UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Modelo de valuación para tasas de interés con procesos de Lévy no homogéneos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TíTULO DE:

Licenciado en Actuaría

PRESENTA:

Erick Iván Castro Granados

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Ramsés Humberto Mena Chávez

CIUDAD DE MÉXICO 2019

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de información

1.- **Datos del alumno**
Castro
Granados
Erick Iván
5585733525
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
309046794

2.- **Datos del tutor**
Dr.
Ramsés Humberto
Mena
Chávez

3.- **Datos del sinodal 1**
Dr.
Fernando
Baltazar
Larios

4.- **Datos del sinodal 2**
Dra.
Michelle
Anzarut
Chacalo

5.- **Datos del sinodal 3**
M. en C.
Alma Rosa
Bustamante
García

6.- **Datos del sinodal 4**
Mat.
Iván Ixcóatl
Juárez
López

7.- **Datos del trabajo**
Modelo de valuación para tasas de interés con procesos de Lévy no homogéneos
90 pp.
2019

El éxito no es lo más importante en la vida, lo es todo.

Agradecimientos

En primer lugar, porque sería demasiado injusto colocarlos en otro que no fuera ese, a mis padres Elizabeth Granados Rosas y David Castro Gutiérrez. Ellos que me han dado más que sólo la vida, que me han apoyado en absolutamente todo desde que nací. Gracias papás por su esfuerzo, gracias por sus desvelos, por su ejemplo, gracias por nunca rendirse y nunca dejar que me rindiera.
A mi asesor el Dr. Ramsés Humberto Mena Chávez, que tuvo una mucha paciencia conmigo, no me abandonó y siempre me ayudó con la mejor disposición.
A mi familia por todo su amor, por escucharme cada que lo necesité, a mis increíbles amigos que estuvieron codo a codo conmigo dentro y fuera del salón de clases.

Gracias por tantas risas y tanto aprendizaje.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo expondré de manera simple un método de valuación de derivados de tasas de interés apoyándome en procesos de Lévy no homogéneos como procesos de conducción para la modelación del precio del subyacente. La intención principal es el desarrollo y comprensión de la técnica implementada para la valuación, sin embargo se comienza revisando la teoría general de los procesos de Lévy y de algunas herramientas matemáticas auxiliares, de manera que el desarrollo de los temas se vaya dando de manera natural y compresible.

A lo largo del tiempo se ha probado que las matemáticas tienen una marcada influencia en la vida de las personas. Se han convertido en una herramienta fundamental en sectores tan variados como lo son: industria, computación, mecánica, etc. El área en donde más se ha visto una notoria influencia, y que es de completo interés para este trabajo, es el área financiera.

Para ilustrar esto tomemos como ejemplo a dos de las preguntas más importantes a las que un *trader* en algún banco debe enfrentarse: ¿A qué precio debería ofrecer mis productos? y ¿Cómo encontrar la mejor estrategia de cobertura?. Encontrar una respuesta a estas preguntas sería sencillo en caso de siempre existir un mercado para todo el universo de productos financieros, ya que se podría utilizar el precio de mercado, agregar un extra

por comisión y así ofrecerlo a sus clientes. En el caso de que su propuesta se aceptada, lo único que tendría que hacer es comprar el producto a precio de mercado, venderlo a su cliente y así cubrirse conservado su margen.
La complicación viene cuando dicho mercado no existe y las preguntas se vuelven más difíciles de contestar. Es ahí donde con ayuda de diferentes técnicas matemáticas los analistas intentan dar respuestas.

Desde los artículos escritos por F. Black, M. Scholes y R. Merton [3], y la reformulación en términos de teoría de martingalas hecha por M. Harrison, S. Pliska y D. Kreps [7], el análisis estocástico se ha convertido en la base de las matemáticas financieras modernas. Un ejemplo de ello es como la inversión de un activo financiero, sus ganancias y evolución, pueden ser representados como una integral estocástica; mientras que el precio de opciones sobre activos es igual a la esperanza del **payoff**, o valor a vencimiento, descontado bajo una medida martingala.

Tanto el precio de un derivado, así como su estrategia de cobertura, dependen completamente de la manera en que se modela el precio de los activos. Black, Scholes y Merton empezaron modelando con ayuda del movimiento browniano geométrico y desde su publicación una gran cantidad de autores han utilizado diferentes técnicas para modelar los precios. Esto llevó a la conclusión de que el browniano geométrico es un modelo muy restrictivo y se ha ido optando por otras alternativas, una de las más relevantes es el uso de procesos de Lévy como procesos de conducción.

En este trabajo me centraré en derivados de tasas de interés o instrumentos del mercado de deuda. Estará basado en los trabajos realizados por Heath-Jarrow-Morton [8], quienes desarrollaron una clase de modelos para conocer la dinámica de las **tasas forward** (tasas futuras), con las cuales podremos modelar la dinámica de nuestro subyacente principal, y uno de los instrumentos más utilizados en el mercado de dinero, el bono cupón cero.
Junto con la modelación del precio de un bono, viene la idea de dos de los derivados más básicos en el mercado, Call y Put. El trabajo se puede resumir en mostrar que las fórmulas de valuación de instrumentos más

complejos se pueden obtener partiendo de expresiones más sencillas y fáciles de trabajar, ayudados siempre de herramientas de teoría de la medida como la esperanza matemática y el cambio de medida.

El primer capítulo será dividido en tres secciones: en la primera veremos las definiciones financieras que serán usadas, productos del mercado de deuda así como del mercado de derivados, empezando por sus expresiones matemáticas y hasta llegar a la relación que existe entre ellas. Una vez visto esto se hará un pequeño repaso de algunos conceptos de teoría de la medida que se usarán posteriormente y que servirán para entender mejor a los procesos de Lévy. La tercera y última parte se centra completamente en los procesos de Lévy no homogéneos, que serán la base de la modelación de los precios del subyacente. Se empezará por dar su definición y poco a poco se irán derivando características propias de los procesos que serán de gran utilidad para realizar valuación de derivados en los capítulos finales.

El segundo capítulo nos servirá para revisar herramientas matemáticas que utilizaremos, no solo para facilitar los cálculos en la parte de la valuación, sino también para sustentar posibles atajos que lleguemos a utilizar para lograr conseguir expresiones matemáticas como formula para valuar derivados. Se revisaran temas como cambio de medida, derivada de Radon-Nikodym, no arbitraje, etc.

Para el tercer capitulo hacemos la presentación oficial del modelo que utilizaremos para estudiar la dinámica del precio de un bono cupón cero. Se va a revisar el alcance que tenemos con este modelo, y las restricciones que pueda llegar a haber al utilizarlo para modelar a nuestro subyacente principal en el tiempo.

En el capitulo cuatro es donde se encuentra la parte más importante para el trabajo, ya que una vez que terminamos de revisar toda la teoría que se va a utilizar y de fundamentar muchos de nuestros cálculos, es momento de aplicar todo ese conocimiento y encontrar formulas explicitas que nos ayuden a valuar un derivado para todo momento en el tiempo. Los capítulos tres y cuatro van de la mano y uno complementa al otro, ya que sin un modelo definido sería imposible poder hacer una valuación completa.

Por ultimo, en el quinto capitulo se hace una pequeña recapitulación de todos los resultados obtenidos en el trabajo, se analizan y se dan conclusiones finales. Se comentan también cuales fueron algunas de las complicaciones y retos de realizar una tesis como esta y se proponen algunos campos en donde las mismas técnicas y conocimientos se pueden llegar a aplicar también con fines prácticos.

1.1. Mercado de deuda y derivados financieros

Una manera que tienen empresas, gobierno federal, gobiernos locales, etc. para financiarse, ya sea para realizar proyectos o simplemente para hacer frente al costo que tienen sus actividades cotidianas, es mediante la emisión de títulos de deuda. El mercado de deuda es la infraestructura donde se emiten y negocian estos instrumentos. Los instrumentos de deuda son títulos, es decir, documentos necesarios para poder hacer válidos los derechos de transacción financiera que representan el compromiso por parte del emisor de pagar los recursos prestados, más un interés pactado o establecido previamente, al poseedor del título (inversionista), en una fecha de vencimiento dada. Los instrumentos del mercado de deuda se clasifican según:

i) **Su cotización**. Se refiere a la manera en que hacen públicos los precios de los títulos. Los instrumentos pueden cotizar a *descuento* o *a precio*. Cuando cotizan a descuento, el instrumento no paga cupones y el rendimiento se obtiene de comprar el instrumento con un descuento, a un precio menor a la cantidad que paga al momento de vencimiento. Los instrumentos que cotizan a precio pagan cupones y el precio del instrumento proviene de la suma de los intereses más su valor nominal.

ii) **Su colocación**. Puede ser pública o privada.

iii) **Tipo de tasa**. Puede ofrecer tasa de interés fija ó tasa de interés variable o revisable. Se refiere a los intereses previamente pactados que pagará el instrumento.

iv) **Riesgo del emisor o de crédito**. Depende de la capacidad de pago de los cupones o de devolver el capital en vencimiento por parte del emisor de los títulos. También conocido como riesgo de *default* de emisor. Para que un inversionista acepte invertir en un bono de un emisor con alto riesgo de impago tiene que haber una compensación mayor en la rentabilidad del instrumento comparado con una inversión de bajo riesgo.

En el mercado de deuda hay un gran numero de variables que se pueden llegar a modelar, más allá de expresiones del precio de un bono. Empezaremos trabajando con los productos financieros más comunes. Las definiciones están basadas, en su mayoría, en [4], [2] y [5].

La tasa de referencia que utilizaremos en el trabajo será **la tasa LIBOR**. LIBOR es una abreviación para *London InterBank Offered Rate* y se refiere a la tasa de interés pagada entre bancos (tasa interbancaria).
Es una tasa de interés simple $L(t,T)$, lo que motiva la notación L de la tasa. Aunque los bancos pueden llegar a incumplir en pagos, muchos modelos de tasas de interés omiten este riesgo y asumen que las tasas LIBOR son libres de riesgo de incumplimiento.

***Definición* 1.1. *Cuenta de mercado de dinero*.** *Definimos B_t como el valor de una cuenta bancaria o de mercado de dinero al tiempo $t > 0$. Asumimos $B_0 = 1$ y que la cuenta evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial:*

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad B_0 = 1$$

donde r_t es una función positiva del tiempo. En consecuencia

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \tag{1.1}$$

La *Cuenta de mercado de dinero* representa una inversión libre de riesgo a nivel local, donde el beneficio se devenga continuamente a la tasa libre de riesgo prevaleciente en el mercado en cada instante. La idea más básica para entender el concepto sería que, sí invertimos una unidad monetaria en tiempo cero a una tasa r_t, en tiempo t tendremos una cantidad igual a $\exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$.

La tasa de interés instantánea r_t es llamada **tasa spot** o **tasa corta**. A esta tasa también se le conoce como el rendimiento a vencimiento de un bono cupón cero (yield to maturity).
La **tasa spot** en el intervalo $[T, S]$, o referida en el trabajo como la **tasa spot LIBOR**, será definida de la siguiente manera

$$L(T,S) = \frac{1 - P(T,S)}{\tau(T,S)P(T,S)}, \tag{1.2}$$

donde $\tau(T,S)$ indica la fracción de año escogida entre las fechas T y S, usualmente interpretada como la diferencia $S - T$ (en años).

***Definición* 1.2.** *Un **bono cupón cero**, con maduración T, es un contrato que garantiza a su poseedor el pago de 1 unidad de dinero en tiempo de maduración del bono y no tiene pagos intermedios. El valor del contrato en tiempo $t < T$ está denotado por $P(t,T)$. Claramente $P(T,T) = 1$ para todo T.*

Otra manera muy útil de verlo es la siguiente: si estamos situados ahora en tiempo t, un bono cupón cero con maduración en T es un contrato que establece el valor presente de una unidad de dinero que será pagada en T.

***Definición* 1.3.** *Un producto financiero **derivado** es un instrumento cuyo valor depende a su vez del valor de una o más variables o parámetros (subyacente).*

Una opción **call (put)** *europea*, con fecha de maduración T y precio de ejercicio K, es un contrato que da a su poseedor el derecho, más no la obligación, de **comprar (vender)** un activo subyacente al tiempo T a un precio pactado K. La correspondiente opción *americana* se distingue en que puede ser ejercida en cualquier momento t, tal que $0 \leq t \leq T$. En este trabajo únicamente nos enfocaremos en trabajar con opciones europeas.

Al poseedor del contrato, que puede decidir entre ejercer la compra del subyacente al tiempo de vencimiento, se le denomina *posición larga*. La correspondiente *posición corta*, o emisor del contrato, acuerda vender el subyacente.
Dado el carácter de opcionalidad y de no obligación, observamos que el valor a vencimiento (payoff) de la posición larga en una opción es:

* call Europea: $(S_T - K)^+ = \text{máx}\{S_T - K, 0\}$
* put Europea: $(K - S_T)^+$

Con S_T el valor del activo subyacente en tiempo T.
Usualmente este tipo de contratos se realizan entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y un cliente corporativo, no en un mercado establecido de valores.

Mercado OTC (over the counter), o mercado extra bursátil, es aquel sin una ubicación física, donde los participantes del mercado utilizan diversos medios de comunicación como teléfono, correo electrónico u otros sistemas electrónicos para la negociación de los productos. En él se pactan las operaciones directamente entre compradores y vendedores sin que exista una contraparte central que disminuya el riesgo de crédito.

En un mercado OTC es posible negociar contratos con *tasas forward* (o tasas futuras). Algunas veces un intermediario financiero puede reunir a un emisor y un inversionista para pactar un contrato dentro del mercado. Existe una gran variedad de contratos que pueden ser pactados, en particular hay uno que se denomina como *forward rate agreement* o *acuerdo a tasa forward.*

Un **forward rate agreement (FRA)** es una contrato que consta de 3 tiempos: el tiempo actual t, el tiempo de vencimiento $T > t$ y el tiempo de maduración $S > T$. El contrato da a su poseedor un pago de intereses por el periodo entre T y S. En la fecha de maduración S, un pago fijo que toma como referencia una tasa fija K es intercambiado por un pago basado en una tasa variable, como la tasa spot $L(T, S)$ establecida en T y con maduración en S. Básicamente este contrato te permite asegurar una tasa de interés deseada K entre los tiempos T y S.

Formalmente en tiempo S el poseedor del contrato recibe $\tau(T, S)KN$ unidades de dinero y paga $\tau(T, S)L(T, S)N$, donde N es el valor nominal del contrato. Por lo tanto el valor a tiempo S del contrato es igual a:

$$N\tau(T, S)(K - L(T, S))$$

Es fácil notar que si L es más grande que K en tiempo T, el valor del contrato será negativo. Con ayuda de la expresión (1.2) podemos reescribir la fórmula anterior y dejarla de la siguiente manera:

$$N\left[\tau(T,S)K - \frac{1}{P(T,S)} + 1\right] \tag{1.3}$$

Ahora, sea $A = \frac{1}{P(T,S)}$ la cantidad de dinero acumulado en tiempo S. Su valor a tiempo T se puede obtener multiplicándolo por el valor de un bono cupón cero $P(T,S)$:

$$P(T,S)A = P(T,S)\frac{1}{P(T,S)} = 1$$

Por lo tanto el termino A es equivalente a tener 1 unidad de dinero en tiempo T. Además una unidad de dinero en T es igual a $P(t,T)$ unidades en tiempo t. Por lo tanto $\frac{1}{P(T,S)}$ unidades en S, son iguales a $P(t,T)$ unidades en tiempo t.
Por último notemos los dos términos faltantes en la fórmula (1.3). La cantidad $C = \tau(T,S)K + 1$ en S, llevada a tiempo t, multiplicándola por el valor de un bono cupón cero, quedaría de la siguiente manera

$$P(t,S)C = P(t,S)\tau(T,S)K + P(t,S)$$

Por lo tanto, el valor total del contrato en tiempo t sería:

$$FRA_t = N\left[P(t,S)\tau(T,S)K - P(t,T) + P(t,S)\right]$$

Solamente hay un valor de K que hace que el FRA sea un contrato justo en tiempo t, o equivalentemente que el valor del contrato sea cero en tiempo t:

$$K = \frac{P(t,T) - P(t,S)}{\tau(T,S)P(t,S)}$$

Este resultado es un preámbulo para definir de manera formal lo que es una **tasa forward**.
Una primera interpretación para una *tasa forward* podrías ser aquella tasa que esperamos que este en vigor en el futuro, en función del entorno actual de tasas de interés. Utilizaremos la siguiente definición para una tasa forward.

Definición* 1.4.** ***Tasa forward, *referida como la tasa forward LIBOR, que prevalece en tiempo t para la expiración $T > t$ y maduración $S > T$, está definida por*

$$\begin{aligned} L(t,T,S) &= \frac{P(t,T) - P(t,S)}{\tau(T,S)P(t,S)} \\ &= \frac{1}{\tau(T,S)}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right) \end{aligned}$$

que se refiere a la tasa LIBOR al tiempo T pero como sería vista por el mercado en un tiempo anterior $t < T$.

Cuando la maduración de la tasa forward colapsa hacia su fecha de expiración tenemos la noción de uno de los conceptos más importantes del trabajo, el cual será la parte central para nuestra modelación y nuestra valuación, **la tasa instantánea forward**.
Empezamos considerando el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{S \to T^+} L(t,T,S) &= -\lim_{S \to T^+} \frac{1}{P(t,S)} \frac{P(t,S) - P(t,T)}{S - T} \\ &= -\frac{1}{P(t,S)} \frac{\partial P(t,T)}{\partial T} \\ &= -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} \end{aligned}$$

usando la convención $\tau(T,S) = S - T$, cuando S está muy cercano a T.

Definición* 1.5.** ***Tasa instantánea forward *que prevalece en tiempo t para la expiración $T > t$, es definida como*

$$f(t,T) = \lim_{S \to T^+} L(t,T,S) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} \tag{1.4}$$

La fórmula de un *bono cupón cero* se puede despejar de esta expresión, quedando:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right) \tag{1.5}$$

La **tasa corta instantánea** a tiempo t, es definida como:

$$r(t) = f(t, t)$$

. Un **Swap de tasas de interés**, IRS por sus siglas en inglés, es un contrato entre dos partes que intercambian pagos fijos por pagos de tasas de interés variables. Una de las partes se compromete a pagar una tasa de interés fija en un nocional principal a cambio de una tasa de interés variable (generalmente LIBOR) en el mismo nocional y por el mismo período de tiempo. De forma más general podemos pensar un swap como cualquier intercambio futuro de bienes o servicios, referenciado a cualquier variable observable.
La tasa fija en un IRS que hace que sea un contrato justo, *i.e.* la tasa fija que hace que el valor inicial del contrato sea cero, es llamada **tasa swap**. Cuando en un contrato IRS se paga una tasa fija y se recibe a una tasa variable el IRS se denomina *pagador*, en otro caso se denomina *receptor*.

Un **cap** de tasa de interés es un contrato financiero que te protege de tener que pagar más de una tasa especificada de antemano, la **tasa cap**, a pesar de que se tenga un préstamo a una tasa de interés variable. Puede ser visto como un pagador en un IRS cuando cada intercambio de pago es ejecutado si y solo si tiene valor positivo.
Análogamente, un contrato **floor** garantiza que el interés pagado sobre un préstamo a tasa variable no será nunca por debajo de un límite mínimo predeterminado. Es equivalente a un receptor en un IRS cuando cada intercambio de pago es ejecutado si y solo si tiene valor positivo.

Por simplicidad asumimos que estamos parados en tiempo $t = 0$ y que el *cap* debe estar en vigor en el intervalo $[0, T]$. Un *cap* es la suma de contratos más básicos conocidos como **caplets**, que cumplen con las siguientes condiciones:

- El intervalo $[0, T]$ es dividido en intervalos de igual tamaño dados por la siguiente partición:

$$0 = T_0, T_1, ..., T_n = T.$$

- Usamos τ para denotar al tamaño del intervalo, *i.e.* $\tau = T_i - T_{i-1}$.
- Se necesita una cantidad principal de dinero, denotada por $\mathbf{K}$, y la *tasa cap* es denotada por $\mathbf{R}$.
- El *cap* tiene como tasa base variable a la tasa spot LIBOR.
- El *i-ésimo caplet* es definido como una reclamación contingente pagada en T_i
$$\chi_i = K\tau \max\{L(T_{i-1}, T_i) - R, 0\}.$$

Para poder hacer la valuación del *caplet* asumimos sin perdida de generalidad que $K = 1$, lo que nos permite tener la siguiente expresión

$$\chi = \tau(L - R)^+$$

con $L = L(T_{i-1}, T_i)$. Ahora recordamos que la tasa spot LIBOR tiene la siguiente expresión

$$L(T_{i-1}, T_i) = -\frac{P(T_{i-1}, T_i) - 1}{(T_i - T_{i-1})P(T_{i-1}, T_i)} = \frac{1 - P(T_{i-1}, T_i)}{\tau P(T_{i-1}, T_i)}$$

entonces sustituyendo las expresiones, tenemos

$$\begin{aligned}
\chi_i = \tau(L - R)^+ &= \tau\left(\frac{1 - P(T_{i-1}, T_i)}{\tau P(T_{i-1}, T_i)} - R\right)^+ \\
&= \left(\frac{1 - P(T_{i-1}, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} - \tau R\right)^+ = \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 - \tau R\right)^+ \\
&= \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - (1 + \tau R)\right)^+
\end{aligned}$$

por último hacemos una factorización

$$\chi_i = \frac{(1 + \tau R)}{P(T_{i-1}, T_i)}\left(\frac{1}{(1 + \tau R)} - P(T_{i-1}, T_i)\right)^+$$

Por lo tanto un caplet es equivalente a $(1 + \tau R)$ opciones put con subyacente un bono cupón cero, fecha de ejercicio de la opción T_{i-1} y precio de ejercicio $\frac{1}{1+\tau R}$. Todo el contrato *cap* puede ser visto como un portafolio de opciones **put**. De igual manera, un contrato *floor* como un portafolio de opciones **call** en un bono cupón zero.

La terminología para **swap** siempre se refiere a la parte fija en un IRS. El poseedor de un **receptor swap** recibirá en las fechas $T_1, ..., T_n$ la parte fija y pagará la parte variable. Un **pagador swap** recibirá la parte variable y pagará la parte fija.
Un swap cumple con las siguientes características:

- Los pagos serán hechos y recibidos en las fechas $T_1, T_2, ..., T_n$
- Para cada periodo $[T_i, T_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., n-1$ la tasa variable es establecida en T_i y la parte variable es recibida en T_{i+1}
- Para un mismo periodo, la parte fija es pagada en T_{i+1}

Lo que nos lleva a la siguiente definición para un **swaption** (abreviación para "swap option" u "opción en un swap").
Un pagador en un **swaption** con strike K es un contrato, que en la fecha de ejercicio t, da a su poseedor el derecho más no la obligación de entrar en un **swap** con una tasa swap fija K.

1.2. Teoría de probabilidad

La idea fundamental de esta sección es dar un pequeño resumen de algunos conceptos de teoría de la medida y probabilidad que serán usados después en el trabajo. El objetivo no es estudiar los conceptos a fondo sino el de complementar la teoría dada en secciones posteriores. Para más detalles sobre las definiciones dadas se puede revisar [1].

Sea Ω un conjunto no vacío y $\mathscr{F}$ una colección de subconjuntos de Ω. Decimos que $\mathscr{F}$ es una σ-álgebra si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$

(2) Si $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$

(3) Si $(A_n|n \in \mathbb{N})$ es una sucesión en $\mathscr{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

Una **medida** en $(\Omega, \mathscr{F})$ es una función $\mu : \mathscr{F} \to [0, \infty)$ que satisface:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Para cualquier sucesión $\{A_n|n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos mutuamente excluyentes de $\mathscr{F}$.
La cantidad $\mu(\Omega)$ es llamada masa total de μ y se dice que μ es finita si $\mu(\Omega) < \infty$. Más aún, una medida es σ-finita si podemos encontrar una sucesión $\{A_n|n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathscr{F}$ tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y cada $\mu(A_n) < \infty$.

***Definición* 1.6. *Medida de Borel*.** *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, equipado con la topología inducida por $\mathbb{R}^d$. Por lo tanto $U \subset S$ es abierto en S si $U \cap S$ es abierto en $\mathbb{R}^d$.*
Sea $B(S)$ la σ-álgebra más pequeña de subconjuntos de S que contiene todos los conjuntos abiertos de S. Llamamos a $B(S)$ la σ-álgebra de Borel de S. Los elementos de $B(S)$ son llamados conjuntos de Borel y cualquier medida en $(S, B(S))$ es llamada medida de Borel.

***Definición* 1.7.** *Sea $\mathscr{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto dado Ω. La familia $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ de sub σ-álgebras de $\mathscr{F}$ es llamada **filtración** si*

$$\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \text{ cuando } s \leq t$$

Al espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ que está equipado con una filtración $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$, se le llama *espacio filtrado.*

Sea $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un proceso estocástico definido en un espacio filtrado $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Decimos que el proceso es **adaptado** con respecto a la filtración $\mathbb{F}$ si,

$$X_t \text{ es } \mathscr{F}_t\text{-medible para cada } t \geq 0.$$

Claramente si un proceso X es adaptado, entonces

$$\mathbb{E}(X_s|\mathscr{F}_s) = X_s$$

, casi seguramente.
La idea intuitiva detrás de los procesos adaptados es que la sub σ-álgebra $\mathscr{F}_t$ contiene todo la información necesaria para predecir el comportamiento de X hasta e incluyendo el tiempo t.

Ahora recordaremos una herramienta fundamental en la teoría de probabilidad que no tiene paralelo en el análisis matemático. Supongamos que tenemos una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, y buscamos construir otra variable aleatoria que contenga menos información, es decir, medible con respecto a una σ-álgebra $\mathscr{G}$ más pequeña que la original y al mismo tiempo que sea lo más parecida a la variable original X. Matemáticamente estamos buscando una variable que sea $\mathscr{G}$-medible y que tenga la misma integral que X en cada evento de $\mathscr{G}$.

***Definición* 1.8.** *Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria integrable. Si $\mathscr{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$ entonces la **esperanza condicional** de X dado $\mathscr{G}$ es una variable aleatoria integrable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que:*

1. *Z es $\mathscr{G}$-medible*

2. *Para cada $D \in \mathscr{G}$, se cumple que $\int_D X d\mathbb{P} = \int_D Z d\mathbb{P}$.*

Se denota generalmente como $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$.

Otra de las definiciones más importantes es la de *martingala*, ya que representa la idea de un juego justo.

***Definición* 1.9.** *Un proceso estocástico $\{M_t\}$ es una **martingala** con respecto a una medida $\mathbb{P}$ si y solo si cumple con las siguientes condiciones:*

1. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[|M_t|\right] < \infty$

2. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[M_t|\mathscr{F}_s\right] = M_s$

Una de las ideas centrales del cálculo estocástico es el de encontrar sentido a fórmulas como $\int_0^t F_s dX_s$ para una clase de procesos adaptables e integradores X. El siguiente proceso resulta ideal para tomar el rol de integrador.

Definición* 1.10.** *Decimos que X es una* ***Semimartingala *si es un proceso adaptado, tal que para cada $t \geq 0$,*

$$X_t = X_0 + M_t + C_t$$

donde $M = \{M_t, t \geq 0\}$ es una martingala local, $C = \{C_t, t \geq 0\}$ es un proceso adaptado de variación finita. En muchos casos de interés el proceso M es una martingala.

La idea de **Función característica** de una variable aleatoria es esencial para el estudio de los procesos de Lévy, ya que con frecuencia no se conoce la distribución de un proceso para cada momento, pero siempre que un proceso sea infinitamente divisible podremos conocer la función característica.

***Definición* 1.11.** *Sea X una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{P})$ y que toma valores en $\mathbb{R}^d$ con función de densidad de probabilidad f_X. Su función característica $\phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ está definida por*

$$\begin{aligned} \phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle u, X\rangle}\right] &= \int_\Omega e^{i\langle u, X(w)\rangle} \boldsymbol{P}(dw) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle u, y\rangle} f_X(dy) \end{aligned}$$

para cada $u \in \mathbb{R}^d$.

Lo anterior nos lleva a otro concepto fundamental, el de **divisibilidad infinita**. Para empezar a tratarlo empezaremos con la siguiente definición.

***Definición* 1.12.** *Sea $\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^d)$ el grupo de todas las medidas de probabilidad de Borel en $\mathbb{R}^d$. Definimos la convolución de dos medidas de probabilidad de la siguiente manera:*

$$(\mu_1 * \mu_2)(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_1(A - x)\mu_2(dx)$$

para toda $\mu_i \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}^d), i = 1, 2,$ y cada $A \in B(\mathbb{R}^d)$, notar que $A - x = \{y - x | y \in A\}$.

Algo importante que destacar es que la convolución $\mu_1 * \mu_2$ es una medida de probabilidad en $\mathbb{R}^d$.

***Definición* 1.13.** *Sea X una variable aleatoria que toma valores en $\mathbb{R}^d$ con ley f_X. Decimos que X es infinitamente divisible si, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) $Y_1^{(n)}, ..., Y_n^{(n)}$ tal que*

$$X \overset{d}{=} Y_1^{(n)} + ... + Y_n^{(n)}$$

donde $\overset{d}{=}$ implica igualdad en distribución.

***Definición* 1.14.** *Sea υ una medida de Borel definida en $\mathbb{R}^d - \{0\}$. Decimos que es una **medida de Lévy** si:*

$$\int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} (|y|^2 \wedge 1)\upsilon(dy) < \infty$$

Ahora introduciremos la siguiente fórmula que da una caracterización de variables aleatorias infinitamente divisibles a través de sus funciones características.

***Teorema* 1.1.** *(Lévy-Khintchine) Tenemos que μ es una medida infinitamente divisible si existe un vector $b \in \mathbb{R}^d$, una matriz A $d \times d$ positiva simétrica y una medida de Lévy υ en $\mathbb{R}^d - \{0\}$ tal que, para todo $u \in \mathbb{R}^d$*

$$\phi_\mu(u) = \exp\left[i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u,y\rangle} - 1 - i\langle u, y\rangle \mathbb{I}_{\{|y| \leq 1\}})\upsilon(dy) \right] \tag{1.6}$$

inversamente, cualquier función de la forma (1.6) es la función característica de una medida de probabilidad infinitamente divisible en $\mathbb{R}^d$.

La demostración completa del teorema puede ser encontrada en [1].

1.3. Procesos de Lévy no homogéneos

Consideramos un proceso de Lévy no homogéneo multi-dimensional como proceso de conducción. La estructura de estos procesos nos permite capturar todos los fenómenos en los que estamos interesados.
Los procesos de Lévy no homogéneos, también llamados **procesos aditivos**, a diferencia de su contraparte homogénea, generalmente no poseen incrementos estacionarios. Quitando las restricciones de estacionariedad nos da mayor flexibilidad en los modelos y conservamos las características maleables de los fenómenos que estamos modelando. Los parámetros que describen comportamientos locales ahora serán dependientes del tiempo pero no aleatorios.

Asumimos una base estocástica $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ dada, *i.e.* un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ equipado con la filtración $\mathbb{F} := (\mathscr{F}_t)_{0 \leq t \leq T^*}$ (donde T^* es el horizonte de tiempo finito). La filtración tomada se traduce en una familia creciente y continua por la derecha de sub-σ-álgebras de $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{T^*}$, *i.e.* $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ para todo $0 \leq s \leq t \leq T^*$ y $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$ para todo $0 \leq t < T$.
Trabajaremos con la siguiente definición de un proceso de Lévy no homogéneo:

***Definición* 1.15.** *Un proceso estocástico adaptado $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T^*}$ con valores en $\mathbb{R}^d$ es un proceso de Lévy no homogéneo, también llamado proceso con incrementos independientes y características absolutamente continuas, PIIAC por sus siglas en inglés, si cumple con las siguientes condiciones:*

1. *L tiene incrementos independientes, i.e. $L_t - L_s$ es independiente de $\mathscr{F}_s$ $(0 \leq s < t \leq T^*)$*

2. *Para toda $t \in [0, T^*]$, la distribución de L_t está determinada por la función característica*

$$\mathbb{E}\left[e^{i\langle u,L_t\rangle}\right] = \exp\int_0^t \Bigg(i\langle u,b_s\rangle - \frac{1}{2}\langle u,c_s u\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u,x\rangle \mathbb{I}_{\{|x|\leq 1\}}) F_s(dx) \Bigg) ds \quad (1.7)$$

donde b_s es un vector en $\mathbb{R}^d$, c_s es una matriz $d\times d$ simétrica y no negativa y F_s es una medida de Lévy en $\mathbb{R}^d$ que integra $(|x|^2\wedge 1)$ y satisface $F_s(\{0\}) = 0$. El producto escalar euclidiano es denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y la respectiva norma por $|\cdot|$.
Asumimos que la tripleta (b_t, c_t, F_t) satisface

$$\int_0^{T^*} \left(|b_s| + \|c_s\| + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (|x^2|\wedge 1) F_s(dx) \right) ds < \infty \quad (1.8)$$

donde $\|\cdot\|$ denota cualquier norma en el conjunto de matrices de $d\times d$

Se podría usar la definición 1.15 para definir un proceso de Lévy homogéneo si b_s, c_s y F_s no dependieran de s.
Ahora remarcaremos algunas de las propiedades del proceso de Lévy no homogéneo $\mathbf{L}$, que serán utilizadas en secciones posteriores.

***Lema* 1.1.** *Fijamos $t\in[0,T^*]$. La distribución de L_t es infinitamente divisible con la tripleta de Lévy-Khintchine (b,c,F), donde*

$$b := \int_0^t b_s ds, \quad c := \int_0^t c_s ds, \quad F(dx) := \int_0^t F_s(dx)ds.$$

Demostración. Para esto notamos que $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d$ y que $\mathbf{c}$ es una matriz simétrica de $d\times d$. Ahora necesitamos demostrar que $\mathbf{F}$ es una medida de Lévy.
Por convergencia monótona tenemos que F es una medida en el conjunto de Borel de $\mathbb{R}^d$ y que para cualquier función integrable f

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)F(dx) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(x)F_s(dx)ds \quad (1.9)$$

Con ayuda de la expresión (1.8) sabemos que

$$\int_0^{T^*}\int_{\mathbb{R}^d}(|x^2|\wedge 1)F_s(dx)ds<\infty,$$

más aún, para $t\leq T^*$

$$\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^d}(|x^2|\wedge 1)F_s(dx)ds<\infty.$$

Sea $f(x)=(|x^2|\wedge 1)$, sustituyendo en (1.9) tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d}(|x^2|\wedge 1)F(dx)=\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^d}(|x^2|\wedge 1)F_s(dx)ds<\infty$$

Entonces F es una medida de Lévy.
Por último es suficiente notar que con la tripleta, (b,c,F), podemos reescribir la expresión (1.7) de la siguiente manera

$$\mathbb{E}[e^{i\langle u,L_t\rangle}]=$$

$$\exp\left(i\langle u,b\rangle-\frac{1}{2}\langle u,cu\rangle+\int_{\mathbb{R}^d}(e^{i\langle u,x\rangle}-1-i\langle u,x\rangle\mathbb{I}_{\{|x|\leq 1\}})F(dx)\right)$$

□

***Lema* 1.2.** *L es un proceso aditivo en distribución, i.e. un proceso estocástico continuo con incrementos independientes y $L_0=0$ c.s..*

Demostración. Sabemos que el proceso ya tiene incrementos independientes. Para demostrar continuidad estocástica tenemos que asegurarnos que se cumpla lo siguiente:

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{P}[|L_{t+h}-L_t|>\epsilon]=0$$

Para todo $\epsilon>0$. Veamos la función característica de $L_{t+h}-L_t$ con $h>0$. Por la independencia de los incrementos:

$$\mathbb{E}[e^{i\langle u,L_{t+h}-L_t\rangle}]=\mathbb{E}[e^{i\langle u,L_{t+h}\rangle-i\langle u,L_t\rangle}]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{e^{i\langle u, L_{t+h}\rangle}}{e^{i\langle u, L_t\rangle}}\right] = \frac{\mathbb{E}[e^{i\langle u, L_{t+h}\rangle}]}{\mathbb{E}[e^{i\langle u, L_t\rangle}]}$$

$$= \exp \int_t^{t+h} \left(i\langle u, b_s\rangle - \frac{1}{2}\langle u, c_s u\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u, x\rangle} - 1 - \imath\langle u, x\rangle \mathbb{I}_{\{|x|\leq 1\}}) F_s(dx) \right) ds$$

cuando $h \to 0$, la función característica de $L_{t+h} - L_t$ converge puntualmente a 1. Por lo tanto $L_{t+h} - L_t$ converge a cero en distribución, al ser una constante, también converge estocásticamente. □

***Lema* 1.3.** *El proceso L es una semimartingala con respecto a la base estocástica $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \boldsymbol{P})$.*

Demostración. Definimos $g(u)_t = \mathbb{E}\left[e^{i\langle u, X_t\rangle}\right] \quad t \in \mathbb{R}_+, u \in \mathbb{R}^d$
El Teorema 4.14 de [10], nos dice que un proceso d-dimensional con incrementos independientes es una semimartingala si y solo si, para cada $u \in \mathbb{R}^d$, la función $t \mapsto g(u)_t$ tiene variación finita sobre intervalos finitos.
Notemos primero que gracias a la expresión (1.8)

$$f(u)_t = \ln \mathbb{E}\left[e^{i\langle u, X_t\rangle}\right]$$

$$= \int_0^t \left(i\langle u, b_s\rangle - \frac{1}{2}\langle u, c_s u\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u, x\rangle} - 1 - i\langle u, x\rangle \mathbb{I}_{\{|x|\leq 1\}}) F_s(dx) \right) ds$$

tiene variación finita sobre intervalos finitos.
Esto implica que, $t \mapsto \exp f(u)_t = g(u)_t$ tiene variación finita sobre intervalos finitos. Por el Teorema 4.14, L es una semimartingala. □

La idea ahora es encontrar dos procesos (B_t),(C_t) y una medida aleatoria υ tal que si definimos el proceso $A(u)_t$ como el exponente característico de L, con $b_t, c_t, F_t(dx)$ reemplazadas por $B_t, C_t, \upsilon([0,T] \times dx)$ entonces el cociente $e^{i\langle u, L.\rangle} / \exp A(u)$ es una martingala.

***Lema* 1.4.** *Las características de semimartingala de L asociadas con la función truncada $h(x) = \mathbb{I}_{\{|x|\leq 1\}}$ están dadas por:*

$$B_t = \int_0^t b_s ds, \qquad C_t = \int_0^t c_s ds$$

$$\upsilon([0,T]\times A)=\int_0^t\int_A F_s(dx)ds \qquad (A\in B(\mathbb{R}^d)).$$

Demostración. Sea

$$A(u)_t = i\langle u, B_t\rangle - \frac{1}{2}\langle u, C_t u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{i\langle u,x\rangle}-1-i\langle u,x\rangle\mathbb{I}_{\{|x|\leq 1\}})\upsilon([0,T]\times A)$$

Para alguna $u\in\mathbb{R}^d$. Más aún, $A(u)_t$ es igual al exponente característico de L_t. Entonces

$$\varepsilon[A(u)_t]=\exp A(u)_t=\mathbb{E}\left[e^{i\langle u,L_t\rangle}\right]$$

donde ε denota al exponente estocástico. Ahora demostraremos que

$$\frac{e^{i\langle u,L_t\rangle}}{\varepsilon[A(u)_t]}$$

es una martingala.

$$\mathbb{E}\left[\frac{e^{i\langle u,L_t\rangle}}{\varepsilon[A(u)_t]}|\mathscr{F}_s\right]=\frac{1}{\varepsilon[A(u)_t]}\mathbb{E}\left[e^{i\langle u,L_t\rangle}|\mathscr{F}_s\right]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon[A(u)_t]}\mathbb{E}\left[e^{i\langle u,(L_t-L_s)+L_s\rangle}|\mathscr{F}_s\right]=\frac{1}{\varepsilon[A(u)_t]}\mathbb{E}\left[e^{i\langle u,L_t-L_s\rangle+i\langle u,L_s\rangle}|\mathscr{F}_s\right]$$

$$=\frac{e^{i\langle u,L_s\rangle}}{\varepsilon[A(u)_t]}\mathbb{E}\left[e^{i\langle u,L_t-L_s\rangle}|\mathscr{F}_s\right]$$

Por los incrementos independientes tenemos

$$=\frac{e^{i\langle u,L_s\rangle}}{\varepsilon[A(u)_t]}\frac{\mathbb{E}[e^{i\langle u,L_t\rangle}]}{\mathbb{E}[e^{i\langle u,L_s\rangle}]}=\frac{e^{i\langle u,L_s\rangle}}{\mathbb{E}[e^{i\langle u,L_s\rangle}]}=\frac{e^{i\langle u,L_s\rangle}}{\varepsilon[A(u)_s]}$$

Por lo tanto es una martingala.
Por el corolario (2.48) de [10] tenemos que B,C,υ son las características de L. $\square$

Las aplicaciones en matemáticas financieras dan por hecho que el proceso del precio de un activo es una martingala con respecto a la medida de riesgo neutral, esto conduce a la existencia de momentos exponenciales del proceso base. Es por eso que la siguiente suposición es importante para el trabajo.
Primero definiremos un concepto que nos servirá de apoyo. Sea $g(x)$ una función medible no negativa en $\mathbb{R}^d$. Llamaremos $\int g(x)\mu(dx)$ el **g-momento** de una **medida** μ en $\mathbb{R}^d$. De igual manera llamaremos $\mathbb{E}[g(X)]$ el **g-momento** de una **variable aleatoria** X en $\mathbb{R}^d$.

***Suposición* 1.1.** *Existen constantes M, $\epsilon > 0$ tal que para todo $u \in [-(1+\epsilon)M, (1+\epsilon)M]^d$*

$$\int_0^{T^*} \int_{\{|x|>1\}} \exp\langle u, x\rangle F_s(dx)ds < \infty \tag{1.10}$$

Sin pérdida de generalidad se asume que $\int_{\{|x|>1\}} \exp\langle u, x\rangle F_s(dx)$ es finito para toda s.

***Lema* 1.5.** *La Suposición 1.1 es cierta si y solo si existen constantes M, $\epsilon > 0$ tal que $\mathbb{E}[\exp\langle u, L_t\rangle] < \infty$ para todo $t \in [0, T^*]$ y $u \in [-(1+\epsilon)M, (1+\epsilon)M]^d$.*

Este último lema nos relaciona la finitud del *g-momento* de una medida F con la finitud del *g-momento* de la variable aleatoria L_t para $t \in [0, T^*]$. Para demostrar el lema tendremos que hacer uso del Teorema 25.3 de [13], el cual nos dice que la finitud del *g-momento* no es una propiedad distribucional dependiente del tiempo para la clase de los procesos de Lévy.

Demostración. Demostraremos las dos implicaciones. Primero asumimos que la expresión (1.10) se cumple y fijamos $u \in [-(1+\epsilon)M, (1+\epsilon)M]^d$ y $t \in [0, T^*]$. Consideramos un proceso de Lévy $\widehat{L} = (\widehat{L}_t)_{0\leq t\leq T^*}$ tal que $\widehat{L}_1 = L_t$ (en distribución). Entonces la tripleta de Lévy para $\widehat{L}$, (b, c, F), está dada por el Lema 1.1 y se cumple que

$$\int_{\{|x|>1\}} \exp\langle u, x\rangle F(dx) = \int_0^t \int_{\{|x|>1\}} \exp\langle u, x\rangle F_s(dx)ds < \infty$$

Aplicando el Teorema 25.3 de [13], tenemos que $\mathbb{E}[\exp\langle u, \widehat{L}_t\rangle] < \infty$, o equivalentemente $\mathbb{E}[\exp\langle u, \widehat{L}_1\rangle] < \infty$, lo cual produce que $\mathbb{E}[\exp\langle u, L_t\rangle] < \infty$ por la igualdad en distribución.
Para demostrar la otra implicación suponemos que existen constantes $M, \epsilon > 0$ tal que:

$$\mathbb{E}[\exp\langle u, L_t\rangle] < \infty \qquad \forall t \in [0, T^*], \quad u \in [-(1+\epsilon)M, (1+\epsilon)M]^d$$

y volvemos a considerar al proceso $\widehat{L} = (\widehat{L}_t)_{0\leq t\leq T^*}$ igual que el anterior. Sabemos que $\mathbb{E}[\exp\langle u, \widehat{L}_1\rangle] = \mathbb{E}[\exp\langle u, L_t\rangle] < \infty$ ya que son iguales en distribución. Esto implica que $\mathbb{E}[\exp\langle u, \widehat{L}_t\rangle] < \infty$.
Aplicando una vez más el Teorema 25.3, podemos concluir que

$$\int_0^{T^*} \int\limits_{\{|x|>1\}} \exp\langle u, x\rangle F_s(dx)ds = \int\limits_{\{|x|>1\}} \exp\langle u, x\rangle F(dx) < \infty,$$

Con lo cual terminamos la demostración. $\square$

Es importante notar que el Teorema 25.3 nos pide que la función $g(x)$, en nuestro caso $g(x) = \exp\langle u, x\rangle$, sea submultiplicativa. Esto es que sea no negativa y que exista una constante $a > 0$ tal que

$$g(x+y) \leq ag(x)g(y)$$

Dos atributos que la función exponencial con la que estamos trabajando satisface.
Del lema anterior se puede concluir que bajo la Suposición 1.1 el valor esperado de L_t es finito. Por lo tanto, la función característica de L_t puede ser escrita como:

$$\mathbb{E}\left[e^{i\langle u, L_t\rangle}\right]$$

$$= \exp \int_0^t \left(i\langle u, b_s\rangle - \frac{1}{2}\langle u, c_s u\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u,x\rangle} - 1 - i\langle u, x\rangle)F_s(dx) \right) ds \tag{1.11}$$

Cada que se trabaje bajo la Suposición 1.1, usaremos las características que corresponden a la ecuación (1.11).

En la parte de valuación, en uno de los modelos usado se necesitará hacer suposiciones más fuerte que (1.1), por lo cual daremos la siguiente suposición. En aplicaciones, ambas suposiciones son igualmente prácticas y poco restrictivas.

***Suposición* 1.2.** *Se cumple que*

$$\sup_{0\leq s\leq T^*}\left(|b_s|+\|c_s\|+\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|x|^2\wedge|x|)F_s(dx)\right)<\infty \tag{1.12}$$

donde $\|\cdot\|$ *denota cualquier norma en el conjunto de matrices de* $d\times d$. *Además existen constantes* $M,\epsilon>0$ *tal que para cada* $u\in[-(1+\epsilon)M,(1+\epsilon)M]^d$

$$\sup_{0\leq s\leq T^*}\left(\int\limits_{\{|x|>1\}}\exp\langle u,x\rangle F_s(dx)\right)<\infty \tag{1.13}$$

De ahora en adelante asumiremos que se cumple la Suposición 1.1 y se presenta una proposición que es muy útil a la hora de buscar condiciones en el término deriva en los modelos de estructura temporal y que facilitará la valuación de opciones. Esta condición ayudará a asegurar la condición de martingala en los precios de bonos.
Sea θ_s el cumulante asociado con la distribución infinitamente divisible caracterizada por la tripleta de Lévy-Khintchine (b_s,c_s,F_s), *i.e.* para $z\in[-(1+\epsilon)M,(1+\epsilon)M]^d$, donde M es la constante que viene de la Suposición 1.1, tenemos

$$\theta_s(z)=\langle z,b_s\rangle+\frac{1}{2}\langle z,c_sz\rangle+\int\limits_{\mathbb{R}^d}(e^{\langle z,x\rangle}-1-\langle z,x\rangle)F_s(dx) \tag{1.14}$$

Notar que la expresión es similar al exponente característico de la función característica del proceso L_t, con el inconveniente de que sólo está definido para valores en $\mathbb{R}^d$.
Si estamos interesados en extender esta definición a números complejos

tenemos que hacer uso del Teorema 25.17 de [13]. El teorema nos dice que si $w \in \mathbb{C}^d$, tal que $\Re(w) \in [-(1+\epsilon)M, (1+\epsilon)M]^d$ entonces

$$\mathbb{E}\left[e^{i\langle u, L_t\rangle}\right] = \exp \int_0^t \theta_s(iu)ds$$

donde $(iu) = (iu_j)_{1\leq j\leq d}$ y extendemos el producto escalar para números complejos de la siguiente manera: $\langle w, z\rangle = \sum_j w_j z_j$ con $w, z \in \mathbb{C}^d$.

***Lema* 1.6.** *Fijamos $t \in [0, T^*]$. Para $z \in \mathbb{C}^d$ con $\Re(z) \in [-(1+\epsilon)M, (1+\epsilon)M]^d$ tenemos que $\mathbb{E}[|e^{\langle z, L_t\rangle}|] < \infty$, además*

$$\mathbb{E}[e^{\langle z, L_t\rangle}] = \exp \int_0^t \theta_s(z)ds \tag{1.15}$$

Con lo cual llegamos a la siguiente proposición que será usada en capítulos posteriores para valuación de opciones.

***Proposición* 1.1.** *Supongamos que $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}^d$ es una función continua tal que $|\Re(f^i(x))| \leq M$ para todo $i \in \{1, ..., d\}$ y $x \in \mathbb{R}_+$, entonces*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_t^T f(s)dL_s\right)\right] = \exp \int_t^T \theta(f(s))ds.$$

Capítulo 2

Herramientas auxiliares para la valuación

El objetivo de esta sección es presentar y demostrar herramientas matemáticas necesarias que nos servirán de apoyo para poder llegar a expresiones analíticas confiables a la hora de hacer valuación de derivados. Lo primero será trabajar con la derivada de Radon-Nikodym, fundamental para realizar cambios de medida, continuaremos mostrando dos transformaciones integrales muy prácticas e importantes. Con ayuda de estas dos herramientas buscar precios para los derivados se hará un poco más sencillo y nos librará de realizar muchos cálculos.

2.1. Derivada de Radon-Nikodym

Para poder introducir la definición de derivada de Radon-Nikodym es necesario recordar un poco de teoría de medidas equivalentes.
Dos medidas $\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1$ son equivalentes si operan en el mismo espacio muestral $(\Omega, \mathscr{F})$ y concuerdan en lo que es posible. Esto se traduce en que

$$\mathbb{P}_0(A) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_1(A) > 0$$

si un evento A es posible bajo una medida de probabilidad, también lo será bajo la otra.

Decimos que $\mathbb{P}_0$ es absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}_1$, y lo denotamos por $\mathbb{P}_0 \ll \mathbb{P}_1$ si para todo $A \in \mathscr{F}$

$$\mathbb{P}_0(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_1(A) = 0$$

Entonces si $\mathbb{P}_0 \ll \mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_0$ concluimos que las medidas son equivalentes.
Dos medidas deben de ser equivalentes para que pueda existir la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}_1}$ y $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_0}$.

Teorema 2.1. (Radon-Nikodym) *Si $\mathbb{P}_0$ es una medida σ-finita, $\mathbb{P}_1$ es finita y además $\mathbb{P}_1 \ll \mathbb{P}_0$, entonces existe una función medible $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ tal que para cada $A \in \mathscr{F}$*

$$\mathbb{P}_1(A) = \int_A g(x)\mathbb{P}_0(dx)$$

donde la función g es única.

La función g del teorema es denotada como $\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_0}$ y llamada derivada de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}_1$ con respecto a $\mathbb{P}_0$.

Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ y $\mathbb{Q}$ una medida equivalente a $\mathbb{P}$, y suponemos que existe la esperanza de X con respecto a las dos medidas. Si esto se cumple, entonces podemos relacionar ambas medidas de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X\right]$$

Será de mucha utilidad observar que la igualdad anterior la podemos escribir de una manera más formal de la siguiente manera

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_T|\mathscr{F}_0\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X_T|\mathscr{F}_0\right]$$

donde T es nuestro horizonte temporal finito y X_T es conocida a priori. Es interesante preguntarse por tiempos anteriores $t < T$, $s < T$ y qué pasa con expresiones como $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_t|\mathscr{F}_s\right]$.

Sabemos que la derivada de Radon-Nikodym, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, es una variable aleatoria. Al valuar derivados estaremos interesados en encontrar el precio de los instrumentos en cualquier tiempo intermedio de nuestro horizonte finito *i.e.* para un $t \in [0, T]$ es por eso que no nos basta saber la esperanza para el tiempo cero

Teorema 2.2. (Proceso Radon-Nikodym) *Sean $\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1$ dos medidas de probabilidad en el mismo espacio muestral $(\Omega, \mathscr{F})$ y $\{\mathscr{F}_t\}$ una filtración de $\mathscr{F}$. Si $\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1$ son equivalentes entonces definimos el proceso*

$$\zeta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}\left[\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_0}|\mathscr{F}_t\right]$$

Además se cumplen las siguientes igualdades

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}[X_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}[\zeta_t X_t]$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}[X_t|\mathscr{F}_s] = \zeta_s^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}[\zeta_t X_t|\mathscr{F}_s]$$

donde X_t es conocida al tiempo t.

2.2. Ausencia de arbitraje en tiempo continuo

A la hora de buscar un modelo adecuado es importante tener en cuenta que el modelo no debe de permitir oportunidades de arbitraje. De una manera sencilla, ausencia de arbitraje es equivalente a la imposibilidad de invertir cero unidades el día de hoy y recibir mañana una cantidad no negativa con probabilidad positiva. Dos portafolios que tienen el mismo payoff en fecha de maduración deben de tener el mismo precio al día de hoy.

Para empezar a hablar acerca de ausencia de arbitraje en una economía de tiempo continuo, consideraremos el espacio de probabilidad dado anteriormente $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ equipado con la filtración $(\mathscr{F}_s)_{0\leq s\leq T^*}$. Suponemos que $K+1$ valores que no pagan dividendos son negociados de forma continua desde tiempo cero hasta $T \leq T^*$. Sus precios son modelados por una semimartingala adaptada $K+1$-dimensional $S = \{S_t : 0 \leq t \leq T\}$, cuyos componentes $S^0, S^1, ..., S^K$ son positivos.

Una **estrategia de inversión** es un proceso $(K+1)$-dimensional $\phi = \{\phi_t : 0 \leq t \leq T\}$, cuyos componentes $\phi_t^0, \phi_t^1, ..., \phi_t^K$ son acotados y predecibles.
Es importante conocer el proceso de valor de nuestra estrategia ϕ. Este será definido por

$$V_t(\phi) = \phi_t S_t = \sum_{k=0}^{K} \phi_t^k S_t^k$$

y el proceso de ganancias asociado a la estrategia ϕ por

$$G_t(\phi) = \int_0^t \phi_u dS_u = \sum_{k=0}^{K} \int_0^t \phi_u^k dS_u^k$$

donde el k-ésimo componente ϕ_t^k de la estrategia ϕ_t en tiempo t, se interpreta como el número de unidades del valor k retenida por un inversionista en tiempo t. Nos referimos a un proceso **predecible** para cada ϕ^k, como aquel proceso cuyo valor del componente ϕ_t^k es conocido inmediatamente antes del tiempo t.

Una estrategia ϕ es llamada **auto financiable** si $V(\phi) \geq 0$ y además

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi), \qquad 0 \leq t < T$$

esto quiere decir que la estrategia es auto financiable si cambios en su valor dependen solamente de cambios en el precio de los activos. No hay entradas ni salidas de dinero después del tiempo inicial.
El trabajo principal de Harrison and Kreps [6] y Harrison and Pliska [7] es el de establecer una conexión entre el concepto económico de ausencia de arbitraje y la propiedad matemática de existencia de una medida de probabilidad, la medida martingala equivalente $\mathbb{Q}$ o medida de riesgo neutral, la cual sabemos que tiene las siguientes características:

- $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{P}$ son medidas equivalentes.
- La derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ es cuadrado integrable con respecto a $\mathbb{P}$.
- El proceso de precio descontado del activo es una $\mathbb{Q}$-martingala.

En lenguaje matemático, una oportunidad de arbitraje es definida como una estrategia auto financiable ϕ, tal que $V_0(\phi) = 0$ pero $\mathbb{Q}[V_T(\phi) > 0] > 0$, esto es que tiene valor positivo con probabilidad positiva en un $T > 0$. Harrison and Pliska probaron un resultado fundamental de que **la existencia de una medida martingala equivalente implica ausencia de oportunidades de arbitraje**.
Definimos una reclamación contingente H como una variable aleatoria cuadrado integrable y positiva en $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ y decimos que es **replicable** si existe una estrategia auto financiable ϕ tal que $V_T(\phi) = H$, si esto sucede se dice que la estrategia ϕ genera a H y que $\pi_t = V_t(\phi)$ es el precio en tiempo t asociado con H. La siguiente proposición nos da la caracterización matemática del precio único con no arbitraje asociado con cualquier reclamación contingente replicable.

***Proposición* 2.1.** *Asumimos que existe una medida martingala equivalente $\mathbb{Q}$ y sea H una reclamación contingente replicable. Entonces para cada $t \in [0, T]$ existe una único precio asociado con H*

$$\pi_t = \mathbb{E}\left[\frac{1}{B_t} H | \mathscr{F}_t\right]$$

Cuando el conjunto de medidas equivalentes es no vacío, es posible derivar un único precio de no arbitraje asociado con cualquier reclamación contingente replicable.

2.3. Cambio de medida

En la sección anterior vimos que existe una fórmula única para valuar reclamaciones contingentes bajo un contexto de no arbitraje. La idea resumida es sacar la esperanza del payoff de la reclamación bajo una medida martingala $\mathbb{Q}$ seleccionada. El problema viene cuando la medida martingala $\mathbb{Q}$ resulta no ser la mejor opción a la hora de realizar la valuación ya que puede llegar a complicarla mucho. Para casos como este existe una técnica llamada **cambio de numeraire**, que será de gran utilidad a la hora de la valuación y nos ahorrará muchos cálculos innecesarios.
Para esta sección empezamos con la definición de *numeraire*, veremos cómo

está relacionado con el cambio de medida para después enunciar y demostrar un teorema que será básico a la hora de valuar derivados y en donde estaremos haciendo uso directo de la derivada de Radon-Nikodym.

***Definición* 2.1.** *Un numeraire Z_t es un activo positivo que no paga dividendos.*

Un numeraire Z es identificable con una estrategia ϕ auto-financiable, tal que $Z_t = V_t(\phi)$ para toda t. Intuitivamente un numeraire es un activo que sirve de referencia y es escogido para normalizar todos los demás precios de activos con respecto a él. Hacer un cien por ciento nuestro activo referencia y ver qué porcentaje alcanzan los demás activos.

Una vez que escogemos un numeraire Z esto implica que los precios relativos $\frac{S^k}{Z}$, con $k = 0, 1, ..., K$, son considerados en vez de los precios originales de los activos.
Esta proposición puede ser extendida para cualquier numeraire, incluso implica que una estrategia auto-financiable permanecerá conservando esa propiedad una vez cambiado el numeraire. Por lo tanto, cualquiera reclamación seguirá siendo replicable bajo cualquier numeraire.
En las definiciones anteriores de medida equivalente, implícitamente se asume la cuenta de mercado de dinero B_t como numeraire principal.
Ahora es momento de cambiar ese numeraire de tal manera que los cálculos a la hora de la valuación se faciliten, para eso consideremos los siguientes teoremas.

***Teorema* 2.3.** *Asumimos la existencia de un numeraire N y una medida de probabilidad $\mathbb{P}^N$ equivalente a la medida inicial $\mathbb{P}^0$, tal que el precio de cualquier activo X sin pagos intermedios y operable en el mercado, relativo a N es una martingala bajo $\mathbb{P}^N$, es decir:*

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^N}\left[\frac{X_T}{N_T}|\mathscr{F}_t\right] 0 \leq t \leq T$$

Sea M un numeraire arbitrario, entonces existe $\mathbb{P}^M$ equivalente a $\mathbb{P}^0$ tal que el precio de cualquier contingente replicable Y normalizado por M es *una martingala bajo* $\mathbb{P}^M$*, es decir*

$$\frac{Y_t}{M_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^M}\left[\frac{Y_T}{M_T}|\mathscr{F}_t\right] 0 \leq t \leq T$$

además la derivada de Radon- Nikodym está dada por las expresiones:

$$\frac{d\mathbb{P}^M}{d\mathbb{P}^N} = \frac{M_T N_0}{M_0 N_T} \quad y \quad \frac{d\mathbb{P}^N}{d\mathbb{P}^M} = \frac{M_0 N_T}{M_T N_0}$$

Demostración. Por hipótesis del teorema, sabemos que existe un N tal que para un activo operable en el mercado Z, $\frac{Z_0}{N_0} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^N}[\frac{Z_T}{N_T}]$ y a su vez $\frac{Z_0}{M_0} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^M}[\frac{Z_T}{M_T}]$, entonces

$$\frac{Z_0}{N_0} = \frac{Z_0}{N_0}\frac{M_0}{M_0} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^M}\left[\frac{M_0}{N_0}\frac{Z_T}{M_T}\right]$$

esto implica que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^N}\left[\frac{Z_T}{N_T}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^M}\left[\frac{M_0}{N_0}\frac{Z_T}{M_T}\right]$$

Por definición de derivada de Radon-Nikodym tenemos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^N}\left[\frac{Z_T}{N_T}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^M}\left[\frac{d\mathbb{P}^N}{d\mathbb{P}^M}\frac{Z_T}{N_T}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^M}\left[\frac{M_0}{N_0}\frac{Z_T}{M_T}\right]$$

despejando $\frac{d\mathbb{P}^N}{d\mathbb{P}^M}$ llegamos a la expresión que estabamos buscando. □

Cuando necesitamos realizar un cambio de medida, un caso particular de la técnica *Change-of-numeraire*, o cambio de *numeraire*, es cuando el nuevo *numeraire* que tomamos es un bono que madura en un fecha futura T. Para una fecha fija T, la medida forward $\mathbb{P}^P_T = \mathbb{P}^P$ (para ahorrar un poco de notación) se define como la medida martingala o de aversión al riesgo para el proceso del *numeraire* $P(t, T)$.
Como se mencionó anteriormente, en la teoría de tasas de interés generalmente se tiene que los modelos están especificados bajo una medida martingala de riesgo neutral $\mathbb{P}$ con la cuenta de banco B_t tomada como numeraire (o $\mathbb{P}^B$ si siguiéramos la notación anterior), además con $\mathbb{P}^B$ y $\mathbb{P}^P$ medidas equivalentes. Tomamos la siguiente convención $\frac{d\mathbb{P}^P}{d\mathbb{P}^B} = \frac{d\mathbb{P}^P}{d\mathbb{P}}$.

Medida (martingala) forward ubicada en el día de terminación T es definida por la derivada de Radon–Nikodym de la siguiente manera

$$\frac{d\mathbb{P}^P}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{B_T P(0,T)} \tag{2.1}$$

Utilizando el teorema anterior podemos demostrar fácilmente esta proposición, ya que

$$\frac{d\mathbb{P}^P}{d\mathbb{P}} = \frac{B_0 P(T,T)}{P(0,T)B_T} = \frac{1}{B_T P(0,T)}$$

De la ecuación (3.4) deducimos que

$$\frac{d\mathbb{P}^P}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T A(s,T)ds + \int_0^T \Sigma(s,T)dL_s\right) \tag{2.2}$$

Como vimos en secciones anteriores estamos interesados en conocer la derivada para tiempos intermedios $t \in [0,T]$ de nuestro horizonte finito, por lo tanto, definimos el proceso $\zeta_t = \frac{d\mathbb{P}^P}{d\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}_t} \quad con \quad 0 \leq t \leq T$, y está dado por:

$$\zeta_t = \frac{d\mathbb{P}^P}{d\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}_t} = \frac{P(t,T)}{B_t P(0,T)} \tag{2.3}$$

Demostración. Restringido a la σ-álgebra $\mathscr{F}_t$ para un $t \leq T$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{P}^P}{d\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}_t} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1}{B_T P(0,T)}|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\int_0^T A(s,T)ds + \int_0^T \Sigma(s,T)dL_s\right)|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\int_0^T A(s,T)ds\right)\exp\left(\int_0^T \Sigma(s,T)dL_s\right)|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \exp\left(-\int_0^t A(s,T)ds + \int_0^t \Sigma(s,T)dL_s\right) \times \\
&\quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\int_t^T A(s,T)ds + \int_t^T \Sigma(s,T)dL_s\right)|\mathscr{F}_t\right]
\end{aligned}$$

y gracias a la Proposición (1.1),

$$= \exp\left(-\int_0^t A(s,T)ds + \int_0^t \Sigma(s,T)dL_s\right) = \frac{P(t,T)}{B_t P(0,T)}$$

Por lo tanto.

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}_t} = \frac{P(t,T)}{B_t P(0,T)}.$$

□

Otra medida que será necesaria para valuación de notas de rango flotantes es la siguiente:
Para tiempos $S < T$ definimos la **Medida forward ajustada** $\mathbb{P}_{S,T}$ en $(\Omega, \mathscr{F}_{T^*})$ de la siguiente manera

$$\frac{d\mathbb{P}_{S,T}}{d\mathbb{P}_T} = \frac{F(S;S,T)}{F(0;S,T)} = \frac{P(0,T)}{P(S,T)P(0,S)} \tag{2.4}$$

donde $F(\cdot,S,T) = \frac{P(\cdot,S)}{P(\cdot,T)}$ denota el proceso del precio forward. Si restringimos la densidad a $\mathscr{F}_t$ para un $t < S$ obtenemos

$$\frac{d\mathbb{P}_{S,T}}{d\mathbb{P}_T}|_{\mathscr{F}_t} = \frac{F(t;S,T)}{F(0;S,T)} = \frac{P(0,T)P(t,S)}{P(t,T)P(0,S)} \tag{2.5}$$

ya que $(F(t;S,T))_{0\leq t\leq S}$ es una $\mathbb{P}_T$-martingala. Así podemos definir

$$\frac{d\mathbb{P}_{S,T}}{d\mathbb{P}}|_{\mathscr{F}_t} = \frac{P(0,T)P(t,S)}{P(t,T)P(0,S)}\frac{P(t,T)}{B_t P(0,T)} = \frac{P(t,S)}{B_t P(0,S)}.$$

2.4. Transformaciones integrales auxiliares

En las siguientes secciones las transformaciones integrales se utilizarán para hacer la gran mayoría de las demostraciones que nos darán expresiones explícitas para precios de derivados. La idea es expresar los precios de derivados como convoluciones y hacer transformaciones de Laplace. Esta técnica se basa en el hecho de que la transformada de Laplace de una convolución es igual al producto de las transformadas de Laplace de sus factores de convolución. Esta técnica es muy útil cuando alguno de los factores de convolución es conocido o fácilmente calculable. Es por esto que los siguientes teoremas son de gran importancia. Ambos teoremas se encuentran en [11] junto con sus demostraciones.

***Teorema* 2.4.** *Sean F_1 y F_2 funciones medibles complejas en la recta real. Sea $z \in \mathbb{C}$ y $R = \Re(z)$. Si*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-Rx}|F_1(x)|dx < \infty \quad y \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-Rx}|F_2(x)|dx < \infty$$

y si $x \to e^{-Rx}|F_1(x)|$ es acotada, entonces la convolución $F(x) = (F_1 * F_2)(x)$ existe y es continua para toda $x \in \mathbb{R}$. Además

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-Rx}|F(x)|dx < \infty$$

así como

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-zx}F(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx}F_1(x)dx \int_{\mathbb{R}} e^{-zx}F_2(x)d$$

***Teorema* 2.5.** *Sea F una función medible compleja en la recta real. Sea $R \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx}F(x)dx \qquad (z \in \mathbb{C}, \Re z = R)$$

con la integral convergiendo absolutamente para $z = R$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que la integral

$$\int_{R+i\infty}^{R-i\infty} e^{zx}f(z)dz$$

existe (Cauchy principal value). Si asumimos que F es continua en x entonces

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{R+i\infty}^{R-i\infty} e^{zx}f(z)dz$$

Capítulo 3

Modelo de estructura temporal de Lévy

La *estructura temporal de tasas de interés*, o *term structure of interest rates*, es la relación que existe entre las tasas de interés (o rendimiento de un bono) y los diferentes periodos para la maduración. También conocida como **curva de rendimiento**, juega un papel importante en la economía ya que refleja las expectativas de los participantes del mercado sobre los cambios futuros en las tasas de interés y política monetaria. La curva de rendimiento es considerada como el *benchmark* o referencia para el mercado de deuda.
Generalmente la curva de rendimiento tiene pendiente positiva, lo cual es lógico pensando en que los inversionistas demandan tasas de interés más altas por invertir su dinero en periodos más largos y riesgosos.
La dirección de la curva de rendimiento puede ser usada para juzgar en su totalidad al mercado, por ejemplo un achatamiento en la curva significa que las tasas de largo plazo están cayendo en comparación con las tasas de corto plazo, lo que podría implicar una recesión en la economía.

Una vez llegado a este punto del trabajo, ahora el objetivo de este capítulo es encontrar un modelo que reproduzca de la manera más exacta la estructura y los precios de nuestro subyacente principal, un *bono cupón cero*.

A la hora de diseñar un modelo que permita reproducir el comportamiento de algún activo, uno debe de prestar atención en dos cosas importantes: la primera es que el modelo debe ser capaz de darnos expresiones analíticas confiables para los instrumentos más importantes como bonos, caps, floors, swaps, etc. La segunda es que debe ser un modelo que se pueda calibrar fácilmente con datos reales del mercado.

La primera alternativa de importancia histórica a los modelos de *tasas cortas* fue propuesto por Ho and Lee [9] quienes modelaron la evolución de la **curva de rendimiento** en un árbol binomial.
Heath, Jarrow and Morton (HJM) [8] trasladaron esa intuición a tiempo continuo tomando tasas instantáneas forward como cantidades fundamentales para modelar, logrando derivar un sistema libre de arbitraje para la evolución estocástica de la curva de rendimiento. La característica principal de este método está en reconocer que existe una relación directa entre los parámetros de deriva y volatilidad en la dinámica de las tasas forward. HJM asumieron que, para un tiempo de maduración fijo T, la **tasa forward instantánea** $f(t,T)$ evoluciona, bajo una medida dada, de acuerdo al siguiente proceso de difusión:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t,$$

donde la función α está completamente determinada por la elección del coeficiente de difusión σ, contrario a los modelos de tasas cortas. Esto se debe principalmente a que utilizando este sistema nos centramos en modelar una expresión derivada o "secundaria", como lo es la tasa instantánea forward $f(t,T)$. Mientras que en los modelos de tasas cortas (r_t) se modela una expresión fundamental.
Estos modelos en un principio fueron dirigidos por un movimiento Browniano d-dimensional, sin embargo los datos del mercado de deuda no apoyaban el uso de la distribución normal. Evidencia empírica encontrada en [11] apoyan el cambio a procesos de Lévy para modelar tasas de interés.
La teoría de HJM tomó importancia por el hecho de que supuestamente cualquier modelo para tasas de interés puede ser reproducido con este método, sin embargo, solo una restringida clase de volatilidades implican un proceso Markoviano, por lo que para valuar derivados de tasas de interés

son necesarios algunos cálculos adicionales. El problema en el uso de este método se traduce en definir una función de volatilidad adecuada que nos evite trabajar con expresiones muy grandes y difíciles de simplificar.

En este capítulo se introducirá el modelo que será la base para trabajar con el precio del subyacente y poder hacer valuación de derivados. El modelo, al estar basado en los trabajos realizados por Heath-Jarrow-Morton, será originado directamente modelando la dinámica de las tasas instantáneas forward introducidas en el primer capítulo del trabajo (Sección 1.1).

3.1. Presentación del modelo

El modelo que será utilizado es dirigido por un proceso de Lévy L no homogéneo d-dimensional, con características (b, c, F) en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ equipado con la filtración $(\mathscr{F}_s)_{0\leq s\leq T^*}$ que es generada por L, para un horizonte de tiempo finito $T^* > 0$ y asumiendo que para cualquier $T \in [0, T^*]$ hay un bono cupón cero con vencimiento en T negociado en el mercado.

Como las tasas forward pueden ser deducidas de la expresión de precios de bonos, se puede hacer la modelación especificando cualquiera de ellas. En el trabajo se especificarán las tasas forward y el precio de un bono cupón cero será encontrado posteriormente.

La dinámica de la tasa forward instantánea para $T \in [0, T^*]$ está dada por:

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T)ds - \int_0^t \sigma(s, T)dL_s \quad (0 \leq t \leq T) \qquad (3.1)$$

Los valores iniciales de $f(0, T)$ son determinísticos, acotados, y medibles en T. También es importante señalar que α y σ son procesos estocásticos que toman valores en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^d$ respectivamente, definidos en $\Omega \times [0, T^*] \times [0, T^*]$ y que cumplan las siguientes condiciones:

1. Para $s > T$ tenemos que $\alpha(w, s, T) = 0$ y $\sigma(w, s, T) = 0$.

2. $Sup_{s,T\leq T^*}\left(|\alpha(w,s,T)|+|\sigma(w,s,T)|\right)<\infty$

Condiciones que nos ayudan a segurar que podemos encontrar una versión conjunta para todo $f(t,T)$.

Como vimos en el primer capítulo, de la expresión de tasa forward podemos encontrar expresiones para el precio de un *bono cupón cero* y para la *cuenta libre de riesgo.*

***Lema* 3.1.** *El precio de un bono está dado por*

$$P(t,T)=P(0,T)\exp\left(\int_0^t(r(s)-A(s,T))ds+\int_0^t\Sigma(s,T)dL_s\right) \tag{3.2}$$

donde

$$A(s,T)=\int_s^T\alpha(s,u)du,\quad \Sigma(s,T)=\int_s^T\sigma(s,u)du. \tag{3.3}$$

Demostración. Con la ecuación 3.1 deducimos que

$$f(t,u)-f(0,u)=\int_0^t\alpha(s,u)ds-\int_0^t\sigma(s,u)dL_s \qquad (0\leq t\leq u\leq T)$$

al igual que

$$f(u,u)=f(0,u)+\int_0^u\alpha(s,u)ds-\int_0^u\sigma(s,u)dL_s$$

De la ecuación 1.5 sabemos que

$$\ln P(t,T)=-\int_t^T f(t,u)du=-\int_t^T(f(0,u)+f(t,u)-f(0,u))du$$

$$=-\int_t^T\left(f(0,u)+\int_0^t\alpha(s,u)ds-\int_0^t\sigma(s,u)dL_s\right)du$$

Abrimos la integral y usando teorema de Fubini

$$=-\int_t^T f(0,u)du-\int_0^t\int_t^T\alpha(s,u)duds+\int_0^t\int_t^T\sigma(s,u)dudL_s$$

Por lo tanto

$$\ln P(t,T) = -\left(\int_0^T f(0,u)du - \int_0^t f(0,u)du\right)$$

$$-\int_0^t \left(\int_s^T \alpha(s,u)du - \int_s^t \alpha(s,u)du\right) ds$$

$$+\int_0^t \left(\int_s^T \sigma(s,u)du - \int_s^t \sigma(s,u)du\right) dL_s$$

$$= -\int_0^T f(0,u)du - \int_0^t \int_s^T \alpha(s,u)duds + \int_0^t \int_s^T \sigma(s,u)dudL_s$$

$$+\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \int_s^t \alpha(s,u)duds - \int_0^t \int_s^t \sigma(s,u)dudL_s$$

Usando el teorema de Fubini obtenemos

$$\ln P(t,T) = \ln P(0,T) - \int_0^t \int_s^T \alpha(s,u)duds + \int_0^t \int_s^T \sigma(s,u)dudL_s$$

$$+\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \int_0^u \alpha(s,u)dsdu - \int_0^t \int_0^u \sigma(s,u)dL_s du$$

$$= \ln P(0,T) - \int_0^t \int_s^T \alpha(s,u)duds + \int_0^t \int_s^T \sigma(s,u)dudL_s$$

$$+\int_0^t \left(f(0,u) + \int_0^u \alpha(s,u)ds - \int_0^u \sigma(s,u)dL_s\right) du$$

Sustituimos $A(s,T)$, $\Sigma(s,T)$ y $f(u,u)$

$$= \ln P(0,T) - \int_0^t A(s,T)ds + \int_0^t \Sigma(s,T)dL_s + \int_0^t f(u,u)du$$

Juntando las integrales

$$\ln P(t,T) = \ln P(0,T) + \int_0^t (r(s) - A(s,T))\, ds + \int_0^t \Sigma(s,T)dL_s$$

Por último, sacando exponencial de ambos lados de la igualdad obtenemos la expresión que buscamos.

$$P(t,T) = P(0,T)\exp\left(\int_0^t (r(s) - A(s,T))\,ds + \int_0^t \Sigma(s,T)dL_s\right)$$

$\square$

***Corolario* 3.1.** *Fijando $T = t$ en el Lema 3.1 la cuenta libre de riesgo (ecuación 1.1) puede ser escrita como*

$$B_t = \frac{1}{P(0,t)}\exp\left(\int_0^t A(s,t)ds - \int_0^t \Sigma(s,t)dL_s\right) \tag{3.4}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}
P(t,t) &= P(0,t)\exp\left(\int_0^t (r(s) - A(s,t))\,ds + \int_0^t \Sigma(s,t)dL_s\right)\\
&= P(0,t)\exp\left(\int_0^t r(s)ds - \int_0^t A(s,t)ds + \int_0^t \Sigma(s,t)dL_s\right)\\
&= P(0,t)\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)\exp\left(-\int_0^t A(s,t)ds + \int_0^t \Sigma(s,t)dL_s\right)\\
&= P(0,t)B_t\exp\left(-\int_0^t A(s,t)ds + \int_0^t \Sigma(s,t)dL_s\right)
\end{aligned}$$

Despejando B_t y sabiendo que $P(t,t) = 1$ obtenemos la expresión que buscamos. $\square$

***Corolario* 3.2.** *Esto tiene como resultado la siguiente expresión del precio de un bono que será utilizada después:*

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\int_0^t A(s,t,T)ds + \int_0^t \Sigma(s,t,T)dL_s\right) \tag{3.5}$$

Usando las siguientes abreviaciones:

$$A(s,t,T) = A(s,T) - A(s,t), \qquad \Sigma(s,t,T) = \Sigma(s,T) - \Sigma(s,t) \tag{3.6}$$

Demostración. Tenemos que

$$P(t,T) = P(0,T)\exp\left(\int_0^t (r(s) - A(s,T))\,ds + \int_0^t \Sigma(s,T)dL_s\right)$$

$$= P(0,T)B_t\exp\left(-\int_0^t A(s,T)ds + \int_0^t \Sigma(s,T)dL_s\right)$$

Sustituimos el valor de B_t como en (3.4)

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(\int_0^t -A(s,T) + A(s,t)ds + \int_0^t \Sigma(s,T) - \Sigma(s,t)dL_s\right)$$

Sustituimos como en (3.6) y obtenemos la expresión que buscamos. □

En este trabajo únicamente se considerarán estructuras de volatilidad deterministas. Más aún, necesitamos que el proceso de conducción L satisfaga la Suposición 1.1 así como la siguiente condición:

***Suposición* 3.1.** *La estructura de la volatilidad σ es determinista y acotada. Para $0 \leq s$, $T \leq T^*$ tenemos*

$$0 \leq \Sigma^i(s,T) \leq M \qquad (i \in \{1, ..., d\}) \tag{3.7}$$

donde Σ está dada por la expresión (3.3) y M es una constante que viene de la Suposición 1.1. Notar que $\Sigma(s,s) = 0$.

La intención es obtener condiciones en el término de deriva que aseguren la propiedad de martingala para precios descontados de bonos. Con esto podremos obtener el precio de reclamaciones contingentes integrables sacando la esperanza de los payoffs descontados bajo la medida martingala.

Usamos la Proposición 1.1 del primer capítulo, con $f(s) = \Sigma(s,T)$ para una $T \in [0,T^*]$ fija. Obtenemos que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t \Sigma(s,T)dL_s\right)\right] = \exp\int_0^t \theta_s(\Sigma(s,T))ds.$$

Llamamos $A(s,T) = \theta_s(\Sigma(s,T))$ y $X_\bullet = \int_0^\bullet \Sigma(s,T)dL_s$, lo cual nos deja la expresión anterior como:

$$\mathbb{E}\left[\exp(X_t)\right] = \exp\int_0^t A(s,T)ds$$

Del Lema 3.1 sabemos:

$$\begin{aligned}
P(t,T) &= P(0,T)\exp\left(\int_0^t (r(s) - A(s,T))ds + \int_0^t \Sigma(s,T)dL_s\right)\\
&= P(0,T)\exp\left(\int_0^t r(s)ds\right)\times\\
&\exp\left(-\int_0^t A(s,T)ds\right)\exp\left(\int_0^t \Sigma(s,T)dL_s\right)
\end{aligned}$$

reescribiendo esta expresión tenemos

$$P(t,T) = P(0,T)\cdot B_t\cdot\mathbb{E}^{-1}\left[\exp(X_t)\right]\cdot\exp(X_t)$$

Sea $Z(t,T) = \frac{P(t,T)}{B_t}$ el proceso del precio descontado de un bono, entonces

$$Z(t,T) = \frac{P(t,T)}{B_t} = P(0,T)\frac{\exp(X_t)}{\mathbb{E}\left[\exp(X_t)\right]}$$

Ahora demostraremos lo siguiente

Lema 3.2. *$Z(t,T)$ es una martingala.*

Demostración. Para un tiempo $s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z(t,T)|\mathscr{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[P(0,T)\frac{\exp(X_t)}{\mathbb{E}[\exp(X_t)]}|\mathscr{F}_s\right]\\
&= \frac{P(0,T)}{\mathbb{E}[\exp(X_t)]}\mathbb{E}\left[\exp(X_t)|\mathscr{F}_s\right]\\
&= \frac{P(0,T)}{\mathbb{E}[\exp(X_t)]}\mathbb{E}\left[\exp((X_t - X_s) + X_s)|\mathscr{F}_s\right]\\
&= \frac{P(0,T)}{\mathbb{E}[\exp(X_t)]}\mathbb{E}[\exp(X_t - X_s)|\mathscr{F}_s]\exp(X_s)
\end{aligned}$$

Por los incrementos independientes tenemos

$$= \frac{P(0,T)}{\mathbb{E}[\exp(X_t)]} \frac{\mathbb{E}[\exp(X_t)]}{\mathbb{E}[\exp(X_s)]} \exp(X_s)$$

$$= P(0,T) \frac{\exp(X_s)}{\mathbb{E}[\exp(X_s)]} = Z(s,T)$$

$\square$

Con ayuda de este resultado podemos dar la siguiente proposición que será fundamental para poder hacer la valuación, ya que hemos encontrado un término de deriva que hace que el precio descontado de nuestro subyacente sea una martingala.

***Proposición* 3.1.** *Sea*

$$A(s,T) = \theta_s(\Sigma(s,T)), \tag{3.8}$$

entonces para todo $T \in [0, T^*]$ el proceso del precio descontado de un bono

$$Z(t,T) = \frac{1}{B_t} P(t,T)$$

es una martingala.

Por todo lo anterior podemos asumir que la medida $\mathbb{P}$ es la **medida de riesgo neutral** escogida por el mercado y valuaremos reclamaciones contingentes tomando la esperanza bajo $\mathbb{P}$ de sus payoffs descontados.
Con la condición de deriva de la Proposición 3.1, la expresión (3.5) del precio de un bono puede ser escrito como:

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left(\int_0^t (\theta_s(\Sigma(s,t)) - \theta_s(\Sigma(s,T)))ds + \int_0^t \Sigma(s,t,T)dL_s \right). \tag{3.9}$$

En el siguiente capítulo trabajaremos un poco con los parámetros del proceso de manera que nos ayuden a reducir las operaciones. Empezamos a trabajar con la teoría de cambio de numeraire, para verlo reflejado en algo más práctico.

Capítulo 4

Valuación

Una vez trabajando con todas las herramientas auxiliares y conociendo el modelo para la dinámica del precio del subyacente, llegamos a la culminación y parte central de este trabajo, valuación de derivados. Nuestro principal objetivo es llegar a fórmulas explícitas para el valor de un derivado en el tiempo.
Sabemos que el precio de un derivado se obtiene sacando la esperanza condicional, bajo una medida martingala, del payoff descontado. Por lo tanto, la idea principal detrás de la valuación es ver esa esperanza como una convolución de dos funciones medibles complejas. Ayudado de los Teoremas 2.4 y 2.5, trabajar con la convolución para llegar a expresiones analíticas fáciles de manejar.
La valuación empieza con dos de las instrumentos más importantes del mercado, caps y floors. Las mismas herramientas, más una suposición adicional en la volatilidad, serán usadas al llegar a la valuación de swaptions. Por último se busca hacer valuación de notas de rango flotante, que incorporan un resultado auxiliar adicional, opciones digitales. Podremos notar que buscar un precio para notas de rango está en función de encontrar una fórmula para opciones digitales. Concluiremos dando expresión analíticas explícitas para ambos casos.

4.1. Valuación de caps y floors

Por el primer capítulo sabemos que un **cap** (**floor**) es una serie de opciones call (put) sobre tasas de interés subsecuentes variables. Individualmente cada opción es llamada **caplet** (**flooret**). Cada *caplet* es equivalente a una opción **put** sobre un bono cupón cero y cada *flooret* es equivalente a una opción **call** sobre el mismo subyacente. Es por esto que si derivamos fórmulas para calls y puts sobre bonos cupón cero, automáticamente tenemos fórmulas para caps y floors.

Como ya se demostró, el proceso del precio descontado de un bono $Z(\cdot, T)$ es una martingala con respecto a la medida de riesgo neutral $\mathbb{P}$ y la filtración dada por cada $T \in [0, T^*]$. Es por eso que podemos valuar reclamaciones integrables sacando la esperanza condicional del payoff descontado.
El valor de un call en tiempo s con precio strike K y maduración en t, de un bono con maduración en T, está dado por

$$C_s(t, T, K) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{B_t}(P(t,T) - K)^+ | \mathscr{F}_s\right] \quad (s \leq t)$$

Entonces para poder hacer la valuación del derivado al día de hoy bastaría con calcular el valor de una esperanza. Una alternativa para hacerlo es sacar la distribución condicional conjunta de las variables aleatorias B_t y $P(t, T)$, lo cual puede llegar a ser demasiado complicado. En vez de eso optaremos por utilizar técnicas de cambio de medida (*change-of-numeraire*) y así evitar trabajar con la función de distribución conjunta.

Procederemos cambiando la medida martingala libre de riesgo $\mathbb{P}$ por la medida martingala forward, que utiliza al bono cupón cero como numeraire principal, para el día de término t y denotada por $\mathbb{P}^P$.
Gracias a la expresiones (3.9) y (2.2) tenemos lo siguiente

$$C_0(t, T, K) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{B_t}(P(t,T) - K)^+ | \mathscr{F}_0\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^P}\frac{1}{B_t}(P(t,T) - K)^+\right]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[B_t P(0,t)\frac{1}{B_t}(P(t,T) - K)^+\right] = P(0,t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[(P(t,T) - K)^+\right]$$

$$= P(0,t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[(D\exp(X_t) - K)^+\right]$$

donde

$$D = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(\int_0^t (\theta_s(\Sigma(s,t)) - \theta_s(\Sigma(s,T)))ds\right)$$

que es una expresión con elementos deterministas, pero

$$X_t = \int_0^t \Sigma(s,t,T)dL_s$$

es estocástico y $\mathscr{F}_t$-medible. Para poder calcular esta esperanza, y hacer la valuación, tenemos que encontrar la distribución de X bajo la medida $\mathbb{P}^P$, la cual denotaremos por $\mathbb{Q}$. Si suponemos que esta distribución tiene densidad de Lebesgue γ en $\mathbb{R}$, podríamos escribir el precio del call a tiempo cero de la siguiente manera:

$$C_0(t,T,K) = P(0,t)\int_{\mathbb{R}} (De^x - K)^+\gamma(x)dx \tag{4.1}$$

La distribución de $\mathbb{Q}$ posee densidad de Lebesgue si y sólo si es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{Q}$ es absolutamente continua o no depende de la estructura de volatilidad y del proceso de conducción que se elijan.

Ahora denotaremos como M_t^X a la función generadora de momentos de la variable aleatoria X con respecto a la medida $\mathbb{P}^P$. La expresión analítica del precio de un call está dada por el siguiente teorema.

***Teorema* 4.1.** *Supongamos que la distribución de X posee densidad de Lebesgue. Si seleccionamos una $R < -1$ tal que $M_t^X(-R) < \infty$, entonces tenemos*

$$C_0(t,T,K) = \frac{1}{2\pi}KP(0,t)e^{R\xi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\xi}\frac{1}{(R+iu)(R+1+iu)}M_t^X(-R-iu)du \tag{4.2}$$

donde

$$\xi = \log\frac{P(0,t)}{P(0,T)} - \int_0^t \Big(\theta_s(\Sigma(s,t)) - \theta_s(\Sigma(s,T))\Big)ds + \log K$$

Antes de hacer la demostración es necesario ver que siempre se puede encontrar un término R que satisfaga los requerimientos del teorema. El siguiente lema aparte de ayudarnos con este problema también nos da una expresión para $M_t^X(-R-iu)$

Lema 4.1. *Por la Suposición 1.1, sabemos que existen dos constantes M y ϵ tal que $\Sigma(s,T) \leq M' < M$ para todo $s,T \in [0,T^*]$. Entonces para cada $R \in [-1-\frac{M-M'}{M'}, -1)$ tenemos que $M_t^X(-R) < \infty$. Más aún, para un $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) = -R$*

$$M_t^X(z) = \exp \int_0^t (\theta_s(z\Sigma(s,T) + (1-z)\Sigma(s,t)) - \theta_s(\Sigma(s,t)))\, ds \tag{4.3}$$

Demostración. Fijamos un $R \in [-1-\frac{M-M'}{M'}, -1)$. Para un $z \in \mathbb{C}$ con $\Re(z) = -R$.
Entonces, de la expresión (2.2)

$$\begin{aligned}
M_t^X(z) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}[e^{zX}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[\exp\left(z\int_0^t \Sigma(s,t,T)dL_S\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{P}^P}{d\mathbb{P}}\exp\left(z\int_0^t \Sigma(s,T) - \Sigma(s,t)dL_S\right)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp\left(-\int_0^t A(s,t)ds + \int_0^t \Sigma(s,t)dL_s\right) \\
&\exp\left(z\int_0^t (\Sigma(s,T) - \Sigma(s,t))dL_S\right)] \\
&= \exp\left(-\int_0^t A(s,t)ds\right) \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^t (z\Sigma(s,T) + (1-z)\Sigma(s,t))dL_S\right)\right]
\end{aligned}$$

Con ayuda de la Proposición 1.1 y recordando que $A(s,t) = \theta_s(\Sigma(s,t))$

concluimos que

$$
\begin{aligned}
M_t^X(z) = \exp&\left(-\int_0^t \theta_s(\Sigma(s,t))ds\right) \\
&\exp\left(\int_0^t \theta_s(z\Sigma(s,T) + (1-z)\Sigma(s,t))ds\right) \\
&= \exp\int_0^t (\theta_s(z\Sigma(s,T) + (1-z)\Sigma(s,t)) - \theta_s(\Sigma(s,t)))ds
\end{aligned}
$$

$\square$

Una vez que comprobamos que el lema es válido podemos seguir con la demostración del Teorema 4.1.

Demostración. Partimos de la expresión (4.1) del precio de una opción call y definimos $\xi = -\log D + \log K$ y $\upsilon(x) = (e^{-x} - 1)^+$

$$
\begin{aligned}
C_0(t,T,K) &= P(0,t)\int_{\mathbb{R}} (De^x - K)^+\gamma(x)dx \\
&= KP(0,t)\int_{\mathbb{R}} (DK^{-1}e^x - 1)^+\gamma(x)dx \\
&= KP(0,t)\int_{\mathbb{R}} (e^{\log D - \log K + x} - 1)^+\gamma(x)dx \\
&= KP(0,t)\int_{\mathbb{R}} (e^{-(\xi - x)} - 1)^+\gamma(x)dx \\
&= KP(0,t)\int_{\mathbb{R}} \upsilon(\xi - x)\gamma(x)dx \\
&= KP(0,t)(\upsilon * \gamma)(\xi) = V(\xi)
\end{aligned}
$$

La intención ahora es poder aplicar el Teorema 2.4, para eso necesitamos ver que se cumplen las restricciones del teorema. Denotamos como $F_1(x) = \upsilon(x)$ y $F_2(x) = \gamma(x)$. Se puede notar que $x \longmapsto e^{-Rx}\upsilon(x) = e^{-Rx}(e^{-x}-1)^+$

es acotada. Para las demás restricciones

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-Rx}|\upsilon(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-Rx}(e^{-x}-1)^{+}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{-\ln(1)} e^{-Rx}(e^{-x}-1)dx = \frac{1}{R(R+1)} < \infty$$

lo cual cumple la primera restricción. Para la segunda notar que como $\gamma(x)$ es función de densidad

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-Rx}|\gamma(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-Rx}\gamma(x)dx = M_t^X(-R) < \infty$$

lo cual implica que el teorema se cumple, entonces la convolución existe y además

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-zx}(\upsilon * \gamma)(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx}\upsilon(x)dx \int_{\mathbb{R}} e^{-zx}\gamma(x)d$$

Por lo tanto

$$L[V](R+iu) = KP(0,t)L[\upsilon](R+iu)L[\gamma](R+iu) \qquad (u \in \mathbb{R})$$

donde $L[V]$ denota la transformada de Laplace bilateral de V (igualmente para υ y γ). Por el Teorema 2.4 también sabemos que $\xi \longmapsto V(\xi)$ es continua, además $\int e^{-Rz}|V(z)|dz < \infty$ entonces $\int e^{-Rz}V(z)dz$ es absolutamente convergente. Como consecuencia podemos aplicar el Teorema 2.5 y así obtenemos

$$V(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{Y\to\infty}\int_{R-iY}^{R+iY} e^{z\xi}L[V](z)dz$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{Y\to\infty}\int_{-Y}^{Y} e^{(R+iu)\xi}L[V](R+iu)du$$

Haciendo el cambio de variable $z = R+iu$. Ahora sustituimos el valor de $L[V](R+iu)$ que obtuvimos anteriormente

$$V(\xi) = \frac{1}{2\pi}\lim_{Y\to\infty}\int_{-Y}^{Y} e^{(R+iu)\xi}KP(0,t)L[\upsilon](R+iu)L[\gamma](R+iu)du$$
$$= \frac{1}{2\pi}KP(0,t)e^{R\xi}\lim_{Y\to\infty}\int_{-Y}^{Y} e^{iu\xi}L[\upsilon](R+iu)L[\gamma](R+iu)du$$

si el límite existe. Primero notar que

$$L[\gamma](R+iu) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(R+iu)x}\gamma(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{(-R-iu)x}\gamma(x)dx = M_t^X(-R-iu)$$

además

$$L[v](R+iu) = \frac{1}{(R+iu)((R+iu)+1)}$$

que es un cálculo parecido al que se hizo para revisar la primera restricción del Teorema 2.4, cambiando la constante R por $(R+iu)$.

Para probar que el límite existe vamos a encontrar algunas cotas superiores para los términos que están dentro de la integral, así cuando $Y \to \infty$ podamos asegurar que los términos no divergen a infinito. Notar primero que $|e^{iu\xi}| = |\cos(u\xi) + i\operatorname{sen}(u\xi)| = \sqrt{\cos^2(u\xi) + \operatorname{sen}^2(u\xi)} = 1$. Ahora con el término $|M_t^X(-R-iu)|$

$$|M_t^X(-R-iu)| = |\int_{\mathbb{R}} e^{(-R-iu)x}\gamma(x)dx| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{(-R-iu)x}\gamma(x)|dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} e^{-Rx}\gamma(x)dx = M_t^X(-R)$$

Estos dos primeros términos tienen una cota superior que no depende de u, entonces no les afectaría a la hora de sacar el límite. Por último notar que el término $\int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{(R+iu)((R+iu)+1)}|du$, resulta ser acotado.
Como $\int |e^{iu\xi} L[v](R+iu)L[\gamma](R+iu)|du < \infty$ entonces el límite existe, más aún la integral es absolutamente convergente.

□

De la misma manera podemos obtener el precio $P_0(t,T,K)$ de un *put* con precio strike K y maduración en t, de un bono que madura en T.

***Corolario* 4.1.** *Supongamos que la distribución de X posee densidad de Lebesgue. Si escogemos una $R > 0$ tal que $M_t^X(-R) < \infty$. Entonces tene-*

mos

$$P_0(t,T,K) = \frac{1}{2\pi} K P(0,t) e^{R\xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\xi} \frac{1}{(R+iu)(R+1+iu)} M_t^X(-R-iu) du \tag{4.4}$$

donde

$$\xi = \log \frac{P(0,t)}{P(0,T)} - \int_0^t (\theta_s(\Sigma(s,t)) - \theta_s(\Sigma(s,T))) ds + \log K$$

Notar que la fórmula del *call* y del *put* son aparentemente la misma, la diferencia está en los valores que cada una permite para el término R.

4.2. Valuación de Swaptions

En esta sección se obtendrá una fórmula explícita para valuar *swaptions* bajo una restricción adicional sobre la volatilidad.
Un **swaption** es una opción en un *forward swap*, *i.e.* un swap que inicia en el futuro. A la maduración el poseedor de la opción tiene el derecho de entrar en un swap a una tasa fija pre-especificada. Existen dos clases de *swaptions*, **pagadores** y **receptores**, y dan a sus poseedores el derecho de entrar a un swap como pagadores o receptores a una tasa fija. Entenderemos los swaptions como el derecho de intercambiar un bono con cupón, que tiene la tasa fija del swap como su cupón, contra una parte segura cuyo valor siempre es igual a 1. Por lo tanto, el receptor del swaption (resp. pagador) puede ser visto como un call (put) sobre un bono cuponado con precio de ejercicio igual a 1.

Antes de poder hacer la valuación de opciones sobre bonos cuponados, es necesario hablar de la restricción a la volatilidad, para eso tenemos la siguiente suposición:

***Suposición* 4.1.** *Para toda $T \in [0,T^*]$ tenemos que $\sigma(\cdot,T)$ es un vector distinto de cero, y además*

$$\sigma(s,T) = \sigma_2(T)\sigma_1(s) \quad (0 \leq s \leq T)$$

donde $\sigma_1 : [0,T^*] \to \mathbb{R}^d$ y $\sigma_2 : [0,T^*] \to \mathbb{R}_+$ son continuamente diferenciables.

Denotamos por $P_C(t, T_1, ..., T_n)$ al precio a tiempo t de un bono cuponado con maduración T_n que paga a su poseedor las cantidades $C_1, ..., C_n$ en las fechas $T_1, ..., T_n$. Es posible ver cualquier bono con cupón como la suma de varios bonos cupón cero con diferentes fechas de maduración, por lo tanto, para $0 \leq t < T_1$

$$P_C(t, T_1, ..., T_n) = C_1 P(t, T_1) + C_2 P(t, T_2) + ... + C_n P(t, T_n)$$

Para poder obtener el precio a tiempo cero de un *call* con precio strike 1 y maduración en t sobre un bono cuponado, se necesita tomar la esperanza del payoff descontado, como se hizo previamente. Por la expresión (3.9), tenemos

$$\begin{aligned}
C_0 &= C_0(t, T_1, ..., T_n, C_1, ..., C_n) \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{B_t}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i P(t, T_i) - 1\right)^+ |\mathscr{F}_0\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^P}\frac{1}{B_t}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i P(t, T_i) - 1\right)^+\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[\frac{B_t P(0,t)}{B_t}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i P(t, T_i) - 1\right)^+\right] \\
&= P(0,t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} C_i P(t, T_i) - 1\right)^+\right] \\
&= P(0,t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} D_i \exp\left(\int_0^t \Sigma(s, t, T_i) dL_s\right) - 1\right)^+\right]
\end{aligned}$$

donde

$$D_i = \frac{P(0, T_i)}{P(0,t)} C_i \exp\left(\int_0^t (\theta_s(\Sigma(s,t)) - \theta_s(\Sigma(s, T_i)))ds\right)$$

Sabemos que para $0 \leq s \leq t \leq T \leq T^*$ y por la suposición (4.1)

$$\Sigma(s, t, T) = \int_t^T \sigma(s, u) du = \int_t^T \sigma_2(u) du * \sigma_1(s)$$

Además se nota lo siguiente

$$\Sigma(s,t,T_i) = \frac{\int_t^{T_i} \sigma_2(u)du}{\int_t^{T_n} \sigma_2(u)du} \Sigma(s,t,T_n)$$

se puede escribir $\Sigma(s,t,T_i)$ en términos de $\Sigma(s,t,T_n)$ para toda $i \in (1,2,...n)$. Por lo tanto podemos reescribir la expresión del precio de un *call* a tiempo cero de la siguiente manera:

$$C_0 = P(0,t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} D_i e^{B_i X} - 1\right)^+\right] \tag{4.5}$$

donde

$$0 < B_i = \frac{\int_t^{T_i} \sigma_2(u)du}{\int_t^{T_n} \sigma_2(u)du} \leq 1 \quad (i \in (1,2,...,n))$$

es una cantidad determinista, pero

$$X = \int_0^t \Sigma(s,t,T_n)dL_s$$

es aleatoria. Una vez más en necesario encontrar la distribución de X bajo la medida $\mathbb{P}^P$ para poder calcular la esperanza y hacer la valuación. Se vuelve a definir como $\mathbb{Q}$ a tal distribución y se supone que tiene densidad de Lebesgue γ en $\mathbb{R}$, entonces la esperanza quedaría

$$C_0 = P(0,t)\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} D_i e^{B_i x} - 1\right)^+ \gamma(x)dx \tag{4.6}$$

donde $\gamma = \frac{d\mathbb{Q}}{d\lambda}$.
Como en los casos anteriores, se denota con M_t^X a la función generadora de momentos de la variable aleatoria X con respecto a la medida $\mathbb{P}^P$.

***Teorema* 4.2.** *Supongamos que la distribución de X posee densidad de Lebesgue. Tomamos una $R < -1$ tal que $M_t^X(-R) < \infty$ y sea Z el único cero de la función continua y estrictamente creciente*

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i e^{B_i x} - 1$$

entonces se tiene que

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} P(0,t) \lim_{Y\to\infty} \int_{-Y}^{Y} L[\upsilon](R+iu) M_t^X(-R-iu)du \tag{4.7}$$

donde $L[\upsilon]$ *denota la transformación bilateral de Laplace de* $\upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $\upsilon(x) = (g(-x))^+$*. Más aún*

$$L[\upsilon](R+iu) = e^{(R+iu)Z} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(D_i e^{B_i Z} \frac{-1}{B_i + R + iu} \right) + \frac{1}{R+iu} \right) \quad (u \in \mathbb{R})$$

y para $z \in \mathbb{C}$ *con* $\Re(z) = -R$

$$M_t^X(z) = \exp \int_0^t \left(\theta_s(z\Sigma(s,T_n) + (1-z)\Sigma(s,t)) - \theta_s(\Sigma(s,t)) \right) ds$$

Demostración. Se empieza notando que justamente $g(x)$ es una función estrictamente creciente y continua. Si se deriva la función se puede comprobar fácilmente que su derivada es positiva, y al ser suma y producto de otras funciones continuas, entonces $g(x)$ es también una función continua. Como su dominio son todos los números reales, entonces tiene una única raíz, entonces existe un $Z \in \mathbb{R}$ tal que

$$(g(x))^+ = \mathbb{I}_{[Z,\infty)}(x) g(x)$$

Se define $\upsilon(x) = (g(-x))^+$, y por la expresión (4.6) se tiene

$$\begin{aligned} C_0 &= P(0,t) \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} D_i e^{B_i x} - 1 \right)^+ \gamma(x)dx \\ &= P(0,t) \int\limits_{\mathbb{R}} \upsilon(0-x)\gamma(x)dx \\ &= P(0,t)(\upsilon * \gamma)(0) = V(0) \end{aligned}$$

Se calcula la transformada bilateral de Laplace de υ

$$\begin{aligned}
L[\upsilon](z) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-zx}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i e^{-B_i x} - 1\right)^{+} dx \\
&= \int_{-\infty}^{-Z} e^{-zx}\left(\sum_{i=1}^{n} D_i e^{-B_i x} - 1\right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(D_i \int_{-\infty}^{-Z} e^{-zx} e^{-B_i x} dx\right) - \int_{-\infty}^{-Z} e^{-zx} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(D_i \int_{-\infty}^{-Z} e^{-(B_i+z)x} dx\right) - \int_{-\infty}^{-Z} e^{-(z)x} dx
\end{aligned}$$

El resultado siguiente será de gran utilidad para poder continuar con la valuación.

Para una constante $0 \leq C \leq 1$ y algún $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z < -C$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-Z} e^{-(C+z)x} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-(C+z)(u-Z)} du &= e^{(C+z)Z} \int_{-\infty}^{0} e^{-(C+z)u} du \\
&= e^{(C+z)Z} \int_{0}^{1} t^{-(C+z)} \frac{1}{t} dt \\
&= e^{(C+z)Z} \int_{0}^{1} t^{-(C+z)-1} (1-t)^{1-1} dt \\
&= e^{(C+z)Z} B(-(C+z), 1) \\
&= e^{(C+z)Z} \frac{\Gamma(-(C+z))\Gamma(1)}{\Gamma(-(C+z)+1)} \\
&= e^{(C+z)Z} \frac{\Gamma(-(C+z))}{-(C+z)\Gamma(-(C+z))} \\
&= e^{(C+z)Z} \frac{-1}{C+z}
\end{aligned}$$

donde $B(\cdot,\cdot)$ denota a la función beta y $\Gamma(\cdot)$ a la función gamma. Se realizaron dos cambios de variables, el primero fue $x = u - z$ y el segundo

$t = e^u$.
Por lo tanto, la transformada bilateral de Laplace de v queda de la siguiente manera

$$L[v](z) = e^{zZ}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(D_i e^{B_i Z}\frac{-1}{B_i+z}\right)+\frac{1}{z}\right) \tag{4.8}$$

Una vez más se nombra $F_1(x) = v(x)$ y $F_2(x) = \gamma(x)$, se aplica el teorema (2.4) y se procede de manera similar a la demostración anterior.
Primero se debe notar que ambas funciones cumplen la restricción $\int e^{-Rx}|F_{\cdot}(x)|dx < \infty$, por lo tanto, la convolución existe y su transformada de Laplace es igual al producto de la trasformada de sus factores de convolución, entonces se cumple que

$$L[V](R+iu) = P(0,t)L[v](R+iu)L[\gamma](R+iu)$$

Por el Teorema 2.4 también se sabe que la convolución es continua y la integral $\int e^{-Rz}V(z)dz$ es absolutamente convergente. Una vez más haciendo uso del Teorema 2.5 se obtiene

$$\begin{aligned}
V(0) &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{Y\to\infty}\int_{R-iY}^{R+iY} e^{z0}L[V](z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{Y\to\infty}\int_{-Y}^{Y} L[V](R+iu)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{Y\to\infty}\int_{-Y}^{Y} P(0,t)L[v](R+iu)L[\gamma](R+iu)du \\
&= \frac{1}{2\pi}P(0,t)\lim_{Y\to\infty}\int_{-Y}^{Y} L[v](R+iu)M_t^X(-R-iu)du
\end{aligned}$$

Con $L[v](R+iu)$ igual a la expresión (4.8) se obtiene la expresión buscada. (Se realizó el cambio de variable $z = R+iu$). Para terminar se debe notar que la expresión para M_t^X es igual a la que se tiene en el Teorema 4.1. Por lo tanto la expresión y la demostración son iguales a las del Lema 4.1. □

4.3. Valuación de notas de rango flotante

El objetivo de esta sección es poder hacer valuación de notas de rango. Al igual que en los capítulos anteriores, serán utilizadas técnicas de cambio de medida y transformaciones de Laplace para sacar expresiones analíticas explícitas. La idea fundamental seguirá siendo la misma, buscar expresar el precio de una opción como una convolución y así poder usar los dos teoremas fundamentales que hemos ocupado.

Las **notas de rango** son productos que utilizan los inversionistas que piensan que las tasas de interés van a permanecer dentro un determinado rango o corredor. Proporcionan pagos de interés proporcionales al tiempo en el que una tasa de referencia cae dentro del rango. A cambio del inconveniente de que no se pagan intereses en el tiempo en que se sale del corredor, se ofrecen tasas más altas a los demás productos estándar existentes.
Las **notas de rango flotante** pagan cupones que están relacionados con cierta tasa de referencia, mientas que los cupones de las notas de rango fijas son especificados previamente. Es fácil empezar a notar que los pagos de cupones de ambos productos financieros dependen de la trayectoria de la tasa de referencia.
Para que el método de valuación sea más entendible primero se trabaja con un resultado auxiliar, valuación de opciones digitales, ya que como se verá posteriormente servirá de apoyo a la hora de querer encontrar expresiones para notas de rango.

4.4. Opciones digitales

Un **call (put) digital europeo estándar de tasa de interés** con tasa strike r_k es un instrumento financiero que paga la cantidad de una unidad de dinero a su poseedor si y sólo si la tasa de interés compuesta simplemente para el periodo $[T, T+\delta]$ se encuentra por encima (debajo) de r_k en el día de maduración de la opción T. El valor en tiempo T de esta opción está dado por

$$SD(\Theta)_T[r_n(T, T+\delta); r_k; T] = \mathbb{I}_{\{\Theta r_n(T,T+\delta) > \Theta r_k\}}$$

con

$$
\begin{aligned}
r_n(T,T+\delta) = L(T,T,T+\delta) &= \frac{1}{\tau(T,T+\delta)}\left(\frac{P(T,T)}{P(T,T+\delta)}-1\right) \\
&= \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{P(T,T+\delta)}-1\right)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

donde $\Theta = 1$ para un call digital y $\Theta = -1$ para un put digital.

Una opción digital de tasa de interés es llamada **retrasada** si el día de maduración de la opción T y el día de pago T_1 difieren ($T_1 > T$). El precio en tiempo T_1 de una opción digital *retrasada* está dado por

$$DD(\Theta)_{T_1}[r_n(T,T+\delta); r_k; T_1] = \mathbb{I}_{\{\Theta r_n(T,T+\delta) > \Theta r_k\}}$$

nuevamente con $\Theta = 1$ para un call digital retrasado y $\Theta = -1$ para un put digital retrasado.
Es fácil notar que las opciones digitales estándar son un caso particular de las opciones digitales retrasadas (cuando $T_1 = T$).

Las **opciones digitales de rango retrasado** tiene un payoff igual a una unidad pagada en T_1 si y sólo si en la maduración de la opción T ($T \leq T_1$) la tasa de interés subyacente queda dentro de un rango pre-especificado. El precio al tiempo T_1 de la opción está dado por

$$DRD_{T_1}[r_n(T,T+\delta); r_l; r_u; T_1] = \mathbb{I}_{\{r_n(T,T+\delta) \in [r_l, r_u]\}}$$

Por argumentos de arbitraje, el precio en tiempo t ($t \in [0, T_1]$) de un call retrasado, un put retrasado y una opción de rango retrasado cumplen la siguiente paridad:

$$
\begin{aligned}
DRD_t[r_n(T,T+\delta); r_l; r_u; T_1] &= P(t,T_1) \\
&- DD(1)_t[r_n(T,T+\delta); r_u; T_1] - DD(-1)_t[r_n(T,T+\delta); r_l; T_1]
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Esto lo podemos demostrar de una manera muy sencilla. Se construyen dos portafolios:

* $A = P(t, T_1)$, un bono cupón cero con maduración en T_1

* $B = DRD + DD(1) + DD(-1)$, un call más un put y una opción de rango retrasados.

Ahora vemos cual es el valor a vencimiento (payoff) de ambos portafolios:

* $A_{T_1} = 1$
* $B_{T_1} = 1$ ya que si $r_n > r_u$, $r_n < r_l$ ó $r_n \in [r_l, r_u]$ el valor del portafolio es igual a 1.

Por lo tanto, sus valores en una fecha anterior t deben de ser iguales, y sumado a una hipótesis inicial de ausencia de arbitraje, hace que se cumpla la igualdad anterior.
También es importante recalcar que la siguiente paridad no siempre se cumple:

$$DD(1)_t[r_n(T, T+\delta); r_k; T_1] = P(t, T_1) - DD(-1)_t[r_n(T, T+\delta); r_k; T_1]$$

ya que se puede dar el caso en el que para un $t < T$, $r_n(T, T+\delta) = r_k$. La técnica que se introducirá para hacer la valuación sólo funciona para modelos que no producen puntos de masa en la distribución de $P(T, T+\delta)$ y así nos evitamos el caso en que se dé la igualdad.
Si se cumple lo anterior se tiene la paridad put-call para todo $t < T$ y se podrá hacer la valuación de cualquier opción digital si se obtiene una expresión del precio de un *call digital retrasado*. Para la valuación del call se empieza tomando la esperanza condicional respecto a la medida de riesgo neutral $\mathbb{P}$ del payoff descontado.
Para empezar con la valuación primero se define lo siguiente:

$$\zeta_t = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^P_{T_1}}|_{\mathscr{F}_t}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_t &= DD(1)_t[r_n(T, T+\delta); r_k; T_1] \\ &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1}{B_{T_1}} \mathbb{I}_{\{r_n(T,T+\delta) > r_k\}} | \mathscr{F}_t\right] = \frac{B_t}{\zeta_t} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\zeta_{T_1} \frac{1}{B_{T_1}} \mathbb{I}_{\{r_n(T,T+\delta) > r_k\}} | \mathscr{F}_t\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{B_t}{\frac{B_t P(0,T_1)}{P(t,T_1)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}} \left[\frac{B_{T_1} P(0,T_1)}{P(T_1,T_1)} \frac{1}{B_{T_1}} \mathbb{I}_{\{r_n(T,T+\delta)>r_k\}} | \mathscr{F}_t \right]$$

$$= \frac{P(t,T_1)}{P(0,T_1)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}} \left[P(0,T_1) \mathbb{I}_{\{r_n(T,T+\delta)>r_k\}} | \mathscr{F}_t \right]$$

$$= P(t,T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}} \left[\mathbb{I}_{\{r_n(T,T+\delta)>r_k\}} | \mathscr{F}_t \right]$$

Ahora nótese que el conjunto $\{r_n(T,T+\delta) > r_k\}$ puede ser visto de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \{r_n(T,T+\delta) > r_k\} &= \left\{ \tfrac{1}{\delta} \left(\tfrac{1}{P(T,T+\delta)} - 1 \right) > r_k \right\} \\ &= \left\{ P(T,T+\delta) < \tfrac{1}{r_k\delta+1} \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión anterior queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} D_t &= P(t,T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}} \left[\mathbb{I}_{\{P(T,T+\delta)<\frac{1}{r_k\delta+1}\}} | \mathscr{F}_t \right] \\ &= P(t,T_1) \times \\ &\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}} \left[\mathbb{I}_{\{\frac{P(t,T+\delta)}{P(t,T)} \exp\left(\int_t^T (\theta_s(\Sigma(s,T)) - \theta_s(\Sigma(s,T+\delta)))ds + \int_t^T \Sigma(s,T,T+\delta)dL_s\right) < \frac{1}{r_k\delta+1}\}} | \mathscr{F}_t \right] \\ &= P(t,T_1) \times \\ &\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}} \left[\mathbb{I}_{\{\frac{P(t,T+\delta)}{P(t,T)} \exp\left(-\int_t^T A(s,T,T+\delta)ds + \int_t^T \Sigma(s,T,T+\delta)dL_s\right) < \frac{1}{r_k\delta+1}\}} | \mathscr{F}_t \right] \end{aligned}$$

Por los incrementos independientes de L y sabiendo que $\frac{P(t,T+\delta)}{P(t,T)}$ es $\mathscr{F}_t$-medible, nuestra expresión queda definida de la siguiente manera

$$D_t = P(t,T_1) h\left(\frac{P(t,T+\delta)}{P(t,T)} \right) \tag{4.11}$$

con $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por

$$h(y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}} \left[\mathbb{I}_{\{y \exp\left(-\int_t^T A(s,T,T+\delta)ds + \int_t^T \Sigma(s,T,T+\delta)dL_s\right) < \frac{1}{r_k\delta+1}\}} \right]$$

Nótese también lo siguiente

$$\left\{y\exp\left(-\int_t^T A(s,T,T+\delta)ds+\int_t^T \Sigma(s,T,T+\delta)dL_s\right)<\tfrac{1}{r_k\delta+1}\right\}$$

$$=\left\{\exp\left(\int_t^T \Sigma(s,T,T+\delta)dL_s\right)<\frac{\frac{1}{r_k\delta+1}\exp\left(\int_t^T A(s,T,T+\delta)ds\right)}{y}\right\}$$

entonces

$$h(y)=\int_\Omega \mathbb{I}_{\{e^X<\frac{K}{y}\}}d\mathbb{P}_{T_1}^P=\int_\mathbb{R} \mathbb{I}_{\{e^x<\frac{K}{y}\}}d\mathbb{Q}(x)$$

con

$$X=\int_t^T \Sigma(s,T,T+\delta)dL_s$$

$$K=\frac{1}{r_k\delta+1}\exp\left(\int_t^T A(s,T,T+\delta)ds\right) \tag{4.12}$$

$\mathbb{Q}$ denota la distribución de X bajo la medida $\mathbb{P}_{T_1}^P$. Si se supone que esta distribución tiene densidad de Lebesgue γ entonces

$$\begin{aligned} h(y)&=\int_\mathbb{R} \mathbb{I}_{\{e^x<\frac{K}{y}\}}\gamma(x)dx\\ &=\int_\mathbb{R} f_y(0-x)\gamma(x)dx\\ &=(f_y*\gamma)(0)=V(0)\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $f_y(x)=\mathbb{I}_{\{e^{-x}<\frac{K}{y}\}}(x)$ y $V(\xi)=(f_y*\gamma)(\xi)$.

Se denota por $M_{T_1}^X$ a la función generadora de momentos de la variable aleatoria X con respecto a la medida $\mathbb{P}_{T_1}^P$. El siguiente teorema nos da la expresión analítica del precio de un call.

***Teorema* 4.3.** *Se supone que la distribución de X posee densidad de Lebesgue. Si se toma una $R>0$ tal que $M_{T_1}^X(-R)<\infty$ entonces*

$$D_t=\frac{1}{\pi}P(t,T_1)\int_0^\infty \Re\left(\left(\frac{P(t,T)}{P(t,T+\delta)}K\right)^{R+iu}\frac{1}{R+iu}M_{T_1}^X(-R-iu)\right)du$$

con

$$K = \frac{1}{\delta r_k + 1} \exp \int_t^T \left(\theta_s(\Sigma(s, T+\delta)) - \theta_s(\Sigma(s,T))\right) ds$$

La elección de una R en particular no tiene impacto directo en la valuación de la opción pero influye en la velocidad a la que la expresión es evaluada numéricamente.

Demostración. Se parte de la expresión (4.13) y de nuevo se aplica el Teorema 2.4 a las funciones $F_1(x) = f_y(x)$ y $F_2(x) = \gamma(x)$. Se comprueba que las funciones cumplen las restricciones del teorema, primero vemos que $x \longmapsto e^{-Rx} f_y(x)$ es acotada. Luego

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-Rx} |f_y(x)| dx &= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-Rx} \mathbb{I}_{\{e^{-x} < \frac{K}{y}\}}(x) dx \\
&= \int_{-\ln(\frac{K}{y})}^{\infty} e^{-Rx} dx = \left(\frac{K}{y}\right)^R \frac{1}{R} < \infty
\end{aligned}$$

además

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-Rx} |\gamma(x)| dx = M_{T_1}^X(-R) < \infty$$

Una vez cumplidas las restricciones, entonces se puede aplicar el Teorema 2.4 lo cual nos lleva al siguiente resultado

$$L[V](R+iu) = L[f_y](R+iu) L[\gamma](R+iu) \qquad (u \in \mathbb{R})$$

El teorema también nos dice que $z \longmapsto V(z)$ es continua y que la integral $\int e^{-Rz} V(z) dz$ es absolutamente convergente. Se puede aplicar el Teorema 2.5

$$\begin{aligned}
V(0) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{Y\to\infty} \int_{R-iY}^{R+iY} e^{z0} L[V](z) dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{Y\to\infty} \int_{-Y}^{Y} L[V](R+iu) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{Y\to\infty} \int_{-Y}^{Y} L[f_y](R+iu) L[\gamma](R+iu) du
\end{aligned}$$

si el límite existe. Se puede trabajar aún más con la integral, usando la relación $z + \overline{z} = 2\Re(z)$

$$\begin{aligned}
&\int_{-Y}^{Y} L[f_y](R+iu)L[\gamma](R+iu)du \\
&= \int_{-Y}^{0} L[f_y](R+iu)L[\gamma](R+iu)du + \int_{0}^{Y} L[f_y](R+iu)L[\gamma](R+iu)du \\
&= \int_{0}^{Y} \overline{L[f_y](R+iu)L[\gamma](R+iu)}du + \int_{0}^{Y} L[f_y](R+iu)L[\gamma](R+iu)du \\
&= \int_{0}^{Y} 2\Re\left(L[f_y](R+iu)L[\gamma](R+iu)\right)du
\end{aligned}$$

por lo tanto, la expresión anterior queda de la siguiente manera

$$V(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{Y\to\infty} \int_{0}^{Y} \Re\left(L[f_y](R+iu)L[\gamma](R+iu)\right)du$$

También se sabe que

$$L[\gamma](R+iu) = M_{T_1}^{X}(-R-iu)$$

como $R > 0$, por el resultado anterior

$$L[f_y](R+iu) = \frac{1}{R+iu}\left(\frac{K}{y}\right)^{R+iu}$$

Por lo tanto, con ayuda de las expresiones (4.11), (4.12) y (4.13), y recordando el término de deriva $A(s, T, T+\delta) = \theta_s(\Sigma(s, T+\delta)) - \theta_s(\Sigma(s, T))$ se obtiene la expresión que se estaba buscando para un call digital retrasado

$$\begin{aligned}
D_t &= P(t, T_1)h\left(\frac{P(t, T+\delta)}{P(t, T)}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}P(t, T_1)\int_{0}^{\infty} \Re\left(\left(\frac{P(t, T)}{P(t, T+\delta)}K\right)^{R+iu}\frac{1}{R+iu}M_{T_1}^{X}(-R-iu)\right)du
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.4. *Bajo los supuestos del Teorema 4.3 se puede obtener una expresión analítica explícita para* $M_{T_1}^X$. *Para una* $u \in \mathbb{R}$

$$M_{T_1}^X(-R-iu) = \exp \int_t^T \left[\theta_s(g_s(-R-iu)) - \theta_s(g_s(0))\right] ds \tag{4.14}$$

con $g_s(z) = z\Sigma(s,T,T+\delta) + \Sigma(s,T_1)$

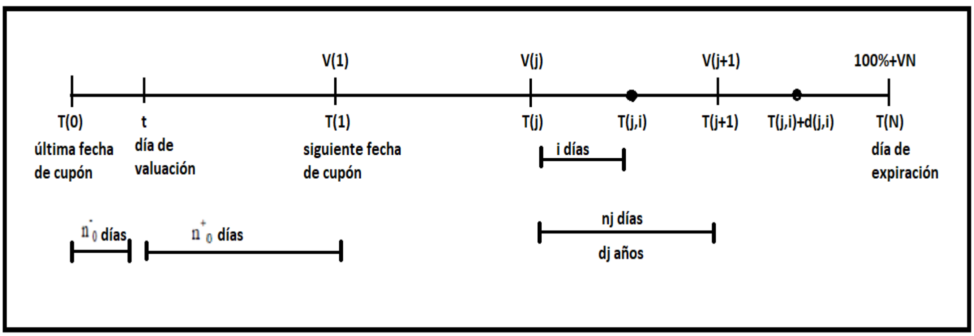
Demostración. Por definición se sabe que

$$\begin{aligned}
M_{T_1}^X(z) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_1}}\left(e^{zX}\right) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_1}}\left[\exp(z\int_t^T \Sigma(s,T,T+\delta)dL_s)\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{P}_{T_1}}{d\mathbb{P}}\exp(z\int_t^T \Sigma(s,T,T+\delta)dL_s)\right] \\
&= \exp\left(-\int_0^{T_1} A(s,T_1)ds\right) \times \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(z\int_t^T \Sigma(s,T,T+\delta)dL_s + \int_0^{T_1}\Sigma(s,T_1)dL_s\right)\right] \\
&= \exp\left(-\int_t^T A(s,T_1)ds\right) \times \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_t^T (z\Sigma(s,T,T+\delta) + \Sigma(s,T_1))dL_s\right)\right] \\
&= \exp\left(-\int_t^T \theta_s(g_s(0))ds\right)\exp\left(\int_t^T \theta_s(g_s(z))ds\right)
\end{aligned}$$

con $g_s(z) = z\Sigma(s,T,T+\delta) + \Sigma(s,T_1)$ lo cual termina la demostración. □

4.5. Notas de rango

El objetivo ahora es poder llegar a fórmulas para valuar notas de rango en el modelo de estructura temporal de Lévy.
Nos situaremos en el tiempo t, el día de valuación de la nota de rango. Se considera un **bono bala**, bono que no se puede redimir o amortizar antes de la fecha de maduración, habiendo tenido su previa fecha de pago de cupón en $T_0(\leq t)$ y que tiene sus N futuros pagos de cupón en los tiempos T_{j+1} con $j = 0, ..., N-1$. Basados en la convención de un año comercial, denotamos por $n_j(\delta_j)$ al número de días (años) entre los tiempos T_j y T_{j+1}. Para el periodo actual del cupón se define $n_0 = n_0^- + n_0^+$, donde $n_0^-(n_0^+)$ representa el número de días entre T_0 y t (t y T_1). Finalmente se define por $T_{j,i}$ la fecha que corresponde a $i-$días después del tiempo T_j y por $\delta_{j,i}$ al tamaño del periodo de capitalización (en años), período comprendido entre los puntos en que el interés se paga o cuando se añade al principal, que inicia en el tiempo $T_{j,i}$.
El siguiente diagrama resume lo definido anteriormente.



Para valuar notas de rango flotante primero se tendrá que realizar un cambio entre la medida spot a una medida forward adecuada. Posteriormente se volverá a realizar un cambio a la medida forward ajustada, de esta manera no se tendrá que trabajar con la distribución conjunta de dos variables aleatorias.

Definición 4.1. *Para una nota de rango flotante, el valor del* $(j+1)$*-ésimo cupón, en tiempo* T_{j+1}*, es igual a*

$$\upsilon_{j+1}(T_{j+1}) = \frac{r_n(T_j, T_j + \delta_j) + s_j}{D_j} H(T_j, T_{j+1})$$

donde s_j *representa la propagación sobre la tasas de interés de referencia pagada por el bono durante el* $(j+1)$*-ésimo periodo de capitalización,* D_j *es el número de días en el año para el* $(j+1)$*-ésimo periodo de capitalización, y por último*

$$H(T_j, T_{j+1}) = \sum_{i=1}^{n_j} \mathbb{I}_{\{r_l(T_{j,i}) \leq r_n(T_{j,i}, T_{j,i}+\delta_{j,i}) \leq r_u(T_{j,i})\}}$$

denota el número de días , en el $(j+1)$*-ésimo periodo de capitalización, que la tasas de interés de referencia cae dentro de un rango pre-especificado* $[r_l(T_{j,i}), r_u(T_{j,i})]$*, para el i-ésimo día del* $(j+1)$*-ésimo periodo de capitalización.*

En consecuencia, el valor a tiempo t de la nota de rango flotante, que se representa como la suma de los cupones más el principal en tiempo t, está dado por

$$FlRN(t) = P(t, T_N) + \sum_{j=0}^{N-1} \upsilon_{j+1}(t)$$

donde $P(t, T_N)$ corresponde al valor descontado del pago final de 1.
Se empieza haciendo la valuación del primer cupón, de antemano se sabe que $r_n(T_0, T_0 + \delta_0)$ es conocido en tiempo t o, matemáticamente hablando, medible con respecto a $\mathscr{F}_t$.

$$
\begin{aligned}
\upsilon_1(t) &= B_t \mathbb{E}\left[\frac{1}{B_{T_1}} \frac{r_n(T_0, T_0+\delta_0)+s_0}{D_0} H(T_0,T_1)|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \frac{r_n(T_0, T_0+\delta_0)+s_0}{D_0} \frac{B_t}{\zeta_t} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\frac{\zeta_{T_1}}{B_{T_1}} H(T_0,T_1)|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \frac{r_n(T_0, T_0+\delta_0)+s_0}{D_0} \frac{B_t}{\frac{B_t P(0,T_1)}{P(t,T_1)}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\frac{\frac{B_{T_1} P(0,T_1)}{P(T_1,T_1)}}{B_{T_1}} H(T_0,T_1)|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \frac{r_n(T_0, T_0+\delta_0)+s_0}{D_0} P(t,T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[H(T_0,T_1)|\mathscr{F}_t\right]
\end{aligned}
$$

Ahora se trabaja únicamente con la esperanza y se nota lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[H(T_0,T_1)|\mathscr{F}_t\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\sum_{i=1}^{n_0} \mathbb{I}_{\{r_l(T_{0,i}) \le r_n(T_{0,i}, T_{0,i}+\delta_{0,i}) \le r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\sum_{i=1}^{n_0^-} \mathbb{I}_{\{r_l(T_{0,i}) \le r_n(T_{0,i}, T_{0,i}+\delta_{0,i}) \le r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right] \\
&+ \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\sum_{i=n_0^-+1}^{n_0} \mathbb{I}_{\{r_l(T_{0,i}) \le r_n(T_{0,i}, T_{0,i}+\delta_{0,i}) \le r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right] \\
&= H(T_0,t) + \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\sum_{i=n_0^-+1}^{n_0} \mathbb{I}_{\{r_l(T_{0,i}) \le r_n(T_{0,i}, T_{0,i}+\delta_{0,i}) \le r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right]
\end{aligned}
$$

La suma de adentro de la primera esperanza sale por ser una expresión medible con respecto a $\mathscr{F}_t$ y por definición es igual a $H(T_0,t)$. Entonces regresando al término anterior

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \frac{r_n(T_0, T_0+\delta_0)+s_0}{D_0}\Bigg(P(t,T_1)H(T_0,t)+ \\
&\sum_{i=n_0^-+1}^{n_0} P(t,T_1)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\mathbb{I}_{\{r_l(T_{0,i})\le r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})\le r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right]\Bigg) \\
&= \frac{r_n(T_0, T_0+\delta_0)+s_0}{D_0}\Bigg(P(t,T_1)H(T_0,t)+ \\
&\sum_{i=n_0^-+1}^{n_0} DRD_t\left[r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i});r_l(T_{0,i});r_u(T_{0,i});T_1\right]\Bigg)
\end{aligned}$$

El último paso viene dado por la expresión (4.10), y se sabe que

$$\begin{aligned}
&DRD_t\left[r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i});r_l(T_{0,i});r_u(T_{0,i});T_1\right] \\
&= P(t,T_1) - DD(1)_t[r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i});r_u(T_{0,i});T_1] \\
&\quad -DD(-1)_t[r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i});r_l(T_{0,i});T_1] \\
&= P(t,T_1)(1-\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\mathbb{I}_{\{r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})>r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right] \\
&\quad -\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\mathbb{I}_{\{r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})<r_l(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right])
\end{aligned}$$

donde las esperanzas de indicadoras se pueden interpretar como probabilidades condicionales de que pase el evento en la indicadora dada la información que se tiene hasta t. Notar que si eso se cumple entonces

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\mathbb{I}_{\{r_l(T_{0,i})\le r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})\le r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right] \\
&+\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\mathbb{I}_{\{r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})>r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\mathbb{I}_{\{r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})<r_l(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right].
\end{aligned}$$

Por último despejando $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\mathbb{I}_{\{r_l(T_{0,i})\le r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})\le r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right]$ de la igualdad anterior se obtiene la expresión que se necesita

$$DRD_t = P(t,T_1)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_1}}\left[\mathbb{I}_{\{r_l(T_{0,i})\le r_n(T_{0,i},T_{0,i}+\delta_{0,i})\le r_u(T_{0,i})\}}|\mathscr{F}_t\right]$$

Para la valuación de los cupones siguientes, y tomando en cuenta la expresión (4.9), se realiza lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\upsilon_{j+1}(t) &= B_t \mathbb{E}\left[\frac{1}{B_{T_{j+1}}}\frac{r_n(T_j,T_{j+1})+s_j}{D_j}H(T_j,T_{j+1})|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \frac{B_t}{\zeta_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_{j+1}}}\left[\zeta_{Tj+1}\frac{1}{B_{T_{j+1}}}\frac{r_n(T_j,T_{j+1})+s_j}{D_j}H(T_j,T_{j+1})|\mathscr{F}_t\right] \\
&= P(t,T_{j+1})\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_{j+1}}}\left[\frac{r_n(T_j,T_{j+1})+s_j}{D_j}H(T_j,T_{j+1})|\mathscr{F}_t\right] \\
&= P(t,T_{j+1})\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_{j+1}}}\left[\frac{\frac{1}{\delta_j}\left(\frac{1}{P(T_j,T_{j+1})}-1\right)+s_j}{D_j}H(T_j,T_{j+1})|\mathscr{F}_t\right] \\
&= P(t,T_{j+1})\times \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_{j+1}}}\left[\left(\left(\frac{s_j}{D_j}-\frac{1}{\delta_j D_j}\right)+\left(\frac{1}{P(T_j,T_{j+1})}\frac{1}{\delta_j D_j}\right)\right)H(T_j,T_{j+1})|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \left(\frac{s_j}{D_j}-\frac{1}{\delta_j D_j}\right)P(t,T_{j+1})\times \\
&\sum_{i=1}^{n_j}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_{j+1}}}\left[\mathbb{I}_{\{r_l(T_{j,i})\leq r_n(T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i})\leq r_u(T_{j,i})\}}|\mathscr{F}_t\right] \\
&+ \frac{P(t,T_{j+1})}{\delta_j D_j}\times \\
&\sum_{i=1}^{n_j}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_{j+1}}}\left[\frac{1}{P(T_j,T_{j+1})}\mathbb{I}_{\{r_l(T_{j,i})\leq r_n(T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i})\leq r_u(T_{j,i})\}}|\mathscr{F}_t\right] \\
&= \upsilon^1_{j+1}(t)+\upsilon^2_{j+1}(t)
\end{aligned}
$$

Para evaluar el primer sumando $\upsilon^1_{j+1}(t)$ nótese que se tiene un resultado parecido al anterior, por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
v^1_{j+1}(t) = &\left(\frac{s_j}{D_j} - \frac{1}{\delta_j D_j}\right) \times \\
&\sum_{i=1}^{n_j} P(t, T_{j+1}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_{j+1}}} \left[\mathbb{I}_{\{r_l(T_{j,i}) \leq r_n(T_{j,i}, T_{j,i}+\delta_{j,i}) \leq r_u(T_{j,i})\}} | \mathscr{F}_t \right] \\
&= \left(\frac{s_j}{D_j} - \frac{1}{\delta_j D_j}\right) \sum_{i=1}^{n_j} DRD_t \left[r_n(T_{j,i}, T_{j,i} + \delta_{j,i}); r_l(T_{j,i}); r_u(T_{j,i}); T_{j+1} \right]
\end{aligned}
$$

Para poder evaluar el segundo sumando $v^2_{j+1}(t)$ se hará un cambio entre la medida forward $\mathbb{P}_{T_{j+1}}$ y la medida forward ajustada $\mathbb{P}_{T_j, T_{j+1}}$. Así no se tendrá que trabajar con la distribución conjunta de las variables aleatorias $P(T_j, T_{j+1})$ y $r_n(T_{j,i}, T_{j,i} + \delta_{j,i})$. Ahora se define

$$
\zeta_t = \frac{d\mathbb{P}^P_{T_{j+1}}}{d\mathbb{P}_{T_j, T_{j+1}}} |_{\mathscr{F}_t} = \frac{P(0, T_j) P(t, T_{j+1})}{P(0, T_{j+1}) P(t, T_j)}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
v^2_{j+1}(t) = &\sum_{i=1}^{n_j} \frac{P(t, T_{j+1})}{\delta_j D_j} \times \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}^P_{T_{j+1}}} \left[\frac{1}{P(T_j, T_{j+1})} \mathbb{I}_{\{r_l(T_{j,i}) \leq r_n(T_{j,i}, T_{j,i}+\delta_{j,i}) \leq r_u(T_{j,i})\}} | \mathscr{F}_t \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n_j} \frac{P(t, T_{j+1})}{\delta_j D_j} \frac{1}{\zeta_t} \times \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_j, T_{j+1}}} \left[\zeta_{T_j} \frac{1}{P(T_j, T_{j+1})} \mathbb{I}_{\{r_l(T_{j,i}) \leq r_n(T_{j,i}, T_{j,i}+\delta_{j,i}) \leq r_u(T_{j,i})\}} | \mathscr{F}_t \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n_j} \frac{P(t, T_j)}{\delta_j D_j} \times \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_j, T_{j+1}}} \left[\mathbb{I}_{\{r_l(T_{j,i}) \leq r_n(T_{j,i}, T_{j,i}+\delta_{j,i}) \leq r_u(T_{j,i})\}} | \mathscr{F}_t \right]
\end{aligned}
$$

Se puede empezar a ver que del lado derecho de la igualdad la expresión de los sumandos es muy similar a la del valor en t de una opción digital, la única diferencia es que la esperanza ahora está bajo la medida forward ajustada. Vamos a usar un método similar al que se usó en la valuación de opciones digitales. Se define

$$\upsilon_{j+1}^2(t) = \frac{P(t,T_j)}{\delta_j D_j} \sum_{i=1}^{n_j} D_t^{j,i}$$

donde, por las expresiones (3.9) y (4.9)

$$\begin{aligned} D_t^{j,i} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_j,T_{j+1}}} \left[\mathbb{I}_{\{r_l(T_{j,i}) \le r_n(T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i}) \le r_u(T_{j,i})\}} | \mathscr{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_j,T_{j+1}}} \left[\mathbb{I}_{\{\frac{1}{\delta_{j,i} r_u(T_{j,i})+1} \le P(T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i}) \le \frac{1}{\delta_{j,i} r_l(T_{j,i})+1}\}} | \mathscr{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_j,T_{j+1}}} \left[\mathbb{I}_{\{\underline{K}^{j,i} \le \frac{P(t,T_{j,i}+\delta_{j,i})}{P(t,T_{j,i})} \exp(X^{j,i}) \le \overline{K}^{j,i}\}} | \mathscr{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$D_t^{j,i} = h^{j,i}\left(\frac{P(t,T_{j,i}+\delta_{j,i})}{P(t,T_{j,i})}\right)$$

con $h^{j,i} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$h^{j,i}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{\frac{1}{y}\underline{K}^{j,i} \le e^x \le \frac{1}{y}\overline{K}^{j,i}\}} d\mathbb{Q}(x)$$

donde

$$X^{j,i} = \int_t^{T_{j,i}} \Sigma(s,T_{j,i},T_{j,i}+\delta_{j,i}) dL_s$$

$$\underline{K}^{j,i} = \frac{1}{\delta_{j,i} r_u(T_{j,i})+1} \exp \int_t^{T_{j,i}} \left(\theta_s(\Sigma(s,T_{j,i}+\delta_{j,i})) - \theta_s(\Sigma(s,T_{j,i}))\right) ds$$

$$\overline{K}^{j,i} = \frac{1}{\delta_{j,i} r_l(T_{j,i})+1} \exp \int_t^{T_{j,i}} \left(\theta_s(\Sigma(s,T_{j,i}+\delta_{j,i})) - \theta_s(\Sigma(s,T_{j,i}))\right) ds$$

además $\mathbb{Q}$ denota la distribución de $X^{j,i}$ con respecto a la medida $\mathbb{P}_{T_j,T_{j+1}}$. Para poder simplificar las operaciones se van a fijar los superíndices j,i

en todas las expresiones y simplemente se escribirá $T, \delta, D_t, h, X, \overline{K}, \underline{K}$. Se denota como $M^X_{T_j,T_{j+1}}$ a la función generadora de momentos de la variable aleatoria X con respecto a la medida $\mathbb{P}_{T_j,T_{j+1}}$. Lo que se necesita es una fórmula que nos ayude a valuar D_t, automáticamente nos daría una expresión para valuar notas de rango flotante.

***Teorema* 4.5.** *Supóngase que la distribución de X tiene densidad de Lebesgue. Si se elige una $R > 0$ tal que $M^X_{T_j,T_{j+1}}(-R) < \infty$, entonces*

$$D_t = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\left(\left(\frac{P(t,T)}{P(t,T+\delta)}\overline{K}\right)^{R+iu}\frac{1}{R+iu}M^X_{T_j,T_{j+1}}(-R-iu)\right)du$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Re\left(\left(\frac{P(t,T)}{P(t,T+\delta)}\underline{K}\right)^{R+iu}\frac{1}{R+iu}M^X_{T_j,T_{j+1}}(-R-iu)\right)du$$

donde

$$\overline{K} = \frac{1}{\delta r_l(T)+1}\exp\int_t^T \left(\theta_s(\Sigma(s,T+\delta)) - \theta_s(\Sigma(s,T))\right)ds$$
$$\underline{K} = \frac{1}{\delta r_u(T)+1}\exp\int_t^T \left(\theta_s(\Sigma(s,T+\delta)) - \theta_s(\Sigma(s,T))\right)ds$$

Demostración. Para la demostración también se utilizarán métodos de transformadas de Laplace de convoluciones, ésta en particular será muy parecida a la demostración que se hizo en la parte de opciones digitales. Primero notar lo siguiente

$$h(y) = \int \mathbb{I}_{\{e^x \leq \frac{\overline{K}}{y}\}}d\mathbb{Q}(x) - \int \mathbb{I}_{\{e^x < \frac{\underline{K}}{y}\}}d\mathbb{Q}(x)$$

Como se supuso que X tiene densidad, a saber γ, entonces

$$\begin{aligned}
h(y) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{e^x \leq \frac{\overline{K}}{y}\}}\gamma(x)dx - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{e^x < \frac{\underline{K}}{y}\}}\gamma(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^1_y(0-x)\gamma(x)dx - \int_{\mathbb{R}} f^2_y(0-x)\gamma(x)dx \\
&= (f^1_y * \gamma)(0) - (f^2_y * \gamma)(0) \\
&= V_1(0) - V_2(0)
\end{aligned}$$

donde $f_y^1 = \mathbb{I}_{\{e^{-x} \leq \frac{\overline{K}}{y}\}}$ y $f_y^2 = \mathbb{I}_{\{e^{-x} < \frac{\underline{K}}{y}\}}$. Como la transformada de Laplace de una resta de funciones es igual a la resta de las trasformadas, entonces se aplicarán los Teoremas 2.4 y 2.5 a cada convolución por separado.

Se empieza con la convolución V_1 y nuevamente nombramos como $F_1(x) = f_y^1(x)$ y $F_2(x) = \gamma(x)$. Lo que sigue es probar que estas funciones cumplen con las restricciones del Teorema 2.4. Primero

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-Rx}|f_y^1(x)|dx &= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-Rx}\mathbb{I}_{\{e^{-x} \leq \frac{\overline{K}}{y}\}}(x)dx \\ &= \int_{-\ln(\frac{\overline{K}}{y})}^{\infty} e^{-Rx}dx = \left(\frac{\overline{K}}{y}\right)^R \frac{1}{R} < \infty\end{aligned}$$

también

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-Rx}|\gamma(x)|dx = M^X_{T_j,T_{j+1}}(-R)$$

por lo tanto los requisitos del teorema se cumplen, entonces se obtiene que

$$L[V_1](R+iu) = L[f_y^1](R+iu)L[\gamma](R+iu) \qquad (u \in \mathbb{R})$$

Por este resultado se sabe que se cumplen también los requisitos del Teorema 2.5 entonces

$$\begin{aligned}V_1(0) &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{Y\to\infty}\int_{R-iY}^{R+iY} e^{z0}L[V_1](z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{Y\to\infty}\int_{-Y}^{Y} L[V_1](R+iu)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{Y\to\infty}\int_{-Y}^{Y} L[f_y^1](R+iu)L[\gamma](R+iu)du\end{aligned}$$

Una vez más usando la igualdad $z + \overline{z} = 2\Re(z)$ se obtiene

$$V_1(0) = \frac{1}{\pi}\lim_{Y\to\infty}\int_0^Y \Re\left(L[f_y^1](R+iu)L[\gamma](R+iu)\right)du$$

por último, los siguientes resultados son iguales a los anteriores

$$L[\gamma](R+iu) = M^X_{T_j,T_{j+1}}(-R-iu), \qquad L[f^1_y](R+iu) = \frac{1}{R+iu}\left(\frac{\overline{K}}{y}\right)^{R+iu}$$

entonces sustituyendo estos resultados en la expresión anterior y recordando que el término de deriva $A(s,T,T+\delta) = \theta_s(\Sigma(s,T+\delta)) - \theta_s(\Sigma(s,T))$ se obtiene la primera mitad de la fórmula para D_t.

Para la segunda mitad, el procedimiento es exactamente el mismo pero ahora sobre la convolución V_2 y nombrando $F_1(x) = f^2_y(x)$ y $F_2(x) = \gamma(x)$. De igual manera se verifica que se cumplan las restricciones del Teorema 2.4. Como las funciones son prácticamente las mismas, la única diferencia es que f^2_y está en términos de $\underline{K}$, entonces es fácil notar que se cumplen las restricciones. Así se puede obtener $L[V_2](R+iu) = L[f^2_y](R+iu)L[\gamma](R+iu)$, aplicar el teorema (2.5) y hacer las mismas cuentas que antes para obtener el término que nos falta.
Con $L[f^2_y](R+iu) = \frac{1}{R+iu}\left(\frac{\underline{K}}{y}\right)^{R+iu}$ así se obtiene el resultado final buscado.
$\square$

Con este teorema únicamente se ha encontrado una expresión para el valor de D_t. Para tener una expresión de valuación para una nota de rango recordamos que el valor del primer cupón se obtenía de manera similar a lo que ya se había visto en opciones digitales y utilizando la expresión que se dedujo anteriormente. A esto se le suma el valor de los cupones siguientes, ese valor nos lo da la expresión $v_{j+1}(t)$ que a su vez se dividía en dos sumandos, el valor del primero de ellos ($v^1_{j+1}(t)$) también se puede obtener haciendo uso de la fórmula de opciones digitales. Hasta el segundo sumando ($v^2_{j+1}(t)$) es donde se utiliza la nueva expresión que se consiguió para $D^{j,i}_t$.
El siguiente teorema nos da una expresión explícita para la función generadora de momentos $M^X_{T_j,T_{j+1}}$ que será de gran ayuda a la hora de hacer la valuación.

***Teorema* 4.6.** *Bajo los supuestos del teorema anterior, tenemos que para una $u \in \mathbb{R}$*

$$M^X_{T_j,T_{j+1}}(-R-iu) = \exp\int_t^T \left[\theta_s(g_s(-R-iu)) - \theta_s(g_s(0))\right] ds$$

con $g_s(z) = z\Sigma(s, T, T + \delta) + \Sigma(s, T_j)\mathbb{I}_{\{s \leq T_j\}} + \Sigma(s, T_{j+1})\mathbb{I}_{\{T_j < s\}}$.

Capítulo 5

Conclusión

A lo largo de cuatro capítulos se desarrolló un método de valuación para derivados de deuda basado en los trabajos realizados por David Heath, Robert A. Jarrow y Andrew Morton.
Empezamos buscando un modelo que describiera la dinámica del subyacente principal, el precio un bono cupón cero, y llegamos a fórmulas explícitas para los instrumentos más negociados en el mercado. Una buena manera de terminar con este trabajo sería contestando las siguientes preguntas: ¿Los trabajos desarrollados por HJM son una buena alternativa para estudiar la dinámica del precio del subyacente?, ¿Es el método de valuación presentado en la tesis una manera eficiente de conocer el precio de derivados?.

Para empezar a responder es importante recordar que los trabajos originales desarrollados por HJM tenían como base de su modelación un browniano d-dimensional estándar. En el trabajo el browniano fue remplazado por un proceso de Lévy no homogéneo, es decir, con incrementos independientes pero no estacionarios. Debido a esto, a cambio de que alguno de nuestros cálculos se volvieron un poco más complicados, tenemos un proceso más maleable y adaptable a las situaciones que se nos presentan, como saltos en el precio del subyacente.

Nos centramos directamente en la modelación de tasas forward, con ayuda del proceso de difusión dado por (3.1). La parte más importante de

este modelo está en reconocer que existe una relación entre el término de deriva $\alpha(s,T)$ y el término de volatilidad $\sigma(s,T)$.
Una vez que tuvimos la dinámica de las tasas forward, encontrar fórmulas para el precio de un bono cupón cero, y para la cuenta de banco libre de riesgo fue relativamente sencillo, mucho gracias a la relación que hay entre los términos y que se trabajo desde el primer capítulo.
Desde mi punto de vista es una manera bastante atinada de modelar por dos razones: la primera porque fácilmente pudimos encontrar una expresión para el precio de un bono cupón cero a lo largo del tiempo, el cual era nuestro principal objetivo. La segunda porque de esta manera podemos separar la expresión en un término determinista y uno estocástico dado por la integral estocástica de la volatilidad con respecto al proceso de Lévy no homogéneo, y nos evita tener que trabajar con distribuciones conjuntas.
Sabemos que el precio de un derivado se obtiene sacando la esperanza del payoff descontado bajo una medida martingala, pero el hecho de poder ver esa esperanza como la convolución de dos medidas de probabilidad, ayudado de las transformaciones integrales vistas en el Capítulo 2 y de las técnicas de cambio de medida, nos han facilitado mucho el llegar a fórmulas explícitas para todos los instrumentos planteados, y siempre utilizando el mismo razonamiento y las mismas técnicas.
Al final nuestra primicia inicial de que las fórmulas de valuación de instrumentos complejos se pudieran obtener trabajando sus expresiones y simplificándolas para verlas como fórmulas más sencillas de calls y puts, fue absolutamente cierta. También es cierto que entre más complicado era el instrumento per se, más eran los cálculos necesarios para simplificar las expresiones y poder utilizar nuestro método, como en el caso de Notas de rango.

Sin duda es una buena manera de modelar el precio del subyantente y un gran método de valuación que no se limita a los derivados vistos en el trabajo. Las aplicaciones potenciales que puede tener el método desarrollado son muy grandes. Únicamente dentro de los derivados de deuda existen aún una gran cantidad de instrumentos que valdría la pena estudiar. Incluso podríamos extender la idea a derivados de otro tipo como: derivados sobre acciones, derivados de tipo de cambio, derivados que incorporen riesgo de crédito, étc.

Bibliografía

[1] David Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus.* Cambridge university press, 2009.

[2] Tomas Björk. *Arbitrage theory in continuous time.* Oxford university press, 2009.

[3] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.

[4] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit.* Springer Science & Business Media, 2007.

[5] Samuel A Broverman. *Mathematics of investment and credit.* Actex Publications, 2010.

[6] J Michael Harrison and David M Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic theory*, 20(3):381–408, 1979.

[7] J Michael Harrison and Stanley R Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic processes and their applications*, 11(3):215–260, 1981.

[8] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. *Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation.* JSTOR, 1992.

[9] Thomas SY Ho and SANG-BIN LEE. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *the Journal of Finance*, 41(5):1011–1029, 1986.

[10] Jean Jacod and Albert Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288. Springer Science & Business Media, 2013.

[11] Sebastian Raible. *Lévy processes in finance: Theory, numerics, and empirical facts*. PhD thesis, PhD thesis, Universität Freiburg i. Br, 2000.

[12] Cont Rama and Tankov Peter. Financial modelling with jump processes. *Rama Cont, Peter Tankov, Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall/CRC*, 2004.

[13] Ken-Iti Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge university press, 1999.