, el *Sensorio Divino*

Para entender la mecánica clásica, es decir la que tiene su fundamento en los Principia, es necesario el espacio absoluto tanto lógica como ontológicamente, es decir, el espacio debe ser real para que exista movimiento. A pesar de ello, puede verse en el espacio absoluto de Newton algo más que física. Para Newton, el espacio es el sensorio divino, una sustancia inmaterial y extensa que sirve de intermediario entre Dios y el mundo material, explicando la omnipresencia.

De hecho, Newton establece que:

“[Dios] ve íntimamente las cosas mismas en el espacio infinito, como si fuera en su sensorio”[22].

Sin embargo, a pesar de que la concepción newtoniana de espacio y tiempo fuera la que trascendiera en la física, hubo propuestas diferentes a las suyas, entre ellas la de Leibniz.

1.3. Leibniz; espacio y tiempo relativos

Leibniz plantea que el espacio y el tiempo no son una *realidad* sino una *relación* entre la materia y los sucesos respectivamente. La analogía comúnmente utilizada para ejemplificar esta postura es la del abecedario o de la familia, el abecedario o la familia serían el espacio o el tiempo y las letras o los miembros de la familia serían la materia y los sucesos; sin letras no existe el abecedario, sin miembros no existe la familia. En palabras de Leibniz:

“En cuanto a mí, he señalado más de una vez que consideraba el espacio como una cosa puramente relativa, al igual que el tiempo; como un orden de coexistencias, mientras que el tiempo es un orden de sucesiones. Pues el espacio señala en términos de posibilidad un orden de las cosas que existen al mismo tiempo, en tanto que existen conjuntamente, sin entrar en sus peculiares maneras de existir; y en cuanto vemos varias cosas juntas, nos damos cuenta de este orden de cosas entre ellas”[19].

Para Leibniz el universo está compuesto de sustancias indivisibles que él llama mónadas, cada una diferente de la otra. La independencia de las mónadas las constituye como marcos de referencia, por lo que al haber una infinidad de mónadas, existe una infinidad de marcos de referencia. El tiempo y el espacio son relaciones entre mónadas, así el tiempo y el espacio quedan como un orden de coexistencias que depende del marco de referencia. Bajo esta definición, el espacio y tiempo no son continuos, sino discretos y heterogéneos.

Si queremos estudiar los argumentos que Leibniz utiliza para sustentar su concepción relativista del espacio y tiempo debemos enunciar primero los siguientes principios:

- *Principio de Razón Suficiente*: Jamás ocurre algo sin que haya una causa o al menos una razón determinante, es decir, algo que pueda servir para dar razón a priori de por qué algo existe y por qué existe de esta manera más bien que de otra manera.
- *Principio de Identidad de los Indiscernibles*: Dos cosas son idénticas si y sólo si comparten las mismas propiedades.
- *Principio de Perfección*: Dios eligió la mejor de todas las infinitas posibilidades alternativas con las que contó para crear nuestro mundo.

Leibniz propuso el siguiente experimento mental: Sean dos universos en un espacio absoluto de tal manera que la única diferencia entre ellos es la distancia del uno al otro. Dicha distancia sólo puede existir en el espacio absoluto que rodea a los universos, pero si el universo absoluto es homogéneo, no importa dónde pongamos los universos siempre y cuando la distancia entre ellos se conserve. Esto viola el principio de razón suficiente, ya que si no hay una razón para que estos universos estén donde están, no ocurrirá que estos *estén*. Por otro lado, los universos son el mismo por el principio de identidad de los indiscernibles.

Al igual que Newton, Leibniz utiliza sus conceptos de espacio y tiempo para hablar de Dios. El filósofo de Liepzig pregunta que si el tiempo fuera homogéneo, por qué habría Dios elegido un momento y no otro para la creación.

Con el experimento de la cubeta de agua, que Leibniz no pudo probar como erróneo, la postura de Newton tomó ventaja, sin embargo, como en la versión del cálculo de Leibniz, sería la propuesta de éste que probaría estar más cerca de la verdad en el futuro. El empirista Mach objetaría contra la concepción absolutista de Newton y Einstein retomaría después la naturaleza relativa del espacio y el tiempo, además de fundirlos en uno sólo.

1.4. Espaciotiempo en la teoría de la relatividad

Con el arribo de las teorías especial y general de la relatividad, la noción de espacio y tiempo cambió completamente, unificándose en uno sólo y dejando de ser el absoluto que se entendía en la teoría newtoniana, para ser una variedad diferenciable equipada con una métrica, que podía deformarse con la materia y la energía. En la nueva concepción, el tiempo podía contraerse o dilatarse, igual que el espacio.

Los principios que rigen estas teorías persiguen una descripción del universo y la realidad libre del marco de referencia. Esto transformó los conceptos de movimiento, espacio y tiempo, y trastocó por completo la simultaneidad. La relatividad general también tenía una explicación para el experimento de la cubeta de agua de Newton. El agua no estaba rotando respecto al espacio absoluto, sino al campo gravitacional que la rodea, que es producto de la geometría del espaciotiempo.

La dinámica de los cuerpos está regida por su interacción con el campo gravitacional. Los principios y las predicciones de las teorías especial y general de la relatividad han sido verificadas con extraordinaria precisión a lo largo del tiempo, incluidas las recientemente descubiertas ondas gravitacionales, comprobando la poderosa capacidad de la teoría para ser la herramienta predilecta de muchos para explorar el universo.

Capítulo 2

Relatividad General

La teoría de la relatividad general es una descripción de la gravedad y su acción sobre la materia desde un punto de vista geométrico, basado en la idea de una variedad diferenciable, equipada con una métrica, cuya curvatura da cuenta de la intensidad del campo gravitacional. Sin embargo relacionar el concepto de gravedad con curvatura no es sencillo, y se tratará de explicar en la siguiente sección. Además de ello, para desarrollar la Teoría General de la Relatividad, Einstein propuso el principio general de covarianza como la simetría fundamental en el cual se basaba su teoría.

La teoría especial de la relatividad satisface el principio de relatividad del movimiento inercial, ya que las leyes de la física son invariantes ante transformaciones de Lorentz. En la década de 1910, cuando se publicó la Teoría de la Relatividad, y desde que Maxwell publicara sus ecuaciones en 1861, las leyes de la física a las que se hacía referencia era al electromagnetismo [26]. Las transformaciones de Lorentz son las que preservan la simetría de las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Estas ecuaciones y la ecuación de onda que surge de ellas, establecen la necesidad de una teoría con una métrica con signatura indefinida y una variedad Lorentziana, ya que las transformaciones de Lorentz preservan un producto interior pseudo-riemanniano; el de Minkowski. El espaciotiempo será entonces una variedad diferencial con un producto interior Lorentziano.

La teoría general de la relatividad es generalmente covariante, es decir, permanece inalterada ante transformaciones arbitrarias de coordenadas. Esta propiedad de la teoría pareciera una generalización del principio relativista para el movimiento acelerado, sin embargo, desde 1917, autores como Kretschmann han argumentado que la covarianza general de la teoría no tiene significado físico real, ni conexión con el principio de relatividad[25].

Es importante señalar la diferencia entre covarianza e invarianza. Mientras que si a las ecuaciones que expresan las leyes de la teoría se les aplican ciertas

transformaciones y las ecuaciones resultantes preservan la forma original, se le llama covarianza, si el énfasis es en las propiedades geométricas, como los grupos, y éstas permanecen inalteradas bajo las transformaciones, se le llama invarianza.

2.1. Los principios de la teoría

En su artículo de 1911, Einstein escribe por primera vez lo que después (1912) denominaría como el *principio de equivalencia*:

... asumimos que los sistemas K (sistema inercial en un campo gravitacional homogéneo) y K' (sistema uniformemente acelerado en un espacio libre de gravedad) son físicamente exactamente equivalentes, eso es, ... asumimos que podemos observar al sistema K como en un espacio libre de campos gravitacionales, pero uniformemente acelerado. [25]

Einstein vio este principio como una extensión del principio de relatividad. En 1916 Einstein también introdujo el siguiente argumento, conocido como el principio de la inercia;

Las leyes de la física deben ser de tal naturaleza que apliquen a todos los sistemas de referencia en cualquier tipo de movimiento.[25]

El segundo postulado que Einstein estableció es el *principio de covarianza general*:

Las leyes generales de la naturaleza deben estar expresadas en ecuaciones que sean válidas para todos los sistemas de coordenadas, es decir, que sean covariantes con respecto a cualquier sustitución; generalmente covariantes.[25]

Para Einstein resultaba claro que el principio de covarianza general implicaba una generalización del principio de relatividad.

2.1.1. El principio de equivalencia débil

Uno de los resultados más importante de la mecánica newtoniana es la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{x} = f. \tag{2.1}$$

Para hacer que la ecuación (2.1) sea independiente del sistema de referencia, introducimos una aceleración que dependa de la posición y la velocidad. Entonces tenemos:

$$m(\ddot{x} - a(x, \dot{x})) = f. \quad (2.2)$$

Donde m es la masa, \ddot{x} es la aceleración y f es la fuerza. En marcos de referencia inerciales, $a = 0$. Ahora, si queremos medir a , considerando el sistema de laboratorio, y que no podemos deshacernos de la gravedad:

$$m(\ddot{x} - a) = f + \mu g, \quad (2.3)$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y μ es la masa gravitacional en reposo de la partícula. Entonces:

$$\ddot{x} = a + \frac{\mu}{m}g + \frac{1}{m}f. \quad (2.4)$$

Resulta que $\frac{f}{m}$ y $a + \frac{\mu}{m}g$ pueden medirse, sin embargo, $\frac{\mu}{m}$ no. El experimento de Eötvös mostró que en una parte en 10^{12} , $\frac{\mu}{m}$ es independiente del material, de donde:

$$\frac{\mu}{m} = 1, \quad (2.5)$$

por lo que sólo $a + g$ puede medirse, y no a y g por separado. Esta aceleración, a , por sí sola, no tiene un significado físico.

Podemos además reformular la segunda ley de Newton si introducimos:

$$\ddot{x} = -\nabla\phi, \quad (2.6)$$

donde el potencial gravitacional ϕ depende del marco de referencia y es una función continua. Entonces:

$$m(\ddot{x} + \nabla\phi) = f. \quad (2.7)$$

Sin embargo, como queremos analizar el movimiento libre, podemos reescribir la ecuación (2.6) de manera geométrica, como:

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{km}\dot{x}^k\dot{x}^m = 0, \quad (2.8)$$

donde:

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = \phi_{,\alpha}, \quad (2.9)$$

y

$$\Gamma^i_{km} = 0, \quad (2.10)$$

de otra manera. O lo que es también:

$$R^\alpha_{0\beta 0} = -\phi_{,\alpha\beta}, \quad (2.11)$$

y,

$$R^i_{kmn} = 0, \quad (2.12)$$

para lo demás. Usando esto, y finalmente relacionando el campo gravitacional con las fuentes que la producen, consideramos la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \quad (2.13)$$

que usando lo anterior se convierte en:

$$R_{00} = -4\pi G\rho. \quad (2.14)$$

De lo anterior vemos una clara relación geométrica para el potencial gravitacional. Necesitamos entonces, para la teoría de gravitación que estamos construyendo una variedad con una conexión. Para que la teoría sea compatible con el electromagnetismo, la dimensión de la variedad debe ser igual o mayor a cuatro y para recuperar la ecuación de onda, la signatura de la métrica debe ser indefinida, como se dijo anteriormente.

2.1.2. El principio de equivalencia fuerte

El principio de equivalencia de Einstein se reduce a establecer que el espaciotiempo es localmente de Minkowski, es decir, localmente inercial; que para cada punto p hay un sistema coordenado donde el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ es exactamente la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ en p . El principio de covarianza general nos dice que las leyes de la física deben poder expresarse en forma tensorial, ya que los tensores se transforman de manera covariante.

Ahora imaginemos que estamos en el espacio y tiramos dos partículas en caída libre. Ambas comienzan a describir trayectorias extrañas, ¿a qué se debe su movimiento? Los campos de Jacobi nos permiten describir cómo y cuán rápido dos geodésicas que comienzan en un mismo punto $p \in \mathcal{M}$, se separan. Los conceptos de geometría diferencial necesarios para trabajar en este capítulo, así como a lo largo de esta tesis, como lo son geodésicas y derivadas covariantes, así como el Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana, entre otros, se encuentran en el anexo de Geometría Diferencial. Definimos primero,

Definición 2.1. Sea $p \in \mathcal{M}$ y $U \subset T_p\mathcal{M}$, un conjunto abierto, entonces $\exp : U \rightarrow \mathcal{M}$,

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v), \quad (2.15)$$

es un mapeo exponencial, diferenciable, que también denotaremos como:

$$\exp_q(v) = \exp(q, v). \quad (2.16)$$

Se tiene que si \exp_p está definido en $v \in T_p\mathcal{M}$ y si $w \in T_v(T_p\mathcal{M})$, entonces

$$(d \exp_p)_v w = \frac{\partial f}{\partial s}(1, 0), \quad (2.17)$$

donde f es una superficie parametrizada por:

$$\begin{aligned} f(t, s) &= \exp_p tv(s), \\ 0 &\leq t \leq 1, \\ -\epsilon &\leq s \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (2.18)$$

y $v(s)$ es una curva en $T_p\mathcal{M}$, con $v(0) = v$ y $v'(0) = w$ [6].

Ahora queremos estudiar el caso un poco más general:

$$(d \exp_p)_{tv} tw = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0), \quad (2.19)$$

a lo largo de la geodésica:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \exp_p(tv), \\ 0 &\leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$\frac{\partial f}{\partial s}$ satisface una ecuación diferencial, de hecho, como γ es una geodésica, para toda (t, s) :

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (2.21)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial s} \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right), \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} - R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t}, \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Si hacemos $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = J(t)$, tenemos que J satisface la ecuación:

$$\frac{D^2 J}{Dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0. \quad (2.23)$$

Que es la ecuación de Jacobi, que relaciona la desviación de las geodésicas con la curvatura. Por lo que ahora tenemos que la aceleración, la gravedad, debe estar relacionado a la curvatura, que es el último ingrediente que nos faltaba para relacionar a la gravitación con la geometría.

Con lo anterior, podemos ver que el campo gravitacional se corresponde a la curvatura de la conexión, sin embargo, asumiremos un principio filosófico que nos ayude a relacionar la conexión, su curvatura y la métrica. Este principio consiste en suponer la unicidad de la realidad, es decir del campo gravitacional, y por ello de la relación entre la conexión y la métrica. Como queremos que la realidad sea única para los observadores, es decir que la curvatura que experimentan sea la misma, y esté relacionada con la métrica, para esta teoría de gravitación suponemos entonces el Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana.

El Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana nos ayuda a delimitar las opciones para la conexión a la conexión de Levi-Civita, y además establece relaciones con la métrica y la conexión, desaparece la torsión y tiene la propiedad de que la derivada covariante de la métrica se anula.

2.2. El principio variacional y las ecuaciones de Einstein

Para obtener las ecuaciones de Einstein usaremos el principio variacional, sugerido por la conservación de la energía. La condición a cumplir es:

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = 0. \quad (2.24)$$

La acción de Einstein-Hilbert viene dada por el escalar de Ricci (R) que es la contracción del tensor de Ricci, que a su vez es la contracción del tensor de curvatura de Riemann, y está relacionada con el determinante de la métrica (g):

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} R d^4x. \quad (2.25)$$

Hacemos la variación sobre esta acción y tenemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \delta \int \sqrt{-g} R d^4x, \\ &= \int d^4x \delta (\sqrt{-g} g^{ab} R_{ab}), \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} + \int d^4x \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab} + \int d^4x \delta \sqrt{-g} R. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Comenzamos por la variación del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
 \delta R_{ab} &= \partial_c \delta \Gamma_{ab}^c - \partial_b \delta \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ba}^d \delta \Gamma_{cd}^c + \Gamma_{cd}^c \delta \Gamma_{ba}^d \\
 &\quad - \Gamma_{ac}^d \delta \Gamma_{bd}^c - \Gamma_{bd}^c \delta \Gamma_{ac}^d \\
 &= (\partial_c \delta \Gamma_{ab}^c + \Gamma_{cd}^c \delta \Gamma_{ba}^d - \Gamma_{ac}^d \delta \Gamma_{bd}^c - \Gamma_{bc}^d \delta \Gamma_{ad}^c) \\
 &\quad - (\partial_b \delta \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ba}^c \delta \Gamma_{ac}^d - \Gamma_{ba}^d \delta \Gamma_{cd}^c - \Gamma_{bc}^d \delta \Gamma_{ad}^c),
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Además recordemos que:

$$\nabla_c \delta \Gamma_{ab}^c = \partial_c \delta \Gamma_{ab}^c + \Gamma_{cd}^c \delta \Gamma_{ba}^d - \Gamma_{ac}^d \delta \Gamma_{bd}^c - \Gamma_{bc}^d \delta \Gamma_{ad}^c, \tag{2.28}$$

de donde:

$$\delta R_{ab} = \nabla_c \delta \Gamma_{ab}^c - \nabla_b \delta \Gamma_{ac}^c, \tag{2.29}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
 \int d^4x \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{ab} (\nabla_c \delta \Gamma_{ab}^c - \nabla_b \delta \Gamma_{ac}^c), \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_c (g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c) - \delta \Gamma_{ab}^c \nabla_c g^{ab}, \\
 &\quad - \nabla_b (g^{ab} \delta \Gamma_{ac}^c) + \delta \Gamma_{ac}^c \nabla_b g^{ab}), \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_c [g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c - g^{ac} \delta \Gamma_{ab}^b]), \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_c J^c.
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Definimos $J^c = g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c - g^{ac} \delta \Gamma_{ab}^b$. Si J^c es un campo vectorial sobre una región \mathcal{M} con frontera Σ , por el teorema de Stokes tenemos:

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{|g|} \nabla_c J^c = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{|h|} n_c J^c, \tag{2.31}$$

donde n_c es el vector normal unitario en la hipersuperficie Σ , con la condición de normalización $n^a n_a = -1$, el tensor $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ es la métrica inducida asociada a la hipersuperficie. Más adelante hablaremos más sobre estos elementos. Tenemos entonces que este término:

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{|h|} n_c J^c = 0. \tag{2.32}$$

Para resolver el término de variación de la métrica necesitamos hacer algunos cálculos previos. Comenzamos recordando que: $g_{ca} g^{ab} = \delta_c^b$, y si buscamos la inversa de la métrica:

$$g^{ab} = \frac{1}{g} (A^{ab})^T = \frac{1}{g} A^{ba}, \tag{2.33}$$

donde g es el determinante y A^{ba} es el cofactor de la métrica g_{ab} . Tenemos además que:

$$g = g_{ab}A^{ab}. \quad (2.34)$$

Si tomamos:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ab}} = A^{ab}, \quad (2.35)$$

y ahora tomamos la variación del determinante:

$$\begin{aligned} \delta g &= \frac{\partial g}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab}, \\ &= A^{ab} \delta g_{ab}, \\ &= g g^{ba} \delta g_{ab}, \\ &= g g^{ab} \delta g_{ab}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Usando lo anterior, podemos obtener:

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g, \\ &= \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{-g}} g^{ab} \delta g_{ab}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ahora debemos encontrar δg_{ab} , para ello tomamos:

$$\begin{aligned} \delta \delta_a^d &= \delta(g_{ac}g^{cd}) = 0, \\ \Rightarrow g^{cd} \delta g_{ac} + g_{ac} \delta g^{cd} &= 0, \\ \Rightarrow g^{cd} \delta g_{ac} &= -g_{ac} \delta g^{cd}, \\ \Rightarrow g_{bd} g^{cd} \delta g_{ac} &= -g_{bd} g_{ac} \delta g^{cd}, \\ \Rightarrow \delta_b^c \delta g_{ac} &= -g_{ac} g_{bd} \delta g^{dc}, \\ \therefore \delta g_{ab} &= -g_{ac} g_{bd} \delta g^{dc}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Sustituyendo en (2.37) entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} g_{ac} g_{bd} \delta g^{dc}, \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta_c^b g_{bd} \delta g^{dc}, \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{cd} \delta g^{dc}, \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{cd} \delta g^{cd}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Renombrando índices tenemos:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab}. \quad (2.40)$$

La ecuación de variación de la acción de Einstein-Hilbert se convierte en:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int d^4x \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab} - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R g_{ab} \delta g^{ab}, \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} [R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R] \delta g^{ab}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Las ecuaciones de Einstein para el vacío son entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{ab}} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0, \quad (2.42)$$

Es decir,

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0. \quad (2.43)$$

Para obtener las ecuaciones de Einstein para el caso en el que hay materia, la acción a considerar es:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} S_{EH} + S_M. \quad (2.44)$$

Donde S_M es la acción para la materia. Tenemos entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = \frac{c^4}{16\pi G} (R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} = 0. \quad (2.45)$$

Definimos el tensor de Energía-Momento como:

$$T_{ab} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}. \quad (2.46)$$

Por lo que las ecuaciones de Einstein para la materia quedan:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}. \quad (2.47)$$

Capítulo 3

Propiedades del espaciotiempo

Una vez que tenemos las ecuaciones de campo de Einstein, podemos adentrarnos en estudiar las propiedades del espaciotiempo, en especial aquellas que tienen que ver con las relaciones causales. Definimos al espaciotiempo:

Definición 3.1. *Un espaciotiempo (\mathcal{M}, g) es el par consistente por una variedad real, cuatro-dimensional, conexa, de clase C^∞ y de Hausdorff, con un campo tensorial C^∞ globalmente definido y de tipo $\binom{0}{2}$ que no es degenerado y de tipo Lorentziano.*

Donde por Lorentziano o hiperbólicamente normal se quiere decir que para cualquier $x \in \mathcal{M}$ hay una base en el espacio tangente $T_x(\mathcal{M})$ relativa a la cual g_x tiene la matriz $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Proposición 3.1. *Todo espacio métrico es de Hausdorff, en particular \mathbb{R}^n es de Hausdorff, para $n \geq 1$.*

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico, y sean $x, y \in X$, con $x \neq y$. Sea $r = d(x, y)$ y sean $U = B(x; r/2)$, $V = B(y; r/2)$ dos bolas de radio $r/2$, con centro en x e y respectivamente. Entonces $x \in U$ e $y \in V$. Se afirma que $U \cap V \neq \emptyset$, si no es así, existe $z \in U \cap V$. Entonces $d(x, z) < r/2$ y $d(z, y) < r/2$, entonces tenemos que $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r/2 + r/2 = r$. Por lo tanto $r < r$, lo cual es una contradicción. Entonces $U \cap V \neq \emptyset$ y X es de Hausdorff. ■

Como una variedad diferencial es localmente como \mathbb{R}^n , tenemos entonces que es de Hausdorff.

Definición 3.2. Definimos a un tensor métrico sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} , al mapeo bilineal y diferenciable que va del producto cartesiano del espacio tangente a la variedad en un punto, $p \in \mathcal{M}$, a los reales:

$$g : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

tal que:

(a) es simétrico, i.e. $g(X, Y) = g(Y, X)$,

(b) es positivo definido, i.e. $g(X, X) \geq 0$ y $g(X, X) = 0 \iff X = 0$

Decimos que un tensor métrico g es de signatura indefinida cuando en lugar de (b) se tiene que:

1. $\exists X \in T_p\mathcal{M}, X \neq 0$ tal que $g(X, X) = 0$

. Un ejemplo de lo anterior es la métrica de Minkowski:

$$\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i, \quad (3.2)$$

Con $\{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, x, y, z\}$.

Una propiedad de las curvas en el espaciotiempo es que para una métrica de tipo Lorentz $(-++\dots+)$, una curva se denomina:

- tipo tiempo, si $g(X, X) < 0$,
- nula, si $g(X, X) = 0$,
- tipo espacio, si $g(X, X) > 0$.

Las definiciones y proposiciones en esta sección están basadas principalmente en [27].

Definición 3.3. Un espaciotiempo es orientable en el tiempo si es posible hacer una elección continua sobre \mathcal{M} de una componente del conjunto de vectores tipo tiempo en cada punto de \mathcal{M} .

Llamamos *camino* a un mapeo continuo $\mu : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ donde Σ es un subconjunto conexo de \mathbb{R} que contiene más de un punto. Si μ es suave, con derivada $d\mu$ de clase C^∞ que no se hace cero, se denomina un camino suave. Una *curva* es la imagen de dicho mapeo.

Definición 3.4. *Un camino es de tipo tiempo si su vector tangente es de tipo tiempo en cada punto. De la misma manera el camino está orientado al futuro si su vector tangente apunta al futuro en cada punto.*

Una *curva tipo tiempo* es una curva definida por un camino suave de tipo tiempo. La orientación temporal de \mathcal{M} le asigna una orientación canónica a todas las curvas de tipo tiempo.

3.1. Causalidad y cronología

Sean $\mathcal{P}, \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$,

Definición 3.5. *El futuro cronológico $I^+(\mathcal{P}, \mathcal{U})$ de \mathcal{P} relativo a \mathcal{U} se define como el conjunto de puntos en \mathcal{U} que pueden alcanzarse desde \mathcal{P} por una curva tipo tiempo dirigida al futuro en \mathcal{U} .*

Escribiremos $I^+(\mathcal{P}, \mathcal{M})$ simplemente como $I^+(\mathcal{P})$ y denota al conjunto abierto que, si $p \in \mathcal{M}$ puede alcanzarse por una curva tipo tiempo desde \mathcal{P} dirigida al futuro, también hay una vecindad pequeña de p que puede ser alcanzada desde \mathcal{P} . Si reemplazamos *futuro* por *pasado*, usaremos en lugar de $+$, $-$.

El futuro causal de \mathcal{P} relativo a \mathcal{U} lo denotaremos con $J^+(\mathcal{P}, \mathcal{U})$ y está definido como la unión de $\mathcal{P} \cap \mathcal{U}$ con el conjunto de todos los puntos de \mathcal{U} que puedan alcanzarse desde \mathcal{P} por una curva dirigida al futuro de tipo no-espacio en \mathcal{U} .

Si \mathcal{U} es un conjunto abierto y $p, q, r \in \mathcal{U}$ entonces o bien:

$$q \in J^+(p, \mathcal{U}), r \in I^+(q, \mathcal{U}) \Rightarrow r \in I^+(p, \mathcal{U}), \quad (3.3)$$

o

$$q \in I^+(p, \mathcal{U}), r \in J^+(q, \mathcal{U}) \Rightarrow r \in I^+(p, \mathcal{U}). \quad (3.4)$$

Esto quiere decir que la cerradura del futuro cronológico de p y la frontera del futuro cronológico de p son iguales a la cerradura y la frontera del futuro causal de p respectivamente, es decir:

$$\begin{aligned} \overline{I^+(p, \mathcal{U})} &= \overline{J^+(p, \mathcal{U})}, \\ \partial I^+(p, \mathcal{U}) &= \partial J^+(p, \mathcal{U}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donde, para un conjunto \mathcal{K} cualquiera:

$$\partial \mathcal{K} = \overline{K} \cap (\overline{\mathcal{M} - \mathcal{K}}). \quad (3.6)$$

Definición 3.6. El futuro horismos de \mathcal{P} relativo a \mathcal{U} , denotado por $E^+(\mathcal{P}, \mathcal{U})$, se define como:

$$E^+(\mathcal{P}, \mathcal{U}) = J^+(\mathcal{P}, \mathcal{U}) - I^+(\mathcal{P}, \mathcal{U}). \quad (3.7)$$

Los puntos en el futuro horismos están en las geodésicas nulas dirigidas al futuro que van desde \mathcal{P} a \mathcal{U} , que también forma la frontera en \mathcal{U} , de ambos el futuro causal y el futuro cronológico: $\partial J^+(\mathcal{P}, \mathcal{U})$ y $\partial I^+(\mathcal{P}, \mathcal{U})$.

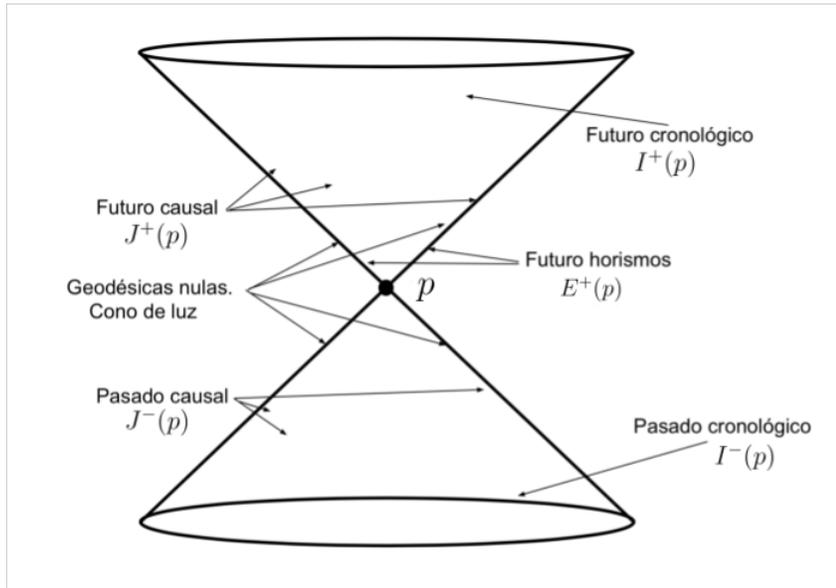


Figura 3.1: Cono de luz con futuro y pasado cronológico, futuro y pasado causal señalado.

Definición 3.7. Para definir el punto final de un camino μ , o de su curva asociada, sea Σ el dominio de μ y sean $a = \inf \Sigma$ y $b = \sup \Sigma$. Cabe la posibilidad de que $a = -\infty$ y $b = \infty$. Entonces, $x \in \mathcal{M}$ es un punto final si para todas las sucesiones $\{u_i\} \in \Sigma$, $u_i \rightarrow a$ implica $\mu(u_i) \rightarrow x$ o bien, $u_i \rightarrow b$ implica $\mu(u_i) \rightarrow x$.

Si μ es de tipo tiempo, o causal, y orientado al futuro, en el primer caso, x es un punto final pasado y en el segundo caso, es un punto final futuro. Requeriremos que todas las curvas tipo tiempo o causales contengan sus puntos finales.

Una curva tipo tiempo sin punto final futuro debe extenderse indefinidamente hacia el futuro. Similarmente una curva que no tenga un punto final pasado debe extenderse indefinidamente hacia el pasado.

Definición 3.8. *Un viaje es una curva que es una geodésica de tipo tiempo, que está orientada al futuro por partes. Un viaje de x a y es un viaje con punto final pasado x y punto final futuro y .*

Escribimos x cronológicamente precede a y , $x \ll y$ si y sólo si existe un viaje de x a y . Entonces la relación $x \ll y$ establece la existencia de los puntos x_0, x_1, \dots, x_n , con $n \geq 1$, entre x y y .

Un *viaje causal* se define de la misma manera que un viaje, sólo que se reemplazan las geodésicas de tipo tiempo con geodésicas causales. Se escribe x precede causalmente a y , $x \prec y$ si y sólo si hay un viaje causal de x a y . Pueden darse los casos en los que suceda $x \prec x$, lo que implicaría una geodésica causal degenerada. Sin embargo $x \ll x$ implicaría un viaje cerrado en \mathcal{M} , es decir, un viaje en el que los puntos finales pasados y futuros son idénticos. Un viaje cerrado causal no degenerado sería aquel en el que para dos puntos $x \neq y$, sucediera $x \prec y, y \prec x$. Sobre este tipo de viajes se hablará más adelante.

Proposición 3.2. $a \ll b \Rightarrow a \prec b$,

Demostración. Sean $a, b \in \mathcal{U}$, y $b \in I^+(a, \mathcal{U})$. Teníamos que:

$$\overline{I^+}(a, \mathcal{U}) = \overline{J^+}(a, \mathcal{U}), \quad (3.8)$$

Además, si $b \in I^+(a, \mathcal{U})$, $b \in \overline{I^+}(a, \mathcal{U})$, por lo que $b \in \overline{J^+}(a, \mathcal{U})$.

Si $b \in \overline{J^+}(a, \mathcal{U})$, $b \in J^+(a, \mathcal{U})$ o b es un punto límite de $J^+(a, \mathcal{U})$. Además, si existe un viaje de tipo tiempo de x a y , existe un viaje causal de x a y . ■

Proposición 3.3. $a \ll b, b \ll c \Rightarrow a \ll c$,

Demostración. Como $a \ll b$, $b \in I^+(a, \mathcal{U})$ y $b \ll c$, $c \in I^+(b, \mathcal{U})$, pero $I^+(b, \mathcal{U}) \subset I^+(a, \mathcal{U})$ así que:

$$c \in I^+(b, \mathcal{U}) \subset I^+(a, \mathcal{U}), \quad (3.9)$$

Entonces $c \in I^+(a, \mathcal{U})$, de donde $a \ll c$. ■

Proposición 3.4. $a \prec b, b \prec c \Rightarrow a \prec c$,

Demostración. Debido a que $a \ll b \Rightarrow a \prec b$ y al resultado anterior, la demostración es inmediata. ■

De acuerdo a un punto x , el futuro cronológico de un conjunto S , $I^+(S)$ se define como:

$$I^+(S) = \bigcup_{x \in S} I^+(x), \quad (3.10)$$

así como el futuro causal:

$$J^+(S) = \bigcup_{x \in S} J^+(x), \quad (3.11)$$

análogamente para el pasado cronológico y causal. El futuro horismos se denota como aquel en el que $a \prec b$ pero no sucede que $a \ll b$, y se escribe $a \rightarrow b$.

Definición 3.9. γ es una curva causal si y sólo si para todos $a, b \in \gamma$, y para cada conjunto abierto Q que contenga una porción de γ que vaya de a a b , hay un viaje causal de a a b , o de b a a , contenido totalmente en Q .

3.2. Propiedades de los pasados y futuros

Llamaremos *futuro* al conjunto $F = I^+(\mathcal{U})$ para algún $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Un futuro tiene la propiedad de que si $x \in F$ y $x \ll y$ entonces $y \in F$. Como $I^+(\mathcal{U})$ es abierto, F es abierto. De manera análoga, el *pasado* será el conjunto $P = I^-(\mathcal{U})$ para $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Tanto P como F tienen la propiedad de que: $F = I^+(F)$ y $P = I^-(P)$.

Proposición 3.5. Si F es un conjunto futuro, la cerradura de F se define como:

$$\overline{F} = \{x | I^+(x) \subset F\}. \quad (3.12)$$

Demostración. Sea $I^+(x) \subset F$. Cualquier viaje desde x contiene puntos arbitrariamente cercanos a x en F , entonces $x \in \overline{F}$. Ahora sea $x \in \overline{F}$ y $y \in I^+(x)$ tal que $x \in I^-(y)$. Pero $I^-(y)$ es abierto, entonces contiene algún punto $z \in F$, entonces $z \ll y$, de donde $y \in F$. ■

Como en un conjunto abierto tenemos que $\text{int}Q = Q$, $Q = I^+(Q)$, de donde las siguientes dos proposiciones se siguen inmediatamente:

Proposición 3.6. La unión de conjuntos futuros es un conjunto futuro.

$$\bigcup_i I^+(S_i) = I^+\left(\bigcup_i S_i\right). \quad (3.13)$$

Proposición 3.7. *La intersección de dos conjuntos futuros es un conjunto futuro.*

Definición 3.10. *Un conjunto $S \subset \mathcal{M}$ es acronal si para cualesquiera dos puntos en S , ninguno está cronológicamente relacionado.*

Definición 3.11. *A un conjunto $B \subset \mathcal{M}$ se le llama frontera acronal si es la frontera de un conjunto futuro, es decir, $B = \partial I^+(S)$. Claramente cualesquiera dos puntos en la frontera de un conjunto futuro F no pueden estar relacionados cronológicamente:*

$$I^+(\overline{F}) \cap \partial F = \emptyset. \quad (3.14)$$

Una frontera acronal es un conjunto acronal.

3.3. Condiciones de causalidad

Ya se mencionó la posibilidad de que un espaciotiempo poseyera viajes cerrados ($x \ll x$) o viajes causales cerrados ($x \prec y, y \prec x, x \neq y$). Normalmente la existencia de espaciotiempos que permiten la existencia de estos fenómenos se desechan bajo el argumento de que resultan incoherentes con la realidad física. Sin embargo la Teoría de la Relatividad no prohíbe su existencia. Es importante conocer entonces cuáles son las condiciones de causalidad a las que nos gustaría que un espaciotiempo estuviera sujeto.

Definición 3.12. *(Distinción de Futuro) Un espaciotiempo \mathcal{M} distingue el futuro en $p \in \mathcal{M}$ si y sólo si $I^+(p) \neq I^+(q)$ para cada $q \in \mathcal{M}$ con $q \neq p$. \mathcal{M} es futuro distintivo si y sólo si distingue el futuro en cada punto.*

La definición de distinción de pasado es análoga. Ahora, tenemos que:

Proposición 3.8. *Si $p \prec q$, $I^+(q) \subset I^+(p)$.*

Demostración. Tenemos que si $p \prec q$, $q \in J^+(p)$, ahora si para cualquier $a \in \mathcal{M}$, que $q \ll a$, es decir, $\forall a \in I^+(q)$, teníamos anteriormente que, $p \ll a$, es decir $a \in I^+(p)$, de donde $I^+(q) \subset I^+(p)$. ■

Esto nos dice que si $p \prec q$ y $q \prec p$, $I^+(p) = I^+(q)$. Por lo que un espaciotiempo que contenga viajes causales cerrados no puede distinguir entre futuro o pasado.

Definición 3.13. *Un conjunto abierto $Q \subset \mathcal{M}$ es causalmente convexo si y sólo si Q no interseca a ningún viaje en un conjunto desconexo. Equivalentemente si y sólo si, para todo $x, y \in Q$ $x \ll z \ll y$, implica $z \in Q$.*

Diremos que se cumple la condición de causalidad si no hay curvas cerradas tipo no-espacio.

Definición 3.14. *El conjunto de puntos en el que la condición de causalidad no se cumple es la unión disconexa de conjuntos de la forma $J^+(p) \cap J^-(p)$, $p \in \mathcal{M}$.*

Sea $p \in \mathcal{M}$, se dice que \mathcal{M} es fuertemente causal en p , si y sólo si tiene vecindades causalmente convexas arbitrariamente pequeñas. La condición fuerte de causalidad se cumple en p si cualquier vecindad de p contiene una vecindad de P que ninguna curva tipo no-espacio intersecta más de una vez. El espacio-tiempo \mathcal{M} es fuertemente causal, o cumple la condición fuerte de causalidad, si y sólo si es fuertemente causal en cada punto.

Definición 3.15. *Sea Q un subconjunto abierto de \mathcal{M} y $x, y \in Q$. Escribimos $x \ll_Q y$ si y sólo si existe un viaje en Q de x a y y $x \prec_Q y$ si y sólo si existe un viaje causal en Q de x a y . Definimos:*

$$\langle x, y \rangle_Q = \{z \mid x \ll_Q z \ll_Q y\}, \quad (3.15)$$

y escribimos

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (3.16)$$

de manera que:

$$\langle x, y \rangle = I^+(x) \cap I^-(y), \quad (3.17)$$

Definimos una vecindad localmente causal como sigue:

Definición 3.16. *Una vecindad localmente causal es un conjunto abierto, causalmente convexo, cuya cerradura está contenida en una región en \mathcal{M} .*

Proposición 3.9. *\mathcal{M} es fuertemente causal en p si y sólo si p está contenido en alguna vecindad localmente causal.*

Demostración. Para la primera parte de la prueba suponemos que \mathcal{M} es fuertemente causal en p . Elegimos una región, $p \in \mathcal{N}$ y un conjunto abierto $p \in Q \subset \mathcal{N}$. Un conjunto abierto causalmente convexo que contiene a p existe en Q y es una vecindad localmente causal.

Para el regreso, sea p en una vecindad localmente causal L , de una región \mathcal{N} . Podemos encontrar conjuntos $\langle u, v \rangle_{\mathcal{N}} \subset L$ arbitrariamente pequeños que contengan a p . Si un viaje $\gamma \in \mathcal{M}$ intersecta a $\langle u, v \rangle_{\mathcal{N}}$ en un conjunto disconexo, $\gamma \notin \mathcal{N}$, entonces $\langle u, v \rangle_{\mathcal{N}}$ es causalmente convexo. Entonces \mathcal{M} es fuertemente causal. ■

Proposición 3.10. *Si \mathcal{M} es fuertemente causal en p , entonces \mathcal{M} distingue el futuro, (y el pasado) en p .*

Demostración. Supongamos que $I^+(p) = I^+(q)$ para algún $p \neq q$. Sean $p \in P$ y $q \in Q$, disjuntos y abiertos. Elijamos $x \in I^+(p) \cap P$, entonces $q \ll x$. Ahora, sea $y \in Q$ tal que $q \ll y \ll x$ entonces $p \ll y$. Entonces hay un viaje desde p a x vía $y \notin P$ que intersecta a P en un conjunto disconexo. Entonces falla la causalidad en p . ■

Definición 3.17. *Un punto $p \in \mathcal{M}$ por el que pasa un viaje cerrado se denomina viciado. Al conjunto de todos los puntos viciados se le denota por V . Tenemos:*

$$V = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \langle x, x \rangle. \quad (3.18)$$

Proposición 3.11. *Si $\langle x, x \rangle \cap \langle y, y \rangle \neq \emptyset$, entonces, $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle$. Entonces V es la unión de conjuntos disconexos de la forma $\langle x, x \rangle$.*

Demostración. Sea $z \in \langle x, x \rangle \cap \langle y, y \rangle$, entonces si $w \in \langle y, y \rangle$, tenemos que $x \ll z \ll y \ll w \ll y \ll z \ll x$, de donde $w \in \langle x, x \rangle$. Entonces $\langle y, y \rangle \subset \langle x, x \rangle$.

De igual manera, sea $w \in \langle x, x \rangle$ entonces tenemos: $x \ll w \ll y \ll z \ll y \ll w \ll x$ que por definición es: $w \in \langle x, x \rangle \cap \langle y, y \rangle$, que implica $w \in \langle y, y \rangle$, lo que muestra $\langle x, x \rangle \subset \langle y, y \rangle$. ■

Proposición 3.12. $\partial V = \bigcup_{x \in V} \partial \langle x, x \rangle$

Demostración. Como $\langle x, x \rangle$ son abiertos, V es abierto, como $\langle x, x \rangle$ son disconexos, lo es también V . ■

Proposición 3.13. *La causalidad fuerte falla en cada punto de ∂V .*

Demostración. Se sigue de su definición. ■

3.4. Hiperbolicidad global

Un conjunto \mathcal{N} es globalmente hiperbólico si cumple la condición fuerte de causalidad y si para cualesquiera dos puntos, $p, q \in \mathcal{N}$, $J^+(p) \cap J^-(q)$ es compacto y está contenido en \mathcal{N} . Puede pensarse que se requiere que $J^+(p) \cap J^-(q)$ no contenga puntos en el infinito o en alguna singularidad del espaciotiempo.

3.4.1. Dominios de dependencia

Definición 3.18. Sea \mathcal{S} un subconjunto acronal de \mathcal{M} .

- $D^+(\mathcal{S}) = \{x \mid \text{todo viaje pasado no final que contiene a } x \text{ llega a } \mathcal{S}\},$
- $D^-(\mathcal{S}) = \{x \mid \text{todo viaje futuro no final que contiene a } x \text{ llega a } \mathcal{S}\},$
- $D(\mathcal{S}) = \{x \mid \text{todo viaje no final que contiene a } x \text{ llega a } \mathcal{S}\}.$

Definición 3.19. El horizonte de Cauchy de un subconjunto cerrado \mathcal{S} se define como:

- $H^+(\mathcal{S}) = \{x \mid x \in D^+(\mathcal{S}), I^+(x) \cap D^+\mathcal{S} = \emptyset\},$
- $H^-(\mathcal{S}) = \{x \mid x \in D^-(\mathcal{S}), I^-(x) \cap D^-\mathcal{S} = \emptyset\},$
- $H(\mathcal{S}) = H^+(\mathcal{S}) \cup H^-(\mathcal{S}).$

3.4.2. Jerarquía causal

Ahora que hemos estudiado las propiedades causales del espaciotiempo, podemos clasificarlos según una jerarquía de acuerdo a las condiciones de causalidad, que ordenamos de la más débil a la más fuerte:

1. No totalmente viciosa: Para algunos puntos $p \in \mathcal{M}$ se tiene que $p \not\prec p$.
2. Cronológica: No existen curvas cerradas tipo tiempo. La relación cronológica es irreflexiva: $p \not\prec p, \forall p \in \mathcal{M}$.
3. Causal: No hay curvas cerradas causales. Sean $p, q \in \mathcal{M}$, si $q \prec p$ y $p \prec q$, entonces $p = q$.
4. Distinguible:
 - Pasado distinguible: Si el pasado cronológico de $p, q \in \mathcal{M}$ es el mismo, entonces son el mismo punto, $I^-(p) = I^-(q)$ entonces $p = q$.
 - Futuro distinguible: Si el futuro cronológico de $p, q \in \mathcal{M}$ es el mismo, entonces son el mismo punto, $I^+(p) = I^+(q)$ entonces $p = q$.
5. Fuertemente Causal: Para cualquier $p \in \mathcal{M}$ existe una vecindad U de p donde existe una curva de tipo no-tiempo que atraviesa U más de una vez.

6. Establemente Causal: Una variedad la cual cumpla con las condiciones de causalidad más débiles mencionadas anteriormente que no contendrá curvas cerradas causales por medio de pequeñas perturbaciones arbitrarias de la métrica.
7. Globalmente hiperbólico: Como vimos anteriormente, esta condición es la más fuerte de todas. Un espaciotiempo es globalmente hiperbólico si para todo conjunto $J^+(p) \cap J^-(q)$, para $p, q \in \mathcal{M}$, es compacto.

3.5. La Métrica de Gödel

La métrica de Kurt Gödel es una solución a las ecuaciones de campo de Einstein, que proponen un *espacio-tiempo* homogéneo, con materia que se comporta como polvo; sin presión, en rotación y en la que existen curvas cerradas de tipo tiempo. La solución de Gödel a las EFE (Einstein Field Equations) es la variedad \mathbb{R}^4 , con una métrica que puede escribirse en coordenadas (t, x, y, z) . En esta solución, el tensor de energía-momento, está dado por: $T_{ab} = \rho u_a u_b$, donde ρ es la densidad de materia y u_a es el cuadri-vector unitario de la velocidad.

La métrica como fue originalmente escrita por Gödel tiene la forma:

$$ds^2 = a^2(dx_0^2 - dx_1^2 + \frac{e^{2x_1}}{2}dx_2^2 - dx_3^2 + 2e^{x_1}dx_0dx_2). \quad (3.19)$$

Donde $a > 0$ es una constante. Ahora, la matriz g_{ab} y su inversa, están dadas por:

$$g_{ab} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{x_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e^{x_1} & 0 & \frac{1}{2}e^{2x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

y

$$g^{ab} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2e^{-x_1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2e^{-x_1} & 0 & -2e^{-2x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Con el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} e^{x_1} &= \cosh(2r) + \cos(\phi) \sinh(2r), \\ x_2 e^{x_1} &= \sqrt{2} \sin(\phi) \sinh(2r), \\ \tan\left(\frac{\phi}{2} + \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right) &= \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) e^{-2r}, \\ y &= 2x_3. \end{aligned}$$

Donde $r \geq 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. La métrica, la métrica puede reescribirse como:

$$ds^2 = 4a^2(dt^2 - dr^2 - dy^2 + (\sinh^4(r) - \sinh^2(r))d\phi^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2(r)d\phi dt). \quad (3.22)$$

Donde queda de manifiesto la simetría rotacional de la métrica alrededor del eje $r = 0$.

Para demostrar que que el espaciotiempo (\mathbb{R}^4, g) es solución a las EFE con un universo lleno de materia que se comporta como polvo, con densidad $\rho = \frac{1}{8\pi G a^2}$, y constante cosmológica $\Lambda = -\frac{1}{a^2}$, completamos el cuadrado de la métrica:

$$ds^2 = a^2\left((dx_0 + \frac{1}{2}e^{x_1} dx_2)^2 - dx_1^2 - \frac{1}{2}e^{2x_1} dx_2^2 - dx_3^2\right). \quad (3.23)$$

Utilizando Mathematica realizamos el cálculo de los símbolos de Christoffel, que se reduce tan sólo a:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= 1, \\ \Gamma_{12}^0 &= \frac{1}{2}e^{x_1} = \Gamma_{02}^1, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}e^{2x_1}, \\ \Gamma_{01}^2 &= -e^{-x_1}. \end{aligned}$$

Esto es posible ya que los demás símbolos de Christoffel son cero, y, $\frac{\partial}{\partial x^a} = 0$, excepto si $a = 1$. De hecho, de igual manera podemos calcular el tensor de Ricci para los coeficientes diferentes de cero:

$$\begin{aligned} R_{00} &= 1, \\ R_{02} &= e^{x_1} = R_{20}, \\ R_{22} &= e^{2x_1}. \end{aligned}$$

Con el vector $u^a = (\frac{1}{a}, 0, 0, 0)$, tal que $u_a = (a, 0, ae^{x_1}, 0)$. Tendremos entonces $R_{ab} = \frac{1}{a^2}u_a u_b$. Y el escalar de Ricci:

$$R = \frac{1}{a^2}u^a u_a = \frac{1}{a^2}.$$

Con lo que el tensor de Einstein es:

$$\begin{aligned} G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{1}{a^2}u_a u_b - \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}g_{ab}, \\ &= 8\pi G\rho u_a u_b + \Lambda g_{ab}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Que es la ecuación de Einstein para un universo con materia como la que describe la métrica de Gödel, con densidad ρ . Por lo que la métrica de Gödel es solución a las EFE.

Las partículas en este universo tienen un vector velocidad $u^b = (\frac{1}{a}, 0, 0, 0)$, por lo que viajan a través de las líneas x_0 , de las coordenadas originales, a una velocidad constante.

El espaciotiempo tiene simetría rotacional, y es orientable en el tiempo, a pesar de que tiene curvas tipo tiempo cerradas, por lo que no existe una coordenada temporal global. El espaciotiempo de Gödel es una solución a las ecuaciones de campo libre de singularidades, sin embargo no es globalmente hiperbólico.

El espaciotiempo compuesto por la métrica de Gödel (\mathcal{M}, g) puede escribirse como la suma directa de las variedades $(\mathcal{M}_1, g_1) = \mathbb{R}^3$ y $(\mathcal{M}_2, g_2) = \mathbb{R}$. De hecho:

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= a^2(dx_0^2 - dx_1^2 + \frac{e^{2x_1}}{2}dx_2^2 + 2e^{x_1}dx_0dx_2), \\ ds_2^2 &= a^2dx_3^2. \end{aligned}$$

Como la componente de \mathcal{M}_2 es plana, puede ser descartada, y tan sólo nos enfocaremos en el estudio de \mathcal{M}_1 , la cual, si suprimimos la componente x_3 , podremos visualizar en un espacio tridimensional. El comportamiento de (\mathcal{M}_1, g_1) con x_3 suprimida se presenta en la figura 3.2.

Usando lo anterior puede descomponerse la métrica de Gödel. El vector de cambio, el lapso y el vector unitario normal serían:

$$\begin{aligned} \beta^a &= (0, e^{x_1}, 0), \\ \alpha &= 1, \\ n^\mu &= (-1, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (3.25)$$

La curvatura extrínseca:

$$K_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}e^{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

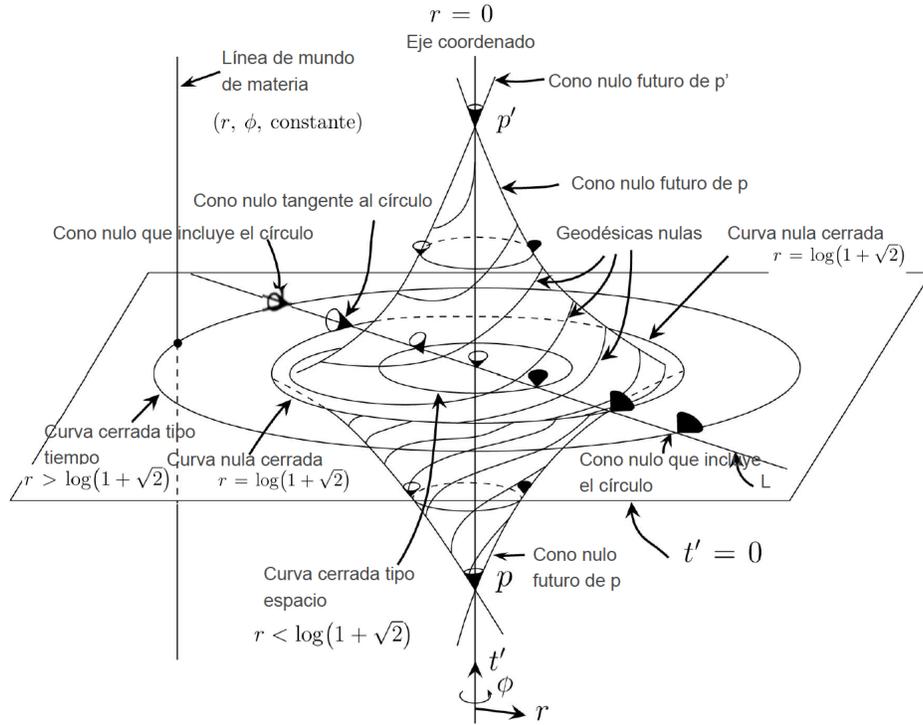


Figura 3.2: El diagrama representa la simetría rotacional alrededor del eje $r = 0$, y la invarianza en el tiempo. El cono de luz se abre y se vuelca conforme r aumenta (línea L), lo que resulta en curvas cerradas tipo tiempo. El diagrama no representa correctamente el hecho de que todos los puntos son equivalentes.

y

$$K^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{-x_1}}{a^4} & 0 \\ 0 & -\frac{e^{-x_1}}{a^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

La traza, claramente es:

$$K = 0, \quad (3.28)$$

Por lo que:

$$K_{ab}K^{ab} = -\frac{1}{a^4}. \quad (3.29)$$

Cono de luz, donde las curvas nulas son paralelas al horizonte óptico.

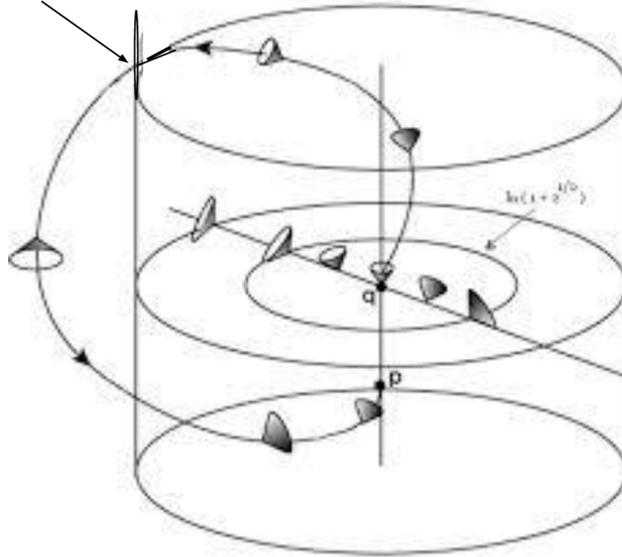


Figura 3.3: El diagrama representa una curva cerrada tipo tiempo que atraviesa el horizonte de Gödel, donde los rayos de luz no pueden pasar y en el que el objeto se ve al menos dos veces, cuando sale de él, en el futuro, y cuando vuelve a entrar en el pasado.

De donde podemos calcular la ecuación de restricción Hamiltoniana, ya que:

$$n^a n^b u_a u_b \rho = \frac{1}{8a^4 \pi G}. \quad (3.30)$$

Entonces la ecuación de restricción Hamiltoniana queda:

$$\begin{aligned} r - K_{ab} K^{ab} &= \frac{1}{8\pi G}, \\ r + \frac{1}{a^4} &= \frac{1}{8a^4 \pi G}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Si calculamos el escalar de Ricci, tanto para la métrica espacial como para la métrica de Gödel del espaciotiempo es el mismo:

$$r = \frac{1}{a^2} = R. \quad (3.32)$$

De donde;

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} &= \frac{1}{8a^4\pi G}, \\ 1 + a^2 &= \frac{1}{8\pi G}, \\ a^2 &= \frac{1}{8\pi G} - 1.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Ahora si tomamos la curvatura extrínseca para calcular la ecuación de restricción de momento, debemos calcular primero los símbolos de Christoffel con los índices arriba, es decir:

$$\Gamma^{ab}_{\ c} = \Gamma^a_{\ dc} g^{db}.\tag{3.34}$$

Los símbolos diferentes de cero son:

$$\begin{aligned}-\Gamma^{01}_{\ 0} &= \frac{1}{a^2} = \Gamma^{10}_{\ 0}, \\ -\Gamma^{01}_{\ 2} &= \frac{e^{x_1}}{2a^2} = \Gamma^{10}_{\ 2}, \\ -\Gamma^{21}_{\ 0} &= -\frac{e^{-x_1}}{a^2} = \Gamma^{12}_{\ 0}; \\ \Gamma^{02}_{\ 1} &= \frac{e^{-x_1}}{a^2} = \Gamma^{20}_{\ 1} \\ \Gamma^{22}_{\ 1} &= -2\frac{e^{2x_1}}{a^2}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Con lo que podemos calcular:

$$D^b K_{ab} = \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2}, 0, \frac{e^{x_1}}{a^2}, 0 \right).\tag{3.36}$$

Y si calculamos por otro lado:

$$-h^b_a n^c u_b u_{c\rho} = \frac{1}{8\pi G} \left(\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} \right), 0, \frac{e^{x_1}}{a^2}, 0 \right).\tag{3.37}$$

De donde la ecuación de restricción de momento resulta:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2}, 0, \frac{e^{x_1}}{a^2}, 0 \right) &= \frac{1}{8\pi G} \left(\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} \right), 0, \frac{e^{x_1}}{a^2}, 0 \right), \\ D^b K_{ab} &= \frac{1}{8\pi G} D^b K_{ab}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

3.5.1. Análisis de las ecuaciones de restricción para la métrica de Gödel

En el caso de la ecuación de restricción Hamiltoniana (3.33), teniendo en cuenta el valor de G puede estimarse un valor para $a = 24416,7$. En el caso de la ecuación de restricción de momento (3.38), tenemos que la parte izquierda es igual a sí mismo multiplicado por una constante, lo cual es una contradicción. Las contradicciones que surgen al manipular el espaciotiempo de Gödel con el formalismo $3 + 1$ se deben a la suposición de que puede foliarse en hipersuperficies, es decir, que es globalmente hiperbólico; por lo que la obtención de ecuaciones contradictorias es, a su vez, una prueba de su no hiperbolicidad, y con ello, de la existencia de curvas temporales cerradas, en dicho espaciotiempo.

El espaciotiempo de Gödel sirve como evidencia de que la teoría de la relatividad de Einstein permite la existencia de soluciones que violen la cronología, sin embargo, al violar la cronología surgen problemas en la causalidad de los eventos que tienen lugar dentro del universo. A estos problemas se les conoce como paradojas, y serán el objeto de estudio del siguiente capítulo de esta tesis.

Capítulo 4

Violación de la cronología

El viaje en el tiempo siempre ha sido un punto de gran interés en el imaginario popular y la ciencia ficción. El tratamiento Newtoniano del espacio y el tiempo imponía a este último como una restricción inmutable del marco de referencia universal en el que todo el movimiento sucedía. La naturaleza del tiempo, que fungía más bien como un muro, del que una vez que se ha pasado no se puede volver atrás, no permitía pensar en el viaje en el tiempo como lo concebimos hoy. Sin embargo con la introducción de la relatividad especial y la modificación de los conceptos de espacio y tiempo todo cambió.

Las transformaciones Galileanas:

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\t' &= t,\end{aligned}\tag{4.1}$$

en las que el tiempo queda invariante, fueron sustituidas por las transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\tag{4.3}$$

El tratamiento del espacio y el tiempo permitía la deformación de este último dependiendo del movimiento y la velocidad. Además la unificación del espacio y el tiempo en *espaciotiempo* nos obliga a tratar al tiempo como una dimensión más; es decir como tratamos a las dimensiones espaciales. Si en el espacio podemos retroceder así como avanzar, ¿por qué no en el tiempo?

Sin embargo, con el viaje en el tiempo surgen problemas que podrían denominarse paradójicos. Uno de los más conocidos es la *Paradoja del abuelo*:

un hombre viaja al pasado para asesinar a su abuelo antes de que conozca a su abuela, impidiendo su nacimiento, y con ello su viaje en el tiempo y el asesinato de su abuelo, por lo que su nacimiento sucede y viaja en el tiempo a matar a su abuelo; así *ad infinitum*.

Para evitar que sucedan este tipo de cosas tendría que pasar algo que impidiera que aquel hombre matara a su abuelo, o existir varias líneas temporales; una en la que nunca nació y él tan sólo puede afectar esa línea temporal. Otra opción sería la existencia de un principio que preservara la causalidad, para evitar la modificación de la propia línea temporal. O la imposibilidad concreta del viaje en el tiempo por razones físicas.

Como un regalo de cumpleaños, Kurt Gödel le obsequió a Einstein una solución a sus ecuaciones de campo que permitía la existencia de curvas cerradas tipo tiempo; es decir, el viaje en el tiempo; la distinción entre pasado y futuro se deshacía en ella. La gran noticia; la teoría de la Relatividad General no prohíbe la violación de la cronología.

Sin embargo Einstein ante esa situación dijo que quizá, aunque su teoría no descartaba matemáticamente ese tipo de soluciones, había que descartarlas por razones físicas:

Dichas soluciones cosmológicas [que permiten el viaje en el tiempo] de las ecuaciones gravitacionales (con la constante Λ) han sido descubiertas por el Sr. Gödel. Sería interesante considerar si deben o no ser excluidas bajo argumentos físicos. (Einstein 1949b p.688)

¿Podrían las paradojas que suscita el viaje en el tiempo, como la del abuelo, mostrar que éste no es físicamente posible? No, al menos si físicamente posible significa compatible con las ecuaciones de campo de Einstein y las condiciones de energía, ya que hay modelos que satisfacen ambas condiciones y contienen curvas cerradas tipo tiempo. Hablar de que sean físicamente "realistas" tampoco resulta relevante, ya que ese término se ha visto revolucionado en los últimos tiempos tanto por la misma Relatividad como por la Mecánica Cuántica.

Las paradojas del viaje en el tiempo no son un signo de que la existencia de las curvas cerradas tipo tiempo deban ser descartadas por razones físicas, o por mostrar que el viaje en el tiempo es conceptual o físicamente imposible, sino que son una manera de señalar que la información local de los espaciotiempos con curvas cerradas tipo tiempo está constreñida de maneras que no nos resultan familiares.

Una paradoja como tal, es una demostración de que una contradicción o absurdo son consecuencia o se siguen de hipótesis o premisas razonables

o verdaderas. Muchas paradojas involucran razonamientos circulares, contradicciones o inconsistencias; para tales casos se usan también simplemente los términos “contradicción.” “inconsistente”.

Otra paradoja sería la de un hombre que construye una máquina del tiempo para viajar al pasado y matar a su *yo* más joven, cometiendo suicidio. Se puede argumentar que la naturaleza interpondría ciertas condiciones para evitar este resultado e impedir que sucediera una paradoja; por ejemplo, que al salir de la máquina del tiempo, el hombre le disparara a su versión más joven en el ojo, haciendo que al éste viajar en el tiempo tuviera mala puntería y se disparara en el ojo, impidiendo el suicidio.

Existe otra alternativa para solucionar las paradojas que ocurren al viajar en el tiempo, y fue propuesta por Wheeler y Feynman[3]. Consiste en argumentar que el hecho de que la naturaleza sea continua permite evadir las paradojas, justificando la influencia causal de los eventos futuros en los pasados. Tomemos el caso, por ejemplo, del negativo de una fotografía en blanco y negro que sale de una máquina del tiempo, al que se le toma una foto. Ahora tomamos el negativo de la fotografía que se le tomó y lo hacemos viajar en el tiempo justo al momento en el que se tomó la fotografía. Esto crearía una paradoja, ya que el negativo inicial y éste, por la naturaleza de los negativos, tendrían la escala de grises opuesta.

Sin embargo esto sólo sucedería si los negativos pudieran moverse solamente entre dos escalas de grises, es decir si fueran tan sólo funciones discretas de 0 y 1. Si, al contrario, como sucede en la realidad los negativos pueden moverse entre una gama de grises, es decir son funciones continuas del intervalo $(0, 1)$, la paradoja se resuelve: los negativos pueden ser una imagen gris, así siempre serán iguales.

Puede hacerse otro tratamiento de las paradojas que ocurren con el viaje en el tiempo sin necesidad de recurrir a la continuidad de la naturaleza y utilizando la teoría de la computación y la Mecánica Cuántica.

4.1. Aplicando la teoría de la Computación Cuántica

La exploración que hace la teoría de la computación cuántica en el terreno de lo computacional utilizando propiedades de la mecánica cuántica puede resultar útil en nuestra investigación acerca del comportamiento del espacio-tiempo en regiones donde se viola la cronología, sobre todo en la manifestación de las paradojas temporales que ocurren con la ruptura de la causalidad. Principios de la Mecánica Cuántica como la *superposición* de diferentes estados

podrían tener impacto en la evolución del sistema.

Para esto debemos definir primero a qué nos referimos cuando hablamos de una computadora, cuya abstracción teórica es una máquina de Turing. Una máquina de Turing puede pensarse como una máquina con estados finitos con una cinta de largo infinito que contiene símbolos de algún alfabeto finito Σ . Basada en el símbolo que lee y su estado actual, la máquina de Turing escribirá un nuevo símbolo en ese lugar, posiblemente el mismo en el que estaba el símbolo previo, y se moverá a la izquierda, derecha o se quedará donde está. Puede también decidir detenerse y arrojar un *si* o un *no*. Formalmente la definición de la máquina de Turing queda como sigue:

Definición 4.1. *Una máquina de Turing consiste de un alfabeto finito Σ , un conjunto finito de estados K con un elemento especial s , el elemento inicial, y una función de transición $\delta : K \times \Sigma \rightarrow (K \cup \{\text{alto}, \text{si}, \text{no}\}) \times \Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\}$. Donde $\Sigma, K, \{\text{alto}, \text{si}, \text{no}\}$ y $\{\leftarrow, \rightarrow, -\}$ son conjuntos disconexos, y Σ contiene dos elementos especiales \triangleright, \sqcup que representan el inicio y el fin de la cinta, respectivamente. Se requiere que para cada $q \in K$ si $\delta(q, \triangleright) = (p, \sigma, d)$ entonces $\sigma = \triangleright$ y $d \neq \leftarrow$. Es decir, que la máquina nunca intente sobre escribir el símbolo que está más a la izquierda en la cinta, ni moverse aún más a la izquierda de este.*

Una red computacional clásica es aquella cuyas compuertas efectúan operaciones de Turing, ya que fuera de estas compuertas el estado de cada bit es un elemento de una base fija.

En computación clásica, la unidad de información es un *bit*, que puede ser 0 o 1. La computación cuántica está basada en un concepto análogo, el *bit cuántico* o *qubit*. Justamente, como un bit clásico tiene un estado (0 ó 1), un qubit también se encuentra en un estado. Dos posibles estados para un qubit son $|0\rangle$ y $|1\rangle$, que corresponden a los estados clásicos 0 y 1, sin embargo un qubit puede estar en otros estados además de $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

Un qubit puede también estar en combinaciones lineales de esos estados, llamados superposiciones:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (4.4)$$

con α, β en los complejos. Los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ se conocen como *estados de la base computacional*. Cuando se mide un qubit se obtiene 0 con probabilidad $|\alpha|^2$ o 1 con probabilidad $|\beta|^2$. Además $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

En el caso de que hubieran dos bits, si fueran clásicos, habrían cuatro posibles estados: 00, 01, 10, 11. De manera análoga, un sistema de dos qubits tiene cuatro estados en la base computacional $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, pero puede

existir en superposición de estos estados:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle. \quad (4.5)$$

Similarmente al caso de un sólo qubit, la medición $x = 00, 01, 10, 11$ ocurre con probabilidad $|\alpha_x|^2$, con el estado de los qubits después de la medición $|x\rangle$ y la condición de normalización $\sum_{x \in \mathbb{Z}_2^2} |\alpha_x|^2 = 1$.

4.1.1. Compuertas en teoría de la computación cuántica

La computación cuántica hace uso de compuertas cuánticas y circuitos cuánticos para manipular la información cuántica. Los circuitos de la computación clásica consisten de cables y compuertas lógicas. Los cables se usan para llevar la información a través del circuito, mientras que las compuertas lógicas manipulan la información, con su operación definida mediante una tabla de verdad.

Un ejemplo de ello es la compuerta que usa la operación NEGACIÓN, en donde $0 \rightarrow 1$ y $1 \rightarrow 0$. Un análogo a esta compuerta en el caso cuántico sería definir una matriz X que representara a la compuerta NEGACIÓN:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

y al estado $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ escribirlo en forma vectorial:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

De donde:

$$X \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle, \quad (4.8)$$

Las compuertas cuánticas que actúan en un sólo qubit pueden ser descritas por matrices de dos por dos.

Si tenemos el estado:

$$|\phi\rangle = \alpha_1|1\rangle + \dots + \alpha_N|N\rangle, \quad (4.9)$$

y queremos modificarlo para convertirlo de $|\phi\rangle$ a $|\psi\rangle = \beta_1 |1\rangle + \dots + \beta_N |N\rangle$, entonces debemos multiplicar $|\phi\rangle$ por una matriz compleja de $N \times N$, U :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= U |\phi\rangle, \\ &= U \sum_i \alpha_i |i\rangle, \\ &= \sum_i \alpha_i U |i\rangle, \end{aligned} \tag{4.10}$$

Además, al medir $|\psi\rangle$ también se tiene la restricción de que $\sum_j^N |\beta_j|^2 = 1$, por lo que U debe preservar la norma de los vectores. Como U mapea vectores de norma 1 a vectores de norma 1, podemos decir equivalentemente que $U^{-1} = U^\dagger$, es decir, la matriz inversa de U es igual a su transpuesta conjugada, por lo tanto U es una transformación unitaria. La única restricción para las matrices que operan la acción de las compuertas es que sean unitarias, ya que su acción debe ser reversible.

Definición 4.2. *Una compuerta es una transformación unitaria que actúa sobre un número reducido de bits, a lo más tres, en analogía con las compuertas lógicas clásicas: conjunción, disyunción y negación.*

En el caso de múltiples qubits sucede lo mismo, el ejemplo más común es la compuerta CNOT, que tiene a un qubit control y a uno que sí modifica. Si el qubit control es 0, el qubit a modificar queda intacto, pero si el qubit control es 1, el qubit a modificar se invierte:

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |00\rangle; & |01\rangle &\rightarrow |01\rangle; \\ |10\rangle &\rightarrow |11\rangle; & |11\rangle &\rightarrow |10\rangle; \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.1.2. El modelo de Deutsch

En el presente trabajo, además de proporcionar un análisis del artículo de David Deutsch, "Quantum mechanics near closed timelike lines"[11], introduciremos una nueva forma de estudio a las paradojas propuestas por él, así como una interpretación física correspondiente a cada una, y la construcción y solución de paradojas compuestas a partir de las proporcionadas por el artículo.

Para el caso que nos interesa consideraremos partículas, portadoras de bits, que siguen una línea de mundo e interactúan tan sólo cuando sus respectivas

líneas están muy cercanas en el espaciotiempo. El modelo que presenta Deutsch en su artículo *Quantum mechanics near closed timelike curves* resulta un modelo con un conjunto finito de estados finitos de un sistema que se desplaza por trayectorias fijas e interactúa sólo a distancias muy cortas.

En este modelo se construyen redes computacionales cuánticas con el uso de una compuerta G , a través de la cual pasa una partícula. Las redes contienen bucles tanto temporales como espaciales. A cada red le corresponde un espaciotiempo dado que las trayectorias de las partículas a través de la red se identifican con un conjunto de líneas de mundo tipo tiempo conectadas en el espaciotiempo.

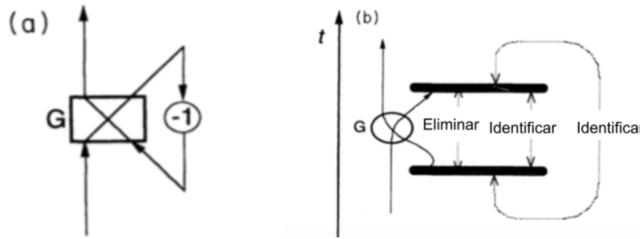


Figura 4.1: En (a) se muestra el diagrama puramente espacial de una red computacional cuántica, con la compuerta G , y el delay temporal, mientras que en (b) puede verse el correspondiente diagrama espacio-temporal en el que G es el espacio de interacción, y el espacio de violación de la cronología.

En el diagrama espacial de una red, a los procesos que violen la cronología se les denotará con un *delay* temporal (-1). Estos delays juegan el papel de máquinas del tiempo; objetos en los que el fenómeno característico tan sólo de la violación de la cronología puede ser observado. Lo anterior puede verse explícitamente en la figura 4.1.

Las redes computacionales se ligarán a hipersuperficies tipo espacio de las cuales sus *outputs* e *inputs* serán sus estados finales e iniciales respectivamente.

Las redes computacionales se ligarán a hipersuperficies tipo espacio de las cuales sus *outputs* e *inputs* serán sus estados finales e iniciales respectivamente.

Definición 4.3. *Dos redes ligadas espaciotemporalmente son **denotacionalmente equivalentes** si sus estados de salida (*output*) son la misma función que sus estados de entrada (*input*). Si para cada *input* posible, el conjunto de sus *outputs* es el mismo.*

Definición 4.4. *Una transformación denotacionalmente trivial es la que resulta en una red denotacionalmente equivalente a la original.*

Los miembros de una clase denotacionalmente equivalente responden a estímulos creando relaciones equivalentes entre los *inputs* y los *outputs*. Esto puede utilizarse para simplificar redes que modelen los efectos de una región. La transformación debe hacerse como sigue:

- Cada partícula viajando en la red debe reemplazarse con partículas suficientes, cada una con un 2-estado grado de libertad o bit. A esta partícula se le llama portadora del bit. Los bits intercambian información en las compuertas.
- Las regiones que no se superpongan y en las que los bits interactúen se llamarán compuertas. Hay transformaciones denotacionalmente triviales que mandan todas las autointeracciones a compuertas.

La red tiene el siguiente formato:

- Un grupo de m bits, (el input) entra a la región que viola la cronología desde el pasado no ambiguo e interactúa con un grupo de n bits cuyos portadores están en trayectorias cerradas tipo tiempo.
- Después de la interacción los m bits continúan hacia el futuro no ambiguo formando el output.

4.2. Paradojas clásicas en la violación de la cronología

Los espaciotiempos en los que se viola la cronología, a pesar de ser soluciones a las Ecuaciones de Campo de Einstein, no se toman como soluciones que sean físicamente relevantes debido a que los fenómenos que suceden en lo referente a la causalidad no tienen correspondencia directa con el universo que experimentamos, o que conocemos hasta ahora.

De hecho, una de las razones más comunes es la que ofrecen Hawking y Ellis que establece que: "... la existencia de curvas cerradas tipo tiempo parecería llevarnos a la posibilidad de la existencia de paradojas lógicas: podríamos imaginar que con la nave adecuada se podría viajar alrededor de tal curva y llegar antes, inclusive, de haber despegado"[16].

Sin embargo constreñir la existencia de los espaciotiempos a sólo aquellos que respetan la cronología recurriendo simplemente a la intuición y la lógica no resulta suficiente desde un punto de vista físico. Las paradojas que emergen cuando se trata la violación a la cronología son por ejemplo la famosa paradoja del abuelo, en la que un viajero del tiempo va al pasado y mata a su abuelo antes de que le de vida a su padre o madre, impidiendo su nacimiento.

El tratamiento de las paradojas de manera clásica que se hace a continuación sirve para introducir la notación y el método de análisis que se usará cuando se traten de manera cuántica.

4.2.1. Primera Paradoja

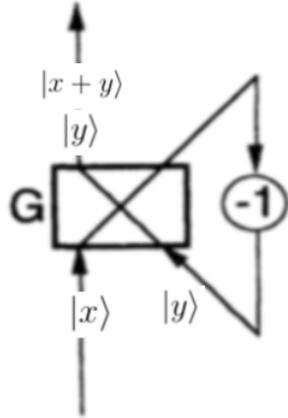


Figura 4.2: Red computacional que modela el espaciotiempo de la figura 4.1, con las anotaciones de la primera paradoja.

Supongamos que una partícula se mueve a través de una línea de mundo a través de la figura 4.1 (b). Trataremos su correspondiente red computacional, i.e. la figura 4.1 (a), o la más detallada figura 4.2 con su bit inicialmente en un estado $|x\rangle$ de la base computacional, con $x \in \mathbb{Z}_2$, es decir, el conjunto $[0, 1]$ de enteros modulo 2. La compuerta G es una compuerta de medición, que causa que las dos versiones del bit, la *joven* y la *vieja*, interactúen. Tenemos entonces:

$$|x\rangle |y\rangle \Rightarrow |x \dot{+} y\rangle |y\rangle. \quad (4.12)$$

y " \Rightarrow " indica la evolución del estado del bit al salir de la compuerta.

Donde los primeros dos kets de la izquierda denotan la versión joven y vieja del bit respectivamente,

El operador $\dot{+}$ es el operador *XOR* del álgebra Booleana, al que le corresponde la siguiente tabla:

| | | |
|-----------|---|---|
| $\dot{+}$ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Cuadro 4.1: Tabla de verdad del operador $\dot{+}$.

Inicialmente nada nos indica que exista un valor prohibido para el bit $|x\rangle$, sin embargo la violación de la cronología impone una restricción sobre el valor inicial del bit $|x\rangle$ de manera retrospectiva, y en esto consiste la paradoja.

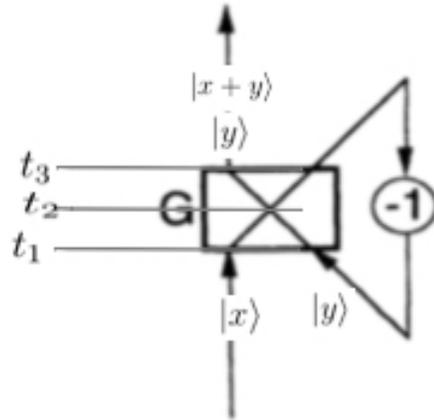


Figura 4.3: Red computacional de la primera paradoja, con las anotaciones y los tiempos señalados.

Podemos ver en la figura 4.3 que en t_1 entran a la compuerta tanto $|x\rangle$ como $|y\rangle$, que son las versiones joven y vieja de la partícula respectivamente. En t_2 , $|x\rangle$ y $|y\rangle$ interactúan dentro de la compuerta. Posteriormente, podemos ver que en t_3 , $|x\rangle$ sale de la compuerta G y pasa por el delay, viajando en el tiempo y cambiando a $|y\rangle$, mientras que el ya existente $|y\rangle$ sale de la compuerta, y al mismo tiempo $|x\rangle$ sale también en forma $|x+y\rangle$.

A la compuerta entran dos inputs y salen dos outputs; la versión joven de la partícula $|x\rangle$, cuyo output será $|x+y\rangle$ y la versión vieja $|y\rangle$, cuyo output, debido a cómo está definida su evolución, será $|y\rangle$. Si analizamos entonces el recorrido que la partícula efectúa a lo largo de la compuerta, llegamos a que la partícula vieja, cuando sale de la compuerta se encuentra en estado $|y\rangle$ por cómo lo define su regla de evolución, pero también en estado $|x+y\rangle$, debido a que inició el recorrido siendo $|x\rangle$. Lo que nos deja con la siguiente condición de consistencia.

$$|x+y\rangle = |y\rangle, \quad (4.13)$$

Ahora veamos qué sucede si le asignamos valores a $|x\rangle$ y a $|y\rangle$. Para $x = 0$ y $y = 0$, la ecuación anterior es consistente de acuerdo a la tabla de verdad; lo mismo sucede para $x = 0$, $y = 1$. La condición de consistencia, a pesar de que se impone una vez que la partícula ha viajado en el tiempo, se cumple. El problema surge cuando tomamos el valor de $x = 1$, ya que tendríamos que para cualquier valor de y , la condición de consistencia no se cumple:

$$\begin{aligned} 1+0 = 1 &\Rightarrow 0 = 1; \\ 1+1 = 0 &\Rightarrow 1 = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por lo que existencia de una situación donde una curva cerrada tipo tiempo que puede trasladarse a este modelo específico de una red computacional clásica, da lugar a la primera paradoja, debido a que el valor de $|x\rangle$ se restringe de manera retrospectiva, es decir, una vez que la partícula ha viajado en el tiempo. Esto es que:

$$|x(t_1)\rangle = f(|x+y(t_3)\rangle, |y(t_3)\rangle) \quad (4.15)$$

Esta paradoja correspondería a una persona que crea una máquina del tiempo para viajar al pasado, pero que al entrar a la máquina no puede saber que viajará en el tiempo justamente porque ya viajó en el tiempo. La paradoja está en que un evento de lo que podríamos llamar *presente*, está determinado por el *futuro*.

4.2.2. Segunda Paradoja; el suicida

Si ahora la misma compuerta G efectúa la siguiente evolución:

$$\begin{aligned} |x\rangle |y\rangle &\Rightarrow |y+1\rangle |x\rangle, \\ \forall x, y &\in \mathbb{Z}_2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Mediante un proceso análogo al anterior podemos obtener la nueva condición de consistencia:

$$y+1 = y, \quad (4.17)$$

Que como vimos anteriormente no puede satisfacerse y por ello descarta todos los valores del bit $|x\rangle$. Lo anterior nos garantiza:

$$y+1 \neq y, \quad (4.18)$$

Para todos los valores de y . Hagamos el recorrido de la partícula, como se muestra en la figura 4.4. En t_1 entran a la compuerta las dos versiones de la partícula, la joven $|x\rangle$ y la vieja $|y\rangle$, en t_2 interactúan dentro de la compuerta y en t_3 salen de ella, $|x\rangle$ para pasar por el delay y convertirse en $|y\rangle$. Sin embargo también sale $|y+1\rangle$, que, por como definimos la evolución, es $|x\rangle$ después de haber pasado por la compuerta.

Ahora, la condición de consistencia (4.18) nos dice que $|y\rangle$ es distinto del estado final de $|x\rangle$, por lo que $|y\rangle$ no fue $|x\rangle$ en ningún momento y por lo tanto no viajó en el tiempo, cuando por hipótesis lo hizo.

Esta paradoja corresponde al caso de un viajero en el tiempo que viaja al pasado para asesinar a su *yo* del pasado.

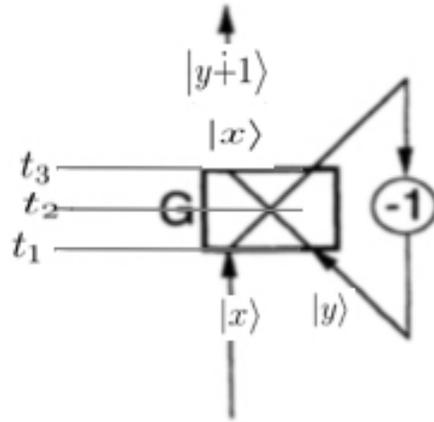


Figura 4.4: Red computacional de la segunda paradoja, con las anotaciones y los tiempos señalados.

4.2.3. Tercer Paradoja; la paradoja del abuelo

Ahora consideremos dos posibles trayectorias como en la figura 4.5 donde una partícula entra a la compuerta y viaja en el tiempo y otra simplemente entra y pasa de largo. La evolución del sistema queda definida como:

$$|x\rangle |x+1\rangle |y\rangle \Rightarrow |x+y\rangle |x+y+1\rangle |y\rangle. \quad (4.19)$$

El recorrido de la partícula como se ve en la figura 4.5, comienza en t_1 , cuando $|x\rangle$, $|x+1\rangle$ y $|y\rangle$ entran en la compuerta. En t_2 , $|x+1\rangle$ y $|y\rangle$ interactúan, mientras que $|x\rangle$ simplemente pasa por la compuerta. En t_3 , $|x+1\rangle$ sale de la compuerta para viajar en el tiempo y convertirse en $|y\rangle$ y al mismo tiempo sale de la compuerta como $|x+y+1\rangle$. Lo que nos deja la siguiente condición de consistencia:

$$x+y+1 = y, \quad (4.20)$$

Que se reduce a:

$$x+1 = 0, \quad (4.21)$$

Ahora, si inicialmente los dos bits estuvieran en el estado $|0\rangle |1\rangle$, simulando un sistema en el que la trayectoria de la izquierda no está ocupada y la de la derecha sí lo está. De la condición de consistencia tenemos que $x = 1$, lo que nos deja con el sistema $|1\rangle |0\rangle$, así que la partícula comienza el viaje en la trayectoria izquierda y por ende no viaja en el tiempo.

Esta paradoja se corresponde a un viajero que al viajar en el tiempo impide que su versión joven viaje en el tiempo, por eso se conoce como la paradoja

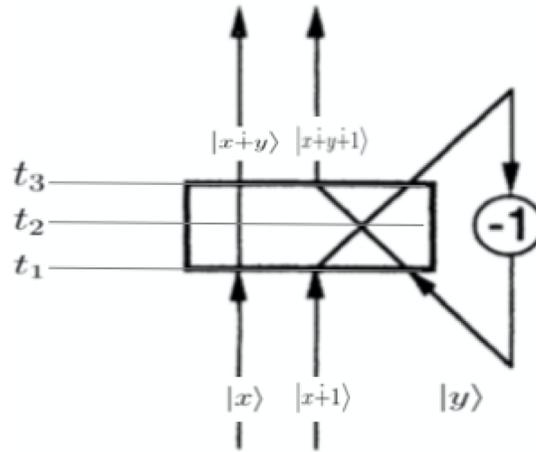


Figura 4.5: Red computacional para la paradoja tradicional del viaje en el tiempo.

del abuelo, en la que un viajero del tiempo va al pasado a matar a su abuelo para evitar su nacimiento.

4.2.4. Cuarta Paradoja; paradoja de la información

Un físico está trabajando en su laboratorio, cuando aparece un hombre extraño, que le recuerda a sí mismo, y le entrega un artículo probando una manera de viajar en el tiempo, con su nombre y fecha del futuro, para después irse misteriosamente. Años después, el físico publica la teoría, se vuelve famoso, y viaja en el tiempo para entregarse el artículo.

En el ejemplo anterior la conclusión sería que la teoría que el físico transmite entre su versión futura y pasada surge de la nada. Un principio fundamental de la filosofía de la ciencia es que las soluciones a los problemas no emergen en su forma completa al Universo, sino que pasan por un proceso evolutivo o racional. A esto se le conoce como el principio evolutivo.

El tratamiento de esta paradoja nos remite a la primera paradoja. Consideremos ahora, sin embargo, n partículas, cada una con el valor consistente $x = 0$ y todas interactuando de acuerdo a (4.12). Cada una de las ecuaciones dinámicas de las partículas tiene dos soluciones: $y = 0$, $y = 1$. A pesar de que la información inicial ya se especificó en el pasado no ambiguo, es decir, la condición de que el valor inicial de $|x\rangle$ ya se fijó, las n partículas que violan

la cronología pueden estar, al momento de entrar a la compuerta como $|y\rangle$, en cualquiera de sus 2^n estados. Lo mismo es válido para los outputs. El sistema necesita información que no puede proveerse al inicio, para determinar de manera única las soluciones a las ecuaciones dinámicas del sistema. A esta información la llamaremos *información suplementaria* y volveremos a ella más adelante.

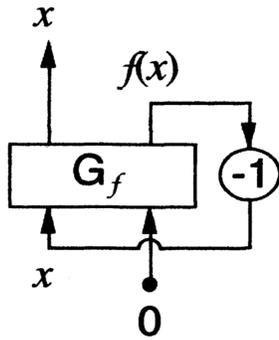


Figura 4.6: Red computacional para encontrar un punto fijo de f ; paradoja de la información.

Ahora consideremos la red computacional que se muestra en la figura 4.6. En esta red la compuerta G_f toma grupos de $2n$ bits. El primer grupo de n bits entra por la línea de la izquierda y especifica un argumento para la función f ; $x \in \mathbb{Z}_{2^n}$. La acción de la compuerta G_f es reemplazar los últimos n bits de su input, representados por la línea que entra a la compuerta por la derecha, por la operación exclusiva entre los bits y $f(x) \in \mathbb{Z}_{2^n}$. La evolución queda entonces como sigue:

$$|x\rangle |y\rangle \Rightarrow |x\rangle |y \dot{+} f(x)\rangle, \quad (\forall x, y \in \mathbb{Z}_{2^n}). \quad (4.22)$$

La tarea de encontrar un punto fijo de f , es decir, x' tal que $f(x') = x'$, requiere en general más recursos computacionales que computar un solo valor de $f(x)$. Ahora, la condición de consistencia para una compuerta general sería:

$$x = y \dot{+} f(x), \quad (4.23)$$

Lo que nos deja dos opciones, de acuerdo a los valores de y . Para el caso en el que $y = 1$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \dot{+} 0 \Rightarrow f(1) = 0; \\ 0 &= 1 \dot{+} 1 \Rightarrow f(0) = 1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

De donde es claro que ningún valor de x es punto fijo de $f(x)$. Sin embargo, la red de la figura 4.6 con $y = 0$, impone que la condición de consistencia sea:

$$x = 0 \dot{+} f(x), \quad (4.25)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \dot{+} 0 \Rightarrow f(0) = 0; \\ 1 &= 0 \dot{+} 1 \Rightarrow f(1) = 1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

La condición de consistencia anterior puede expresarse de forma equivalente:

$$x = f(x), \quad (4.27)$$

de modo que todos los valores de x son puntos fijos de $f(x)$. El principio evolutivo nos dice que toda red computacional debe usar al menos una corrida de la compuerta G_f para producir el output x' , sin embargo, aún sin efectuar ninguna corrida de la compuerta, fijando el valor de y en cero, los n bits de salida de la red deben tener conjuntamente el valor de un punto fijo x' de f . Lo cual viola el principio evolutivo.

4.2.5. Introduciendo una nueva notación

A pesar de que el tratamiento que Deutsch realiza en su artículo [11] resulta bastante claro, introducir una nueva notación para manipular las paradojas resultará conveniente a la hora de enfrentarnos a situaciones más complejas que los cuatro casos más elementales que ya se presentaron. Dicha notación nos permitirá elaborar casos más ricos, para explorar la posibilidad de consistencia cuando se trate de composición de paradojas.

Al operador que denota la evolución de la compuerta " \Rightarrow " se le sustituirá con H_i , donde el subíndice " i " indicará el número de paradoja a la que se refiere. El orden de los factores estará determinado por su entrada a la compuerta de manera cronológica de acuerdo al tiempo propio de la partícula. Siguiendo lo anterior, la primera paradoja queda expresada como sigue:

$$\begin{aligned} |x\rangle |y\rangle &\Rightarrow |x\dot{+}y\rangle |y\rangle, \\ H_1(|x\rangle \otimes |y\rangle) &= |x\dot{+}y\rangle \otimes |y\rangle. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Con su correspondiente condición de consistencia $y = x\dot{+}y$. De esta manera resulta más claro identificar el caso en el que el valor de x queda prohibido, ya que si $x = 1$:

$$H_1(|1\rangle \otimes |y\rangle) = |1\dot{+}y\rangle \otimes |y\rangle, \quad (4.29)$$

y la condición de consistencia queda $y = 1\dot{+}y$, que no se satisface.

La segunda paradoja queda como sigue:

$$H_2(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |1\dot{+}y\rangle \otimes |x\rangle, \quad (4.30)$$

Donde claramente hay un $y = 1\dot{+}y$, que nos indica la naturaleza paradójica de la evolución. En el caso de la tercera paradoja esto también resulta claro:

$$H_3(|x\rangle \otimes |x+1\rangle \otimes |y\rangle) = |x\dot{+}y\rangle \otimes |x\dot{+}y+1\rangle \otimes |x\rangle, \quad (4.31)$$

que si sustituimos el valor $x = 0$ resulta:

$$H_3(|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |y\rangle) = |y\rangle \otimes |y\dot{+}1\rangle \otimes |x\rangle, \quad (4.32)$$

Donde claramente se encuentra $y\dot{+}1$, signo de que nos encontramos ante una evolución paradójica, lo cual confirma la condición de consistencia que ya tratamos.

La cuarta paradoja es mucho más clara en esta notación:

$$H_4(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes |y\dot{+}f(x)\rangle. \quad (4.33)$$

Que si tomamos el valor $y = 1$ nos encontramos con que, sin importar el valor de x , de acuerdo a la condición de consistencia no hay un punto fijo. Pero, si tomamos $y = 0$:

$$H_4(|x\rangle \otimes |0\rangle) = |x\rangle \otimes |f(x)\rangle. \quad (4.34)$$

El valor $f(x)$ está surgiendo de hacer evolucionar solamente a $|x\rangle$ y a uno vacío. Si lo pensamos como uno que no sabemos si está ocupado o vacío y uno que estamos seguros que está vacío; esta notación nos muestra cómo aparece *de la nada* el valor $f(x)$.

4.2.6. Paradojas compuestas

¿Qué sucede ahora si en lugar de tratar solamente con una de las paradojas a la vez, tratamos con varias de ellas acopladas? La notación introducida hace el tratamiento de una red computacional compuesta mucho más sencillo.

4.2.6.1. Composición de dos paradojas

En la figura 4.7 se muestran dos compuertas acopladas, la primera corresponde a la paradoja 1, cuya salida conforma uno de los outputs, el que viaja en el tiempo, de la segunda compuerta, que es la que modela la paradoja 3. Si lo desarrollamos con la notación que introdujimos anteriormente queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_3(|w\rangle \otimes (H_1(|x\rangle \otimes |y\rangle)) \otimes |z\rangle) &= H_3(|w\rangle \otimes |x\dot{+}y\rangle \otimes |z\rangle) \otimes |y\rangle, \\ &= |w\dot{+}z\rangle \otimes |x\dot{+}y\dot{+}z\rangle \otimes |z\rangle \otimes |y\rangle. \end{aligned} \quad (4.35)$$

La condición de consistencia es:

$$z = x\dot{+}y\dot{+}z, \quad (4.36)$$

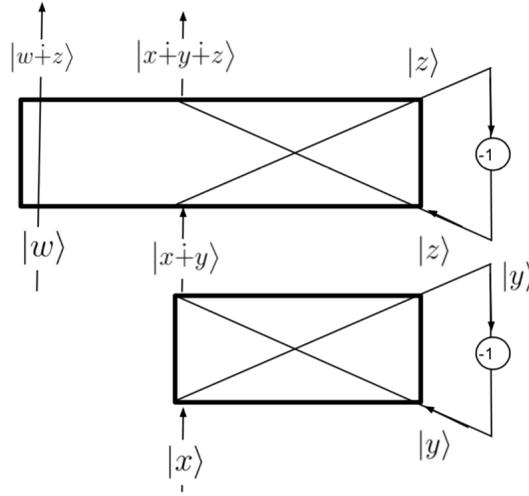


Figura 4.7: Red computacional para la composición de la paradoja 3 con la paradoja 1.

de donde;

$$\begin{aligned} x \dot{+} y &= 0; \\ x &= y. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Además tenemos que de acuerdo a las condiciones de la paradoja 3:

$$w \dot{+} 1 = x \dot{+} y, \quad (4.38)$$

por lo que,

$$w \dot{+} 1 = 0. \quad (4.39)$$

Para $w = 1$, el valor de $w + 1 = 0$, lo cual es consistente, pero como la paradoja 1 fija que el valor de x debe ser $x = 0$ de manera retrospectiva, al viajar en el tiempo, para $w = 0$, como $w \dot{+} 1 = x \dot{+} y$, $w \dot{+} 1 = 0$, lo cual es una contradicción, ya que indica que $w = 1$.

Sin embargo, en la paradoja 3, si comenzáramos con la trayectoria de la izquierda desocupada y la de la derecha ocupada, es decir $|0\rangle \otimes |1\rangle$, la condición de consistencia nos arrojaba un sistema en la que la trayectoria de la izquierda estaba originalmente ocupada y la de la derecha desocupada $|1\rangle \otimes |0\rangle$.

Con esta composición de compuertas esto se conserva, ya que $x \dot{+} y = 0$ fija el valor de $w \dot{+} 1 = 0$ y si el valor de w comienza en $w = 0$, lo devuelve a $w = 1$. Por lo que esta manera de acoplar la red computacional es consistente.

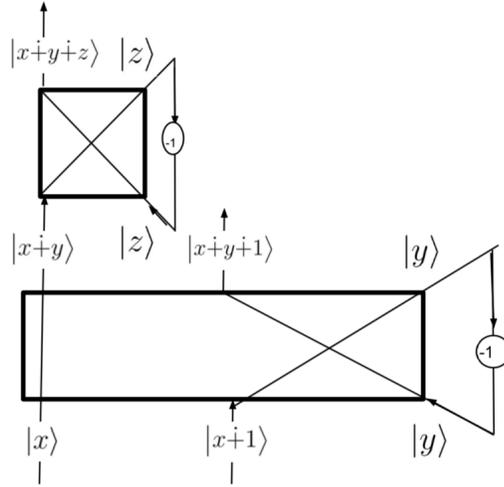


Figura 4.8: Red computacional para la composición de la paradoja 1 con la paradoja 3.

Ahora, si componemos la paradoja 1 con la paradoja 3, como se muestra en la figura 4.8, en la que la entrada para la paradoja 1 es la primera salida de la paradoja 3, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_1(H_3(|x\rangle \otimes |x+1\rangle \otimes |y\rangle) \otimes |z\rangle) &= H_1(|x+y\rangle \otimes |z\rangle) \otimes |x+y+1\rangle \otimes |y\rangle, \\ &= |x+y+z\rangle \otimes |z\rangle \otimes |x+y+1\rangle \otimes |y\rangle. \end{aligned} \quad (4.40)$$

La primera condición de consistencia es:

$$y = x+y+1, \quad (4.41)$$

por la paradoja 3, lo que nos deja con:

$$\begin{aligned} x+1 &= 0; \\ x &= 1. \end{aligned} \quad (4.42)$$

La segunda condición de consistencia es:

$$z = x+y+z, \quad (4.43)$$

de donde:

$$\begin{aligned} x+y &= 0; \\ x &= y. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Entonces la partícula comienza presente en la trayectoria de la izquierda y desaparece antes de salir de la compuerta, además de que la trayectoria de la derecha comienza vacía, pero "y" está ocupada y viaja en el tiempo, además de salir de la compuerta; lo cual es paradójico, ya que si esa trayectoria está desocupada, ¿qué es lo que sale de la compuerta habiendo viajado en el tiempo?

En el caso de que acoplemos la paradoja 2 con la paradoja 1, es decir, que

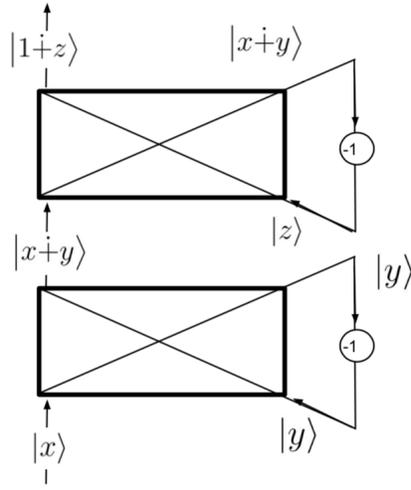


Figura 4.9: Red computacional para la composición de la paradoja 2 con la paradoja 1.

el input de la paradoja 2 sea el output de la paradoja 1, como en la figura 4.9, tendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} H_2(H_1(|x\rangle \otimes |y\rangle) \otimes |z\rangle) &= H_2(|x+y\rangle \otimes |z\rangle) \otimes |y\rangle, \\ &= |1+z\rangle \otimes |x+y\rangle \otimes |y\rangle. \end{aligned} \quad (4.45)$$

La condición de consistencia de la primera paradoja se mantiene, fijando el valor de $x = 0$, lo mismo sucede con la segunda condición de consistencia $z = 1+z$, por lo que se recupera la segunda paradoja.

Sin embargo, si componemos la paradoja 1 con la paradoja 2, como en la figura 4.10 obtenemos:

$$\begin{aligned} H_1(H_2(|x\rangle \otimes |y\rangle) \otimes |z\rangle) &= H_1(|1+y\rangle \otimes |z\rangle) \otimes |x\rangle, \\ &= |1+y+z\rangle \otimes |z\rangle \otimes |x\rangle \end{aligned} \quad (4.46)$$

Donde la condición de consistencia se vuelve:

$$1+y+z = z, \quad (4.47)$$

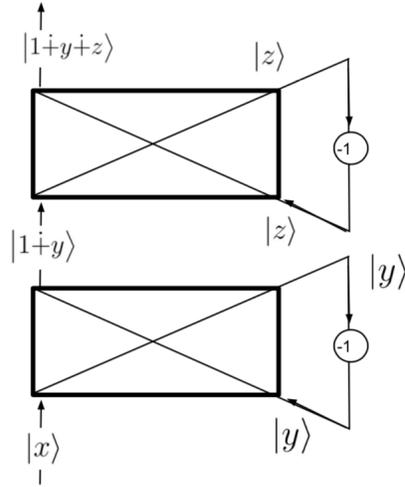


Figura 4.10: Red computacional para la composición de la paradoja 1 con la paradoja 2.

es decir:

$$1\dot{+}y = 0, \quad (4.48)$$

Lo que fija el valor de $y = 1$, pero no restringe el valor de x .

4.2.6.2. Composiciones de tres o más paradojas

En la figura 4.11 pueden verse acopladas tres compuertas que modelan la paradoja 1, en las que el delay temporal ahora va atrás en el tiempo no sólo un paso, sino dos. Esto nos permite relacionar de una manera más elaborada la red computacional. De esta manera las entradas de una compuerta son la salidas de otra que está en su futuro no ambiguo.

El desarrollo sería:

$$\begin{aligned} H_1[H_1(|x\rangle \otimes |y\rangle) \otimes H_1(|y\rangle \otimes |z\rangle)] &= H_1[H_1(|x\rangle \otimes |y\rangle) \otimes |y\dot{+}z\rangle \otimes |z\rangle], \\ &= H_1[|x\dot{+}y\rangle \otimes |y\dot{+}z\rangle \otimes |y\rangle |z\rangle], \quad (4.49) \\ &= |x\dot{+}z\rangle \otimes |y\dot{+}z\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle. \end{aligned}$$

Las condiciones de consistencia son:

$$\begin{aligned} y\dot{+}z &= x\dot{+}z; \\ y &= x. \end{aligned} \quad (4.50)$$

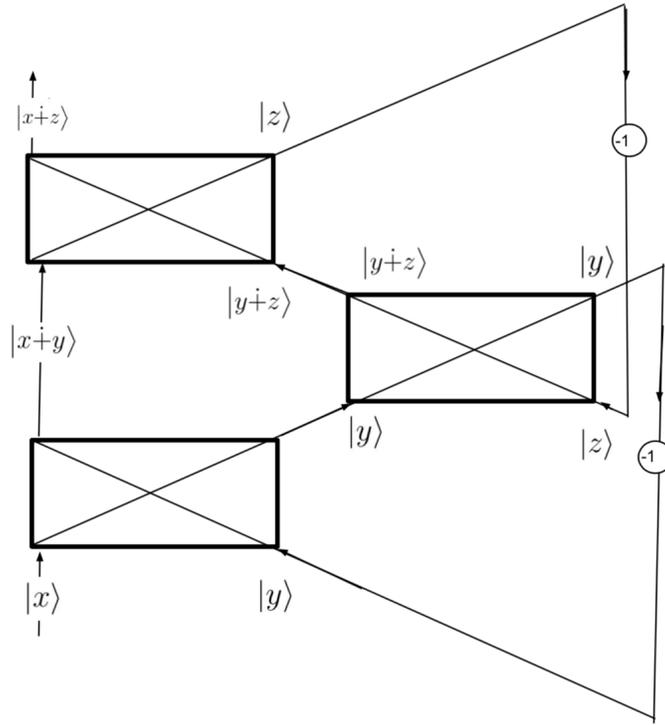


Figura 4.11: Red computacional para la composición de tres paradojas 1.

Como también:

$$\begin{aligned} y\dot{+}z &= z; \\ y &= 0. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Y la de la primera compuerta, es la de la primera paradoja que fija el valor de $x = 0$, lo cual es consistente con que $x = y$.

En la composición que se muestra en la figura 4.12 se utiliza una función de evolución H_{1b} , que es la misma que la H_1 , con la salvedad de que como a la compuerta tres entran tres inputs y salen dos outputs, y H_1 sólo operaba sobre el primer output, H_{1b} opera sobre ambas salidas, es decir, coloca una compuerta que simula la paradoja 1, en cada uno de los outputs.

$$\begin{aligned} H_{1b}(H_3(|x\rangle \otimes |x\dot{+}1\rangle \otimes |y\rangle) \otimes |z\rangle) &= H_{1b}(|x\dot{+}y\rangle \otimes |x\dot{+}y\dot{+}1\rangle |y\rangle \otimes |z\rangle), \\ &= |x\dot{+}y\dot{+}z\rangle \otimes |z\rangle \otimes |x\dot{+}y\dot{+}1\dot{+}z\rangle \otimes |z\rangle \\ &\otimes |y\rangle \otimes |z\rangle. \end{aligned} \tag{4.52}$$

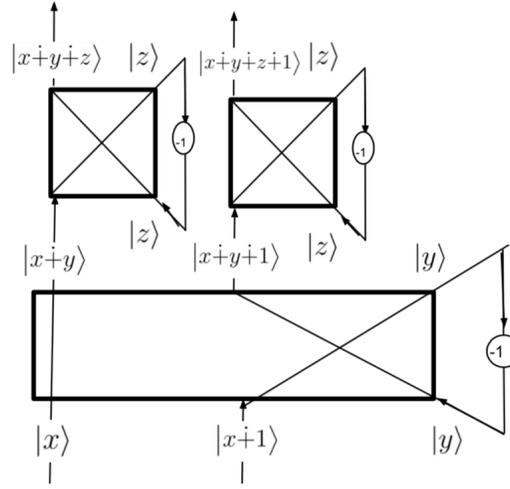


Figura 4.12: Red computacional para la composición de una compuerta de la paradoja 3, y dos de la paradoja 1.

La primera condición de consistencia entonces es:

$$\begin{aligned} x \dot{+} y \dot{+} z &= z; \\ x \dot{+} y &= 0; \\ x &= y. \end{aligned} \tag{4.53}$$

La segunda condición de consistencia es:

$$\begin{aligned} x \dot{+} y \dot{+} z \dot{+} 1 &= z; \\ x \dot{+} y \dot{+} 1 &= 0; \\ x &\neq y. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Por lo tanto tenemos una contradicción. Este arreglo no es consistente. Si al arreglo anterior le agregamos una compuerta como la de la paradoja 4 al principio como se muestra en la figura 4.13, se comporta diferente.

$$\begin{aligned} H_{1b}[H_3(H_4(|x\rangle \otimes 0) \otimes |z\rangle)] &= H_{1b}[H_3(|x\rangle \otimes |f(x)\rangle) \otimes |z\rangle], \\ &= H_{1b}[|x \dot{+} z\rangle \otimes |f(x) \dot{+} z\rangle \otimes |z\rangle], \\ &= |x \dot{+} z \dot{+} w\rangle \otimes |f(x) \dot{+} z \dot{+} w\rangle \otimes |w\rangle \otimes |w\rangle \otimes |z\rangle. \end{aligned} \tag{4.55}$$

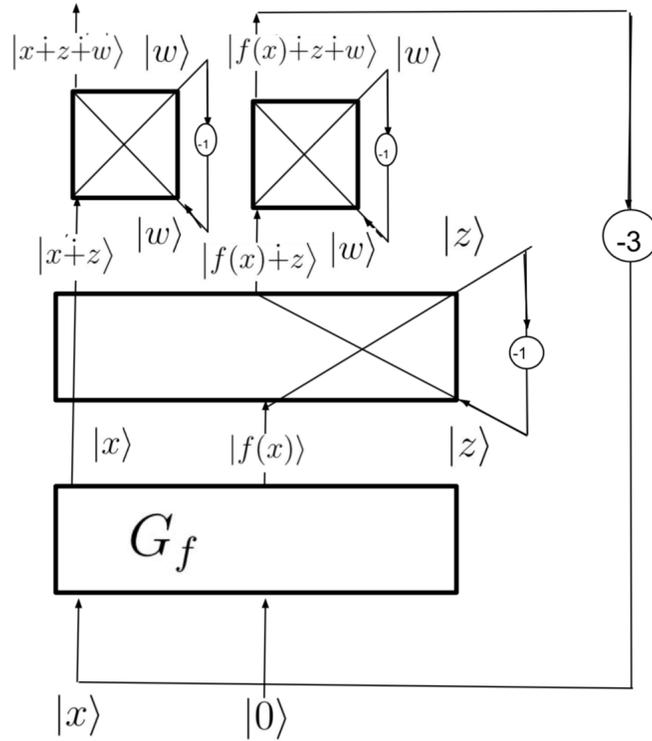


Figura 4.13: Red computacional para la composición de una compuerta de la paradoja 4 de inicio, una de la paradoja 3, y dos de la paradoja 1.

Las condiciones de consistencia son:

$$\begin{aligned}
 x \dot{+} z \dot{+} w &= w; \\
 x \dot{+} z &= 0; \\
 x &= z.
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

así como:

$$\begin{aligned}
 f(x) \dot{+} z \dot{+} w &= w; \\
 f(x) \dot{+} z &= 0; \\
 f(x) \dot{+} x &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

Pero de acuerdo a la condición de consistencia de la compuerta G_f , $x = f(x)$, así que lo anterior siempre sucede; por lo tanto, este caso es consistente, si bien paradójico, ya que, de acuerdo a la compuerta de la paradoja 3:

$$f(x) = x \dot{+} 1,
 \tag{4.58}$$

y esto contradice que $x = f(x)$.

Ahora, si a la compuerta de la figura 4.11 le agregamos al inicio una compuerta como la de la paradoja cuatro, como en la figura 4.14, obtendremos un comportamiento bastante interesante. Tendríamos entonces:

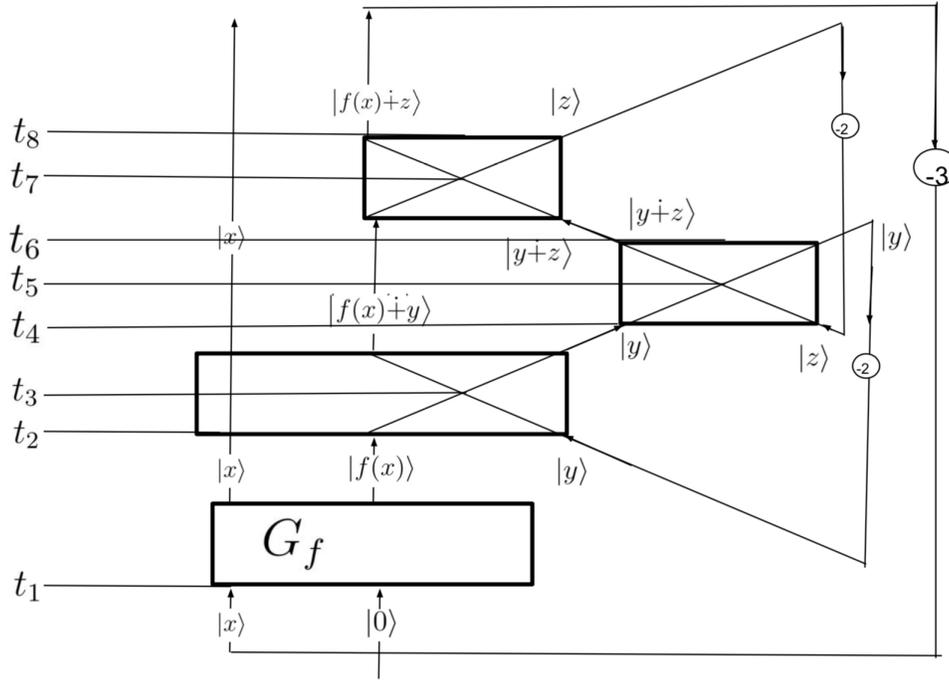


Figura 4.14: Red computacional para la composición de una compuerta de la paradoja 4 y tres paradojas 1, con los tiempos señalados.

$$\begin{aligned}
 H_1[H_1(H_4(|x\rangle \otimes |0\rangle) \otimes |y\rangle) \otimes H_1(|y\rangle \otimes |z\rangle)] &= \\
 &= H_1[H_1(|x\rangle \otimes |f(x)\rangle \otimes |y\rangle) \otimes |y+z\rangle \otimes |z\rangle], \\
 &= H_1[|x\rangle \otimes |f(x)+y\rangle \otimes |y\rangle \otimes |y+z\rangle \otimes |z\rangle], \quad (4.59) \\
 &= |x\rangle \otimes |f(x)+y+y+z\rangle \otimes |y+x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle, \\
 &= |x\rangle \otimes |f(x)+z\rangle \otimes |y+x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle.
 \end{aligned}$$

Con condiciones de consistencia:

$$f(x) = x, \quad (4.60)$$

así como:

$$\begin{aligned}
 f(x) \dot{+} z &= x; \\
 f(x) \dot{+} y &= y; \\
 f(x) &= 0, \\
 0 \dot{+} z &= 0; \\
 z &= 0, \\
 x &= z.
 \end{aligned}
 \tag{4.61}$$

y,

$$\begin{aligned}
 f(x) \dot{+} z &= y \dot{+} z; \\
 f(x) &= y, \\
 y = x = z &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.62}$$

Esta red computacional es particularmente interesante, ya que resulta ser el modelo de la película *Predestination*. La película está basada en el cuento de Robert A. Heinlein "All of you zombies", y trata de una persona, sin futuro ni pasado, que es dejada en un orfanato al nacer, y a quien llaman Jane, y vive toda su vida, hasta la universidad como mujer. Jane conoce a un hombre, John, y se enamora de él, quedando un día embarazada de él, sin embargo John la deja. Cuando Jane da a luz, un hombre misterioso se roba del hospital a la bebé de Jane. Durante el parto, el cuerpo de Jane sufre demasiado y los doctores tienen que retirarle el útero, sin embargo se dan cuenta que ella tiene dentro de sí, totalmente desarrollados y funcionales, órganos reproductivos masculinos, y Jane cambia de sexo para convertirse en John.

John sigue su vida, algo traumatizado, hasta que, en medio de unos ataques de bomba que tienen paralizada a la ciudad, conoce a un cantinero que lo reta a que le cuente la historia más extraña que pueda, y cuando John le cuenta todo por lo que ha pasado, le dice que él puede llevarlo hasta el hombre que lo embarazó cuando era Jane. John acepta y el cantinero comienza a contarle que él es parte de una agencia de viajeros en el tiempo y que sospechan que el hombre que lo embarazó es el culpable de los ataques de bomba, así que debe matarlo cuando vuelvan en el tiempo. Cuando regresan al momento en el que Jane conoció a aquel hombre, John está parado buscándolo, cuando se encuentra con Jane, interactúan, y él se enamora de ella; su versión más joven. Pasa el tiempo y él embaraza a Jane, para después tener que irse con el cantinero a enrolarse como un agente de viaje en el tiempo.

Pasan los años y como agente John intenta detener al terrorista en una de sus misiones, pero una bomba le explota en la cara, quemándose. John tiene que someterse a varias cirugías para regenerar su rostro, que queda totalmente cambiado, así como su voz. Se le asigna una última misión; viajar al pasado

para trabajar de cantinero y convencer a su yo del pasado de trabajar en la agencia. Cuando lo hace y John embaraza a Jane y ella da a luz, el ahora cantinero, se roba a la bebé que será Jane y la entrega al orfanato, cerrando el círculo.

Predestination es una historia donde una persona es su propio padre y su propia madre; está encerrada en un bucle temporal. En la red computacional de la figura 4.14 podemos ver que en el tiempo t_1 la paradoja 4, aún sin que la compuerta corra, ya ha encontrado un punto fijo para la función, es decir, la bebé Jane ha salido de la nada. A este tiempo, la bebé es dejada en el orfanato. A t_3 , Jane interactúa con John, se enamora y se embaraza. En t_4 , Jane se convierte en John al entrar a la compuerta. A t_5 John conoce al cantinero. En t_6 el cantinero sigue su camino y John viaja hacia atrás en el tiempo para encontrarse con Jane en el pasado. A t_7 , el cantinero interactúa con la versión de John que ya está activo como agente viajero del tiempo y lo salva cuando se quema la cara. En t_8 John se convierte en el cantinero y viaja en el tiempo para encontrarse con su versión más joven y convencerse de entrar en la agencia; al mismo tiempo, el cantinero viaja en el tiempo para regresar a la bebé Jane al orfanato.

4.3. Tratamiento cuántico de las paradojas

Ahora, si no tratamos con un bit clásico, sino con uno cuántico, es decir, si el estado inicial del bit no es clásico, y está denotado por $|\psi\rangle$, que puede o no ser un elemento de la base computacional, el tratamiento de las paradojas cambia y las inconsistencias se resuelven.

4.3.1. Operador densidad

Supongamos que se tiene un sistema cuántico en un número de estados $|\psi_i\rangle$, con sus respectivas probabilidades p_i . A $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ se le llama un ensamble de estados puros. El operador densidad del sistema se define como:

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (4.63)$$

Un sistema cuántico cuyo estado $|\psi\rangle$ se conoce, se denomina como un estado puro y su operador densidad es simplemente:

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi|. \quad (4.64)$$

De otra manera ρ se encuentra en un estado mixto.

Teorema 4.1. *Un operador ρ es un operador densidad asociado a $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ si y sólo si satisface:*

1. $tr(\rho) = 1$.
2. ρ es un operador positivo.

Demostración. Sea $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ un operador densidad.

$$\begin{aligned} tr(\rho) &= \sum_i p_i tr(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \\ &= \sum_i p_i, \end{aligned} \tag{4.65}$$

pero $\sum_i p_i = 1$, de donde:

$$tr(\rho) = 1. \tag{4.66}$$

Sea $|\varphi\rangle$ un vector arbitrario en el espacio de estados.

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \rho | \varphi \rangle &= \sum_i p_i \langle \varphi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \varphi \rangle, \\ &= \sum_i p_i |\langle \varphi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Ahora, si ρ satisface la condición de positividad, debe tener una descomposición:

$$\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|, \tag{4.68}$$

con $|j\rangle$ ortogonales y λ_j eigenvalores de ρ reales y no negativos. Si ρ satisface la condición de la traza, $\sum_j \lambda_j = 1$; de donde un sistema con estado $|j\rangle$ y probabilidad λ_j tendrá un operador densidad ρ . ■

Antes de continuar, enunciaremos los postulados de la mecánica cuántica:

- **Postulado 1:** Asociado a cualquier sistema físico aislado hay un espacio vectorial complejo con producto interno, es decir un espacio de Hilbert, conocido como el *espacio de estados* del sistema. El sistema está descrito completamente por el vector de estado que es un vector unitario en el espacio de estado del sistema.

- **Postulado 2:** La evolución temporal del estado de un sistema cuántico cerrado está descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle, \quad (4.69)$$

- **Postulado 3:** Las mediciones cuánticas están descritas por una colección $\{M_m\}$ de operadores de medición. Estos operadores actúan en el espacio de estados del sistema que se mide. El índice m se refiere a los resultados que puede tener la medición.
- **Postulado 4:** El espacio de estados de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estados de las componentes del sistema físico. Más aún, si los sistemas están numerados del 1 al n , el estado conjunto del sistema es: $|\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$.

Los postulados de la mecánica cuántica pueden ser reformulados en términos del operador densidad. Los postulados 1, 2 y 4 serán la base del tratamiento cuántico de las paradojas del viaje en el tiempo:

- **Postulado 1:** Asociado a cualquier sistema físico aislado hay un espacio vectorial complejo con producto interno, un espacio de Hilbert, conocido como el *espacio de estados* del sistema. El sistema está completamente descrito por su operador densidad.
- **Postulado 2:** La evolución de un sistema cuántico cerrado está descrita por una transformación unitaria. Esto es, el estado ρ del sistema en tiempo t_1 está relacionado al estado ρ' del sistema a tiempo t_2 por un operador unitario U que depende sólo de t_1 y t_2 .

$$\rho' = U\rho U^\dagger, \quad (4.70)$$

- **Postulado 3:** Las mediciones cuánticas están descritas por una colección $\{M_m\}$ de operadores de medición. Estos operadores actúan en el espacio de estados del sistema que se mide. El índice m se refiere a los resultados que puede tener la medición.
- **Postulado 4:** El espacio de estados de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estados de las componentes del sistema físico. Más aún, si los sistemas están numerados del 1 al n , el estado conjunto del sistema es: $\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$.

4.3.1.1. Operador densidad reducido

El operador densidad también es útil para describir subsistemas cuando nos manejamos sistemas compuestos. A esto se le llama el operador densidad reducido. Supongamos que tenemos los sistemas A y B, cuyos estados están descritos por un operador densidad ρ_{AB} . El operador reducido para A se define como:

$$\rho_A \equiv \text{tr}_B(\rho_{AB}). \quad (4.71)$$

Donde tr_B es un mapeo de operadores conocido como la traza parcial sobre el sistema B. La traza parcial sobre B se define como:

$$\text{tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \text{tr}_B(|b_1\rangle\langle b_2|), \quad (4.72)$$

con $|a_1\rangle$ y $\langle a_2|$ cualesquiera dos vectores en el espacio de estados de A y $|b_1\rangle$ y $\langle b_2|$ de B. En este caso:

$$\begin{aligned} |a_1\rangle\langle a_2| \text{tr}_B(|b_1\rangle\langle b_2|) &= \sum_u |a_1\rangle\langle a_2| \langle u|b_1\rangle\langle b_2|u\rangle, \\ &= |a_1\rangle\langle a_2| \langle b_2|b_1\rangle, \\ &= |a_1\rangle\langle a_2|, \\ &= \rho_A. \end{aligned} \quad (4.73)$$

4.3.2. Resolviendo las paradojas de Deutsch

Para tratar las paradojas que resuelve Deutsch en su artículo, primero debemos establecer las condiciones a las que nos referiremos más adelante [11]. Sea $|\psi\rangle$ el estado del qubit de la partícula al entrar por primera vez a las compuertas. Entonces, el operador densidad del bit en su versión joven al entrar en la compuerta es:

$$\hat{\rho}_y = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (4.74)$$

Ya que al viajar en el tiempo, no sabemos qué le ocurre al bit, el operador densidad que le corresponde al qubit en su versión vieja al entrar a la compuerta lo denotaremos simplemente como $\hat{\rho}$. De esta manera, el operador densidad conjunto de los bits al entrar en la compuerta resulta:

$$\hat{\rho}_i = |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho}. \quad (4.75)$$

Como vimos anteriormente, las matrices unitarias se utilizan para indicar las acciones de las compuertas. En el caso de la primera paradoja, la evolución:

$$|x\rangle|y\rangle \Rightarrow |x+y\rangle|y\rangle, \quad (4.76)$$

se transforma en:

$$U = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |x \dot{+} y\rangle |y\rangle \langle x| \langle y|, \quad (4.77)$$

que recordando que, $|x \dot{+} y\rangle$ corresponde a $\langle x|$ y $|y\rangle$ a $\langle y|$, y usando la notación de producto tensorial, podemos reescribir para mayor claridad, como:

$$H_1 = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |x \dot{+} y\rangle \langle x| \otimes |y\rangle \langle y|. \quad (4.78)$$

De esta manera es fácil obtener:

$$H_1^\dagger = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |x\rangle \langle x \dot{+} y| \otimes |y\rangle \langle y|. \quad (4.79)$$

El operador densidad de los dos bits al salir de la compuerta se obtiene aplicando la matriz unitaria de la evolución que le corresponda al operador densidad conjunto:

$$U(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes \hat{\rho})U^\dagger. \quad (4.80)$$

La condición de consistencia implicará ahora, que el operador densidad del bit más joven al salir de la compuerta ($Tr_2[U(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes \hat{\rho})U^\dagger]$, en este caso) sea igual al operador densidad del bit más viejo al entrar a la compuerta $\hat{\rho}$; ya que ambos son el mismo bit. Generalmente la ecuación de consistencia será:

$$\hat{\rho} = Tr_2[U(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes \hat{\rho})U^\dagger]. \quad (4.81)$$

4.3.2.1. Primera paradoja

Para la primera paradoja:

$$H_1 = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |x \dot{+} y\rangle \langle x| \otimes |y\rangle \langle y|, \quad (4.82)$$

de donde

$$H_1^\dagger = \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} |w\rangle \langle w \dot{+} z| \otimes |z\rangle \langle z|. \quad (4.83)$$

El operador densidad de ambos bits al salir de la compuerta es:

$$H_1(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes \hat{\rho})H_1^\dagger = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} |x \dot{+} y\rangle \langle x| \langle \psi| \langle \psi| w\rangle \langle w \dot{+} z| \otimes |y\rangle \langle y| \hat{\rho} |z\rangle \langle z|. \quad (4.84)$$

La condición de consistencia exige que:

$$\hat{\rho} = Tr_2[H_1(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})H_1^\dagger]. \quad (4.85)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} Tr_2[H_1(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})H_1^\dagger] &= \\ &= \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} |x+y\rangle\langle x|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle\langle w+z| Tr_2(|y\rangle\langle y| \hat{\rho}|z\rangle\langle z|), \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} |x+y\rangle\langle x|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle\langle w+z| \langle u|y\rangle\langle y| \hat{\rho}|z\rangle\langle z|u\rangle, \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x,w \in \mathbb{Z}_2} \langle x|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle |x+u\rangle\langle w+u| \langle u| \hat{\rho}|u\rangle, \\ &= \sum_{x,w \in \mathbb{Z}_2} \langle x|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle (|x\rangle\langle w| \langle 0| \hat{\rho}|0\rangle + |x+1\rangle\langle w+1| \langle 1| \hat{\rho}|1\rangle), \\ &= \sum_{x,w \in \mathbb{Z}_2} \langle x|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle (|x\rangle\langle w| + |x+1\rangle\langle w+1|), \end{aligned} \quad (4.86)$$

De donde:

$$\hat{\rho} = \sum_{x,w \in \mathbb{Z}_2} \langle x|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle (|x\rangle\langle w| + |x+1\rangle\langle w+1|), \quad (4.87)$$

Que si desarrollamos la suma sobre los índices:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{x,w \in \mathbb{Z}_2} \langle x|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle (|x\rangle\langle w| + |x+1\rangle\langle w+1|), \\ &= \sum_{w \in \mathbb{Z}_2} \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle (|0\rangle\langle w| + |1\rangle\langle w+1|) + \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle (|1\rangle\langle w| + |0\rangle\langle w+1|), \\ &= \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \\ &\quad + \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) + \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle (|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|), \end{aligned} \quad (4.88)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \hat{I}(|\langle 0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2) + \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \\ &\quad + \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|), \\ &= \hat{I} + 2 \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|), \end{aligned} \quad (4.89)$$

Así que el siguiente operador densidad normalizado que es solución a la condición de consistencia es:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\hat{I} + Re(\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle)(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|). \quad (4.90)$$

Como vemos, el estado $|\psi\rangle = 1$ no genera ahora ninguna inconsistencia como lo hacía en el estado clásico.

4.3.2.2. Segunda paradoja

Para el caso de la segunda paradoja, la acción de la compuerta toma la forma:

$$H_2 = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |1+y\rangle \langle x| \otimes |x\rangle \langle y|. \quad (4.91)$$

El operador de ambos bits al salir de la compuerta es:

$$H_2(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes \hat{\rho}) H_2^\dagger = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} |1+y\rangle \langle x|\psi\rangle \langle \psi|w\rangle \langle 1+z| \otimes |x\rangle \langle y| \hat{\rho} |z\rangle \langle w|. \quad (4.92)$$

Para la condición de consistencia debemos tomar la traza parcial con respecto al segundo sistema.

$$\hat{\rho} = Tr_2[H_2(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes \hat{\rho}) H_2^\dagger]. \quad (4.93)$$

Tomamos entonces:

$$\begin{aligned} Tr_2[H_2(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes \hat{\rho}) H_2^\dagger] &= \\ &= \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} |1+y\rangle \langle x|\psi\rangle \langle \psi|w\rangle \langle 1+z| Tr_2(|x\rangle \langle y| \hat{\rho} |z\rangle \langle w|), \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} |1+y\rangle \langle x|\psi\rangle \langle \psi|w\rangle \langle 1+z| \langle u|x\rangle \langle y| \hat{\rho} |z\rangle \langle w|u\rangle, \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{z,y \in \mathbb{Z}_2} |1+y\rangle \langle u|\psi\rangle \langle \psi|u\rangle \langle 1+z| \langle y| \hat{\rho} |z\rangle, \\ &= \sum_{z,y \in \mathbb{Z}_2} (|\langle 0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2) |1+y\rangle \langle 1+z| \langle y| \hat{\rho} |z\rangle. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Si desarrollamos la suma:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \sum_{y \in \mathbb{Z}_2} (|\langle 0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2) |1\dot{+}y\rangle \langle 1| \langle y|\hat{\rho}|0\rangle + |1\dot{+}y\rangle \langle 0| \langle y|\hat{\rho}|1\rangle, \\
&= (|\langle 0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2) |1\rangle \langle 1| \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle + |0\rangle \langle 1| \langle 1|\hat{\rho}|0\rangle + |1\rangle \langle 0| \langle 0|\hat{\rho}|1\rangle \\
&\quad + |0\rangle \langle 0| \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle), \\
&= (|\langle 0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2)(|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| + |0\rangle \langle 1| p_{10} + |1\rangle \langle 0| p_{01}), \\
&= |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| + \lambda(|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0| p), \\
&= \hat{I} + \lambda(|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|).
\end{aligned} \tag{4.95}$$

De donde tenemos que el operador densidad siguiente, ya normalizado, es solución:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[\hat{I} + \lambda(|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|)], \tag{4.96}$$

Lo cual no impone ninguna restricción sobre los valores de $|\psi\rangle$, eliminando cualquier noción paradójica.

4.3.2.3. Tercera paradoja

Usando la correspondencia $|x\rangle |x\dot{+}1\rangle \sim |x\rangle$,

$$H_3 = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |x\dot{+}y\rangle |x\dot{+}y\dot{+}1\rangle |y\rangle \langle x| \langle x\dot{+}1| \langle y|, \tag{4.97}$$

Se convierte en:

$$H_3 = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |x\dot{+}y\rangle \langle x| \otimes |y\rangle \langle y|, \tag{4.98}$$

Que es similar a la acción de la compuerta H_1 , sin embargo, no es equivalente, ya que actúa sobre un $|\psi\rangle$ que ahora está en el subespacio generado por los estados $|01\rangle$, $|10\rangle$, debido a que simula a los dos bits en las trayectorias de la compuerta en su estado inicial. Sin embargo, no se requiere que los estados finales de los bits estén en ese subespacio. El output $|11\rangle$ por ejemplo, simula el estado en el que las dos trayectorias están ocupadas y el output $|00\rangle$ el estado en el que están desocupadas.

Tenemos:

$$H_3(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes \hat{\rho}) H_3^\dagger = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} |x\dot{+}y\rangle \langle x|\psi_{ab}\rangle \langle \psi_{ab}|w\rangle \langle w\dot{+}z| \otimes |y\rangle \langle y| \hat{\rho}|z\rangle \langle z|. \tag{4.99}$$

La condición de consistencia ahora implica que la traza parcial debe tomarse sobre el primer y el tercer sistema, para obtener la información del bit

más joven al salir de la compuerta e igualarlo al bit más viejo al entrar a la compuerta, entonces:

$$\hat{\rho} = Tr_{1,3}[H_3(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})H_3^\dagger], \quad (4.100)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{w,x,y,z \in \mathbb{Z}_2} Tr_1(|x+y\rangle\langle x+y| \langle x|\psi_a\rangle\langle\psi_a|w\rangle\langle w+z|) |x+y\rangle\langle x+y| \langle x|\psi_b\rangle\langle\psi_b|w\rangle\langle w+z| \\ &Tr_3(|y\rangle\langle y| \hat{\rho} |z\rangle\langle z|), \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,x,y,z \in \mathbb{Z}_2} \langle u|x+y\rangle\langle x|\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}|w\rangle\langle w+z|u\rangle |x+y\rangle\langle w+z| \\ &\langle u|y\rangle\langle y|\hat{\rho}|z\rangle\langle z|u\rangle, \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,x,y,z \in \mathbb{Z}_2} \langle u|x+u\rangle\langle x|\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}|w\rangle\langle w+u|u\rangle |x+u\rangle\langle w+u| \langle u|\hat{\rho}|u\rangle, \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,x,y,z \in \mathbb{Z}_2} \langle w+u|x+u\rangle\langle x|\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}|w\rangle |x+u\rangle\langle w+u| \langle u|\hat{\rho}|u\rangle, \\ &= \sum_{w,x \in \mathbb{Z}_2} \langle w|x\rangle\langle x|\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}|w\rangle |x\rangle\langle w| \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle \\ &+ \langle w+1|x+1\rangle\langle x|\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}|w\rangle |x+1\rangle\langle w+1| \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle, \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_2} \langle x|\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}|x\rangle |x\rangle\langle x| + \langle x|\psi_{ab}\rangle\langle\psi_{ab}|x\rangle |x+1\rangle\langle x+1|, \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_2} |\langle x|\psi_{ab}\rangle|^2 (|x\rangle\langle x| + |x+1\rangle\langle x+1|). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Si sumamos sobre x ;

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\langle 0|\psi\rangle|^2 (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + |\langle 1|\psi\rangle|^2 (|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|) \\ &= (|\langle 0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2) \hat{I}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

De donde el operador densidad:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \hat{I}, \quad (4.103)$$

es la única solución para el estado $|\psi\rangle = |01\rangle$, que es el estado inicial del sistema clásicamente prohibido, y no conduce a ninguna contradicción.

4.3.2.4. Cuarta paradoja

Para el tratamiento de la cuarta paradoja, definimos la acción de la compuerta como el operador:

$$S_f^* = \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} [(|f(x)\rangle \langle x|) * (|x\rangle \langle f(x)|)], \quad (4.104)$$

y definimos el operador densidad de la versión vieja del bit:

$$\hat{\rho} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} p_x |x\rangle \langle x|, \quad (4.105)$$

donde:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} p_x &= 1; \\ 0 &\leq p_x \leq 1. \end{aligned} \quad (4.106)$$

La condición de consistencia es:

$$S_f \hat{\rho} = \hat{\rho}, \quad (4.107)$$

Entonces para $\hat{\rho} = \sum_{y \in \mathbb{Z}_{2^n}} p_y |y\rangle \langle y|$:

$$\begin{aligned} S_f \hat{\rho} &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} \sum_{y \in \mathbb{Z}_{2^n}} [|f(x)\rangle \langle x| p_y |y\rangle \langle y| x\rangle \langle f(x)|], \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} \sum_{y \in \mathbb{Z}_{2^n}} p_y [|f(x)\rangle \langle x| y\rangle \langle y| x\rangle \langle f(x)|], \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}_{2^n}} p_y |f(y)\rangle \langle f(y)|. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Comparando coeficientes con la ecuación (4.105), obtenemos:

$$p_x = \sum_{y|x=f(y) \in \mathbb{Z}_{2^n}} p_y. \quad (4.109)$$

Ahora, definimos $x \in \mathbb{Z}_{2^n}$ idempotente de grado k bajo f ; $D_f(x) = k$ si:

$$f^{(k)}(x) = \underbrace{f(f \dots (f(x)))}_{k\text{-veces}} = x, \quad (4.110)$$

$D_f = 0$, si no existe k tal que se cumpla lo anterior, y $f^0(x) \equiv x$. Un punto fijo de f , x' tiene $D_f(x) = 1$. Para cada f hay al menos un valor idempotente bajo f . Si f es invertible la ecuación (4.109) implica:

$$p_x = p_{f(x)}, \forall x \in \mathbb{Z}_{2^n}. \quad (4.111)$$

De donde la forma del operador densidad que usaremos en la condición de consistencia es:

$$\hat{\rho} = p_x \sum_{i=0}^{D_f(x)-1} |f^{(i)}(x)\rangle \langle f^{(i)}(x)|, \quad (4.112)$$

Sin embargo, hay varias soluciones que cumplen lo anterior. La solución inicial, $|x'\rangle \langle x'|$ es una de ellas, sin embargo queremos evitarla ya que resulta paradójica, ya que x' cumple con la condición de manera inmediata, debido a que $D_f(x) = 1$.

¿Qué pasaría si el único elemento que se repite en la secuencia $\{f(x)|x \in \mathbb{Z}_{2^n}\}$ es x' ; el único punto fijo y no hay otro elemento idempotente. En ese caso, para alguna x_0 la secuencia $\{f^{(i)}(x_0)\}$ es simplemente \mathbb{Z}_{2^n} en un orden diferente. No puede haber $y \in \mathbb{Z}_{2^n}$ tal que $f(y) = x_0$ entonces la ecuación (4.109) implica $p_{x_0} = 0$ que implica $p_x = 0$ para cada x que no sea punto fijo x' . La solución es única, no se requiere entonces información suplementaria.

Una manera de evitar esto sería que el principio evolutivo pusiera algún tipo de restricción en la información inicial, pero estas restricciones serían *retrospectivas*, como las de las paradojas 1-3. Si consideramos los grados de libertad internos de la región que viola la cronología, y los consideramos como aislados del exterior y maximizados debido a la regla de máxima entropía:

El estado de la información suplementaria, i.e. información requerida más allá de la frontera pasada del espaciotiempo para fijar la solución global de las ecuaciones dinámicas, es el estado de máxima entropía compatible con la información inicial. [11]

Serían la fuente de ruido en el cálculo. Supongamos que este ruido es tal que durante el periodo del viaje del futuro de la compuerta G_f a su pasado hay una pequeña probabilidad ϵ de una transición fuera de la correcta base computacional y todos los estados erróneos son igualmente posibles. Entonces la condición de consistencia sería:

$$\hat{\rho} = (1 - \epsilon)S_f\hat{\rho} + \epsilon 2^{-n}\hat{I}, \quad (4.113)$$

Las soluciones serán de forma diagonal:

$$\begin{aligned} p_x &= \epsilon 2^{-n} + (1 - \epsilon) \sum_{y|x=f(y) \in \mathbb{Z}_{2^n}} p_y, \\ x' &= f^{(2^n-1)}(x_0), \\ p_{f^{(i)}(x_0)} &= 2^{-n}(1 - (1 - \epsilon)^{i+1}); 0 \leq i \leq 2^n - 1, \\ p_{x'} &= 2^{-n} \left(\frac{1 - (1 - \epsilon)^{2^n}}{\epsilon} \right), \end{aligned} \quad (4.114)$$

Para $n \gg 1$ y una ϵ fija:

$$p_{x'} \approx \frac{2^{-n}}{\epsilon}, \quad (4.115)$$

de donde la solución paradójica desaparece.

4.3.3. Resolviendo las paradojas compuestas

4.3.3.1. Primera paradoja

La primera paradoja involucra la composición de la compuerta tres con la compuerta uno, como se ve en la figura 4.7. El operador densidad conjunto al entrar en la compuerta sigue siendo el mismo que al tratar las compuertas del modelo de Deutsch. Sin embargo podría decirse que debe agregarse un operador densidad extra que corresponda al bit en su versión vieja que entra a la segunda compuerta. Esto no resulta necesario ya que el operador densidad corresponde al mismo bit, que sale de la compuerta, en un estado desconocido, y la condición de consistencia no fija ninguna restricción sobre este sino hasta salir de la última compuerta.

Sin embargo, esto se hace evidente en el tratamiento de esta primera paradoja. El operador densidad de los bits al salir de la segunda compuerta es el siguiente:

$$\hat{\rho}_o = H_3(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes H_1(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})H_1^\dagger \otimes \hat{\rho})H_3^\dagger. \quad (4.116)$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_o = & \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{r,s \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |r+s\rangle\langle r|\psi_a\rangle\langle\psi_a|m\rangle\langle m+n| \\ & \otimes |r+s\rangle\langle r|x+y\rangle\langle x|\psi_b\rangle\langle\psi_b|w\rangle\langle w+z|m\rangle\langle m+n| \\ & \otimes |y\rangle\langle y|\hat{\rho}|z\rangle\langle z| \otimes |s\rangle\langle s|\hat{\rho}|n\rangle\langle n|. \end{aligned} \quad (4.117)$$

La condición de consistencia ahora implica tomar la traza sobre el primer, tercer y cuarto sistemas.

$$\hat{\rho} = Tr_{1,3,4}[H_3(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes H_1(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})H_1^\dagger \otimes \hat{\rho})H_3^\dagger]. \quad (4.118)$$

Lo que nos deja con:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w, x, r \in \mathbb{Z}_2} \langle w \dot{+} u | \psi_a \rangle \langle \psi_a | x \dot{+} u \rangle \langle x | \psi_b \rangle \langle \psi_b | w \rangle |r \dot{+} u\rangle \langle u | \hat{\rho} | u \rangle^2 \langle r \dot{+} u |, \\
 &= \sum_{w, x, r \in \mathbb{Z}_2} \langle w | \psi_a \rangle \langle \psi_a | x \rangle \langle x | \psi_b \rangle \langle \psi_b | w \rangle |r\rangle \langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle^2 \langle r | \\
 &\quad + \langle w \dot{+} 1 | \psi_a \rangle \langle \psi_a | x \dot{+} 1 \rangle \langle x | \psi_b \rangle \langle \psi_b | w \rangle |r \dot{+} 1\rangle \langle 1 | \hat{\rho} | 1 \rangle^2 \langle r \dot{+} 1 |, \\
 &= \sum_{w, x, r \in \mathbb{Z}_2} \langle x | \psi_b \rangle \langle \psi_b | w \rangle \\
 &\quad (\langle w | \psi_a \rangle \langle \psi_a | x \rangle |r\rangle \langle r | + \langle w \dot{+} 1 | \psi_a \rangle \langle \psi_a | x \dot{+} 1 \rangle |r \dot{+} 1\rangle \langle r \dot{+} 1 |).
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

que sumando sobre los índices resulta:

$$\hat{\rho} = 3\hat{I} + (\langle 0 | \psi \rangle \langle \psi | 1 \rangle + \langle 1 | \psi \rangle \langle \psi | 0 \rangle) \hat{I}. \tag{4.120}$$

De donde el operador densidad que satisface la condición de consistencia es:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \hat{I} + \frac{1}{2} \text{Re}(\langle 0 | \psi \rangle \langle \psi | 1 \rangle) \hat{I}, \tag{4.121}$$

es solución.

4.3.3.2. Segunda paradoja

La segunda paradoja es el caso inverso de la primera, como se muestra en la figura 4.8. En este caso, la aplicación de la compuerta uno tan sólo actúa sobre el primer bit que sale de la compuerta 3. El operador densidad de los bits al salir de la compuerta final es:

$$\hat{\rho}_o = H_1(H_3(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes H_3^\dagger)H_1^\dagger). \tag{4.122}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_o &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w, z \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}_2} |r \dot{+} s\rangle \langle s | x \dot{+} y \rangle \langle x | \psi_a \rangle \langle \psi_a | w \rangle \langle w \dot{+} z | n \rangle \langle m \dot{+} n | \\
 &\quad \otimes |x \dot{+} y\rangle \langle x | \psi_b \rangle \langle \psi_b | w \rangle \langle w \dot{+} z | \otimes |s\rangle \langle s | y \rangle \langle y | \hat{\rho} | z \rangle \langle z | n \rangle \langle n |.
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

La condición de consistencia pide que el bit que sale de la compuerta final sea igualado a la versión vieja del bit que entró en la compuerta:

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_3[H_1(H_3(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes H_3^\dagger)H_1^\dagger)]. \tag{4.124}$$

Si tomamos la traza parcial:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x, r \in \mathbb{Z}_2} \langle x | \psi \rangle \langle \psi | x \rangle |r \dot{+} u\rangle \langle x \dot{+} u| \langle u | \hat{\rho} | u \rangle, \\
 &= \sum_{x, r \in \mathbb{Z}_2} |\langle x | \psi \rangle|^2 (|r\rangle \langle x| \langle 0 | \hat{\rho} | 0 \rangle + |r \dot{+} 1\rangle \langle x \dot{+} 1| \langle 1 | \hat{\rho} | 1 \rangle), \\
 &= \sum_{x, r \in \mathbb{Z}_2} |\langle x | \psi \rangle|^2 (|r\rangle \langle x| + |r \dot{+} 1\rangle \langle x \dot{+} 1|).
 \end{aligned} \tag{4.125}$$

Que sumado sobre los índices resulta:

$$\hat{\rho} = 2\hat{I} + 2(|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|), \tag{4.126}$$

por lo que, el siguiente operador densidad normalizado es solución:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[\hat{I} + (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|)]. \tag{4.127}$$

4.3.3.3. Tercera paradoja

La tercera paradoja, figura 4.9 es una composición de la segunda de Deutsch con la primera de Deutsch, por lo que el operador densidad de las partículas al salir de la compuerta final es:

$$\hat{\rho}_o = H_2(H_1(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes H_1^\dagger)H_2^\dagger), \tag{4.128}$$

Que explícitamente queda:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_o &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w, z \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}_2} |1 \dot{+} s\rangle \langle r | x \dot{+} y \rangle \langle x | \psi \rangle \langle \psi | w \rangle \langle w \dot{+} z | m \rangle \langle 1 \dot{+} n | \\
 &\otimes |r\rangle \langle s | y \rangle \langle y | \hat{\rho} | z \rangle \langle z | n \rangle \langle m |, \\
 &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w, x \in \mathbb{Z}_2} |1 \dot{+} s\rangle \langle r | x \dot{+} s \rangle \langle x | \psi \rangle \langle \psi | w \rangle \langle w \dot{+} n | m \rangle \langle 1 \dot{+} n | \\
 &\otimes |r\rangle \langle s | \hat{\rho} | n \rangle \langle m |.
 \end{aligned} \tag{4.129}$$

La condición de consistencia sencillamente nos pide igualar la traza parcial sobre el segundo sistema al operador densidad del bit en su versión más vieja, por las mismas razones que en las anteriores:

$$\hat{\rho} = Tr_2[H_2(H_1(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes H_1^\dagger)H_2^\dagger)]. \tag{4.130}$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w, x \in \mathbb{Z}_2} |1 \dot{+} s\rangle \langle r | x \dot{+} s\rangle \langle x | \psi\rangle \langle \psi | w\rangle \langle w \dot{+} n | m\rangle \langle 1 \dot{+} n | \\
 &\quad \langle u | r\rangle \langle s | \hat{\rho} | n\rangle \langle m | u\rangle, \\
 &= \sum_{s, w \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x, n \in \mathbb{Z}_2} |1 \dot{+} s\rangle \langle w \dot{+} n | x \dot{+} s\rangle \langle x | \psi\rangle \langle \psi | w\rangle \langle 1 \dot{+} n | \langle s | \hat{\rho} | n\rangle,
 \end{aligned} \tag{4.131}$$

Sumando:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \hat{I}(|\langle 0 | \psi\rangle|^2 + |\langle 1 | \psi\rangle|^2) + 2\lambda \text{Re}(\langle 0 | \psi\rangle \langle \psi | 1\rangle (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|)), \\
 &= \hat{I} + 2\lambda \text{Re}(\langle 0 | \psi\rangle \langle \psi | 1\rangle (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|)),
 \end{aligned} \tag{4.132}$$

De donde, el operador densidad normalizado que satisface la condición de consistencia es:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \hat{I} + \lambda (\text{Re}(\langle 0 | \psi\rangle \langle \psi | 1\rangle) (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|)), \tag{4.133}$$

es solución.

4.3.3.4. Cuarta paradoja

En la cuarta paradoja tenemos la composición contraria que en la paradoja anterior, que resulta en la figura 4.10, por lo que el operador densidad de los bits al salir de la compuerta es:

$$\hat{\rho}_o = H_1(H_2(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes H_2^\dagger)H_1^\dagger). \tag{4.134}$$

que al desarrollarlo resulta:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_o &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w, z \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}_2} |x \dot{+} y\rangle \langle x | 1 \dot{+} s\rangle \langle r | \psi\rangle \langle \psi | m\rangle \langle 1 \dot{+} n | w\rangle \langle w \dot{+} z | \\
 &\quad \otimes |y\rangle \langle y | r\rangle \langle s | \hat{\rho} | n\rangle \langle m | z\rangle \langle z|.
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

La condición de consistencia:

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_2[H_1(H_2(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes H_2^\dagger)H_1^\dagger)]. \tag{4.136}$$

Explícitamente resulta:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w, z \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}_2} |x \dot{+} y\rangle \langle x | 1 \dot{+} s\rangle \langle r | \psi\rangle \langle \psi | m\rangle \langle 1 \dot{+} n | w\rangle \langle w \dot{+} z | \\
 &\quad \langle u | y\rangle \langle y | r\rangle \langle s | \hat{\rho} | n\rangle \langle m | z\rangle \langle z | u\rangle, \\
 &= \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{s, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x, w \in \mathbb{Z}_2} |x \dot{+} u\rangle \langle x | 1 \dot{+} s\rangle \langle \psi | \psi\rangle \langle 1 \dot{+} n | w\rangle \langle s | \hat{\rho} | n\rangle \langle w \dot{+} u |, \\
 &= \sum_{s, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x, w \in \mathbb{Z}_2} \langle x | 1 \dot{+} s\rangle \langle 1 \dot{+} n | w\rangle (|x\rangle \langle s | \hat{\rho} | n\rangle \langle w | + |x \dot{+} 1\rangle \langle s | \hat{\rho} | n\rangle \langle w \dot{+} 1 |).
 \end{aligned} \tag{4.137}$$

Al sumar sobre los índices:

$$\hat{\rho} = 3\hat{I} + 2\lambda(|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|). \tag{4.138}$$

El operador densidad normalizado resulta:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{3}\lambda(|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|), \tag{4.139}$$

es solución.

4.3.3.5. Quinta paradoja

La quinta paradoja es una composición de tres compuertas uno, como se muestra en la figura 4.11.

$$\hat{\rho}_o = H_1(H_1(H_1(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes H_1^\dagger)H_1^\dagger)H_1^\dagger). \tag{4.140}$$

Al desarrollarlo:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_o &= \sum_{l, h \in \mathbb{Z}_2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}_2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w, z \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}_2} |r \dot{+} s\rangle \langle r | w \dot{+} z\rangle \langle w | x \dot{+} y\rangle \langle x | \psi\rangle \\
 &\quad \langle \psi | m\rangle \langle m \dot{+} n | p\rangle \langle p \dot{+} q | l\rangle \langle l \dot{+} h | \otimes |s\rangle \langle s | z\rangle \langle z | \hat{\rho} | q\rangle \langle q | h\rangle \langle h |.
 \end{aligned} \tag{4.141}$$

La condición de consistencia:

$$\hat{\rho} = Tr_2[H_1(H_1(H_1(|\psi\rangle \langle \psi| \otimes H_1^\dagger)H_1^\dagger)H_1^\dagger)]. \tag{4.142}$$

al sumar sobre los índices se reduce a:

$$\hat{\rho} = 3\hat{I} + 3Re(\langle 0 | \psi\rangle \langle \psi | 1\rangle)(|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|). \tag{4.143}$$

Por lo que el siguiente operador densidad normalizado que es solución a la condición de consistencia es:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{2}Re(\langle 0 | \psi\rangle \langle \psi | 1\rangle)(|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|). \tag{4.144}$$

4.3.3.6. Sexta paradoja

La sexta paradoja es nuevamente una composición de la compuerta 1 con la compuerta 3, sin embargo esta vez, la compuerta 1, actúa sobre las dos salidas de la compuerta tres, por lo que llamaremos a la acción de la compuerta H_{1b} . Esta paradoja se muestra en la figura 4.12.

$$\hat{\rho}_o = H_{1b}(H_3(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes H_3^\dagger)H_{1b}^\dagger). \quad (4.145)$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_o = & \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{r,s \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,z \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |x+y\rangle\langle x|r+s\rangle\langle r|\psi\rangle\langle\psi|m\rangle\langle m+n|w\rangle\langle w+z| \\ & \otimes |y\rangle\langle y|s\rangle\langle s|\hat{\rho}|n\rangle\langle n|z\rangle\langle z|. \end{aligned} \quad (4.146)$$

La condición de consistencia pide que el bit que sale de la compuerta final sea igualado a la versión vieja del bit que entró en la compuerta:

$$\hat{\rho} = Tr_2[H_{1b}(H_3(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes H_3^\dagger)H_{1b}^\dagger)]. \quad (4.147)$$

Si tomamos la traza parcial:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & \sum_{u \in \mathbb{Z}_2} \sum_{x,r \in \mathbb{Z}_2} \sum_{m,r \in \mathbb{Z}_2} \sum_{w,x \in \mathbb{Z}_2} |x+u\rangle\langle x|r+u\rangle\langle r|\psi\rangle\langle\psi|m\rangle\langle m+u|w\rangle\langle w+u| \\ & \otimes \langle u|\hat{\rho}|u\rangle, \\ = & \sum_{w,x \in \mathbb{Z}_2} \langle x|\psi\rangle\langle\psi|w\rangle(|x\rangle\langle w| + \langle x|x+1\rangle\langle w+1|w\rangle|x+1\rangle\langle w+1|). \end{aligned} \quad (4.148)$$

Que sumado sobre los índices resulta:

$$\hat{\rho} = \hat{I}(|\langle 0|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2) + Re(\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle)(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|). \quad (4.149)$$

por lo que, el siguiente operador densidad es solución:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{2}Re(\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle)(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|). \quad (4.150)$$

De lo anterior podemos ver que la quinta y la sexta paradojas resultan equivalentes, ya que la solución a las condiciones de consistencia de ambas, es decir, el operador densidad, que determina el estado de los bits de salida de la compuerta, es el mismo, por lo que el cálculo de las paradojas séptima y octava se reducirá a uno sólo.

4.3.3.7. Séptima y octava paradojas

Para estas paradojas usaremos el operador densidad de la ecuación (4.150), al que le aplicaremos el operador; estas paradojas podemos verlas en las figuras 4.13 y 4.14:

$$S_f \hat{\rho} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} [(|f(x)\rangle \langle x|) \hat{\rho} (|x\rangle \langle f(x)|)]. \quad (4.151)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} S_f \hat{\rho} &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} [(|f(x)\rangle \langle x|) \frac{1}{2} \hat{I} + \frac{1}{2} \langle 0|\psi\rangle \langle \psi|1\rangle (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|) (|x\rangle \langle f(x)|)], \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} [\frac{1}{2} (|f(x)\rangle \langle x|) \hat{I} (|x\rangle \langle f(x)|) + \frac{1}{2} [(|f(x)\rangle \langle x|) \langle 0|\psi\rangle \langle \psi|1\rangle (|0\rangle \langle 1| (|x\rangle \langle f(x)|))] \\ &\quad + \langle 0|\psi\rangle \langle \psi|1\rangle \frac{1}{2} [(|f(x)\rangle \langle x|) |1\rangle \langle 0|] (|x\rangle \langle f(x)|)], \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} \frac{1}{2} 2 [(|f(x)\rangle \langle x|x\rangle \langle f(x)|)] + \langle 0|\psi\rangle \langle \psi|1\rangle \frac{1}{2} [(|f(x)\rangle \langle x|0\rangle \langle 1|x\rangle \langle f(x)|)] \\ &\quad + \langle 0|\psi\rangle \langle \psi|1\rangle \frac{1}{2} [(|f(x)\rangle \langle x|1\rangle \langle 0|x\rangle \langle f(x)|)], \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} [(|f(x)\rangle \langle f(x)|)] \\ &\quad + \langle 0|\psi\rangle \langle \psi|1\rangle \frac{1}{2} ([(|f(x)\rangle \langle 1|0\rangle \langle f(x)|)] + [(|f(x)\rangle \langle 0|1\rangle \langle f(x)|)]), \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_{2^n}} |f(x)\rangle \langle f(x)| \end{aligned} \quad (4.152)$$

Si ahora definimos:

$$\hat{\rho} = p_x \sum_{i=0}^{D_f(x)-1} |f^{(i)}(x)\rangle \langle f^{(i)}(x)|. \quad (4.153)$$

y comparamos coeficientes, encontramos que:

$$p_x = 1. \quad (4.154)$$

Lo cual no permite ninguna solución paradójica, como la que depende del punto fijo $|x'\rangle \langle x'|$.

4.4. ¿Qué sucedió con las paradojas?

La naturaleza contradictoria e inconsistente de la evolución de cada sistema recaía en las restricciones impuestas por la condición de consistencia para la información que viajaba a través de un bucle en el espaciotiempo.

Sin embargo, en la cuarta paradoja de las analizadas en el artículo de Deutsch, nos vemos en la necesidad de incluir *información suplementaria*; toda regla que especifique la información suplementaria, así como información inicial, debe satisfacer el principio evolutivo, que de acuerdo a Deutsch, puede formularse de manera informal como:

“El conocimiento viene a la existencia sólo mediante un proceso evolutivo”

De esta manera la información suplementaria en un sistema que viola la cronología no puede contener conocimiento que se encuentre más allá de aquel en la información inicial contenida en la hipersuperficie de tipo espacio inmediata al pasado no ambiguo de la región.

Además de esto tenemos la regla de máxima entropía, que permite determinar el estado de la condición de consistencia como función de la condición inicial. En la primera paradoja, en la ecuación (4.90), la regla de máxima entropía fija la condición de consistencia al estado máximo mixto:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \hat{I}. \quad (4.155)$$

En la paradoja 2, ecuación (4.96), sucede lo mismo, haciendo que $\lambda = 0$; mientras que en la paradoja 3, ecuación (4.103) no es necesaria ningún tipo de información suplementaria. En la paradoja 4, la información suplementaria fija los coeficientes ρ_x .

El hecho de que la regla de máxima entropía fije a la condición de consistencia y al sistema en un estado necesario para excluir las evoluciones paradójicas y asegurar el principio evolutivo, puede indicar ciertas características sobre la naturaleza del tiempo. Un ejemplo de ello, es el estado de máxima entropía en el Universo; el equilibrio térmico, en el que la evolución temporal, es decir, la dirección del tiempo se vuelve irrelevante. No existe entonces una diferenciación entre pasado y futuro, ya que no ocurren cambios.

El principio de máxima entropía fija la información suplementaria y ello determina completamente al sistema, evitando soluciones paradójicas. Por ejemplo, si en la paradoja 1 de Deutsch, un bit entra en la compuerta en estado $|1\rangle$, se aproxima a la región que viola la cronología e interactúa con el bit en su versión más vieja, que calculamos está en estado mixto $\frac{1}{2} \hat{I}$, en el que los valores 0 y 1, ocurren con el mismo peso, el bit más joven mide al más viejo

y reemplaza su valor con la negación del valor medido. Entra entonces en el estado $\frac{1}{2}\hat{I}$, ya que una mezcla de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ con igual peso, es igual a una de $|1\rangle$ y $|0\rangle$ con el mismo peso. Posteriormente el bit viaja en el tiempo en el papel del bit más viejo y finalmente sale por la compuerta.

En el caso de la segunda paradoja ocurre algo parecido, a diferencia que el bit no necesita entrar en estado $|1\rangle$ para negar el valor medido del bit en su versión vieja. En la paradoja 3, la partícula comienza en la trayectoria que le permite viajar en el tiempo, se encuentra con una versión vieja de sí misma en un estado mixto, de presencia y ausencia, y entonces entra ella misma en un estado mismo de prevenir y no prevenir su viaje en el tiempo.

En las paradojas compuestas tenemos historias similares, ya que las condiciones de consistencia se reducen al estado máximo mixto $\frac{1}{2}\hat{I}$ con la condición de máxima entropía para las paradojas 1, 3 y 4, con ecuaciones (4.121), (4.133) y (4.139), en cuyo caso el bit presenta una historia similar a la de las primera y segunda paradoja de Deutsch. En los casos de la segunda paradoja compuesta, ecuación (4.127), tenemos el mismo caso de la segunda paradoja de Deutsch pero con $\lambda = 1$ fija, por lo que la regla de máxima entropía la reduciría de nuevo, al caso de la paradoja 2. La quinta y sexta paradojas se reducen a dejar al bit a su estado original y la séptima y la octava se resuelven al fijar el coeficiente $p_x = 1$.

Las implicaciones que tiene la solución de las paradojas sobre la física y la computabilidad de los fenómenos del universo van íntimamente relacionadas. Para ello tendremos que profundizar en la tesis de Church-Turing, y el principio de Church-Turing-Deutsch. La posibilidad del viaje en el tiempo, y el poder computarlo, nos abre un horizonte que dibuja nuevas posibilidades en el entendimiento de la naturaleza.

Capítulo 5

El principio de Church-Turing-Deutsch

La Tesis de Church-Turing, llamada así por primera vez, por el alumno de Church, Stephen Kleene en 1967[9], trata sobre el concepto de *métodos efectivos*, tanto en la lógica como en matemáticas y en computación. Esta tesis puede ser formulada de varias formas equivalentes y formulaciones como el principio de Church-Turing-Deutsch vinculan a la computación, y en especial a la computación cuántica con el mundo físico, ya que establecen que todo fenómeno físico puede ser modelado por una máquina universal de Turing; por lo que resulta importante para el desarrollo de este trabajo.

En este capítulo se presentarán las contribuciones de Turing y de Church, para finalmente mostrar la Tesis de Church-Turing, así como el principio de Church-Turing-Deutsch, y las conexiones que tiene con el presente trabajo.

5.1. Tesis de Turing

Comenzaremos por definir a qué nos referimos cuando hablamos sobre un *método efectivo*[9].

Definición 5.1. *Un método M , que se usa para alcanzar cierto resultado, es efectivo si:*

1. *M es un conjunto finito de instrucciones exactas. Cada instrucción expresada por un número finito de símbolos.*
2. *M producirá, si se lleva a cabo sin errores, el resultado deseado en un número finito de pasos.*

3. *Un humano es capaz de llevar acabo M (en principio o en práctica) sin ayuda de máquina alguna, sino tan sólo usando lápiz y papel.*
4. *M no requiere ninguna clase de intuición de parte del humano que realiza el método.*

Ésta noción de efectividad resulta, sin embargo, informal, ya que el no requerir de alguna intuición por parte del humano que realiza el método, no es suficientemente rigurosa ni clara. El concepto formal propuesto por Turing fue el de *computabilidad por una máquina de Turing*. También se requiere expresar en términos de funciones el argumento, diciendo, que se requiere que haya un método efectivo para obtener los valores de una función. De esta manera, el argumento es, que si hay un método efectivo para obtener los valores de una función matemática, la función es computable por una máquina de Turing. Definimos entonces:

Definición 5.2. *Una función $f : X \rightarrow Y$ es efectivamente calculable si existe un método efectivo M que nos permita, dado cualquier $x \in X$ obtener el valor $f(x)$.*

Hablar entonces de un método efectivo, en términos de una máquina de Turing, se convierte en hablar de programas para dicha máquina. Turing establece la que será nuestra primera formulación de la Tesis de Turing:

"Las Máquinas Computables Lógicas pueden hacer cualquier cosa que se describa como puramente mecánica"(Turing, 1948; 414)

Cabe resaltar que cuando Turing se refiere a Máquinas Computables Lógicas (LCM), sus palabras para máquinas de Turing, se refiere a computadores, es decir, seres humanos que en su época tenían la tarea de realizar las operaciones y cálculos que hoy adjudicamos a las computadoras actuales.

La tesis de Turing toca los *números computables*; ya que para él resultaba prácticamente equivalente estudiar estos a estudiar las funciones computables, definidas anteriormente. Definimos un número computable como:

Definición 5.3. *Un número computable es aquel número real cuya representación decimal puede ser generada progresivamente, dígito a dígito por una máquina de Turing.*

Existen algunos números reales que no son computables. La tesis de Turing para los números computables es la siguiente:

"Los números computables incluyen todos los números que serían naturalmente considerados como computables"(Turing, 1936; 58)

En esta afirmación Turing establece que los números computables, es decir, cada número real cuya representación decimal puede ser calculada por un método efectivo está incluido en los números cuya parte decimal puede calcular una máquina de Turing. Finalmente podemos entonces enunciar la Tesis de Turing como:

Tesis de Turing: Aquello que es efectivamente calculable es computable.

5.2. El problema de la decisión

En 1928 David Hilbert introdujo el problema de la decisión o *Entscheidungsproblem* a las matemáticas. Dicho problema consiste en preguntarse si existe un proceso efectivo para determinar si una fórmula A del cálculo funcional es demostrable. Tratando de responder a esta pregunta fue como Turing desarrolló su Tesis, llegando a la conclusión de que era irresoluble. Church llegaría al mismo resultado, de manera independiente, reformulando el problema de la decisión como sigue[8]:

"Por el *Entscheidungsproblem* de un sistema de lógica simbólica se entiende el problema de encontrar un método efectivo mediante el cual, dada una expresión Q en la notación del sistema, pueda determinarse si Q es demostrable o no en el sistema"(Church, 1936b; 41)

Church y Kleene usaron el concepto de λ -definible para llegar al mismo resultado que Turing. Una función se dice λ -definible si los valores de la función pueden obtenerse por un proceso de substitución repetida. Los conceptos de λ -definible y recursiva son equivalentes. Church propuso[7]:

"Definimos la noción de una función de enteros positivos efectivamente calculable, identificándola con la noción de una función recursiva de enteros positivos (o una función λ -definible de enteros positivos)"(Church, 1936a; 356)

Turing estableció que el concepto de λ -definibilidad y su concepto de computabilidad eran equivalentes, probando que todas las secuencias λ -definibles son computables y viceversa. La tesis de Church resulta entonces:

Tesis de Chruch: Una función de enteros positivos es efectivamente calculable si y sólo si es λ -definible o recursiva.

De manera que la Tesis de Church-Turing puede enunciarse como sigue:

Tesis de Chruch-Turing: Una función de enteros positivos es efectivamente calculable si y sólo si es recursiva. Se dice que un problema de decisión es recursivamente resoluble si existe un procedimiento efectivo para resolverlo. [34]

5.3. Principio Church-Turing-Deutsch

El problema que plantea el Principio Chruch-Turing-Deutsch es uno de los más interesantes en la física actual, que ha estado en la mente de los físicos desde que David Deutsch propuso su principio en 1985. El Principio de Church-Turing-Deutsch (CTD), conecta la teoría de la computación con la física y abre las puertas para nuevas teorías de la física, o por lo menos su exploración, y es de una naturaleza que resulta muy intuitiva y familiar, y hasta podría decirse obvia, para alguien de nuestra generación.

Hoy en día estamos acostumbrados a que una computadora simule las condiciones de una aeronave, un automóvil, una explosión, o la evolución del universo. Implícitamente esto quiere decir que una computadora, dados el tiempo y la memoria necesarias, puede simular casi cualquier proceso físico.

Deutsch observa un hecho que puede parecer trivial, pero que había pasado desapercibido; la computación es un proceso físico, ya que debe ser realizado por un dispositivo físico, que debe obedecer las leyes de la física.

Así para la física Newtoniana, por ejemplo, podemos simular un sistema físico arbitrario que la replique. Es el caso del modelo de computación de "bola de billar" que Fredkin y Toffoli desarrollaron en 1982, en el que se pueden realizar computaciones haciendo colisionar bolas de billar; usando física Newtoniana. Fredkin y Toffoli mostraron que su modelo puede llevarse acabo usando máquinas como las que Turing propuso.

Para hablar de manera más formal sobre el CTD, debemos primero definir el concepto de máquina universal de Turing. El problema con las máquinas de Turing es que para cada computación diferente, es decir para cada relación de entrada (input) y salida (output), debe construirse una máquina diferente. Definimos entonces:

Definición 5.4. *Una máquina universal de Turing, es aquella que junto con las entradas (input) en la cinta, toma la descripción de una máquina M . La*

máquina universal entonces simula la máquina M con los valores de las entradas (input) de la cinta. Una máquina universal de Turing puede entonces, simular cualquier otra máquina de Turing.

El principio CTD puede entonces enunciarse, de una manera simple pero poderosa:

Principio de Church-Turing-Deutsch: Todo proceso físico puede ser simulado por un máquina de computación universal.

Al ver dicho principio, guarda un gran poder, ya que sugiere que hay un sistema físico, idealizado y con memoria ilimitada, que puede ser utilizado para simular cualquier otro sistema en el universo.

5.4. La plausibilidad de las máquinas del tiempo

La computación cuántica nos permitió hasta ahora avanzar en la exploración del viaje en el tiempo al indagar en las paradojas que usualmente surgen por la violación a la cronología. Contrario a lo que se asume comúnmente, se ha mostrado que no hay razón, ni lógica, ni física, en términos de la física que conocemos en la actualidad, para que las curvas cerradas tipo tiempo no existan.

Sin embargo afirmar su existencia es una tarea completamente diferente que concierne a otras teorías mucho más fundamentales. La unificación de la relatividad y la mecánica cuántica podrían quizá echar luz sobre este terreno. Si este tipo de curvas existieran surgirían varias preguntas, ¿sería posible la manipulación humana? ¿Cómo afectarían la existencia de nuestra especie?

A pesar de que hemos llegado a un límite pragmático, el Principio CTD nos proporciona una manera de unir la teoría de la computación con el mundo físico, para por lo menos soñar un poco. Ya se ha formulado en la sección anterior el principio Church-Turing-Deutsch, sin embargo para reformularlo de manera más formal, recurriremos a las palabras del propio Deutsch:

"Todo sistema físico finítamente realizable puede ser simulado por un modelo de máquina computable universal que opere por medios finitos".[10]

Diremos que un sistema físico A puede simular a otro sistema B , si A puede programarse para ser denotacionalmente equivalente a B . El modelo de máquina no tiene que ser un objeto físico. Se dice que tal modelo existe, si las

leyes de la física no prohíben que sus propiedades idealizadas existen arbitrariamente cercanas a la realidad en objetos reales.

Deutsch demostró en [10], que el principio de CTD es cierto para sistemas cuánticos finitos en ausencia de regiones que violan la cronología. Si ahora, como sugieren los resultados obtenidos, tenemos una computadora universal con respecto a las regiones que violan la cronología C^\pm , entonces es posible la elaboración de máquinas del tiempo. La existencia de dicha computadora requeriría la fabricación o existencia de los delays negativos que hacen las veces de curvas cerradas tipo tiempo, y tendrían que ser fabricados *in situ*.

El resultado es aún más fuerte, ya que si se analiza a profundidad, el principio de CTD requiere C^\pm exista si y sólo si las regiones que violan la cronología existen en el universo. Podemos afirmar entonces, ya que las violaciones a la cronología generan nuevas formas de computación:

"Si hay una amplitud diferente a cero para que ocurra una violación a la cronología en algún lugar del espaciotiempo, es posible crear una máquina del tiempo".[11]

Capítulo 6

Conclusiones

El entendimiento de la realidad, y en particular del espacio y el tiempo, ha cambiado a través de la historia. Hasta el desarrollo de la teoría de la relatividad, el papel del tiempo que comúnmente se aceptaba era el tiempo que la mecánica Newtoniana había establecido; inmutable y absoluto. Se concebía el tiempo como algo que *fluía*, una variable real t . El tiempo era una cantidad física que podía ser medida por instrumentos físicos, relojes, y que jugaba el papel de variable independiente en la evolución de un sistema físico[4].

Sin embargo con la introducción de la relatividad especial, la noción del tiempo como absoluto y estático se vino abajo, así como el concepto de simultaneidad; teniendo que redefinir el tiempo a algo que podía deformarse y que no era independiente del espacio. En la teoría de la relatividad general sin embargo, podemos distinguir distintos tipos de tiempo. Por un lado esta el tiempo t que funge como una mera coordenada y por otro lado está el tiempo propio s , medido a lo largo de una línea de mundo.

Mientras que el tiempo t juega el mismo papel que el tiempo no relativista como parámetro de evolución de las ecuaciones de movimiento, siendo éstas las ecuaciones de Einstein, la interpretación de este tiempo relativista es completamente diferente a su contra-parte no relativista. El tiempo que se mide con los instrumentos físicos a lo largo de las líneas de mundo es s , no t . La coordenada t se elige libremente, y carece de interpretación física particular, gracias a la invarianza de las ecuaciones de Einstein frente a cambios de coordenadas.

En la relatividad general no hay una cantidad preferida que juegue el papel de parámetro de evolución, como lo hacía el tiempo en la mecánica Newtoniana. Cuando tratamos con el tiempo y el espacio surgen relaciones entre los eventos que suceden dentro de ellos, y podemos hablar entonces de si uno de estos eventos tiene alguna influencia en el otro, o incluso si lo precede, lo sucede

o si no están relacionados de ninguna manera. De este modo es como podemos hablar de la causalidad y la cronología.

En esta tesis se mostró que la relatividad general admite soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein con espaciotiempos en los que se viola la cronología, como el universo de Gödel, y que los argumentos, supuestamente físicos y lógicos, concernientes a las paradojas que surgen cuando se trabaja con estas soluciones pueden resolverse usando una aproximación que modela dichas paradojas con la teoría de la computación cuántica. Para ello primero hemos *traducido* estas paradojas al lenguaje de la teoría de la computación clásica, y hemos establecido condiciones de consistencia que el viaje en el tiempo claramente violaba, para después aplicar los postulados de la mecánica cuántica, reformulados para el operador densidad, al análisis de las mismas; encontrando que las paradojas que ocurrían clásicamente, desaparecen bajo este método, ya que las condiciones de consistencia se cumplen.

El problema de las curvas cerradas tipo tiempo y de los espaciotiempos que violan la cronología se reduce entonces a uno en el que el conocimiento y la información que se maneja no violen principios filosóficos que asumimos en la filosofía de la ciencia, como el principio evolutivo, que dice que el conocimiento no puede crearse de la nada. Regularmente, para la evolución consistente, es decir, para evitar la formación de paradojas, se requiere de información suplementaria en las regiones que violan la cronología, es decir, información adicional a la información inicial en la frontera pasada del espaciotiempo para fijar una solución a las ecuaciones dinámicas, cuyo estado debe ser el de máxima entropía[11].

Finalmente concluimos que el principio de Churuch-Turing-Deutsch, que establece que todo sistema físico finítamente realizable puede ser simulado por una máquina computable universal implica que si existen curvas cerradas tipo tiempo, en algún lugar del espaciotiempo, es posible la construcción de máquinas del tiempo.

Sin embargo la existencia de curvas cerradas tipo tiempo nos hace preguntarnos sobre la naturaleza del universo; particularmente sobre el determinismo. El determinismo causal es la noción de que cada evento está fijado por los eventos que le preceden así como por las condiciones iniciales y las leyes naturales. Sin embargo en espaciotiempos donde un evento del futuro puede influir en el pasado, esta definición de determinismo resulta insuficiente.

Para comenzar será útil distinguir entre predictibilidad y determinismo, ya que en un universo en el que existen curvas cerradas tipo tiempo, un individuo que esté viajando por una línea de mundo en una curva cerrada temporal, puede no tener el poder de predecir lo que sucederá y no por ello sus acciones dejarán de estar determinadas. Para Laplace, un demonio que fuera un obser-

vador con el conocimiento de todas las condiciones del mundo, podría predecir cada instante en la vida de una persona, como si se tratara de una marioneta. Este pensamiento se repite cuando Schopenhauer dice:

"Los hombres se equivocan, en cuanto piensan que son libres; y esta opinión sólo consiste en que son conscientes de sus acciones e ignorantes de las causas por las que son determinadas"[28]

Sin embargo, como vemos, la predictibilidad va claramente ligada al conocimiento, es decir, al sistema de referencia, no al estado de determinación de las cosas. Como ejemplo tenemos el caso del caos, que es determinista pero impredecible.

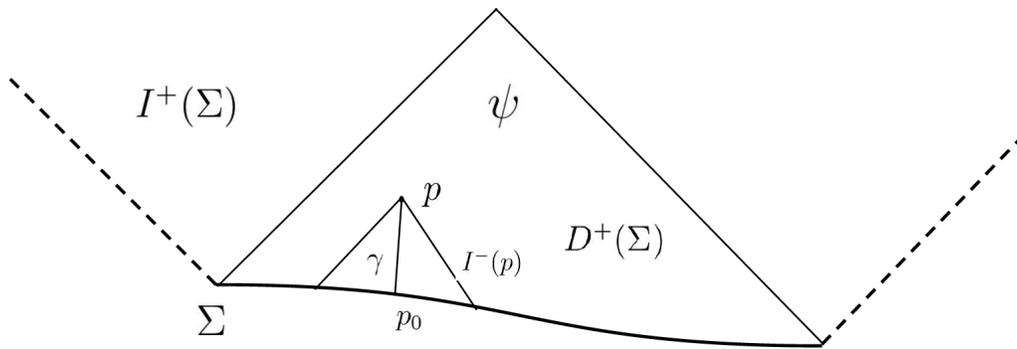


Figura 6.1: El diagrama representa una superficie Σ acronal con su dominio de dependencia $D^+(\Sigma)$, en el que se encuentra un punto p , determinado por las condiciones iniciales.

Finalmente intentaremos definir el determinismo para el caso de un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, donde se tiene una superficie acronal Σ , como en la figura 6.1, con su dominio de dependencia $D^+(\Sigma)$, y el pasado de un punto p intersectando a la superficie Σ . Decimos que la evolución del campo ψ , el valor de $\psi(p)$ está determinada totalmente, si:

$$\begin{aligned} p \in D^+(\Sigma), \\ I^-(p) \cap \Sigma \subset \Sigma. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Denotamos la evolución de ψ como:

$$\psi(p) = H[\psi(I^-(p) \cap \Sigma)], \quad (6.2)$$

donde,

$$\psi(I^-(p) \cap \Sigma) = \psi_0, \quad (6.3)$$

y $H[\psi(I^-(p) \cap \Sigma)]$ denota la evolución de las condiciones iniciales. Como vemos, una geodésica γ , tipo tiempo, inextensible al pasado desde p interseca a Σ sólo una vez.

Sin embargo, si tenemos una superficie como la de la figura 6.2, que se curva sobre sí misma, en la que una geodésica γ tipo tiempo, inextensible al pasado interseca Σ más de una vez, nuestra noción de determinismo debe cambiar.

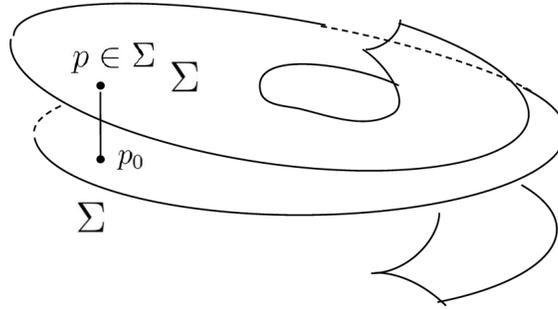


Figura 6.2: El diagrama representa una superficie Σ que se curva sobre sí misma en una espiral con una curva tipo tiempo γ que la interseca más de una vez, y que pasa por p .

El diagrama en dos dimensiones de la misma superficie nos facilita el análisis de las condiciones iniciales y el dominio de dependencia, como se muestra en la figura 6.3. En este caso tenemos los mismos requerimientos del determinismo causal Laplaciano:

$$\begin{aligned} p &\in D^+(\Sigma), \\ I^-(p) \cap \Sigma &\subset \Sigma. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Sin embargo, encontramos que:

$$p \in \Sigma, \quad (6.5)$$

por lo que p , es parte de las condiciones iniciales y por lo tanto $\psi(p)$ y p ya están determinados. En esta nueva definición de determinismo que llamaremos Gödeliano, la evolución es parte de las condiciones iniciales, lo cual tiene sentido, ya que el futuro afecta al pasado.

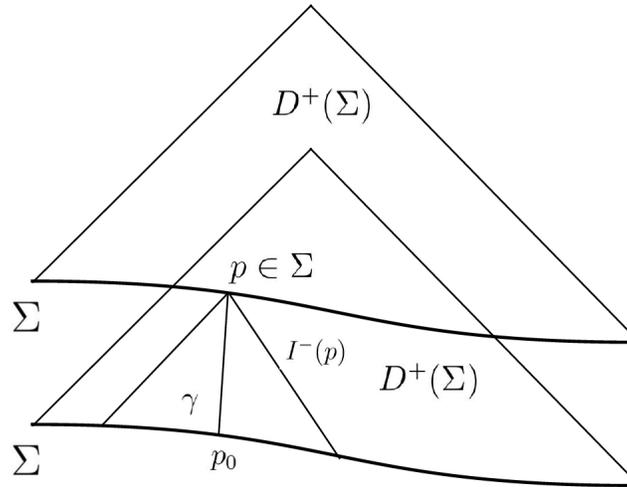


Figura 6.3: Diagrama en 2 dimensiones de la superficie de la 6.2.

Podemos concluir de todo lo anterior que quizá ante la existencia de curvas cerradas tipo tiempo, no son las nociones de causalidad, tiempo o incluso determinismo las que se desmoronan, sino que necesitan una reformulación que refleje un entendimiento más profundo de la realidad. Tal vez el hecho de que la relatividad general no prohíba la existencia de este tipo de curvas y que las paradojas que surgen de su tratamiento puedan resolverse, implica que nuestra experiencia del universo está limitada por nuestra consciencia y nuestros sentidos, pero nuestro entendimiento del mismo no tiene por qué estarlo.

Parte I
Apéndices

Apéndice A

Geometría Diferencial

A.1. Preliminares

Antes de comenzar a tratar algunos temas de geometría diferencial, vale la pena detenerse en algunos conceptos de álgebra lineal y topología que serán útiles al tratar las curvas, superficies y las variedades.

Definición A.1. *Un espacio vectorial, o espacio lineal, V sobre un campo \mathbb{K} consiste de un conjunto en el que están definidas dos operaciones, tal que para cualquier par de elementos $x, y \in V$ exista un elemento único $x + y$, y para cada elemento $a \in \mathbb{K}$ y cada elemento $x \in V$ exista un elemento único $ax \in V$, de manera que se cumplan las siguientes condiciones:*

1. $\forall x, y \in V, x + y = y + x$.
2. $\forall x, y, z \in V, (x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists 0 \in V$ tal que $x + 0 = x \forall x \in V$.
4. Para cada $x \in V, \exists y \in V$ tal que $x + y = 0$.
5. Para cada $x \in V, 1x = x$.
6. Para cada par $a, b \in \mathbb{K}$ y cada $x \in V, (ab)x = a(bx)$.
7. Para cada $a \in \mathbb{K}$ y cada par $x, y \in V, a(x + y) = ax + ay$.
8. Para cada par $a, b \in \mathbb{K}$ y cada $x \in V, (a + b)x = ax + bx$.

Definición A.2. *Sea X un conjunto no vacío. Se denota a un conjunto τ de subconjuntos de X como topología si:*

1. X y el conjunto vacío \emptyset están en τ .
2. La unión, finita o infinita, de cualquier número de conjuntos en τ , está en τ .
3. La intersección de cualesquiera dos conjuntos en τ está en τ .

Al par (X, τ) se le llama espacio topológico.

Definición A.3. Un espacio topológico X es de tipo Hausdorff si para cualquier $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen conjuntos abiertos U y V que contienen a x e y respectivamente, y son tal que $U \cap V = \emptyset$.

Una vez que hemos definido lo que es un espacio vectorial y un espacio topológico, podemos hablar de las relaciones que hay entre dos de ellos. Definimos entonces;

Definición A.4. Un homeomorfismo es una aplicación entre espacios topológicos continua, biyectiva y cuya inversa también es continua. Dos espacios topológicos X, Y son homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$.

Un homeomorfismo no sólo es una biyección entre dos puntos de los espacios topológicos, también induce una biyección entre sus abiertos.

La geometría diferencial de curvas y superficies tiene dos aspectos; clásicamente puede definirse como el estudio de las propiedades locales de las curvas y las superficies, es decir, aquellas propiedades que dependen del comportamiento de la curva o la superficie en la vecindad de un punto.

El otro aspecto es la geometría diferencial global, donde se estudia la influencia de las propiedades locales en el comportamiento de la curva o la superficie completa.

A.2. Curvas

A.2.1. Curvas parametrizadas

Denotaremos como \mathbb{R}^3 al triplete de números reales (x, y, z) . Llamaremos curvas a ciertos subconjuntos de \mathbb{R}^3 que sean unidimensionales y a los que se les puedan aplicar los métodos del cálculo diferencial.

Una función de variable real es *diferenciable* si, en todos, sus puntos, tiene derivadas de todos los órdenes; éstas automáticamente son continuas. Usaremos como primera definición de curva:

Definición A.5. Una curva parametrizada diferenciable es un mapeo diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un intervalo abierto $I = (a, b)$ de la línea real \mathbb{R} a \mathbb{R}^3

La palabra diferenciable en la definición anterior implica que α mapea cada $t \in I$ en un punto $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ de manera que $x(t), y(t), z(t)$ son diferenciables. La variable t es el parámetro de la curva.

Definición A.6. $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$, donde $x'(t), y'(t), z'(t)$ son las primeras derivadas de x, y, z en el punto t , es el vector tangente de la curva α en t .

A.2.2. Producto interno

Sea $u \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, definimos su norma como: $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Ahora, sea $v \in \mathbb{R}^3$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $0 \leq \theta \leq \pi$ el ángulo formado entre los segmentos $\bar{0}u$ y $\bar{0}v$.

Definición A.7. El producto interno de u con v como:

$$u \cdot v = |u||v|\cos\theta \tag{A.1}$$

este producto tiene las siguientes propiedades:

1. $u \neq 0$ y $v \neq 0 \Rightarrow u \cdot v = 0 \iff u \perp v$,
2. $u \cdot v = v \cdot u$,
3. $\lambda(u \cdot v) = \lambda u \cdot v = u \cdot \lambda v$,
4. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$,

A.2.3. Curvas regulares; longitud de arco

Definición A.8. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada diferenciable. Para cada $t \in I$ donde $\alpha'(t) \neq 0$, existe una línea recta bien definida que contiene el punto $\alpha(t)$ y el vector $\alpha'(t)$. Ésta es la línea tangente a α en t .

Llamaremos a cualquier punto t donde $\alpha'(t) = 0$ un punto singular de α . Denominaremos regular a una curva parametrizada diferenciable, si $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$. Se trabajará desde ahora sólo con curvas regulares.

Ahora, dado $t \in I$, la *longitud de arco* de una curva parametrizada diferenciable regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ desde el punto t_0 es:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt, \quad (\text{A.2})$$

con,

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}, \quad (\text{A.3})$$

A.2.4. Teoría local de curvas parametrizadas por longitud de arco

Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco s . Dado que el vector tangente $\alpha'(s)$ tiene longitud 1, la norma de la segunda derivada $\alpha''(s)$ mide la razón de cambio del ángulo entre las tangentes vecinas a la tangente en el punto s . Entonces $|\alpha''(s)|$ mide cuán rápido se aleja la curva de la tangente de la curva en una vecindad de s .

Definición A.9. *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco $s \in I$. $|\alpha''(s)| = k(s)$ es la curvatura de α en s .*

A.3. Superficies

A.3.1. Superficies regulares

Una superficie regular es un conjunto bidimensional que es suficientemente suave para poder aplicar las nociones del cálculo diferencial en él.

Definición A.10. *Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si para cada $p \in S$ existe una vecindad $V \in \mathbb{R}^3$ y un mapeo $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$ de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ en $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:*

1. \mathbf{x} es diferenciable, es decir:

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

con $(u, v) \in U$. Las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U .

2. \mathbf{x} es un homeomorfismo. Como por la condición 1, \mathbf{x} es continua, \mathbf{x}^{-1} existe y es continua, $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$, que es la restricción de un mapeo continuo $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido en un conjunto abierto W que contiene a $V \cap S$,

3. Para cada $q \in U$, el diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es uno a uno, a esto se le llama la condición de regularidad.

Lo anterior puede observarse claramente en la figura A.1. El mapeo \mathbf{x} es llamado una parametrización a un sistema de coordenadas en una vecindad de p .

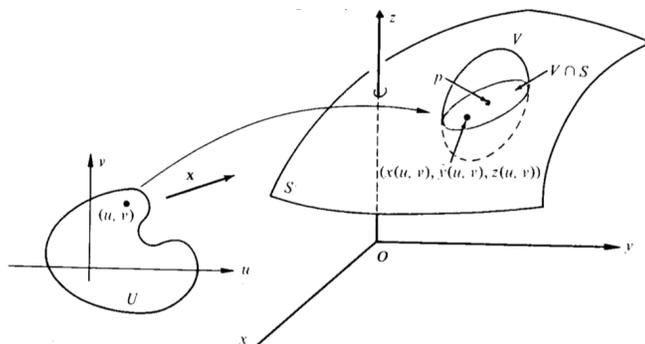


Figura A.1: Superficie regular y el mapeo \mathbf{x} .

A.3.2. Funciones diferenciales en superficies

Cada punto p de una superficie regular pertenece a un entorno coordenado. Los puntos de dicho entorno están caracterizados por sus coordenadas, por lo que podríamos definir sus propiedades locales, por ejemplo; qué significa que una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ sea diferenciable en un punto p de una superficie regular S . Tal propiedad no debe depender del parámetro que se use, ya que el punto p puede pertenecer a varios entornos.

Definición A.11. Sea $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un conjunto abierto V de una superficie regular S . Decimos que f es diferenciable en $p \in V$ si, para alguna parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ con $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$, la composición $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}^{-1}(p)$. f es diferenciable en V si es diferenciable en todos los puntos de V .

A.3.3. Plano tangente; el diferencial de un mapeo

Decimos que un vector es tangente a S en un punto $p \in S$ ($\alpha'(0)$), cuando éste es un vector de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$.

Proposición A.1. Sea $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de una superficie regular S y sea $q \in U$. El subespacio vectorial de dimensión 2, $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ coincide con el conjunto de vectores tangentes a S en $\mathbf{x}(q)$.

Demostración. Sea w un vector tangente en $\mathbf{x}(q)$, eso es, sea $w = \alpha'(0)$, donde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ es diferenciable y $\alpha(0) = \mathbf{x}(q)$. Sea $\beta = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$. Por definición de $d\mathbf{x}(q)$, tenemos que $d\mathbf{x}_q(\beta'(0)) = \alpha'(0) = w$, entonces $w \in d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$. Por otro lado, $w = d\mathbf{x}(v)$, con $v \in \mathbb{R}^2$, donde v es el vector velocidad de la curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ dada por:

$$\gamma(t) = tv + q, \tag{A.4}$$

con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Por definición $w = \alpha'(0)$, pero ahora tenemos que $\alpha = \mathbf{x} \circ \gamma$. Por lo tanto w es un vector tangente. ■

Definición A.12. Definimos al plano $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$ que pasa a través de $\mathbf{x}(q) = p$ y que no depende de la parametrización como plano tangente a S en p , denotado por $T_p(S)$.

La elección de la parametrización \mathbf{x} determina una base de $T_p(S)$, $\{\partial_u \mathbf{x}(q), \partial_v \mathbf{x}(q)\}$. A veces es conveniente escribir $\partial_u \mathbf{x} = \mathbf{x}_u$, $\partial_v \mathbf{x} = \mathbf{x}_v$.

Con la noción de plano tangente podemos hablar de un mapeo diferencial entre superficies. Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares y sea $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ un mapeo diferenciable de un conjunto abierto V de S_1 a S_2 . Si $p \in V$, sabemos que cada vector tangente $w \in T_p(S_1)$ es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ con $\alpha(0) = p$. La curva $\beta = \varphi \circ \alpha$ es tal que $\beta(0) = \varphi(p)$ de tal manera que $\beta'(0)$ es un vector de $T_{\varphi(p)}(S_2)$. Lo anterior puede verse claramente en la figura A.2.

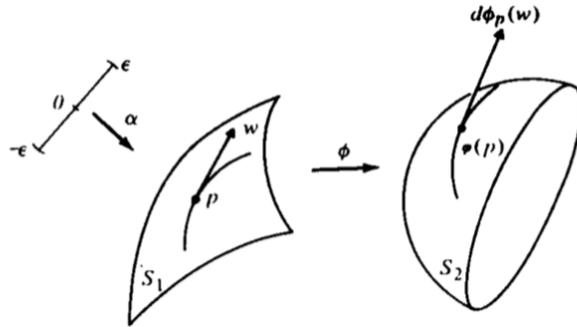


Figura A.2: Mapeo entre dos superficies regulares y sus planos tangentes

A.4. Variedades

Denotaremos como \mathbb{R}^n al conjunto de todas las n -adas de números reales (x_1, \dots, x_n) .

Definición A.13. *Un conjunto de puntos \mathcal{M} se define como una variedad si cada punto de \mathcal{M} tiene una vecindad abierta V que tiene un mapeo $\varphi : V \subset \mathcal{M} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ continuo, uno a uno, a un conjunto abierto U de \mathbb{R}^n para algún n .*

Una variedad \mathcal{M} es localmente como \mathbb{R}^n ; la dimensión de \mathcal{M} será n . El mapeo φ asocia un punto $p \in \mathcal{M}$ a una n -ada $(x_1(p), \dots, x_n(p))$, a estos números se les llama coordenadas de p bajo el mapeo.

A.4.1. Variedades diferenciables

Sea $f : V \subset \mathcal{M} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ un mapeo, es posible que la vecindad V no contenga todos los puntos de \mathcal{M} , por lo que habrán puntos que tendrán otros mapeos y pertenecerán a otras vecindades.

Definición A.14. *El par consistente en la vecindad V y el mapeo f , (V, f) se denomina carta.*

Las vecindades que contengan los diferentes puntos de \mathcal{M} forzosamente habrán de traslaparse para contener todos los puntos de la variedad, y con ayuda de estas superposiciones puede hacerse una descripción más detallada de \mathcal{M} .

Sea V una vecindad que se traslapa con U y tiene un mapeo g en una región de \mathbb{R}^n , puede que el mapeo f de U lleve a una región completamente distinta de \mathbb{R}^n . La intersección de V con U es abierta. Existe entonces una ecuación que relaciona los diferentes sistemas coordenados de los dos mapeos. A partir de aquí se adaptará la convención de anotar los índices de las coordenadas en la parte superior

Si elegimos un punto en la imagen del traslape, bajo f , es decir en \mathbb{R}^n , el mapeo tiene una inversa f^{-1} a la cual le corresponde, con esas coordenadas, un único punto p en el traslape, bajo f .

Si ahora a p se le aplica el mapeo g , estaremos construyendo la composición

de los mapeos $g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, lo que resulta en:

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1, \dots, x^n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ y^n &= y^n(x^1, \dots, x^n), \end{aligned} \tag{A.5}$$

Si las derivadas parciales de orden k de estas funciones $\{y^i\}$ con respecto a $\{x^i\}$ existen y son continuas, entonces los mapeos f y g están C^k -relacionados.

Si es posible construir todo un sistema de cartas, un *atlas*, de manera que cada punto de \mathcal{M} esté al menos en una vecindad y cada carta esté C^k -relacionada con las que se traslape, \mathcal{M} es una C^k -variedad.

Definición A.15. Una variedad C^1 , que incluye C^k para $k > 1$, se denomina *variedad diferenciable*.

Asumiremos variedades de clase C^∞ . Usaremos la misma definición de curvas y todo lo desarrollado para ellas en la sección A.2, cambiando lo siguiente: una curva es un mapeo diferenciable de un conjunto abierto de \mathbb{R} en \mathcal{M} .

De la misma manera, una función en \mathcal{M} es una regla que asigna un número real a cada punto de \mathcal{M} . Puede haber funciones que tomen un punto $p \in \mathcal{M}$ y lo mapea a una región de \mathbb{R}^n de manera diferenciable.

A.4.2. Espacio tangente

Consideremos una curva que pasa por el punto $p \in \mathcal{M}$ descrita por $x^i = x^i(\lambda)$, donde $i = 1, \dots, n$. Sea $f(x^1, \dots, x^n)$ en \mathcal{M} una función diferenciable. En cada punto de la curva existe una función $g(\lambda)$ tal que:

$$g(\lambda) = f(x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda)) = f(x^i(\lambda)), \tag{A.6}$$

Si derivamos;

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{A.7}$$

El conjunto $\{\frac{dx^i}{d\lambda}\}$ es único para cada curva y son componentes del vector tangente a la curva. Supóngase ahora que se tiene otra curva con parámetro distinto $x^i = x^i(\mu)$, se tiene entonces:

$$\frac{d}{d\mu} = \sum_i \frac{dx^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{A.8}$$

Ya que ambas curvas pasan por el punto p , tenemos:

$$a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\mu} = \sum_i \left(a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (\text{A.9})$$

con a y $b \in \mathbb{R}$. $\{a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\mu}\}$ son componentes de un nuevo vector tangente a alguna curva que también pasa por p , con algún parámetro ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} &= \sum_i \left(a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\mu} &= \frac{d}{d\phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Por lo que las derivadas direccionales a lo largo de las curvas que pasan por p forman un espacio vectorial, cuya base claramente es $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$.

El espacio de las derivadas a lo largo de las curvas que pasan por p y el espacio de los vectores tangentes con p están en correspondencia uno a uno, de manera que $\frac{d}{d\lambda}$ es el vector tangente a la curva $x^i(\lambda)$

Definición A.16. *Llamamos al espacio donde están los vectores tangentes a \mathcal{M} en p , el espacio tangente, que se denota con $T_p(\mathcal{M})$.*

Cualquier colección de n vectores linealmente independientes en $T_p(\mathcal{M})$ es una base para el espacio tangente. Cada punto de la variedad tiene su espacio tangente. Si la dimensión de la variedad \mathcal{M} es n , la dimensión del espacio tangente $T_p(\mathcal{M})$ es n .

A.5. Uno-formas

Definimos una uno-forma como una función lineal, con valores reales, de vectores. Una uno-forma \tilde{w} en p asocia a un vector \bar{v} en p con un número real que llamaremos $\tilde{w}(\bar{v})$. Las uno-formas satisfacen, por ser funciones lineales, los axiomas de un espacio vectorial.

Definición A.17. *El espacio vectorial formado por las uno-formas asociadas a \bar{v} en p se denomina el espacio dual al espacio tangente $T_p(\mathcal{M})$ y se denota por $T_p^*(\mathcal{M})$.*

A.5.1. Uno-formas como bases y componente de uno-formas

En el espacio dual $T_p^*(\mathcal{M})$ cualquier combinación de n uno-formas linealmente independientes forman una base. Una vez que una base es elegida $\{\bar{e}_i\}$ para los vectores de T_p en p , se induce una base para T_p^* denominada base dual $\{\tilde{w}^i\}$.

Definición A.18. *Sea \bar{v} cualquier vector en T_p , entonces \tilde{w}^i produce la i -ésima componente de \bar{v} .*

$$\tilde{w}^i(\bar{v}) = v^i.$$

Si el conjunto de campos vectoriales $\{\bar{e}_i\}$ es una base en cada punto de alguna región U de \mathcal{M} , entonces los campos $\{\tilde{w}^i\}$ definidos como: $\tilde{w}^i(\bar{e}_j) = \delta_j^i$ son una base en todos los puntos de U .

Un sistema coordinado en U , $\{x^i\}$ define una base natural para campos vectoriales $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, también define un conjunto de n uno-formas, los gradientes $\{\tilde{d}x^i\}$. Estas uno-formas son la base dual para los vectores de la base coordinada:

$$\tilde{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i. \quad (\text{A.11})$$

Definición A.19. *Un espacio métrico (X, d) consiste en un conjunto no vacío X y una función $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$, tal que:*

1. $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$,
2. $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$,
3. $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

A una función que satisfaga las propiedades anteriores también se le llama métrica. Claramente \mathbb{R}^n con la métrica euclideana es un espacio métrico.

Definición A.20. *Una métrica puede ser positiva definida, como vimos anteriormente, o como nos interesará más adelante, indefinida, que no tenga un signo definido para todas sus componentes.*

A.6. Tensores

Definición A.21. *Un tensor r veces covariante y s veces contravariante, o tipo $\binom{r}{s}$, sobre un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$ es una aplicación $T : V^r \times (V^*)^s \rightarrow \mathbb{R}$, que es multilineal.*

También podemos definir un tensor utilizando el concepto de las uno-formas que se ha introducido anteriormente. Un tensor del tipo (r, s) en un punto p es una función lineal que toma como argumentos r uno-formas y s vectores y cuyo valor es un número real.

A.6.1. El tensor métrico

El producto entre dos vectores o producto interno, es una función lineal que asigna un número a ambos. Tal función por tanto es un tensor del tipo $\binom{0}{2}$. Llamamos a ese tensor el *tensor métrico* g . El tensor métrico debe cumplir las siguientes propiedades:

1. $g(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$,
2. $g(\bar{u}, \bar{v}) = g(\bar{v}, \bar{u}) = \bar{u} \cdot \bar{v}$.

De lo anterior podemos ver que g es un tensor simétrico y que la métrica es positiva definida; a este tipo de métricas se les llama riemannianas. Las componentes de la métrica son:

$$g_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j, \quad (\text{A.12})$$

Estos componentes forman una matriz simétrica de $n \times n$ entradas, que además pediremos que sea invertible.

Si la métrica es positiva definida, tenemos la forma canónica, y en el caso del espacio Euclideo:

$$g_{ij} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.13})$$

Sin embargo en la Relatividad General se utilizan distintas métricas, la más común no cumple con la condición de ser positiva definida, por lo que se le llama pseudo-riemanniana o Lorentziana y al espacio asociado se le conoce como espacio de Minkowski.

Dicha métrica para $n = 4$ es:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Un campo tensorial T de tipo $\binom{r}{s}$ sobre \mathcal{M} es la asociación de un tensor T_x de tipo $\binom{r}{s}$ a cada punto $x \in \mathcal{M}$.

A.7. Conexiones

Con el propósito de aprender a derivar un campo de vectores, se introducirá el concepto de conexión. Consideremos \mathbb{R}^n con el sistema usual de coordenadas (x^1, \dots, x^n) ; todo campo de vectores X puede escribirse como:

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (\text{A.15})$$

Con $X^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. A partir de ahora escribiremos la derivada parcial $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\} = \partial_i$.

Definición A.22. Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable y $\xi(\mathcal{M}, p)$ el conjunto de todos los campos tangentes de \mathcal{M} definidos en $p \in \mathcal{M}$. Una conexión afín en p es un operador que asocia a cada vector tangente V en p y a cada campo tangente X en \mathcal{M} definido en p , un vector tangente en p , definido por $\nabla_v X$.

$$\nabla : \xi(\mathcal{M}) \times \xi(\mathcal{M}) \rightarrow \xi(\mathcal{M})$$

$\nabla_v X$ tiene las siguientes propiedades:

- Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $v \in T_p(\mathcal{M})$, $X, Y \in \xi(\mathcal{M}, p)$. $\nabla_v(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_v X + \beta \nabla_v Y$.
- Para $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in T_p(\mathcal{M})$, $X \in \xi(\mathcal{M}, p)$. $\nabla_{au+bv} X = a \nabla_u X + b \nabla_v X$.
- Para $f \in C^\infty$ y $X \in \xi(\mathcal{M}, p)$. $\nabla_v f X = v(f) X_p + f(p) \nabla_v X$.

Al par (\mathcal{M}, ∇) se le conoce como variedad afín.

Proposición A.2. Sean $X, Y \in \xi(\mathcal{M})$ tales que $X_p = Y_p$ para cierto $p \in \mathcal{M}$. Entonces, $\forall Z \in \xi(\mathcal{M})$:

$$\nabla_{X_p} Z = \nabla_{Y_p} Z. \quad (\text{A.16})$$

Demostración. Sean $X, Y \in \xi(\mathcal{M})$ tales que $X_p = Y_p$. Si (U, q^1, \dots, q^n) es un entorno coordinado de \mathcal{M} alrededor de p , escribimos:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n X^i \partial_i, \\ Y &= \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

De donde:

$$\begin{aligned}\nabla_X Z &= \nabla_{\sum_{i=1}^n X^i \partial_i} Z = \sum_{i=1}^n X^i \nabla_{\partial_i} Z, \\ \nabla_Y Z &= \nabla_{\sum_{i=1}^n Y^i \partial_i} Z = \sum_{i=1}^n Y^i \nabla_{\partial_i} Z,\end{aligned}\tag{A.18}$$

Como $X_p = Y_p$:

$$\nabla_{X_p} Z = \sum_{i=1}^n X(p)^i \nabla_{\partial_i} Z = \sum_{i=1}^n Y(p)^i \nabla_{\partial_i} Z = \nabla_{Y_p} Z,\tag{A.19}$$

Por lo tanto:

$$\nabla_{X_p} Z = \nabla_{Y_p} Z,\tag{A.20}$$

■

La prueba anterior tiene sentido sobre toda la variedad, ya que si se define una conexión sobre \mathcal{M} , queda definida sobre cualquier abierto de ella.

Ahora, si tenemos una conexión para cada $p \in \mathcal{M}$ y $X, Y \in \xi(\mathcal{M}, p)$, con $v_p = X_p \in T_p(\mathcal{M})$ podemos definir la derivada $(\nabla_v Y)_p = \nabla_{v_p} Y$, con dominio $Dom(V) \cap Dom(X)$.

Sea $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ una curva diferenciable. Un campo tangente a \mathcal{M} a lo largo de σ es una función diferenciable $X : \mathbb{R} \rightarrow T_p(\mathcal{M})$ tal que con la proyección canónica $\pi : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$, $\pi \circ X = \sigma$. Los campos tangentes a \mathcal{M} tienen la estructura de un espacio vectorial real.

Si \mathcal{M} tiene una conexión ∇ , entonces para cada $s \in Dom(\sigma)$ se puede definir $D_\sigma(s)$ un operador lineal que asocia a cada campo tangente a \mathcal{M} , X , a lo largo de σ , un vector tagente a \mathcal{M} en el punto $\sigma(s)$.

Definición A.23. Sean (\mathcal{M}, ∇) y $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, como $X \in \xi(\mathcal{M}, \sigma(s))$, podemos escribir $\nabla_{\sigma(s)} X \forall s \in I \subset \mathbb{R}$. Llamamos derivada covariante de X a lo largo de σ al mapeo:

$$\frac{D}{ds} X : \sigma \rightarrow \nabla_{\sigma(s)} X \in T_{\sigma(s)} \mathcal{M},$$

Tiene las siguientes propiedades:

- Para $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{D}{ds}(aX + bY) = a \frac{DX}{ds} + b \frac{DY}{ds}$.
- Para $f \in C^\infty$, $\frac{D}{ds}(fX) = \sigma'(f)X + \sigma \frac{DX}{ds} = \frac{d(f \circ \sigma)}{dt} + f \frac{DX}{ds}$.

Definición A.24. Sea (\mathcal{M}, ∇) una variedad afín, y (U, q^1, \dots, q^n) un entrono coordinado de \mathcal{M} . ∂_i es una base de campos sobre U . $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ también es un campo sobre U , podemos expresarlo punto a punto como combinación lineal de los campos coordinados ∂_i . Existen entonces las funciones diferenciales Γ_{ij}^k sobre U :

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad (\text{A.21})$$

A las funciones Γ_{ij}^k se les conocen como Símbolos de la conexión, que en particular para la conexión de Levi-Civita, serán llamados Símbolos de Christoffel de ∇ en las coordenadas q^i .

Tenemos entonces que:

$$\sigma'(s) = \sum_{j=1}^n \dot{q}^j(s) \partial_j \Big|_{\sigma(s)}, \quad (\text{A.22})$$

De donde:

$$\begin{aligned} \frac{DX}{ds} &\equiv \nabla_{\sigma(s)} X, \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla_{\sigma(s)} X^i \partial_i, \\ &= \sum_{k=1}^n \nabla_{\sigma(s)} X^k \partial_k, \\ &= \sum_{k=1}^n \sigma'(s) X^k \partial_k + \sum_{i=1}^n X^i \nabla_{\sigma'(s)} \partial_i, \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d(X^k \circ \sigma(s))}{ds} \partial_k + \sum_{i=1}^n X^i \sum_{j=1}^n \sigma(s) \dot{q}^j(s) \nabla_{\partial_j} \partial_i, \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d(X^k \circ \sigma(s))}{ds} \partial_k + \sum_{i,j=1}^n X^i(\sigma(s)) \dot{q}^j(s) \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(\sigma(s)) \partial_k. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Por lo que:

$$\frac{DX}{ds} \equiv \nabla_{\sigma(s)} X = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d(X^k \circ \sigma(s))}{ds} + \sum_{i,j=1}^n X^i(\sigma(s)) \dot{q}^j(s) \Gamma_{ij}^k(\sigma(s)) \right) \partial_k \Big|_{\sigma(s)}. \quad (\text{A.24})$$

Ahora, \hat{X} es un campo sobre σ , si es un mapeo diferenciable, $\hat{X} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow T(\mathcal{M})$ de manera que $\hat{X}(s) \in T_{\sigma(s)}(\mathcal{M})$, $\forall s \in I$, tal que $\pi \circ \hat{X} = \sigma$, escribimos la derivada covariante como:

$$\nabla_{\sigma(s)} \hat{X} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d\hat{X}^k}{ds} + \sum_{i,j=1}^n \hat{X}^i \dot{q}^j \Gamma_{ij}^k(\sigma(s)) \right) \partial_k \Big|_{\sigma(s)}. \quad (\text{A.25})$$

Reescribiremos la derivada covariante en su forma más usual.

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= \nabla_{Y^b \partial_b} X^a \partial_a, \\ &= Y^b \nabla_{\partial_b} X^a \partial_a, \\ &= Y^b \nabla_{\partial_b} X^a \partial_a, \\ &= Y^b [\partial_b X^a \partial_a + X^a \nabla_{\partial_b} \partial_a], \\ &= Y^a [\partial_a (X^b \partial_b) + X^c \Gamma_{ac}^b \partial_c], \\ &= Y^a [(\partial_a X^b) \partial_b + X^b \partial_b \partial_a + \Gamma_{ac}^b X^c \partial_b], \\ &= Y^a [\partial_a X^b + \Gamma_{ac}^b X^c] \partial_b. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Para utilizar una notación más limpia, escribiremos la derivada parcial de un tensor:

$$\partial_a T^b = T^b_{,a}, \quad (\text{A.27})$$

lo que deja su derivada covariante como sigue:

$$\nabla_a T^b = T^b_{;a} = T^b_{,a} + \Gamma_{ac}^b T^c. \quad (\text{A.28})$$

A.7.1. Transporte paralelo

La mayoría de los textos sobre geometría diferencial comienzan a tratar las conexiones afines definiéndolas con una lista de propiedades y después relacionándolas con el transporte paralelo. Esto sugeriría que el transporte paralelo es una consecuencia de las propiedades de la conexión, sin embargo la historia de las conexiones sucede de la otra manera. Primero se define un transporte y se exige que se cumpla ciertas condiciones, y finalmente, de las propiedades del transporte surgen las propiedades de la conexión.

Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable y los campos vectoriales $X, Y, Z \in \xi(\mathcal{M})$. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ una curva integral de X y $p = \gamma(t_0) \in \mathcal{M}$, $t_0 \in I$, como se muestra en la figura A.3. Ahora consideremos el campo vectorial Y evaluado a lo largo de la curva γ , es decir, la superficie de vectores $\{Y|_{\gamma(t)}\}_{t \in I}$, tal como está ilustrado en la figura A.4.

Definimos un transporte en \mathcal{M} como:

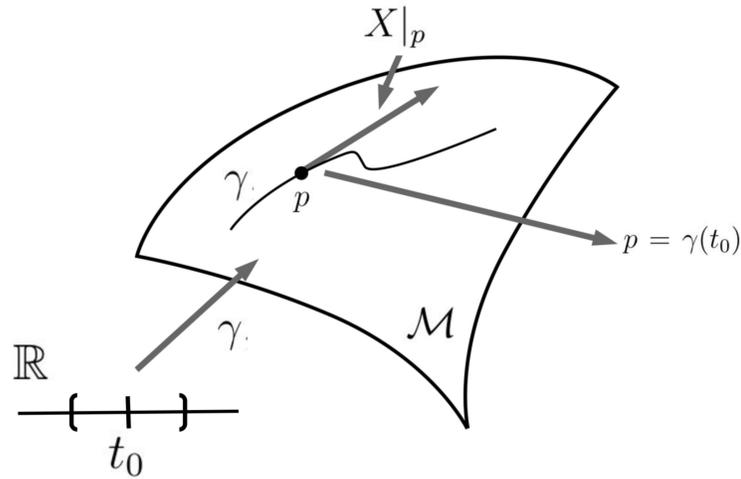


Figura A.3: Variedad diferencial \mathcal{M} con una curva integral γ y campo vectorial X en p .

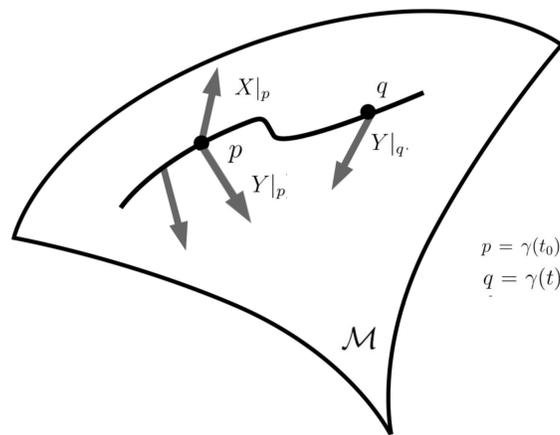


Figura A.4: Variedad diferencial \mathcal{M} con una curva integral γ y campos vectoriales X y Y a lo largo de γ en p y q .

Definición A.25. *Un transporte en \mathcal{M} es un mapeo biyectivo que asigna a cada curva γ y a cada valor del parámetro de la curva un vector en un espacio tangente diferencial. Es decir:*

$$P_\gamma(t_0, t) : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M, \quad (\text{A.29})$$

De donde:

$$P_\gamma(t_0, t)[Y|_p] = \tilde{Z}|_q. \quad (\text{A.30})$$

Como podemos ver en la figura A.5 donde $q = \gamma(t)$, como el transporte es arbitrario, generalmente $\tilde{Z}|_q \neq Y|_q$. Sólo se ha pedido que el transporte sea biyectivo para poder tomar su inversa.

Ahora, la noción de paralelismo. Debemos notar que $P_\gamma(t_0, t)[Y|_p]$ puede no

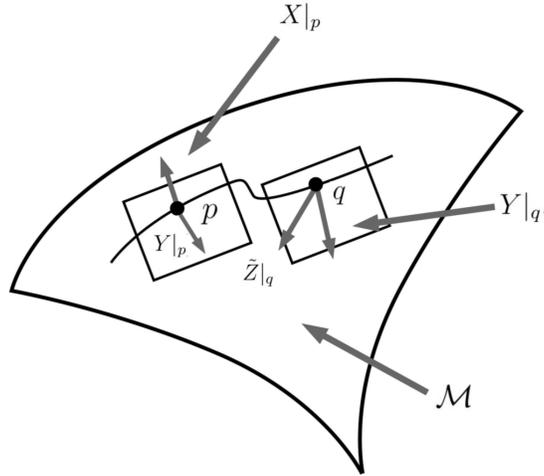


Figura A.5: Transporte definido sobre $Y|_p$ a lo largo de γ .

ser paralelo a $P_\gamma(t_0, t)[\lambda Y|_p]$, con $\lambda \neq 1$; entonces nos enfocaremos en aquellos casos en los que el transporte preserve la colinealidad. Estos son los mapeos afines.

Un transporte afín preserva la noción de paralelismo. es decir:

$$P_\gamma(t_0, t)[\lambda Y|_p] = \mu P_\gamma(t_0, t)[Y|_p]. \quad (\text{A.31})$$

Con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\lambda, \mu \neq 0$, $\lambda, \mu \neq 1$.

Como podemos ver en la figura A.6, podemos usar todo esto para definir de manera natural cómo cambia un campo vectorial a lo largo las curvas integrales de otro en términos de un transporte afín; que a partir de ahora llamaremos paralelo.

Podemos reescribir la derivada covariante como:

$$\frac{D}{dt}Y|_{t=t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_\gamma^{-1}(t, t_0)[Y|_{\gamma(t)}] - Y|_{\gamma(t_0)}}{t - t_0}, \quad (\text{A.32})$$

Esta es una buena definición de la derivada de campos vectorial, exceptuando que debemos verificar que se satisfaga la regla de Leibniz. Consideremos la derivada covariante de fY :

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}fY|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_\gamma^{-1}(t, t_0)[f(q)Y|_q] - f(p)Y|_p}{t - t_0}, \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tilde{f}(q)P_\gamma^{-1}(t, t_0)[Y|_q] - f(p)Y|_p}{t - t_0}. \end{aligned} \tag{A.33}$$

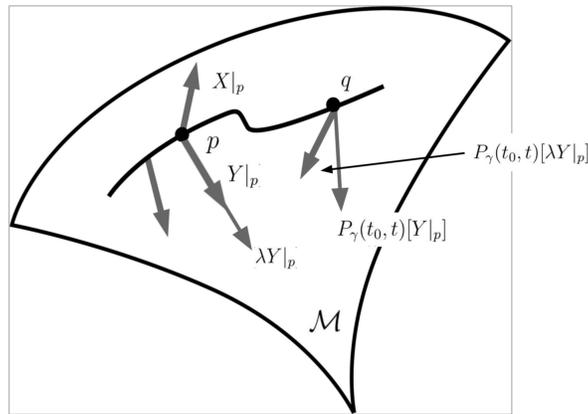


Figura A.6: Transporte afín de $Y|_p$ y $\lambda Y|_p$.

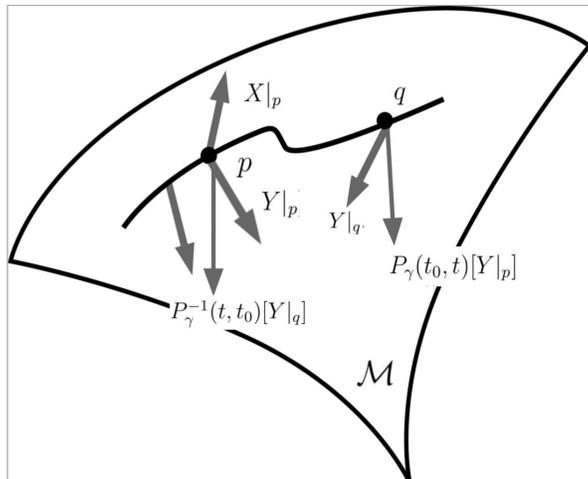


Figura A.7: Transporte paralelo y su inversa de $Y|_p$ y $Y|_q$ respectivamente.

Hasta este punto, no podemos saber si \tilde{f} y f están relacionadas, sólo hemos usado que P es afín. Sin embargo, si queremos que la derivada cumpla siempre la regla de Leibniz debemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}fY|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tilde{f}(q)P_\gamma^{-1}(t, t_0)[Y|_q] - f(p)Y|_p + f(q)Y|_p - f(q)Y|_p}{t - t_0}, \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tilde{f}(q)P_\gamma^{-1}(t, t_0)[Y|_q] - f(q)Y|_p}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(q)Y|_p - f(p)Y|_p}{t - t_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Para factorizar el primer término $\tilde{f} = f$:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}fY|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} f(q) \frac{P_\gamma^{-1}(t, t_0)[Y|_q] - Y|_p}{t - t_0} + \lim_{t \rightarrow t_0} Y|_p \frac{f(q) - f(p)}{t - t_0}, \\ &= f(p) \frac{D}{dt}Y|_{t=t_0} + Y|_p \frac{d}{dt}f|_{t=t_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Entonces dado el transporte paralelo cada par de campos vectoriales $X, Y \in \xi\mathcal{M}$ define un tercer campo vectorial $\nabla_X Y \in \xi\mathcal{M}$ definido como la derivada covariante del campo vectorial Y a lo largo de las curvas integrales del campo X de cada punto en \mathcal{M} .

$$\nabla_X Y|_p = \frac{D}{dt}Y|_{t=t_0}; \forall p \in M. \quad (\text{A.36})$$

Hemos obtenido la regla de Leibniz para campos vectoriales multiplicados por funciones. Ahora exploremos el comportamiento de la derivada covariante bajo la reparametrización de las curvas integrales del campo vectorial X . Como se dijo anteriormente, como la variedad \mathcal{M} no está equipada con una métrica, los campos vectoriales sólo determinan una dirección en cada punto. De tal manera que es natural esperar, que sean lineales. Se propone el siguiente lema. Sea $X \in \xi(\mathcal{M})$, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(p) \neq 0$ y $f \in C^1$. Existe una reparametrización $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para la curva integral γ de X que pasa por $p \in \mathcal{M}$, con $s(t_0) = s_0$, $\frac{ds}{dt}|_{t=t_0} \neq 0$ tal que $\tilde{X}|_q = f(q)X|_q$ con $f(q) = \frac{dt}{ds}|_{s=s(t)}$ y $q = \gamma(t)$

Demostración. Sea $\tilde{X} = fX$, como γ es una curva integral de X , $X = \frac{d\gamma}{dt}$. Sea $\tilde{X} = \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}$, para algún $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $\frac{d\tilde{\gamma}}{ds} = f \frac{d\gamma}{dt}$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \frac{dt}{ds} &= f \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds}, \\ \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \frac{dt}{ds} &= f \frac{d\gamma}{ds}. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

De donde $f = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}$. ■

El lema nos permite encontrar una reparametrización de las curvas integrales de X para cada función continua f definiendo el campo vectorial $\tilde{X} = fX$ alrededor de un punto y tal que $f(p) \neq 0$.

Ahora, sea:

$$\nabla_x Y|_p = \frac{d}{dt} P_\gamma^{-1}(t, t_0)[Y|_{\gamma(t)}]|_{t=t_0}, \quad (\text{A.38})$$

entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{fX} Y|_p &= \nabla_{\tilde{X}} Y|_p = \frac{d}{ds} P_{\tilde{\gamma}}^{-1}(s, s_0)[Y|_{\tilde{\gamma}(s)}]|_{s=s_0}, \\ &= \frac{d}{dt} P_\gamma^{-1}(t, t_0)[Y|_{\gamma(t)}]|_{t=t_0} \left(\frac{ds^1}{dt} \Big|_{s=s_0}, \right. \\ &= f(p) \nabla_X Y|_p, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Entonces la derivada covariante es lineal con respecto a funciones. Finalmente actuando con respecto a funciones:

$$\begin{aligned} P_\gamma(t_0, t)[f(t_0)] &= f[\gamma(t_0)], \\ P_\gamma^{-1}(t, t_0)[f|_{\gamma(t)}] &= f[\gamma(t)], \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_X f|_p &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_\gamma^{-1}(t, t_0)[f|_{\gamma(t)}] - f|_{\gamma(t_0)}}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f[\gamma(t)] - f[\gamma(t_0)]}{t - t_0} \\ &= \mathcal{L}_X f|_p = X[f]|_p. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Definimos con esto una conexión afín ∇ sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} , $\nabla : \xi(\mathcal{M}) \times \xi(\mathcal{M}) \rightarrow \xi(\mathcal{M})$, de manera que:

1.

$$\nabla_X fY = f \nabla_X Y + X[f]Y, \quad (\text{A.42})$$

2.

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \quad (\text{A.43})$$

3.

$$\nabla_X f = X[f]. \quad (\text{A.44})$$

Ahora, si lo hacemos de manera usual, dada la derivada ∇_a , definimos el transporte paralelo a lo largo de la curva $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ con campo vectorial tangente t^a . Un vector v^a , dado a cada punto de la curva se transporta paralelamente si:

$$t^a \nabla_a v^b = 0. \quad (\text{A.45})$$

Puede decirse de manera más general, si $X \in T_{\sigma(t)}\mathcal{M}$ es el campo de vectores tangentes a la variedad en un punto $\sigma(t)$; si $\frac{DX}{dt} \equiv 0$ diremos que X es paralelo. De manera que nuestra ecuación de transporte paralelo sera:

$$\nabla_X X = 0. \quad (\text{A.46})$$

Que si desarrollamos queda:

$$\begin{aligned} \nabla_X X &= \nabla_{X^a \partial_a} X^b \partial_b, \\ &= X^a \nabla_{\partial_a} X^b \partial_b, \\ &= X^a [\partial_a X^b \partial_b + X^b \nabla_{\partial_a} \partial_b], \\ &= X^a [\partial_a X^c \partial_c + X^b \Gamma_{ba}^c \partial_c], \\ &= [X^a \partial_a X^c + \Gamma_{ba}^c X^a X^b] \partial_c = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, tenemos que, aplicado a una función:

$$X^a \partial_a = \frac{d}{dt}, \quad (\text{A.47})$$

Además de que:

$$X^i = \frac{d}{dt} x^i(t). \quad (\text{A.48})$$

Entonces la ecuación (A.46), nos queda como:

$$\frac{d^2 x^c(t)}{dt^2} + \Gamma_{ba}^c \frac{dx^a(t)}{dt} \frac{dx^b(t)}{dt} = 0. \quad (\text{A.49})$$

El transporte paralelo de v^a depende de los valores de v^a en la curva. Un vector en un punto p en la curva define de manera única a un vector paralelamente transportado a cualquier otro punto en la curva.

Si tenemos una métrica g_{ab} en \mathcal{M} y dados dos vectores v^a y ω^a , su producto interior $g_{ab} v^a \omega^b$ debe permanecer invariante, aún si son transportados paralelamente a lo largo de cualquier curva. Entonces:

$$t^a \nabla_a (g_{bc} v^b \omega^c) = 0, \quad (\text{A.50})$$

De lo que, si desarrollamos:

$$\begin{aligned} t^a \nabla_a (g_{bc} v^b \omega^c) &= g_{bc} t^a \nabla_a (v^b \omega^c) + v^b \omega^c t^a \nabla_a g_{bc}, \\ &= \omega^c g_{bc} t^a \nabla_a v^b + v^b g_{bc} t^a \nabla_a \omega^c + v^b \omega^c t^a \nabla_a g_{bc}. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Como $t^a \nabla_a v^b = 0$ y $t^a \nabla_a \omega^c = 0$ la ecuación anterior se reduce a:

$$v^b \omega^c t^a \nabla_a g_{bc} = 0. \quad (\text{A.52})$$

Por lo que:

$$\nabla_a g_{bc} = 0. \quad (\text{A.53})$$

El Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana, para una conexión en particular, la de Levi-Civita, nos muestra que una Conexión queda determinada por su relación con la métrica y el tensor de torsión; en el caso anterior se denomina compatibilidad con la métrica al hecho de que la derivada covariante de la métrica sea cero, y en el caso de la conexión de Levi-Civita que sea libre de torsión. Tenemos entonces:

Teorema A.1. *Sea g_{ab} una métrica sobre \mathcal{M} . Existe un único operador derivada ∇_a que satisface:*

- $\nabla_a \nabla_b \phi = \nabla_b \nabla_a \phi,$
- $\nabla_a g_{bc} = 0.$

Demostración. Si comenzamos con la condición que implica la libertad de torsión, tenemos:

$$\nabla_b \phi = \partial_b \phi, \quad (\text{A.54})$$

ya que es un escalar,

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \phi &= \partial_a \partial_b \phi - \Gamma^c_{ab} \partial_c \phi, \\ \nabla_b \nabla_a \phi &= \partial_b \partial_a \phi - \Gamma^c_{ba} \partial_c \phi. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

De la condición de libertad de torsión y ya que las parciales cruzadas son iguales obtenemos:

$$\Gamma^c_{ab} \partial_c \phi = \Gamma^c_{ba} \partial_c \phi, \quad (\text{A.56})$$

Que implica la siguiente simetría de los símbolos de la conexión en los índices:

$$\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}, \quad (\text{A.57})$$

Usando ahora la condición de compatibilidad de la métrica, tenemos:

$$\nabla_a g_{bc} = \partial_a g_{bc} - \Gamma^d_{ab} g_{dc} - \Gamma^d_{ac} g_{bd}, \quad (\text{A.58})$$

Permutando los índices, $a \rightarrow c$, $c \rightarrow b$, $b \rightarrow a$, obtenemos:

$$\nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^d_{ca} g_{db} - \Gamma^d_{cb} g_{ad}, \quad (\text{A.59})$$

y

$$\nabla_b g_{ca} = \partial_b g_{ca} - \Gamma^d_{bc} g_{da} - \Gamma^d_{ba} g_{cd}, \quad (\text{A.60})$$

Ahora como las ecuaciones (A.58),(A.59) y (A.60) son iguales a cero por la condición de compatibilidad con la métrica podemos sumar (A.58) con (A.59) y a eso restarle (A.60):

$$\begin{aligned}
 0 = & \partial_a g_{bc} + \partial_c g_{ab} - \partial_b g_{ca} - \Gamma^d_{ab} g_{dc} - \Gamma^d_{ac} g_{bd} - \Gamma^d_{ca} g_{db} \\
 & - \Gamma^d_{cb} g_{ad} + \Gamma^d_{bc} g_{da} + \Gamma^d_{ba} g_{cd},
 \end{aligned} \tag{A.61}$$

Que con la propiedad de simetría de los índices de los símbolos de la conexión podemos simplificar a:

$$\begin{aligned}
 0 = & \partial_a g_{bc} + \partial_c g_{ab} - \partial_b g_{ca} - 2\Gamma^d_{ac} g_{bd}, \\
 \Gamma^d_{ac} g_{bd} = & \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_c g_{ab} - \partial_b g_{ca}),
 \end{aligned} \tag{A.62}$$

Si contraemos una vez:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^d_{ac} g_{bd} g^{be} = & \frac{1}{2} g^{be} (\partial_a g_{bc} + \partial_c g_{ab} - \partial_b g_{ca}), \\
 \Gamma^d_{ac} \delta^e_d = & \frac{1}{2} g^{be} (\partial_a g_{bc} + \partial_c g_{ab} - \partial_b g_{ca}), \\
 \Gamma^e_{ac} = & \frac{1}{2} g^{be} (\partial_a g_{bc} + \partial_c g_{ab} - \partial_b g_{ca}),
 \end{aligned} \tag{A.63}$$

O, en la notación que habíamos establecido:

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (g_{bc,a} + g_{ac,b} - g_{ab,c}). \tag{A.64}$$

■

A.8. Curvatura

Definición A.26. *El tensor R que mide la curvatura de una variedad \mathcal{M} , se define como:*

$$\begin{aligned}
 R : \xi(\mathcal{M}) \times \xi(\mathcal{M}) \times \xi(\mathcal{M}) & \rightarrow \xi(\mathcal{M}), \\
 R \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,
 \end{aligned} \tag{A.65}$$

O, de forma donde la falta de conmutatividad entre $\nabla_X \nabla_Y$ y $\nabla_Y \nabla_X$ es más evidente:

$$R = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}, \tag{A.66}$$

Las propiedades del tensor de Riemann son:

1. $R^d_{abc} = -R^d_{bac}$,
2. Sean X, Y, Z, W campos tangentes y f, g funciones diferenciables con valores reales:

$$\begin{aligned}
 R(fX + gY, Z) &= fR(X, Z) + gR(Y, Z), \\
 R(X, fY + gZ) &= fR(X, Y) + gR(X, Z), \\
 R(X, Y)(fZ + gW) &= fR(X, Y)Z + gR(X, Y)W.
 \end{aligned} \tag{A.67}$$

3. La identidad de Bianchi: Sean X, Y, Z campos tangentes, entonces:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0. \tag{A.68}$$

A.8.1. Identidad de Bianchi

Proposición A.3. *El tensor de curvatura de Riemann cumple la identidad de Bianchi.*

Demostración. Comencemos expresando los términos de la identidad de Bianchi:

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \\
 R(Y, Z)X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_{[Y, Z]} X, \\
 R(Z, X)Y &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[Z, X]} Y.
 \end{aligned} \tag{A.69}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
 &\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X \\
 &+ \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_{[Z, X]} Y = \\
 &\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Z \nabla_X Y \\
 &- \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X - \nabla_{[X, Z]} Y = \\
 &\nabla_X [Z, Y] - \nabla_{[X, Z]} Y + \nabla_Y [X, Z] - \nabla_{[Y, X]} Z + \nabla_Z [Y, X] \\
 &- \nabla_{[Z, Y]} X = \\
 &[Y, [X, Z]] + [X, [Z, Y]] + [Z, [Y, X]] = 0,
 \end{aligned} \tag{A.70}$$

■

Es muy útil descomponer el tensor de Riemann en la parte de su traza y su parte libre de traza. Por la propiedad de antisimetría del tensor de Riemann, la traza sobre sus primeros dos o últimas dos índices es cero, sin embargo sobre el primero y el tercero definen el tensor de Ricci:

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b, \tag{A.71}$$

El tensor de Ricci es simétrico:

$$R_{ac} = R_{ca}, \quad (\text{A.72})$$

La curvatura escalar es la traza del tensor de Ricci:

$$R = R_a^a. \quad (\text{A.73})$$

La contracción de la identidad de Bianchi resulta:

$$\begin{aligned} \nabla_a R_{bcd}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} &= 0, \\ \nabla_a g^{bd} R_{bcd}^a + \nabla_b g^{bd} R_{cd} - \nabla_c g^{bd} R_{bd} &= 0, \\ \nabla_a R_c^a + \nabla_b R_c^b + \nabla_c R &= 0, \\ \nabla_b R_c^b + \nabla_b R_c^b + \nabla_c R &= 0, \\ 2\nabla_b R_c^b &= \nabla_c R \\ \nabla_b R_c^b - \nabla_c \frac{1}{2} R &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Si definimos:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}, \quad (\text{A.75})$$

la ecuación (A.74) se convierte en:

$$\nabla^a G_{ab} = 0. \quad (\text{A.76})$$

Donde al tensor definido en la ecuación (A.75), se le conoce como el tensor de Einstein.

A.9. Geodésicas

Una geodésica es la línea más cercana al concepto de línea recta que puede definirse en una geometría curvada. La conexión nos permite definir la aceleración de una curva diferenciable σ , una vez que conocemos su velocidad, y con ella las geodésicas.

Definición A.27. Sea (\mathcal{M}, ∇) una variedad afín, y $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ una curva diferenciable. Llamaremos aceleración de σ a la derivada covariante de la velocidad de la curva, es decir: $\nabla_X X = A$.

Definición A.28. Diremos que σ es una geodésica si $\nabla_X X \equiv 0$, esto es, si tiene aceleración nula; si el campo de vectores $\sigma'(t)$ sobre σ es un campo paralelo.

Como se dijo ya, dada la derivada, una geodésica es una curva cuyo vector tangente se propaga paralelamente a lo largo de sí misma. La ecuación de geodésicas en componentes de un sistema de coordenadas satisface:

$$\frac{dT^\mu}{dt} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu T^\sigma T^\nu = 0, \quad (\text{A.77})$$

Como:

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (\text{A.78})$$

La ecuación tiene la forma:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (\text{A.79})$$

Lo cual ya se había visto anteriormente en la ecuación (A.49), del transporte paralelo.

Apéndice B

El problema de Cauchy en la Relatividad General

El estudio de espaciotiempos globalmente hiperbólicos permite replantear las ecuaciones de Einstein para proponer el problema de valores iniciales, o problema de Cauchy. Sin embargo, cuando existen curvas temporales cerradas es interesante ver qué sucede con el planteamiento de este problema. En la siguiente sección se presenta una introducción concisa al problema de valores iniciales en Relatividad General y se trabaja con la métrica de Gödel, un espaciotiempo que no cumple el requerimiento de ser globalmente hiperbólico. Comenzaremos reescribiendo las ecuaciones de campo de Einstein para el caso del vacío, con constante cosmológica:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0, \quad (\text{B.1})$$

Tenemos que $R = R_{ab}g^{ab}$, de donde:

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} &= 0, \\ R_{ab} - \frac{1}{2}R_{ab}g^{ab}g_{ab} + \Lambda g_{ab} &= 0, \\ R_{ab} - \frac{1}{2}R_{ab}\delta_a^a + \Lambda g_{ab} &= 0, \\ R_{ab} - \frac{4}{2}R_{ab} + \Lambda g_{ab} &= 0, \\ -R_{ab} + \Lambda g_{ab} &= 0, \\ R_{ab} &= \Lambda g_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Si elegimos $\Lambda = 0$, nos quedamos con la siguiente ecuación:

$$R_{ab} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Para iniciar la discusión sobre el problema de Cauchy para las EFE escribimos la ecuación (B.3), que es el tensor de Ricci, en coordenadas y términos del tenor métrico y sus primeras y segundas derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}(\partial_\lambda(g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})) - \partial_\nu(g^{\lambda\rho}\partial_\mu g_{\lambda\rho})) \\
 & + \frac{1}{4}(g^{\sigma\tau}g^{\lambda\rho}(\partial_\sigma g_{\rho\tau} + \partial_\rho g_{\sigma\tau} - \partial_\tau g_{\sigma\rho})(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
 & - g^{\rho\sigma}g^{\lambda\tau}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda})(\partial_\sigma g_{\mu\tau} + \partial_\mu g_{\sigma\tau} - \partial_\tau g_{\sigma\mu}),
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

De manera que las EFE se convierten en ecuaciones diferenciales parciales cuasilineales de segundo orden para los componentes del tensor métrico. Si recordamos ahora la fórmula para los símbolos de Christofel, y definimos: $\Gamma^\nu \equiv g^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$, podemos reescribir la ecuación (B.4) como:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\partial_\rho g_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu}\Gamma_{\nu)} + g_{\lambda\rho}g^{\sigma\tau}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\Gamma^\rho_{\tau\nu} + 2\Gamma^\sigma_{\lambda\rho}g^{\lambda\tau}g_{\sigma(\mu}\Gamma^\rho_{\nu)\tau}, \tag{B.5}$$

De esta manera la parte principal de las EFE en el vacío puede identificarse en los términos:

$$-\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\partial_\rho g_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu}\Gamma_{\nu)}. \tag{B.6}$$

Para construir el sistema de coordenadas (x^μ) que nos lleve a una ecuación hiperbólica para las componentes del tensor métrico, las coordenadas deben satisfacer:

$$\nabla^\nu\nabla_\nu x^\mu = 0, \tag{B.7}$$

que nos da:

$$\nabla_\nu x^\mu = \partial_\nu x^\mu = \delta_\nu^\mu, \tag{B.8}$$

entonces:

$$\nabla_\lambda\nabla_\nu x^\mu = \partial_\lambda\delta_\nu^\mu - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\delta_\nu^\mu = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu}, \tag{B.9}$$

de donde;

$$\nabla^\nu\nabla_\nu x^\mu = -g^{\nu\lambda}\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = -\Gamma^\mu. \tag{B.10}$$

Usando las coordenadas que cumplan que $\Gamma^\mu = 0$, la ecuación (B.5) toma la forma:

$$g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\partial_\rho g_{\mu\nu} - 2g_{\lambda\rho}g^{\sigma\tau}\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\Gamma^\rho_{\tau\nu} - 4\Gamma^\sigma_{\lambda\rho}g^{\lambda\tau}g_{\sigma(\mu}\Gamma^\rho_{\nu)\tau} = 0. \tag{B.11}$$

Este sistema se conoce como las Ecuaciones de Campo de Einstein Reducidas.

B.1. La descomposición $3 + 1$ en Relatividad General

Una manera diferente de decir que el espaciotiempo es globalmente hiperbólico es decir que está foliado por 3-variedades, es decir hipersuperficies S_t , $t \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} S_t, \quad (\text{B.12})$$

donde identificamos las hojas S_t con $\{t\} \times S$. Se da por hecho que las hipersuperficies S_t no se intersectan unas con otras. Se puede asumir que las hipersuperficies son las superficies de nivel de una función escalar t que interpretaremos como función global de tiempo. Definimos entonces un vector normal a las hojas de la foliación:

$$w_a = \nabla_a t, \quad (\text{B.13})$$

que es cerrado, es decir:

$$\nabla_{[a} w_{b]} = \nabla_{[a} \nabla_{b]} t = 0. \quad (\text{B.14})$$

Una vez definido w_a , definimos el escalar α , que llamaremos lapso:

$$g^{ab} \nabla_a t \nabla_b t = \nabla^a t \nabla_a t = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad (\text{B.15})$$

El lapso mide cuánto tiempo propio pasa entre cortes de tiempo vecinos a lo largo de la dirección que da el vector $w^a = g^{ab} w_b$.

Definimos ahora el normal unitario n_a como:

$$n_a \equiv -\alpha w_a, \quad (\text{B.16})$$

Con el signo menos para que apunte en la dirección del aumento de t . Se tiene que:

$$n^a n_a = -1, \quad (\text{B.17})$$

La métrica g_{ab} induce una métrica Riemanniana 3-dimensional h_{ij} , donde los índices denotan su carácter espacial. Ambas están relacionadas de la siguiente manera:

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b, \quad (\text{B.18})$$

Proposición B.1. h_{ab} es puramente espacial, no tiene componente a lo largo de n^a :

Demostración.

$$\begin{aligned}
 n^a h_{ab} &= n^a g_{ab} + n^a n_a n_b, \\
 &= n_b - n_b, \\
 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{B.19}$$

■

La 3-métrica puede usarse como un tensor de proyección:

$$h_a^b = \delta_a^b + n_a n^b, \tag{B.20}$$

Esta métrica también define de manera única una derivada covariante:

$$\begin{aligned}
 D_a \phi &\equiv h_a^b \nabla_b \phi, \\
 D_a T^b_c &\equiv h_a^d h_e^b h_c^f \nabla_d T^e_f,
 \end{aligned}
 \tag{B.21}$$

y si estamos en la conexión de Levi-Civita sus símbolos de Christoffel:

$$\gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} h^{ad} (\partial_b h_{dc} + \partial_c h_{bd} - \partial_d h_{bc}). \tag{B.22}$$

Usando el conmutador de la derivada covariante, encontramos el tensor de curvatura;

$$D_a D_b v^c - D_b D_a v^c = r_{ab}^c v^d, \tag{B.23}$$

así como el tensor y el escalar de Ricci:

$$\begin{aligned}
 r_{db} &= r_{dcb}^c, \\
 r &= g^{ab} r_{ab}.
 \end{aligned}
 \tag{B.24}$$

B.1.1. Curvatura extrínseca

Sin embargo no toda la información se encuentra en el tensor de curvatura de Riemann, que mide la curvatura intrínseca, sino que necesitamos medir la curvatura extrínseca, que calcularemos como sigue:

$$K_{cb} \equiv -h_a^c h_b^d \nabla_{(c} n_{d)} = -h_a^c h_b^d \nabla_c n_d. \tag{B.25}$$

Ya que n_a no tiene rotación. La aceleración de una foliación se calcula:

$$a_a = n^b \nabla_b n_a. \tag{B.26}$$

La curvatura extrínseca promedio es la traza de la curvatura extrínseca:

$$K = g^{ab} K_{ab} = h^{ab} K_{ab}. \tag{B.27}$$

B.1.2. Las ecuaciones de Gauss-Codazzi y Codazzi-Mainardi

Dada la curvatura extrínseca en una hipersuperficie S_t tenemos:

$$D_a D_b v^c = h_a^p h_b^q h_r^c \nabla_p \nabla_q v^r - K_{ab} h_r^c n^p \nabla_p v^r - K_a^c K_{bp} v^p, \quad (\text{B.28})$$

que si combinamos con el conmutador,

$$D_a D_b v^c - D_b D_a v^c = r_{ab}^c v^d. \quad (\text{B.29})$$

Tenemos:

$$r_{abcd} + K_{ac} K_{bd} - K_{ad} K_{cb} = h_a^p h_b^q h_c^r h_d^s R_{pqrs}, \quad (\text{B.30})$$

a esta ecuación se le conoce como la ecuación Gauss-Codazzi.

Ahora, si tenemos:

$$D_a K_{bc} = h_a^p h_b^q h_c^r \nabla_p K_{qr}, \quad (\text{B.31})$$

podemos deducir:

$$D_b K_{ac} - D_a K_{bc} = h_a^p h_b^q h_c^r n^s R_{pqrs}. \quad (\text{B.32})$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación Codazzi-Mainardi.

B.1.3. Las ecuaciones de restricción

Si tomamos la ecuación (B.30) y contraemos una vez, tendremos:

$$h^{pr} h_b^q h_d^s R_{pqrs} = r_{bd} + K K_{bd} - K_d^c K_{cb}. \quad (\text{B.33})$$

Si volvemos a contraer:

$$h^{pr} h^{qs} R_{pqrs} = r + K^2 - K^{ab} K_{ab}. \quad (\text{B.34})$$

El lado izquierdo puede escribirse como:

$$\begin{aligned} h^{pr} h^{qs} R_{pqrs} &= (g^{pr} + n^p n^r)(g^{qs} + n^q n^s) R_{pqrs}, \\ &= R + 2n^p n^r R_{pr} + n^p n^r n^q n^s R_{pqrs}, \\ &= R + 2n^p n^r R_{pr}. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

En el caso de las EFE en el vacío, la ecuación (B.35) es igual a cero, y tenemos la siguiente ecuación:

$$r + K^2 - K_{ab} K^{ab} = 0, \quad (\text{B.36})$$

y en el caso en el que no estamos en el vacío, la ecuación (B.35) resulta:

$$\begin{aligned} R + 2n^a n^b R_{ab} &= \frac{1}{2} R g_{ab} - R_{ab}, \\ &= n^a n^b T_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

De donde la ecuación (B.36) queda:

$$r + K^2 - K_{ab} K^{ab} = n^a n^b T_{ab}. \quad (\text{B.38})$$

A las ecuaciones (B.36) y (B.38) se les conoce como las ecuaciones de restricción Hamiltoniana para el vacío y para el caso en el que hay materia respectivamente.

Ahora, si contraemos una vez la ecuación de Codazzi-Mainardi, tenemos:

$$D^b K_{ab} - D_a K = h_a^p h^{qr} n^s R_{pqrs}. \quad (\text{B.39})$$

El lado derecho de la ecuación puede escribirse como:

$$\begin{aligned} h_a^p h^{qr} n^s R_{pqrs} &= -h_a^p (g^{qr} + n^q n^r) n^s R_{pqrs}, \\ &= -h_a^p n^s R_{ps} - h_a^p n^q n^r n^s R_{pqrs}, \\ &= -h_a^p n^s R_{ps}. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Para el caso del vacío tenemos que la ecuación (B.39) queda:

$$D^b K_{ab} - D_a K = 0. \quad (\text{B.41})$$

En el caso en el que hay materia, tenemos:

$$\begin{aligned} -h_a^q n^b R_{bq} &= -n^b (T_b + \frac{1}{2} g_{bq} R) h_a^q, \\ &= -n^b T_b h_a^q - \frac{1}{2} g_{bq} R h_a^q n^b, \\ &= -h_a^b n^c T_b. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

De donde la ecuación (B.39) queda como:

$$D^b K_{ab} - D_a K = -h_a^b n^c T_b. \quad (\text{B.43})$$

Las ecuaciones (B.41) y (B.43) se conocen como las ecuaciones de restricción de momento para el vacío y para el caso cuando hay materia respectivamente.

B.1.4. La forma 3 + 1 de la métrica

Si introducimos coordenadas en las que $\mathcal{L}_t = \partial_t$, es decir, coordenadas adaptadas, tenemos que el vector de cambio β , o *shift*, cumple $n_a \beta^a = 0$ $\beta^0 = 0$ tal que:

$$\beta^\mu = (0, \beta^\alpha). \quad (\text{B.44})$$

En estas coordenadas adaptadas se tiene que $t^a = \alpha^{-1} \delta^a_0 + \beta^a$, el normal:

$$n^\mu = (\alpha^{-1}, -\alpha^{-1} \beta^\gamma), \quad (\text{B.45})$$

y de la condición de normalización $n_a n^a = -1$, se tiene que:

$$n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0). \quad (\text{B.46})$$

Podemos encontrar entonces la siguiente forma para la métrica:

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu = \begin{pmatrix} -\alpha^{-2} & \alpha^{-2} \beta^\gamma \\ \alpha^{-2} \beta^\delta & h^{\gamma\delta} - \alpha^{-2} \beta^\gamma \beta^\delta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.47})$$

que si invertimos y hacemos algunas manipulaciones, obtendremos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_\gamma \beta^\gamma & \beta_\gamma \\ \beta_\delta & h_{\gamma\delta} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.48})$$

Es decir:

$$g = -\alpha^2 dt^2 + h_{\gamma\delta} (\beta^\gamma dt + dx^\gamma) (\beta^\delta dt + dx^\delta), \quad (\text{B.49})$$

que es la forma 3 + 1 de la métrica.

Bibliografía

- [1] A., V. K. (2016). *Conformal methods in general relativity*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- [2] Boothby, W. M. (2010). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Amsterdam: Academic Press.
- [3] Cantini, Andrea and Bruni, Riccardo, "Paradoxes and Contemporary Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/paradoxes-contemporary-logic/>>.
- [4] Rovelli, C. (2009). Forget time. *ArXiv E-prints*, *ArXiv:0903.3832*. Retrieved January 22, 2019, from <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009arXiv0903.3832R>.
- [5] Carmo, M. P., Lawson, B. (1991). *Differential geometry*. New York, NY: Longman.
- [6] Carmo, M. P. (1992). *Riemannian geometry*. Boston: Birkhäuser.
- [7] Church, A. (1936a). An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory. *American Journal of Mathematics*. 58: 345–363.
- [8] Church, A. (1936b). A Note on the Entscheidungsproblem. *Journal of Symbolic Logic*. 1: 40–41.
- [9] Copeland, B. Jack, "The Church-Turing Thesis", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2019 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/church-turing/>>.
- [10] Deutsch, D. (1985). Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society of London*. A 400, pp. 97-117.

- [11] Deutsch, D. (1991). Quantum mechanics near closed timelike lines. *Physical Review D*, 44(10), 3197-3217. doi:10.1103/physrevd.44.3197
- [12] Dyke, H., Bardon, A. (2016). *Companion to the philosophy of time*. Malden, MA: John Wiley Sons.
- [13] Earman J, Smeenk C and Wuthrich C 2009 *Synthese* 169 91-124.
- [14] Earman J 1995 *Bangs, crunches, whimpers, and shrieks: Singularities and acausalities in relativistic spacetimes* (Oxford University Press)
- [15] Einstein, A. (1973). On the Effect of Gravitation on the Propagation of Light. *General Theory of Relativity*, 128-139. doi:10.1016/b978-0-08-017639-0.50010-8
- [16] Hawking, S., & Ellis, G. (1973). *The large scale structure of space-time* (1st ed., p. 385). Cambridge [England: Cambridge University Press.
- [17] Kobayashi, S., Nomizu, K. (1996). *Foundations of differential geometry*. New York, NY: Wiley.
- [18] Gödel Kurt (1949). *An Example of a New Type of Cosmological Solution of Einstein's Field Equations of Gravitation*. Kurt Gödel: Collected Works, Vol. II, ed. Solomon Feferman, et al. 190-198. New York: Oxford University Press, 1990.
- [19] Leibniz. *La polémica Leibniz-Clarke*. Eloy Rada (Ed y Trad). Madrid: Taurus, 1980. p. 68.
- [20] Malament, D. B. (n.d.). Notes on Geometry and Spacetime - UCI Social Sciences. Retrieved from <http://www.socsci.uci.edu/~dmalamen/courses/-geometr spacetime docs/GST.pdf>
- [21] Malament D B 2006 *Handbook of the philosophy of science. Philosophy of physics*. Part A. Amsterdam: Elsevier 229-275
- [22] Newton, I. (1952). *Opticks; or, A treatise of the reflections, refractions, inflections & colours of light*. Query 28. Based on the 4th ed. London, 1730;. New York: Dover Publications.
- [23] Newton, I. (1972). *Philosophiae naturalis principia mathematica* (3d ed.). Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

- [24] Nielsen, M. A., Chuang, I. L. (2017). *Quantum computation and quantum information*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [25] Norton, J. D. (1993). General covariance and the foundations of general relativity: Eight decades of dispute. *University of Pittsburgh*. Retrieved January 8, 2019, from <https://www.pitt.edu/~jdnorton/papers/decades.pdf>.
- [26] Norton, J. (n.d.). Einstein's Pathway to Special Relativity. Retrieved from <https://www.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS0410/chapters/originspathway/index.html>
- [27] Penrose, R. (1987). *Techniques of differential topology in relativity*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [28] Schopenhauer, A. (1960). *Essay on the freedom of the will*. New York: Liberal Arts Press.
- [29] Schutz, B. F. (1999). *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [30] Stewart, J. (2003). *Advanced general relativity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [31] Turing, A.M. (1936). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society* (Series 2), 42 (1936–37): 230–265; reprinted in Copeland 2004b: 58–90 (page references in the text are to this edition).
- [32] Turing, A.M. (1948). Intelligent Machinery. *National Physical Laboratory Report, in Copeland 2004b*: 410–432.
- [33] Variational Principle Approach to General Relativity. (n.d.). Retrieved from <http://www.if.nu.ac.th/sites/default/files/bin/BSchakkrit.pdf>
- [34] Volio, E. P. (2005). Una solución moderna para el “entscheidungsproblem”. *Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica*.
- [35] Wald, R. M. (2009). *General relativity*. Chicago: Univ. of Chicago Press.
- [36] Yourgrau, P. (2005): *A World Without Time. The Forgotten Legacy of Gödel and Einstein*. Allen Lane: London.