



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio de soluciones para el campo libre de  
fuerzas en un aparato de confinamiento toroidal

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Alejandro Aviña Guerrero

TUTOR:

Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez



Ciudad Universitaria, CDMX, 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A todos y cada uno de mis familiares. En especial a mi madre, padre, y mi hermano Andrés, por haberme respaldado y educado durante todos los días que he existido, y por hacerlo siempre de la mejor manera que uno podría pedir.*

*Al Dr Julio Herrera, que desde el día en que le pedí ser su alumno siempre estuvo dispuesto a ayudarme, corregirme, y a compartir su vasto conocimiento conmigo.*

*A todos mis amigos con los que compartí mi etapa universitaria. Siempre recordaré y atesoraré todos los momentos y experiencias que vivimos juntos y que en gran medida forjaron al ser humano que soy actualmente.*



# Resumen

---

Para poder aprovechar la energía obtenida por fusión nuclear es necesario confinar el plasma que se genera en el proceso. En confinamiento magnético, existen experimentos con distintas características geométricas y físicas que buscan el equilibrio entre plasma y campo magnético. En particular, el Reversed Field Pinch (RFP) y el Tokamak son sistemas toroidales axisimétricos de gran importancia. En ellos el equilibrio es descrito mediante la ecuación de Grad-Shafranov, la cual es una ecuación diferencial parcial no lineal cuyas soluciones pueden ser o no analíticas.

En los experimentos de RFP se observa que las propiedades de algunas descargas son descritas por el llamado campo libre de fuerzas, un estado de baja energía magnética al cual un plasma de fusión evoluciona durante el confinamiento. La teoría que describe dicha evolución al campo libre de fuerzas es conocida como Relajación de Woltjer-Taylor, que se basa en la conservación de la helicidad magnética del sistema.

Esta tesis se divide en dos grandes partes. En los primeros capítulos se aborda la teoría necesaria para entender la ecuación de Grad-Shafranov y el campo libre de fuerzas en el RFP. Se empieza dando una breve introducción a reacciones nucleares y física de plasmas (Capítulos 1-2). Posteriormente se estudia el modelo Magnetohidrodinámico (MHD), cuyas bases fundamentan la física del confinamiento magnético, y después se aborda el equilibrio en los aparatos toroidales axisimétricos con la ecuación de G-Sh (Capítulo 3). Se continúa dando una descripción de dichos aparatos, haciendo énfasis en el RFP y los toros con razón de aspecto muy grande, cuyas propiedades se pueden aproximar por una geometría cilíndrica (Capítulo 4), para después explicar la teoría de Taylor y del campo libre de fuerzas (Capítulo 5). Seguido de esto se aplican estas bases al caso cilíndrico y a la ecuación de G-Sh (Capítulo 6). A continuación se procede al trabajo de investigación resolviendo la ecuación de G-Sh para campo libre de fuerzas en geometría toroidal, con base en el trabajo de Cerfon y Friedberg [1]. Se estudia el comportamiento de dichas soluciones para distintas configuraciones geométricas y se exponen los resultados obtenidos. A su vez se discute la importancia que estos tienen (Capítulo 7). Finalmente se presentan algunas conclusiones (Capítulo 8).

# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>IX</b>
<b>1. Reacciones nucleares</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Energía de hoy y del mañana: Energía nuclear . . . . .	1
1.3. Energía de amarre . . . . .	2
1.4. Fisión nuclear: Reacción en cadena y Energía liberada . . . . .	3
1.5. Fusión nuclear . . . . .	4
1.5.1. Como lograr fusión: Plasmas en fusión nuclear . . . . .	4
1.5.2. Energía liberada por fusión . . . . .	5
<b>2. Física de plasmas</b>	<b>11</b>
2.1. ¿Qué es un plasma? . . . . .	11
2.2. Movimiento de partículas individuales en campos eléctricos y magnéticos . . . . .	12
2.2.1. Movimiento bajo E y B uniformes . . . . .	12
2.2.2. Movimiento bajo E y B no uniformes . . . . .	14
2.3. Plasmas como fluidos . . . . .	16
2.3.1. Ecuaciones de movimiento y conservación . . . . .	16
2.3.2. Derivas de fluidos . . . . .	18
<b>3. Aproximación MHD y equilibrio en toros axisimétricos</b>	<b>20</b>
3.1. Ecuaciones magnetohidrodinámicas . . . . .	20
3.1.1. Congelamiento del campo magnético y difusión . . . . .	22
3.2. Equilibrio estático y dinámico . . . . .	22
3.3. Ecuación de Grad-Shafranov en toros axisimétricos . . . . .	23
<b>4. Aparatos de confinamiento magnético</b>	<b>27</b>
4.1. Espejos magnéticos y Z-pinch . . . . .	27
4.2. Confinamiento en toros axisimétricos . . . . .	29
4.3. Pinch Toroidal . . . . .	32
4.4. Equilibrio de RFP en geometría cilíndrica . . . . .	33

4.5. Inestabilidades . . . . .	34
4.5.1. Inestabilidad de Rayleigh-Taylor . . . . .	34
4.5.2. Inestabilidades de Rizo y de Salchicha . . . . .	35
<b>5. Helicidad Magnética y Relajación de Woltjer-Taylor</b>	<b>37</b>
5.1. Helicidad magnética como propiedad topológica . . . . .	37
5.2. Relajación de Woltjer-Taylor . . . . .	40
<b>6. Campo libre de fuerzas en fusión nuclear</b>	<b>46</b>
6.1. Campo libre de fuerzas en RFP con geometría cilíndrica . . . . .	46
6.2. Ecuación de G-S para campo libre de fuerzas . . . . .	50
6.3. Solución general a la ecuación de G-S para campo libre de fuerzas . . . . .	51
<b>7. Resultados</b>	<b>54</b>
7.1. Solución al problema con frontera rectangular . . . . .	55
7.1.1. Resultados para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular . . . . .	58
7.1.2. Resultados para $\varepsilon = 0.5$ con frontera rectangular . . . . .	66
7.2. Solución al problema con frontera circular . . . . .	70
7.3. Aproximación a la solución al modificar $k$ . . . . .	72
7.3.1. Resultados para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	72
7.3.2. Resultados para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	75
7.3.3. Resultados para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	78
7.3.4. Resultados para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	81
7.4. Aproximación a la solución al modificar $\lambda$ . . . . .	84
7.4.1. Resultados para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	84
7.4.2. Resultados para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	88
7.4.3. Resultados para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	91
7.4.4. Resultados para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	93
<b>8. Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>A. Solución a la ecuación radial</b>	<b>99</b>
<b>I Códigos</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>102</b>

# Índice de figuras

---

1.1. Curva de energías de amarre [2] . . . . .	2
1.2. Reacción en cadena de fisión [3] . . . . .	3
1.3. Fuerzas actuantes en dos núcleos cercanos [4] . . . . .	5
1.4. Secciones eficaces a distintas temperaturas para las reacciones de fusión más comunes [5] . . . . .	6
1.5. Esquema de un reactor de fusión [6] . . . . .	7
1.6. Curvas de temperatura requeridas para un reactor de fusión [5] . . . . .	9
2.1. Movimiento de una partícula en presencia de E y B [7] . . . . .	14
2.2. Deriva diamagnética [8] . . . . .	18
3.1. Ortogonalidad entre los vectores de gradiente de presión (azul), corriente (rojo), y campo magnético (verde). [9] . . . . .	24
4.1. Espejo magnético [10] . . . . .	28
4.2. Pinch de Bennett [11] . . . . .	28
4.3. Geometría toroidal [12] . . . . .	30
4.4. Estructura de un tokamak [13] . . . . .	31
4.5. Campo en un RFP [14] . . . . .	32
4.6. Inestabilidades [15] . . . . .	35
5.1. Sistema de tubos magnéticos enlazados [5] . . . . .	38
5.2. Tubos magnéticos cercados [16] . . . . .	39
5.3. Ejemplo de evolución temporal de superficies magnéticas [17] . . . . .	45
6.1. Perfiles teórico y experimental de los campos magnéticos [18] . . . . .	49
6.2. Gráfica de las funciones de Bessel [19] . . . . .	50
7.1. Frontera rectangular . . . . .	56
7.2. Variación de $\psi$ respecto a x ( $y = 0$ ) para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular . . . . .	59
7.3. Variación de $\psi$ respecto a y ( $x = 1$ ) para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular . . . . .	59
7.4. Curvas de nivel de $\psi$ para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular tomando solo J1 . . . . .	60
7.5. Curvas de nivel de $\psi$ para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular . . . . .	60

7.6. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular . . . . .	61
7.7. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular . . . . .	61
7.8. Factor de seguridad $q$ para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular . . . . .	62
7.9. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular (segundo enfoque) . . . . .	63
7.10. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular (segundo enfoque) . . . . .	63
7.11. Curvas de nivel de $\psi$ para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular (segundo enfoque)	64
7.12. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular (segundo enfoque) . . . . .	64
7.13. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular (segundo enfoque) . . . . .	65
7.14. Factor de seguridad $q$ para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular (segundo enfoque)	65
7.15. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) para $\varepsilon = 0.5$ con frontera rectangular . . . . .	66
7.16. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) para $\varepsilon = 0.5$ con frontera rectangular . . . . .	66
7.17. Curvas de nivel de $\psi$ para $\varepsilon = 0.5$ con frontera rectangular . . . . .	67
7.18. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) para $\varepsilon = 0.5$ con frontera rectangular . . . . .	67
7.19. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) para $\varepsilon = 0.5$ con frontera rectangular . . . . .	68
7.20. Curvas de nivel de $\psi$ para $\varepsilon = 0.35$ con frontera rectangular . . . . .	68
7.21. Curvas de nivel de $\psi$ para $\varepsilon = 0.4$ con frontera rectangular . . . . .	69
7.22. Curvas de nivel de $\psi$ para $\varepsilon = 0.44$ con frontera rectangular . . . . .	69
7.23. Frontera circular . . . . .	70
7.24. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	72
7.25. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	73
7.26. Curvas de nivel de $\psi$ con $k_p = 0$ para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	73
7.27. Curvas de nivel de $\psi$ con $k_p = -3.6$ para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	74
7.28. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	74
7.29. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	75
7.30. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	75
7.31. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	76
7.32. Curvas de nivel de $\psi$ con $k_p = 0$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	76
7.33. Curvas de nivel de $\psi$ con $k_p = 1.0$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	77
7.34. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	77
7.35. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	78
7.36. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	78
7.37. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	79
7.38. Curvas de nivel de $\psi$ con $k_p = 0$ para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	79
7.39. Curvas de nivel de $\psi$ con $k_p = 0.8$ para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	80
7.40. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	80

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

7.41. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.5$ . . .	81
7.42. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	81
7.43. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	82
7.44. Curvas de nivel de $\psi$ con $k_p = 0$ para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	82
7.45. Curvas de nivel de $\psi$ con $k_p = 0.5$ para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	83
7.46. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.9$ . . .	83
7.47. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $k_p$ para $\varepsilon = 0.9$ . . .	84
7.48. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	85
7.49. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	85
7.50. Curvas de nivel de $\psi$ con $\lambda_p = 2.9$ para $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	86
7.51. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.05$ . . .	86
7.52. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.05$ . . .	87
7.53. Factor de seguridad $q$ para $\varepsilon = 0.05$ con frontera circular . . . . .	87
7.54. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	88
7.55. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	88
7.56. Curvas de nivel de $\psi$ con $\lambda_p = 0.65$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . . . .	89
7.57. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . .	89
7.58. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.2928$ . . .	90
7.59. Factor de seguridad $q$ para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera circular . . . . .	90
7.60. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	91
7.61. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	91
7.62. Curvas de nivel de $\psi$ con $\lambda_p = 0.5$ para $\varepsilon = 0.5$ . . . . .	92
7.63. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.5$ . . .	92
7.64. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.5$ . . .	93
7.65. Factor de seguridad $q$ para $\varepsilon = 0.5$ con frontera circular . . . . .	93
7.66. Variación de $\psi$ respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	94
7.67. Variación de $\psi$ respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	94
7.68. Curvas de nivel de $\psi$ con $\lambda_p = 0.4$ para $\varepsilon = 0.9$ . . . . .	95
7.69. Campo magnético toroidal respecto a $x$ ( $y = 0$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.9$ . . .	95
7.70. Campo magnético poloidal respecto a $y$ ( $x = 1$ ) con distintas $\lambda_p$ para $\varepsilon = 0.9$ . . .	96
7.71. Factor de seguridad $q$ para $\varepsilon = 0.9$ con frontera circular . . . . .	96

# Índice de tablas

---

1.1. Comparación entre ganancia y fracciones de ignición para algunos casos . . . .	8
7.1. Constantes obtenidas para $\varepsilon = 0.2928$ en el caso rectangular . . . . .	58
7.2. Constantes obtenidas para $\varepsilon = 0.2928$ en el segundo enfoque del caso rectangular	62
7.3. Constantes obtenidas para $\varepsilon = 0.5$ en el caso rectangular . . . . .	66
7.4. Constantes obtenidas para distintas razones de aspecto en el caso circular . . .	71



# Reacciones nucleares

---

## 1.1. Introducción

Una de las necesidades más básicas que debe de cubrir el ser humano en su vida cotidiana, es la producción de energía. Desde el combustible que mueve nuestros transportes, hasta la protección y alimentación, el problema de producción de energía es, hoy más que nunca, de carácter universal.

A lo largo de su historia el ser humano ha ido descubriendo y perfeccionando nuevos métodos de obtención y transformación de energía. Actualmente, una serie de problemas presentan un gran reto para las futuras generaciones. Las reservas de combustibles fósiles (carbón, petróleo, entre otros) del planeta son cada vez menores, sin mencionar que su eficiencia es muy baja y dañan considerablemente al medio ambiente. Aunado a esto, las llamadas ‘energías limpias’ (eólica, solar, etc...) aún se encuentran en vías de desarrollo, y aunque prometen solucionar muchos problemas, presentan sus propios conflictos de eficiencia y peligros al medio ambiente, dejando abierta la búsqueda de un ‘santo grial’ en materia de energía.

## 1.2. Energía de hoy y del mañana: Energía nuclear

En la primera mitad del siglo pasado se empezó a estudiar con gran detalle una nueva forma de energía proveniente de un lugar poco esperado: El átomo. Gracias al trabajo de grandes mentes científicas, se descubrió que al dividir un átomo de ciertos elementos, se liberaban grandes cantidades de energía. Fue así como se descubrió el proceso conocido como fisión nuclear. Posteriormente se desarrollaron las primeras armas y finalmente se aprovechó la energía nuclear creando los primeros reactores nucleares.

La energía obtenida por fisión es vasta y muy utilizada actualmente (Países como Francia producen la mayor parte de su energía por medio de procesos nucleares). Sin embargo, la fisión presenta problemas al igual que las demás fuentes antes mencionadas; Genera desechos tóxicos y requiere de gran inversión y mantenimiento. Estas y otras causas, han evitado que la energía nuclear se convierta en la principal fuente de energía.

## 1. REACCIONES NUCLEARES

---

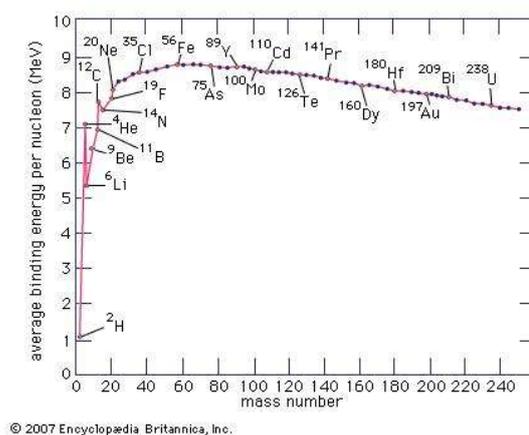
Pero aún hay esperanza, ya que años antes del descubrimiento de la fisión se había descubierto el proceso inverso, conocido como fusión nuclear. En 1938 Hans Berthe probó que las estrellas obtienen su energía mediante la unión de átomos ligeros en átomos más pesados. La energía liberada por kg por fusión es mucho mayor que la obtenida con un kg en combustible de fisión. Además de generar menos desechos tóxicos, la fácil obtención de los elementos utilizados y otras ventajas más, hacen que la fusión nuclear sea una fuente de energía altamente deseable por el ser humano; La energía del futuro.

Han pasado más de 70 años de investigación en fusión nuclear y aún falta mucho para poder crear el primer reactor. Hay problemas sin resolver en todas las áreas de funcionamiento (ignición, confinamiento, aprovechamiento de energía, etc...) pero se espera que pronto esta vasta fuente de energía esté al alcance de nuestras manos, solucionando así un problema que ha estado presente a lo largo de toda nuestra historia.

### 1.3. Energía de amarre

Para entender por qué se libera energía en las reacciones nucleares, es necesario conocer el concepto de energía de amarre. Esta se define como la energía mínima necesaria para separar un sistema de partículas en sus partes constituyentes. En el caso nuclear, se refiere a la energía necesaria para separar un núcleo en los nucleones que lo conforman, los cuales se mantienen unidos debido a la acción de la fuerza nuclear.

La intensidad de esta energía varía de elemento a elemento, como se muestra en la figura 1.1. Se observa que el  $^{56}\text{Fe}$  es el elemento más fuertemente unido.



**Figura 1.1:** Curva de energías de amarre

[2]

Cada vez que un elemento es transmutado en otro cuya energía de amarre es mayor, se libera energía. Esto debido a que la masa no se conserva en estos eventos, la variación de la masa se expresa mediante la liberación de energía siguiendo la famosa ecuación de Einstein  $E = mc^2$ .

El factor  $c^2$  en la ecuación de Einstein hace que cambios muy pequeños en masa sean traducidos en grandes cantidades de energía liberada. La cantidad de energía liberada es proporcional a la diferencia entre energías de amarre entre los elementos. De acuerdo a la ecuación de Einstein y la figura 1.1, la energía liberada en un proceso de fisión común es aproximadamente 200 MeV.

## 1.4. Fisión nuclear: Reacción en cadena y Energía liberada

Como se expuso anteriormente la fisión nuclear consiste en la división de un núcleo pesado en dos núcleos menos masivos. Es evidente que entre más núcleos se fisionen más energía se liberará. En un reactor esto se logra gracias a una reacción en cadena (Figura 1.2), la cual ocurre cuando uno de los neutrones liberados por la fisión original se encuentra con un nuevo átomo fisionable, repitiendo una y otra vez el proceso original.

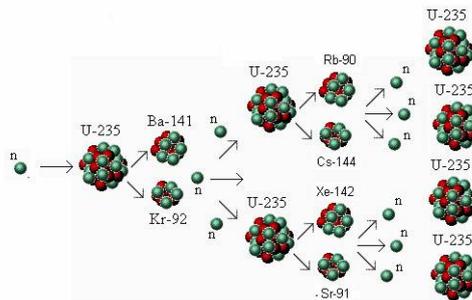


Figura 1.2: Reacción en cadena de fisión

[3]

En teoría, gran parte de los elementos pueden llevar a cabo reacciones de fisión, pero solo ciertos elementos pueden mantener una reacción en cadena de fisión. Estos elementos son llamados ‘elementos (o isótopos) fisionables’ y son todos elementos transuránicos, es decir, elementos con número atómico mayor o igual al del Uranio ( $Z = 92$ ).

La fisión nuclear puede ser espontánea (ocurre cuando un átomo es inestable y se divide por si solo) o inducida.

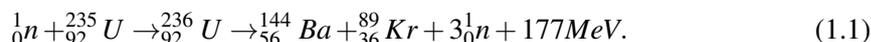
En la fisión inducida se envía un neutrón con energía cinética adecuada hacia un elemento fisionable, por ejemplo el  $^{235}\text{U}$ . El neutrón es capturado por el átomo volviéndolo inestable, por lo cual éste se divide en dos fragmentos, una serie de neutrones, y una cantidad considerable de energía en forma de radiación, calor, etc...

Es por esta razón que el número de neutrones, y la energía que estos llevan, son de gran importancia para sostener una reacción en cadena. Las reacciones de fisión ocurren con mayor probabilidad debido a neutrones térmicos, es decir, neutrones con relativamente poca energía cinética. Los neutrones con mayor energía también pueden producir reacciones de fisión pero la probabilidad de que ocurran es menor. Uno de los elementos fisionables más utilizados es el  $^{235}\text{U}$ , esto se debe a que su fisión produce un número adecuado de neutrones con las energías

## 1. REACCIONES NUCLEARES

---

apropiadas para continuar la reacción en cadena. A continuación se muestra una reacción de fisión con  $^{235}\text{U}$ .



Existen diversos problemas que hacen que la reacción en cadena no se produzca tan fácilmente como parece. Primero, el Uranio se encuentra mayormente en la naturaleza como  $^{238}\text{U}$  (no fisionable), de acuerdo a [15] solo el 0.7% del Uranio es  $^{235}\text{U}$ , por lo que es necesario un proceso de separación para obtener el Uranio deseable [15]. El  $^{238}\text{U}$  también puede ser aprovechado, ya que absorbiendo un neutrón se convierte en  $^{239}\text{U}$ , posteriormente decayendo en  $^{239}\text{Pu}$  el cual es elemento fisionable.

Otro problema, es que los neutrones producidos por fisión son de alta energía, y para que estos sean absorbidos por los núcleos, necesitan bajar su energía. Para esto se utiliza un moderador en la reacción, que comúnmente es  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{D}_2\text{O}$  ó grafito, que tienen una baja absorción de neutrones y disminuyen su energía. Los moderadores son tan importantes que los reactores nucleares se clasifican de acuerdo al tipo de moderador utilizado.

Los reactores más comunes son los que usan agua ligera como moderador. Estos pueden ser de agua a presión (PWR) y de agua en ebullición (BWR).

Los reactores nucleares han existido por décadas y se ha llegado a controlar de manera muy eficiente la energía nuclear. De acuerdo a [20], en el mundo hay 453 reactores nucleares en operación, cuya capacidad de producción de energía eléctrica es de 399,368MWe. Por otro lado, 55 reactores más están siendo construidos, y se espera que produzcan energía eléctrica cercana a los 56,643MWe.

Entre los elementos que resultan de los proceso de fisión en reactores se encuentran el  $^{137}\text{Cs}$  y  $^{131}\text{I}$ , elementos radioactivos que se resguardan en contenedores de acero y en ocasiones son enterrados bajo tierra para evitar su exposición al medio ambiente. Sin embargo, los desechos de las reacciones de fisión son un problema de almacenamiento si la energía nuclear se vuelve nuestra principal fuente de energía, por lo que es necesario obtener energía de una nueva fuente.

### 1.5. Fusión nuclear

La fusión nuclear es el proceso opuesto a la fisión nuclear. Consiste en la unión de dos o más átomos para formar uno nuevo. La fusión puede ser llevada a cabo con el hidrógeno y sus isótopos, deuterio y tritio (El deuterio es fácilmente obtenido del agua, mientras que el tritio no se encuentra en la naturaleza y debe de ser producido en el reactor mediante reacciones entre neutrones y litio).

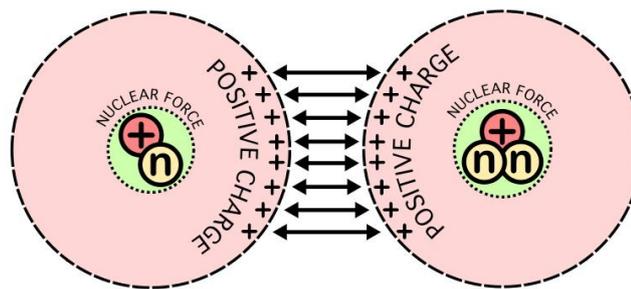
Las estrellas obtienen su energía fusionando el hidrogeno puro en átomos más pesados, los cuales a su vez se fusionan para producir elementos más pesados hasta llegar al  $\text{Fe}$

#### 1.5.1. Como lograr fusión: Plasmas en fusión nuclear

Hacer que dos núcleos se unan para formar uno nuevo no es una tarea tan sencilla como parece. Nótese que tanto el deuterio como el tritio poseen carga positiva, por lo que una fuerza

de repulsión coulombiana está siempre presente entre ellos. Cuanto más cerca estén dichos núcleos entre sí, más intensa será esta fuerza de repulsión, por ende, los núcleos deben poseer altas energías con el fin de superar esta barrera de energía, y que la distancia entre ellos sea lo suficientemente corta para que la fuerza nuclear actúe y los fusione (Figura 1.3).

### Nuclear Fusion Power



**Figura 1.3:** Fuerzas actuantes en dos núcleos cercanos

[4]

Cuando se habla de altas energías, es natural pensar que los aceleradores de partículas serían un camino viable para resolver el problema antes mencionado, sin embargo esto no es así. Si se buscara utilizar un blanco de tritio y acelerar los núcleos de deuterio hacia él, solo unos pocos se acercarían de frente de tal manera que la barrera coulombiana sería superada en pocos casos, obteniendo así una energía de fusión mucho menor que la energía que se empleó para acelerar los núcleos de deuterio.

Por otro lado, si se buscara emplear dos haces de núcleos (uno de tritio y otro de deuterio), las colisiones de frente entre dos núcleos seguirían siendo tan poco probables que no se recuperaría la energía invertida.

Por estas razones, el método más viable para producir fusión es calentando un gas de deuterio y tritio, hasta una temperatura a la cual las reacciones de fusión se produzcan con alta frecuencia, con la ventaja de que la energía liberada en partículas cargadas regresa al gas para mantenerlo caliente.

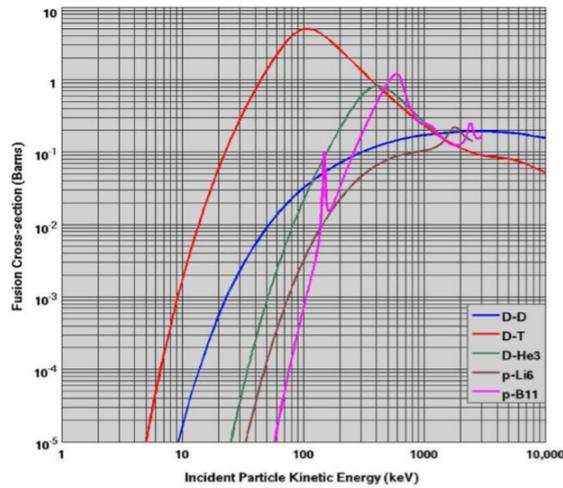
En las estrellas las altas presiones ayudan a generar energía, mientras que un reactor, al no poder reproducir dichas presiones, requiere que las temperaturas sean mayores a las del centro del Sol. En ambos casos las temperaturas son tan altas que los átomos dentro se ionizan (pierden sus electrones), y el gas se vuelve un mar de electrones e iones (núcleos) conocido como plasma.

#### 1.5.2. Energía liberada por fusión

Como se observa en la figura 1.1, el formar helio a partir de deuterio y tritio implica un incremento en la energía de amarre, por lo que se libera energía en el proceso. Más aún, se observa que la diferencia entre energías de amarre es mucho mayor que en cualquier caso fi-

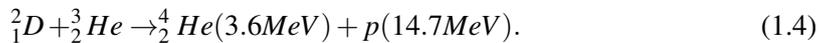
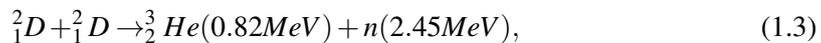
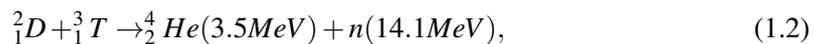
## 1. REACCIONES NUCLEARES

sionable, por lo que la energía liberada **por nucleón** es mucho más grande en la fusión con hidrógeno y sus isótopos (La fisión genera más energía total debido a que el uranio tiene muchos más nucleones que el hidrógeno, sin embargo, como un átomo de hidrógeno pesa mucho menos que uno de uranio, la energía liberada por kg es superior en un proceso de fusión). La reacción de fusión más conveniente para llevar a cabo en un aparato de confinamiento magnético es la que ocurre entre Deuterio y Tritio (D-T). Esto se debe a que su **sección eficaz de fusión** es más alta a menores temperaturas. En la figura 1.4 se muestra la gráfica de sección eficaz contra energía cinética para distintas reacciones nucleares.

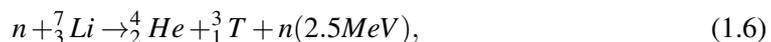
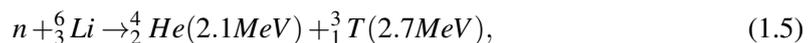


**Figura 1.4:** Secciones eficaces a distintas temperaturas para las reacciones de fusión más comunes [5]

De acuerdo a [21], algunas de las reacciones más accesibles son las siguientes:

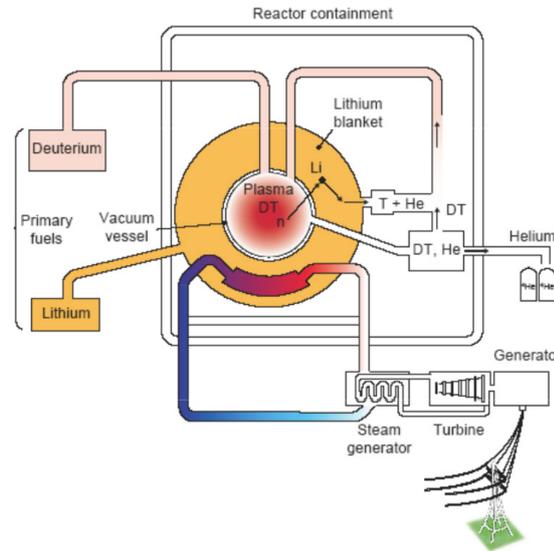


En una reacción de deuterio-tritio la mayor parte de la energía es liberada por medio de los neutrones. Estos juegan un doble papel: La cría de tritio a partir de litio mediante las reacciones



y mediante termalización, calentar un cobertor el cual sirve como protección de las bobinas y demás aparatos. De este modo se obtiene el suministro de combustible necesario para el

reactor, y se realiza la transferencia de energía para accionar el generador de vapor y turbinas que producen la energía eléctrica (Figura 1.5)



**Figura 1.5:** Esquema de un reactor de fusión

[6]

Gracias a la abundancia de los elementos utilizados y la enorme cantidad de energía liberada, la fusión podría abastecer las necesidades de energía del planeta por miles de años. Para que se pueda aprovechar la energía liberada por fusión en un reactor, este debe cumplir con ciertos requerimientos. La potencia obtenida por la fusión debe de ser mayor a la potencia necesaria para calentar la mezcla de D-T (su temperatura debe de elevarse alrededor de los 100 millones de grados Celsius), y a la potencia necesaria para mantener la mezcla a dicha temperatura. Esta desciende debido a pérdidas térmicas por conducción y convección de la mezcla, así como por pérdidas por radiación bremsstrahlung debido a colisiones entre las componentes del plasma. La ganancia de energía  $Q$  en un reactor se define como la razón de la potencia obtenida  $P_{out}$  y la potencia invertida  $P_{in}$ . Como  $P_{out}$  se toma la producida por las reacciones de fusión  $P_{fusion}$ , y como  $P_{in}$  la necesaria para calentar el plasma mediante fuentes auxiliares  $P_{aux}$ .

$$Q = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{fusion}}{P_{aux}}. \quad (1.7)$$

Por ello en un reactor se requiere  $Q > 1$ . La condición  $Q = 1$  se le conoce como condición de equilibrio.

Por otra parte, las partículas alfa liberadas contribuyen al calentamiento, y se deben conseguir las condiciones para que entreguen su energía. La potencia obtenida por fusión es 5 veces la obtenida por las partículas alfa  $P_{\alpha}$ , es decir

$$Q = \frac{P_{fusion}}{P_{aux}} = \frac{5P_{\alpha}}{P_{aux}}, \quad (1.8)$$

mientras que la fracción de calentamiento debido a partículas alfa es

## 1. REACCIONES NUCLEARES

---

$$f_\alpha = \frac{P_\alpha}{P_\alpha + P_{aux}}. \quad (1.9)$$

Despejando  $P_\alpha$  en la ecuación 1.8 y sustituyendo en la ecuación 1.9 se obtiene la fracción de calentamiento en términos de la ganancia:

$$f_\alpha = \frac{Q}{Q+5}. \quad (1.10)$$

En la tabla 7.4 se presentan las fracciones de calentamiento obtenidas para distintos valores de ganancia

Q	$f_\alpha$
1	17 %
5	50 %
10	60 % (ITER)
20	80 % (Reactor)
$\infty$	100 % (Ignición)

**Tabla 1.1:** Comparación entre ganancia y fracciones de ignición para algunos casos

Por otra parte, el calor neto en la mezcla se obtiene mediante el siguiente balance:

$$P_{heat} = P_{aux} + P_\alpha - P_{Br} = P_{trans} + \frac{dW_p}{dt}, \quad (1.11)$$

donde  $P_{Br}$  es la potencia perdida por la radiación bremsstrahlung,  $P_{trans}$  es la potencia perdida a través de varios procesos de transporte y  $\frac{dW_p}{dt}$  es la potencia requerida para aumentar la energía cinética de la mezcla. En el caso de procesos pulsados se tiene que  $W_p = 3n_e k_B T_e V_p$  con  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $n_e$  es la densidad de electrones y  $V_p$  el volumen de la mezcla.

Por otro lado, las pérdidas de energía por transporte están relacionadas a la energía total mediante el tiempo de confinamiento  $\tau_E$ , definido como:

$$\tau_E = \frac{W_p}{P_{heat} - \frac{dW_p}{dt}}. \quad (1.12)$$

Una condición mínima que debe de cumplir un plasma de fusión, es conocida como **Criterio de Lawson** [5], dado por:

$$n_e \tau_E = \frac{3(1 - \eta_{in} \eta_{out}) k_B T_e}{\eta_{in} \eta_{out} \frac{\langle \sigma v \rangle E_\alpha (Q+5)}{4Q} - k_B (1 - \eta_{in} \eta_{out}) \sqrt{T_e}}. \quad (1.13)$$

Aquí  $\langle \sigma v \rangle$  es la sección transversal de colisiones de cada especie promediada sobre la distribución de velocidades,  $E_\alpha$  es la energía que llevan las partículas alfa,  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $\eta_{in}$  y  $\eta_{out}$  son las eficiencias de las fuentes de energía incidente y energía de salida respectivamente.

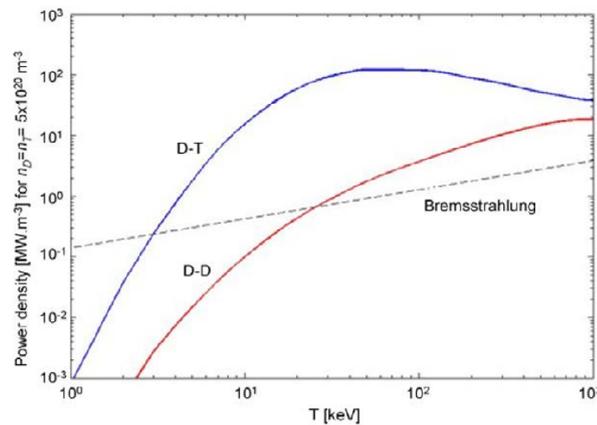
Para la condición de equilibrio en una mezcla 50/50 de D-T se tiene:

$$n_e \tau_E = 10^{20} \text{ s m}^{-3}. \quad (1.14)$$

En la práctica distintos aparatos pueden operar a diferentes temperaturas promedio, por lo que es necesario usar la variación de la sección transversal de la reacción para distintas temperaturas. Por ejemplo, el criterio de Lawson para una mezcla de D-T a una temperatura promedio de  $T_e = 15 \text{ KeV}$ , se escribe mediante el triple producto:

$$n_e \tau_E T_i > 1.5 \times 10^{21} \text{ keV s m}^{-3}. \quad (1.15)$$

Por otro lado, el criterio de Lawson también define la mínima temperatura requerida para un reactor de fusión de acuerdo a las reacciones llevadas a cabo en él. A estas temperaturas la potencia de fusión debe exceder las pérdidas por radiación de bremsstrahlung. La Figura 1.6 muestra las curvas de temperatura para reacciones D-T y D-D, exhibiendo que la condición de temperatura es menor para el primer caso que para el segundo.



**Figura 1.6:** Curvas de temperatura requeridas para un reactor de fusión

[5]

Finalmente, haciendo  $Q \rightarrow \infty$  en la ecuación 1.6 se obtiene el criterio de ignición, para el cual el calentamiento de las partículas alfa sería suficiente para mantener las reacciones

$$n_e \tau_E = \frac{3k_B T_e}{\frac{\langle \sigma v \rangle E_\alpha}{4} - k_B \sqrt{T_e}}. \quad (1.16)$$

Como se comentó anteriormente, un plasma es generado en el interior de un reactor de fusión nuclear. Por esta razón, la física de la fusión nuclear es, en gran parte, la física de plasmas. Es necesario conocer cómo se comporta el llamado ‘cuarto estado de la materia’, sus propiedades, inestabilidades, lo necesario para confinarlo, y demás, para poder lograr controlar

## 1. REACCIONES NUCLEARES

---

y aprovechar la energía de fusión nuclear.

Ahora se procederá a dar un pequeño marco teórico sobre la física de plasmas relevante en problemas de fusión nuclear confinada magnéticamente.

# Física de plasmas

---

En el capítulo anterior se explicaron las razones por las cuales es necesario conocer la física de los plasmas para entender la fusión nuclear. También se dio una pequeña definición de plasma, que a continuación, se formalizará. Finalmente se explicarán algunos aspectos relevantes de la física de plasmas para la fusión nuclear.

## 2.1. ¿Qué es un plasma?

Expandiendo en la definición antes dada, un plasma se define como un gas cuasineutro de partículas cargadas y neutras, que experimenta un comportamiento colectivo. Se entiende como ‘comportamiento colectivo’ a que, cualesquiera dos regiones de un plasma, estas interactúan eléctrica o magnéticamente sin importar que tan separadas se encuentren, es decir, una perturbación por más lejana que se dé, afecta a todo el plasma. Este comportamiento es exclusivo de los plasmas debido a que las cargas eléctricas se encuentran libres y en movimiento, dando lugar a campos eléctricos y magnéticos que ejercen fuerzas sobre todo el sistema. Un plasma satisface 3 condiciones. La primera está expresada en la siguiente ecuación:

$$E_k \gg E_p, \tag{2.1}$$

la cual establece que la energía cinética de las partículas debe de ser mucho mayor que la energía potencial entre ellas, esto con el fin de que las partículas del plasma colisionen entre sí. Además, gracias a esta condición se presenta el fenómeno conocido como apantallamiento. En física de plasmas este es conocido como **apantallamiento de Debye** y hace referencia a que, debido a las diferencias entre energía cinética y potencial, una carga de un signo se verá rodeada por cargas del signo opuesto, bloqueando hacia el exterior el campo eléctrico generado por la carga original, es decir, el potencial eléctrico de la carga tendrá una región de influencia muy corta. La distancia promedio a la cual el potencial es bloqueado se le conoce como **Longitud de Debye**  $\lambda_D$  [7].

La segunda condición que debe satisfacer un gas ionizado para ser considerado plasma es la siguiente:

$$\lambda_D \ll L, \quad (2.2)$$

la cual establece que la longitud de Debye debe de ser mucho menor que las dimensiones ( $L$ ) del sistema, pues así se asegura que a grandes escalas el plasma permanecerá neutro. Finalmente, la tercer condición es la siguiente:

$$\omega_p \tau < 1. \quad (2.3)$$

Esta establece que si  $\omega_p$  es la frecuencia típica de oscilaciones de plasma y  $\tau$  es el tiempo promedio entre colisiones con átomos neutros, el producto de dichas cantidades debe de ser pequeño. De esta manera se asegura que las partículas cargadas no colisionan tan frecuentemente, es decir, su movimiento es descrito en mayor parte por las interacciones electromagnéticas y no por las interacciones mecánicas.

## 2.2. Movimiento de partículas individuales en campos eléctricos y magnéticos

Se sabe que una partícula cargada en movimiento ve afectada su trayectoria en presencia de un campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , o de un campo magnético  $\mathbf{B}$ . A continuación, se analizan casos cuando  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son uniformes y no uniformes.

### 2.2.1. Movimiento bajo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ uniformes

Primero, si  $\mathbf{B} \neq 0$  y  $\mathbf{E} = 0$ , de la segunda ley de Newton y de la fuerza de Lorentz se tiene la ecuación de movimiento:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.4)$$

El movimiento es tridimensional, entonces  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , además, se supone sin pérdida de generalidad  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ . De la ecuación 2.4 y separando en sus componentes correspondientes, se tiene que resolver el sistema:

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 x + C_1, \quad (2.5)$$

$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 y + C_2, \quad (2.6)$$

$$\ddot{z} = 0, \quad (2.7)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración.

La ecuación en la dirección “z” es trivial y la partícula cargada se mueve con velocidad constante. Nótese además que cada ecuación es análoga a la ecuación del oscilador armónico simple, pues por ejemplo, la ecuación 2.5 se puede escribir como:

$$\ddot{x} = -\omega_c^2 x + C_1, \quad (2.8)$$

donde  $\omega_c$  es una cantidad positiva conocida como frecuencia de ciclotrón, dada por:

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}. \quad (2.9)$$

Nótese que se tendrá un movimiento periódico y las soluciones al sistema de ecuaciones son:

$$x = K \sin(\omega_c t) + x_0, \quad (2.10)$$

$$y = K \cos(\omega_c t) + y_0, \quad (2.11)$$

$$z = C_3 t + C_4, \quad (2.12)$$

donde  $K$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son constantes, además de que las ecuaciones 2.10 y 2.11 describen una circunferencia de radio  $K$  centrada en  $(x_0, y_0)$ , cuya ecuación es  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = K^2$ . Cuando  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{B}$  son ortogonales, la fuerza magnética juega el papel de una fuerza central, de tal manera que se tiene un movimiento circular uniforme en el plano generado por  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{v}$  cuyo radio de giro es conocido como radio de Larmor y está dado por:

$$r_L = \frac{v}{\omega_c} = \frac{mv}{|q|B}, \quad (2.13)$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula.

En 3 dimensiones, la partícula seguiría un movimiento circular uniforme con un desplazamiento a velocidad constante en la dirección del campo magnético. También es adecuado recalcar que tanto el radio de Larmor, como la frecuencia y la dirección de giro son determinados por el signo y masa de la carga, por lo que iones y electrones en un plasma experimentan trayectorias muy distintas aún en un caso tan simple como este. Finalmente, en caso de que  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{B}$  no fueran ortogonales, se tendría una trayectoria helicoidal en vez de circular.

Ahora, si  $\mathbf{E} \neq 0$ , la nueva ecuación de movimiento será:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.14)$$

Nuevamente, sin pérdida de generalidad se supone que  $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$ , de tal manera que ahora hay una ecuación de movimiento no trivial en la componente  $z$ . Pese a esto, la solución a dicha ecuación se obtiene integrando y tiene la forma:

$$z = \frac{1}{2} \frac{qE_z}{m} t^2 + a_1 t + a_2, \quad (2.15)$$

donde las  $a$  son constantes. Este término respresenta una aceleración en la dirección  $\hat{z}$ . Ahora se sigue el proceso análogo al caso anterior, se obtiene una nueva ecuación en  $\hat{x}$ :

$$\ddot{x} = \frac{q}{m} (E_x + B\dot{y}) = -\omega_c^2 x + c_2, \quad (2.16)$$

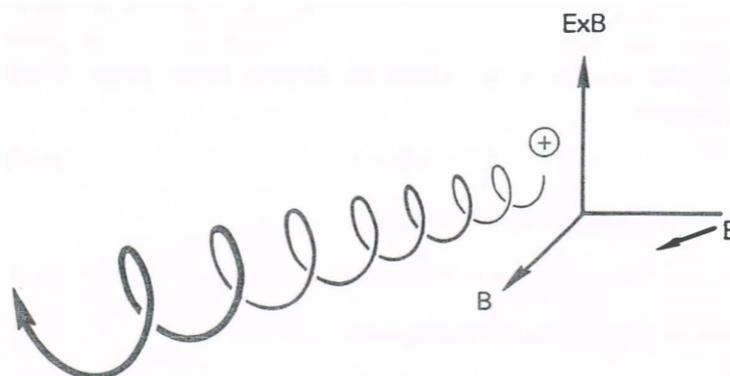
donde  $c_2 = c_1 + \frac{q}{m} E_x$ , y  $c_1$  es la primer constante de integración. La solución a esta ecuación es la ecuación 2.10, al considerar ahora que  $x_0 = \frac{c_2}{\omega_c}$ .

Finalmente, la ecuación en “y” es análoga al caso inicial (pues  $E_y = 0$ ). Entonces basta integrar la ecuación 2.6 y sustituir la expresión obtenida para “x” en dicha ecuación. Al integrar nuevamente y simplificar la expresión, el resultado obtenido es:

$$y = K \cos(\omega_c t) - \frac{c_2}{B} t = K \cos(\omega_c t) - \frac{c_1 + \frac{q}{m} E_x}{B} t, \quad (2.17)$$

lo cual indica que el movimiento bajo los dos campos es una superposición del movimiento para el caso  $\mathbf{E} = 0$ , más una deriva del centro de giro debido al campo eléctrico ( $v_{cE}$ ), resultando en un movimiento helicoidal con una deriva de su centro (Figura 2.1). La expresión para ( $v_{cE}$ ) es [7]:

$$v_{cE} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.18)$$



**Figura 2.1:** Movimiento de una partícula en presencia de E y B

[7]

### 2.2.2. Movimiento bajo E y B no uniformes

Cuando se lidia con campos no uniformes el problema se vuelve tan complejo que en la mayoría de los casos no existe solución analítica a ellos. Ahora, se discutirán dos casos simples de no uniformidad que si presentan solución.

El primero es la no uniformidad debido a un cambio en la densidad de campo magnético tal que  $\nabla B \perp B$ . Siguiendo la convención utilizada,  $\nabla B$  puede apuntar en dirección  $\hat{x}$  o  $\hat{y}$ . Sin pérdida de generalidad se elige  $\nabla B$  que apunta en dirección  $\hat{y}$ .

Debido a la no uniformidad de  $\mathbf{B}$  se experimenta una nueva velocidad de deriva, cuya expresión puede ser encontrada calculando el promedio de fuerza que siente la partícula cargada al completar un giro. Como  $\mathbf{B}$  es constante en  $x$ , y  $\mathbf{v}$  cambia de dirección, es evidente que  $\overline{F_x} = 0$ . Para  $y$  se sabe de la ecuación 2.4 que

$$F_y = -qv_x B_z. \quad (2.19)$$

Nótese que  $B_z(y)$ . Conforme se avanza en el giro, se experimentan cambios pequeños en el campo, por lo que haciendo el desarrollo de Taylor de  $\mathbf{B}$  alrededor de  $y_0 = 0$ , y sustituyendo el valor de  $v_x$ , obtenido de la ecuación, en la ecuación 2.19 se obtiene:

$$F_y = -qv \cos(\omega_c t) \left[ B_0 \pm y \frac{\partial B}{\partial y} \right]. \quad (2.20)$$

Tomando el promedio en un giro se obtiene

$$\overline{F_y} = \pm \frac{1}{2} qv r_L \frac{\partial B}{\partial y}, \quad (2.21)$$

pues  $\overline{\cos(\omega_c t)} = 0$  y  $\overline{\cos^2(\omega_c t)} = \frac{1}{2}$ .

Ahora, sabiendo que  $F = qE$  y sustituyendo  $\overline{\mathbf{F}}$  y  $\mathbf{B}$  en la ecuación 2.18 se obtiene la velocidad de deriva del centro de giro debido a  $\nabla B$

$$v_{\nabla B} = \frac{1}{q} \frac{\overline{F_y}}{|\mathbf{B}|} \hat{x} = \pm \frac{1}{2} \frac{v r_L}{B} \frac{\partial B}{\partial y} \hat{x}. \quad (2.22)$$

Nuevamente, como se eligió el  $\nabla B \parallel \hat{y}$  arbitrariamente, la expresión general es:

$$v_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}, \quad (2.23)$$

donde el signo es el de la carga en consideración.

Ahora se analizará otra deriva muy común en física de plasmas, esta vez debido a la curvatura del campo magnético. Se busca encontrar la fuerza que origina la deriva, para que nuevamente al utilizar la ecuación 2.18, se encuentre la expresión buscada.

Considérese un campo magnético  $\mathbf{B}$ , constante en magnitud y con líneas de fuerza curva. Su radio de curvatura  $R_c$  es constante. Entonces una partícula cargada que se mueve en dicho campo experimenta una fuerza centrífuga  $F_{cf}$ . Sea  $v_{\parallel}$  la componente de la velocidad paralela al campo, de modo que la fuerza centrífuga promedio es:

$$\overline{\mathbf{F}_{cf}} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \hat{r}. \quad (2.24)$$

Como  $\mathbf{R}_c = R_c \hat{r}$  y  $F = qE$ , sustituyendo en la ecuación 2.18 se obtiene la expresión para la deriva de curvatura:

$$v_{dc} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2}. \quad (2.25)$$

Estas son algunas de las derivas que presentan las partículas cargadas cuando se mueven a través de campos electromagnéticos.

Las derivas aquí estudiadas se reflejan en el movimiento promedio de un plasma cuando se le modela como un conjunto de fluidos que describen a las diversas especies. Ahora se expondrán algunos resultados de este modelo.

## 2.3. Plasmas como fluidos

A continuación se expondrá el modelo conocido como **modelo de varios fluidos**, el cual generaliza los conceptos antes expuestos a un marco de física de fluidos, y será de gran utilidad para entender la aproximación MHD (Capítulo 3).

### 2.3.1. Ecuaciones de movimiento y conservación

Un modelo de  $\alpha$  especies de partículas cargadas indistinguibles, se puede describir mediante la evolución de las funciones de distribución de velocidades en 7 dimensiones  $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ . Al emplear regla de la cadena sobre esta ecuación se obtiene que:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_\alpha + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f_\alpha = \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c. \quad (2.26)$$

El término de la derecha representa la interacción entre las especies debido a colisiones, mientras que el término de aceleración es  $\mathbf{a} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B})$ .

Por otra parte, un promedio sobre las velocidades se define como:

$$\langle g_\alpha(\mathbf{v}) \rangle = \frac{\int g(\mathbf{v}) f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}. \quad (2.27)$$

De ahora en adelante se omitirá el subíndice  $\alpha$  por comodidad, y se volverá a introducir cuando sea necesario.

Promediando  $g \langle \mathbf{v} \rangle$  de acuerdo a la ecuación 2.26 y definiendo la densidad de partículas como  $n(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$ , se tiene:

$$\frac{\partial(n \langle g \rangle)}{\partial t} + \nabla_x \cdot (n \langle g \mathbf{v} \rangle) - n \langle \mathbf{a} \cdot \nabla_v g \rangle = \int g \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\mathbf{v}. \quad (2.28)$$

Ahora, sacando el momento 0 de la ecuación 2.28 [7], es decir cuando  $g = v^0 = 1$ , se obtiene:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \langle \mathbf{v} \rangle) = \int \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c d\mathbf{v}, \quad (2.29)$$

donde se observa que la velocidad considerada es el promedio de velocidades de cada partícula. Además, de que se trata de la ecuación de continuidad con una fuente externa.

Ahora, se saca el primer momento de la ecuación 2.28 ( $\mathbf{g} = m\mathbf{v}$ ), descomponiendo la velocidad

$\mathbf{v}$  en una velocidad promedio del elemento de fluido más una velocidad aleatoria debido de las partículas, es decir,  $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle) = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}_a$ . Además, utilizando la notación  $\langle \mathbf{v} \rangle \equiv \mathbf{u}$  entonces se obtiene:

$$m_\alpha n_\alpha \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha) \right] = q_\alpha n_\alpha (\langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{u}_\alpha \times \langle \mathbf{B} \rangle) - \nabla \cdot \langle m_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a \rangle + \int m_\alpha v_{a\alpha} \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c d\mathbf{v}_\alpha, \quad (2.30)$$

donde los campos electromagnéticos son el promedio de los correspondientes campos microscópicos, y el término de la diada puede ser separado en una matriz diagonal  $\mathbf{P}$ , y una matriz no diagonal  $\Pi$ , tal que  $\langle m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a \rangle = \mathbf{P} + \Pi$ . Entonces simplificando se obtiene:

$$m_\alpha n_\alpha \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha) \right] = q_\alpha n_\alpha (\langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{u}_\alpha \times \langle \mathbf{B} \rangle) - \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha - \nabla \cdot \Pi_\alpha + \int m_\alpha v_{a\alpha} \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c d\mathbf{v}_\alpha. \quad (2.31)$$

Esta es una ecuación de Navier-Stokes para un fluido cargado, donde  $\mathbf{P}_\alpha$  es un tensor de presión (en un plasma isotrópico este término es un simple gradiente de presión) y  $\Pi_\alpha$  representa la viscosidad del fluido.

Aunque no es relevante para esta tesis, se puede calcular el segundo momento de la ecuación 2.28 ( $g = \frac{1}{2} m u^2$ ), obteniéndose:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_\alpha n_\alpha u^2 + Np}{2} \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{m_\alpha n_\alpha u^2}{2} + \frac{N+2}{2} p \right) \mathbf{u}_\alpha + \Pi_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha + \frac{m_\alpha n_\alpha \langle \mathbf{u}_a^2 \mathbf{u}_a \rangle}{2} \right] = \\ = q_\alpha n_\alpha \langle \mathbf{E} \rangle \cdot \mathbf{u}_\alpha + \int \frac{1}{2} m_\alpha v_{a\alpha}^2 \left( \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_c d\mathbf{v}_\alpha, \quad (2.32) \end{aligned}$$

donde  $N$  es el número de grados de libertad.

Los campos  $\langle \mathbf{E} \rangle$  y  $\langle \mathbf{B} \rangle$  se describen al resolver las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.36)$$

en donde por comodidad se ha tomado la notación  $\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}$  y  $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}$ , entendiéndose que se refiere a los campos macroscópicos.

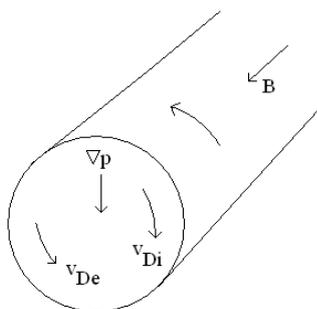
La densidad de carga  $\rho$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  están dadas por las siguientes integrales sobre las distribuciones de velocidades:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) d^3 \mathbf{u}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{u} f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) d^3 \mathbf{u}. \quad (2.38)$$

Todo este conjunto de ecuaciones describe un plasma en el modelo de varios fluidos, en donde quedan por determinar los términos que conciernen a las colisiones entre especies. De la ecuación de Navier-Stokes, se observa que las derivas deducidas en la sección anterior, tienen una generalización al movimiento promedio de los fluidos, además de que aparece una nueva. Ahora se discutirán estas derivas.

### 2.3.2. Derivas de fluidos



**Figura 2.2:** Deriva diamagnética

[8]

Sean  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  uniformes,  $\mathbf{u}$  perpendicular al campo magnético y los gradientes  $\nabla n$ ,  $\nabla p$  no cero. Supóngase que  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0$  (justificado más adelante) y también supóngase que las velocidades de deriva son pequeñas comparadas con la frecuencia de giro de partículas  $\omega_c$ , entonces  $\omega_{deriva} \ll \omega_c$  y por tanto  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ . Haciendo el producto vectorial de la ecuación 2.31 (sin considerar los términos de viscosidad e interacción) con  $\mathbf{B}$  se obtiene

$$0 = q_{\alpha} n_{\alpha} [\mathbf{E} \times \mathbf{B} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \nabla p \times \mathbf{B}. \quad (2.39)$$

Usando la propiedad del triple producto vectorial:  $(\mathbf{C} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$  y despejando  $\mathbf{u}$  se obtiene:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2}, \quad (2.40)$$

donde el primer término es la ya conocida deriva debida al campo eléctrico perpendicular al campo magnético, mientras que el segundo término es una nueva deriva conocida como **deriva diamagnética** ( $\mathbf{u}_D$ ). Esta deriva está presente en plasmas de distintas geometrías, por ejemplo

uno cilíndrico (Figura 2.2), donde se observa que las derivas diamagnéticas de iones y electrones tienen dirección opuesta.

De la ecuación 2.40 se observa que  $u_D$  es perpendicular a  $\nabla p$ , por lo que  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0$  es consistente si  $\mathbf{E} = 0$  o  $\mathbf{E} \parallel \nabla p$ . Nótese que esta deriva sigue presente aún si la condición anterior no se cumple, la diferencia es que su expresión resulta ser mucho más compleja en este y otros casos, distintos al que se consideró.

Con la teoría expuesta en este capítulo, se tienen las bases necesarias para estudiar el modelo MHD, en particular, el problema de equilibrio y estabilidad en un experimento (reactor) de fusión. También se puede discutir como es el funcionamiento de los experimentos de confinamiento magnético toroidal más conocidos (Tokamak, Spheromak, RFP, etc...), cuya base teórica tiene sus raíces en este capítulo. Estas y otras cosas más serán expuestas en el capítulo siguiente.

# Aproximación MHD y equilibrio en toros axisimétricos

---

En el capítulo anterior se explicó que un plasma se puede describir macroscópicamente como un conjunto de fluidos cargados que se rige bajo las ecuaciones antes expuestas. Una aproximación simplificada es el modelo magnetohidrodinámico (MHD), este modelo es válido para frecuencias bajas, en el que predomina la dinámica de los iones y se considera que el plasma es cuasineutro localmente; Es decir que las desviaciones entre las densidades de iones y electrones son de mayor orden. Esto se justifica porque los iones son núcleos más masivos que los electrones. En plasmas de fusión se busca llegar a un equilibrio entre plasma y campo magnético, llamado equilibrio estático, el cual se deriva de las ecuaciones MHD. Esta condición de equilibrio aplicada a toros axisimétricos, resulta a su vez en la llamada ecuación de Grad-Shafranov cuyas soluciones describen distintos tipos de equilibrio. A continuación se explicarán las bases del modelo MHD así como la derivación de la ecuación de Grad-Shafranov.

## 3.1. Ecuaciones magnetohidrodinámicas

La dinámica de cada especie de partículas (iones y electrones) es descrita por sus ecuaciones de densidad, transferencia de momento y energía, como se vio en el capítulo anterior. En general en MHD se desprejia el término de viscosidad. Otra aproximación es suponer al plasma cuasineutro, es decir, que la densidad de partículas es aproximadamente la misma para ambas especies ( $n_i \approx n_e = n$ ). Estas condiciones se pueden resumir en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{u} \ll c, \tag{3.1}$$

$$\omega \ll \omega_{ce}, \tag{3.2}$$

$$L \gg \lambda_D, \tag{3.3}$$

donde  $\omega_{ce}$  es la frecuencia de ciclotrón del electrón. Además, resulta conveniente redefinir las velocidades y densidades de iones y electrones en términos de fluidos, por lo que se definen:

$$\rho = n(m_i + m_e) \approx nm_i, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\rho}(m_i n_i \mathbf{u}_i + m_e n_e \mathbf{u}_e) = \frac{m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e}{m_i + m_e} \approx \mathbf{u}_i, \quad (3.5)$$

$$P = p_i + p_e, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{J} = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e), \quad (3.7)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $\mathbf{U}$  es la velocidad hidrodinámica,  $P$  la presión total y  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente.

Sumando las ecuaciones 2.31 para ambas especies y empleando las aproximaciones y definiciones antes descritas, se obtiene la correspondiente ecuación de movimiento:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} \right] = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P. \quad (3.8)$$

Por otra parte tomando la ecuación 2.31 para los electrones, e ignorando la inercia se obtiene la **ley de Ohm generalizada**:

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} + \frac{1}{ne} (-\nabla P_e + \mathbf{J} \times \mathbf{B}), \quad (3.9)$$

en donde  $\eta$  es la resistividad.

El último término es muy pequeño bajo la condición  $\frac{v}{c} \ll 1$ . En el tipo de aparatos que nos ocupan, la ley de Ohm se puede aproximar por:

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}. \quad (3.10)$$

Finalmente en MHD la ecuación de continuidad y las ecuaciones de Maxwell se escriben como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (3.15)$$

La corriente de desplazamiento en la ley de Ampere es ignorada debido a que en MHD la densidad de carga no cambia en las escalas de tiempo consideradas ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ), por lo que tomando la divergencia de la ley de Ampere resulta la relación  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , lo cual a su vez justifica la ecuación de continuidad.

Nótese también que la ley de Gauss es reemplazada por la ley de Ohm generalizada para calcular el campo eléctrico.

### 3.1.1. Congelamiento del campo magnético y difusión

De las ecuaciones MHD se pueden deducir varios resultados relevantes. Combinando la ley de Ohm generalizada (ecuación 3.10) y la ley de Faraday (ecuación 3.14), se deduce que:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}. \quad (3.16)$$

Si se ignora el flujo  $\mathbf{U}$ , se tendría:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3.17)$$

la cual es una ecuación de difusión. Esto indica que, el campo magnético que confina al plasma se irá disipando (debido a la resistencia que hay en las bobinas que lo generan) con un tiempo característico  $T_D = \mu_0 \frac{L^2}{\eta}$ , en donde  $L$  es la longitud característica del plasma. Es decir, la energía almacenada en el campo magnético irá disminuyendo. Por otro lado, del primer término de la ecuación 3.16, reescribiendo el campo magnético en términos de dos funciones escalares  $\alpha$  y  $\beta$ , tal que  $\mathbf{B} = \nabla \alpha \times \nabla \beta$  (es decir,  $\mathbf{B}$  es normal al plano generado por los gradientes de  $\alpha$  y  $\beta$ ), se obtiene:

$$\nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \frac{\partial \beta}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{U} \times (\nabla \alpha \times \nabla \beta)]. \quad (3.18)$$

Desarrollando la ecuación anterior se llega a que:

$$\nabla \times \left[ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \alpha \right) \nabla \beta - \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \beta \right) \nabla \alpha \right] = 0, \quad (3.19)$$

donde los términos en paréntesis son las derivadas convectivas de  $\alpha$  y  $\beta$ :  $\frac{d\alpha}{dt}$  y  $\frac{d\beta}{dt}$  respectivamente. Cada uno de los rotacionales debe de ser cero, por lo que se llega a que:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0 = \frac{d\beta}{dt}. \quad (3.20)$$

Esto quiere decir que el tanto el campo magnético como el plasma se mueven en conjunto conforme el tiempo avanza, es decir, se preserva la topología de las superficies magnéticas. A este fenómeno se le conoce como **Congelamiento del campo magnético**. Tanto el congelamiento como la difusión del campo ocurren simultáneamente, uno tratando de preservar topología y el otro modificándola. Esta topología se mide de acuerdo a una cantidad conocida como Helicidad Magnética, que se estudiará más adelante.

## 3.2. Equilibrio estático y dinámico

Si se busca saber cuando un plasma se encuentra en equilibrio, se deben resolver la correspondientes ecuaciones MHD cuando  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Aunado a esto, cuando se presenta velocidad de

flujo en equilibrio ( $\mathbf{U} \neq 0$ ), se tiene el llamado **equilibrio dinámico**. La ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento correspondientes al equilibrio dinámico son:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (3.21)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (3.22)$$

en donde se han ignorado efectos de viscosidad que implicaría un término extra proporcional a  $\nabla^2 \mathbf{U}$ . En [22] y [23] se estudia el caso en el que la viscosidad es considerada. En los experimentos de difusión se ha encontrado que ésta puede ser ignorada [24] para efectos del cálculo del equilibrio. El equilibrio dinámico es de gran importancia en áreas como plasmas de jets, propulsores, entre otros, pero en confinamiento magnético es más común otro tipo de equilibrio, sobre el cual se profundizará con más detalle a continuación.

Se conoce como **equilibrio estático** a la solución (independiente del tiempo) a la ecuación 3.8 cuando no existe velocidad de flujo en equilibrio, es decir,  $\mathbf{U} = 0$ . Las ecuaciones de equilibrio estático en MHD son:

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}, \quad (3.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.26)$$

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (3.27)$$

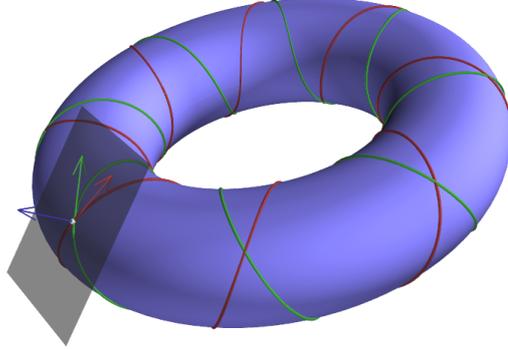
El problema de equilibrio estático multidimensional se basa en resolver la ecuación 3.22, bajo las condiciones a la frontera adecuadas. Esto resulta ser un problema no lineal en el confinamiento toroidal axisimétrico, que da origen a la llamada **Ecuación de Grad-Shafranov**. Por ser el tema central de esta tesis se procederá a su deducción en detalle.

### 3.3. Ecuación de Grad-Shafranov en toros axisimétricos

Se comenzará partiendo de la condición de equilibrio estático MHD:

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (3.28)$$

de donde se deduce que  $\nabla p$  es perpendicular a la superficie generada por  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{B}$ , es decir, puesto que  $\nabla p \cdot \mathbf{J} = 0 = \nabla p \cdot \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{B}$  son tangentes en todos los puntos a las superficies de presión constante (figura 3.1).



**Figura 3.1:** Ortogonalidad entre los vectores de gradiente de presión (azul), corriente (rojo), y campo magnético (verde).

[9]

Se considera una geometría toroidal axisimétrica en coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ , es decir,  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ . Expresando el campo magnético en términos del vector potencial  $\mathbf{A}$  en esta geometría, se tiene:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \mathbf{e}_z, \quad (3.29)$$

o bien, es posible escribir la ecuación anterior como

$$\mathbf{B} = \nabla \times (A_\phi \mathbf{e}_\phi) + \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi. \quad (3.30)$$

Ahora, el campo magnético se puede expresar en términos de las cantidades

$$\psi = -r A_\phi, \quad (3.31)$$

$$F = -r \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_r}{\partial r} \right), \quad (3.32)$$

en donde  $\psi$  es conocida como **flujo poloidal**, mientras que  $F$  es llamada **función de campo toroidal**. Utilizando estas ecuaciones y recordando que  $\nabla \phi = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi$ , la ecuación 3.30 se puede reescribir como:

$$\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \phi + F \nabla \phi. \quad (3.33)$$

Sustituyendo en la Ley de Ampere (ecuación 3.15), se obtiene

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times (\nabla \psi \times \nabla \phi) + \nabla \times (F \nabla \phi) = \nabla \times \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \times \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi \right] + \nabla F \times \nabla \phi, \quad (3.34)$$

donde se utilizó la identidad vectorial  $\nabla \times (F \mathbf{v}) = F \nabla \times \mathbf{v} + \nabla F \times \mathbf{v}$ , y el hecho de que  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ .

Continuando con el desarrollo se obtiene:

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_z - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_r \right] + \nabla F \times \nabla \phi = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] \mathbf{e}_\phi + \nabla F \times \nabla \phi. \quad (3.35)$$

Desarrollando la expresión anterior se obtiene:

$$\mu_0 \mathbf{J} = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \nabla \phi + \nabla F \times \nabla \phi, \quad (3.36)$$

o bien, introduciendo el operador

$$\Delta^* \psi := \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (3.37)$$

la ecuación 3.36 se reescribe

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \Delta^* \psi \nabla \phi + \nabla F \times \nabla \phi, \quad (3.38)$$

lo cual indica que la densidad de corriente se descompone en una corriente en la dirección toroidal  $\Delta^* \psi \nabla \phi$  (paralela a  $\nabla \phi$ ), y una corriente en la dirección poloidal  $\nabla F \times \nabla \phi$  perpendicular a  $\nabla \phi$ .

Ahora, para simplificar las cuentas se hace  $\mu_0 = 1$ . Entonces, sustituyendo las ecuaciones 3.33 y 3.36 en la ecuación 3.28 se obtiene:

$$\nabla p = (\Delta^* \psi \nabla \phi + \nabla F \times \nabla \phi) \times (\nabla \psi \times \nabla \phi + F \nabla \phi). \quad (3.39)$$

Por otra parte, haciendo el producto interior de  $\mathbf{B}$  con la ecuación 3.28 se tiene:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (3.40)$$

empleando la ecuación 3.33 para desarrollar la primera igualdad, y recordando que  $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z$  y  $\nabla \phi = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\phi$ , se tiene:

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = (\nabla \psi \times \nabla \phi + F \nabla \phi) \cdot \nabla p = \left( \nabla \psi \times \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \right) \cdot \nabla p = \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \cdot (\nabla p \times \nabla \psi) = 0. \quad (3.41)$$

Recordando que tanto  $\nabla \psi$  como  $\nabla p$  son perpendiculares a  $\mathbf{e}_\phi$ , para que se satisfaga la ecuación anterior se debe de cumplir:

$$\nabla p \times \nabla \psi = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla p \parallel \nabla \psi, \quad (3.42)$$

es decir,  $p = p(\psi)$ , y por lo tanto:

$$\nabla p = \frac{dp}{d\psi} \nabla \psi. \quad (3.43)$$

Ahora, se sigue un procedimiento análogo para  $\mathbf{J}$ , de tal manera que:

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (3.44)$$

### 3. APROXIMACIÓN MHD Y EQUILIBRIO EN TOROS AXISIMÉTRICOS

---

y por tanto, análogamente a la ecuación 3.41

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = (\Delta^* \psi \nabla \phi + \nabla F \times \nabla \phi) \cdot \nabla p = \left( \nabla F \times \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \right) \cdot \nabla p = \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \cdot (\nabla F \times \nabla p) = 0, \quad (3.45)$$

por lo que se debe de cumplir:

$$\nabla F \times \nabla p = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \nabla p \parallel \nabla F \quad \Rightarrow \quad \nabla F \parallel \nabla \psi, \quad (3.46)$$

es decir que  $F = F(\psi)$ , y por lo tanto su gradiente se puede escribir como:

$$\nabla F = \frac{dF}{d\psi} \nabla \psi. \quad (3.47)$$

Entonces sustituyendo las ecuaciones 3.43 y 3.47 en la ecuación 3.39, se obtiene:

$$\frac{dp}{d\psi} \nabla \psi = \left( \Delta^* \psi \nabla \phi + \frac{dF}{d\psi} \nabla \psi \times \nabla \phi \right) \times (\nabla \phi \times \nabla \psi + F \nabla \phi). \quad (3.48)$$

Desarrollando esta ecuación se llega al siguiente resultado:

$$\frac{dp}{d\psi} \nabla \psi = \frac{\Delta^* \psi}{r^2} \mathbf{e}_\phi \times (\mathbf{e}_\phi \times \nabla \psi) + \frac{F}{r^2} \frac{dF}{d\psi} (\nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi) \times \mathbf{e}_\phi. \quad (3.49)$$

Finalmente, recordando que  $\|\mathbf{e}_\phi\| = 1$  y como  $\nabla \psi \perp \mathbf{e}_\phi$ , se tiene que:  $\mathbf{e}_\phi \times (\mathbf{e}_\phi \times \nabla \psi) = (\nabla \psi \times \mathbf{e}_\phi) \times \mathbf{e}_\phi = -\nabla \psi$ , por lo que la ecuación 3.49 se simplifica como:

$$\frac{dp}{d\psi} \nabla \psi = -\frac{\Delta^* \psi}{r^2} \nabla \psi - \frac{F}{r^2} \frac{dF}{d\psi} \nabla \psi. \quad (3.50)$$

Reacomodando esta ecuación se llega a la ecuación de Grad-Shafranov

$$\Delta^* \psi = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi}. \quad (3.51)$$

El equilibrio en plasmas de confinamiento magnético toroidal es descrito por esta ecuación. Se trata de una ecuación diferencial parcial elíptica que es en general no lineal, dependiendo de la forma de  $p(\psi(r, z))$  y  $F(\psi(r, z))$ .

Más adelante, se explicará la investigación llevada a cabo en esta tesis, en la cual se resuelve un caso particular de la ecuación de G-S, conocido como campo libre de fuerzas, en cuyo caso la ecuación de Grad-Shafranov es una ecuación lineal muy particular que describe el campo magnético más elemental encontrado en aparatos tipo Pinch de campo invertido, ó Reversed Field Pinch (RFP).

Por ahora, se continuará con la base teórica explicando las características de distintos aparatos de confinamiento magnético, en particular el RFP y la física presente en dichos experimentos.

# Aparatos de confinamiento magnético

---

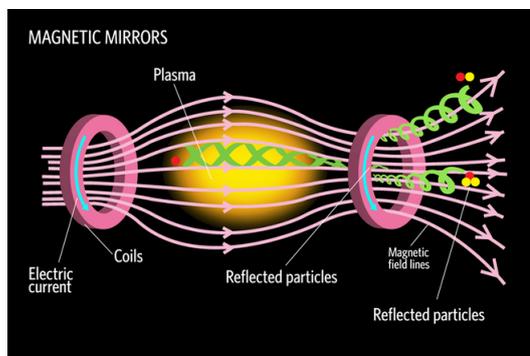
Es natural pensar que, para aprovechar la energía por fusión, es necesario controlar dichas reacciones. Sin embargo, debido a las altas energías involucradas, un plasma es producido en el reactor, y de acuerdo a la física de plasmas estudiada en capítulos anteriores (las derivas de plasma, por ejemplo), el confinamiento resulta una tarea sumamente difícil de realizar. Los experimentos que buscan lograr un confinamiento magnético exitoso, han ido evolucionando conforme más conocimiento se ha adquirido. A continuación se explicarán las características de algunos de los aparatos inventados a lo largo de la historia, haciendo énfasis en el RFP y su equilibrio en geometría cilíndrica, cuyo caso es un primer paso para entender al RFP en geometría toroidal, el cual será estudiado posteriormente.

Se finalizará el capítulo dando una breve descripción de inestabilidades, con el fin de poner en contexto la complejidad del confinamiento magnético.

## 4.1. Espejos magnéticos y Z-pinch

Uno de los primeros aparatos de confinamiento magnético que se ideó fue el llamado espejo magnético (Figura 4.1). Este funciona mediante campos que se van haciendo más intensos en los extremos. Se sabe que una partícula de plasma que viaja a través del espejo no cambia su momento magnético  $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$ , pues éste es un invariante adiabático [7]. A medida que el campo se intensifica, la velocidad perpendicular al campo de la partícula debe de aumentar. Por otro lado, su energía cinética es  $E = E_{\parallel} + E_{\perp} = \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \frac{mv_{\perp}^2}{2}$ , entonces para que se mantenga constante, la velocidad paralela debe de disminuir, es decir, la partícula se frena al llegar a los extremos.

#### 4. APARATOS DE CONFINAMIENTO MAGNÉTICO



**Figura 4.1:** Espejo magnético

[10]

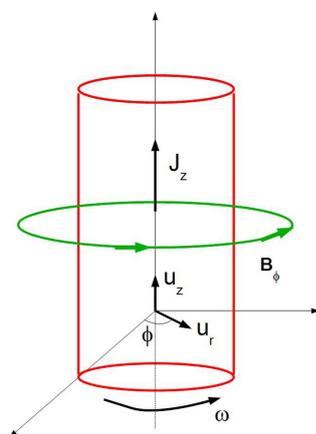
Sin embargo, las partículas que llevan suficiente energía logran escapar al confinamiento.

Otro aparato que se desarrolló fue el Pinch de Bennet ó Z-Pinch. La figura 4.2 muestra su configuración, la cual consiste en un plasma cilíndrico y axisimétrico de longitud infinita, cuyo eje axial apunta en la dirección  $\hat{z}$  y que posee una densidad de corriente  $J_z(r)$ .

El campo magnético generado por la corriente comprime al plasma, confinándolo a su forma cilíndrica. Usando la ecuación 3.28, la ley de Ampere, y la expresión de la presión en términos de la temperatura  $P = n(r)k_B T$  (la temperatura es uniforme), se obtiene la relación de Bennett que establece la corriente necesaria para confinar el plasma:

$$I = \frac{8\pi N k_B T}{\mu_0}, \quad (4.1)$$

donde  $N = \int_0^{r=a} n(r) 2\pi r dr$  es el número de partículas por longitud axial, T la temperatura y  $k_B$  la constante de Boltzmann.



**Figura 4.2:** Pinch de Bennett

[11]

Se deduce de la ecuación 4.1 que corrientes relativamente pequeñas pueden sostener grandes presiones de plasmas, sin embargo, el Z-pinch no puede ser utilizado como aparato de confinamiento debido a que su equilibrio es altamente inestable. Simultáneamente se desarrollaron otras configuraciones de equilibrio estático, por ejemplo el  $\theta$  pinch, donde el confinamiento es debido una corriente cambiante alrededor de plasma .

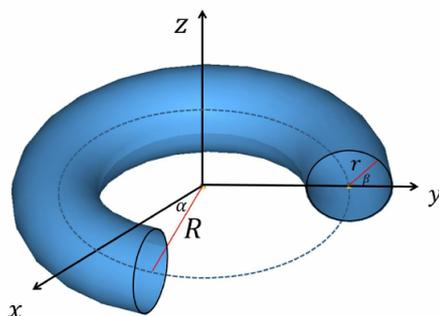
Un resultado importante es que no se puede confinar un plasma solo con corrientes que circulan en el mismo. Chandrasekhar lo demostró en la década de los 60 mediante el teorema del virial [25], por lo que es necesario tener corrientes externas para que el confinamiento sea posible.

## 4.2. Confinamiento en toros axisimétricos

Para saber que geometría de campo magnético conviene para confinar de manera eficiente un plasma es necesario analizar las ecuaciones antes expuestas.

Uno podría pensar que la geometría más sencilla que permitiría un confinamiento ideal sería el de un campo sobre una esfera, cuyas líneas juegan un papel análogo al que juegan los paralelos y meridianos en el globo terrestre. Un rápido análisis muestra que este campo no sería útil debido a que ambos patrones de líneas resultan en singularidades en los polos (pues un campo no puede seguir dos direcciones en un punto), es decir, el campo se anula en dichos puntos.

Por otra parte si el plasma se encontrara inmerso en un campo rectilíneo, las partículas girarían alrededor de las líneas de campo. Entonces si estas a su vez se mueven a lo largo de un aparato que se cierra en sí mismo, un toro por ejemplo (figura 4.3), uno podría pensar que el confinamiento funcionaría. En la práctica esto no sucede debido a que el campo magnético generado, el cual sigue la dirección de la circunferencia mayor del toro, llamado campo toroidal, es más intenso en la parte más cercana al centro del toro pues las bobinas que lo generan están más abultadas ahí, es decir, hay un gradiente de campo magnético, y de acuerdo a la deriva de gradiente de campo (ecuación 2.23), los iones se moverían a la parte inferior del toro y los electrones a la parte superior, creando así un campo eléctrico que expulsaría al plasma hacía la pared. Existen dos soluciones al problema anterior.



**Figura 4.3:** Geometría toroidal  
[12]

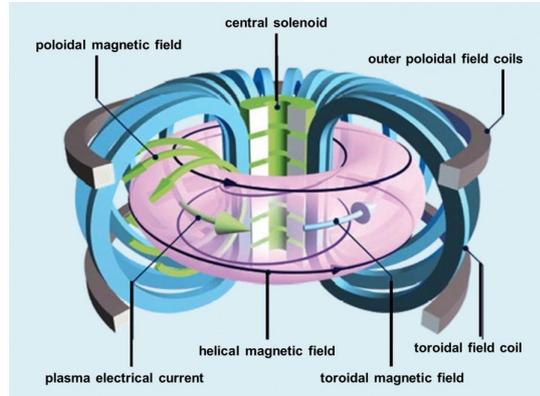
La primera consiste en alterar la geometría del aparato, de tal manera que la deriva de gradiente apunte al centro en ocasiones y en otras hacia la pared, evitando que las partículas choquen con las paredes (una geometría adecuada sería una con forma de 8). Este aparato se construyó en la década de los 50s y se conoce como **Stellarator**.

Con el paso de los años los stellarators han ido evolucionando y la forma de 8 ya no es utilizada. En su lugar se curva el campo magnético a una forma helicoidal (esta es la otra solución al problema) de tal manera que se busca mantener una simetría con el eje magnético, por lo que un stellarator no es un aparato axisimétrico. Esto hace que la física en los stellarators sea distinta a la estudiada en esta tesis, razón por lo cual no profundizará más en ellos [26].

La curvatura del campo a una forma helicoidal también se puede lograr superponiendo el campo toroidal con uno que sigue la dirección de la circunferencia menor del toro, llamado campo poloidal. Hay una serie de aparatos que poseen simetría en el eje toroidal (axisimétricos) y que operan bajo este principio. Todos buscan un balance entre distintas propiedades físicas e ingenieras tales como presión, estabilidad, sustentabilidad y costos; Cada uno con sus características únicas, ventajas y desventajas.

A continuación se explicarán de forma general las características de algunos aparatos toroidales axisimétricos.

El más común es el llamado **Tokamak**, también diseñado en los 50s. Las características del tokamak común se observan en la figura 4.4. El solenoide central sirve como el secundario de un transformador eléctrico, es decir, se genera una corriente a través de él debido a un flujo magnético variable. Esta corriente a su vez induce la corriente toroidal del plasma  $I_p$ , el cual se calienta por efecto óhmico. La corriente del plasma genera el campo poloidal  $B_p$ , el cual es reforzado por una serie de bobinas externas, mientras que el campo toroidal  $B_t$  es generado enteramente por otra serie de bobinas, obteniendo así un campo helicoidal. En diseños más avanzados, las bobinas son superconductoras, con lo que se consiguen pulsos más largos.



**Figura 4.4:** Estructura de un tokamak

[13]

La estabilidad depende de las propiedades de torsión del campo, por lo que se utiliza el parámetro conocido como factor de seguridad  $q$ , el cual se define como:

$$q = \frac{a}{R_0} \frac{B_t}{B_p} = \varepsilon \frac{B_t}{B_p}, \quad (4.2)$$

donde  $a$  es el radio de la columna de plasma y  $R_0$  el radio mayor del toro. A la cantidad

$$\varepsilon = \frac{a}{R_0}, \quad (4.3)$$

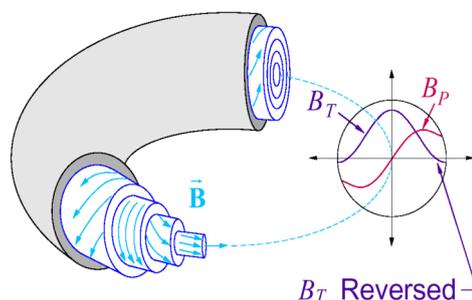
se le conoce como razón de aspecto inversa (En un tokamak se tiene que  $q > 1$  y  $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$ ).

La cámara central del tokamak está al vacío y en un reactor las bobinas deberán ser protegidas por una capa de litio en la pared exterior, donde también se producirá el tritio gracias a los neutrones provenientes de la reacción.

Los modelos más recientes de tokamak emplean otros métodos (además de calentamiento óhmico) para calentar el plasma, estos son: Inyección de átomos de hidrógeno que se ionizan y son atrapados por el campo para después desacelerarse y transferir su energía al plasma, y calentamiento por radiofrecuencias, donde corrientes de alta frecuencia oscilantes y en las frecuencias de resonancia del plasma son inducidas por bobinas externas.

Una variante del tokamak es el llamado **tokamak esférico (ST)**, llamado así debido a su muy baja razón de aspecto. Un ST reduce costos debido a que su geometría permite que las bobinas se encuentren más cerca que el plasma, permitiendo así reducir el tamaño (costo) de estas. Otra ventaja es que el confinamiento es más estable debido a que las partículas pasan más tiempo en el centro del aparato, cuya curvatura es favorable a la estabilidad magnetohidrodinámica, y no en la parte exterior cuya curvatura es desfavorable. Por otro lado, debido a que su centro es muy pequeño, el solenoide central se vuelve muy pequeño y es necesario buscar nuevas formas de calentamiento, trabajo que hoy en día se sigue investigando.

La desventaja principal radica en que la presión del plasma en un ST es mucho menor que en un tokamak convencional. Esto lleva a que sea necesario comprimir adicionalmente al plasma, con el consiguiente deterioro en el confinamiento.



**Figura 4.5:** Campo en un RFP

[14]

Finalmente, el aparato de interés central de esta tesis es el llamado **Reversed Field Pinch (RFP)** ó pinch de campo invertido. Es llamado así debido a que conforme el radio aumenta, el campo magnético toroidal decrece monótonamente, es cero cerca del borde del plasma y finalmente invierte su sentido (figura 4.5). Esto se logra mediante un campo toroidal externo sumamente débil (de 10 hasta 100 veces menor que un tokamak común).

Como se verá en el capítulo 6, este comportamiento es consistente con el del campo libre de fuerzas, en donde la presión es constante y  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ .

Con un RFP se pueden alcanzar grandes presiones de plasma, además de que solo se puede calentar por efecto óhmico. Es más barato ya que no requiere bobinas superconductoras, su ensamblaje es más sencillo y la física es independiente de la razón de aspecto del aparato.

En general en un RFP  $q < 1$ , lo que lo hace susceptible (como se verá más adelante) a ciertas inestabilidades, además de que debido a la naturaleza de su campo, el plasma es susceptible a turbulencias y demás efectos no lineales.

Taylor descubrió que, conforme el plasma evoluciona en un RFP, la energía de campo magnético se minimiza debido a la difusión, pero la helicidad magnética global (no la local) permanece casi constante, fenómeno que es conocido como relajación de Woltjer-Taylor [16] [27] [28].

En el siguiente capítulo se estudiará con más detalle la helicidad magnética y la teoría de relajación. Por ahora se explicará cómo Taylor formuló el fenómeno de relajación en los años 70 a partir de los resultados de los experimentos en un aparato conocido como Pinch Toroidal, el cual mostraba el fenómeno de inversión del campo. Se verá como este resultado se observa en una geometría cilíndrica, representativa de un toro con razón de aspecto grande.

### 4.3. Pinch Toroidal

El fenómeno de relajación, se observó por primera vez en un aparato que se estudió cuando se empezaba a tratar el confinamiento magnético. Se trata del Pinch Toroidal, el cual funciona bajo el principio del Z-pinch pero aplicado a un toro. En él hay un campo poloidal  $B_p$  debido a una corriente inducida en el plasma  $I$  en la dirección toroidal.

Como se discutió anteriormente esta configuración no es útil para confinamiento magnético, sin embargo, se pueden sacar resultados interesantes de ella. Taylor menciona en [27] que un plasma en esta configuración experimenta un estado inicial inestable y violento, sin embargo,

este evoluciona a un estado final de baja energía y estabilidad, acompañado de una inversión en el campo magnético toroidal en las regiones exteriores del plasma (Esto si el pinch es lo suficientemente intenso).

Posteriormente el Pinch Toroidal evolucionó al RFP al agregar un campo toroidal. El caso de razón de aspecto grande, en el cual el toro se aproxima a un cilindro es un buen comienzo para estudiar el equilibrio y relajación del plasma. A continuación se expondrá el equilibrio en esta geometría.

#### 4.4. Equilibrio de RFP en geometría cilíndrica

Considerando las coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$  con simetría axial ( $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ), el campo magnético total se puede escribir en términos de un flujo magnético  $\psi(\rho, \theta)$  y una función  $b(\psi)$ . Su expresión es :

$$\mathbf{B} = \nabla\psi \times \nabla z + b\nabla z, \quad (4.4)$$

donde  $\nabla z = \mathbf{e}_z$  y por ende  $\nabla\psi \cdot \mathbf{e}_z = 0$  (Nótese la analogía con la ecuación 3.33, la cual es válida para geometría toroidal axisimétrica). Además, sustituyendo las expresiones de  $\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta$  y  $\nabla\psi \times \mathbf{e}_z$ , se obtienen las componentes del campo magnético:

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad (4.5)$$

$$B_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \quad (4.6)$$

$$B_z = b(\psi). \quad (4.7)$$

Ahora, por la condición de equilibrio estático (ecuación 3.27) y la ley de Ampere (ecuación 3.15), se tiene que:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla p. \quad (4.8)$$

Debido a la ecuación 4.4 se tiene el resultado:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{e}_z) + \nabla b \times \mathbf{e}_z. \quad (4.9)$$

Utilizando la propiedad vectorial  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ , y como  $\nabla b = \frac{db}{d\psi} \nabla\psi$ , se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla [\nabla \cdot (\psi \mathbf{e}_z)] - \nabla^2 (\psi \mathbf{e}_z) + b' \nabla\psi \times \mathbf{e}_z, \quad (4.10)$$

con  $b' = \frac{db}{d\psi}$ .

Utilizando el resultado anterior se llega a que:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (-\nabla^2 \psi \mathbf{e}_z) \times (\nabla \psi \times \mathbf{e}_z) + bb'(\nabla \psi \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_z = -\nabla^2 \psi \nabla \psi - bb' \nabla \psi = \mu_0 p' \nabla \psi, \quad (4.11)$$

de donde se obtiene la ecuación

$$\nabla^2 \psi + bb' = -\mu_0 p'. \quad (4.12)$$

Dependiendo de la naturaleza de  $b$  y de  $p$  se tendrán distintos tipos de soluciones. Si nos restringimos a casos en que  $bb'$  y  $p'$  son lineales, entonces utilizando el hecho de que  $bb' = \frac{1}{2} \frac{d}{d\psi} b^2$ , se proponen las siguientes expresiones:

$$-\mu_0 p = \frac{\alpha_1}{2} \psi^2 + \alpha_2 \psi + \alpha_3 \rightarrow -\mu_0 p' = \alpha_1 \psi + \alpha_2, \quad (4.13)$$

$$-\frac{b^2}{2} = \frac{\beta_1}{2} \psi^2 + \beta_2 \psi + \beta_3 \rightarrow -bb' = \beta_1 \psi + \beta_2, \quad (4.14)$$

donde  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son constantes.

Sustituyendo los resultados anteriores en la ecuación 4.12 se obtiene:

$$\nabla^2 \psi + \lambda^2 \psi = \mu, \quad (4.15)$$

donde  $\lambda^2 \equiv -(\alpha_1 + \beta_1)$  y  $\mu \equiv (\alpha_2 + \beta_2)$ .

## 4.5. Inestabilidades

### 4.5.1. Inestabilidad de Rayleigh-Taylor

En hidrodinámica si se tienen dos fluidos con densidades distintas en contacto, y solo hay una fuerza que actúa perpendicularmente a la interfaz, en principio el sistema se puede encontrar en equilibrio. Si el fluido con mayor densidad se encuentra debajo, el equilibrio es estable, mientras que si se encuentra en la parte superior, el equilibrio será inestable. Una perturbación a la interfaz dará lugar a la llamada **Intestabilidad de Rayleigh Taylor**. El fluido más denso se desplazará hacia el fondo mientras que el menos denso se irá a la parte superior, razón por la cual esta inestabilidad también es conocida como inestabilidad de intercambio.

En MHD hay un análogo a esta inestabilidad. El plasma toma el papel del fluido más denso mientras que del otro lado se tiene un vacío. La inestabilidad se da si hay una perturbación en la interfaz. En dicho caso se presenta una deriva debido a la curvatura del aparato, por lo que las partículas del plasma derivan en dirección  $q\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}$ . Debido a esto electrones e iones derivan en direcciones opuestas, provocando una acumulación de carga en el borde y dando lugar a un campo eléctrico (figura 4.6a). Este campo provoca a su vez una deriva eléctrica, la

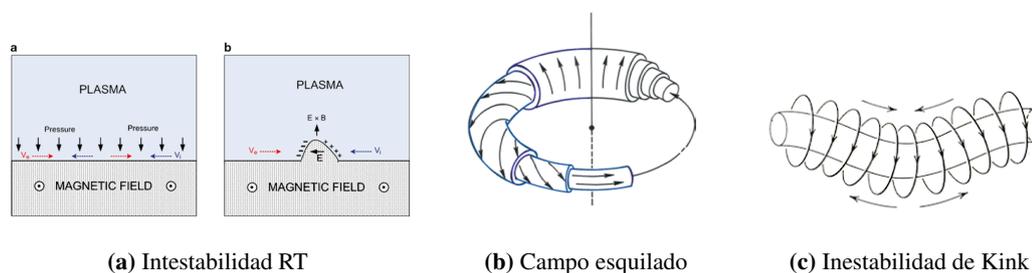


Figura 4.6: Inestabilidades

[15]

cual hace más pronunciada la protuberancia, volviendo a iniciar el proceso y repitiéndose una y otra vez dando como resultado el escape del plasma del confinamiento magnético. Nótese que si se invierte el signo del radio de curvatura  $R_c$  se tiene el efecto opuesto (se reducen las inestabilidades de R-T)

El toro tiene la propiedad de que su curvatura apunta hacia una dirección al estar en la parte exterior y hacia la dirección opuesta en la parte interior. En la parte exterior es tal que se propician las inestabilidades (mala curvatura), mientras que en el interior se reducen (buena curvatura).

Un aparato de confinamiento toroidal está diseñado de tal manera que el campo está esquilado (figura 4.6b), es decir, hay un ángulo entre superficies magnéticas. Si una inestabilidad R-T se presenta en una superficie (alineada con el campo), esta se encontrará desalineada con la siguiente superficie, destruyendo la inestabilidad.

#### 4.5.2. Inestabilidades de Rizo y de Salchicha

Otra inestabilidad muy común es la llamada **Inestabilidad de Kink o Inestabilidad de rizo**. Cuando se tiene una corriente, se genera un campo magnético que la circula transversalmente, si la corriente fluye en línea recta, el flujo magnético a su alrededor es constante. La inestabilidad de Kink se presenta cuando hay alguna perturbación que hace que la corriente no siga una trayectoria recta, entonces el campo es más intenso cerca de la perturbación, es decir, hay una presión magnética mayor, de tal manera que la perturbación se hace más grande repitiéndose este proceso hasta que se interrumpe la corriente (figura 4.6c).

En los aparatos toroidales la interacción se da entre el campo toroidal y la corriente del plasma. Dependiendo de qué tan intenso es uno respecto a otro se presentará o no inestabilidad de kink. Al límite de operación estable se le conoce como **Límite de Kruskal - Shafranov**, el cual es una relación entre las intensidades de los campos toroidal y poloidal. El factor de seguridad (ecuación 4.2) establece qué tan susceptible es el plasma a esta inestabilidad.

La llamada **Inestabilidad de Salchicha** es parecida a la inestabilidad de kink. Esta se presenta cuando se comprime el espacio por el cual atraviesa una corriente, razón por la cual la

#### 4. APARATOS DE CONFINAMIENTO MAGNÉTICO

---

densidad de corriente aumentará en dicha sección y por ende se tendrá un campo magnético más intenso a su alrededor. Este a su vez comprimirá aún más el espacio repitiendo el proceso anterior hasta que la corriente sea interrumpida.

En resumen, las inestabilidades se deben ya sea a gradientes de presión, o a corrientes de plasma distribuidas. Las inestabilidades debidas a la presión pueden ser resumidas en el siguiente criterio de estabilidad, el cual es válido en ausencia de disipación:

$$\frac{1}{4}r \left( \frac{dq}{qdr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{\beta_i^2} \frac{dp}{dr} > 0, \quad (4.16)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío,  $p(r)$  es la presión del plasma en función de la distancia  $r$  al eje magnético y  $q(r)$  el factor de seguridad. Estas inestabilidades pueden ser controladas con el esquilado del campo (Caso del RFP), sin embargo, tomando en cuenta efecto toroidales [17], la ecuación 4.21 se reescribe:

$$\frac{1}{4}r \left( \frac{dq}{qdr} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{\beta_i^2} \frac{dp}{dr} (1 - q^2) > 0, \quad (4.17)$$

lo que implica que si  $q > 1$  (Caso del Tokamak), el sistema sería estable aún sin esquilado. Es decir, el primer término de la ecuación 4.17 es relevante en la estabilidad de RFP, mientras que el segundo es relevante para los Tokamaks.

Por otra parte, en la práctica también se presentan una serie de inestabilidades microscópicas. Una de estas es debido a la resistividad presente en el plasma de fusión, la cual ocasiona que al pasar corriente a través de este último, la corriente se bifurca en una serie de filamentos, ocasionando que el plasma se quiebre en varios pedazos.

Otra microinestabilidad debido a la resistividad hace que las partículas se puedan mover de una línea de campo a otra, dando paso a una serie de turbulencias que expulsan al plasma de la trampa de confinamiento.

Además de las inestabilidades expuestas aquí existen muchas otras tanto macroscópicas como microscópicas. Profundizar en ellas desviaría la atención del tema central de esta tesis. Simplemente se espera haber dado una idea muy general del gran problema que representan las inestabilidades para el confinamiento magnético.

Ahora se continuará al siguiente capítulo del marco teórico relevante al problema de investigación, en el cual se darán las bases de la teoría de relajación de Woltjer-Taylor, su relación con el campo libre de fuerzas, y el papel que juega la propiedad física conocida como Helicidad Magnética.

# Helicidad Magnética y Relajación de Woltjer-Taylor

---

La inversión del campo magnético en un RFP fue explicada por Taylor, conjeturando que el RFP es descrito por un estado de mínima energía magnética, en el cual una cantidad topológica conocida como helicidad magnética se conserva. Esta condición es más fuerte que la conservación de energía magnética, ya que si el plasma es no ideal, la conservación de helicidad se mantiene dentro de una escala de tiempo mayor al decaimiento de la energía magnética. Los cambios en ambas cantidades son la base de la teoría de Relajación de Woltjer-Taylor, la cual predice un estado de mínima energía al cual el plasma del RFP evolucionará. A continuación se explicará dicha teoría empezando por estudiar la helicidad magnética.

## 5.1. Helicidad magnética como propiedad topológica

La helicidad magnética mide que tan enredado o entrelazado está el campo magnético. Su expresión matemática es:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r, \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{A}$  es el vector potencial magnético.

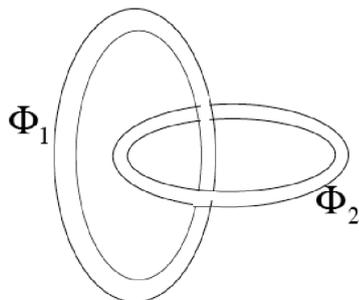
De acuerdo a la forma del entrelazado del campo se pueden distinguir dos tipos de Helicidades. Considérese un arreglo de tubos con campo magnético  $\mathbf{B}$  como en la figura 5.1. El tubo 1 tiene flujo magnético  $\Phi_1$  constante, contorno  $C_1$  y volumen  $V_1$ , mientras que el tubo 2 tiene flujo magnético  $\Phi_2$  constante, contorno  $C_2$  y volumen  $V_2$ . La helicidad magnética de todo el sistema es:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = \int_{V_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r + \int_{V_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r. \quad (5.2)$$

## 5. HELICIDAD MAGNÉTICA Y RELAJACIÓN DE WOLTJER-TAYLOR

---

Para el tubo 1, se puede descomponer  $d^3r$  en términos del área de la sección transversal del tubo ( $\Delta S$ ), y un elemento de longitud a lo largo del contorno ( $d\mathbf{l}$ ), es decir, se tiene que:



**Figura 5.1:** Sistema de tubos magnéticos enlazados

[5]

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3r = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \Delta S d\mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \Phi_1, \quad (5.3)$$

donde en la última igualdad se expresó el flujo como  $\Phi_1 = B\Delta S$ , y se tomó  $\mathbf{B}$  paralelo a  $d\mathbf{l}$ . Ahora, sustituyendo el resultado anterior en la definición de helicidad para el tubo 1 se obtiene:

$$\mathbf{K}_1 = \Phi_1 \int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (5.4)$$

Recordando que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  y usando el teorema de Stokes, se tiene que la integral de la ecuación 5.4, es el flujo magnético a través de la superficie a la cual rodea el contorno 1, es decir, el flujo magnético en el tubo 2, por lo que:

$$\mathbf{K}_1 = \Phi_1 \Phi_2. \quad (5.5)$$

El mismo procedimiento se puede seguir para el tubo 2 obteniendo un resultado análogo. Entonces la helicidad total es

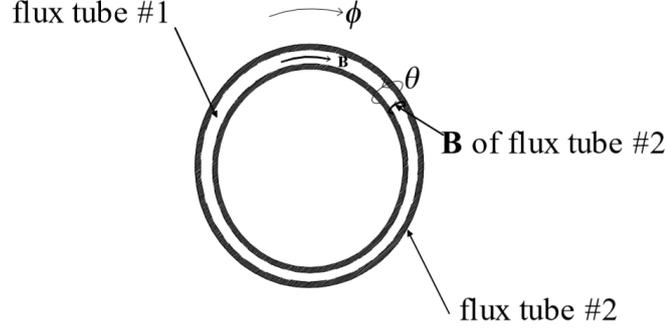
$$\mathbf{K} = 2\Phi_1\Phi_2. \quad (5.6)$$

A esta cantidad se le conoce como **helicidad magnética de enlace** y depende de que tantas veces enreda cada tubo al otro, por ejemplo, si el tubo 2 atravesara dos veces al tubo 1 la helicidad sería:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 = 2\Phi_1\Phi_2 + \Phi_1\Phi_2 = 3\Phi_1\Phi_2. \quad (5.7)$$

Generalizando se tiene que:  $\mathbf{K}_i = N_j \Phi_1 \Phi_2$ , donde  $N_j$  es el número de vueltas que da el tubo  $j$  al tubo  $i$ .

Ahora considérese un arreglo distinto de tubos, como los de la figura 5.2. El tubo 2 (y por ende su flujo magnético) ahora circula ajustadamente sobre todo el perímetro del tubo 1. El flujo del tubo 2 es pequeño, por lo que se llamará  $d\psi$ , mientras que el flujo del tubo 1 es  $\Phi$ .


**Figura 5.2:** Tubos magnéticos cercados

[16]

Un diferencial de helicidad, de acuerdo a la ecuación 5.6 es:

$$d\mathbf{K} = 2\Phi d\psi. \quad (5.8)$$

Nótese que si el área de flujo de  $\Phi$  aumenta, la de  $\psi$  disminuye, entonces se puede afirmar que los flujos son dependientes uno del otro, es decir  $\psi = \psi(\Phi)$ , o bien diferenciando esta expresión, se tiene que  $d\psi = \psi' d\Phi$ . Sustituyendo este resultado en la ecuación 5.8 se obtiene:

$$d\mathbf{K} = 2\Phi\psi' d\Phi. \quad (5.9)$$

Integrando se obtiene la helicidad total:

$$\mathbf{K} = 2 \int_0^\Phi \Phi\psi' d\Phi. \quad (5.10)$$

Ahora considérese las direcciones  $\phi$  y  $\theta$  como en la figura 5.2, donde se observa que  $\phi$  sigue la trayectoria del contorno del tubo 1 y  $\theta$  la del contorno del tubo 2. Por otro lado, el contorno de una sección transversal del tubo 1 sigue la dirección  $\theta$  y el de una sección del tubo 2 sigue la dirección  $\phi$ . Tomando lo anterior en cuenta, los campos de los tubos 1 y 2 se pueden expresar como campos poloidales (Demostrado en la deducción de Grad-Shafranov) obteniéndose así:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2\pi} \nabla\Phi \times \nabla\theta = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \Phi \nabla\theta, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{2\pi} \nabla\psi \times \nabla\phi = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \psi \nabla\phi. \quad (5.12)$$

Se puede verificar que estas expresiones son correctas calculando las integrales sobre las secciones transversales, y verificando que se obtiene el flujo magnético correspondiente.

También se observa que el campo total es helicoidal ya que es de la forma  $\mathbf{B} = B_1 \hat{\phi} + B_2 \hat{\theta}$ , por lo que se puede definir el **giro del campo magnético** como el número de veces que una línea de campo da una vuelta en la dirección  $\hat{\theta}$  por cada vez que da una en dirección  $\hat{\phi}$ , entonces considerando pequeños desplazamientos  $dl$  a lo largo de las líneas de campo, en ambas direcciones se tiene que:

$$d\phi = |\nabla\phi|dl_\phi, \quad (5.13)$$

$$d\theta = |\nabla\theta|dl_\theta. \quad (5.14)$$

Luego, se tiene que  $\mathbf{B}$  y  $dl$  son paralelos, es decir  $\mathbf{B} \times dl = 0$ , o bien:

$$\frac{dl_\theta}{B_\theta} = \frac{dl_\phi}{B_\phi}, \quad (5.15)$$

y usando las ecuaciones 5.13 y 5.14 se tiene la igualdad.

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{|\nabla\theta|B_\theta}{|\nabla\phi|B_\phi}. \quad (5.16)$$

Además, de las ecuaciones 5.11 y 5.12 se sabe que las expresiones para los campos son  $B_\theta = |\nabla\psi||\nabla\phi|/2\pi$  y  $B_\phi = |\nabla\Phi||\nabla\theta|/2\pi$ , por lo tanto, sutituyendo en la ecuación 5.15

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{2\pi|\nabla\theta||\nabla\psi||\nabla\phi|}{2\pi|\nabla\phi||\nabla\Phi||\nabla\theta|} = \frac{|\nabla\psi|}{|\nabla\Phi|}, \quad (5.17)$$

y como  $|\nabla\psi| = \psi'\nabla\Phi$ , se obtiene la expresión final

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \psi', \quad (5.18)$$

que representa el número de veces que una línea de campo recorre la dirección  $\theta$  cada vez que lo hace una vez en la dirección  $\phi$  (Lo hace  $\psi'$  veces). A esta cantidad se le conoce como **giro** (twist) y se define como  $T(\Phi) \equiv \psi'$ . La helicidad magnética en términos del giro se obtiene al sustituir el resultado obtenido en la ecuación 5.10, resultando en:

$$\mathbf{K} = 2 \int \Phi T(\Phi) d\Phi. \quad (5.19)$$

Finalmente, si el giro es constante, la ecuación 5.19 se reduce a  $\mathbf{K} = T\Phi^2$ .

## 5.2. Relajación de Woltjer-Taylor

En un plasma de fusión confinado magnéticamente, dependiendo de la naturaleza de  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{B}$  se tendrán configuraciones de energía distintas. El caso más simple es aquél en el que, al considerar un volumen  $V$ , este no posee corrientes en su interior y el campo magnético es generado por corrientes externas. Dicho campo se conoce como campo magnético de vacío y satisface la ley de Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0, \quad (5.20)$$

de donde se deduce que  $\mathbf{B} = \nabla\psi$  para alguna función potencial  $\psi$ , por lo que sustituyendo en la ley de Gauss magnética, se obtiene la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (5.21)$$

y el problema de determinar  $\psi$  se reduce a resolver dicha ecuación, con sus respectivas condiciones a la frontera  $S$  que encierra al volumen  $V$ . El campo de vacío posee la cualidad de ser el campo con la **menor energía magnética** dadas las condiciones de frontera en  $V$ . Esto se probará a continuación.

Considérese  $\mathbf{B}_{min}(\mathbf{r})$  como el campo magnético con la menor energía almacenada en su interior, para una configuración dada de volumen  $V$  y condiciones de frontera especificadas en  $S$ . Sea  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  otro campo magnético que satisface las mismas condiciones de frontera que  $\mathbf{B}_{min}$ , tal que  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{min} + \delta\mathbf{B}$ , con  $|\delta\mathbf{B}|$  pequeño. Nótese que  $\delta\mathbf{B} = \mathbf{B}_{min}$  en la frontera, es decir,  $\delta\mathbf{B} = 0$  en la frontera.

Ahora, la definición de energía almacenada en el campo magnético es:

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V (\mathbf{B}_{min} + \delta\mathbf{B})^2 d^3r. \quad (5.22)$$

Desarrollando se obtiene:

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V (\mathbf{B}_{min})^2 d^3r + 2 \int_V \mathbf{B}_{min} \cdot \delta\mathbf{B} d^3r + \int_V (\delta\mathbf{B})^2 d^3r. \quad (5.23)$$

Ahora, se debe de cumplir:

$$\int_V \mathbf{B}_{min} \cdot \delta\mathbf{B} d^3r = 0, \quad (5.24)$$

ya que  $\delta\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}_{min}$  son arbitrarios, entonces podrían escogerse de tal forma que fueran antiparalelos, y como  $\delta\mathbf{B}$  es pequeño, podría ser que en la ecuación 5.23, la segunda integral tuviera magnitud mayor y signo contrario que la tercera integral. Es decir se tendría:  $W_B < W_{Bmin}$ , lo cual no es posible por definición de  $B_{min}$ .

Finalmente se sabe que en términos del vector potencial:  $\delta\mathbf{B} = \nabla \times \delta\mathbf{A}$  y usando la relación vectorial  $\nabla \times \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{min} = \nabla \cdot (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B}_{min}) + \delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{min}$ , la ecuación 5.24 se convierte en

$$\int_V [\nabla \cdot (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B}_{min}) + \delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{min}] d^3r = 0. \quad (5.25)$$

Al aplicar el Teorema de la divergencia:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} d^3r = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d^2r, \quad (5.26)$$

se obtiene que la primera integral superficial es cero pues  $\delta\mathbf{B}$  (y por ende  $\delta\mathbf{A}$ ) se hacen cero en la frontera, además como  $\delta\mathbf{A}$  es arbitrario se concluye que  $\nabla \times \mathbf{B}_{min} = 0$ , es decir, el campo de mínima energía magnética es un campo de vacío. Sin embargo, un plasma de fusión jamás podrá evolucionar a dicho estado, pues siempre se presentan corrientes en el plasma. Los estados accesibles de más baja energía magnética son los **campos libres de fuerzas**, lo cual fue demostrado por Woltjer en 1958 [28].

Resulta natural preguntarse que es lo que lleva a un sistema a evolucionar a dichas configuraciones. La respuesta yace en una propiedad que poseen los circuitos (corrientes eléctricas)

## 5. HELICIDAD MAGNÉTICA Y RELAJACIÓN DE WOLTJER-TAYLOR

---

conocida como inductancia [29].

De la ley de Faraday se sabe qué se puede inducir una corriente en un circuito cerrado, a causa de un flujo magnético variable que atraviesa una superficie con el circuito como borde. Un circuito con corriente variable (y por ende campo magnético variable) generará corrientes en circuitos cercanos, incluyéndose a sí mismo, de tal manera que el flujo magnético ( $\Phi$ ) es proporcional a la corriente ( $I$ ) siguiendo la siguiente ecuación:

$$\Phi = LI. \quad (5.27)$$

La constante  $L$  es conocida como autoinductancia (inductancia cuando es un circuito ajeno el que produce  $\Phi$ ). Es una cantidad positiva y puramente geométrica que dictamina la intensidad del voltaje inducido (también llamada fem cuya expresión es  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$ ) de la corriente inducida (la cual siempre es opuesta al cambio de corriente, debido a la ley de Lenz), es decir, establece que tan fácil/difícil es cambiar la corriente de un circuito.

Para hacer que fluya corriente en un circuito es necesario superar la barrera de energía de la fem, la cual siempre está presente y es energía almacenada en el campo magnético. A su vez, esta energía es igual al trabajo realizado en una carga para que complete una vuelta del circuito. Entonces, considerando que en un circuito con corriente  $I$  fluyen esa cantidad de cargas por unidad de tiempo, el trabajo total realizado por unidad de tiempo es:

$$\frac{dW}{dt} = -\varepsilon I = LI \frac{dI}{dt}, \quad (5.28)$$

donde se utilizó la expresión de la fem en términos del flujo y la ecuación 5.27. Integrando la ecuación 5.28 se obtiene el trabajo total realizado (energía almacenada en el campo magnético):

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (5.29)$$

De la ecuación 5.29 se observa que si  $\Phi = cte$ , la energía magnética del sistema decrecerá si se experimentan cambios en la geometría del circuito que eleven la autoinductancia. Los plasmas de fusión tienden a conservar flujo (debido a su alta conductividad), mientras que las fuerzas magnéticas debidas a corrientes en el plasma siempre actúan para aumentar la autoinductancia del sistema, por lo que un plasma de fusión siempre evolucionará a estados de baja energía magnética. Esto fue conjeturado por Taylor, dónde además mencionó que se evoluciona a dicho estado mientras la helicidad magnética se conserva. A continuación se probará lo anterior.

Recordando, la energía de campo magnético se expresa como

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d^3r, \quad (5.30)$$

cantidad que se busca minimizar, bajo la restricción de mantener la helicidad magnética (ecuación 5.1) constante.

Sea  $\mathbf{B}_{ME}$  la mínima energía magnética buscada, de tal manera que un campo arbitrario  $\mathbf{B}$  satisfice:  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ME} + \delta\mathbf{B}$ . Donde  $\delta\mathbf{B}$  es una pequeña variación tal que se satisfacen las condiciones de frontera correspondientes.

El vector potencial asociado a  $\mathbf{B}$  es:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{ME} + \delta\mathbf{A}$ , donde la componente tangencial es  $\delta\mathbf{A} = 0$  en la frontera (pues de lo contrario habría flujo de helicidad a través de la pared). Considerando ahora una variación  $\delta W$  de energías entre la energía magnética arbitraria y la energía magnética mínima, se tiene que:

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int [(\mathbf{B}_{ME} + \delta\mathbf{B})^2 - B_{ME}^2] d^3r = \frac{1}{\mu_0} \int \mathbf{B}_{ME} \cdot \nabla \times \delta\mathbf{A} d^3r, \quad (5.31)$$

donde la segunda igualdad se obtiene simplificando la primera, y utilizando la expresión del vector potencial de  $\delta\mathbf{B}$ . Ahora integrando por partes se obtiene:

$$\delta W = \frac{1}{\mu_0} \int [\nabla \cdot (\mathbf{B}_{ME} \times \delta\mathbf{A}) + (\delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{ME})] d^3r, \quad (5.32)$$

y utilizando el teorema de la divergencia, fijando la condición a la frontera,  $\mathbf{B}_{ME} \times \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$ , se llega al resultado siguiente:

$$\delta W = \frac{1}{\mu_0} \left[ \int \mathbf{B}_{ME} \times \delta\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} + \int \delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{ME} d^3r \right] = \frac{1}{\mu_0} \int \delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{ME} d^3r. \quad (5.33)$$

Por otro lado, se tiene que la variación de la helicidad magnética es:

$$\delta K = \int (\delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{ME} + \mathbf{A}_{ME} \cdot \delta\mathbf{B}) d^3r = \int (\delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{ME} + \mathbf{A}_{ME} \cdot \nabla \times \delta\mathbf{A}) d^3r. \quad (5.34)$$

Nuevamente al utilizar la misma relación vectorial que en el caso de la energía magnética y haciendo cero la integral sobre la divergencia, se obtiene:

$$\delta K = \int [\delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{ME} + \delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A}_{ME} + \nabla \cdot (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{A}_{ME})] d^3r = 2 \int \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{ME} d^3r. \quad (5.35)$$

La minimización de  $\delta W$  sujeto a la restricción de que  $\delta K$  permanece constante, es básicamente un problema de optimización. Este tipo de problemas pueden ser resueltos mediante multiplicadores de Lagrange. Introduciendo el multiplicador arbitrario  $\frac{\lambda}{2}$ , se busca resolver la ecuación:

$$\delta W = \frac{\lambda}{2} \delta K, \quad (5.36)$$

utilizando las ecuaciones 5.33 y 5.35:

$$\int \delta\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{ME} d^3r = \lambda \int \delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_{ME} d^3r. \quad (5.37)$$

Reacomodando la igualdad anterior se obtiene:

$$\int \delta\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}_{ME} - \lambda \mathbf{B}_{ME}) d^3r = 0, \quad (5.38)$$

y como  $\delta\mathbf{A}$  es arbitrario, lo demás tiene que ser cero, es decir

$$\nabla \times \mathbf{B}_{ME} = \lambda \mathbf{B}_{ME} \quad (5.39)$$

donde  $\lambda$  es una función escalar.

Esta es la **ecuación de un campo libre de fuerzas**, ya que  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}_{ME} = 0$ . Es decir que la relajación de Woltjer-Taylor resulta en un campo de esta naturaleza. La función escalar  $\lambda$  puede ser determinada de acuerdo con las condiciones a la frontera del problema en cuestión, así como la corriente en el plasma.

Finalmente se tiene la relación entre energía almacenada en el campo magnético y helicidad magnética:

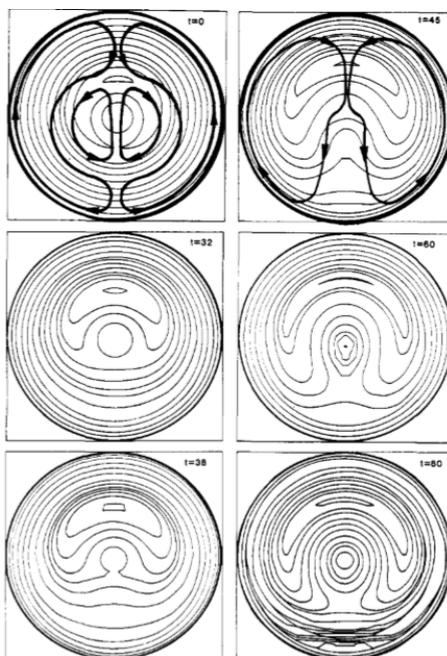
$$\frac{W}{K} = \frac{\int B_{ME}^2 d^3r}{2\mu_0 \int \mathbf{A}_{ME} \cdot \mathbf{B}_{ME} d^3r} = \frac{\int [\mathbf{A}_{ME} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{ME} + \nabla \cdot (\mathbf{A}_{ME} \times \mathbf{B}_{ME})] d^3r}{2\mu_0 \int \mathbf{A}_{ME} \cdot \mathbf{B}_{ME} d^3r}. \quad (5.40)$$

Además si  $f$  es una función escalar arbitraria, se tiene al integrar la ecuación 5.39 que  $\mathbf{B}_{ME} = \lambda \mathbf{A}_{ME} + \nabla f$ , por lo que la ecuación 5.40 se simplifica en:

$$\frac{W}{K} = \frac{\lambda}{2\mu_0}. \quad (5.41)$$

Se expuso anteriormente que durante el confinamiento magnético el plasma se encuentra congelado al campo. En un caso ideal (sin resistividad en las bobinas que generan el campo) el congelamiento preserva la topología tanto local como total de las superficies magnéticas. Sin embargo, en el caso no ideal la topología de algunas superficies cambia durante el proceso de relajación, dando lugar a fenómenos de reconexión magnética y violando la conservación tanto de energía como de helicidad magnética local (figura 5.3). A pesar de esto, la helicidad magnética global se sigue conservando, por lo que cabe recalcar que la teoría de Taylor aplicada a toros axisimétricos se basa en el principio de conservación de helicidad total.

En el siguiente capítulo se mostrará una aplicación de los resultados obtenidos en éste, particularmente, a dos problemas que ya se estudiaron. El equilibrio del RFP en geometría cilíndrica y el equilibrio en geometría toroidal, descrito por la ecuación de G-S. Este es el problema central que se aborda en esta tesis, por lo que después se procederá a mostrar algunos resultados.



**Figura 5.3:** Ejemplo de evolución temporal de superficies magnéticas

[17]

# Campo libre de fuerzas en fusión nuclear

---

Como se demostró en el capítulo anterior, un proceso de relajación de Woltjer-Taylor resulta en un campo libre de fuerzas. Estos campos fueron estudiados anteriormente por Chandrasekhar y Kendall [30].

## 6.1. Campo libre de fuerzas en RFP con geometría cilíndrica

Como se explicó en el capítulo anterior, la presión es constante en todo el plasma en el campo libre de fuerzas, es decir,  $p' = 0$ . Retomando los resultados del capítulo 4, de la ecuación 4.13 resulta en  $-\mu_0 p = \alpha_2$ . Por otro lado se sabe que el campo libre de fuerzas se describe mediante la ecuación:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}. \quad (6.1)$$

Tomando el rotacional de esta ecuación se obtiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla \times (\lambda \mathbf{B}) = \lambda \nabla \times \mathbf{B} = \lambda^2 \mathbf{B}, \quad (6.2)$$

donde se utilizó la propiedad vectorial  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$  [21], y la ecuación de Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Además se ha supuesto que  $\lambda$  es constante.

De la ecuación anterior se deduce la llamada **ecuación vectorial de Helmholtz**:

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \lambda^2 \mathbf{B} = 0. \quad (6.3)$$

Haciendo  $\mathbf{B} = \psi \hat{a}$ , donde  $\psi$  es una función escalar y el factor de escala de las coordenadas del vector  $\hat{a}$  es uno, se obtiene la **ecuación escalar de Helmholtz**:

$$\nabla^2 \psi + \lambda^2 \psi = 0, \quad (6.4)$$

que en nuestro contexto se trata de la **ecuación de equilibrio en geometría cilíndrica para campo libre de fuerzas**. Es importante notar que toda solución a la ecuación 6.1, es solución a

las ecuaciones 6.3 y 6.4, pero no viceversa. En nuestro contexto, esto implica que si se conoce la solución al campo libre de fuerzas general, se conocerá la solución al campo libre de fuerza del equilibrio del RFP en geometría cilíndrica (razón de aspecto grande). Ahora, las siguientes expresiones son soluciones a la ecuación 6.3

$$\mathbf{L} = \nabla \psi, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{T} = \nabla \times (\hat{a}\psi), \quad (6.6)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\lambda} \nabla \times \mathbf{T}, \quad (6.7)$$

y además se tiene que:

$$\nabla \times \mathbf{S} = \frac{1}{\lambda} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{T}) = -\frac{1}{\lambda} \nabla^2 \mathbf{T} = \frac{1}{\lambda} \lambda^2 \mathbf{T} = \lambda \mathbf{T}, \quad (6.8)$$

por lo que sumando las expresiones de  $\nabla \times \mathbf{S}$  y  $\nabla \times \mathbf{T}$ , se tiene:

$$\nabla \times (\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \nabla \times \mathbf{S} + \nabla \times \mathbf{T} = \lambda \mathbf{S} + \lambda \mathbf{T} = \lambda (\mathbf{S} + \mathbf{T}). \quad (6.9)$$

Entonces sustituyendo los valores de  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$ , se tiene que el campo que resuelve la ecuación de Helmholtz vectorial es:

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\psi \hat{a}) + \frac{1}{\lambda} \nabla \times \nabla \times (\psi \hat{a}) = \nabla \times (\psi \hat{a}) + \frac{1}{\lambda} (-\nabla^2 \psi \hat{a}) = \nabla \times (\psi \hat{a}) + \lambda \psi \hat{a}, \quad (6.10)$$

o bien:

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\hat{a}\psi) - \frac{1}{\lambda} \nabla^2 (\hat{a}\psi). \quad (6.11)$$

Simplificando y considerando coordenadas cilíndricas con  $\hat{a} = \hat{z}$  se llega a que:

$$\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla_z + \lambda \psi \nabla_z, \quad (6.12)$$

que es la solución al campo libre de fuerzas (6.1) y también de la ecuación de Helmholtz escalar (6.4).

Por otro lado, la ecuación 6.4 se puede reescribir como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \lambda^2 \psi = 0. \quad (6.13)$$

Para resolverla se propone la separación de variables  $\psi(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$ . Sustituyendo en la ecuación 6.13 se obtiene:

$$\left[ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{d\rho} \right] + \frac{R}{\rho^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda^2 R \Theta = 0. \quad (6.14)$$

## 6. CAMPO LIBRE DE FUERZAS EN FUSIÓN NUCLEAR

---

Multiplicando ambos lados de la ecuación por  $\frac{\rho^2}{R\Theta}$ , se separan las variables correspondientes y se cumple la igualdad:

$$\frac{\rho^2}{R} \left[ \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right] + \lambda^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = v^2, \quad (6.15)$$

donde  $v^2$  es una constante de separación.

Ahora, se tienen que resolver las dos ecuaciones ya separadas:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \left( \lambda^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (6.16)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + v^2 \Theta = 0. \quad (6.17)$$

Las soluciones a la ecuación 6.17 son exponenciales complejas, es decir,  $\Theta = e^{\pm iv\theta}$  si  $v^2 > 0$ . Por otro lado, haciendo el cambio de variable  $\kappa = \lambda\rho$ , la ecuación 6.16 se transforma en la ecuación de Bessel, cuya solución es la suma de funciones de Bessel de primera y segunda especie, es decir:  $R(\kappa) = J_v(\kappa) + Y_v(\kappa)$  y por lo tanto,  $R(\rho) = J_v(\lambda\rho) + Y_v(\lambda\rho)$ .

Con esto se tiene que la solución general es:

$$\psi(\rho, \theta) = \sum_v \psi_v(\rho, \theta) = \sum_v (C_v J_v(\lambda\rho) + D_v Y_v(\lambda\rho)) \left[ A_v e^{iv\theta} + B_v e^{-iv\theta} \right], \quad (6.18)$$

con  $A_v, B_v, C_v$  y  $D_v$  constantes que dependen de  $v$ . Ahora, como  $Y_v(\lambda\rho)$  diverge en el origen, solo se toma la función de Bessel  $J_v(\lambda\rho)$  como solución para el interior del cilindro.

Una vez conocido el flujo  $\psi$  se puede calcular las componentes del campo magnético con las ecuaciones 4.5 a 4.7, obteniéndose (la constante  $C_v$  se absorbe en las otras):

$$B_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho} \sum_v J_v(\lambda\rho) \left[ A_v i v e^{iv\theta} + B_v i v e^{-iv\theta} \right], \quad (6.19)$$

$$B_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = -\lambda \sum_v J'_v(\lambda\rho) \left[ A_v e^{iv\theta} + B_v e^{-iv\theta} \right], \quad (6.20)$$

$$B_z = b(\psi) = \lambda \psi = \lambda \sum_v J_v(\lambda\rho) \left[ A_v e^{iv\theta} + B_v e^{-iv\theta} \right]. \quad (6.21)$$

Para simplificar estos resultados, se utilizan las siguientes propiedades de las funciones de Bessel:

$$J'_v(\lambda\rho) = \frac{v}{\lambda\rho} (J_v - J_{v+1}), \quad (6.22)$$

$$v = 0 \rightarrow J'_0(\lambda\rho) = -J_1(\lambda\rho), \quad (6.23)$$

y finalmente debido a que se necesitan soluciones que sean simétricas azimutalmente solo se necesita el valor  $v = 0$ , obteniéndose así el flujo  $\psi$ :

$$\psi(\rho, \theta) = J_0(\lambda\rho) [A_0 + B_0], \quad (6.24)$$

y las componentes del campo magnético del campo libre de fuerzas en geometría cilíndrica:

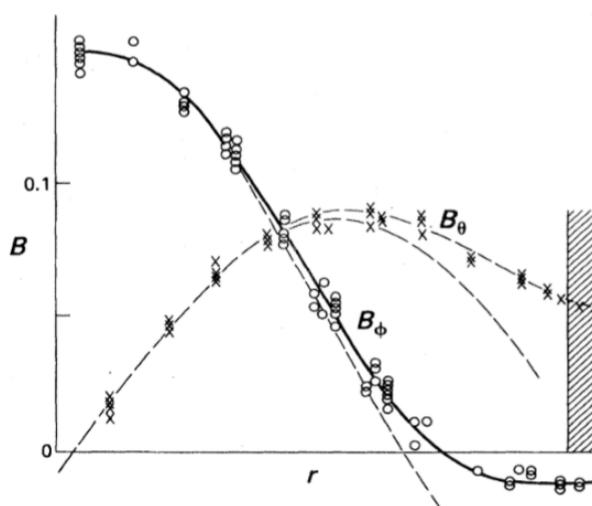
$$B_\rho = 0, \quad (6.25)$$

$$B_\theta = -\lambda C J_1(\lambda\rho), \quad (6.26)$$

$$B_z = \lambda C J_0(\lambda\rho), \quad (6.27)$$

donde  $C = A_0 + B_0$ .

De acuerdo a [18] y [27] los campos obtenidos por el mecanismo de la relajación de Woltjer-Taylor para la geometría cilíndrica se asemejan a los resultados observados experimentalmente (Figura 6.1).



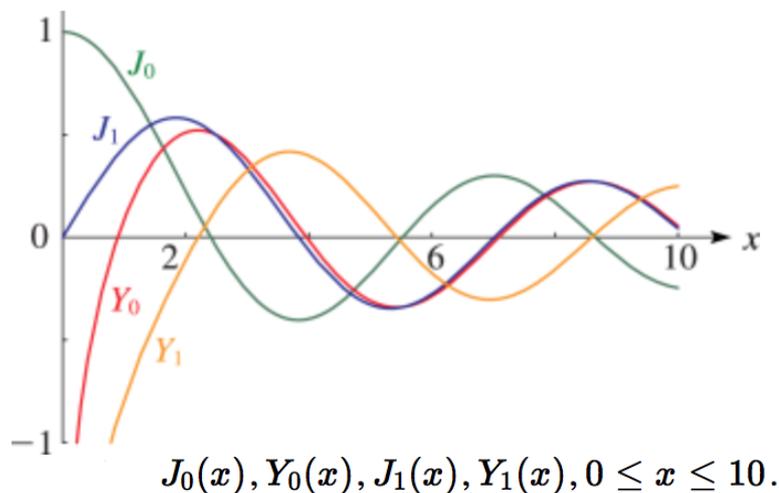
**Figura 6.1:** Perfiles teórico y experimental de los campos magnéticos

[18]

de donde se observa que la curva  $B_\theta$  corresponde a la ecuación 6.26 (también  $B_\theta$ ), mientras que la curva  $B_\phi$  corresponde a la ecuación 6.27 ( $B_z$ ).

Además, para hacer una comparación, las gráficas de las funciones de Bessel se presentan en la (Figura 6.2).

Si se quiere estudiar los efectos de razón de aspecto pequeña, es necesario incluir geometría toroidal.



**Figura 6.2:** Gráfica de las funciones de Bessel

[19]

Al extender el campo libre de fuerzas a la geometría toroidal es necesario resolver la correspondiente ecuación de G-S. A continuación se tratará esto.

## 6.2. Ecuación de G-S para campo libre de fuerzas

Como se observa en la ecuación 3.51, la ecuación de Grad-Shafranov es una ecuación diferencial parcial elíptica no lineal, cuyas soluciones son, en general, no analíticas. Sin embargo, existen algunos casos en los que dicha ecuación si posee soluciones analíticas. Tal es el caso del campo libre de fuerzas con  $\lambda$  constante, el cual se estudiará a continuación.

Se sabe que el campo libre de fuerzas se expresa mediante la ecuación 6.1. Combinando esta expresión con la Ley de Ampere en MHD (ecuación 3.15), se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (6.28)$$

es decir,  $\mathbf{B} \parallel \mathbf{J}$ , y por lo tanto la ecuación de equilibrio (ecuación 3.28) se transforma en

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0, \quad (6.29)$$

lo cual indica que **la presión del plasma es constante en un campo libre de fuerzas.**

Por otro lado, sustituyendo la expresión de campo magnético (ecuación 3.33) en la ecuación de campo libre de fuerzas, se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B} = \lambda (\nabla \psi \times \nabla \phi) + \lambda F \nabla \phi. \quad (6.30)$$

Además, calculando el rotacional del campo se obtienen las componentes poloidal y toroidal dadas por:

$$\nabla \times \mathbf{B}_t = \nabla \times (F \nabla \phi) = \nabla F \times \nabla \phi, \quad (6.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_p = \nabla \times (\nabla \psi \times \nabla \phi) = \Delta^* \psi \nabla \phi. \quad (6.32)$$

Entonces igualando las componentes de las ecuaciones 6.30, 6.31 y 6.32 se obtiene:

$$\nabla F \times \nabla \phi = \lambda (\nabla \psi \times \nabla \phi), \quad (6.33)$$

$$\Delta^* \psi \nabla \phi = \lambda F \nabla \phi. \quad (6.34)$$

De la ecuación 6.33 se deduce que:

$$\frac{dF}{d\psi} = -\lambda, \quad (6.35)$$

$$F = -\lambda \psi, \quad (6.36)$$

y al utilizar estos resultados junto con la ecuación 6.34, se llega a la **ecuación de Grad-Shafranov para el campo libre de fuerzas**:

$$\Delta^* \psi = -\lambda^2 \psi. \quad (6.37)$$

Por otra parte, de la Ley de Ampere se sabe que la densidad de corriente total es:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_p = \frac{\lambda}{\mu_0} (\mathbf{B}_t + \mathbf{B}_p), \quad (6.38)$$

de donde, al considerar solo la corriente toroidal se obtiene:

$$\mathbf{J}_t = \frac{\lambda}{\mu_0} \mathbf{B}_t = \frac{\lambda}{\mu_0} F \nabla \phi = -\frac{\lambda^2 \psi}{\mu_0 r} \hat{\phi}. \quad (6.39)$$

De las ecuaciones 6.37 y 6.39 se llega a que la corriente toroidal está relacionada con  $\psi$  mediante:

$$\Delta^* \psi = -\lambda^2 \psi = \mu_0 r J_t. \quad (6.40)$$

Para finalizar la base teórica de la tesis se dará la solución general a la ecuación de G-S para campo libre de fuerzas.

### 6.3. Solución general a la ecuación de G-S para campo libre de fuerzas

La ecuación de Grad-Shafranov para el campo libre de fuerzas es una ecuación homogénea que tiene soluciones analíticas. Antes de resolver dicha ecuación conviene reescribirla en términos de las variables adimensionales  $x = r/R_0$ ,  $y = z/R_0$ ,  $\lambda' = \lambda R_0$  y  $\psi' = \psi/\psi_0$ . En estos términos se tiene que resolver:

## 6. CAMPO LIBRE DE FUERZAS EN FUSIÓN NUCLEAR

---

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = -\lambda'^2 \psi'. \quad (6.41)$$

Para resolverla se propone la siguiente separación de variables:

$$\psi'(x, y) = G(x)H(y). \quad (6.42)$$

Sustituyendo en la ecuación 6.41 se obtiene:

$$\frac{1}{G(x)} \frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{1}{xG(x)} \frac{dG}{dx} + \frac{1}{H(y)} \frac{d^2 H}{dy^2} = -\lambda'^2, \quad (6.43)$$

de donde se obtiene la ecuación para  $y$ :

$$\frac{d^2 H}{dy^2} = -k^2 H(y), \quad (6.44)$$

con  $k$  una constante.

Sustituyendo en la ecuación 6.43 se obtiene la ecuación para  $x$ :

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{1}{x} \frac{dG}{dx} + (\lambda'^2 - k^2)G(x) = 0. \quad (6.45)$$

Por un lado, la solución a la ecuación 6.44 es:

$$H(y) = e \cos(ky) + f \sin(ky), \quad (6.46)$$

con  $e$  y  $f$  constantes.

Por otra parte, siguiendo lo hecho por [31], la solución a la ecuación 6.45 se obtiene al considerar las siguientes relaciones que cumplen las funciones de Bessel:

$$\pm B_{n+1}(ax) = \frac{2n}{ax} B_n(ax) - B_{n-1}(ax), \quad (6.47)$$

$$B'_n(ax) = \frac{a}{2} (B_{n-1}(ax) \mp B_{n+1}(ax)), \quad (6.48)$$

$$B_{-n}(ax) = (\mp)^n B_n(ax), \quad (6.49)$$

donde  $a$  es un parametro y  $B$  son las funciones de Bessel  $J$  y  $Y$  para el primer signo, y las funciones de Bessel modificadas  $I$  y  $K$  para el segundo signo.

Al considerar  $a^2 = \pm(\lambda'^2 - k^2)$ , se propone la solución  $G(x) = xB_1(ax)$ , que a continuación se probará que efectivamente resuelve la ecuación radial. En el apéndice A se muestra como se obtienen las derivadas de  $G$  aplicando las relaciones de las funciones de Bessel y obteniéndose:

$$G'(x) = axB_0(ax), \quad (6.50)$$

$$G''(x) = aB_0(ax) \mp a^2 xB_1(ax), \quad (6.51)$$

$$G''(x) - \frac{G'(x)}{x} - (k^2 - \lambda'^2)G(x) = (\lambda'^2 - k^2 \mp a^2)G(x) = 0, \quad (6.52)$$

donde se observa en la ecuación 6.52 que al sustituir  $G(x)$  en la ecuación radial los resultados son consistentes, por lo que  $G$  es solución y de acuerdo a la ecuación 6.42 se tiene que

$$\psi'(x, y) = cxB_1(ax) (e \cos(ky) + f \sin(ky)). \quad (6.53)$$

con  $c$  una constante. Además si  $0 \leq k^2 \leq T$ ;  $\lambda'^2 > 0$  se obtiene la solución general a la ecuación de Grad-Shafranov para el campo libre de fuerzas adimensional:

$$\psi'(x, y) = x \left[ cJ_1 \left( \sqrt{\lambda'^2 - k^2}x \right) + dY_1 \left( \sqrt{\lambda'^2 - k^2}x \right) \right] (e \cos(ky) + f \sin(ky)). \quad (6.54)$$

donde  $c, d, e, f$  son constantes.

Finalmente, el campo magnético se expresa como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_t = \nabla \times \left( \frac{\psi}{r} \hat{\phi} \right) - \frac{\lambda \psi}{r} \hat{\phi} = \nabla \times \left( \frac{\psi' \psi_0}{xR_0} \hat{\phi} \right) - \frac{\lambda' \psi' \psi_0}{xR_0^2} \hat{\phi}. \quad (6.55)$$

Las condiciones a la frontera impuestas determinan qué partes de la solución son relevantes para el problema en cuestión. En esta tesis se estudió el problema de un plasma cuya sección transversal puede ser un cuadrado o una circunferencia. En el siguiente capítulo se desarrollará la solución para dicha frontera, y a su vez se expondrá el comportamiento de las superficies de nivel, campos magnéticos, y demás en esta geometría.

## Resultados

---

En el capítulo anterior se demostró que la ecuación del campo libre de fuerzas (ecuación 6.30) con geometría toroidal puede ser resuelta en términos de una función escalar de flujo  $\psi(r, z)$ , obtenida a partir de una ecuación tipo Grad-Shafranov (ecuación 6.37). Para dicha ecuación se encuentra la solución 6.53 en términos de funciones de Bessel de primer orden, de primer y segundo tipo en la dirección radial  $r$ , cuyo argumento contiene la constante  $\lambda$ , asociada a la corriente toroidal, según la ecuación 6.40, y la constante de separación  $k$ , así como de senos y cosenos en la dirección de  $z$ , cuyo argumento depende solo de  $k$ . El problema que se presenta ahora es ajustar las soluciones obtenidas a condiciones a la frontera apropiadas. Los aparatos tipo Reversed Field Pinch (RFP) existentes tienen sección transversal circular, y la columna de plasma es aislada de las paredes mediante un limitador, de modo que nos interesa en particular este tipo de frontera. Por lo regular la razón de aspecto  $\varepsilon^{-1} = R_o/a \geq 4$  ( $\varepsilon < 0.25$ ), en donde  $R_o$  es el radio mayor y  $a$  el radio menor del toro, lo que permite aproximar el equilibrio por soluciones con geometría cilíndrica, como las obtenidas en (6.19-6.21). Sin embargo, si se desea diseñar aparatos más compactos, es necesario reducir la razón de aspecto, y los efectos toroidales adquieren mayor relevancia. Es por ello que este capítulo tiene como propósito explorar esta posibilidad.

Siguiendo el procedimiento de Cerfon y Freidberg en [1], se observa que la solución se puede reescribir en términos de la suma de un conjunto de funciones, tales que cada una de ellas es solución de la ecuación de campo libre de fuerzas 6.40 por separado. Para proceder a hacer el ajuste a las condiciones a la frontera, a excepción de una de ellas cuyo coeficiente es 1, a todas las demás se asocian coeficientes a ajustar.

Conviene adoptar la normalización propuesta a finales del capítulo anterior. Debido a esto, el argumento de algunas funciones de Bessel quedaría como  $\sqrt{\lambda^2 - k^2}r = \sqrt{R_o^2(\lambda^2 - k^2)}x = \sqrt{\lambda'^2 - k'^2}x$ , y el argumento de los cosenos sería  $kz = k'y$ . De ahora en adelante por comodidad se utilizará la siguiente notación:  $\lambda' \equiv \lambda$ ,  $\psi' \equiv \psi$  y  $k' \equiv k$ , entendiéndose que son las variables normalizadas (Nota: Las gráficas presentadas tienen a  $R$  y  $z$  como funciones. Esto es simplemente notación y entiende que se está graficando en términos de las variables normalizadas  $x$  y  $y$ ). Entonces la solución más general con la que se trabajará será:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}) = & \psi_0 + c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3 + c_4 \psi_4 + c_5 \psi_5 + \\ & + c_6 \psi_6 + c_7 \psi_7 + c_8 \psi_8 + c_9 \psi_9 + c_{10} \psi_{10}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

donde las soluciones que se consideraron son las siguientes

$$\psi_0 = xJ_1(\lambda x), \quad (7.2)$$

$$\psi_1 = xY_1(\lambda x), \quad (7.3)$$

$$\psi_2 = xJ_1\left(\sqrt{\lambda^2 - k^2}x\right) \cos(ky), \quad (7.4)$$

$$\psi_3 = xY_1\left(\sqrt{\lambda^2 - k^2}x\right) \cos(ky), \quad (7.5)$$

$$\psi_4 = \cos\left(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad (7.6)$$

$$\psi_5 = \cos(\lambda y), \quad (7.7)$$

$$\psi_6 = xJ_1(\lambda x)y, \quad (7.8)$$

$$\psi_7 = xY_1(\lambda x)y, \quad (7.9)$$

$$\psi_8 = xJ_1\left(\sqrt{\lambda^2 - k^2}x\right) \sin(ky), \quad (7.10)$$

$$\psi_9 = xY_1\left(\sqrt{\lambda^2 - k^2}x\right) \sin(ky), \quad (7.11)$$

$$\psi_{10} = \sin(\lambda y). \quad (7.12)$$

Obsérvese que se ha agregado la solución  $\psi_4$ , que también es solución de la ecuación 6.30, y es independiente del tipo de soluciones encontradas en el capítulo anterior. En adelante nos interesará en este trabajo únicamente configuraciones que tengan simetría ecuatorial, por lo que se conservarán solo las soluciones  $\psi_0$  a  $\psi_5$ , cuya paridad es par en  $y$ . El resto de las soluciones, con paridad impar en  $y$  serían de interés, por ejemplo, si se incluyera un divisor que rompiera la simetría ecuatorial.

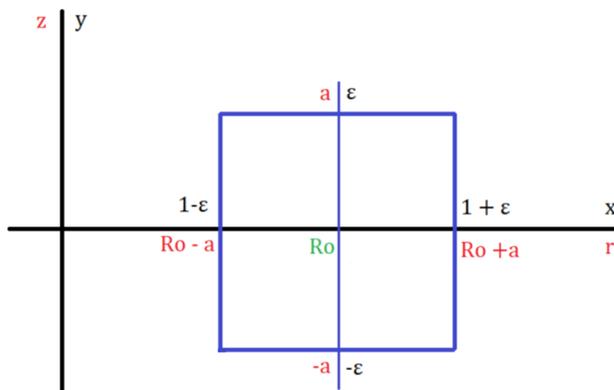
## 7.1. Solución al problema con frontera rectangular

Si bien el propósito fundamental es estudiar el caso de sección transversal circular, es instructivo empezar por una sección cuadrada de radio  $a$ . En tal caso, si el radio mayor del toro es  $R_0$ , en la dirección radial  $r$  el intervalo de interés será  $[R_0 - a, R_0 + a]$ , mientras que  $z$  determinará la altura en el intervalo  $[-a, a]$ . Así, el inverso de la razón de aspecto estará dada por  $\varepsilon = a/R_0$ .

En términos de las variables normalizadas, los intervalos de interés serán  $x \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$  y  $y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ . La geometría es descrita en la figura 7.1.

## 7. RESULTADOS

---



**Figura 7.1:** Frontera rectangular

Para este caso se puede pedir como condiciones a la frontera que  $\psi(1 \mp \varepsilon, y) = 0$ , así como  $\psi(x, \mp \varepsilon) = 0$ . Para la condición en la dirección de  $y$  se debe de cumplir:

$$\cos(k\varepsilon) = 0, \quad (7.13)$$

de modo que

$$k = \frac{(2n+1)\pi}{2\varepsilon}, \quad (7.14)$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$

Para tener una solución que permita un valor extremo en el dominio de interés, se elige  $n = 0$ , y entonces

$$k = \frac{\pi}{2\varepsilon}. \quad (7.15)$$

Para resolver la parte en  $x$ , algo que se ocurre a primera instancia es elegir como solución únicamente  $\psi_2$

$$\psi(x, y) = cxJ_1\left(\sqrt{\lambda^2 - k^2}x\right)\cos(ky), \quad (7.16)$$

de modo que:

$$\psi(1 \mp \varepsilon, 0) = c(1 \mp \varepsilon)J_1(\sqrt{\lambda^2 - k^2}(1 \mp \varepsilon)) = 0. \quad (7.17)$$

En este caso las condiciones quedan determinadas por los primeros dos ceros  $\mu_1$  y  $\mu_2$  de la función de Bessel. Entonces

$$\mu_1 = (1 - \varepsilon)\sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad (7.18)$$

$$\mu_2 = (1 + \varepsilon)\sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad (7.19)$$

donde  $\mu_1 = 3.83771$  y  $\mu_2 = 7.01559$ .

Al tomar la diferencia se obtiene:

$$\mu_2 - \mu_1 = 2\varepsilon\sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad (7.20)$$

y despejando  $\lambda$  de esta última ecuación se llega a:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2}(\mu_2 - \mu_1)^2 + k^2} = \sqrt{\frac{1}{4\varepsilon^2}(\mu_2 - \mu_1)^2 + \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2}. \quad (7.21)$$

Sumando las ecuaciones 7.18 y 7.19 y tomando el cociente de la diferencia respecto a la suma, se encuentra que  $\varepsilon$  es consistente con un solo valor:

$$\varepsilon = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = 0.2928. \quad (7.22)$$

Como consecuencia de este valor de  $\varepsilon$  se tiene que  $\lambda = 7.63075$  y  $k = 5.36468$ .

Para conocer la constante  $c$  de la solución 7.16 se utilizó la densidad de corriente del sistema (ecuación 6.39), que al integrar dicha ecuación se obtiene:

$$I_\phi = \frac{\lambda^2}{\mu_0 x} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \psi \cdot \mathbf{da}, \quad (7.23)$$

es decir:

$$I_\phi = c \frac{\lambda^2}{\mu_0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi y}{2\varepsilon}\right) dy \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} J_1\left(\sqrt{\lambda^2 - k^2}x\right) dx \quad (7.24)$$

que al utilizar  $I_\phi = 0.32MA$  y despejar  $c$  se obtuvo que:

$$c = -0.143019106. \quad (7.25)$$

Puesto que esta elección es demasiado rígida, es necesario considerar una composición de varias soluciones. Sin embargo nos representa un punto de partida que será útil al mejorar el ajuste.

Se pueden tomar tres puntos de la frontera para realizar el ajuste:

$$\psi(1 + \varepsilon, 0) = 0, \quad (7.26)$$

$$\psi(1 - \varepsilon, 0) = 0, \quad (7.27)$$

$$\psi(1, \varepsilon) = 0. \quad (7.28)$$

No se toma  $\psi(1, -\varepsilon)$  pues por simetría del problema resulta redundante. En base a esto se puede proponer una  $\psi(x, y)$  como la suma de las soluciones  $\psi_0$  a  $\psi_5$ , que incluya la  $\psi_0$  como eje, teniendo tres condiciones a la frontera y tres parámetros ajustables. Con estas ecuaciones se tiene el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas  $AC = B$ :

## 7. RESULTADOS

---

$$A = \begin{bmatrix} \psi_1|_{1+\varepsilon,0} & \psi_4|_{1+\varepsilon,0} & \psi_5|_{1+\varepsilon,0} \\ \psi_1|_{1-\varepsilon,0} & \psi_4|_{1-\varepsilon,0} & \psi_5|_{1-\varepsilon,0} \\ \psi_1|_{1,\varepsilon} & \psi_4|_{1,\varepsilon} & \psi_5|_{1,\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

$$B = \begin{bmatrix} \psi_0|_{1+\varepsilon,0} \\ \psi_0|_{1-\varepsilon,0} \\ \psi_0|_{1,\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Para conocer  $C$  es necesario hacer el producto de matrices:

$$C = A^{-1}B. \quad (7.32)$$

El vector de constantes  $C$  obtenido para esta razón de aspecto se muestra a continuación:

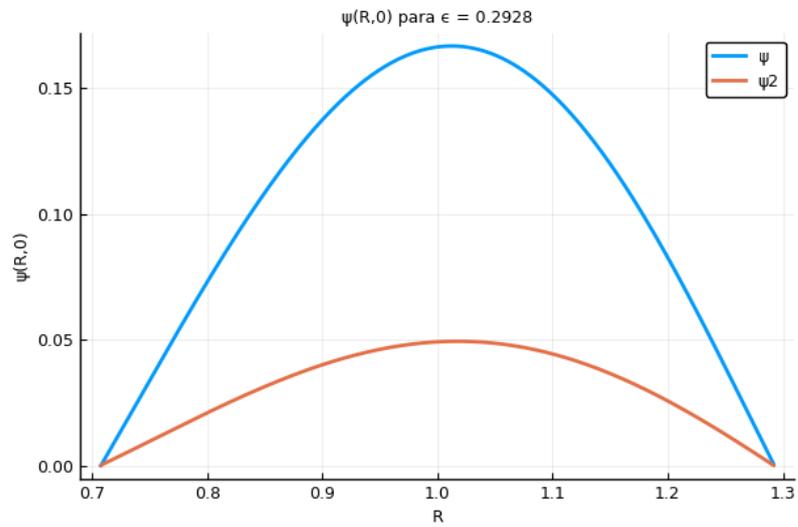
$\varepsilon$	$c_1$	$c_4$	$c_5$
0.2928	0.465631	0.316341	0.0406274

**Tabla 7.1:** Constantes obtenidas para  $\varepsilon = 0.2928$  en el caso rectangular

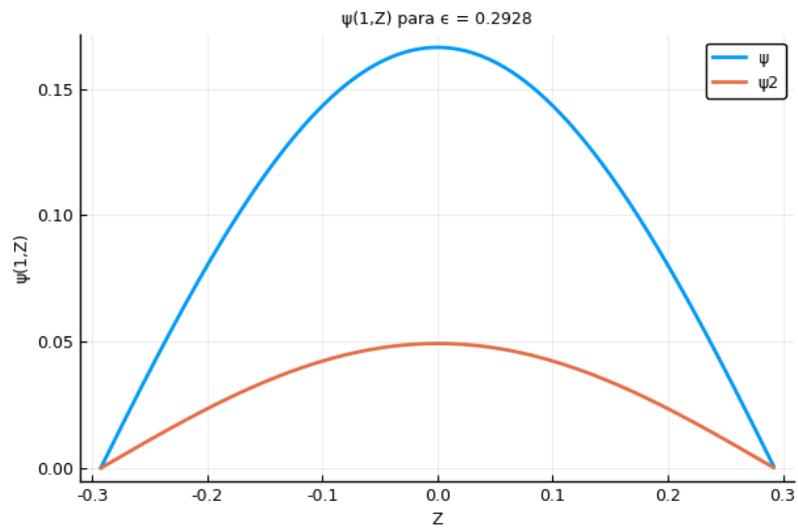
Conociendo estas constantes también se conoce la solución general. Para observar su comportamiento, se graficó dicha solución en los planos  $y = 0$  y  $x = 1$  además de que se obtuvieron las respectivas curvas de nivel. Por otro lado, también se graficaron los campos toroidal y poloidal, junto con el factor de seguridad  $q$ . Los resultados se presentan a continuación

### 7.1.1. Resultados para $\varepsilon = 0.2928$ con frontera rectangular

En estas gráficas se presentan las curvas al considerar solo  $\psi_2$  (color rojo) junto con los resultados al considerar las soluciones  $\psi_0, \psi_1, \psi_4, \psi_5$  (color azul).

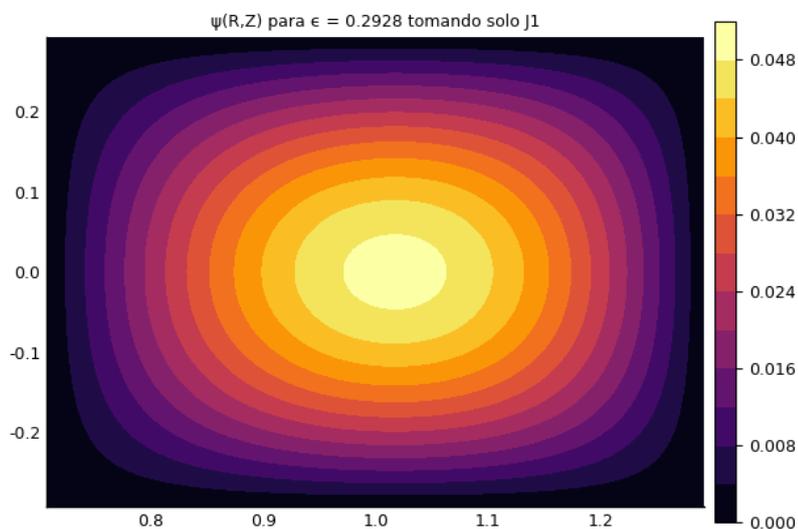


**Figura 7.2:** Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular

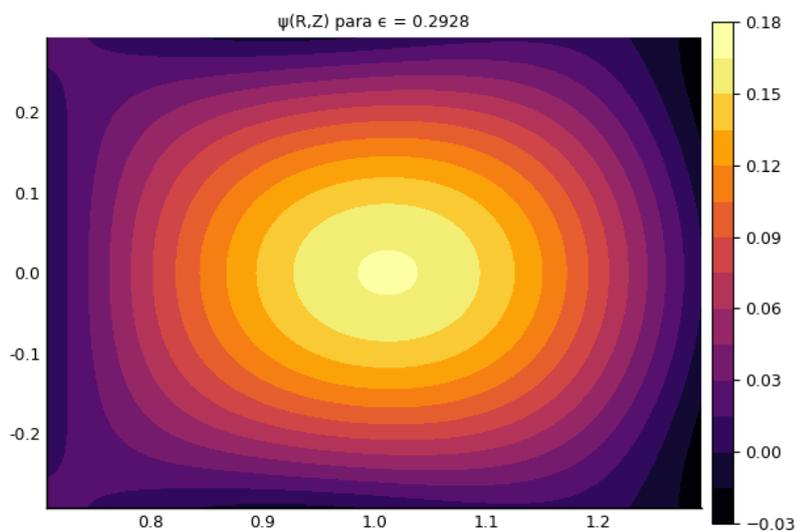


**Figura 7.3:** Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular

Las curvas de nivel para ambos casos se presenta a continuación



**Figura 7.4:** Curvas de nivel de  $\psi$  para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular tomando solo  $J_1$



**Figura 7.5:** Curvas de nivel de  $\psi$  para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular

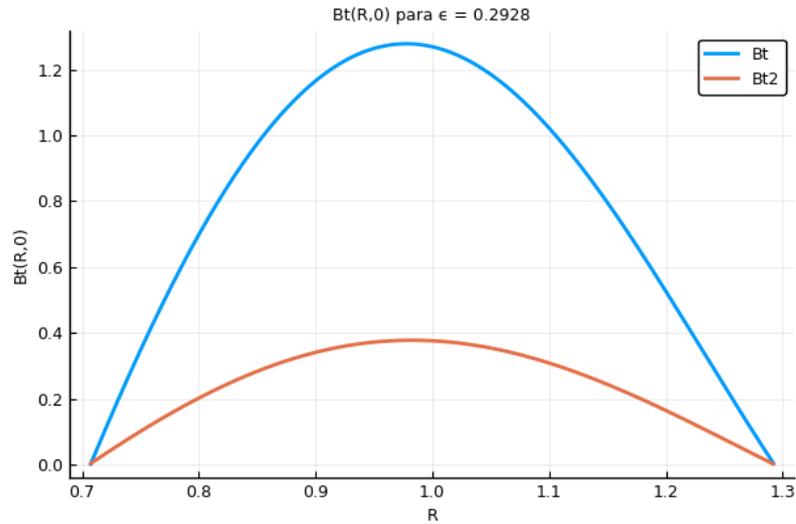
de donde se observa que el máximo de  $\psi$  está de acuerdo a lo que se esperaba.

Para el caso donde solo se considera  $J_1$  se observa en las curvas de nivel que la frontera se ajusta de muy buena forma, lo cual era de esperarse pues se trata de la razón de aspecto y solución preferente para los valores de  $\lambda$  y  $k$ .

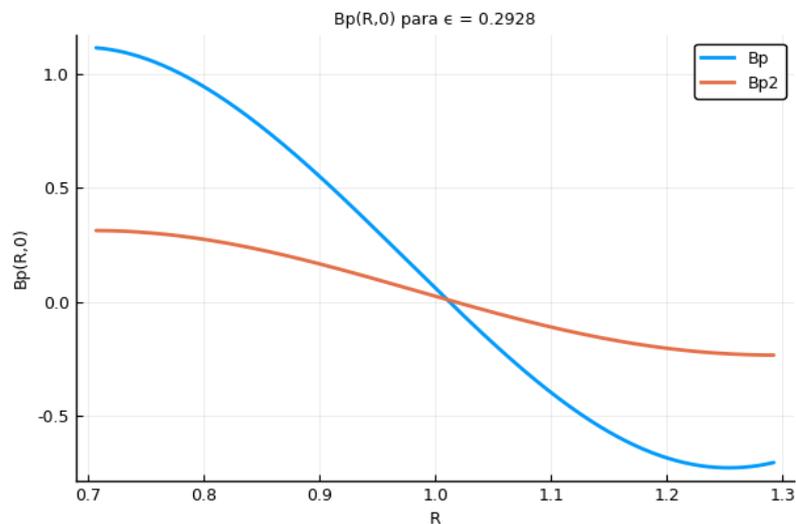
Por otra parte en el otro caso, debido a la simetría ecuatorial el máximo de  $\psi(1, y)$  se encuentra en el centro, mientras que para  $\psi(x, 0)$  el máximo se presenta un poco a la derecha del centro. Este fenómeno es conocido como **Corrimiento de Shafranov** y es un desplazamiento en el eje magnético debido a la curvatura del toro. Tanto en  $x$  como en  $y$  se cumplen las condiciones a la frontera en los extremos, y se observa en las curvas de nivel que la frontera se ajusta en buena

medida a la forma rectangular aunque no de tan buena forma como al tomar solo  $J_1$ .

Para los campos magnéticos se tiene el siguiente comportamiento:



**Figura 7.6:** Campo magnético toroidal respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular



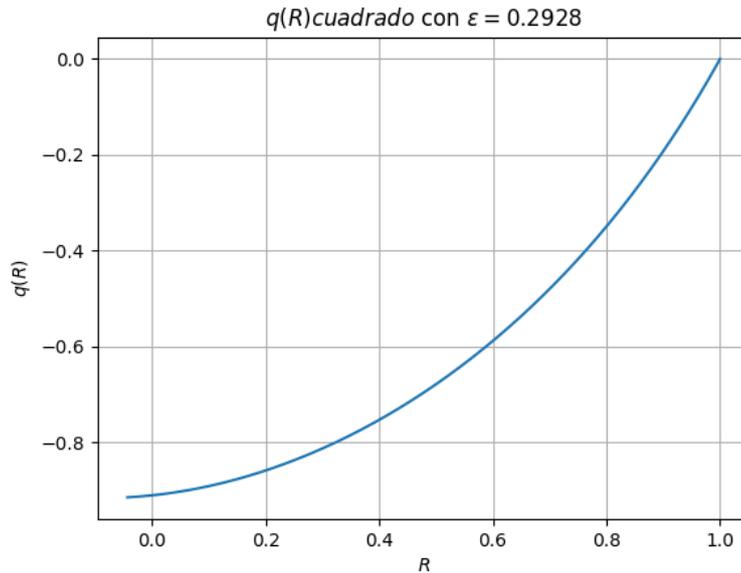
**Figura 7.7:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular

nuevamente se tiene un comportamiento de acuerdo a lo esperado, pues las condiciones a la frontera en los extremos se satisfacen, además de que se observa el corrimiento de Shafranov en el campo poloidal.

## 7. RESULTADOS

---

Finalmente, el factor de seguridad es el siguiente:



**Figura 7.8:** Factor de seguridad  $q$  para  $\varepsilon = 0.2928$  con frontera rectangular

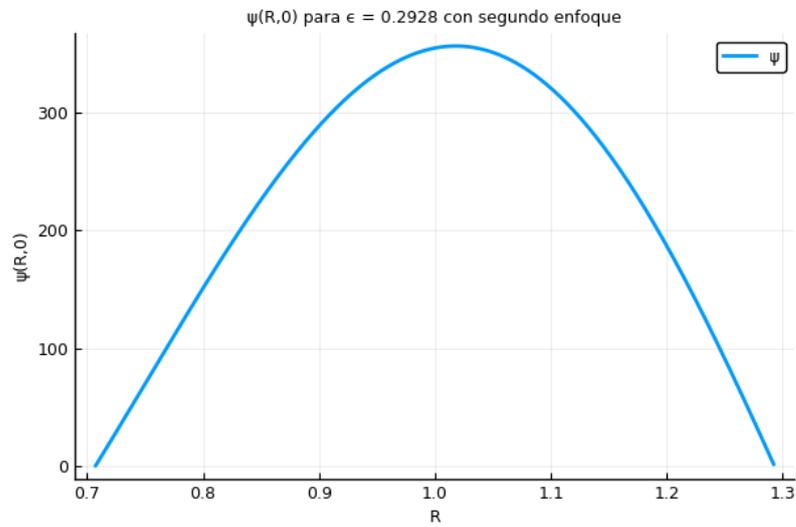
Cabe resaltar que  $R$  representa la distancia al eje magnético, el cual en caso de haber toroidicidad, no coincide con el eje del toro (Corrimiento de Shafranov). Además, como  $q > 0$  se debe de tomar el valor absoluto.

Con el fin de estudiar el efecto de elección de distintas soluciones  $\psi$ , se volvió a resolver este caso considerando la solución  $\psi_2$  en lugar de la solución  $\psi_4$ . Esto da lugar a un nuevo vector de constantes:

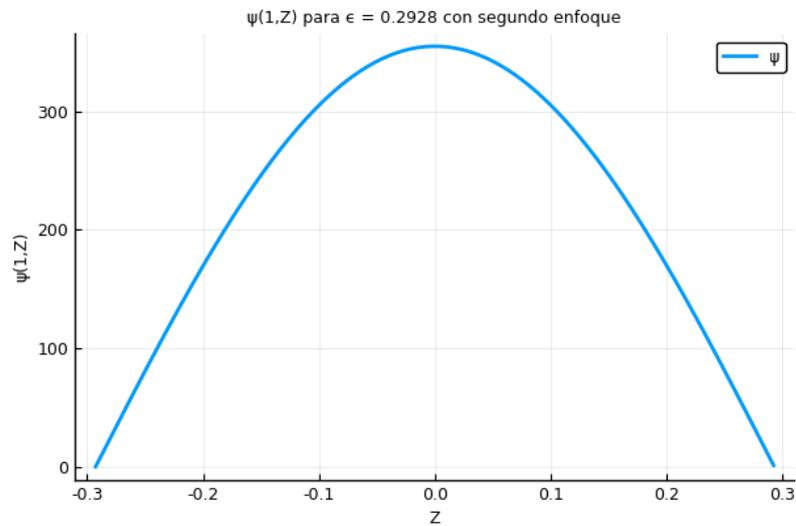
$\varepsilon$	$c_1$	$c_2$	$c_5$
0.2928	4.80990	-1037.16	-1.58351

**Tabla 7.2:** Constantes obtenidas para  $\varepsilon = 0.2928$  en el segundo enfoque del caso rectangular

Nótese que debido al valor de la constante  $c_2$  fue necesario separar estas gráficas del resto. Los resultados para este caso se presentan a continuación:



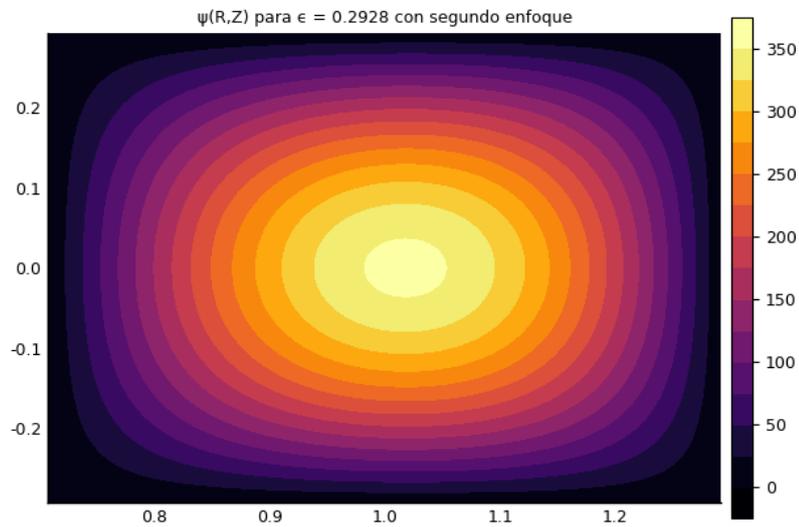
**Figura 7.9:** Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular (segundo enfoque)



**Figura 7.10:** Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular (segundo enfoque)

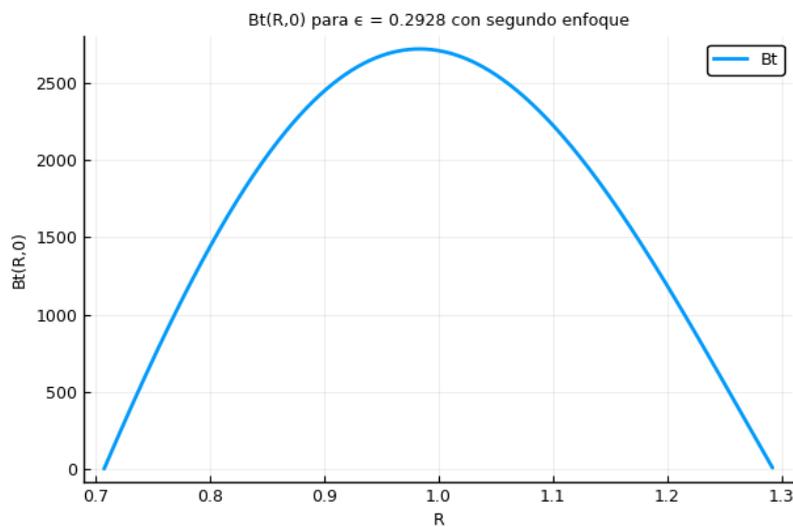
## 7. RESULTADOS

---

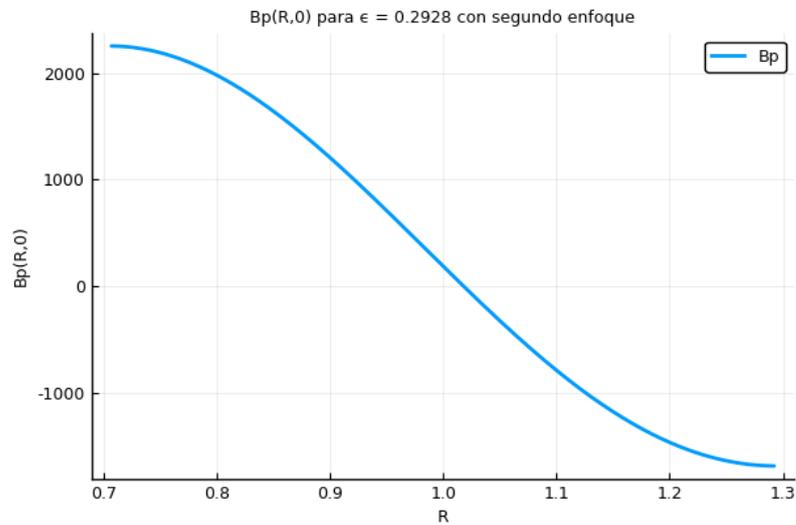


**Figura 7.11:** Curvas de nivel de  $\psi$  para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular (segundo enfoque)

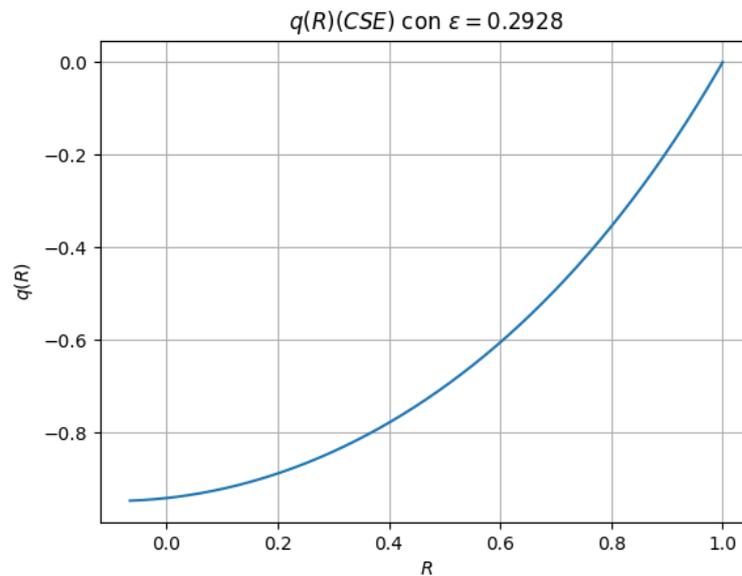
de donde, como era de esperarse debido a que se utiliza  $\psi_2$ , hay un mejor ajuste a la frontera, además del aumento en la escala debido a la constante  $c_2$ . También nótese que se preserva la estructura general de las gráficas, lo cual se observa también en los campos y el factor de seguridad presentados a continuación



**Figura 7.12:** Campo magnético toroidal respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular (segundo enfoque)



**Figura 7.13:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular (segundo enfoque)



**Figura 7.14:** Factor de seguridad  $q$  para  $\epsilon = 0.2928$  con frontera rectangular (segundo enfoque)

Otra razón de aspecto que se ha utilizado en diversos experimentos es  $\epsilon = 0.5$ . Por esta razón se estudiaron los resultados para este caso.

## 7. RESULTADOS

---

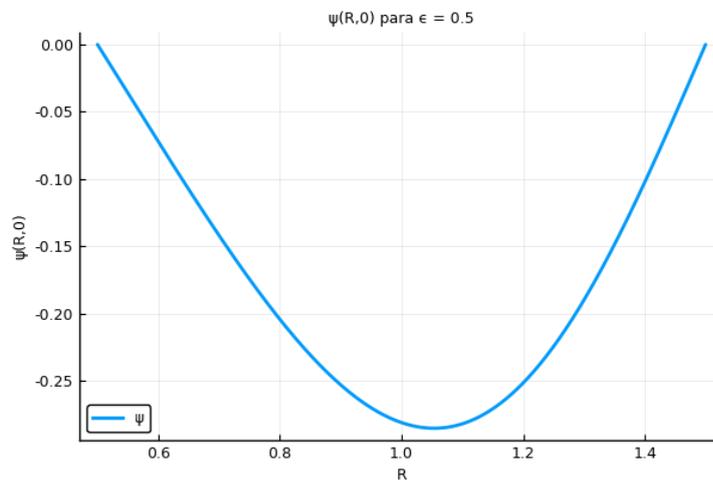
### 7.1.2. Resultados para $\varepsilon = 0.5$ con frontera rectangular

Las constantes obtenidas para este caso fueron las siguientes:

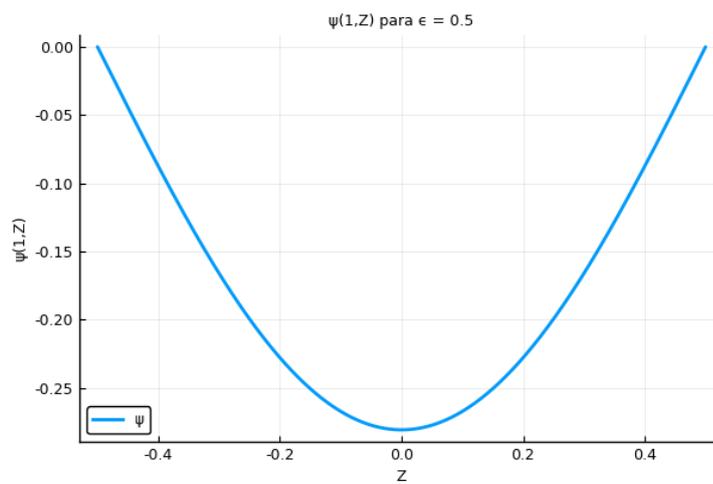
$\varepsilon$	$c_1$	$c_4$	$c_5$
0.5	0.279958	0.35548	-0.0591801

**Tabla 7.3:** Constantes obtenidas para  $\varepsilon = 0.5$  en el caso rectangular

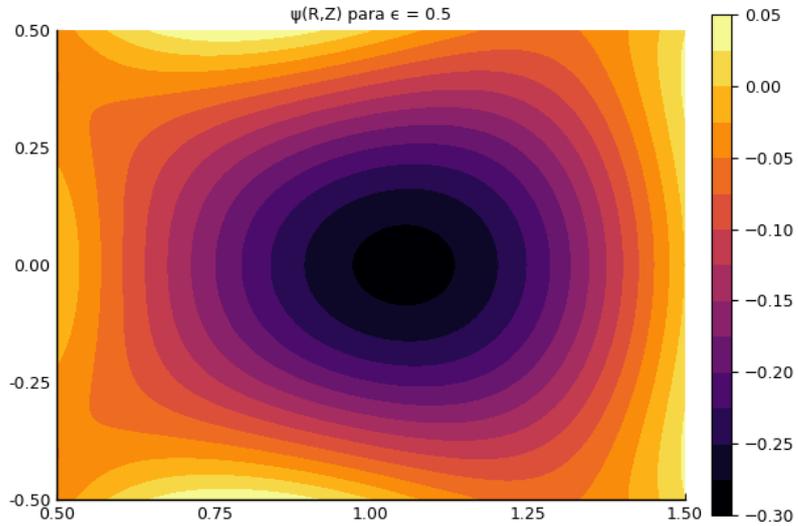
Para  $\psi$  se obtuvo:



**Figura 7.15:** Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) para  $\varepsilon = 0.5$  con frontera rectangular

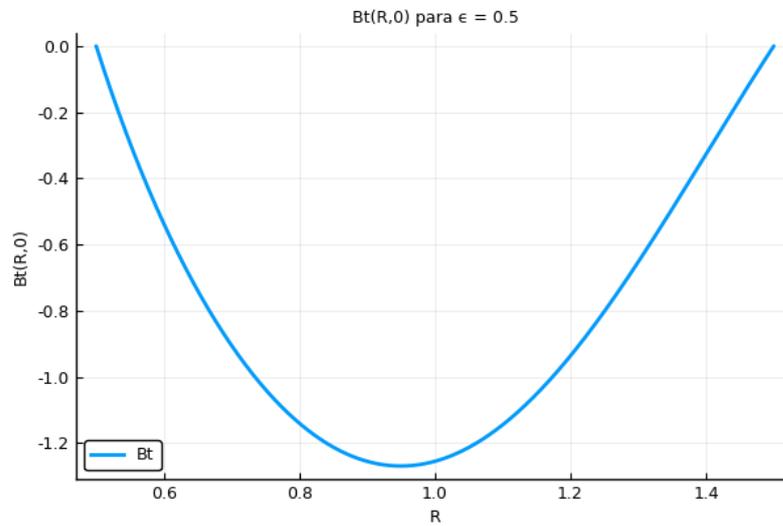


**Figura 7.16:** Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) para  $\varepsilon = 0.5$  con frontera rectangular



**Figura 7.17:** Curvas de nivel de  $\psi$  para  $\epsilon = 0.5$  con frontera rectangular

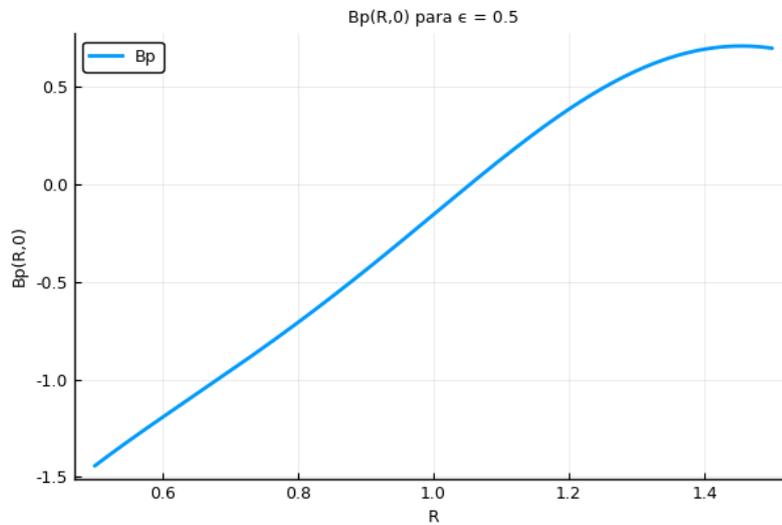
Para este caso se observa una inversión en el signo. Además, de acuerdo a las curvas de nivel, se observa que la frontera se ajusta solo en algunos puntos. Para los campos magnéticos se tiene que:



**Figura 7.18:** Campo magnético toroidal respecto a x ( $y = 0$ ) para  $\epsilon = 0.5$  con frontera rectangular

## 7. RESULTADOS

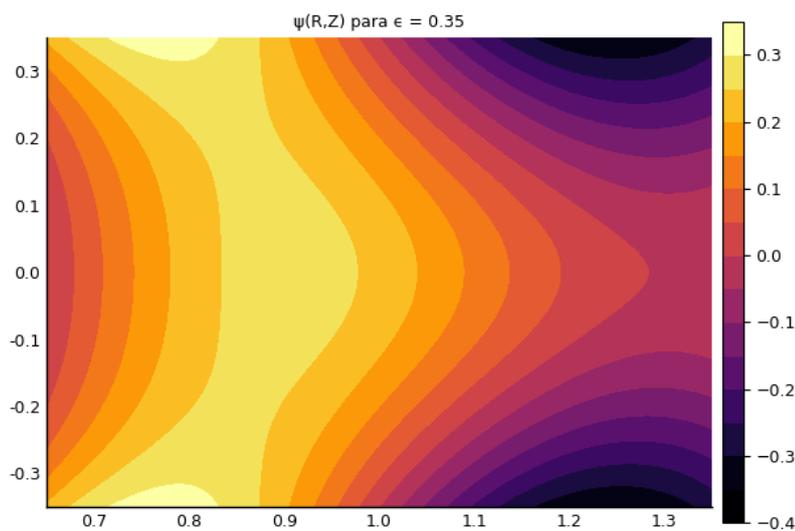
---



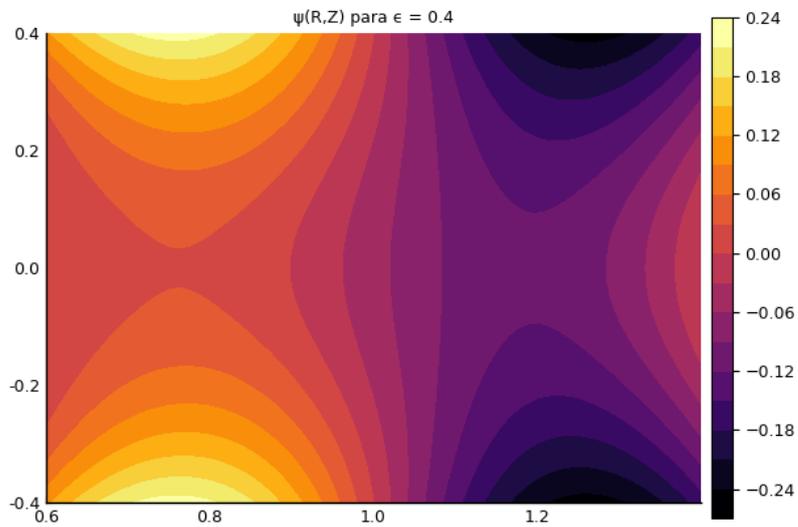
**Figura 7.19:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) para  $\epsilon = 0.5$  con frontera rectangular

La inversión en el signo también se presenta en los campos, aunque las condiciones a la frontera en los extremos se siguen satisfaciendo.

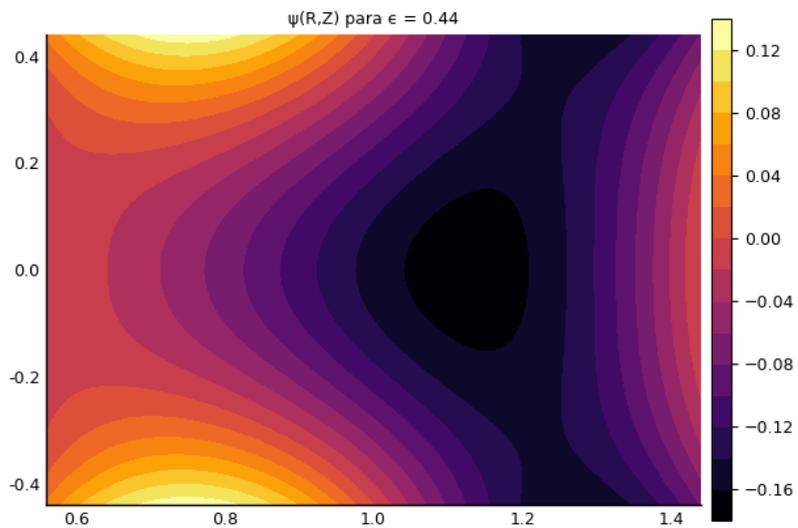
Para saber en que momento se presenta el cambio de signo, se varió poco a poco la razón de aspecto y se fueron obteniendo las gráficas correspondientes. Se observó en las curvas de nivel que el signo de  $\psi$  se invertía poco a poco como un continuo, entre las razones de aspecto  $\epsilon = 0.2928$  y  $\epsilon = 0.4$ , punto en el cual hay aproximadamente la misma cantidad de valores positivos como negativos, para luego converger poco a poco en negativos ( $\epsilon = 0.44$ ) hasta llegar a  $\epsilon = 0.5$ . En las razones de aspecto intermedias las condiciones a la frontera no se satisfacían. También se observó que para  $\epsilon$  más allá de 0.5 las condiciones a la frontera se fueron cumpliendo en cada vez menos puntos.



**Figura 7.20:** Curvas de nivel de  $\psi$  para  $\epsilon = 0.35$  con frontera rectangular



**Figura 7.21:** Curvas de nivel de  $\psi$  para  $\epsilon = 0.4$  con frontera rectangular



**Figura 7.22:** Curvas de nivel de  $\psi$  para  $\epsilon = 0.44$  con frontera rectangular

Una vez estudiado el caso cuadrado, se procedió a estudiar una frontera más compleja. Como se mencionó anteriormente, la frontera circular juega un papel importante en los experimentos de RFP, por lo que a continuación se expondrán los resultados obtenidos para dicha frontera.

## 7.2. Solución al problema con frontera circular

La frontera considerada fue un círculo de radio  $a$  y centro en  $R_0$  (Figura 7.23). En términos de la normalización antes considerada, la circunferencia tiene radio  $\varepsilon$ .

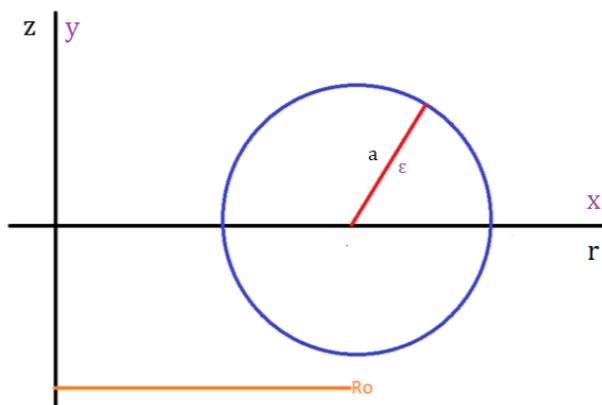


Figura 7.23: Frontera circular

Nuevamente se presenta simetría ecuatorial, entonces se buscan soluciones que sean simétricas respecto del ecuador, por lo que la solución considerada tiene solo los primeros 5 grados de libertad:

$$\psi(x, y, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = \psi_0 + c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + c_3 \psi_3 + c_4 \psi_4 + c_5 \psi_5. \quad (7.33)$$

Como primera aproximación se tomarán los valores de  $k$  y  $\lambda$  obtenidos al resolver el caso cuadrado. Por otra parte, también son necesarias 5 ecuaciones para que el sistema con 5 incógnitas tenga solución. Estas 5 ecuaciones se obtienen de las condiciones a la frontera adaptadas a la forma circular y son las siguientes:

$$\psi(1 + \varepsilon, 0) = 0 \quad (7.34)$$

$$\psi(1 - \varepsilon, 0) = 0 \quad (7.35)$$

$$\psi(1, \varepsilon) = 0 \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(1, \varepsilon) = 0 \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(1, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial y}(1, \varepsilon) = 0 \quad (7.38)$$

Las 3 primeras ecuaciones es la condición original evaluada en los extremos derecho, izquierdo y superior de la circunferencia respectivamente. La cuarta condición permite calcular la pendiente de la recta tangente que pasa por el punto superior. Esta recta es paralela al plano tangente en ese punto que a su vez es paralelo al eje  $x$ . Por último la quinta condición hace

referencia a la curvatura. Al parametrizar la circunferencia de radio  $\varepsilon$  en función de su ángulo, se encuentra que su curvatura es  $\kappa = \pm \frac{1}{\varepsilon}$ , donde el signo varía según el punto a consideración.

Ahora se tiene el sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas  $AC = B$ , donde:

$$A = \begin{bmatrix} \psi_1|_{1+\varepsilon,0} & \psi_2|_{1+\varepsilon,0} & \psi_3|_{1+\varepsilon,0} & \dots & \psi_5|_{1+\varepsilon,0} \\ \psi_1|_{1-\varepsilon,0} & \psi_2|_{1-\varepsilon,0} & \psi_3|_{1-\varepsilon,0} & \dots & \psi_5|_{1-\varepsilon,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \dots|_{1,\varepsilon} & \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \dots|_{1,\varepsilon} & \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \dots|_{1,\varepsilon} & \dots & \frac{\partial^2 \psi_5}{\partial x^2} + \dots|_{1,\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

$$B = \begin{bmatrix} \psi_0|_{1+\varepsilon,0} \\ \psi_0|_{1-\varepsilon,0} \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} + \dots|_{1,\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_5 \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

Por lo que, nuevamente es necesario hacer el producto de matrices:

$$C = A^{-1}B \quad (7.42)$$

En los resultados se consideraron tres razones de aspecto y se obtuvo lo siguiente:

$\varepsilon$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
0.2928	0.45426	0.43681	-0.0334083	0.329412	0.0429488
0.5	0.153885	0.666152	0.650754	0.414763	-0.0955109
0.9	-0.177086	1.65322	0.813421	0.876068	-0.620258

**Tabla 7.4:** Constantes obtenidas para distintas razones de aspecto en el caso circular

Una vez conocidas las constantes, se conoce la solución total y por ende los campos magnéticos toroidal y poloidal.

Al obtener los primeros resultados se observó que las condiciones a la frontera no se cumplían. Un análisis posterior reveló que esto se debió a que se utilizaron los valores de  $\lambda$  y  $k$  obtenidos del caso cuadrado. Para encontrar los valores que se ajusten a la frontera se utilizó un método variacional. Este consiste en tomar el valor conocido de  $k$  y sumarle una pequeña

## 7. RESULTADOS

---

variación  $k_p$ , obteniendo un nuevo valor  $k' = k + k_p$ . Al evaluar este resultado, también se obtiene un nuevo valor de  $\lambda$ , nuevas constantes  $c_1, \dots, c_5$  y nueva  $\psi(x, y)$ .

### 7.3. Aproximación a la solución al modificar $k$

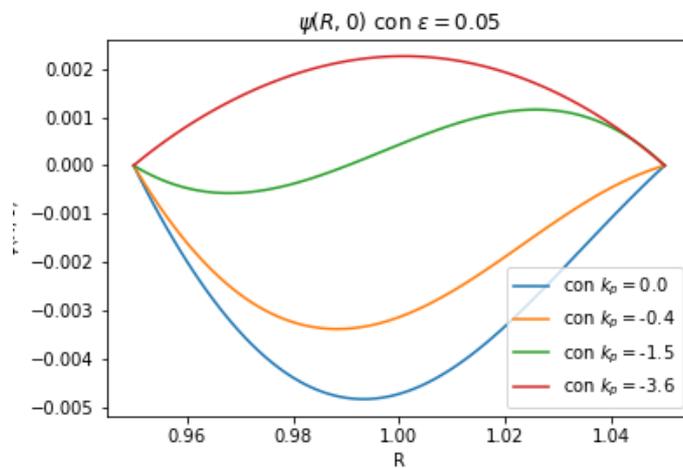
El objetivo es encontrar el valor de  $k_p$  adecuado para el cual las condiciones a la frontera se cumplen.

Por otro lado, se expuso en capítulos anteriores el caso cilíndrico. Los resultados toroidales deben de coincidir con los cilíndricos en el límite de razón de aspecto muy grande. Por esta razón primero se expondrán los resultados al utilizar un inverso de razón de aspecto de  $\varepsilon = 0.05$  y se compararán con los del caso cilíndrico.

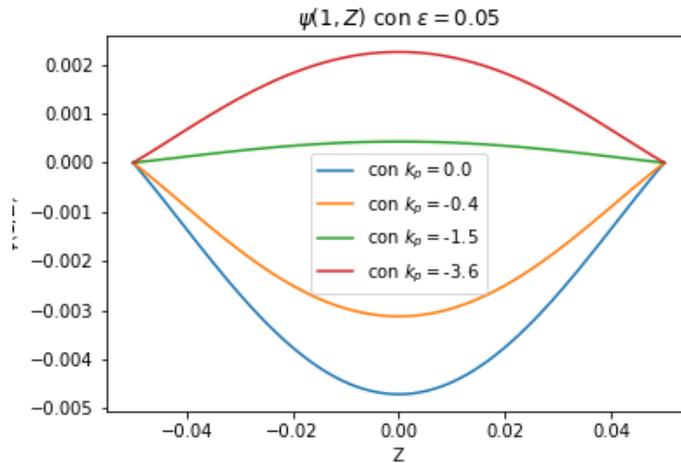
A continuación se muestran los resultados obtenidos.

#### 7.3.1. Resultados para $\varepsilon = 0.05$

A continuación se presentan las gráficas de  $\psi$ , para  $y = 0$  en función de  $x$  y para  $x = 1$  en función de  $y$ . En las gráficas se observan distintos valores de  $k_p$ .

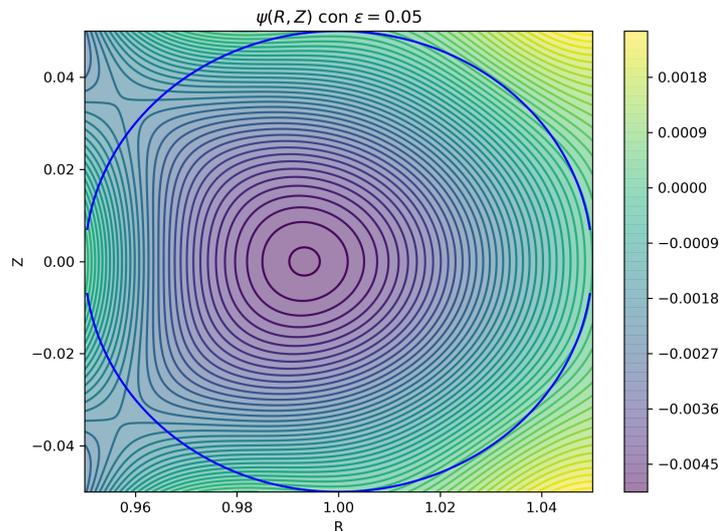


**Figura 7.24:** Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.05$



**Figura 7.25:** Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.05$

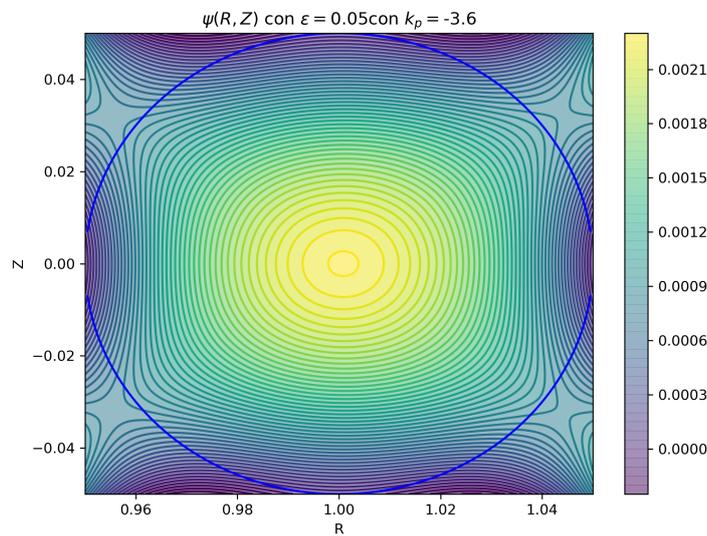
En estas imágenes se observa que las condiciones a la frontera en los extremos se cumplen para todos los casos. El comportamiento en el centro es difícil predecir debido a que  $\psi$  es suma de funciones de Bessel, sin embargo, con las curvas de nivel se observará mejor que valor de  $k_p$  es el adecuado. Estas curvas se obtuvieron mientras se variaba poco a poco el valor de  $k_p$ . A continuación se presentan los resultados con  $k$  sin modificar y las curvas cuyo valor de  $k_p$  se ajustó de mejor manera.



**Figura 7.26:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $k_p = 0$  para  $\varepsilon = 0.05$

## 7. RESULTADOS

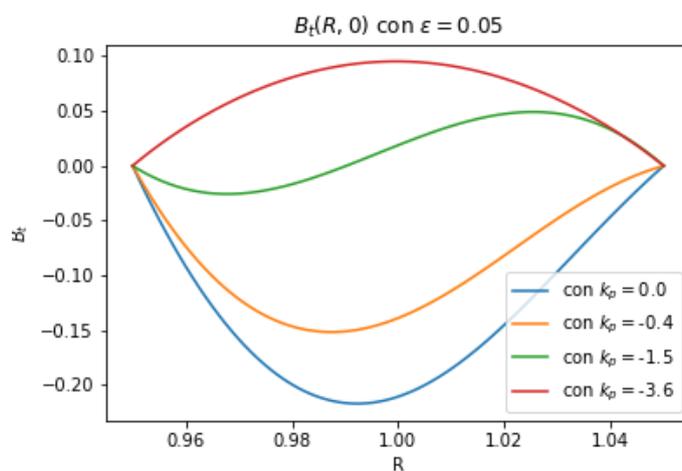
---



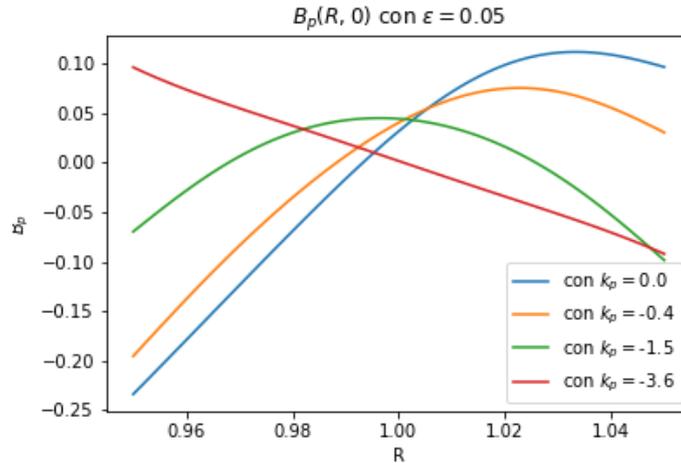
**Figura 7.27:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $k_p = -3.6$  para  $\varepsilon = 0.05$

En los resultados sin modificar  $k$  se observa que el eje magnético está un poco desplazado hacia la izquierda, además de que las superficies están un poco ovaladas y en la frontera se pierde casi toda la forma circular. Agregando la variación  $k_p = -3.6$  el eje magnético se desplaza al centro, tal y como es de esperarse, sin embargo los valores cercanos a la frontera no se ajustan de manera óptima.

Ahora se presentan las gráficas de los campos magnéticos toroidal y poloidal para distintos valores de  $k_p$ :



**Figura 7.28:** Campo magnético toroidal respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.05$



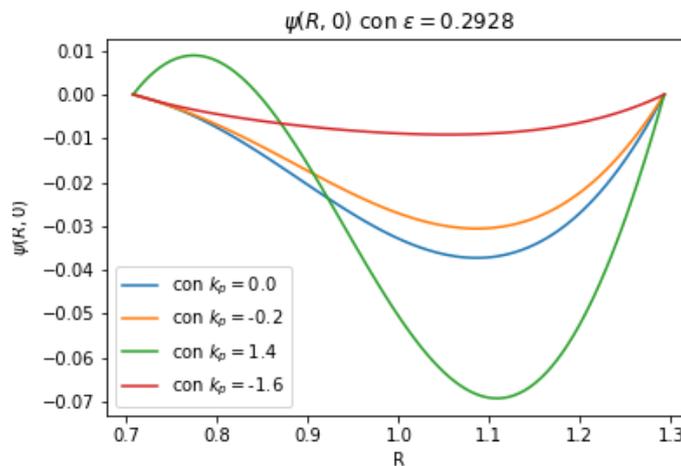
**Figura 7.29:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $k_p$  para  $\epsilon = 0.05$

Con estos resultados se verifica que el valor de  $k_p$  es el más cercano a lo esperado, pues el campo toroidal con este valor es el único que se parece a un campo toroidal de un RFP en el caso cilíndrico (Similar a  $J_1$ ). Aunado a esto, el campo poloidal con  $k_p = -3.6$  es el único que tiene la forma esperada de un RFP cilíndrico (Similar a  $J_0$ ). Se concluye que  $k_p = -3.6$  es la aproximación más cercana encontrada hasta ahora.

Ahora se procederá a analizar la siguiente razón de aspecto.

### 7.3.2. Resultados para $\epsilon = 0.2928$

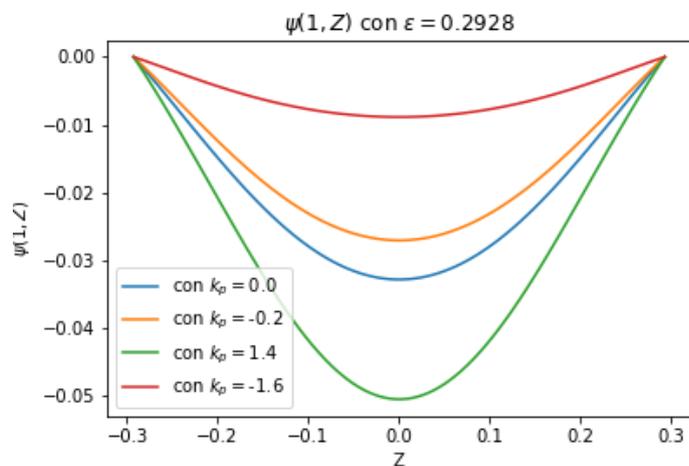
Para este caso se utilizaron nuevos valores de  $k_p$ . A continuación se presentan las gráficas del flujo  $\psi$  con algunas curvas de nivel



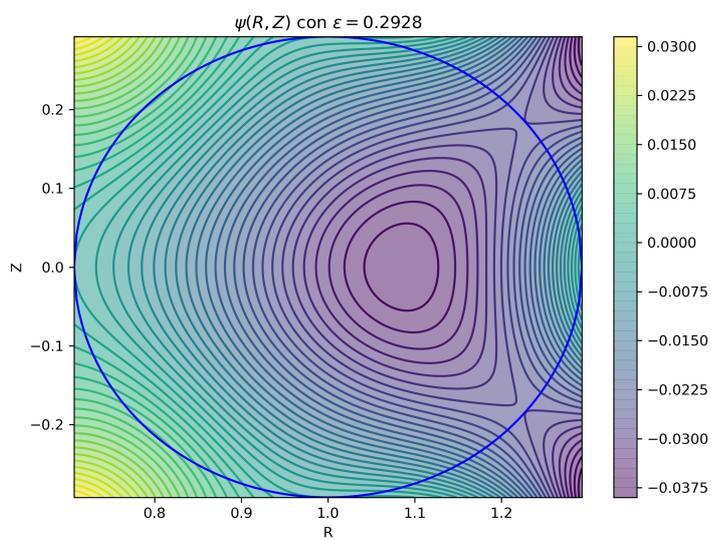
**Figura 7.30:** Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $k_p$  para  $\epsilon = 0.2928$

## 7. RESULTADOS

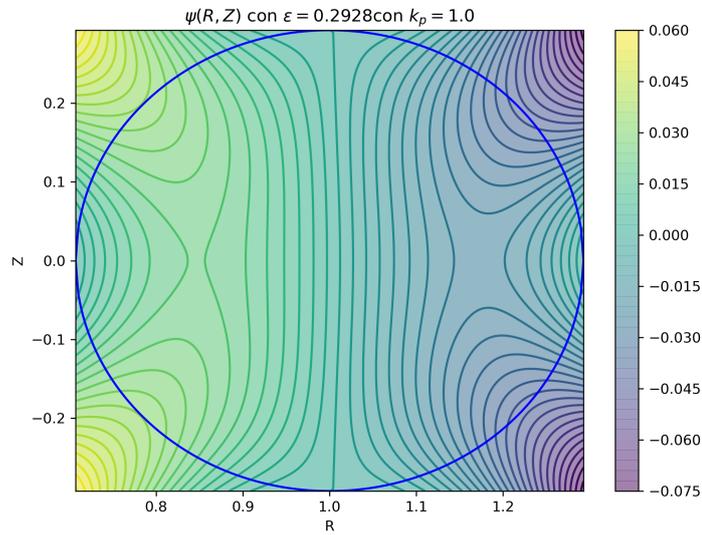
---



**Figura 7.31:** Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.2928$

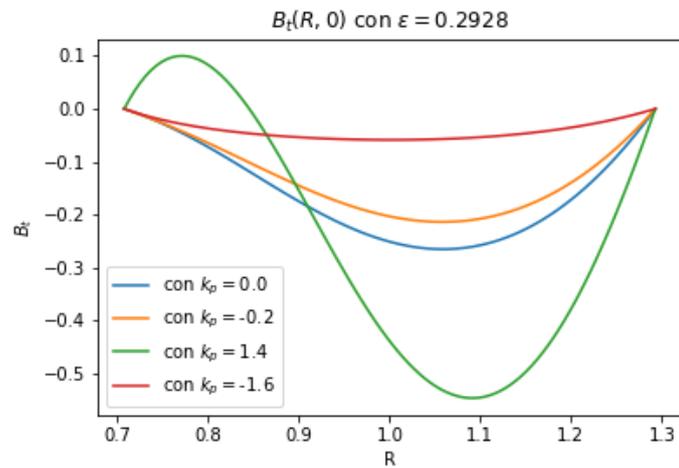


**Figura 7.32:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $k_p = 0$  para  $\varepsilon = 0.2928$

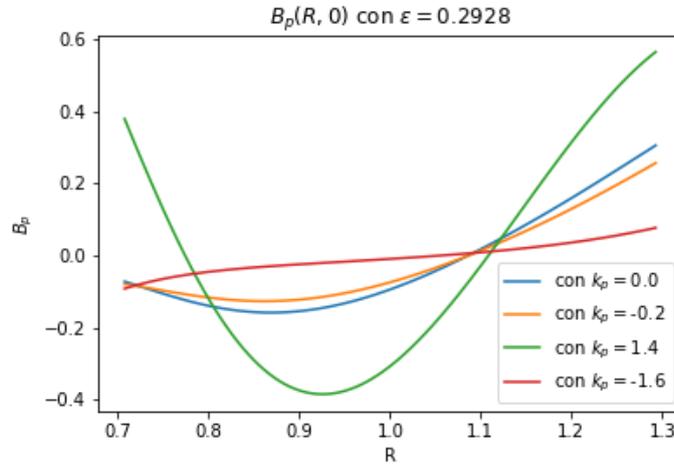


**Figura 7.33:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $k_p = 1.0$  para  $\varepsilon = 0.2928$

De estos resultados se observa que ninguno de los valores de  $k_p$  hace que la solución se ajuste a lo esperado. Esto se corrobora con los campos magnéticos presentados a continuación



**Figura 7.34:** Campo magnético toroidal respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.2928$

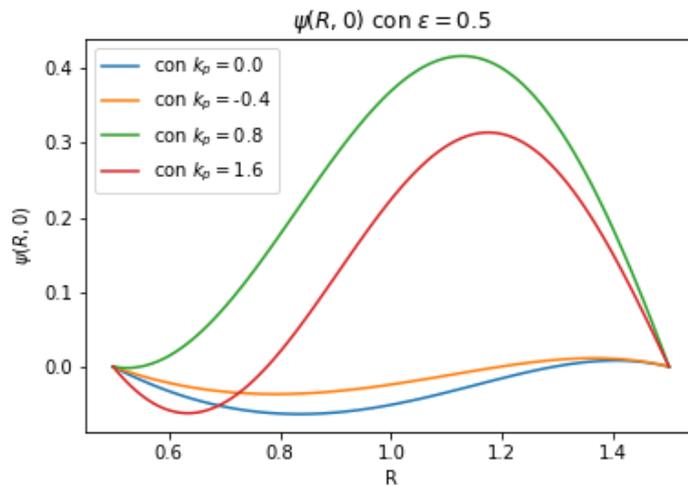


**Figura 7.35:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.2928$

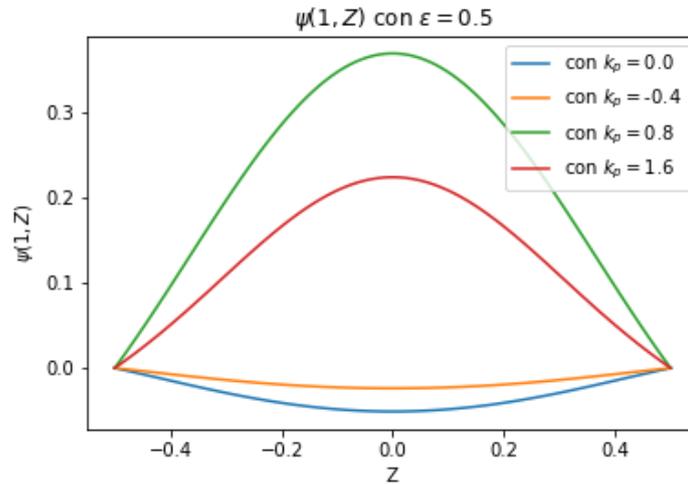
donde ninguno de los campos presenta un comportamiento similar al de los campos de un RFP, por lo que se descartan los valores de  $k_p$  empleados en esta razón de aspecto. Ahora se procederá a la razón de aspecto  $\varepsilon = 0.5$

### 7.3.3. Resultados para $\varepsilon = 0.5$

Al igual que en los casos anteriores se comenzará analizando el flujo magnético, recordando que se emplearon nuevos valores de  $k_p$ .



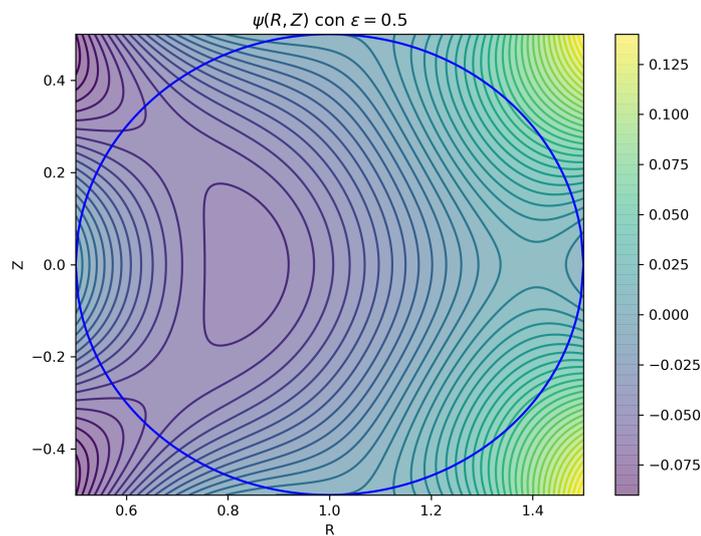
**Figura 7.36:** Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.5$



**Figura 7.37:** Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.5$

De acuerdo a estas gráficas, se observa que el valor de  $k_p = 0.8$  es la mejor aproximación que se logró.

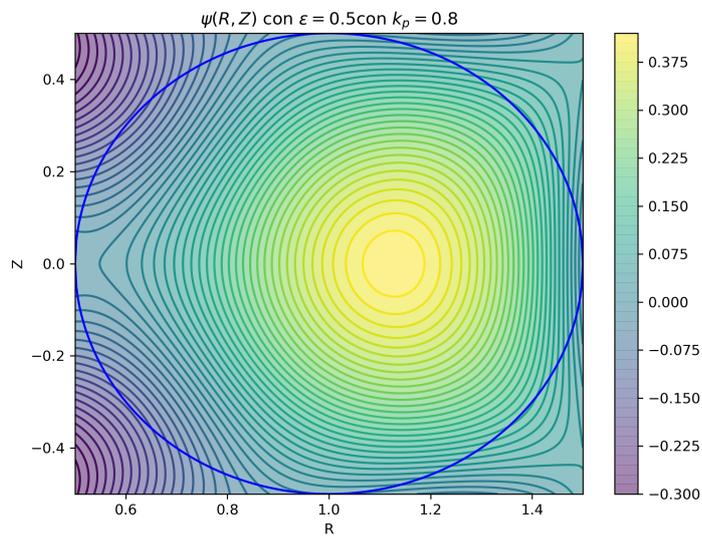
Cabe notar que debido a la toroidicidad se observa un Corrimiento de Shafranov. Esto se visualiza mejor con las curvas de nivel presentadas a continuación



**Figura 7.38:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $k_p = 0$  para  $\varepsilon = 0.5$

## 7. RESULTADOS

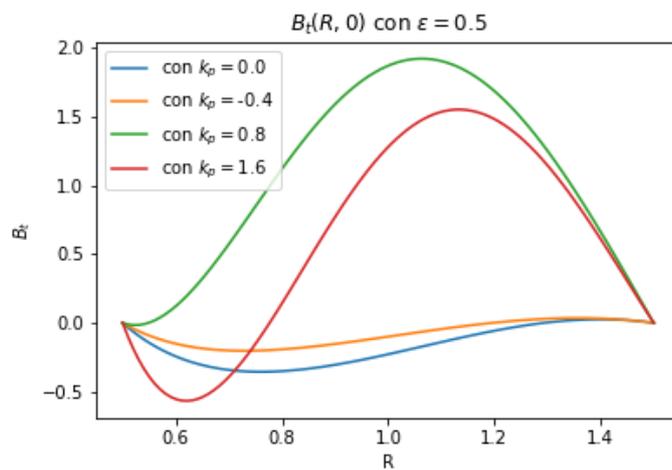
---



**Figura 7.39:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $k_p = 0.8$  para  $\varepsilon = 0.5$

donde se observa que usando  $k_p = 0.8$  se obtiene un resultado bastante congruente en el centro de la curvas, pero no así cerca de la frontera.

Para finalizar esta razón de aspecto se muestran a continuación los campos magnéticos, donde también se observa que el valor  $k_p = 0.8$  es el que mejor se ajusta a los campos de un RFP.



**Figura 7.40:** Campo magnético toroidal respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.5$

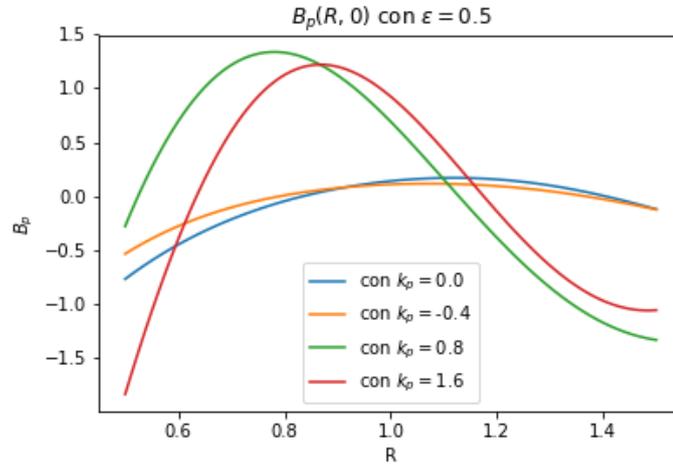


Figura 7.41: Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.5$

#### 7.3.4. Resultados para $\varepsilon = 0.9$

La última razón de aspecto considerada fue  $\varepsilon = 0.9$ . El flujo magnético es presentado en las siguientes gráficas considerando distintos valores de  $k_p$

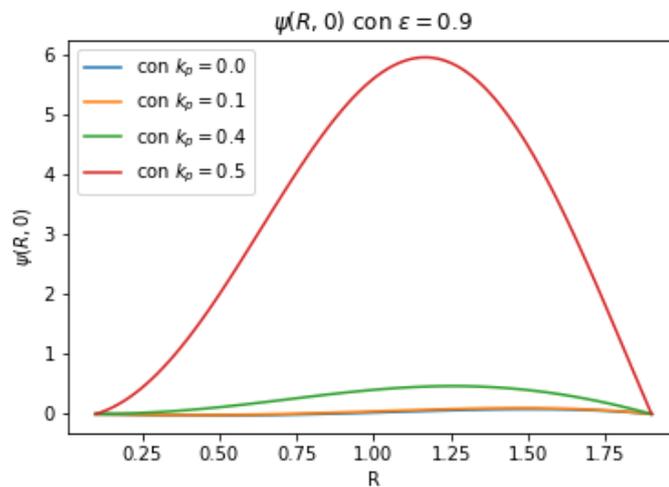
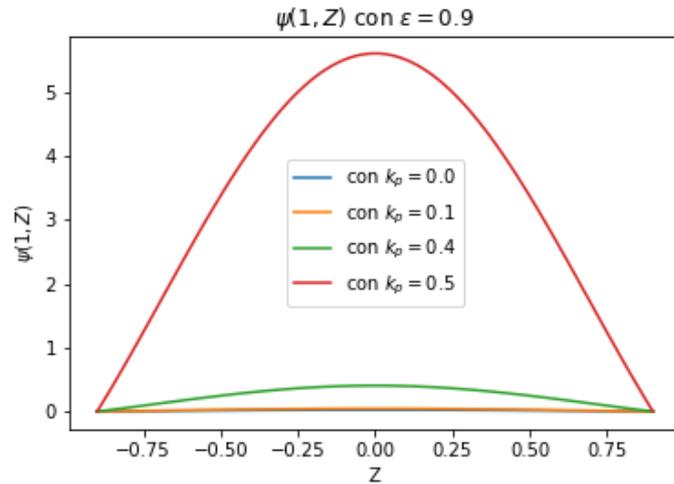


Figura 7.42: Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.9$

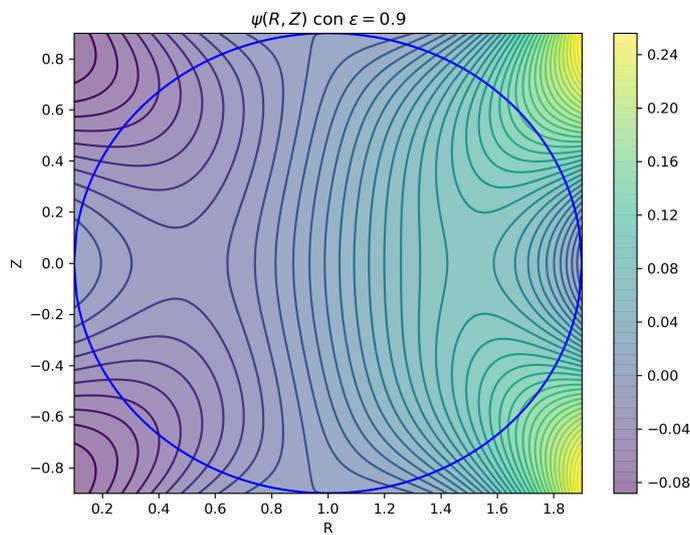
## 7. RESULTADOS

---

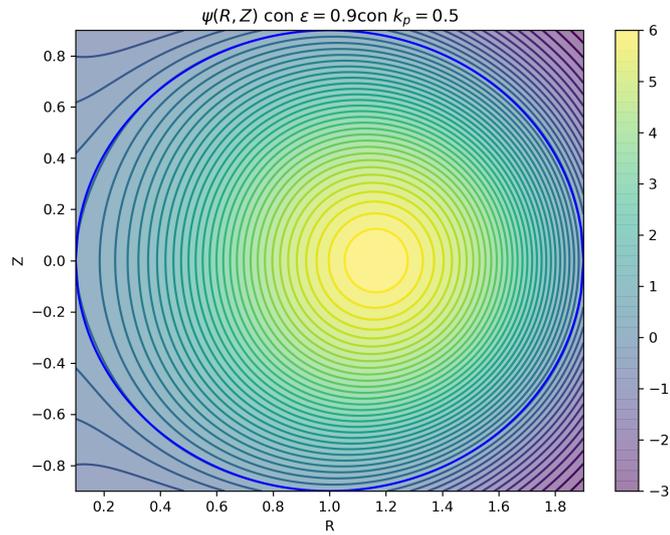


**Figura 7.43:** Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $k_p$  para  $\epsilon = 0.9$

Se observan en estos resultados que pequeñas variaciones en  $k_p$  se traducen en grandes cambios en el flujo magnético. El valor  $k_p = 0.5$  es la mejor aproximación encontrada en este caso, esto se visualiza mejor con las curvas de nivel presentadas a continuación

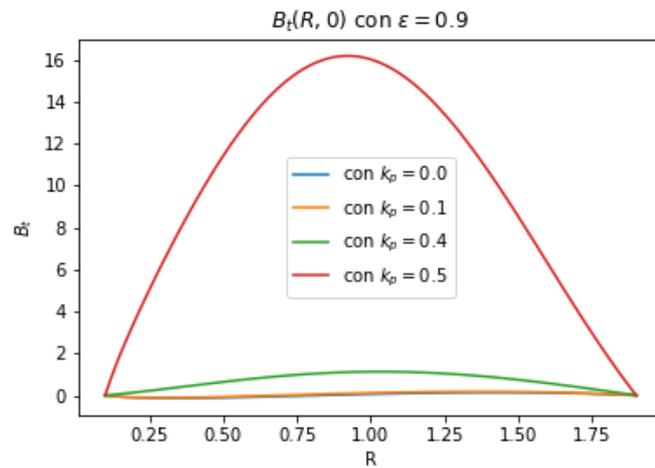


**Figura 7.44:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $k_p = 0$  para  $\epsilon = 0.9$

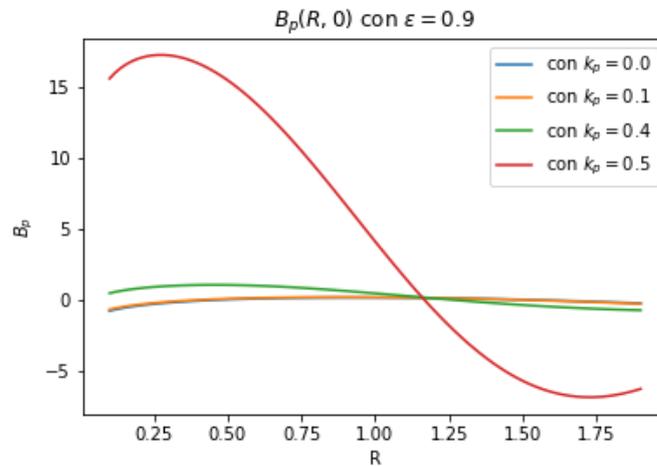


**Figura 7.45:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $k_p = 0.5$  para  $\varepsilon = 0.9$

Donde se observa que las condiciones a la frontera se satisfacen de manera muy precisa. Finalmente, se presentan los campos magnéticos para este caso



**Figura 7.46:** Campo magnético toroidal respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.9$



**Figura 7.47:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $k_p$  para  $\varepsilon = 0.9$

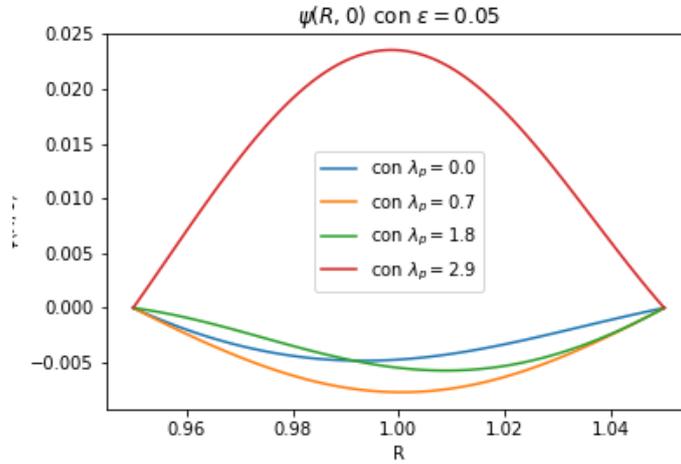
Se probaron numerosos valores de  $k_p$  y aunque hubo mejoría en los resultados, ningún valor (salvo en el caso de  $\varepsilon = 0.9$ ) satisficó enteramente las condiciones a la frontera.

Por esta razón se siguió otra alternativa, la cual es modificar  $\lambda$  directamente, es decir, proponer una variación  $\lambda_p$  de tal manera que el nuevo valor de  $\lambda$  sea:  $\lambda' = \lambda + \lambda_p$ . Esto a su vez genera una nueva solución  $\psi$  que se espera sea la solución adecuada al problema. Al igual que en el caso de  $k_p$ , se varió  $\lambda_p$  para distintas razones de aspecto.

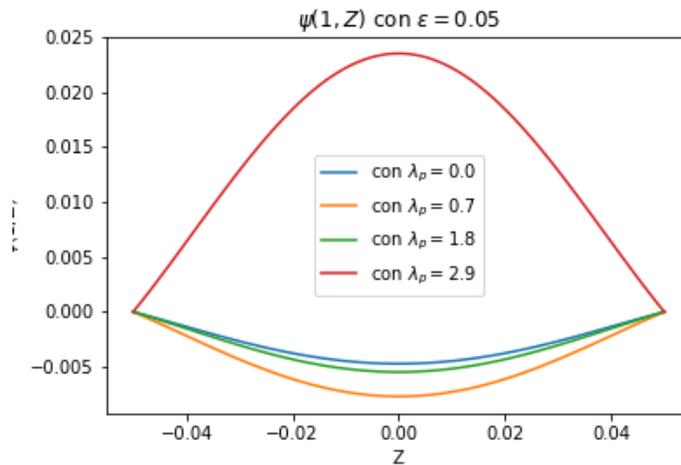
## 7.4. Aproximación a la solución al modificar $\lambda$

### 7.4.1. Resultados para $\varepsilon = 0.05$

Primero se presentan las gráficas del flujo  $\psi$  y se compara con el valor de  $\lambda_p$  que mejor ajustó las condiciones a la frontera:



**Figura 7.48:** Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.05$

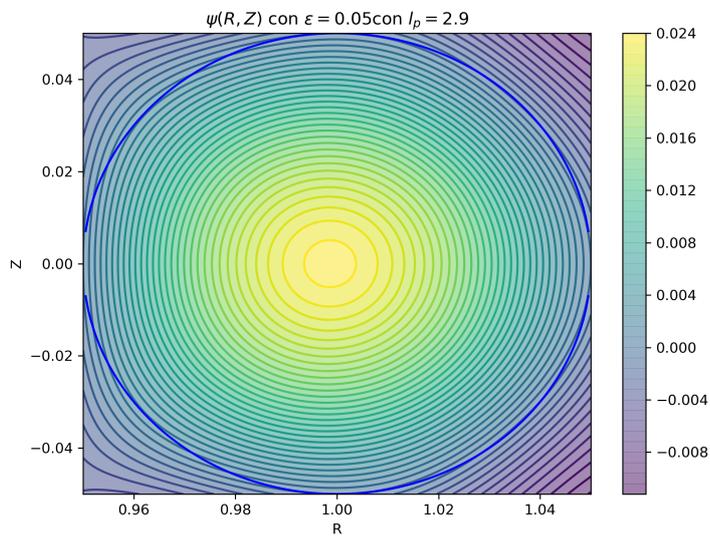


**Figura 7.49:** Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.05$

de donde se observa que el valor  $\lambda_p = 2.9$  es la mejor aproximación. Para confirmar esto ahora se presenta la curva de nivel correspondiente

## 7. RESULTADOS

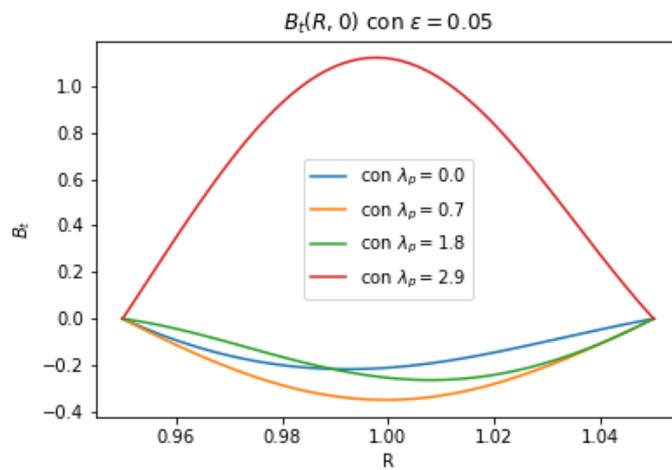
---



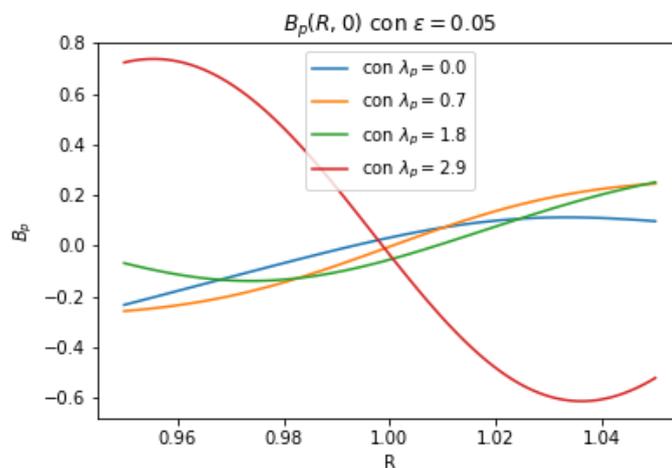
**Figura 7.50:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $\lambda_p = 2.9$  para  $\varepsilon = 0.05$

En este caso no se presenta corrimiento de Shafranov debido a que se trata de un caso sin curvatura por toroidicidad (caso cilíndrico). También se observa que las condiciones se satisfacen en la mayor parte de la frontera.

Para los campos magnéticos se tienen los siguientes comportamientos

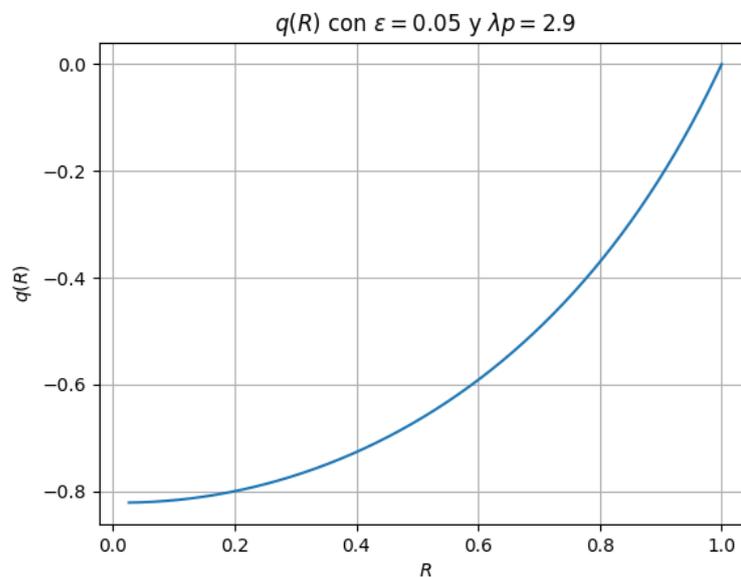


**Figura 7.51:** Campo magnético toroidal respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.05$



**Figura 7.52:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\epsilon = 0.05$

Tanto en el campo toroidal como para el poloidal, si  $\lambda_p = 2.9$ , se tiene un ajuste de acuerdo a lo que se esperaría en un caso cilíndrico. Debido a esto también se graficó el factor de seguridad para este caso, obteniéndose:



**Figura 7.53:** Factor de seguridad  $q$  para  $\epsilon = 0.05$  con frontera circular

Ahora se continuará con la siguiente razón de aspecto, para la cual se utilizaron nuevos valores de  $\lambda_p$

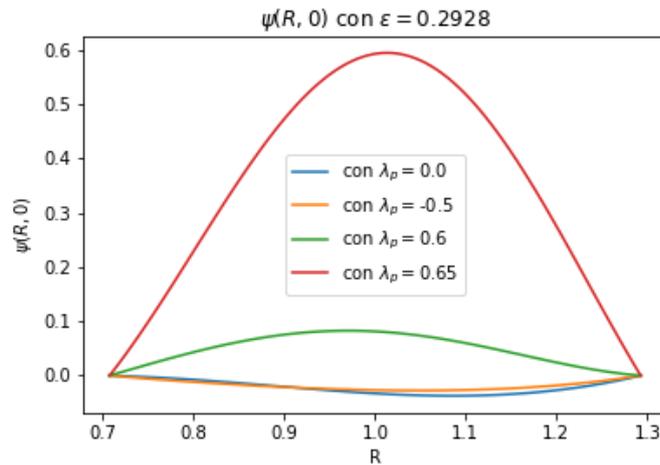
7.4.2. Resultados para  $\varepsilon = 0.2928$ 

Figura 7.54: Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.2928$

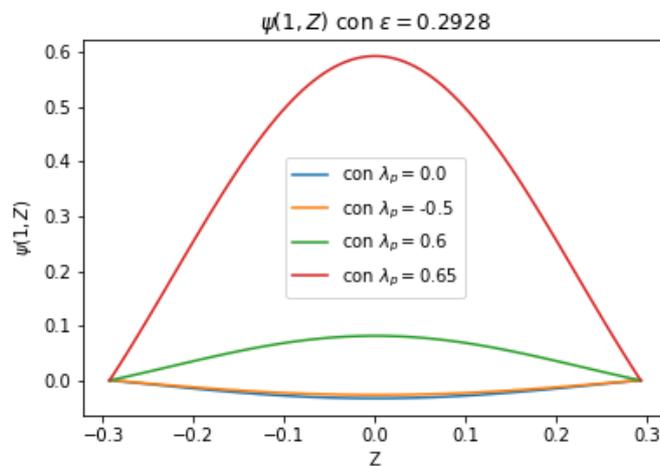
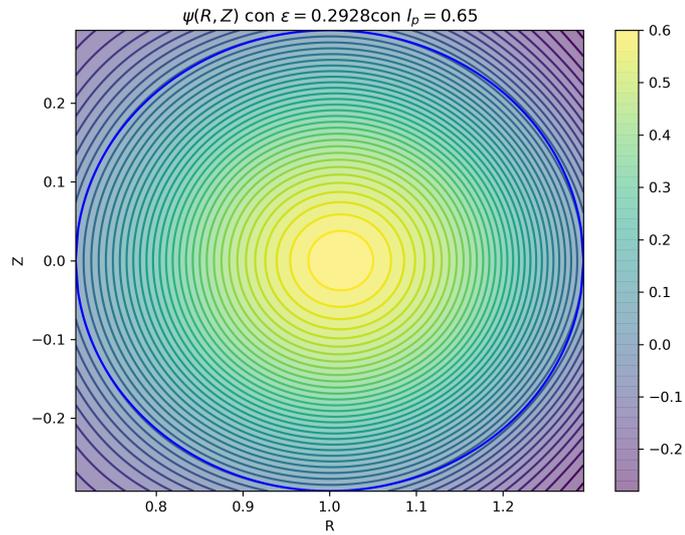


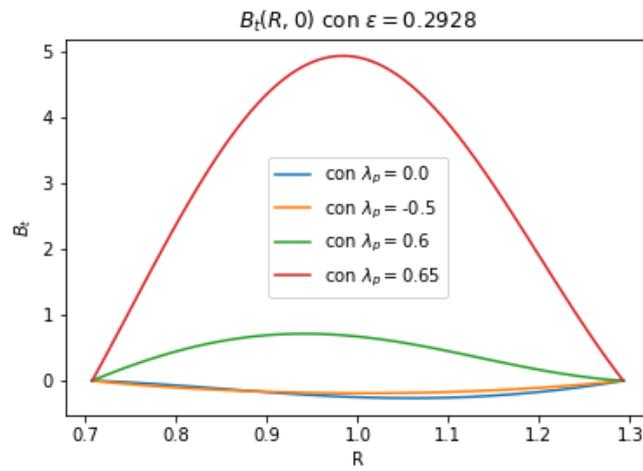
Figura 7.55: Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.2928$

De las curvas de  $\psi$  se observa que al usar  $\lambda_p = 0.65$  se obtienen los mejores resultados. En las curvas de nivel mostradas a continuación se observa un ajuste muy bueno con este valor de  $\lambda_p$ , además de un corrimiento de Shafranov pequeño.



**Figura 7.56:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $\lambda_p = 0.65$  para  $\varepsilon = 0.2928$

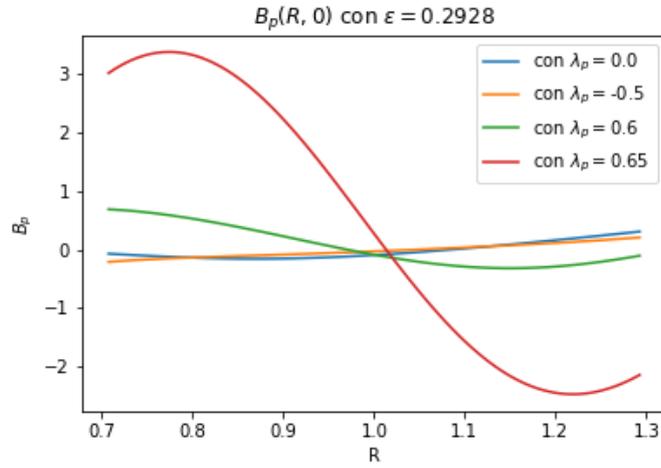
Para concluir esta razón de aspecto se presentan los campos magnéticos y el factor de seguridad



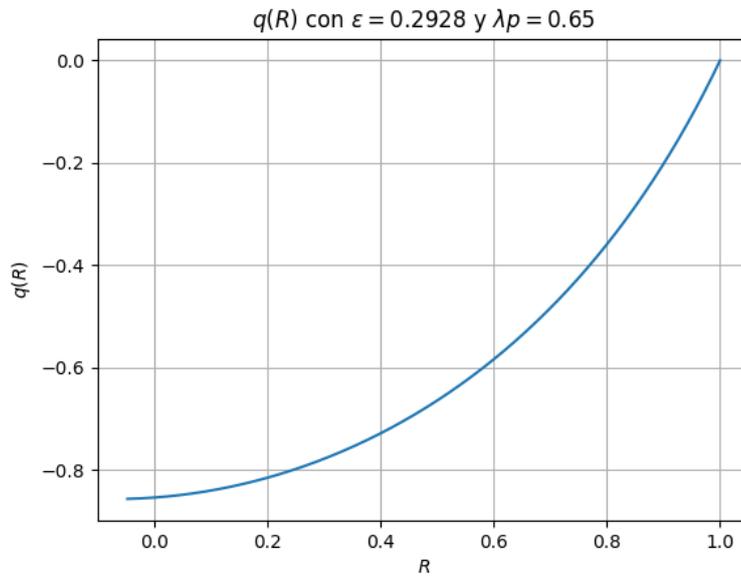
**Figura 7.57:** Campo magnético toroidal respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.2928$

## 7. RESULTADOS

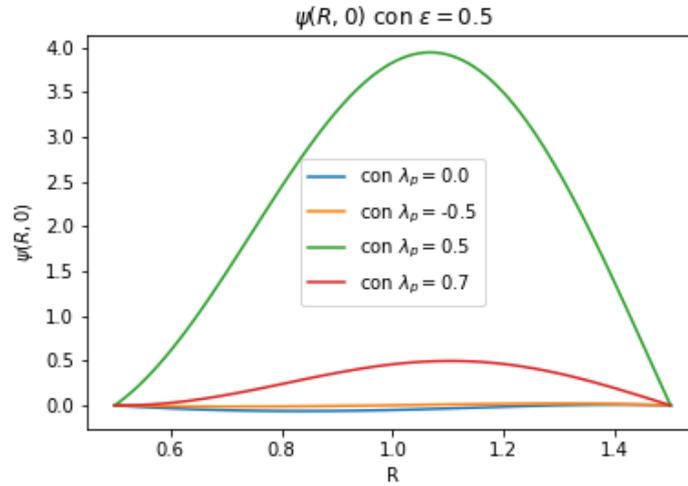
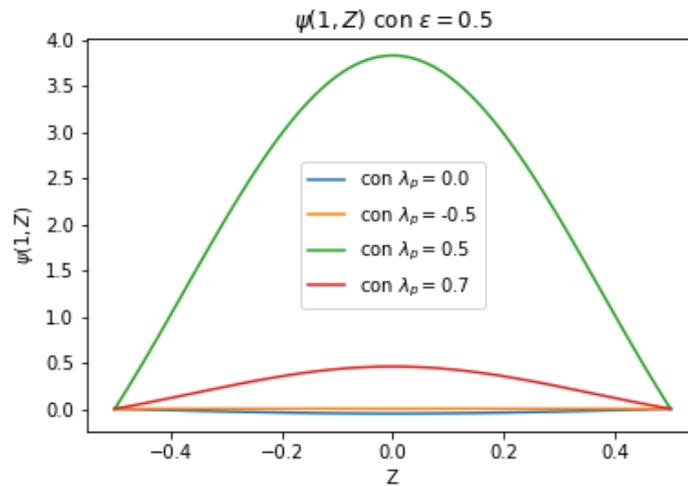
---



**Figura 7.58:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.2928$

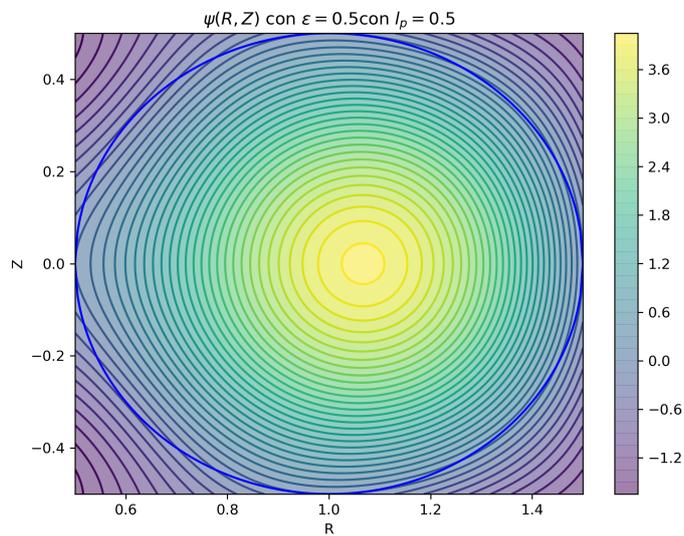


**Figura 7.59:** Factor de seguridad  $q$  para  $\varepsilon = 0.2928$  con frontera circular

7.4.3. Resultados para  $\varepsilon = 0.5$ Figura 7.60: Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.5$ Figura 7.61: Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.5$

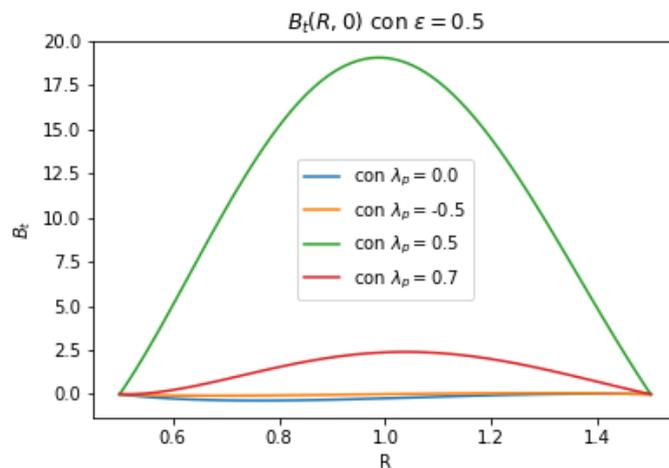
## 7. RESULTADOS

---

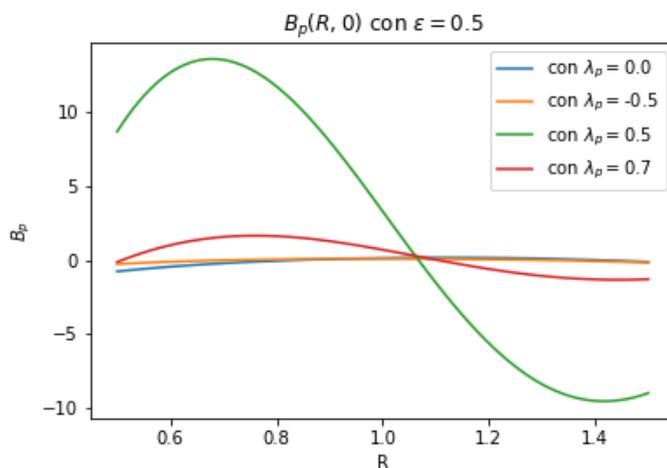


**Figura 7.62:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $\lambda_p = 0.5$  para  $\varepsilon = 0.5$

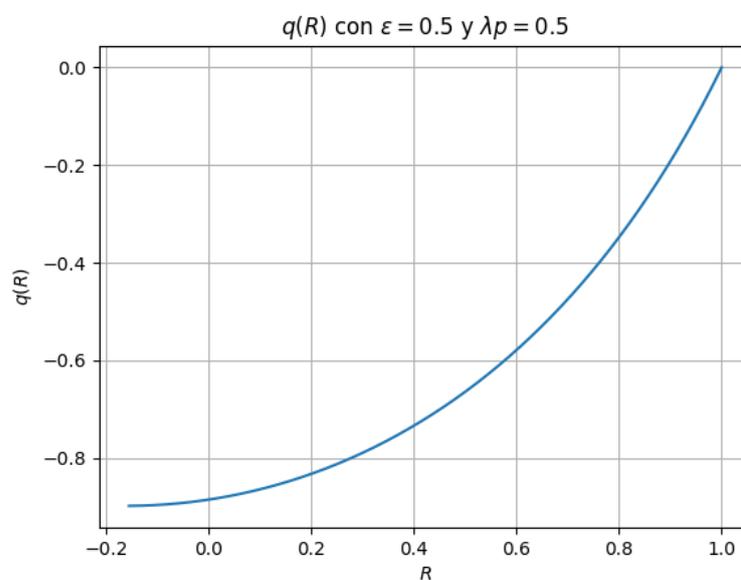
Para esta razón de aspecto el valor  $\lambda_p = 0.5$  fue el que mejor ajustaba los resultados. El comportamiento es muy similar al de la razón de aspecto  $\varepsilon = 0.2928$  ya ajustada. Esto junto con el hecho de que el corrimiento de Shafranov es un poco mayor que el caso anterior indica que se tiene un resultado de acuerdo a lo esperado. Por otra parte los campos magnéticos y el factor de seguridad, presentados a continuación, también se comportan de acuerdo a lo esperado.



**Figura 7.63:** Campo magnético toroidal respecto a x ( $y = 0$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.5$



**Figura 7.64:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.5$



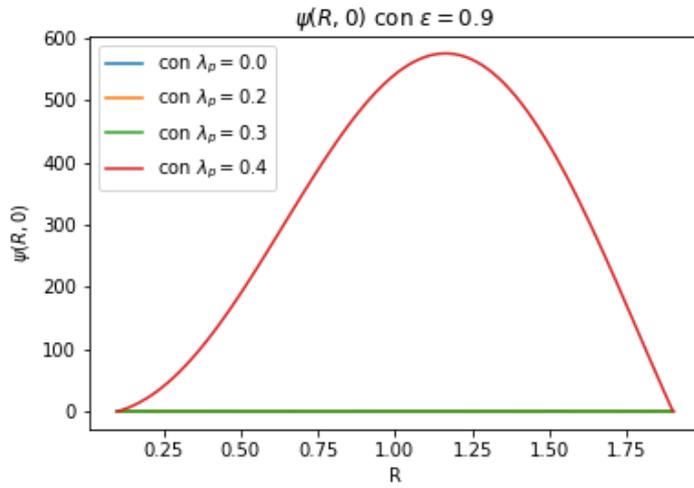
**Figura 7.65:** Factor de seguridad  $q$  para  $\varepsilon = 0.5$  con frontera circular

#### 7.4.4. Resultados para $\varepsilon = 0.9$

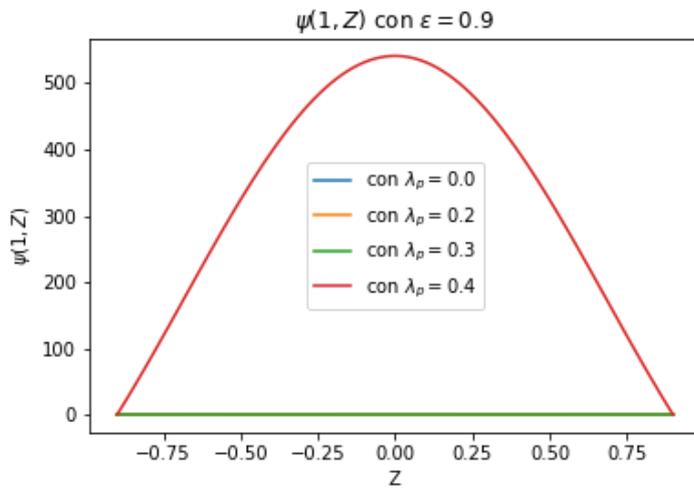
Los resultados de modificar  $\lambda$  para la última razón de aspecto son presentados a continuación, empezando por el flujo  $\psi$ .

## 7. RESULTADOS

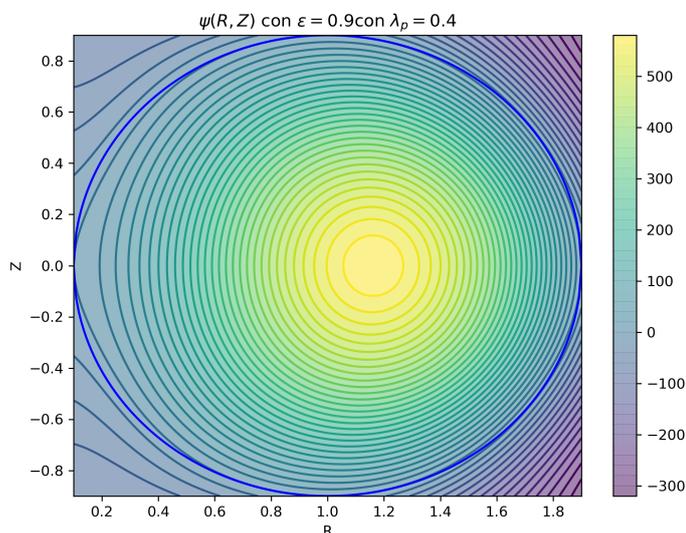
---



**Figura 7.66:** Variación de  $\psi$  respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.9$

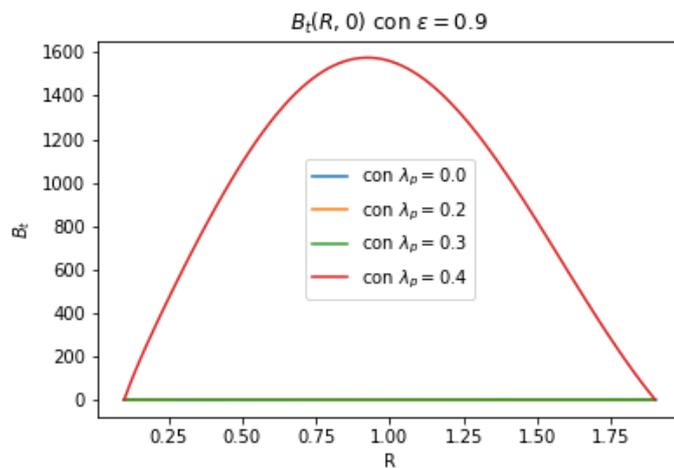


**Figura 7.67:** Variación de  $\psi$  respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.9$



**Figura 7.68:** Curvas de nivel de  $\psi$  con  $\lambda_p = 0.4$  para  $\varepsilon = 0.9$

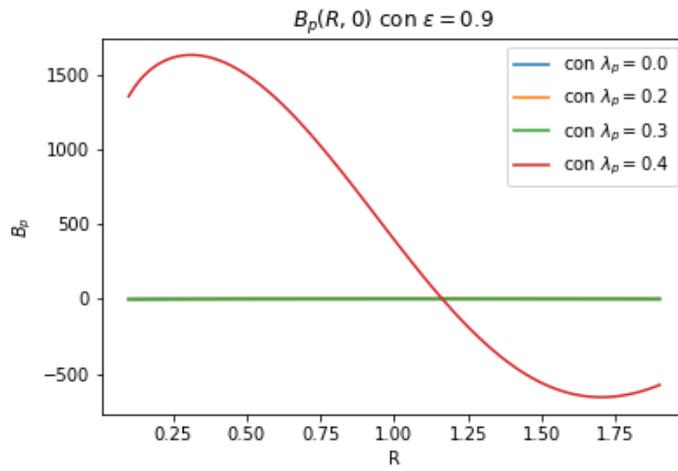
Se observa que  $\lambda_p = 0.4$  presenta el mejor ajuste. También cabe resaltar que para este caso hubo una variación muy grande en  $\psi$  al pasar de  $\lambda_p = 0.3$  a  $\lambda_p = 0.4$  algo que no se presentó en casos anteriores. Finalmente, los campos magnéticos y el factor de seguridad presentaron el siguiente comportamiento.



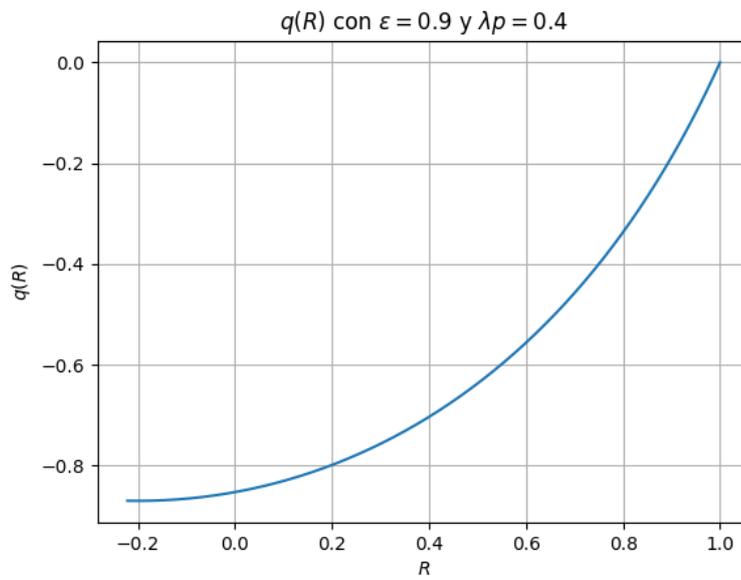
**Figura 7.69:** Campo magnético toroidal respecto a  $x$  ( $y = 0$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.9$

## 7. RESULTADOS

---



**Figura 7.70:** Campo magnético poloidal respecto a  $y$  ( $x = 1$ ) con distintas  $\lambda_p$  para  $\varepsilon = 0.9$



**Figura 7.71:** Factor de seguridad  $q$  para  $\varepsilon = 0.9$  con frontera circular

## Conclusiones

---

Se hizo una exploración en el capítulo 7 de las propiedades de las soluciones obtenidas en el capítulo 6, haciendo notar una serie de resultados interesantes.

Primero, se observó que para cualquiera que sea la frontera, es necesario hacer un ajuste a la frontera tomando un número de términos igual a un número de condiciones impuestas sobre puntos específicos de esta, pues como se observó en el caso rectangular, una simple separación de variables no es suficiente. En parte el problema se reduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones simultáneas. Sin embargo, quedan los parámetros  $\lambda$  y  $k$ , que entran en el argumento de las funciones de Bessel de primer orden y deben ser ajustados por separado.

Se encontró que esta forma de ajustar las condiciones a la frontera es muy limitada. Existen casos en los que, aunque se satisfagan las condiciones impuestas, las soluciones obtenidas no dan lugar a superficies cerradas de campo magnético. Una alternativa que se puede seguir es tratar a  $\lambda$  y  $k$  como incógnitas y resolver directamente el problema no lineal [1].

Del caso cuadrado se observa que, al obtener los valores de  $\lambda$  a partir solo de  $J_1$ , las razones de aspecto cercanas a  $\varepsilon = 0.2928$  tiene comportamientos favorables. Al ir disminuyendo la razón de aspecto, se observa una inversión en el signo tanto de  $\psi$  como de los campos, resultado que queda pendiente de entender.

Para razones de aspecto muy pequeñas, como es el caso de  $\varepsilon = 0.9$ , no fue posible encontrar soluciones con campo magnético cerrado. Esto probablemente se debe a que en estos casos, no es suficiente tomar una sección transversal cuadrada y es necesario incluir fronteras con curvatura.

Una alternativa para solucionar este problema, es seguir el proceso empleado para el caso circular y variar poco a poco tanto  $k$  como  $\lambda$ . En vista de que ningún experimento en la actualidad presenta un plasma con frontera rectangular no se profundizó más en el tema, sin embargo puede resultar un buen ejercicio ver qué sucede en dichos casos.

Del caso circular, se observa que de acuerdo al procedimiento seguido, las condiciones a la frontera se ajustan mejor al variar  $\lambda$  en vez de  $k$ , salvo el caso de  $\varepsilon = 0.9$ , donde ambos ajustes son buenos. Debido a que  $k$  fue determinada al resolver la ecuación en  $y$  la cual, debido a la simetría, siempre tiene forma de coseno, era de esperarse que el valor de  $\lambda$  (que depende directamente si se considera  $J_1, Y_1$  o ambas) fuera el que cambiara más.

Como trabajo a futuro con base en los resultados obtenidos, se puede calcular tanto la energía

## 8. CONCLUSIONES

---

de campo magnético como la helicidad magnética para cada razón de aspecto, y así deducir qué configuraciones geométricas presentan estados de Taylor más eficientes.

## Solución a la ecuación radial

---

En este apéndice se muestran los cálculos hechos para resolver la parte radial de la ecuación de Grad-Shafranov para campo libre de fuerzas.

Se tiene que la solución propuesta a la ecuación radial es:

$$G(x) = xB_1(ax). \quad (\text{A.1})$$

Derivando esta ecuación se obtiene:

$$G'(x) = xB_1'(ax) + B_1(ax). \quad (\text{A.2})$$

Utilizando la ecuación 6.48 se obtiene:

$$B_1'(ax) = \frac{a}{2} [B_0(ax) \mp B_2(ax)], \quad (\text{A.3})$$

pero  $B_2(ax)$  es, por la ecuación 6.47:

$$B_2(ax) = \frac{2}{ax} B_1(ax) - B_0(ax), \quad (\text{A.4})$$

por lo que al sustituir en la ecuación A.3 se obtiene:

$$B_1'(ax) = \frac{a}{2} \left[ B_0(ax) \mp \frac{2}{ax} B_1(ax) \pm B_0(ax) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Para el primer signo se tiene que:

$$B_1'(ax) = \frac{a}{2} \left[ B_0(ax) - \frac{2}{ax} B_1(ax) + B_0(ax) \right] = aB_0(ax) - \frac{1}{x} B_1(ax), \quad (\text{A.6})$$

y por lo tanto:

$$G'(x) = x \left[ aB_0(ax) - \frac{1}{x} B_1(ax) \right] + B_1(ax) = axB_0(ax). \quad (\text{A.7})$$

Por otra parte, para el segundo signo se tiene:

## A. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN RADIAL

---

$$B_1'(ax) = \frac{a}{2} \left[ B_0(ax) + \frac{2}{ax} B_1(ax) - B_0(ax) \right] = \frac{1}{x} B_1(ax), \quad (\text{A.8})$$

y por lo tanto:

$$G'(x) = x \left( \frac{1}{x} B_1(ax) \right) + B_1(ax) = 2B_1(ax). \quad (\text{A.9})$$

Por lo que bastaría demostrar que  $2B_1(ax) = axB_0(ax)$  para el segundo signo. En efecto, se tiene que:

$$B_0(ax) = -\frac{2}{ax} B_1(ax) + \frac{2}{ax} B_1(ax) + B_0(ax) = \frac{2}{ax} B_{-1}(ax) - B_{-2}(ax) = \frac{2}{ax} B_1(ax), \quad (\text{A.10})$$

donde se usaron las ecuaciones 6.49 y 6.47.

Ahora, calculando la segunda derivada se tiene que:

$$G''(x) = axB_0'(ax) + aB_0(ax) = \frac{a^2x}{2} [B_{-1}(ax) \mp B_1(ax)] + aB_0(ax). \quad (\text{A.11})$$

donde se usó la ecuación 6.48. Finalmente como  $B_{-1}(ax) = \mp B_1(ax)$  se llega a:

$$G''(x) = aB_0(ax) \mp a^2xB_1(ax). \quad (\text{A.12})$$

**Parte I**

**Códigos**

# Codigo para caso cuadrado (Julia)

April 2, 2019

```
In [1]: using SpecialFunctions
        #Funciones de Bessel
        J1(R, t) = besselj(1, t*R)
        Y1(R, t) = bessely(1, t*R)
        #Derivadas de Funciones de Bessel
        J1R(R, t) = t*(besselj(1, t*R)/(t*R) - besselj(2, t*R))
        Y1R(R, t) = t*(bessely(1, t*R)/(t*R) - bessely(2, t*R))
        J1RR(R, t) = (t^2)*(-3*besselj(2, t*R)/(t*R) + besselj(3, t*R))
        Y1RR(R, t) = (t^2)*(-3*bessely(2, t*R)/(t*R) + bessely(3, t*R))
```

```
Out[1]: Y1RR (generic function with 1 method)
```

```
In [2]: #Definicion de soluciones pequeñas
        #Comentar o descomentar las soluciones que se toman en cuenta
        ψ0(R, t) = R*J1(R, t)
        ψ1(R, t) = R*Y1(R, t)
        ψ2(R, t, k, Z) = R*J1(R, t)*cos(k*Z)
        #ψ4(R, t, Z) = cos(t*sqrt(R^2 + Z^2))
        ψ5(t, Z) = cos(t*Z)
        #Primeras derivadas respecto de R
        ψ0R(R, t) = R*J1R(R, t) + J1(R, t)
        ψ1R(R, t) = R*Y1R(R, t) + Y1(R, t)
        ψ2R(R, t, k, Z) = (R*J1R(R, t) + J1(R, t))*cos(k*Z)
        #ψ4R(R, t, Z) = -sin(t*sqrt(R^2 + Z^2))*R*t*((R^2 + Z^2)^(-0.5))
        #Segundas derivadas respecto de R
        ψ0RR(R, t) = R*J1RR(R, t) + 2*J1R(R, t)
        ψ1RR(R, t) = R*Y1RR(R, t) + 2*Y1R(R, t)
        ψ2RR(R, t, k, Z) = (R*J1RR(R, t) + 2*J1R(R, t))*cos(k*Z)
        #ψ4RR(R, t, Z) = -ψ4(R, t, Z)*((R*t*((R^2 + Z^2)^(-0.5)))^2) - sin(t*sqrt(R^2 + Z^2))
        #Primeras derivadas respecto de Z
        ψ2Z(R, t, k, Z) = -k*R*J1(R, t)*sin(k*Z)
        #ψ4Z(R, t, Z) = -sin(t*sqrt(R^2 + Z^2))*t*Z*((R^2 + Z^2)^(-0.5))
        ψ5Z(t, Z) = -t*sin(t*Z)
```

```
Out[2]: ψ5Z (generic function with 1 method)
```

```
In [3]: #Aqui resolvemos el sistema lineal para encontrar C para distintas razones de aspecto
        #function constantes(xe, xl)
```

```

#Puntos de la frontera a evaluar
#R1 = 1 + xe
#R2 = 1 - xe
#R3 = 1
#Ze = xe
#Zo = 0
#Matriz de soluciones
#A = zeros((3,3))
#A[1,:]=[psi1(R1,xl), psi4(R1,xl,Zo), psi5(xl,Zo)]
#A[2,:]=[psi1(R2,xl), psi4(R2,xl,Zo), psi5(xl,Zo)]
#A[3,:]=[psi1(R3,xl), psi4(R3,xl,Ze), psi5(xl,Ze)]
#Vector de Resultados
#B = -[psi0(R1,xl), psi0(R2,xl), psi0(R3,xl)]
#Inversa de matriz de soluciones
#Ai = inv(A)
#Vector de constantes
#C = Ai*B
# return C,R1,R2
#end

```

Out[3]: constantes (generic function with 1 method)

In [11]: #Aqui resolvemos el sistema lineal para encontrar C para distintas razones de aspecto

#ESTA PARTE SE UTILIZA CUANDO SE USA PSI2 en eps=0.2928

```

function constantes(xe, xk, xl)
    d = sqrt(xl^2 - xk^2)
#Puntos de la frontera a evaluar
    R1 = 1 + xe
    R2 = 1 - xe
    R3 = 1
    N = 1/xe
    Ze = xe
    Zo = 0
#Matriz de soluciones
    A = zeros((3,3))
    A[1,:]=[psi1(R1,xl), psi2(R1,d,xk,Zo), psi5(xl,Zo)]
    A[2,:]=[psi1(R2,xl), psi2(R2,d,xk,Zo), psi5(xl,Zo)]
    A[3,:]=[psi1(R3,xl), psi2(R3,d,xk,Ze), psi5(xl,Ze)]
#Vector de Resultados
    B = -[psi0(R1,xl), psi0(R2,xl), psi0(R3,xl)]
#Inversa de matriz de soluciones
    Ai = inv(A)
#Vector de constantes
    C = Ai*B
    return C,d,R1,R2
end

```

Out[11]: constantes (generic function with 1 method)

```

In [12]: #Calculo de la solucion general
#razón de aspecto
ε = 0.2928
#Ceros de J1
μ1 = 3.83771
μ2 = 7.01559
#Valores de k y lambda
kb = π/(2*ε)
λb = sqrt(((μ2-μ1)/(2*ε))^2 + kb^2)

return ε, λb, kb

Out[12]: (0.2928, 7.630832710446611, 5.364741553261259)

In [20]: #C,R1,R2=constantes(ε, λb)

Out[20]: ([0.685122, 0.328673, -0.0137258], 1.44, 0.56)

In [13]: #Para caso de psi2
C,d,R1,R2=constantes(ε,kb,λb)

Out[13]: ([4.80991, -1037.17, -1.58351], 5.426707650273225, 1.2928, 0.7072)

In [6]: #ESTO ES PARA EL OTRO CASO RECTANGULAR
#μ0 = (4*π)*(10^-7)
#Iφ = 0.32*(10^6)
#icos = 0.372805
#ibes = -0.129521

#return μ0,Iφ

Out[6]: (1.2566370614359177e-6, 320000.0)

In [7]: #h = (μ0*Iφ)/(λb^2*icos*ibes)

Out[7]: -0.14301910624384495

In [14]: #Funciones psi y su gradiente en este sistema coordinado
#ψ(R, t, Z) = ψ0(R, t) + C[1]*ψ1(R, t) + C[2]*ψ4(R, t, Z) + C[3]*ψ5(t, Z)
#ψrz(R,Z) = ψ(R, λb, Z)
#ψr(R) = ψ(R, λb, 0)
#ψz(Z) = ψ(1, λb, Z)
#GψR(R, t, Z) = ψ0R(R, t) + C[1]*ψ1R(R, t) + C[2]*ψ4R(R, t, Z)
#GψZ(R, t, Z) = ψ0R(R, t) + C[1]*ψ1R(R, t) + C[2]*ψ4R(R, t, Z)
#Esto es para el caso psi2
ψ(R, t, k, m, Z) = ψ0(R, t) + C[1]*ψ1(R, t) + C[2]*ψ2(R, m, k, Z) + C[3]*ψ5(t, Z)
ψrz(R,Z) = ψ(R, λb, kb, d, Z)
ψr(R) = ψ(R, λb, kb, d, 0)
ψz(Z) = ψ(1, λb, kb, d, Z)

```

```

GψR(R, t, k, m, Z) = ψ0R(R, t) + C[1]*ψ1R(R, t) + C[2]*ψ2R(R, m, k, Z)
#Esto son para el otro caso de 0.2928
#ψrzm(R,Z) = h*R*besselj(1, sqrt(λb^2 - kb^2)*R)*cos(kb*Z)
#ψrm(R)=ψrzm(R,0)
#ψzm(Z)=ψrzm(1,Z)
#GψRm(R)= h*(besselj(1, sqrt(λb^2 - kb^2)*R) + R*(sqrt(λb^2 - kb^2)*(besselj(1, sqrt(λb^2 - kb^2)*R)
#Campos Toroidales
#Bt(R) = λb*ψ(R, λb, 0)/R
#Caso de psi2
Bt(R) = λb*ψ(R, λb, kb, d, 0)/R
#Otro caso de eps
#Btm(R) = λb*ψrm(R)/R
#Campos Poloidales
#Bp(R) = GψR(R, λb, 0)/R
#caso de psi2
Bp(R) = GψR(R, λb, kb, d, 0)/R
#Otro caso de eps
#Bpm(R) = GψRm(R)/R
#Lo siguiente siempre va descomentado
x = R2:0.001:R1
y = -ε:0.001:ε

```

Out [14]: -0.2928:0.001:0.2922

```

In [15]: ψr = collect(ψr(x) for x in R2:0.001:R1)
ψzb = collect(ψz(y) for y in -ε:0.001:ε)
Btb = collect(Bt(x) for x in R2:0.001:R1)
Bpb = collect(Bp(x) for x in R2:0.001:R1)

```

```

#otro caso
#ψrmb = collect(ψrm(x) for x in R2:0.001:R1)
#ψzmb = collect(ψzm(y) for y in -ε:0.001:ε)
#Btmb = collect(Btm(x) for x in R2:0.001:R1)
#Bpmb = collect(Bpm(x) for x in R2:0.001:R1)

```

Out [15]: 586-element Array{Float64,1}:

```

2254.04428507923
2253.953770316861
2253.7974210694238
2253.575333937927
2253.2876070410202
2252.9343400117114
2252.515633994042
2252.031591639731
2251.482317104784
2250.8679160460624

```

```

2250.188495617816
2249.444164468185
2248.6350327356627
  ⋮
-1683.5397122129923
-1684.1652292565502
-1684.7407445047127
-1685.2662782624998
-1685.7418522272767
-1686.1674894873254
-1686.543214520392
-1686.8690531921945
-1687.1450327548869
-1687.3711818454976
-1687.547530484322
-1687.674110073278

```

```

In [16]: using Plots; pyplot()
font = Plots.font("Helvetica", 9)
pyplot(guidelfont=font, xtickfont=font, ytickfont=font, legendfont=font, titlefont=font)

```

```

Out[16]: Plots.PyPlotBackend()

```

```

In [22]: #Cambiar titulos y demás para distintas razones de aspecto y distintos casos
plot(x,ψrb, title="ψ(R,0) para ε = 0.2928 con segundo enfoque", lw=2, xlabel="R", ylabel="ψ",
      #plot!(x,ψrmb, lw=2, label="ψ2")
      #Guarda la grafica como imagen
      png("RecPsi2R029")

```

```

In [23]: plot(y,ψzb, title="ψ(1,Z) para ε = 0.2928 con segundo enfoque", lw=2, xlabel="Z", ylabel="ψ",
      #plot!(y,ψzmb, lw=2, label="ψ2")
      png("RecPsi2Z029")

```

```

In [24]: plot(x,Btb, title="Bt(R,0) para ε = 0.2928 con segundo enfoque", lw=2, xlabel="R", ylabel="Bt",
      #plot!(x,Btmb, lw=2, label="Bt2")
      png("RecBt2R029")

```

```

In [25]: plot(x,Bpb, title="Bp(R,0) para ε = 0.2928 con segundo enfoque", lw=2, xlabel="R", ylabel="Bp",
      #plot!(x,Bpmb, lw=2, label="Bp2")
      png("RecBp2R029")

```

```

In [26]: W = map(ψrz, x, y)
p1 = contour(x, y, ψrz, fill=true, title="ψ(R,Z) para ε = 0.2928 con segundo enfoque")
plot(p1)
png("psrz2029")

```

```

In [22]: #W = map(ψrz, x, y)
#p1 = contour(x, y, ψrz, fill=true, title="ψ(R,Z) para ε = 0.2928 tomando solo J1")
#plot(p1)
#png("2psrz029")

```

```

In [ ]:

```

## Código para caso circular (Python)

April 2, 2019

```
1 #import scipy.integrate as integrate
2 import scipy.special as special
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from matplotlib import cm
6 from scipy import optimize
7
8 #Definimos las funciones de Bessel y sus derivadas en una forma
  compacta
9 J_1=lambda x,t: special.jn(1,t*x)
10 Y_1=lambda x,t: special.yn(1,t*x)
11 J_1p=lambda x,t: t*(special.jn(1,t*x)/(t*x) - special.jn(2,t*x))
12 Y_1p=lambda x,t: t*(special.yn(1,t*x)/(t*x) - special.yn(2,t*x))
13 J_1pp=lambda x,t: (t**2)*(-3*special.jn(2,t*x)/(t*x) + special.jn
  (3,t*x))
14 Y_1pp=lambda x,t: (t**2)*(-3*special.yn(2,t*x)/(t*x) + special.yn
  (3,t*x))
15 #Definimos las funciones componentes
16 Ps_0=lambda x,t: x*J_1(x,t)
17 Ps_1=lambda x,t: x*Y_1(x,t)
18 Ps_2=lambda x,y,t,l: x*J_1(x,t)*np.cos(l*y)
19 Ps_3=lambda x,y,t,l: x*Y_1(x,t)*np.cos(l*y)
20 Ps_4=lambda x,y,t: np.cos(t*np.sqrt(x**2 + y**2))
21 Ps_5=lambda y,t: np.cos(t*y)
22 #Definimos las derivadas primeras respecto a R, de cada funcion
  componente
23 Ps_0r=lambda x,t: x*J_1p(x,t) + J_1(x,t)
24 Ps_1r=lambda x,t: x*Y_1p(x,t) + Y_1(x,t)
25 Ps_2r=lambda x,y,t,l: (x*J_1p(x,t) + J_1(x,t))*np.cos(l*y)
26 Ps_3r=lambda x,y,t,l: (x*Y_1p(x,t) + Y_1(x,t))*np.cos(l*y)
27 Ps_4r= lambda x,y,t: -np.sin(t*np.sqrt(x**2 + y**2))*t*x*((x**2 +
  y**2)**-0.5)
28 #Definimos las derivadas segundas respecto a R, de cada funcion
  componente
29 Ps_0rr=lambda x,t: x*J_1pp(x,t) + 2*J_1p(x,t)
30 Ps_1rr=lambda x,t: x*Y_1pp(x,t) + 2*Y_1p(x,t)
```

```

31 Ps_2rr=lambda x,y,t,l: (x*J_1pp(x,t) + 2*J_1p(x,t))*np.cos(l*y)
32 Ps_3rr=lambda x,y,t,l: (x*Y_1pp(x,t) + 2*Y_1p(x,t))*np.cos(l*y)
33 #Ps_4rr= lambda x,y,t: -Ps_4(x,y,t)*((t*x**((x**2 + y**2)**-0.5))
    **2) + Ps_4r(x,y,t)*(1/x - x**((x**2 + y**2)**-1))
34 Ps_4rr= lambda x,y,t: -Ps_4(x,y,t)*((t*x**((x**2 + y**2)**-0.5))
    **2) - np.sin(
35     t*np.sqrt(x**2 + y**2))*(t**((x**2 + y**2)**(-0.5)) - t*(x
    **2)**((x**2 + y**2)**(-1.5)))
36 #Definimos las derivadas primeras respecto a Z, de cada funcion
    componente
37 Ps_2z=lambda x,y,t,l: -1*x*J_1(x,t)*np.sin(l*y)
38 Ps_3z=lambda x,y,t,l: -1*x*Y_1(x,t)*np.sin(l*y)
39 Ps_4z=lambda x,y,t: -np.sin(t*np.sqrt(x**2 + y**2))*t*y*((x**2 + y
    **2)**-0.5)
40 Ps_5z=lambda y,t: -np.sin(t*y)*t
41
42 #Funcion que resuelve el sistema lineal para obtener
43 #los valores de C, para los valores epsilon (x_e), lambda (x_la)
44 #y k (x_k).
45 #Usando esta funcion pueden obtenerse valores de C para diferentes
46 #definiciones de k y lambda.
47 def RFP_Circ(x_e,x_k,x_la):
48     #Constante en las soluciones
49     d=np.sqrt(((x_la)**2)-((x_k)**2))
50     #Definimos los puntos donde se evaluan las condiciones a la
    frontera
51     R1=1.0 + x_e
52     R2=1.0 - x_e
53     R3=1.0
54     Z1=0.0
55     #Todos los resultados anteriores fueron obtenidos usando
56     #Z2=x_e 19/09/18
57     Z2=-x_e
58     N3=1/x_e
59     #Definimos las matrices que contienen las condiciones a la
    frontera
60     A=np.zeros((5,5))
61     A[0,:]=(Ps_1(R1,x_la), Ps_2(R1,Z1,d,x_k), Ps_3(R1,Z1,d,x_k),
    Ps_4(R1,Z1,x_la), Ps_5(Z1,x_la))
62     A[1,:]=(Ps_1(R2,x_la), Ps_2(R2,Z1,d,x_k), Ps_3(R2,Z1,d,x_k),
    Ps_4(R2,Z1,x_la), Ps_5(Z1,x_la))
63     A[2,:]=(Ps_1(R3,x_la), Ps_2(R3,Z2,d,x_k), Ps_3(R3,Z2,d,x_k),
    Ps_4(R3,Z2,x_la), Ps_5(Z2,x_la))
64     A[3,:]=(Ps_1r(R3,x_la), Ps_2r(R3,Z2,d,x_k), Ps_3r(R3,Z2,d,x_k)
    , Ps_4r(R3,Z2,x_la), 0.0)
65     A[4,:]=(Ps_1rr(R3,x_la), Ps_2rr(R3,Z2,d,x_k) + N3*Ps_2z(R3,Z2,
    d,x_k),
66     Ps_3rr(R3,Z2,d,x_k) + N3*Ps_3z(R3,Z2,d,x_k),
67     Ps_4rr(R3,Z2,x_la) + N3*Ps_4z(R3,Z2,x_la), N3*Ps_5z(Z2,x_la))

```

```

68     B=-np.array([Ps_0(R1,x_la), Ps_0(R2,x_la), Ps_0(R3,x_la),
69                 Ps_0r(R3,x_la), Ps_0rr(R3,x_la)])
70     A_inv=np.linalg.inv(A)
71     #Vector con los coeficientes
72     C=(A_inv)@B
73     return(C,d,R1,R2)
74
75 #Razon de aspecto
76 eps=0.9
77 #Valores para calcular k, lambda y C.
78 #Primeros ceros de J1
79 m1=3.83771
80 m2=7.01559
81 #eps=(m2-m1)/(m1+m2)
82 #Los valores de k y lambda pueden modificarse manualmente
83 k=np.pi/(2.0*eps)
84 la=np.sqrt(((m2-m1)/(2.0*eps))**2 + (k)**2) + 0.4
85 #Calculo de A,B y C usando los valores de k y lambda anteriores
86 #A la derecha se muestran los variables que almacenan los valores
87 #de A,B,C,d,R1 y R2 para los valores de epsilon, k y lambda
88 C,d,R1,R2=RFP_Circ(eps,k,la)
89 #Muestra los valores de k, lambda y C
90 print(k,la,C)
91 #Corroborar la solución obtenida.
92 #print((A@C)-B)
93 #print(A)
94 #Define los ejes R y Z
95 long=1000
96 C,d,R1,R2=RFP_Circ(eps,k,la)
97 R=np.linspace(R2,R1,long)
98 Z=np.linspace(-eps,eps,long)
99 #Definimos las funciones Psi y gradiente de psi (en R y Z)
100 Psi= lambda x,y,t,l,m: Ps_0(x,t) + C[0]*Ps_1(x,t) + C[1]*Ps_2(x,y,
    m,l) + C[2]*Ps_3(x,y,m,l) + C[3]*Ps_4(x,y,t) + C[4]*Ps_5(y,t)
101 GPsiR= lambda x,y,t,l,m: Ps_0r(x,t)+ C[0]*Ps_1r(x,t) + C[1]*Ps_2r(
    x,y,m,l) + C[2]*Ps_3r(x,y,m,l) + C[3]*Ps_4r(x,y,t)
102 GPsiZ= lambda x,y,t,l,m: Ps_0r(x,t)+ C[0]*Ps_1r(x,t) + C[1]*Ps_2r(
    x,y,m,l) + C[2]*Ps_3r(x,y,m,l) + C[3]*Ps_4r(x,y,t)
103 #Campo toroidal
104 Bt=lambda x: la*Psi(x,0,la,k,d)/x
105 #Campo poloidal
106 Bp=lambda x: GPsiR(x,0,la,k,d)/x
107 #Para calcular q es necesario conocer el cero de Bp
108
109 #Graficamos los valores de la variables de interes
110 #Funcion Psi en R
111 plt.figure(1)

```

```

112 plt.plot(R, Psi(R,0,la,k,d))
113 plt.title(r'$\psi (R,0) $ con $\epsilon=$' + str(eps))
114 plt.xlabel('R')
115 plt.ylabel(r'$\psi (R,0) $')
116 plt.grid()
117 ###plt.savefig('Psi_R005')
118 #Funcion Psi en Z
119 plt.figure(2)
120 plt.plot(Z, Psi(1,Z,la,k,d))
121 plt.title(r'$\psi (1,Z) $ con $\epsilon=$' + str(eps))
122 plt.xlabel('Z')
123 plt.ylabel(r'$\psi (1,Z) $')
124 plt.grid()
125 #plt.savefig('Psi_Z005')
126 #Campo toroidal (en R)
127 plt.figure(3)
128 plt.plot(R, Bt(R))
129 plt.title(r'$B_t (R,0) $ con $\epsilon=$' + str(eps))
130 plt.xlabel('R')
131 plt.ylabel(r'$B_t $')
132 plt.grid()
133 ###plt.savefig('B_t005')
134 #Campo poloidal (en R)
135 plt.figure(4)
136 plt.plot(R, Bp(R))
137 plt.title(r'$B_p (R,0) $ con $\epsilon=$' + str(eps))
138 plt.xlabel('R')
139 plt.ylabel(r'$B_p $')
140 plt.grid()
141 ###plt.savefig('B_p005')
142 #Factor de seguridad q
143 plt.figure(5)
144 #plt.plot(R, Bp(R)/max(Bp(R)))
145 #plt.plot(R, Bt(R)/max(Bt(R)))
146 plt.plot(Rq,q) #label=r'con $\lambda_p =$' + str(la_mod-la))
147 plt.title(r'$q(R) $ con $\epsilon=$' + str(eps))
148 plt.xlabel(r'$RS$')
149 plt.ylabel(r'$q(R) $')
150 plt.grid()
151 #plt.legend()
152 #plt.savefig('q-09')
153
154
155 #Definimos una malla para obtener Psi como funcion de R y Z
156 X, Y = np.meshgrid(R,Z)
157 #Frontera circular
158 Z_c=np.sqrt(eps**2-(R-1.0)**2)
159 plt.figure(6)
160 plt.figure(figsize=(8,6), dpi=300)

```

```
161 #Funcion contorno para Psi
162 plt.contourf(X, Y, Psi(X,Y,la,k,d),50,alpha=0.5, cmap=cm.viridis)
163 #Enmarcando la lineas de presion
164 plt.contour(X, Y, Psi(X,Y,la,k,d),50, cmap=cm.viridis)
165 plt.colorbar()
166 plt.plot(R,Z_c, 'b')
167 plt.plot(R,-Z_c, 'b')
168 plt.title(r'$\psi(R,Z)$ con $\epsilon=$' + str(eps))
169 plt.xlabel('R')
170 plt.ylabel('Z')
171 ##plt.savefig('psrz_09')
```

# Bibliografía

---

- [1] Antoine J. Cerfon and Michael O’Neil. Exact axisymmetric Taylor states for shaped plasmas. *American Institute of Physics: Physics of Plasmas*, 21, 2014. III, 54, 97
- [2] <https://www.britannica.com/science/nuclear-binding-energy>. Acceso: 2018-09-17. VI, 2
- [3] <https://socratic.org/questions/what-are-all-the-possible-products-of-a-reaction-where-uranium-235-undergoes-nuc>. Acceso: 2018-09-17. VI, 3
- [4] [http://www.ice-age-ahead-iaa.ca/scrp\\_wf/lepg050.htm](http://www.ice-age-ahead-iaa.ca/scrp_wf/lepg050.htm). Acceso: 2018-09-17. VI, 5
- [5] International Atomic Energy Agency. *Fusion Physics*. IAEA, Vienna, 2012. VI, VI, VI, 6, 8, 9, 38
- [6] <http://theconversation.com/nuclear-fusion-the-clean-power-that-will-take-decades-to-master-41356>. Acceso: 2018-09-28. VI, 7
- [7] Francis F. Chen. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Volume 1: Plasma Physics*. Plenum Press, New York and London, 1984. VI, 11, 14, 16, 27
- [8] [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/da/Diamagnetic\\_drift.PNG](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/da/Diamagnetic_drift.PNG). Acceso: 2018-09-17. VI, 18
- [9] [http://palha.org/journal/\\_images/j\\_b\\_perp\\_grad\\_p.png](http://palha.org/journal/_images/j_b_perp_grad_p.png). Acceso: 2018-09-17. VI, 24
- [10] <https://cosmosmagazine.com/technology/lockheed-s-fusion-project-breaking-new-ground>. Acceso: 2018-09-17. VI, 28
- [11] [https://www.researchgate.net/figure/Geometry-and-vectorial-fields-in-the-Bennett-pinch-generated-by-an-axial-current-Jz\\_fig3\\_259246885](https://www.researchgate.net/figure/Geometry-and-vectorial-fields-in-the-Bennett-pinch-generated-by-an-axial-current-Jz_fig3_259246885). Acceso: 2018-09-17. VI, 28
- [12] [https://www.researchgate.net/profile/Hongru\\_Ma/publication/260340455/figure/fig1](https://www.researchgate.net/profile/Hongru_Ma/publication/260340455/figure/fig1). Acceso: 2018-09-17. VI, 30

- 
- [13] <https://www.iter.org/newsline/-/3037>. Acceso: 2018-09-17. VI, 31
- [14] [http://www.aug.ipp.mpg.de/E2/Mitarbeiter/Zohm/PhD\\_Network\\_\2010/Martin.pdf](http://www.aug.ipp.mpg.de/E2/Mitarbeiter/Zohm/PhD_Network_\2010/Martin.pdf). Acceso: 2018-09-17. VI, 32
- [15] Francis F. Chen. *An indispensable Truth: How Fusion Power Can Save The Planet*. Springer, New York and London, 2011. VI, 4, 35
- [16] Paul M. Bellan. *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press, Pasadena, California, 2004. VI, 32, 39
- [17] H.Dreicer. Topics in reversed field pinch physics. *Physica Scripta*, T2/2:435–442, 1982. VI, 36, 45
- [18] J. B. Taylor. Relaxation and magnetic reconnection in plasmas. *Reviews of Modern Physics*, 58, 1986. VI, 49
- [19] <https://dlmf.nist.gov/10.3>. Acceso: 2018-09-17. VI, 50
- [20] Iaea, pris: Power reactor information system. <https://pris.iaea.org/pris/>. Acceso: 2018-09-12. 4
- [21] J. D Huba. *NRL Plasma Formulary*. Naval Research Laboratory, 2016. 6, 46
- [22] Leon P. Kamp and David C. Montgomery. Toroidal flows in resistive magnetohydrodynamic steady states. *American Institute of Physics: Physics of Plasmas*, 10, 2003. 23
- [23] Leon P. Kamp and David C. Montgomery. Toroidal steady states in visco-resistive magnetohydrodynamics. *Journal of Plasma Physics*, 70, 2004. 23
- [24] Goldston and Hazeltine. Correspondance. *Physics today*, 2006. 23
- [25] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press, Oxford, 1961. 29
- [26] Masahiro Wakatani. *Stellarator and Heliotron Devices*. Oxford University Press, Oxford, 1998. 30
- [27] J. B. Taylor. Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields. *Physical Review Letters*, 33, 1974. 32, 49
- [28] L. Woltjer. A theorem on force free magnetic fields. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 44, 1958. 32, 41
- [29] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, New jersey, 1999. 42
- [30] S. Chandrasekhar and P. C. Kendall. On free-force magnetic fields. *American Astronomical Society*, 1957. 46
- [31] P. J. McCarthy. Analytical solutions to the grad-shafranov equation for tokamak equilibrium with dissimilar source functions. *American Institute of Physics: Physics of Plasmas*, 6:3554–3560, 1999. 52