



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Geometría Cuántica: Similitudes y Correspondencia con
Mecánica Cuántica.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

Alvaro Yobaín Pratts Martínez

TUTOR:

Dr. Mico Djurdjevic

Ciudad Universitaria, CD.MX., 2019





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Pratts

Martínez

Alvaro Yobaín

55 18 31 78 63

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

309208415

2. Datos del tutor

Dr.

Mico

Djurdjevic

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Eugenio

Ley

Koo

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Luis

Gottdiener

Gutmann

5. Datos del sinodal 3

M. en C.

Augusto

Cabrera

Manuel

6. Datos del sinodal 4

M. en C.

Perla Cecilia

Lucio

Peña

7. Datos del trabajo escrito

Geometría Cuántica: Similitudes y Correspondencia con Mecánica Cuántica.

69 páginas

2019

*Con amor
a mi madre*

Agradecimientos

En la culminación de un ciclo que es mi preparación como físico es primordial el reconocer y agradecer a quienes han sido parte de esto. Empezando por mi querida UNAM, que desde mi entrada a la preparatoria me ha provisto de lo necesario para mi formación académica y humana y me ha dado el espacio donde crecer como estudiante y persona. A mis profesores que me han compartido sin envidia el conocimiento y experiencias que poseen. A todos mis amigos, que han sido soporte y parte de esta aventura inigualable. Por supuesto a mi asesor el Dr. Micho Durdevich que me contagió el entusiasmo por la Geometría Cuántica y aceptó guiarme para la realización del presente trabajo así como a Perla que me ofreció su ayuda para la revisión del proyecto y me corrigió (bastantes) errores. Mención especial a Vanessa, que ha sido mi compañera durante gran parte de mi formación como físico (además de ayudarme con la creación de la línea de tiempo que se incluye en el trabajo) y que me ha compartido su gran amor. A mi padre que siempre me inculcó el amor por el saber y la férrea lucha por el conocimiento. Mi hermana que siempre me ha apoyado a su manera y en general a mi familia con la que siempre he contado a mi lado.

Pero, sobre todo, gracias infinitas a mi madre que me ha dado todo aunque esto signifique quedarse sin nada y que sé que siempre podré contar con su apoyo total. Sin ella, nada de esto hubiera sido posible.

A todos y a cada uno les digo sinceramente: Gracias.

Objetivo y estructura del trabajo

El principal objetivo del presente trabajo es sentar las bases de la Geometría Cuántica y su correspondencia con la Mecánica Cuántica. Más allá de presentar una teoría matemática o física, se hace énfasis en las implicaciones que puedan tener, es decir, enfocarse en una nueva forma de interpretar los conceptos geométricos y su conexión con la Mecánica Cuántica. Cabe resaltar que el presente trabajo es principalmente introductorio, haciendo hincapié en los ejemplos más *sencillos* y *simples* para empezar en el camino de la Geometría Cuántica, abriendo así el camino para posteriores trabajos de investigación y aplicación en física teórica y matemáticas.

Como se dijo anteriormente, al ser un trabajo introductorio se escogió una estructura sencilla que consiste en 4 capítulos principales los cuales abordan distintos temas.

El primer capítulo es una breve introducción histórica a la Mecánica Cuántica y a la Geometría Cuántica, discutiendo también los porqués de la Geometría Cuántica y la relación casi “mística” de la matemática y la física. Una pequeña línea de tiempo sobre el desarrollo de las bases para la Mecánica Cuántica se encuentra en los anexos al final del trabajo.

En el segundo capítulo se trata el formalismo matemático detrás de la Geometría Cuántica: álgebras C^* , teoría de representaciones, caracteres, concepto de simetrías y uno de los resultados principales como es el teorema de Gelfand-Naimark. Al no ser parte de los propósitos, no se demuestran todos los teoremas matemáticos usados, salvo los que se consideren necesarios. Se espera que el lector cuente con las nociones matemáticas básicas de la licenciatura en física, sin embargo, se incluyen conceptos y resultados que podrían no ser familiares para el lector pero se omitió incluirlos directamente en el desarrollo con el motivo de no desviarse del propósito principal al llenar el trabajo de conceptos matemáticos. Dichas definiciones y teoremas se pueden consultar en el apéndice, así como también varios resultados se pueden consultar en la bibliografía.

VI

El tercer capítulo se enfoca en presentar los problemas más *sencillos* para introducir la correspondencia entre la Geometría Cuántica y la Física Cuántica. Se empieza por el Plano Cuántico, viendo su estructura *sin puntos* y su relación con el álgebra del “Toro Cuántico” a través de los estados coherentes del oscilador armónico. Como último ejemplo estudiamos el álgebra de matrices de 2×2 , relacionándola con lo que llamamos “*Esfera Cuántica Bebé*” y dando su conexión con el formalismo de espín en Mecánica Cuántica.

El último capítulo consiste en presentar el “diccionario” que podemos encontrar entre Geometría Cuántica y la Geometría *Clásica*. Se presenta también una breve introducción a los trabajos recientes y su aplicación en física teórica como lo puede ser en Teoría Cuántica de Campos, Haces Cuánticos Principales, fundamentos de Mecánica Cuántica, entre otros.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Mecánica Cuántica	1
1.2. Geometría Cuántica	7
1.3. ¿Por qué Geometría Cuántica?	8
2. Fundamentos de la Geometría Cuántica	11
2.1. Álgebras C^*	11
2.2. Puntos	14
2.3. Simetrías	15
2.4. Teorema de Gelfand-Naimark	15
2.5. Construcción Gelfand-Naimark-Segal	16
2.5.1. Teoría de representaciones	16
2.6. Notación de Dirac	20
3. Correspondencia con la Mecánica Cuántica	21
3.1. Plano Cuántico	21
3.1.1. Relaciones de conmutación de Heisenberg-Weyl	22
3.1.2. Operador de desplazamiento de Weyl	24
3.1.3. Estados coherentes	25
3.1.4. Breve discusión sobre El Toro Cuántico	31
3.2. Esfera Cuántica	33
3.2.1. Simetrías	35
3.2.2. Estados de La Esfera Cuántica	37
4. Conclusiones	41
4.1. Haces Principales Cuánticos	42
4.2. Teoría de Campos	43
4.3. Consideraciones finales	45

Anexos	46
A. Definiciones y Teoremas	49
B. Línea de tiempo	55
Bibliografía	59
Índice alfabético	61

Capítulo 1

Introducción

Desde sus inicios, la Mecánica Cuántica ha fascinado y confundido a todos aquellos que la han estudiado. Ya sea por romper la “*intuición*”, o por aparentemente ser tan distinta de la Física Clásica que se había desarrollado previamente.

Junto a la Mecánica Cuántica, surge el desarrollo de la Geometría Cuántica (también conocida como Geometría no Conmutativa) la cual estudia principalmente a las Álgebras C^* y revela el contenido geométrico que se encuentra dentro de éstas. Como se ve en el presente trabajo, el nombre de Geometría Cuántica no es solamente cuestión de vanidad o ego, sino que, al estudiar las C^* -álgebras es inevitable encontrar su profunda conexión con el mundo de la Mecánica Cuántica.

1.1. Mecánica Cuántica

La Mecánica Cuántica surgió de la necesidad de poder explicar fenómenos que no podían ser resueltos dentro del marco de las teorías ya establecidas en la época. A finales del siglo XIX, muchos físicos creían que la Física estaba resuelta, pues tenían establecidas teorías que explicaban los diversos fenómenos conocidos en la época. Se tenía a la Mecánica Clásica desarrollada por Newton, Lagrange y Hamilton, principalmente, que proporciona las bases para entender el movimiento de los cuerpos. La Teoría Electromagnética que quedó resumida en el trabajo de Maxwell, unificó los fenómenos eléctricos y magnéticos; así como también incluía la Óptica, ya que la luz se comporta como una onda electromagnética. La Termodinámica que se desarrolló fundamentalmente a base

de experimentos llevados a cabo por notables como Boyle, Charles, Carnot entre otros, proporcionó un mejor entendimiento del comportamiento de la materia y su interacción a niveles mesoscópicos y macroscópicos, contribuyendo de manera significativa en otros campos de estudio como lo es la Química. Una parte de suma importancia fue el impacto que tuvo no solo en áreas puramente *experimentales* sino que su influencia llevó a lo que hoy conocemos como Mecánica Estadística, la cual empleó técnicas matemáticas poco usuales en la Física de ese entonces (la estadística) y logró deducir de primeros principios las leyes que se habían encontrado empíricamente.

Mención importante se lleva la Mecánica Estadística que gracias a los trabajos de Clausius, Maxwell, y principalmente de Boltzmann introdujo ideas revolucionarias para la Física del siglo XIX como lo fue la idea de probabilidad y quizá la más audaz fue la defensa de Boltzmann de la hipótesis atómica.

Formulada por Dalton a principios del siglo XIX con base en sus experimentos al estudiar las proporciones de los elementos químicos cuando éstos reaccionaban químicamente, proponía que cada elemento está compuesto por una partícula fundamental (el átomo) cuyas propiedades eran indistinguibles entre átomos del mismo elemento y solo difieren al tratarse de elementos distintos. Uno de los antecedentes más antiguos de lo que podemos llamar *cuantizar* se encuentra en los trabajos de Faraday de 1834 sobre la electrólisis (más de medio siglo antes de los trabajos de Planck) al darse cuenta que al disociar un mol de cualquier sustancia la carga depositada en el ánodo y la carga depositada en el cátodo es la misma. Faraday consideró que en caso de ser cierta la hipótesis atómica esto sugeriría que a cada ión le corresponde una cantidad definida de carga, lo que a su vez implica también la cuantización de la carga. Boltzmann defendería e incluiría en su trabajo la hipótesis atómica lo que le llevó a hacerse de no pocos críticos entre los que destacan Ernst Mach y Wilhelm Ostwald. Aunque la mayoría de los químicos creían en la hipótesis atómica, la idea era poco popular entre los físicos de la época y solo un puñado consideraba plausible dicha hipótesis, lo que alejó a Boltzmann de la comunidad de físicos y a la postre pudo causarle los problemas emocionales que contribuyeron a su suicidio en 1906. Pese a esto la Mecánica Estadística jugó un papel determinante en el trabajo de Planck que marcaría el nacimiento de la Teoría Cuántica.

Así pues, en la segunda mitad del siglo XIX se creía que la física estaba completa a tal punto que Lord Kelvin llegó a decir: “*Ahora no queda nada nuevo que descubrir en la física. Todo lo que queda es la medición cada vez más precisa*”. Sin embargo, tal creencia se derrumbaría estrepitosamente ya que se dieron cuenta que las mismas teorías clásicas parecían incompatibles en ciertos

puntos, así como el descubrimiento de nuevos fenómenos que no podían ser explicados con las teorías existentes.

Uno de los puntos donde se hacía evidente que no estaba completa la física, se reconoció al confrontar la Mecánica Clásica y la Teoría Electromagnética. Dentro de la Mecánica Clásica, uno de los pilares es el principio galileano de invariancia, el cual nos dice que las leyes físicas son invariantes ante transformaciones galileanas. Sin embargo, el electromagnetismo no respeta este tipo de invariancia (esta fue una de las principales motivaciones de Einstein para el desarrollo de la Relatividad Especial) lo cual propició una revisión de las ideas que se tenían sobre la física en el momento. Pero sin duda, los fenómenos que llevaron a renunciar por completo a la idea de que se tenía la física completa, fueron la llamada *Catástrofe Ultravioleta* y el Efecto Fotoeléctrico.

Una de las principales, si no la más importante, predicciones del trabajo de Maxwell en electromagnetismo fue la existencia de radiación electromagnética que se propaga bajo la forma de ondas. También identificó que la luz es un caso particular de radiación electromagnética, lo que abrió puertas al estudio de lo que conocemos hoy en día como Espectroscopía. La Espectroscopía consiste en el estudio de la interacción entre materia y radiación electromagnética, analizando el espectro de emisión o de absorción de radiación electromagnética a ciertas longitudes de onda. Por otra parte también se conocía que si la materia se calienta lo suficiente, esta empezaría a emitir luz, es decir, emitiría radiación electromagnética. Se descubrió que los espectros de los elementos químicos están bien definidos, es decir, tienen longitudes de ondas características que los identifican, lo que implica que al tener el espectro de un elemento se podría determinar de qué elemento se trata.

En el trabajo conjunto de Kirchhoff y Bunsen, se logró descubrir el cesio y el rubidio mediante el análisis espectral. También se dieron cuenta que no solo estudiaban el espectro de los elementos que quemaban sino que también el espectro del mismo mechero usado, el cual cambiaba dependiendo la temperatura a la que estuviera quemando dicho mechero, lo cual fue un paso de suma importancia ya que permitió reconocer que se trataba de un fenómeno termodinámico, pero no de Termodinámica de la materia sino Termodinámica de la radiación. Fue Kirchhoff el que introdujo el concepto de cuerpo negro, el cual es un objeto que absorbe todas las longitudes de onda y no refleja ninguna. Se puede imaginar al cuerpo negro como una pequeña cavidad por la que entra radiación de todas las longitudes de onda, pero no permite que se escape ninguna. Como el cuerpo negro está cerrado, el sistema alcanza el equilibrio térmico en su interior. A la radiación que hay en su interior se le conoce como radiación de

cuerpo negro. La radiación que entra en el cuerpo negro no escapa de él, pero comienza a reflejarse en las paredes. En este proceso, las paredes se calientan, lo que provocará la emisión de nuevas ondas electromagnéticas, que a su vez, rebotarán de nuevo en las paredes. De esta forma, en el interior del cuerpo negro tendremos una determinada energía electromagnética.

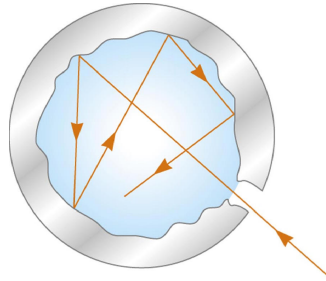


Figura 1.1: Cuerpo negro ideal.

En su trabajo Kirchhoff demostró que la intensidad de radiación I dentro de una cavidad (no necesariamente cuerpo negro) depende sólo de la temperatura y de la longitud de onda, pero no de la forma ni tamaño de la cavidad, ni del material de sus paredes. Así pues, encontrar la forma que tendría dicha función I fue un problema de interés que algunos se dedicaron a estudiar. Usando argumentos termodinámicos, a finales del siglo XIX Wien publicó su trabajo que derivó en la llamada ley de desplazamiento de Wien, y la aproximación de Wien. La aproximación de Wien da una forma para la forma de distribución de la intensidad de radiación. Aunque dicha aproximación se ajusta correctamente a longitudes de ondas bajas (es decir, frecuencias altas) no logra ajustarse a frecuencias bajas. Por otra parte, iniciado el año 1900, Rayleigh y Jeans dedujeron a partir de argumentos de Electromagnetismo, la llamada ley de Rayleigh-Jeans la cual establece otra forma para la distribución de intensidades. Dicho resultado ajusta muy bien para frecuencias bajas, sin embargo, al tener una dependencia al cuadrado en la frecuencia, crecía rápidamente a frecuencias altas más allá del violeta, de aquí que se le conozca como catástrofe ultravioleta, lo que no se ajusta a los experimentos. Así pues, se tenía una aproximación a altas frecuencias y una a bajas frecuencias.

Fue en el año 1900, cuando el físico Max Planck encontró una solución al problema. Como primer paso, encontró la forma empírica de la distribución “pegando” tanto la aproximación de Wien como la ley de Rayleigh-Jeans. Al tener resultados experimentales exitosos por parte de Rubens y Kurlbaum Planck se dedicó a construir una derivación a partir de argumentos físicos de

su fórmula. Usando argumentos de Mecánica Estadística (que en un principio Planck consideró como fracaso el recurrir a dicha teoría), logró llegar a la fórmula considerando que las paredes de la cavidad están formadas por pequeños osciladores, que Planck después reconocería que dichos osciladores estarían relacionados con los átomos (Planck anteriormente era contrario a las ideas de Boltzmann sobre la hipótesis atómica, de ahí que considerara como fracaso el recurrir a la Mecánica Estadística). El paso crucial de Planck fue postular una idea revolucionaria y contraria a la física establecida en la época. La hipótesis de Planck consistía en imponer una restricción a la energía que puede intercambiar un electrón que oscila con una determinada frecuencia. Planck estableció que el valor de la energía sólo podía admitir múltiplos enteros del producto de la frecuencia de oscilación y una constante de ajuste (llamada en su honor constante de Planck), es decir, la hipótesis de Planck dice que:

$$\Delta E = h\nu.$$

Con esta idea nueva, Planck logró resolver el problema, consiguiendo la llamada Ley de Planck que ajusta a los datos experimentales que se habían obtenido, tanto a frecuencias altas como a bajas. Esta fue sin duda una idea que causó un gran impacto en la comunidad científica, ya que rompía con la Física Clásica al proponer que la energía no está dada de manera continua, sino en pequeños paquetes o “*cuantos*” (de ahí el nombre de *cuántica*) de energía discretos. Dicha idea fue un parteaguas de lo que hoy conocemos como “*Teoría Cuántica*”, ya que se empezó a desarrollar todo un campo nuevo en la Física que se confronta directamente con las teorías clásicas.

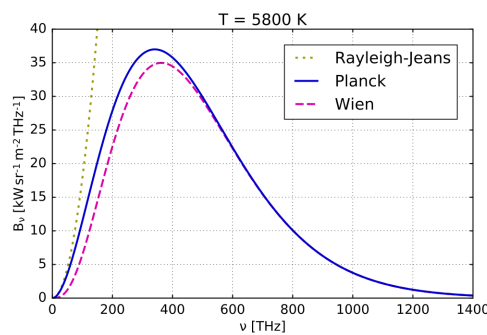


Figura 1.2: Comparación de la Ley de Planck, aproximación de Wien y ley de Rayleigh-Jeans.

Otro de los fenómenos que causó problemas era el conocido como Efecto

Fotoeléctrico. El Efecto Fotoeléctrico fue descubierto y descrito por Heinrich Hertz, en 1887, al observar que el arco que salta entre dos electrodos conectados a alta tensión alcanza distancias mayores cuando se ilumina con luz ultravioleta que cuando se deja en la oscuridad. Dicho fenómeno consiste en el desprendimiento de electrones de una superficie metálica cuando se le hace incidir luz en la superficie. Los experimentos mostraban que dicho fenómeno no dependía de la intensidad de la radiación que se hace incidir, sino de la frecuencia con la cual se hace, es decir, no importaba cuánta radiación se tiene, ya que si ésta no tiene cierta frecuencia no se desprenden los electrones.

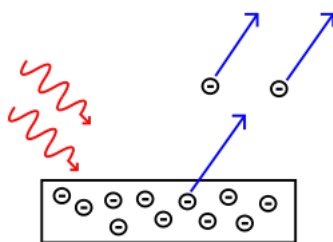


Figura 1.3: Ilustración del efecto fotoeléctrico.

La explicación al fenómeno la dio Albert Einstein en 1905¹, usando para ello una extensión a la hipótesis propuesta por Planck 5 años atrás. Einstein argumentó que podía entenderse de mejor forma el problema si se suponía que la “cuantización” no es exclusiva para la energía intercambiada entre la radiación y el entorno material sino que es una propiedad intrínseca de la luz. También explicó que los electrones sólo se desprenderían al suministrar “cuántos de luz” (ahora conocidos como fotones) que tuvieran una frecuencia mínima que dependía del material de la placa. Así pues, los electrones absorberían la energía de los fotones, la cual tendría que ser mayor que la función trabajo (energía mínima para desprender electrones) del material de la placa para que pudiera producirse el Efecto Fotoeléctrico.

Con el paso del tiempo, la idea de “*cuantización*” de la energía fue cobrando más relevancia gracias al éxito obtenido al explicar los fenómenos que carecían de explicación dentro del marco de la Física Clásica. Así es como en 1913 Niels Bohr propone el primer modelo atómico basado en las ideas de cuantización. El Electromagnetismo Clásico predice que una carga que se acelera emite radiación,

¹El año de 1905 fue considerado como el año “milagroso” de Einstein al publicar sus trabajos en Relatividad Especial, Movimiento Browniano y el Efecto Fotoeléctrico.

con lo cual, la idea del átomo en el cual un electrón orbita un núcleo conduce a la inestabilidad de los átomos, ya que al orbitar el electrón emitiría radiación con lo cual perdería energía y terminaría colapsando en el núcleo. El modelo de Bohr establece que los electrones sólo pueden estar en ciertas órbitas en las cuales no perderá energía; es decir *cuantiza* las órbitas en las cuales pueden estar los electrones.

Sin embargo, cabe resaltar que las explicaciones dadas anteriormente fueron dadas de forma *ad hoc*, es decir, se impone la hipótesis de Planck para que los resultados cuadren con lo obtenido en los experimentos, sin haberlos deducido de una teoría establecida como lo es la Mecánica Clásica o el Electromagnetismo. Es así como se empieza a trabajar en la construcción y formalismo de dicha teoría, la cual conocemos hoy como Mecánica Cuántica.

El desarrollo de la Mecánica Cuántica ha atravesado diversas etapas. La primera de ellas consistió en la Mecánica Matricial desarrollada por Heisenberg, Born, y Jordan; y la Mecánica Ondulatoria desarrollada por Schrödinger, las cuales son equivalentes y constituyen lo que se conoce comúnmente sólo con el nombre de Mecánica Cuántica y cuyo formalismo matemático fue hecho por Von Neumann. Una segunda etapa consiste en la llamada *Mecánica Cuántica Relativista*, desarrollada principalmente por Dirac, en la cual se trata de desarrollar un formalismo que sea consistente con la Relatividad Especial de Einstein. La siguiente etapa consiste en la llamada *Teoría Cuántica de Campos*, con la cual se desarrolla lo que se conoce hoy en día como Electrodinámica Cuántica (QED) Cromodinámica Cuántica (QCD) entre otras. Se puede hablar de una etapa que se desarrolla actualmente y consiste en la llamada Teoría de Cuerdas, Mecánica Cuántica de Bucles, Súper Simetrías, Branas, etc.

1.2. Geometría Cuántica

La Geometría Cuántica, también conocida como Geometría no Conmutativa, nace junto con la misma Mecánica Cuántica. Desde los primeros artículos de Heisenberg, Jordan, Dirac, y Schrödinger, los conceptos geométricos y algebraicos que serían los ingredientes para la Geometría Cuántica ya se encontraban presentes. El formalismo matemático se empieza a gestar en la década de 1930, con los trabajos de Von Neumann sobre la teoría de operadores. Sin embargo, el gran paso fue dado en la década de 1940 por el trabajo de Gelfand, Naimark y Segal, en el cual establecen la relación entre álgebras C^* y álgebras de operadores en un espacio de Hilbert. Así pues, queda en primera

instancia marcada la relación con la Mecánica Cuántica ya que el formalismo de ésta se basa en operadores en un espacio de Hilbert a los que les asociamos observables físicas (cantidades que podemos *medir*) y con esto le asociamos un “sentido físico” a un objeto “matemático”. Uno de los grandes logros del trabajo, fue establecer una nueva conexión entre la geometría de un espacio y una interpretación algebraica equivalente, es decir, una manera alternativa de entender los conceptos de “espacio”, “puntos”, “partes”, etc.

El formalismo de la Geometría Cuántica se basa en la Geometría Diferencial, el Análisis Funcional y las Álgebras no Conmutativas (de ahí que se le conozca también como Geometría no Conmutativa). Visto de otra forma, es un formalismo que nos permite generalizar las ideas “clásicas”, reformulando los conceptos usuales de puntos, espacios, etc, para llevarlos a un marco mucho más general donde las ideas “clásicas” sean un caso especial de este nuevo mundo, al que convenientemente llamaremos *Cuántico*.

Como se introdujo anteriormente, el concepto de “cuántico”, surge de tratar de resolver y entender problemas que se habían presentado en la Física, es decir, un “concepto físico”. Sin embargo, y como se verá más adelante, hay razones de sobra para poder usar el mote de *cuántico*, en una teoría que a priori es una rama abstracta de la Matemática *pura*.

En síntesis, la Geometría Cuántica toma elementos del Análisis, Geometría, y Álgebras para estudiar espacios a los cuales les asociamos un sentido físico.

1.3. ¿Por qué Geometría Cuántica?

La relación entre física y matemáticas no es nueva, es tan vieja como la misma física y las matemáticas. Tratar de explicar la naturaleza sin usar las matemáticas es casi imposible y como lo decía Galileo: “*Las matemáticas son el lenguaje con el que Dios ha escrito el universo*”. Desde la antigüedad esta conexión parece irrompible, prácticamente todas las civilizaciones del planeta usaron las matemáticas para describir, predecir y entender los fenómenos naturales. Siendo quizá el caso más notorio la astronomía, donde se podían hacer predicciones de solsticios y equinoccios. Quizá el punto de inflexión donde quedó expresamente marcada tal conexión fue precisamente con Galileo, el cual aplicó ampliamente todos los conceptos matemáticos en el entendimiento de la naturaleza, estableciendo así una forma de explicar la naturaleza en el lenguaje universal de las matemáticas.

Así mismo, es casi imposible encontrar una rama de las matemáticas por más

“pura” que sea, que no se pueda emplear en una teoría física. Desde la Geometría Euclídea, el Cálculo Diferencial, la Teoría de Grupos que en su momento se creía una rama “pura” de la Matemática y ahora es parte fundamental de las nuevas teorías físicas, inclusive la Teoría de Categorías ha empezado a emplearse para entender problemas físicos. Más aún, muchos avances y nuevas ramas de las matemáticas nacieron precisamente de un problema físico; por ejemplo, el cálculo de Newton, donde el concepto de derivada surge naturalmente al estudiar el movimiento de los cuerpos. Otro punto importante es que antes no existía una gran distinción entre físicos y matemáticos, es decir, los grandes matemáticos también se involucraron directamente en el desarrollo de la física, hacer matemáticas iba relacionado con hacer física. Ejemplo de ello tenemos a Newton, que en la parte física desarrolló la Mecánica Clásica y en la parte matemática el cálculo, su teorema del binomio, entre otros; Lagrange con su aportación de lo que llamamos “Mecánica Analítica” y en matemáticas sus contribuciones a la Teoría de Números. Igualmente podríamos mencionar a Hamilton, Gauss, Euler, Hilbert, Fourier, y muchos más. Es hasta principios del siglo XX donde se empieza a formar una “separación”, que es más bien virtual, ya que las nuevas teorías requieren una robusta estructura matemática y los físicos involucrados deben manejar dichas herramientas.

Así pues, no es de sorprender que una teoría que a priori pueda parecer abstracta pueda utilizarse para formular una nueva visión de una teoría física. Este es el caso de la Geometría Cuántica, en la cual se desarrolla un marco en el cual podamos estudiar de una nueva forma la Mecánica Cuántica. Con lo cual, con esta teoría podemos establecer una nueva forma de entender los conceptos geométricos, que resulte más apropiada para estudiar el mundo cuántico en donde los conceptos clásicos empiezan a presentar problemas.

Capítulo 2

Fundamentos de la Geometría Cuántica

Como se mencionó antes, la Geometría Cuántica incorpora las ideas de Análisis, Geometría y Álgebras en una sola teoría para estudiar espacios a los cuales les asociamos un sentido físico. Se muestra entonces que podemos llamar *espacio cuántico* a un espacio geométrico correspondiente a un álgebra C^* . Para ver tal correspondencia abordaremos la teoría de álgebras C^* .

2.1. Álgebras C^*

Ya que una parte vital en el desarrollo de la Geometría Cuántica es el uso de álgebras C^* se empieza por introducir la definición y algunas propiedades de éstas. Salvo que se indique lo contrario, nuestro campo es por defecto el campo de los números complejos \mathbb{C} .

Definición 2.1. Decimos que A es un álgebra si es un espacio vectorial complejo (véase A.1) con un producto algebraico en el cual se cumplen las siguientes propiedades para cualquier $a, b, c \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

1. Asociativa: $(ab)c = a(bc)$,
2. Distributiva por la derecha: $a(b + c) = ab + ac$,
3. Distributiva por la izquierda: $(b + c)a = ba + ca$,
4. Asociativa respecto a escalares: $\alpha(ab) = (\alpha a)b$.

Definición 2.2. Si existe el elemento $1 \in A$ tal que para cualquier elemento $a \in A$ se cumple con:

$$1a = a = a1, \quad (2.1)$$

entonces decimos que el álgebra es unital y 1 es el elemento unidad del álgebra.

Definición 2.3. Un elemento $u \in A$ se dice invertible si existe $v \in A$ tal que se cumple con:

$$uv = vu = 1, \quad (2.2)$$

dicho elemento se conoce como inverso de u .

Ya que las álgebras son también espacios vectoriales, podemos introducir una norma (véase 2.3), la cual cumple con todas las características de una norma en un espacio vectorial (positividad, desigualdad del triángulo), y respecto al producto algebraico cumple con:

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|. \quad (2.3)$$

Las álgebras con una norma definida que satisface (2.3) se conocen como *álgebras normadas*.

Introduzcamos ahora otra importante operación que generaliza la conjugación compleja y que llamamos operación estrella.

Definición 2.4. Decimos que A es una $*$ -álgebra si existe un mapeo $*$: $A \rightarrow A$ que satisface las siguientes identidades para cada $a, b \in A, \alpha \in \mathbb{C}$

1. *Involutiva*: $(a^*)^* = a$,
2. *Antimultiplicativa*: $(ab)^* = b^*a^*$,
3. *Antilineal*: $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha}a^* + b^*$,

donde $\bar{\alpha}$ es la conjugación compleja. A dicho mapeo lo llamamos *involución del álgebra* o simplemente *estrella*.

Definición 2.5. Decimos que A es un álgebra de Banach si es un álgebra normada y además es completa respecto a una norma definida, es decir, toda sucesión de Cauchy¹ es convergente.

¹Véase A.5

Definición 2.6. Sea A un álgebra de Banach con unidad, el espectro de un elemento $a \in A$, denotado como $\sigma(a)$, es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $(a - \lambda 1)$ no es invertible.

Ahora bien, sólo nos falta definir entonces lo que es un Álgebra C^* .

Definición 2.7. Decimos que A es un álgebra C^* (o bien una C^* -álgebra) si es una $*$ -álgebra de Banach que cumple con la condición:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \quad \forall a \in A, \quad (2.4)$$

la cual llamamos propiedad C^* .

Definición 2.8. Sea A una C^* -álgebra. Un elemento $a \in A$ se dice positivo, denotado como $a \geq 0$, si cumple las siguientes propiedades

1. Es autoadjunto: $a^* = a$
2. Su espectro es positivo: $\sigma(a) \subset [0, \infty)$.

Algunas propiedades interesantes e importantes de los elementos positivos son que un elemento $a \in A$ es positivo si y solo si existe un $b \in A$ tal que cumple con $a = b^*b$. Así como también todos los elementos positivos forman un cono convexo, cerrado y estricto.

Definición 2.9. Sean A y B dos álgebras, entonces un homomorfismo entre A y B es una aplicación $\varphi : A \rightarrow B$ tal que satisface:

1. Lineal: $\varphi(\alpha a + b) = \alpha\varphi(a) + \varphi(b)$,
2. Multiplicativa: $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Si A y B son $*$ -álgebras entonces decimos que es un $*$ -homomorfismo si respeta la operación estrella: $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$. El homomorfismo es unital si $\varphi(1) = 1$.

A los homomorfismos inyectivos se les conoce como monomorfismos, a los suprayectivos epimorfismos y si son biyectivos, isomorfismos.

2.2. Puntos

Una parte esencial del trabajo es la de atribuir características geométricas a los espacios asociados a álgebras C^* , para lo cual es necesario traducirlas al lenguaje algebraico. Empezamos por el concepto de punto, para lo cual usamos conceptos topológicos básicos (se pueden consultar en el apéndice) en los cuales no se entra en detalle salvo que sea necesario.

Empezamos con un espacio compacto X y $C(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas de X en \mathbb{C} . Obsérvese que si consideramos la suma, la multiplicación por escalares y el producto de funciones definidos como:

1. Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. Producto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$,
3. Multiplicación por escalares $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Entonces $C(X)$ adquiere la estructura de un álgebra conmutativa unital donde la unidad es la función $1(x) = 1, \forall x \in X$. Así mismo, si definimos la operación $*$: $C(X) \rightarrow C(X)$ como:

$$f^*(x) = \overline{f(x)}, \quad (2.5)$$

y consideramos la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad (2.6)$$

entonces $C(X)$ es una C^* -álgebra unital.

Definición 2.10. *Sea A una $*$ -álgebra. Un caracter $\kappa : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un $*$ -homomorfismo no trivial entre las álgebras A y \mathbb{C} .*

En el caso de $A = C(X)$ existe una correspondencia 1 – 1 entre el espacio de caracteres de A y puntos del espacio X . Pues para cada $x \in X$ podemos definir el caracter $\kappa_x : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$, dado por:

$$\kappa_x = f(x). \quad (2.7)$$

Por otro lado, si $\kappa : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ es un caracter, entonces el kernel de κ es un ideal maximal (véase definición A.16), y los ideales maximales de las funciones $C(X)$ son de la forma $I_p = \{f \in C(X) : f(p) = 0\}$, para algún $p \in X$. Así como $f - \kappa(f)1 \in \ker(\kappa)$ entonces $\exists x \in X$ tal que $(f - \kappa(f)1)(x) = 0$, es decir, $f(x) = \kappa(f) = \kappa_x(f)$.

Así pues, el concepto geométrico de punto se traduce al lenguaje algebraico como caracter. En particular, si el álgebra no es conmutativa posiblemente no habrá caracteres lo cual geoméricamente significa la falta de puntos.

2.3. Simetrías

El siguiente concepto geométrico es el de simetría. Las simetrías juegan un papel de gran importancia en la física, ejemplo de ello es el teorema de Noether el cual relaciona las simetrías de un sistema con cantidades conservadas. Dicho teorema es un resultado fundamental para la física teórica, lo que nos deja ver la importancia del estudio de las simetrías.

En el marco de la Geometría Cuántica, pasamos entonces al lenguaje algebraico el concepto de simetría.

Definición 2.11. *Sea A un álgebra ($*$ -álgebra) asociativa y unital. Una simetría de A ($*$ -simetría) es un automorfismo ($*$ -automorfismo) de álgebras, es decir, un isomorfismo (que preserva $*$) de A en sí misma.*

Definición 2.12. *Sea A una $*$ -álgebra unital. Un elemento $g \in A$ se llama unitario si cumple con que $g^* = g^{-1}$, lo que a su vez implica que $gg^* = g^*g = 1$.*

Definición 2.13. *Sea A un álgebra asociativa y unital, una simetría interna es un automorfismo de álgebras, f_g dado de la siguiente manera:*

$$f_g : A \rightarrow A \quad a \mapsto gag^{-1}$$

con g elemento fijo e invertible de A y con $a \in A$. Además, si A es $*$ -álgebra y g es unitario entonces f_g es $*$ -automorfismo.

2.4. Teorema de Gelfand-Naimark

Uno de los resultados más importantes para el desarrollo de la Geometría Cuántica es el trabajo de Gelfand y Naimark, el cual establece que toda C^* -álgebra conmutativa con unidad se puede ver como el álgebra de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto.

Así, existe una relación entre los conceptos topológicos de X y los conceptos algebraicos del álgebra C^* .

Teorema 2.1. (Gelfand-Naimark). *Sea A una C^* -álgebra conmutativa con unidad, entonces existe un único espacio topológico compacto X (salvo homeomorfismos), tal que A es isométricamente isomorfa a $C(X)$.²*

²La demostración requiere otros aspectos técnicos y definiciones. La demostración puede encontrarse en [10].

Por medio de este teorema podemos definir un funtor contravariante entre la categoría de álgebras C^* y la categoría de los espacios topológicos compactos. Lo cual nos permite estudiar las propiedades geométricas de X por medio de propiedades algebraicas de A .

Esta correspondencia se puede extender y profundizar al caso de álgebras no conmutativas introduciendo así un nuevo concepto de espacio. El camino que nos permite establecer dicha correspondencia es a través de la llamada construcción Gelfand-Naimark-Segal en la cual se conectan profundamente el formalismo de la Mecánica Cuántica (Espacios de Hilbert, Teoría de Operadores, Amplitudes de Probabilidad) que tiene un significado físico, con el formalismo de C^* -álgebras que a priori es una herramienta puramente matemática, dando así un paso más en nuestro objetivo inicial.

2.5. Construcción Gelfand-Naimark-Segal

Para estudiar la construcción Gelfand-Naimark-Segal (también llamada simplemente construcción GNS) es necesario introducir nuevas herramientas como lo son la teoría de representaciones, estados, entre otras. Estos elementos nos permiten establecer la conexión con el formalismo de la Mecánica Cuántica.

2.5.1. Teoría de representaciones

La teoría de representaciones nos brinda la posibilidad de relacionar álgebras C^* con algún espacio de Hilbert H a través de los operadores acotados de H .

Definición 2.14. *Sea H un espacio de Hilbert. Un operador a sobre H se dice acotado si cumple con:*

$$\|a\| < \infty \tag{2.8}$$

en donde hemos definido $\|a\|$ como

$$\|a\| = \sup \frac{\|a\phi\|}{\|\phi\|}, \tag{2.9}$$

con $\phi \in H$ y la condición $\|\phi\| \neq 0$.

Se denota $B(H)$ al conjunto de todos los operadores acotados.

Además, no es difícil probar que $B(H)$ es un C^* -álgebra, donde la operación $*$: $B(H) \rightarrow B(H)$ está dada por la operación adjunta de operadores $\langle \phi, a\psi \rangle = \langle a^*\phi, \psi \rangle$.

Algunas propiedades importantes de los operadores acotados tienen que ver con su espectro, ya que se puede demostrar que el espectro de un operador acotado es no vacío y más aún, es acotado y cerrado también. Esto será de utilidad cuando se mencionen las relaciones de conmutación de la Mecánica Cuántica.

Definición 2.15. Sea A un álgebra C^* . Una representación π es un $*$ -homomorfismo entre A y $B(H)$.

Definición 2.16. Sea A una C^* -álgebra unital con unidad, un estado ρ es un funcional $\rho : A \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface:

1. Lineal: $\rho(a + \lambda b) = \rho(a) + \lambda \rho(b)$,
2. Normalizado³: $\rho(1) = 1$,
3. Positivo: $\rho(a) \geq 0 \quad \forall a \geq 0$.

El concepto de estado será importante en el desarrollo posterior, por lo cual se trata con más detalle.

Proposición 2.1. Sea ρ un estado, entonces cumple con las siguientes propiedades:

$$\rho(b^*a) = \overline{\rho(a^*b)}, \quad (2.10)$$

$$|\rho(b^*a)|^2 \leq \rho(a^*a)\rho(b^*b). \quad (2.11)$$

La importancia de los estados, es que éstos se pueden asociar con las medidas de probabilidad de la siguiente manera. Supongamos que X es un espacio topológico compacto y medible, y consideremos a μ una medida de probabilidad definida sobre X . Ahora, sea $\rho = \rho_\mu : A \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal definido por la integral de Lebesgue

$$\rho(f) = \int_X f(x) d\mu(x). \quad (2.12)$$

Dicho mapeo ρ cumple con ser lineal, normalizado y positivo, es decir, es un estado sobre A .

Ahora si $\rho : A \rightarrow \mathbb{C}$ es un estado arbitrario sobre A , entonces existe una única medida de probabilidad μ sobre X tal que $\rho = \rho_\mu$. Es decir, existe una correspondencia entre estados en A y medidas de probabilidad en X . Este es conocido como el teorema de representación de Riesz.

³En muchos textos se usa la notación $\mathbb{1}$ para diferenciar el elemento unidad del álgebra del escalar, sin embargo se considera que el contexto es suficiente para apreciar tal distinción.

Como sabemos, en Mecánica Cuántica esencialmente se calculan probabilidades, las cuales están estrechamente relacionadas con los estados de un álgebra, con lo cual, es posible estudiar los estados y obtener resultados que podemos interpretar en Mecánica Cuántica.

Consideremos entonces ρ_1 y ρ_2 estados sobre A , entonces para cada $t \in [0, 1]$ la combinación $t\rho_1 + (1-t)\rho_2$ también es un estado. Con lo cual, el conjunto de estados de A , denotado $S(A)$ forman un conjunto convexo. Como detalle importante cabe mencionar que siempre se cumple que $S(A) \neq \emptyset$.

Definición 2.17. *Un elemento extremal ρ en un conjunto convexo, es aquel que cumple que si $\rho = t\rho_1 + (1-t)\rho_2$, con $t \in (0, 1)$, entonces $\rho = \rho_1 = \rho_2$.*

Definición 2.18. *A los elementos extremales de $S(A)$ se les llama estados puros de A .*

Pasaremos ahora a relacionar los conceptos desarrollados previamente, representaciones y estados.

Sea A una C^* -álgebra y ρ un estado de A . Vamos a dotar a A de un semi-producto interior (véase definición A.2) dado por $\langle a, b \rangle := \rho(a^*b)$ para $a, b \in A$. Al ser semi-producto interno, la positividad estricta no está garantizada, es decir, $\langle a, a \rangle \geq 0, \forall a \in A$, lo que implica que el resultado puede ser 0 aunque los elementos no sean nulos. Ahora, definamos el conjunto

$$I_\rho := \{a \in A : \langle a, a \rangle = 0\}. \quad (2.13)$$

Se puede mostrar que dicho conjunto es un ideal izquierdo de A , con lo cual, podemos considerar el espacio vectorial $A/I_\rho = \{a + I_\rho : a \in A\}$. En dicho espacio, el semi-producto interior definido anteriormente, induce un producto interior, es decir, la positividad estricta está garantizada, con lo cual el espacio ahora tiene una estructura de espacio pre-Hilbert. Al ser un espacio pre-Hilbert, podemos hacer la completación de dicho espacio, para volverlo un espacio de Hilbert. Al espacio de Hilbert resultante de esta completación, lo denotaremos como H_ρ .

Con lo anterior, podremos definir la representación Δ de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \Delta : A &\rightarrow B(H_\rho) \\ \Delta(a) : H_\rho &\rightarrow H_\rho \\ b + I_\rho &\mapsto ab + I_\rho \end{aligned} \quad (2.14)$$

El mapeo Δ es un *-homomorfismo unitario y además cumple con:

$$\|\Delta(a)\| \leq \|a\|, \quad (2.15)$$

es decir, es un operador acotado de $B(H_\rho)$.

Las fórmulas anteriores se aplican al espacio A/I_ρ pero por continuidad de extienden a H_ρ , así mismo Δ se extiende a π_ρ .

Definición 2.19. Sea π una representación y H un espacio de Hilbert. Si $x \in H$ es un vector unitario entonces $\phi(a) = \langle \pi(a)x, x \rangle$ define un estado sobre A , que llamaremos vector estado.

Definición 2.20. Decimos que π es una representación fiel si $\ker \pi = \{0\}$, en ese caso $A \cong \pi(A)$.

Definición 2.21. La representación π se dice cíclica, si existe $\xi \in H$ tal que

$$\pi(A)\xi = \{\pi(a)\xi : a \in A\}, \quad (2.16)$$

es denso en H . Y el vector ξ es llamado vector cíclico para π .

Definición 2.22. Sea π una representación de A en H y $K \subset H$ un subespacio de Hilbert. Entonces, si $\pi(a)K \subset K, \forall a \in A$ decimos que K es invariante bajo π .

Definición 2.23. Una representación π es irreducible si no existe un subespacio no trivial $K \subset H$ invariante bajo π .

Teorema 2.2. (Gelfand-Naimark-Segal). Sea A una C^* -álgebra unital y ρ un estado de A , entonces existe una única representación (salvo equivalencia mediante operadores unitarios) $\pi : A \rightarrow B(H)$ cíclica y un vector cíclico $\xi \in H$ tal que $\|\xi\| = 1$ y

$$\rho(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle.$$

Ahora, regresemos con la representación que construimos previamente π_ρ . Podemos directamente ver que $\xi_\rho = 1 + I_\rho$, es decir la clase del $1 \in A$, es el vector cíclico y unitario tal que

$$\rho(a) = \langle \pi_\rho(a)\xi_\rho, \xi_\rho \rangle.$$

Teorema 2.3. Sea ρ un estado de A , entonces la representación π_ρ es irreducible si y solo si ρ es un estado puro.

Teorema 2.4. Sea A una C^* -álgebra. Entonces, para cada $a \in A$ existe una representación irreducible π de A tal que $\|\pi(a)\| = \|a\|$.

Con lo anterior, podremos enunciar y demostrar fácilmente nuestro resultado principal, el cual es consecuencia de la construcción GNS.

Corolario 2.1. (Extensión para álgebras no conmutativas) *Sea A una C^* -álgebra. Entonces A es isométricamente $*$ -isomorfa a una $*$ -subálgebra de $B(H)$ para algún espacio de Hilbert H .*

Demostración. Sea $\pi = \sum_{\rho \in \mathcal{S}(A)} \pi_{\rho}$ la suma directa de las representaciones π_{ρ} , donde todas las ρ son estados puros. Como son estados puros, entonces las representaciones son irreducibles. Ahora bien

$$\|\pi(a)\| = \sup \|\pi_{\rho}(a)\|, \quad (2.17)$$

pero el teorema anterior nos asegura que para cada $a \in A$, existe una representación irreducible tal que

$$\|\pi(a)\| = \|a\|. \quad (2.18)$$

Con lo cual, el $\sup \|\pi_{\rho}\|$ será precisamente cuando se cumpla con $\|\pi(a)\| = \|a\|$. Por lo tanto, para cada $a \in A$ se cumple con $\|\pi(a)\| = \|a\|$, y por consiguiente, π es un isomorfismo isométrico. ■

2.6. Notación de Dirac

Para finalizar las bases matemáticas necesarias, presentaremos la notación de Dirac, ampliamente utilizada en física y muy pocas veces justificada debidamente.

Definición 2.24. *Sea F un espacio vectorial normado. Se llama espacio dual de F , denotado como F^* , al conjunto de todos los funcionales lineales continuos de F en \mathbb{C} .*

Teorema 2.5. (Teorema de Representación de Riesz). *Sea H un espacio de Hilbert dotado con un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y sea H^* su espacio dual. Si $f \in H^*$ entonces existe un único vector $v \in H$ tal que $f(u) = \langle v, u \rangle$ para todo $u \in H$.*

A cada $u \in H$ lo denotaremos como $|u\rangle$ y al funcional $f \in H^*$ como $\langle v|$, donde $v \in H$ es el único vector del teorema. A los elementos de la forma $\langle \cdot, |$ se les llama *bra* y a los elementos $|\cdot\rangle$ *ket*, de aquí que se le conozca también como notación Bra-ket. Los bras y los kets cumplen con las propiedades siguientes:

1. $|u + v\rangle = |u\rangle + |v\rangle$,
2. $|\lambda u\rangle = \lambda |u\rangle$,
3. $\langle \lambda u| = \bar{\lambda} \langle u|$.

Capítulo 3

Correspondencia con la Mecánica Cuántica

Después de haber sentado las bases matemáticas necesarias, se desarrollan algunos ejemplos para relacionar los conceptos matemáticos con la parte de Mecánica Cuántica. Para ello, empezamos con dos ejemplos sencillos: el Plano Cuántico y la Esfera Cuántica. Al álgebra generada por la relación de Heisenberg la llamamos Plano Cuántico. Para la Esfera Cuántica, se empieza por mostrar el más simple de los casos, el álgebra de matrices 2×2 al cual de cariño nombramos “*Esfera Cuántica Bebé*”¹. Dichos nombres se justificarán a través de todos los conceptos desarrollados previamente.

3.1. Plano Cuántico

En primer lugar tomemos el caso más *sencillo* de todos, el denominado Plano Cuántico, el cual viene dado por el momento lineal y por la posición. Cabe resaltar que en este trabajo tomamos al Plano Cuántico, como una “cuantización” del espacio fase clásico. Otras definiciones de plano cuántico que se tratan en diversos libros no se consideran para los objetivos de este trabajo.

Consideremos entonces a los operadores \hat{P} y \hat{X} que representan al momento lineal y a la posición de una “partícula” (de un sistema cuántico en general). El Plano Cuántico es entonces el álgebra generada por dichos operadores, los cuales

¹Tomado del curso de Geometría Cuántica impartido por el Dr. Micho Durdevich en la Facultad de Ciencias, UNAM.

satisfacen la regla de conmutación

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar. \quad (3.1)$$

Teorema 3.1. *El Plano Cuántico no tiene puntos.*

Demostración. Anteriormente explicamos que la existencia de puntos está directamente relacionada con la existencia de caracteres. Con lo cual basta demostrar que no existen caracteres para poder demostrar que no hay puntos.

Supongamos que existe un caracter κ , entonces tenemos que

$$\kappa[\hat{X}, \hat{P}] = \kappa(\hat{X}\hat{P}) - \kappa(\hat{P}\hat{X}), \quad (3.2)$$

usando que κ es multiplicativo se tiene que:

$$\kappa[\hat{X}, \hat{P}] = \kappa(\hat{X})\kappa(\hat{P}) - \kappa(\hat{P})\kappa(\hat{X}) = 0, \quad (3.3)$$

esto debido a que κ es un funcional que nos manda a \mathbb{C} , donde tenemos conmutación. Por otra parte, como se satisface la relación 3.1 se llega a que

$$\kappa[\hat{X}, \hat{P}] = 0 = \kappa(i\hbar) \quad (3.4)$$

$$0 = i\hbar\kappa(1) = i\hbar \quad (3.5)$$

$$0 = i\hbar \quad (3.6)$$

Lo que es una contradicción, por lo cual no existen caracteres y por tanto no existen puntos. ■

3.1.1. Relaciones de conmutación de Heisenberg-Weyl

Como detalle importante debemos señalar que los operadores \hat{X}, \hat{P} no son acotados, lo que a priori nos indica que no podemos usar todo el formalismo desarrollado anteriormente para álgebras C^* . Es natural pues buscar operadores acotados que nos permitan librar esta restricción, y a la vez cumplan con la relación fundamental de conmutación de Mecánica Cuántica. Sin embargo se muestra que es imposible encontrar dichos operadores con tales características, lo que nos obliga a buscar otra representación de las relaciones de conmutación.

Teorema 3.2. *Dada un álgebra de Banach A , es imposible expresar a la unidad 1 como conmutador de cualquiera dos elementos del álgebra, es decir, no existen $a, b \in A$ tal que se cumpla con $[a, b] = 1$.*

Demostración. Para la demostración usaremos propiedades del espectro de los operadores acotados, el cual debe ser no vacío y acotado.

Entonces, supongamos que existen $a, b \in A$ que cumplen con $[a, b] = 1$. Con lo cual tendríamos que:

$$\begin{aligned} ab - ba &= 1 \\ ab &= 1 + ba \end{aligned} \quad (3.7)$$

sacando entonces el espectro tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(ab) &= \sigma(1 + ba) \\ &= 1 + \sigma(ba) \\ &= 1 + \sigma(ab) \end{aligned} \quad (3.8)$$

lo anterior debido a que usamos las propiedades del espectro que nos dicen que el espectro de un polinomio, es el polinomio del espectro. Y el espectro de un producto no distingue orden salvo añadiendo el 0.

Lo que nos indica el resultado anterior, es que el espectro no puede ser acotado, lo que es una contradicción, por lo tanto no existen elementos en el álgebra que satisfagan dicha relación. ■

Sin embargo, Weyl propuso construir otros operadores a partir de \hat{X}, \hat{P} de la siguiente forma:

$$U^a = e^{ia\hat{X}}, \quad V^b = e^{ib\hat{P}}, \quad (3.9)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Dichos operadores, son operadores unitarios (véase A.21) y por tanto son acotados, con lo que es una forma de librar el problema de que \hat{X}, \hat{P} no sean acotados. Los operadores U y V son representantes de grupos uniparamétricos, con parámetros a y b respectivamente. Con lo que para cada $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos un operador unitario. Usando un caso especial de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (véase A.20), y recordando la regla de conmutación de \hat{X} y \hat{P} , obtenemos la siguiente relación:

$$U^a V^b = e^{iab\hbar} V^b U^a. \quad (3.10)$$

Dicha relación se conoce como relación de Weyl, o relación de conmutación de Heisenberg-Weyl. Así pues, el álgebra generada por todos los operadores U^a, V^b resulta ser un álgebra C^* , lo que nos permite usar toda la maquinaria que desarrollamos al inicio para álgebras C^* .

Las relaciones de conmutación de Heisenberg-Weyl, obtienen dicho nombre ya que podemos ver que los operadores U^a, V^b “casi conmutan”, salvo por el termino $e^{iab\hbar}$. Se ve más adelante que dicha relación se puede ver de la forma $UV = zVU$, con $|z| = 1$, lo que nos define una nueva álgebra que se conoce como el Toro Cuántico.

3.1.2. Operador de desplazamiento de Weyl

Siguiendo la idea de Weyl para resolver el problema de que los operadores de momento y posición no sean acotados, introducimos el llamado operador de desplazamiento de Weyl (O Weyl-Heisenberg), ya que éste nos brinda un mejor panorama sobre la acción del álgebra de Weyl en casos concretos de la Mecánica Cuántica.

Primero tomemos un vector $z = (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, con n la dimensión en la que estemos trabajando el problema, con lo cual podemos definir un operador \hat{D}_z de la siguiente forma:

$$\hat{D}_z = e^{\frac{i}{\hbar}(p \cdot \hat{X} - x \cdot \hat{P})}, \quad (3.11)$$

en donde

$$p \cdot \hat{X} = \sum_{i=1}^n p_i \hat{X}_i, \quad (3.12)$$

y similarmente para $x \cdot \hat{P}$.

Dicho operador se denomina *Operador de desplazamiento de Weyl*, y a continuación queda claro de dónde sale dicho nombre.

Recordemos el caso particular de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para operadores cuyo conmutador es proporcional a la unidad.

$$e^{\hat{A} + \hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}. \quad (3.13)$$

Usando dicha fórmula, podemos llegar a la siguiente relación:

$$\hat{D}_z \hat{D}_{z'} = e^{(-\frac{1}{2\hbar} \sigma(z, z'))} \hat{D}_{z+z'}, \quad (3.14)$$

con $z = (x, p)$, $z' = (x', p')$ y $\sigma(z, z') = x \cdot p' - p \cdot x'$. Más aún, tenemos que también se cumple que:

$$\hat{D}_z \hat{D}_{z'} = e^{(-\frac{1}{\hbar} \sigma(z, z))} \hat{D}_{z'} \hat{D}_z. \quad (3.15)$$

Lo que nos recuerda a la regla de conmutación de Weyl que introducimos anteriormente.

Además tenemos que :

$$(\hat{D}_z)^{-1} = (\hat{D}_z)^* = \hat{D}_{-z}. \quad (3.16)$$

Veamos por qué lo consideramos un operador de desplazamiento.

Proposición 3.1. Para cada $z = (x, p) \in \mathbb{R}^2$ se cumple con:

$$\hat{D}_z \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{P} \end{pmatrix} \hat{D}_z^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{X} - x \\ \hat{P} - p \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Demostración. Haremos uso de un caso particular de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff que nos establece que dados X, Y operadores, si su conmutador $[X, Y]$ es central (es decir, que el conmutador a su vez conmute con cada uno de los operadores) se cumple que: $e^{sX} Y e^{-sX} = Y + s[X, Y]$. Tomando dicho resultado, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \hat{D}_z \hat{X} \hat{D}_z^{-1} &= \hat{X} + \frac{i}{\hbar} [p\hat{X} - x\hat{P}, \hat{X}] \\ &= \hat{X} + \frac{i}{\hbar} p [\hat{X}, \hat{X}] - \frac{i}{\hbar} x [\hat{P}, \hat{X}] \\ &= \hat{X} - \frac{i}{\hbar} x (-i\hbar) = \hat{X} - x. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Y análogamente para \hat{P} . ■

3.1.3. Estados coherentes

El estudio de los estados coherentes siempre ha sido de gran interés en la Mecánica Cuántica desde que Schrödinger describiera estados del oscilador armónico que presentan una lenta dispersión respecto al tiempo, y que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg. Dichos estados fueron estudiados por Glauber más tarde en sus estudios de la óptica cuántica relacionándolos con la coherencia óptica, de donde tomaron su nombre. Posteriormente dichos estados fueron introducidos en áreas como óptica cuántica, computación cuántica, etc.

Como se ve más adelante, los estados coherentes están relacionados con el álgebra de Heisenberg-Weyl, lo que nos permite estudiarlos desde el punto de vista de la Geometría Cuántica.

Tomando el trabajo de Glauber es posible definir a los estados coherentes de 3 formas distintas:

Definición 3.1. (Con operador de aniquilación) Los estados coherentes α son los eigenestados del operador de aniquilación \hat{a} del oscilador armónico, es decir:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.19)$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ donde \hat{a} es el operador de aniquilación definido como:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{X} + i\hat{P}). \quad (3.20)$$

Definición 3.2. (Con relación de incertidumbre)

Los estados coherentes minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg, es decir:

$$\Delta P \Delta X = \frac{\hbar}{2}. \quad (3.21)$$

Definición 3.3. (Con operador de desplazamiento)

Los estados coherentes son estados desplazados del estado base ($n=0$) del oscilador armónico, es decir:

$$\hat{D}_\alpha|0\rangle = |\alpha\rangle, \quad (3.22)$$

donde D_α es el operador de desplazamiento definido como

$$\hat{D}_\alpha = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \bar{\alpha}\hat{a}}. \quad (3.23)$$

Para nuestros fines, empezamos trabajando con la última definición mencionada (con operador de desplazamiento) lo cual sirve para mostrar la equivalencia con las demás definiciones.

Tomemos a los operadores de creación \hat{a}^\dagger y de aniquilación \hat{a} :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{X} + i\hat{P}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{X} - i\hat{P}), \quad (3.24)$$

cuya regla de conmutación está dada por:

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{j,k}. \quad (3.25)$$

Ahora bien, hemos dicho que el operador \hat{D}_α es un operador de desplazamiento. Mostremos primero que efectivamente corresponde con el operador de Weyl \hat{D}_z que introducimos anteriormente y que mostramos que efectivamente genera un desplazamiento.

Proposición 3.2. Sea $z = (x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ y definamos $\alpha = (x + ip)/\sqrt{2\hbar} \in \mathbb{C}$, entonces se cumple que $\hat{D}_\alpha = \hat{D}_z$.

Demostración. Tenemos que \hat{D}_α está definido por (3.23). Usando las definiciones para α y para los operadores de creación y aniquilación, tenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{D}_\alpha &= \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(x + ip)\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{X} - i\hat{P}) - \overline{\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(x + ip)\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{X} + i\hat{P})\right)}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}ix\hat{P} + \frac{1}{2\hbar}p\hat{X} - \frac{1}{2\hbar}ix\hat{P} + \frac{1}{2\hbar}p\hat{X}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\hbar}(p\hat{X} - x\hat{P})\right) \\ &= \hat{D}_z. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Que es lo que queríamos demostrar. ■

Proposición 3.3. El operador \hat{D}_α actuando sobre \hat{a} desplaza por α a dicho operador, es decir,

$$\hat{D}_\alpha \hat{a} \hat{D}_\alpha^{-1} = \hat{a} - \alpha.$$

Demostración. Análogamente a lo hecho con \hat{D}_z usamos la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Con lo cual resulta:

$$\begin{aligned} \hat{D}_\alpha \hat{a} \hat{D}_\alpha^{-1} &= \hat{a} + [\alpha \hat{a}^\dagger - \bar{\alpha} \hat{a}, \hat{a}] \\ &= \hat{a} + \alpha [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] - \bar{\alpha} [\hat{a}, \hat{a}] \\ &= \hat{a} - \alpha. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Con lo que queda completa la demostración. ■

Veamos entonces que la definición 3 implica la definición 1.

Proposición 3.4. Los estados coherentes son eigenestados del operador de aniquilación \hat{a} .

Demostración. Tomemos el estado desplazado del vacío $\hat{D}_\alpha |0\rangle = |\alpha\rangle$. Entonces tenemos que²:

$$\hat{D}_\alpha \hat{a} \hat{D}_\alpha^{-1} |\alpha\rangle = \hat{D}_\alpha \hat{a} |0\rangle = \mathbf{0}. \tag{3.28}$$

²Para distinguir usamos negritas para el vector nulo. No confundir con $|0\rangle$ que representa el estado base del oscilador, y también el estado coherente con $\alpha = 0$.

28 CAPÍTULO 3. CORRESPONDENCIA CON LA MECÁNICA CUÁNTICA

Por otra parte, usando la proposición anterior llegamos a lo siguiente:

$$\hat{D}_\alpha \hat{a} \hat{D}_\alpha^{-1} |\alpha\rangle = (\hat{a} - \alpha) |\alpha\rangle, \quad (3.29)$$

con lo cual

$$(\hat{a} - \alpha) |\alpha\rangle = \mathbf{0}. \quad (3.30)$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \quad (3.31)$$

Con lo que queda demostrado. ■

Hasta ahora hemos relacionado los estados coherentes del oscilador armónico con operadores de desplazamiento, los cuales obedecen reglas de conmutación especiales (Toro Cuántico). Nuestro siguiente paso para reflejar la conexión entre la Geometría Cuántica y la Física Cuántica, es ver que los estados coherentes cubren todo el Plano Cuántico, que ya hemos demostrado que no tiene puntos (no tiene caracteres).

Veamos primero algunas propiedades que nos serán útiles para demostrar que cubren todo el Plano Cuántico.

Proposición 3.5. (Descomposición de los estados coherentes) *Los estados coherentes pueden expresarse de la siguiente forma:*

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Demostración. Tenemos que un estado coherente $|\alpha\rangle$ se genera a partir del operador \hat{D}_α , es decir, $|\alpha\rangle = \hat{D}_\alpha |0\rangle$. Usando de nueva cuenta la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff factoricemos al operador D_α de la siguiente manera:

$$\hat{D}_\alpha = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\bar{\alpha} \hat{a}}. \quad (3.32)$$

Al ser exponenciales de operadores, debemos expandir en su serie de Taylor cada exponencial. Empecemos con la exponencial que tiene al operador de aniquilación:

$$e^{-\bar{\alpha} \hat{a}} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\bar{\alpha} \hat{a})^n}{n!} |0\rangle = \mathbf{0} + 1 |0\rangle = |0\rangle, \quad (3.33)$$

ya que cada potencia del operador de aniquilación nos entrega un 0, sobreviviendo solamente la identidad.

Ahora, para la exponencial con el operador de creación obtenemos que:

$$e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (3.34)$$

ya que $(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$ con lo cual, simplemente nos queda que:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.35)$$

Que es nuestro resultado deseado. ■

Para demostrar que los estados coherentes “cubren” todo el Plano Cuántico, debemos mostrar que estos satisfacen una relación de completéz.³ Dicha relación está dada por el siguiente teorema:

Teorema 3.3. (*Relación de completéz de los estados coherentes*) *Los estados coherentes forman una base completa⁴ del espacio de Hilbert. Dicha relación está dada por:*

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1,$$

donde $d^2\alpha$ representa una integración en el plano complejo, es decir, $d^2\alpha = d\text{Re}(\alpha)d\text{Im}(\alpha)$.

Demostración. Utilizando la proposición anterior, podemos reescribir el ket y el bra (conjugando para el bra) de la siguiente forma

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m} \frac{\alpha^n \bar{\alpha}^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m|. \quad (3.36)$$

Haciendo un cambio a coordenadas polares, hacemos la sustitución $\alpha = re^{i\theta}$ y $d^2\alpha = r dr d\theta$, con lo cual obtenemos

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m| \int_0^\infty dr e^{-r^2} r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta}. \quad (3.37)$$

³Usualmente siempre se busca una base ortonormal para los sistemas cuánticos, sin embargo los estados coherentes no cumplen con la propiedad de ortogonalidad aunque esto no es impedimento para que representen una base para el espacio de Hilbert. Dicha base se conoce como *sobrecompleta*, ya que debido a no ser ortogonales, los estados coherentes pueden expresarse en términos de otros estados coherentes. La demostración de su no ortogonalidad se encuentra en [11].

⁴Como mencionamos anteriormente, realmente se conoce como base *sobrecompleta*

30 CAPÍTULO 3. CORRESPONDENCIA CON LA MECÁNICA CUÁNTICA

Ahora, la parte angular es trivial, ya que usando la identidad de Euler tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{n,m} \quad (3.38)$$

entonces nos queda

$$\begin{aligned} 2\pi\delta_{n,m} \sum_{n,m} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle\langle m| \int_0^\infty dre^{-r^2} r^{n+m+1} \\ = 2\pi \sum_n \frac{1}{n!} |n\rangle\langle n| \int_0^\infty rdre^{-r^2} r^{2n}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Introduciendo además el cambio de variable $y = r^2$ y $dy = 2rdr$ obtenemos para la parte radial:

$$2 \int_0^\infty rdre^{-r^2} r^{2n} = \int_0^\infty e^{-y} y^n dy = \Gamma(n+1) = n!, \quad (3.40)$$

con lo cual obtenemos el resultado final:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{1}{n!} |n\rangle\langle n| \pi n! = \sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \quad (3.41)$$

Que es lo que buscamos. ■

Con el resultado anterior, hemos demostrado que los estados coherentes “cubren” todo el Plano Cuántico, es decir, cualquier vector del espacio de Hilbert puede ser expresado en términos de los estados coherentes. Este hecho es parte fundamental para establecer la correspondencia entre la Geometría Cuántica y la Mecánica Cuántica. Vimos que los estados coherentes se pueden estudiar a partir de operadores que satisfacen un álgebra muy especial que es el toro cuántico, el cual describe un espacio que no tiene “puntos”, es decir, no tiene ningún carácter. Aunque el plano cuántico podría parecer en principio el ejemplo más sencillo y simple de la conexión de la Geometría Cuántica y la Física Cuántica, pueden encontrarse diversos resultados de profundas implicaciones en la interpretación física. Dichos resultados se encuentran al estudiar las representaciones y los estados del toro cuántico los cuales pueden depender de tomar un valor racional o irracional en nuestras constantes. Ya que el propósito del trabajo es mostrar en principio la correspondencia, se usó la descripción tradicional a partir del operador de desplazamiento, sin embargo, se puede ser más minucioso a la hora de ejecutar el análisis para poder desentrañar resultados más profundos. Dicho análisis sale de los propósitos del presente trabajo por lo cual sólo se introduce una breve discusión sobre el mencionado problema.

3.1.4. Breve discusión sobre El Toro Cuántico

Anteriormente hemos hablado brevemente sobre el toro cuántico cuando demostramos que el plano cuántico carece de puntos, haciendo el análisis simplemente con los operadores \hat{X} y \hat{P} . También mencionamos que dichos operadores no son acotados, y para poder usar toda la maquinaria de la Geometría Cuántica, deberíamos tomar los operadores de Weyl que cumplen con la condición de ser acotados. Introdujimos la relación de conmutación de Heisenberg-Weyl (véase (3.10)), la cual nos genera un álgebra no conmutativa, y a partir de ahí pudimos relacionarlo con los estados coherentes. Ahora se dará el paso de introducir un álgebra más general que la asociamos con un Toro Cuántico.

Tomemos la *-álgebra A definida por medio de dos generadores u y v que satisfacen:

1. Son unitarios: $u^* = u^{-1}$, $v^* = v^{-1}$,
2. Regla de multiplicación: $uv = zvu$,

con algún $z \in \mathbb{C}$ necesariamente de norma 1.

En el caso en que $z = 1$ obtendremos un álgebra conmutativa, y como u y v son elementos unitarios, cada generador corresponde a un círculo, con lo cual tenemos simplemente el producto cartesiano de dos círculos, es decir, tenemos un toro clásico.

Por otra parte, tomemos el caso $z \neq 1$, si intercambiamos el orden en una expresión algebraica aparecerán potencias de z , por ejemplo consideremos el siguiente caso:

$$u(uv)(uv)v = (u)(zvu)(zvu)v = z^2 uvuvuv. \quad (3.42)$$

Entonces, en general podemos expresar a cualquier elemento $a \in A$ como

$$a = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{nm} u^n v^m, \quad (3.43)$$

donde los coeficientes c_{nm} son números complejos cuya cantidad finita es distinta de 0. En este caso no conmutativo, A corresponde a lo que llamamos el Toro Cuántico.

Proposición 3.6. *El Toro Cuántico no tiene puntos.*

Demostración. Para demostrar que el Toro Cuántico no tiene puntos tomemos a A con $z \neq 1$ y mostremos que no contiene caracteres. Para dicho propósito usamos reducción al absurdo.

32 CAPÍTULO 3. CORRESPONDENCIA CON LA MECÁNICA CUÁNTICA

Así pues supongamos que A contiene algún caracter $\kappa : A \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces dicho caracter debe cumplir con que

$$|\kappa(u)| = |\kappa(v)| = 1, \quad (3.44)$$

y además

$$\begin{aligned} \kappa(uv) &= \kappa(zvu) \\ &= z\kappa(vu), \end{aligned} \quad (3.45)$$

y por la propiedad de ser multiplicativo se cumple con:

$$\kappa(u)\kappa(v) = z\kappa(v)\kappa(u). \quad (3.46)$$

Al ser elementos de \mathbb{C} , hay conmutatividad, por lo que (3.46) implica que $z = 1$, lo cual es una contradicción ya que supusimos que $z \neq 1$. ■

Una de las propiedades más profundas del Toro Cuántico, es que su estructura geométrica depende de la racionalidad o irracionalidad de z . Como $|z| = 1$, podemos representar a z de la forma $z = e^{i\theta}$.

Definición 3.4. Decimos que z es racional si existe k tal que $z^k = 1$. Es decir $\theta k = 2\pi l$.

Así pues, el estudio de las propiedades geométricas de A tales como sus simetrías, sus estados y sus representaciones dependen de si tenemos un z racional o irracional. Esto cobra importancia ya que dependiendo de si tomamos $\hbar = \frac{\hbar}{2\pi}$ como un número racional o irracional, la estructura geométrica del espacio se modifica. Un ejemplo para ilustrar este cambio de estructura geométrica lo podemos encontrar analizando el centro del álgebra, denotado $Z(A)$ y que consiste en los elementos del álgebra que conmutan con todos los demás elementos. En el caso racional se puede mostrar que $Z(A)$ corresponde a un Toro Clásico. Este corresponde a un ejemplo de un Haz Cuántico con una fibra clásica y grupo estructural clásico, que se pueden estudiar en el marco de los Haces Principales Cuánticos⁵. Para el caso irracional $Z(A) = 1\mathbb{C}$, lo que representa un caso totalmente distinto al caso racional. Así mismo en el caso irracional se puede mostrar que A es simple, es decir, no tiene ideales propios (véase definición A.17), lo que en la Teoría de Gelfand-Naimark podemos asociar con falta de “partes”.

⁵Una breve explicación se puede encontrar en la sección final, así como la literatura correspondiente se puede encontrar en la bibliografía

Esto debido a que es posible establecer una conexión entre los ideales de un álgebra C^* -conmutativo y conjuntos cerrados del espacio correspondiente, que clásicamente podemos identificar como “partes” de alguna estructura geométrica, y en el caso irracional al no tener ideales propios lo podemos asociar a falta de “partes”. Con lo cual queda claro que la racionalidad o irracional juega un papel importante para el estudio de las propiedades geométricas y que conducen a cuestionar los conceptos clásicos (muy establecidos desde Euclides) de “partes”, “puntos” y demás.

3.2. Esfera Cuántica

Nuestro segundo ejemplo es la llamada Esfera Cuántica, la cuál está íntimamente relacionada con la teoría de espín, que se puede interpretar como un momento angular intrínseco de las partículas, y que es una propiedad puramente cuántica. Se ve que la relación subyace en el estudio de las matrices de Pauli y en general de las matrices de 2×2 .

Tomemos entonces a $A = M_2(\mathbb{C})$ como el álgebra de matrices de 2×2 sobre los complejos. Como es un álgebra, tenemos bien definido entonces un producto algebraico:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

con la suma dada por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \alpha & b + \beta \\ c + \gamma & d + \delta \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

y el producto por un escalar λ

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Y para volverla un $*$ -álgebra, definimos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Vale la pena mencionar que cada álgebra de matrices se puede convertir en C^* -álgebra. Ya que cada operador lineal en un espacio de Hilbert de dimensión finita es acotado.

34 CAPÍTULO 3. CORRESPONDENCIA CON LA MECÁNICA CUÁNTICA

Una base alternativa para $M_2(\mathbb{C})$ está dada por las matrices de Pauli y la matriz identidad. Así pues los elementos de esta base son:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Proposición 3.7. *Las matrices de Pauli cumplen las siguientes relaciones:*

1. $\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3 = -\sigma_2 \sigma_1$,
2. $\sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1 = -\sigma_3 \sigma_2$,
3. $\sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2 = -\sigma_1 \sigma_3$,
4. $(\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2 = (\sigma_3)^2 = 1$.

Proposición 3.8. $M_2(\mathbb{C})$ no tiene caracteres.

Demostración. Supongamos que sí tiene un caracter κ . De la proposición anterior tenemos que

$$\kappa(\sigma_1) \kappa(\sigma_2) = i \kappa(\sigma_3) = -\kappa(\sigma_2) \kappa(\sigma_1). \quad (3.52)$$

Como κ nos manda a \mathbb{C} , entonces tenemos conmutación. Con lo cual

$$\kappa(\sigma_1) \kappa(\sigma_2) = -\kappa(\sigma_1) \kappa(\sigma_2), \quad (3.53)$$

lo que implica dos opciones:

$$\kappa(\sigma_1) = 0 \quad \text{ó} \quad \kappa(\sigma_2) = 0. \quad (3.54)$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que se cumple la primera: $\kappa(\sigma_1) = 0$, por otra parte tenemos que:

$$\kappa(\sigma_1^2) = \kappa(\sigma_1 \sigma_1) = \kappa(1) = 1, \quad (3.55)$$

lo cual implica que $\kappa(\sigma_1) = 1$ ó $\kappa(\sigma_1) = -1$ lo que es una contradicción ya que habíamos supuesto que $\kappa(\sigma_1) = 0$. ■

3.2.1. Simetrías

Se muestra a continuación un primer argumento del porqué del nombre “Esfera” al analizar sus simetrías. Como sabemos las simetrías son los automorfismos de dicha álgebra. Para comodidad, denotemos a $M_2(\mathbb{C}) = A$. Consideremos entonces el siguiente mapeo

$$F : A \rightarrow A,$$

y sea $g \in A$ un elemento invertible. Entonces

$$F_g : A \rightarrow A$$

$$F_g(a) = gag^{-1}. \quad (3.56)$$

Proposición 3.9. F_g es un homomorfismo unital.

Demostración. Vamos a demostrar las propiedades necesarias para que sea un homomorfismo unital:

$$F_g(ab) = gabg^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1} = F_g(a)F_g(b). \quad (3.57)$$

$$F_g(a+b) = g(a+b)g^{-1} = gag^{-1} + gbg^{-1} = F_g(a) + F_g(b). \quad (3.58)$$

$$F_g(\lambda a) = g\lambda ag^{-1} = \lambda gag^{-1} = \lambda F_g(a). \quad (3.59)$$

$$F_g(1) = g1g^{-1} = gg^{-1} = 1. \quad (3.60)$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Aunque los siguientes resultados se cumplen para álgebras C^* arbitrarias y sus elementos unitarios, nos enfocamos solamente en las matrices unitarias de 2×2 .

Proposición 3.10. Si $g \in U(2)$ (matrices unitarias de 2×2) entonces F_g también es un $*$ -homomorfismo.

Demostración. Para que sea un $*$ -homomorfismo debemos mostrar que $F_g(a)^* = F_g(a^*)$.

Supongamos que $g \in U(2)$, con lo cual se cumple con $g^* = g^{-1}$, entonces:

$$F_g(a)^* = (gag^{-1})^* = (g^{-1})^* a^* g^* = (g^*)^* a^* g^{-1}, \quad (3.61)$$

y como $(g^*)^* = g$, se sigue que $F_g(a)^* = F_g(a^*)$. ■

Proposición 3.11. F_g es un mapeo biyectivo.

Demostración. Tenemos que $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$. Entonces

$$Fg^{-1}(F_g(a)) = g^{-1}F_g(a)g = g^{-1}gag^{-1}g = a. \quad (3.62)$$

Que es lo que buscamos. ■

Con lo anterior podemos decir que F_g son *-automorfismos de A si $g \in U(2)$. Si consideramos el mapeo F de la siguiente forma:

$$F : U(2) \rightarrow \text{Aut}(A)$$

$$g \mapsto F_g,$$

con $g \in U(2)$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \ker(F) : \{g \in U(2) : ga = ag \quad \forall a \in A\} &= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1 \right\} \\ &= U(1). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Lo crucial es que cada automorfismo es interno, es decir, es de la forma gag^{-1} . Ahora, por el primer teorema de isomorfismos de grupos, tenemos entonces que

$$\text{Aut}(A) \cong U(2)/U(1). \quad (3.64)$$

Teorema 3.4. Se cumple la siguiente relación $U(2)/U(1) \cong SU(2)/\{1, -1\}$.

Demostración. Definamos el mapeo T

$$T : SU(2) \rightarrow U(2)/U(1)$$

$$g \mapsto [g].$$

Ahora sea $g \in \ker(T)$, con lo cual

$$T(g) = [g] = [1],$$

por lo tanto

$$g = \lambda 1. \quad (3.65)$$

Pero por otro lado tenemos que $\det g = 1$ entonces

$$\det g = \det(\lambda 1) = \lambda^2 \det(1) = 1, \quad (3.66)$$

con lo que tenemos que $\lambda^2 = 1$ y por tanto $\lambda = \pm 1$.

De lo anterior tenemos entonces que $g \in \{1, -1\}$ con lo que llegamos a $\ker(T) = \{1, -1\}$. Entonces aplicando el primer teorema de isomorfismos de grupos, llegamos a que

$$U(2)/U(1) \cong SU(2)/\{1, -1\}. \quad (3.67)$$

Lo cual completa la prueba. ■

Dicho grupo $SU(2)/\{1, -1\}$ es bien conocido en física, y sobra poner en este texto la demostración del siguiente teorema.

Teorema 3.5. *Se cumple el isomorfismo $SU(2)/\{1, -1\} \cong SO(3)$.*

Así pues queda establecido nuestro primer argumento para llamar “esfera” a $M_2(\mathbb{C})$ puesto que las simetrías de ésta, se pueden identificar con el grupo de rotaciones $SO(3)$.

3.2.2. Estados de La Esfera Cuántica

Pasemos a estudiar cómo son los estados del álgebra, los cuales nos reafirman el porqué del nombre esfera. Primero definamos un producto interno en $M_2(\mathbb{C})$ de la siguiente forma:

$$\langle A, B \rangle =: \text{Tr}(A^* B). \quad (3.68)$$

Ahora, usando el teorema de representación de Riesz, si tenemos $\rho : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ existe una única matriz $\hat{\rho} \in M_2(\mathbb{C})$ tal que se cumple con

$$\rho(A) = \langle \hat{\rho}, A \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}^* A). \quad (3.69)$$

Proposición 3.12. *El funcional ρ es estado si y solo si $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ y además $\hat{\rho}$ es una matriz positiva. (Autoadjunta y valores propios no negativos).*

Demostración. Supongamos que ρ es un estado, entonces, por ser estado cumple con ser un funcional unital, es decir, $\rho(1) = 1$. Por otra parte tenemos que

$$\rho(1) = \langle \hat{\rho}, 1 \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}^*) = \overline{\text{Tr}(\hat{\rho})} = 1, \quad (3.70)$$

38 CAPÍTULO 3. CORRESPONDENCIA CON LA MECÁNICA CUÁNTICA

con lo cual

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1. \quad (3.71)$$

Además tenemos: $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)}$, entonces:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^* A^*) = \overline{\text{Tr}(\hat{\rho}^* A)} = \text{Tr}(A^* \hat{\rho}) = \text{Tr}(\hat{\rho} A^*). \quad (3.72)$$

Restando los términos de los extremos tenemos que:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^* A^*) - \text{Tr}(\hat{\rho} A^*) = \text{Tr}((\hat{\rho}^* - \hat{\rho}) A^*) = 0. \quad (3.73)$$

Lo que implica que $\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$ es decir, tenemos una matriz autoadjunta de traza 1. Para demostrar que es positiva, consideremos a $P = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ matriz positiva. Ahora, como ρ es un estado cumple con $\rho(|\varphi\rangle\langle\varphi|) \geq 0$ Por lo que tenemos que:

$$\langle\varphi, \hat{\rho}\varphi\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}|\varphi\rangle\langle\varphi|) = \rho(|\varphi\rangle\langle\varphi|) \geq 0, \quad (3.74)$$

por lo que tenemos entonces una matriz de traza 1 y positiva.

Recíprocamente para mostrar que es estado, debemos probar todas las propiedades. Supongamos $\hat{\rho}$ positiva y $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$, entonces:

$$\rho(A + B) = \text{Tr}(\hat{\rho}(A + B)) = \text{Tr}(\hat{\rho}A) + \text{Tr}(\hat{\rho}B) = \rho(A) + \rho(B), \quad (3.75)$$

$$\rho(1) = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1, \quad (3.76)$$

$$\rho(a) = \text{Tr}(\hat{\rho}a) \geq 0, \quad (3.77)$$

ya que al ser a y $\hat{\rho}$ matrices positivas es posible expresar el producto en una matriz positiva al tomar $a = \sqrt{a}\sqrt{a}$ y usando las propiedades de conmutación dentro del operador traza. Además, la traza de una matriz positiva es también positiva, ya que por definición la traza es la suma de los elementos de la diagonal (valores propios) que son positivos por tratarse de una matriz positiva, con lo que queda demostrado nuestro resultado. ■

Ahora, tomemos entonces un estado $\rho \in S(M_2(\mathbb{C}))$. Con lo cual podemos escribir :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(1 + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3), \quad (3.78)$$

ya que recordemos que $\hat{\rho}$ debe tener traza 1 y las matrices de Pauli forman una base. Ahora, como $\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$ y con $x, y, z \in \mathbb{R}$ nos queda que:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

Como es una matriz positiva, sus valores propios son no-negativos y como el determinante es el producto de los valores propios, tenemos que:

$$\det(\hat{\rho}) \geq 0, \quad (3.80)$$

$$\det(\hat{\rho}) = 1 - z^2 - y^2 - x^2, \quad (3.81)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1. \quad (3.82)$$

Veamos entonces cómo son sus estados puros.

Recordemos que un estado puro (véase definición (2.18)) es un extremal del conjunto convexo $S(M_2(\mathbb{C}))$. Del resultado anterior, tenemos que (x, y, z) siempre se encuentran en una bola de radio 1 en \mathbb{R}^3 , y los extremales de dicha bola son precisamente los puntos que cumplen con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Es decir, podemos establecer una conexión entre los estados puros de $M_2(\mathbb{C})$ y los puntos en una esfera en \mathbb{R} .

Proposición 3.13. *Se cumple que ρ es un estado puro si y solo si $\|\hat{\rho}\| = 1$.*

Demostración. Por definición, tenemos que $\|\hat{\rho}\|^2 = \langle \hat{\rho}, \hat{\rho} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$. Ahora tenemos que:

$$\hat{\rho}^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1+z)^2 + x^2 + y^2 & 2(x-iy) \\ 2(x+iy) & (1-z)^2 + x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad (3.83)$$

entonces

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \frac{1}{4}(2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 1) \quad (3.84)$$

con lo cual tenemos que $\|\hat{\rho}\|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y por el resultado anterior, estos puntos de la esfera unitaria definen un estado puro. ■

Capítulo 4

Conclusiones

Como se mencionó, el principal objetivo del trabajo es establecer la relación entre la Geometría Cuántica y la Mecánica Cuántica. Así pues, se espera que después de haberse presentado los ejemplos del Plano Cuántico, la Esfera Cuántica, y la discusión sobre el Toro Cuántico se haya logrado dicho propósito. Con los anteriores ejemplos, también se espera haber dejado en claro que podemos establecer un diccionario entre el *mundo algebraico* y el *mundo geométrico* al que le asociamos un sentido físico. Con lo cual podemos asociar un *mundo algebraico* no conmutativo a un espacio geométrico cuyo sentido físico asociado es un *mundo cuántico*. Podemos dar entonces un diccionario preliminar :

Álgebra	Geometría
C*-álgebra	Espacio Localmente Compacto
Caracteres	Puntos
Estados	Medidas de probabilidad
Automorfismos de álgebras	Simetrías
Unital	Compacto

Cuadro 4.1: Diccionario álgebra-geometría.

Claro está que es sólo un pequeño esbozo de lo grande que podríamos hacer el diccionario, sin embargo funciona bien para nuestro propósito de introducir y presentar la relación álgebra-geometría.

Aunque sale de los objetivos primarios de este trabajo, se optó por mencionar algunos problemas y trabajos que se desarrollan dentro del campo de la Geometría Cuántica, cuya discusión rigurosa sale por completo del alcance del presente

trabajo y solamente se incluyó con el propósito de dejar claro que más que sólo una *curiosidad matemática* la Geometría Cuántica es toda una herramienta que se usa para generar conocimiento y líneas de investigación de punta tanto en Matemáticas como en Física y que brinda otra forma de tratar los problemas abiertos en la actualidad. En Física, por ejemplo, se puede encontrar en Teoría Cuántica de Campos, Teoría de Cuerdas, fundamentos de la Mecánica Cuántica, entre otros.

4.1. Haces Principales Cuánticos

Quizá uno de los ejemplos más claros de una rama matemática que se aplica extensivamente en física es el de la geometría diferencial. Es sabido que el formalismo de la relatividad general de Einstein se explica mediante la geometría diferencial, en la cual los conceptos de variedades, tensores, haces fibrados, torsión, conexiones y demás, son vitales para su formulación. En teoría cuántica de campos también es posible encontrar a la geometría diferencial en su formulación. De una forma breve y básica podríamos decir que en teoría cuántica de campos el espaciotiempo se considera la variedad base de un haz principal de un grupo estructural dado, conocido en física como grupo de gauge.

Sentadas las bases de nuestro trabajo sobre la Geometría Cuántica y su conexión con la Física, es lógico preguntarse lo siguiente: ¿Podemos hacer un análogo de la geometría diferencial *clásica* a una geometría diferencial *cuántica*? La respuesta por supuesto es un rotundo sí.

Una característica de la geometría diferencial, como su nombre lo indica, es precisamente el uso del cálculo diferencial. Y siguiendo la línea del presente trabajo podemos decir entonces que es un cálculo diferencial *clásico*, por lo que si nuestro objetivo es una geometría diferencial cuántica, necesitamos pues también de un cálculo diferencial *cuántico* el cual se define pues sobre un haz principal cuántico. Para dicha tarea se deben incluir naturalmente también los conceptos de *grupos cuánticos* los cuales juegan el rol de grupos estructurales del haz principal cuántico y nuestros *espacios cuánticos* el rol de variedades base.

La teoría de Haces Principales Cuánticos es sólo un ejemplo de una teoría que se desarrolla con la herramienta de la Geometría Cuántica. Cuyo desarrollo puede situarse dentro de las matemáticas *puras* pero con un potencial uso dentro de la física¹.

¹Para mayor detalle sobre la teoría y su desarrollo se puede consultar [7–9, 19, 20]

4.2. Teoría de Campos

Hasta ahora, hemos visto ejemplos (Espacio Fase Cuántico y la Esfera Cuántica) físicos donde la noción de puntos, líneas y partes pierden sentido dentro del marco clásico de la geometría pero con todo el sentido dentro de la Geometría Cuántica. Esta es una de las razones por la cuales se puede pensar que la estructura del espacio-tiempo tiene que ser descrita por una forma diferente de geometría (como lo es la geometría cuántica). Dicha estipulación no es nada nueva puesto que desde la década de 1930 el físico soviético Matvei Petrovich Bronstein, quien fuera pionero dentro de la gravedad cuántica, argumentó que en una teoría cuántica sería imposible medir puntos con una precisión infinita. Los físicos Doplicher-Fredenhagen-Roberts ejemplificaron dicha imposibilidad con un ejemplo similar al microscopio de Heisenberg de la siguiente forma: Si quisiéramos medir la “posición” de un objeto a escalas pequeñas tendríamos que usar una sonda que pueda medir dicho “punto” del espacio, pero la Mecánica Cuántica nos dice que necesitaríamos una sonda con mucha energía y a su vez la relatividad nos marca que si se usa demasiada energía concentrada en una región crearíamos un agujero negro. La escala a la cual sucederían dichos fenómenos es la llamada escala de Planck:

$$\ell_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = (1,6)10^{-33} \text{ cm}.$$

En teoría de cuerdas en donde el espacio-tiempo es un concepto derivado (un campo), los operadores de vértice de cuerda reproducen (en presencia de un campo de fondo y un límite particular) una geometría no conmutativa (cuántica) de la forma $[x^k, x^l] = i\theta^{kl}$ que a su vez es descrita, a nivel de campos, por el producto Grönewold-Moyal

$$(f \star g)(x) = f e^{\frac{i\theta^{kl}}{2} \overleftarrow{\partial}_k \overrightarrow{\partial}_l - \overleftarrow{\partial}_l \overrightarrow{\partial}_k} g = fg + \frac{i\theta^{kl}}{2} (\partial_k f \partial_l g - \partial_l f \partial_k g) + O(\theta^2).$$

Esto ha conducido al estudio de teorías de campo y norma en espacios no conmutativos en donde el producto ordinario entre campos es sustituido por el producto \star .

Podemos mencionar entonces algunas otras notables aplicaciones físicas de la Geometría Cuántica, entre las que se encuentran:

1. Teoría de campo no conmutativa².

²Un panorama más amplio se encuentra en [15]

2. Aproximación de Connes al modelo estándar.

3. Espacios *Fuzzy*.

En la aproximación de Connes, el modelo estándar está dirigido a entender la “geometría” de él. La idea es que toda la información sobre el sistema físico está contenida en el álgebra de funciones (espacio-tiempo) representada por operadores en un espacio de Hilbert (estados) con la acción y las propiedades métricas codificadas en un operador generalizado de Dirac. El juego es entonces ver qué conjuntos de datos (el álgebra, espacio de Hilbert, operador de Dirac) reproducen el modelo estándar.

Por ejemplo si el espacio-tiempo es dos copias de una variedad, la generalización de la acción de la electrodinámica da un mecanismo de Higgs $U(1) \times U(1) \rightarrow U(1)$.

En cambio, para un álgebra dada por funciones en el espacio-tiempo con valores en $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes M_3$ (complejos, cuaterniones, matrices 3 por 3) obtenemos el modelo estándar. La acción está basada puramente en las propiedades espectrales de un operador de Dirac.

El aspecto fascinante de esta teoría es que el Higgs aparece naturalmente como el bosón “vector” de los grados de libertad internos no conmutativos. En el proceso de escribir la acción todas las masas y acoplamientos son usados como entradas, pero uno salva un parámetro que puede ser la masa del Higgs.

Hay algunos problemas con la teoría, como el hecho de que es naturalmente clásica y la cuantización se hace de la forma “conmutativa” lo que puede resultar de alguna forma contradictoria con el entorno en el cual se desarrolla.

Los espacios *Fuzzy* son aproximaciones finitas (matrices) a espacios que sin embargo, a diferencia de redes ordinarias, mantienen la simetría del espacio original, pagando el precio de tener un producto no conmutativo entre funciones. El prototipo es una esfera descrita por las coordenadas no conmutativas $[x_i, x_j] = k\epsilon_{ijk}x_k$ ³, pero hay otras aproximaciones a otras esferas, espacios proyectivos, y versiones supersimétricas.

Algunos han comenzado a realizar cálculos de teoría de campos en estos espacios *Fuzzy* encontrando transiciones de fase. Si bien aún no ha habido una aplicación fenomenológica, se están haciendo cálculos reales y no se estaría lejos de lograrlo.

³Esfera cuántica bebé

4.3. Consideraciones finales

Durante el trabajo se ha expuesto la bella teoría de la Geometría Cuántica y algunas de sus aplicaciones tanto en matemática como en física. Con lo cual merece la pena hacer las consideraciones siguientes. La Geometría Cuántica surge al mismo tiempo que nace la Mecánica Cuántica como una especie de *hermana platónica* de ésta. Así mismo queda claro que el mote de *cuántico* tiene un sustento extremadamente fuerte y no se trata de un abuso del nombre como si fuera un producto de charlatanería moderna⁴ sino que es una conexión innegable e irrompible.

También es preciso establecer que la Geometría Cuántica no es (y no pretende serlo) la herramienta final o verdadera que provea todas las respuestas que se buscan, es más bien una puerta más que nos da entrada a una forma distinta de ver y estudiar al mundo y que vale la pena abrir y recorrer sin miedo ni prejuicios. La Geometría Cuántica es pues, otra teoría (muy hermosa) en el vasto mundo de las matemáticas y la física que nos provee una particular y bella forma de explicar aquello que llamamos “realidad”.

Para finalizar me es inevitable hacer un llamado a romper la ficticia barrera entre la física y la matemática que se ha creado en el último siglo. Es hora de ver que la relación de la física y la matemática va más allá de una mera simbiosis, sino que se trata de algo más profundo, algo tan intrínseco y filosófico como el ser y la mente, el cuerpo y el alma. Dejemos pues que la distinción se haga solo en cuestión de enfoques y por cuestiones prácticas, sin que esto nos lleve al rompimiento total.

⁴Basta ver la cantidad de productos milagro que usan el mote cuántico para impactar al consumidor

Anexos

Apéndice A

Definiciones y Teoremas

Definición A.1. Un espacio vectorial sobre un campo K (los más comunes son los números reales y los números complejos) es un conjunto V no vacío dotado de dos operaciones llamadas suma y producto $(+ , \cdot)$, para las cuales cumplirá las siguientes propiedades para toda $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in K$:

1. Asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. Conmutativa: $u + v = v + u$.
3. Neutro: Existe un elemento $0 \in V$, llamado “vector nulo” y denotado con $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{0} + u = u + \mathbf{0} = u$.
4. Opuesto: Para cada vector $u \in V$, existe un vector llamado “opuesto de u ”, denotado como $-u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = \mathbf{0}$.
5. Asociativa con escalares $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$.
6. Multiplicación por la unidad del campo: $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$.
7. Distributiva respecto de suma de vectores $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.
8. Distributiva respecto de suma de escalares $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

Definición A.2. Un espacio pre-Hilbert es un espacio vectorial complejo V en el que se define una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle,$$

llamada producto interior (también conocido como producto escalar, producto punto, producto interno) que satisface las siguientes propiedades para $u, v, w \in V$, $a, b \in \mathbb{C}$:

1. Antilineal¹ por la izquierda: $\langle au + bv, w \rangle = \bar{a}\langle u, w \rangle + \bar{b}\langle v, w \rangle$,
2. Lineal por la derecha: $\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$,
3. Hermiticidad: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,
4. Definida positiva: $\langle u, u \rangle \geq 0$, si $\langle u, u \rangle = 0 \rightarrow u = \mathbf{0}$.

Si la condición Definida positiva no se cumple, se le conoce entonces como semi-producto interior.

Definición A.3. Se llama espacio vectorial normado a un espacio vectorial complejo o real V con una aplicación $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ llamada norma que cumple las siguientes propiedades para $u, v \in V$, $a \in \mathbb{C}$ ó \mathbb{R} :

1. Definida positiva: $\|u\| \geq 0$, si $\|u\| = 0 \rightarrow u = \mathbf{0}$,
2. Homogeneidad: $\|au\| = |a|\|u\|$,
3. Desigualdad triangular: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Proposición A.1. Todo espacio pre-Hilbert es un espacio normado si se considera la norma asociada al producto interior: $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$.

Definición A.4. Sea M un conjunto no vacío y d una función asociada $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Se llama espacio métrico y es denotado (M, d) si la función d es una función distancia, es decir, para cualquier $z, x, y \in M$ cumple con las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.

¹Usamos la convención “física” de tomar antilineal en el argumento izquierdo y lineal en el derecho, la convención “matemática” es el caso inverso.

$$4. d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Proposición A.2. *Cualquier espacio vectorial normado es un espacio métrico si se toma a la función d como $d(x, y) = \|y - x\|$.*

Definición A.5. *Sea (M, d) un espacio métrico, una sucesión x_1, x_2, x_3, \dots con $x_i \in M$ se dice de Cauchy si para toda $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que para cualquiera enteros positivos $m, n > N$ se cumple con $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$.*

Definición A.6. *Un espacio de Hilbert, es un espacio pre-Hilbert que es completo en la métrica definida por la norma asociada al producto interior.*

Definición A.7. *Un conjunto S se denomina conjunto convexo si es cerrado bajo combinaciones convexas, es decir $\forall x, y \in S \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in S, \quad \lambda \in [0, 1]$.*

Definición A.8. *Un subconjunto C de un espacio vectorial V se llama cono, si $\forall c \in C$, y cualquier escalar $\alpha \geq 0$, se cumple con que $\alpha c \in C$.*

Además, un cono es convexo si para cada $x, y \in C$ se cumple $x + y \in C$ y para cualquiera escalares $\alpha, \beta \geq 0$, se cumple la condición: $\alpha x + \beta y \in C$.

Definición A.9. *Un conjunto X se llama espacio topológico si el conjunto X tiene asociada una colección de subconjuntos de X denotada \mathfrak{T} que cumplen con los siguientes axiomas:*

1. *El conjunto vacío \emptyset y X están en \mathfrak{T} .*
2. *Cualquier unión arbitraria (finita o infinita) de miembros de \mathfrak{T} también pertenece a \mathfrak{T} .*
3. *La intersección de un número finito de miembros de \mathfrak{T} también pertenece a \mathfrak{T} .*

A los elementos de \mathfrak{T} se les llama conjuntos abiertos y a la colección \mathfrak{T} se le denomina topología sobre X .

Definición A.10. *Sea X un conjunto, una cubierta \mathfrak{C} es una colección de conjuntos cuya unión contiene a X como subconjunto. Si X es un espacio topológico, una cubierta es una colección de subconjuntos de X cuya unión genera todo el espacio X .*

Una subcubierta de \mathfrak{C} es un subconjunto de \mathfrak{C} que sigue siendo cubierta de X . Además si cada elemento de la cubierta (subcubierta) es un conjunto abierto, se denomina cubierta (subcubierta) abierta.

Definición A.11. Un espacio topológico se dice compacto si cada cubierta abierta del espacio contiene una subcubierta finita.

Definición A.12. Sea X un espacio topológico. Se le denomina vecindad (o también llamado contorno) de un elemento $x \in X$ al subconjunto V de X tal que contenga un conjunto abierto U que a su vez cumpla que $x \in U$, es decir, se cumple que $x \in U \subseteq V$.

Definición A.13. Un espacio topológico X se denomina de Hausdorff (también llamado espacio separado o espacio T_2) si para cada elementos $x, y \in X$ existen vecindades V_x, V_y de x, y respectivamente, que sean disjuntas, es decir se cumple que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Definición A.14. Sea X un conjunto ordenado (para nuestro propósito consideremos a \mathbb{R}), y sea A un subconjunto de X , si un elemento $x \in X$ que cumpla que $\forall a \in A \quad a \leq x$, se denomina cota superior de A . Por el contrario, si se cumple que $\forall a \in A \quad a \geq x$, entonces se denomina cota inferior de A .

Definición A.15. Se le llama supremo del conjunto A , denotado como $\sup A$ a la menor de las cotas superiores de A , es decir, $\forall s \in S$, donde S es el conjunto de todas las cotas superiores de A , se cumple que $\sup A \leq s$. Análogamente, se le llama ínfimo de A , denotado $\inf A$ a la mayor de las cotas inferiores.

Definición A.16. Un subespacio vectorial J de un álgebra A se denomina ideal izquierdo de A si para cada $a \in A$ y $j \in J$ se cumple que $a \cdot j \in J$. Por el contrario, si se cumple con que $j \cdot a \in J$ entonces se denomina ideal derecho. Si a la vez cumple con ser derecho e izquierdo, se denomina ideal bilateral, o simplemente ideal.

Definición A.17. Un ideal J de A se dice propio si no es trivial, es decir, $J \neq A$ y $J \neq \emptyset$.

Definición A.18. Se dice que un ideal I de A es maximal, si es propio ($I \neq A$) y no hay otro ideal propio que lo contenga.

Definición A.19. Sean E_1 y E_2 dos espacios métricos con sus respectivas funciones distancia d_1 y d_2 . Una isometría es una función $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que cumple que $\forall x, y \in E_1, \quad d_1(x, y) = d_2(\phi(x), \phi(y))$, es decir, preserva distancias.

Definición A.20. Se conoce como fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff a la solución de la ecuación $Z(X, Y) = \log(e^X e^Y)$ donde X, Y son elementos de un

álgebra de Lie (podemos imaginarlos como matrices que no necesariamente conmutan). Los primeros términos de la solución vienen dados por:

$$Z(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) - \frac{1}{24}[Y, [X, [X, Y]]] + \dots$$

y todos los términos están constituidos por conmutadores.

Definición A.21. Un operador unitario es un operador lineal $U : H \rightarrow H$ en un espacio de Hilbert H , que satisface que $U^*U = UU^* = \mathbb{I}$, donde \mathbb{I} es el operador identidad en H . Además, todo operador unitario a su vez es una isometría (preserva distancias).

Línea de tiempo

SIGLO XIX.



Ludwig Boltzmann, James Clerk Maxwell y otros, empiezan a desarrollar la teoría que hoy conocemos como Mecánica Estadística.

1859



Gustav Kirchhoff introduce el concepto de cuerpo negro y establece la ley de radiación térmica que lleva su nombre. Junto a Bunsen descubre el rubidio y el cesio.

1860



1885

Johann Balmer descubre una relación numérica entre las líneas en el espectro visible del hidrógeno. Hoy se conocen como *series de Balmer*.



Heinrich Hertz descubre el *efecto fotoeléctrico*.

1887



1888

Johannes Rydberg modifica la *fórmula de Balmer* y la extiende para las líneas de todo el espectro.



Wilhelm Röntgen descubre los rayos X.

1895



1896

Henri Becquerel descubre accidentalmente la radiactividad al estudiar los rayos X.



Wilhelm Wien publica su aproximación para la distribución de intensidad de radiación de un cuerpo negro.

1896



1896

Pieter Zeeman descubre el efecto que lleva su nombre al incorporar campos magnéticos a fuentes de luz.



Sir J.J. Thomson descubre los electrones mediante experimentos con rayos catódicos.

1897



1898

Maria Salomea Skłodowska, mejor conocida como Marie Curie, publica junto con Pierre Curie su trabajo donde descubre los elementos polonio y radio, además de acuñar el término radiactividad.

SIGLO XX.



1900 

Lord Rydberg junto con Jeans publica su aproximación al problema del cuerpo negro usando argumentos clásicos.



Max Planck resuelve el problema del cuerpo negro mediante la llamada hipótesis de Planck. Se conoce como el inicio “formal” de la mecánica cuántica.

 1900



1905 

Albert Einstein publica su trabajo sobre el efecto fotoeléctrico, extendiendo la idea de Planck y sugiriendo los “cuantos de luz”, ahora conocidos como fotones.



Ernest Rutherford mediante sus trabajos con rayos alfa muestra que los átomos tienen un núcleo cargado positivo.

 1907



1913 

Robert Millikan publica su resultados del experimento de la gota de aceite, en el cual determina la carga del electrón.



Niels Bohr publica su modelo atómico basado en las ideas de Planck en el cual *cuantiza* las órbitas atómicas.

 1913



1914 

James Franck y Gustav Hertz publican los resultados de su experimento de colisiones de electrones con vapor de mercurio en el cual confirman las predicciones de Bohr.



Arthur Compton descubre el llamado *efecto Compton* en sus estudios con rayos X.

 1922



1922 

Otto Stern y Walther Gerlach descubren el espín del electrón mediante sus experimentos con átomos de plata y campos magnéticos.



Satyendra Bose encuentra una nueva estadística para los fotones de luz, que sería extendida por Einstein y que predecía el llamado condensado de Bose-Einstein.

1923



Louis de Broglie postula no solo las ondas pueden comportarse como partículas, sino que las partículas también pueden comportarse como ondas.

1924



1924

Wolfgang Pauli enuncia el principio de exclusión que lleva su nombre y se aplica en fermiones.



Werner Heisenberg, Max Born, y Pascual Jordan desarrollan el primer formalismo para la mecánica cuántica, la llamada mecánica matricial.

1925



1926

Enrico Fermi descubre el llamado teorema de la estadística del espín.



Erwin Schrödinger publica su famosa ecuación de onda e introduce la llamada función de onda.

1926



1927

Heisenberg enuncia su famosa relación conocida como principio de incertidumbre.



Max Born enuncia su interpretación probabilística dentro del marco de la llamada interpretación de Copenhagen.

1927



1928

Born y Oppenheimer introducen una aproximación teórica para moléculas pequeñas.



Paul Dirac publica su famosa ecuación que describe partículas con espín $\frac{1}{2}$ y es consistente con la relatividad especial y la mecánica cuántica. Dicho trabajo también le permitió establecer la predicción del positrón.

1928



1932

John Von Neumann publicó su trabajo llamado "Las fundamentaciones matemáticas de la mecánica cuántica" en el cual establece la formulación matemática de la mecánica cuántica a través de operadores en un espacio de Hilbert.

Bibliografía

- [1] R. Aguilar. *Álgebras C^* y Grupos Cuánticos Compactos*. 2006. Tesis de Licenciatura.
- [2] M. Combes and D. Robert. *Coherent States and Applications in Mathematical Physics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Netherlands, 2012.
- [3] A. Connes. *Noncommutative Geometry and Physics*. [notas de internet] <http://www.alainconnes.org/docs/einsymp.pdf>.
- [4] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1994.
- [5] J. Conway. *A Course In Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1990.
- [6] R. Doran. *Characterizations of C^* Algebras: The Gelfand Naimark Theorems*. CRC Press, 1986.
- [7] M. Durdevich. *Quantum Principal Bundles*. 1993. *International conference on Differential-Geometric Methods in Theoretical Physics*.
- [8] M. Durdevich. *Geometry of Quantum Principal Bundles I*. *Communications in Mathematical Physics*, 175(3):457–521, 1996.
Aquí se desarrolla de mejor manera la teoría de haces principales cuánticos.
- [9] M. Durdevich. *Geometry of Quantum Principal Bundles II*. *Review in Mathematical Physics*, 9(5):531–607, 1997.
- [10] S. Echterhoff. *Operator Algebras*. 2011. [notas de internet] <https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/eichters/K-Theorie/Operatoralgebren.pdf>.

- [11] M. Enríquez. *Estados Coherentes Y Gatos De Shrodinger Para Un Qubit*. Instituto Politécnico Nacional, 2010. Tesis de Maestría.
- [12] R. Kadison. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. I : Elementary Theory*. Graduates Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1997.
- [13] K. Kremnizer. *Geometry and Quantum Field Theory, Lecture 3*. 2008. [notas de internet]
<http://math.mit.edu/classes/18.238/lec100208.pdf>.
- [14] F. Lizzi. *Physical Applications of Noncommutative Geometry*. 2004. [notas de internet]
<http://people.na.infn.it/~lizzi/seminari/04Cortona.pdf>.
- [15] F. Lizzi. *Noncommutative Geometry -Review of recent developments for non specialists*. 2009. [notas de internet]
<http://people.na.infn.it/~lizzi/seminari/09Kings.pdf>
En esta liga es posible encontrar más desarrollada la teoría de campos no conmutativa.
- [16] P. Lucio. *Notas del Curso De Geometría Cuántica*. 2017. Curso impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM por el Dr. Micho Durdevich.
- [17] G. Murphy. *C*-Algebras and Operator Theory*. Elsevier Science, 1990.
Excelente libro si se busca consultar casi toda la teoría básica de operadores que se usó en el trabajo.
- [18] J. Petitot. *Noncommutative Geometry and Physics*. 2007. [notas de internet]
<https://arxiv.org/pdf/1505.00132.pdf>.
- [19] S. Sontz. *Principal Bundles - The Classical Case*. Springer, 2015.
Se recomienda leer la parte de electrodinámica, ya que proporciona un mejor panorama del papel de los haces principales en la física.
- [20] S. Sontz. *Principal Bundles - The Quantum Case*. Springer, 2015.
- [21] D. P. Williams. *Lectures Notes on C*-Algebras*. 2011. [notas de internet]
https://math.dartmouth.edu/archive/m123s11/public_html/cstar.pdf.

Índice alfabético

- álgebra, 11
 - *, 12
 - C^* , 13
 - de Banach, 12
 - normada, 12
- caracter, 14
- compacto, 50
- Construcción GNS, 16
- elemento
 - extremal, 18
 - invertible, 12
 - positivo, 13
- Esfera Cuántica, 32
- espacio
 - pre-Hilbert, 48
 - de Hilbert, 49
 - dual, 20
 - Hausdorff, 50
 - métrico, 48
 - topológico, 49
 - vectorial, 47
- espectro, 12, 13
- estado, 17
 - puro, 18
- estados coherentes, 25
- Gelfand-Naimark, 15
- homomorfismo, 13
- ideal, 50
 - maximal, 50
- isomorfismo, 13
- matrices de Pauli, 33
- operador
 - acotado, 16
 - de aniquilación, 25
 - de creación, 26
 - de desplazamiento de Weyl, 24
- Plano Cuántico, 21
- puntos, 14
- representación, 17
 - cíclica, 19
 - fiel, 19
 - irreducible, 19
- simetría, 15
- Teorema
 - de representación de Riesz, 20
 - Gelfand-Naimark, 15
 - Gelfand-Naimark-Segal, 19
- Toro Cuántico, 31
- vector estado, 19